UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Torgašev N. Aleksandar

NUMERIČKI RANG I SPEKTAR LINEARNIH OPERATORA U VAKSOVIM PROSTORIMA

-Doktorska disertacija-

Beograd, 1975.god.

SADRŽAJ:

DEO /GLAVA/: STRANA:

PREDGOVOR

1. Problematika rada, kratak istorijski prikaz.

U radu se razvija teorija Hilbertovih i Banahovih prostora nad telom kvaterniona, umesto uobičajenog tela kompleksnih brojeva.

Kako se takva teorija razvija paralelno odgovarajućoj (običnoj) teoriji linearnih prostora nad poljem kompleksnih brojeva, u njoj dakle postavljamo i rešavamo potpuno iste (ili slične) probleme kao u običnoj teoriji, no dobijeni rezultati a takođe i metod izvođenja mogu se razlikovati ili pak biti potpuno analogni standardnim.

Uopšte, posmatrane probleme po sličnosti rezultata i metoda izvođenja odgovarajućim u kompleksnim prostorima, grubo možemo svrstati u tri grupe:

/1/ one, čiji je rezultat kao i metod izvođenja potpuno analogan običnom;

/2/ one, čiji je rezultat analogan običnom (a metod izvođenja se razlikuje, ili predstavlja primenu običnog);

/3/ one, čiji se rezultat razlikuje od odgovarajućeg običnog (a time često i metod izvođenja).

Od većeg interesa su očigledno problemi poslednje dve grupe, i posebno trećeg tipa, koji se dakle mogu smatrati karakterističnim za kvaternionske prostore.

Začetnik teorije Hilbertovih prostora nad telom kvaterniona i prvi koji je sistematski ispitivao linearne operatore u ovakvim prostorima, bio je poznati nemački matematičar Oswald Teichmüller, čiji je fundamentalni rad [95], objavljen 1936.god., predstavljao doktorsku disertaciju autora. Ovakve prostore Tajhmiler naziva Wachs-ovim, u čast svog profesora H.Wachs-a, koji mu sugerira navedenu problematiku.

Navedeni rad Tajhmilera, predstavljao je inače polaznu tačku našeg rada.

U ovom radu, Tajhmiler između ostalog razvija i teoriju simetričnih i koso-simetričnih (ograničenih i neograničenih) linearnih operatora (koji ovde nisu u jednostavnoj međusobnoj vezi kao u standardnoj teoriji), teoriju normalnih linearnih operatora, neke zadatke produženja simetričnih operatora, i posebno izvodi jednu vrstu spektralne dekompozicije normalnih operatora, dakle rešava fundamentalne, ključne probleme teorije.

No bilo je interesantno da Tajhmiler, osim u konačno-dimenzionalnom slučaju, ne uvodi eksplicitno <u>spektar operatora</u> , a takođe ne posmatra ni pitanja vezana za numerički rang operatora itd. To vreme je zapravo period, kada i u kompleksnim Hilbertovim prostorima, tek počinje da se razvija problematika vezana za numerički rang operatora.

Takođe je bilo jasno da se, zbog napretka koji je u međuvremenu postignut u običnoj teoriji Hilbertovih prostora, osim problema koje je postavio i rešio Tajhmiler, mogu posmatrati i drugi, dakle <u>razviti</u> i <u>dopuniti</u> problematika posmatrana u istom radu.

Iz razvijanja takvih problema nastao je i naš rad, a o drugim radovima iz ove problematike (koji bi eventualno bili navedeni u enciklopedijskim knjigama iz Funkcionalne analize, napr. N.Dunford,J.T.Schwartz - I,II,III), autoru nije bilo poznato.

Kada je veći deo rada već bio napisan, referent prof. dr. Svetozar Kurepa, ukazao je autoru na rad indijskog matematičara K.Viswanath-a [102], objavljen 1971. godine, i eventualno rezultate njegove teze, posle čega se pokazalo sledeće:

Teorija kvaternionskih Hilbertovih prostora, bar sa aspekta kvantne mehanike, posle fundamentalnog rada Tajhmilera, poseban razvoj doživela je u radovima matematičara-fizičara (J.Math.Phys. - [23],[23a] , i drugi radovi citirani u [102])-šezdesetih godina, a spektralna teorija posebno u radu Visvanata [102] , kao i njegovoj disertaciji.

U istom radu K.Visvanat daje spektralnu dekompoziciju normalnih operatora, izgrađuje funkcionalni račun normalnih operatora, teoriju multipliciteta, reprezentaciju kompaktnih grupa u kvatrnionskim Hilbertovim prostorima itd.

No bilo je interesantno da, u istom radu, mada ponavlja mnoge rezultate Tajhmilera, Visvanat ne citira navedeni rad [95] (iako navodi rad D.Finkelsteina i dr. [23] , gde se Tajhmilerov rad navodi - mada dosta neugledno, sa citiranjem samo početne strane rada i pogrešnim imenom časopisa!).

Stoga je opravdano pretpostaviti da Visvanat, realizujući svoj rad, za prvobitni Tajhmilerov rad eventualno nije ni znao! Ovo tim pre što na prvoj strani rada [102] kaže:"...U literaturi do sada nije postojalo sistematsko proučavanje operatora na kvaternionskim Hilbertovim prostorima."!

On, slično kao i Tajhmiler, ispituje fundamentalne probleme spektralne teorije linearnih operatora u kvaternionskim Hilbertovim prostorima, ostavljajući mnoge periferne i posebno probleme vezane za numerički rang operatora (itd.) - - po strani.

Stoga, kao što su naši rezultati komplementarni i dopunjuju rad Tajhmilera, izgleda da je isti slučaj i sa radom Visvanata [102] i njegovom tezom.

Osim toga, kako u većem delu ovog rada posmatramo uopštene linearne operatore (posmatrane u radovima P.Miličića [50] , [51] i pre toga u radu [23]), takođe u izvesnoj meri uopštavamo i neke rezultate Tajhmilera i Visvanata koji posmatraju samo takve linearne operatore.

Kao razliku više, u odnosu na prostore posmatrane u navedenim radovima, napominjemo da posmatramo nešto specijalnije kvaternionske prostore; naime, pretpostavljamo da svaki takav prostor, osim strukture levog vektorskog prostora, poseduje takođu i odgovarajuću desnu strukturu (koja zadovoljava određene dodatne pretpostavke), što u slučaju nekomutativnog tela skalara nije trivijalan zahtev. Ovakve prostore zovemo inače kratko, dvostranim.

Stoga možemo dakle da formulišemo i specifične probleme vezane desnu strukturu ovakvog prostora, te i pored opravdane primedbe da mnogi od dobijenih rezultata važe u širim (jednostranim) prostorima, mnogi rezultati jesu karakteristični za ovako uvedene prostore.

Izvesna detaljnija obrazloženja za ovakvo uvođenje kvaternionskih prostora, navodimo u početku Dela II.

Kao rezime, navodimo ukratko moguće priloge autora u ovom radu, u odnosu na postojeće rezultate Tajhmilera i Visvanata (i drugih):

(1^o) Dopunjavamo rezultate navedena dva autora, postavljajući i rešavajući probleme u kvaternionskim Hilbertovim (i Banahovim) prostorima, koje prethodni autori nisu obuhvatili;

(2^o) Dalje uopštavamo neke njihove rezultate posmatranjem uopštenih linearnih operatora (umesto samo linearnih), a u izvesnim slučajevima navodimo novi metod dokazivanja postojećih rezultata (napr. Teor.5.2);

(3^o) Formulišemo i rešavamo specifične probleme vezane za d-vektorsku strukturu našeg prostora;

(4^o) Dajemo izvesne priloge u okviru same teorije kompleksnih Hilbertovih prostora (svi rez. Dela IV i tačka 7.3 Dela VII).

2. Kratak pregled rezultata po poglavljima.

Rad je podeljen na poglavlja I - VII, koja smo nazvali Delovima.

U prvom Delu /I/ (str.1-8), uvodimo pojam φ - rotabilnih i φ - simetričnih skupova u telu kvaterniona (gde je φ - involutivni automorfizam ovog tela), dokazujemo izvesne strukturne osobine takvog automorfizma φ , i posebno uvodimo pojam svojstvene kompleksne ravni preslikavanja φ . Ceo ovaj deo ima karakter pomoćnog, u kome dakle dokazujemo izvesne "radne" osobine koje će nam biti potrebne kasnije.

Ovde posebno ističemo tačku 3^o-Leme 1.3, koja predstavlja glavni deo Stava 3.5.

U Delu II(str.9-24), najpre uvodimo definicije linearnih i normiranih prostora nad telom kvaterniona, kao i takvih prostora sa skalarnim i poluskalarnim proizvodom.

Važan stav (s obzirom na prostore sa poluskalarnim proizvodom) je Teorema 2.1, u vezi koje navodimo i jedno otvoreno pitanje.

U tački 2.3 ovog dela, u izvesnoj meri diskutujemo pretpostavke linearnih prostora, i dajemo izvesne kontraprimere o nezavisnosti uvedenih pretpostavki.

Veoma važni su rezultati tačke 2.4, gde dobijamo jednu dekompoziciju dvostranih kvaternionskih prostora (Stav 2.2), i kao njenu primenu, dokazujemo naredna dva stava.

U Delu III (str.25-54), koristeći ideju P.Miličića (iz radova [50], [51], a takođe i [23]), definišemo uopštene (tj. φ -) linearne operatore u Vaksovim prostorima, s obzirom na fiksirani automorfizam φ tela kvaterniona, pokazujemo da su numerički rang i spektar takvih operatora φ - rotabilni skupovi, i na takve operatore uopštavamo mnoge osobine linearnih operatora u kompleksnim Hilbertovim prostorima (St.3.1,3.2 i 3.3).

Posebno ispitujemo mogućnost uopštenja Teplic-Hauzdorfove teoreme o konveksnosti numeričkog ranga na operatore u Vaksovim prostorima, i pokazujemo da ona u opštem slučaju ne važi (prim. 3.1 i 3.2).

No primenom jednog pomoćnog skalarnog proizvoda, uspevamo da svakom takvom operatoru pridružimo jednu vrstu konveksnog numeričkog ranga (nazivamo ga F-numerički rang), i pokazujemo da se on štaviše poklapa sa konveksnim omotačem običnog numeričkog ranga (st. 3.4 i 3.5).

Primenom Stava 2.2 o dekompoziciji prostora, pokazujemo da Teplic-Hauzdorfova teorema ipak važi bar za $\ell_\varphi d$ - linearne operatore (stav 3.5') , a takođe i za odgovarajuće samoadjungovane operatore (st. 3.8 za slučaj $\varphi = id$, i 8.10 za slučaj $\varphi \neq id$) . Osim toga, pokazujemo da je numerički rang uopštenih linearnih operatora uvek povezan skup (st. 3.6) i dokazujemo izvesne strukturne osobine o njegovom preseku sa svojstvenom ravni preslikavanja φ (st. 3.7).

U tački 3.2, uopštavamo pojam numeričkog ranga na (dvostrane) normirane kvaternionske prostore, kao i neke rezultate radova [6] i [47]. Ovi rezultati, i posebno glavni - st.3.4, odnose se isključivo na desno linearne operatore, te su karakteristični za dvostrane prostore.

Ovde je takođe važan i stav 3.16, kojim uopštavamo jedan od prethodno dobijenih rezultata o konveksnosti numeričkog ranga (st.3.5').

U poslednjoj tački (3.3) ovog dela, navodimo jednu spektralnu dekompoziciju normalnih uopštenih linearnih operatora (st.3.18). Treba napomenuti da su izvesni rezultati ove tačke (čak i za uopštene linearne operatore) ipak sadržani u radu [23] .

U Delu IV (str.55-67), posmatramo numerički rang i spektar neograničenih linearnih operatora u kompleksnim Hilbertovim prostorima, i uvodeći prethodno pojam σ - numeričkog ranga takvog operatora, na prirodan način prenosimo pojam konveksoidnosti na neograničene operatore.

Glavni rezultat je teor.4.1, koja daje potpunu karakterizaciju navedene klase operatora. Osim toga, uvodimo definiciju neograničenog hiponormalnog operatora, i pokazujemo da svaki takav operator ima osobinu konveksoidnosti.

Inače su, kako smo naknadno utvrdili, neograničeni hiponormalni operatori (sa nešto drugačijom definicijom), takođe posmatrani i u radovima [73]' i [75]'.

Prethodne rezultate takođe opisujemo i za slučaj operatora u Vaksovim prostorima.

U Delu V (str.68-89), posmatramo i potpuno rešavamo problem produženja simetričnih i koso-simetričnih (neograničenih) operatora u Vaksovim prostorima, a takođe formulišemo i rešavamo odgovarajuće probleme s obzirom na desnu vektorsku strukturu takvih prostora (tj. klasu ℓd - linearnih operatora).

Glavni rezultati su teor. 5.2 i 5.3, a takođe je važna i teor. 5.1 o konstantnosti indeksa defekta zatvorenog operatora.

Osim toga, uopštavamo na naš slučaj i pojam poluograničenih simetričnih operatora, operatora sa spektralnim otvorom itd.

U Delu VI (str.90-99), postavljamo i rešavamo pitanje o egzistenciji (bar jednog) n-tog korena simetričnog ili koso-simetričnog linearnog operatora, koji takođe pripada jednoj od ovih dveju klasa operatora, za različite vrednosti prirodnog broja $\underline{n}$.

Glavni rezultati sadržani su u teor.6.1, 6.2, i 6.3.

Ovde takođe diskutujemo i pitanje o kardinalnosti skupa simetričnih i koso-simetričnih operatora (teor.6.4).

U poslednjem Delu /VII/ (str.1oo-113), izgrađujemo jedan funkcionalni račun opštih ℓ_φ- linearnih operatora, zapravo nalazimo najširi koji je sadržan u klasičnom Ris--Danfordovom funkcionalnom računu takvih operatora.

Dobijeni funkcionalni račun izgleda opštiji od odgovarajućeg u radu Visvanata [102] , za normalne linearne operatore.

Glavni rezultat sadržan je u Stavu 7.3.

Primenom ovog računa, uvodimo pojam (fon Nojmanovog) spektralnog skupa uopštenog linearnog operatora, ispitujemo vezu sa "običnim" spektralnim skupovima, i u izvesnoj meri razvijamo problematiku sličnu odgovarajućoj u kompleksnim Hilbertovim prostorima.

Osim toga, u poslednjoj tački /7.3/ ovog Dela, uvodimo definiciju i ispitujemo izvesne osobine spektralnih skupova neograničenih linearnih operatora u kompleksnim Hilbertovim prostorima.

Napomenimo da rezultati poslednje dve tačke (7.2 i 7.3) ne predstavljaju završene celine, već bi mogli biti početak jednog daljeg sistematskog ispitivanja, i eventualno tema jedne nove teze.

Spisak literature zauzima 7 strana i sadrži 1o7 naslova (radova i knjiga) koji su u bližoj ili daljoj vezi sa ovim radom.

Poslednja, osma strana, sadrži spisak nerešenih pitanja u ovom radu, i napomenu o nekim manje doslednim oznakama iz spiska literature.

Beograd, 5.sept.1975.god.

DEO I

OSNOVNE OSOBINE TELA KVATERNIONA (Q).

U ovom delu navodimo osnovne definicije i stavove koji će nam biti potrebni kasnije. Najpre navodimo osnovne osobine tela kvaterniona Q i ističemo neke osobine jedne vrste automorfizama tela Q. Ako je φ fiksirani automorfizam ovog tela, uvodimo operaciju $K \to \mathrm{rot}_\varphi\{K\}$ na partitivnom skupu $\mathcal{P}(Q)$, i dokazujemo izvesna njena svojstva. Pojmovi φ – rotabilnosti i φ – simetričnosti izgledaju osnovni jer mnogi karakteristični skupovi vezani za dati linearni operator imaju ove osobine.

1.1. Telo kvaterniona (Q), je nekomutativni prsten sa deljenjem nad telom realnih brojeva, realne dimenzije 4. Jedan njegov bazis je skup $\{1, i, j, k\}$ (i, j, k – imaginarne jedinice) sa tablicom množenja

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

On je takođe i četvorodimenzionalni Euklidski prostor sa skalarnim proizvodom

$$\langle q_1, q_2\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 ,$$

gde je $q_\nu = a_\nu + b_\nu i + c_\nu j + d_\nu k$ $(a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu \in \mathbb{R}\ ;\ \nu = 1,2)$. Norma kvaterniona $q = a + bi + cj + dk$ jednaka je $|q| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}$ i poseduje osobinu multiplikativnosti, tj. za svako $q_1, q_2 \in Q$ važi $|q_1q_2| = |q_1|\cdot|q_2|$. Ako sa $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ označimo konjugat broja q $(q \neq 0)$, tada je inverzan element $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$.

Sa $\mathrm{Im}\,Q$ označavaćemo skup svih čisto imaginarnih brojeva iz Q. Sa K^+ označavaćemo skup svih čisto imaginarnih jedinica $p \in \mathrm{Im}\,Q$ $(|p| = 1)$, čiji je prvi koeficijent različit od nule u razlaganju po osama i, j, k – pozitivan.

(takve imaginarne jedinice zvaćemo uslovno, normiranim).

Proizvoljan skalar $q \in Q$ može se bar na jedan način predstaviti u obliku $a+bp$ (p – imaginarna jedinica), i ako pretpostavimo da $p \in K^+$, to razlaganje je jedinstveno. Za proizvoljno $p \in K^+$ označićemo:

$$\pi(p) = \{a+bp \mid a, b \in \mathcal{R}\} ,$$

i očigledno je $\pi(p)$ potpolje tela Q, štaviše algebarski i topološki izomorfno sa poljem kompleksnih brojeva. Posebno to važi za $\pi(i)$, $\pi(j)$, $\pi(k)$. Dakle skup $\pi(p)$ je kompleksna ravan u Q, i očigledno se Q može predstaviti u obliku unije $\bigcup_{p\in K^+} \pi(p)$.

Ako su dalje p, p_1 bilo koje dve imaginarne jedinice, postoji bar jedno $\alpha \in Q$ $(\alpha \neq 0)$, takvo da je $p = \alpha p_1 \alpha^{-1}$. Transformacija $q \to \alpha q \alpha^{-1}$ je inače rotacija u prostoru Q (i potprostoru $\mathcal{I}m\, Q$) koja svaku tačku realne ose ostavlja fiksiranom.

Pod ortogonalnim imaginarnim jedinicama p_1, p_2, p_3 podrazumevaćemo jedinice ortogonalne u odnosu na skalarni proizvod u Q, i takve da je $p_1 p_2 = p_3$, $p_2 p_3 = p_1$, $p_3 p_1 = p_2$. Može se videti da je uslov $p_1 \perp p_2$ ekvivalentan sa $p_1 p_2 = -p_2 p_1$, i ako su p_1, p_2 ortogonalni, p_3 ortogonalno na p_1 i p_2 ako i samo ako je $p_3 = \pm p_1 p_2$. Stoga se gornji uslov svodi samo na uslov $p_1 \perp p_2$ i $p_3 = +p_1 p_2$, odnosno p_1, p_2, p_3 obrazuju sistem desne orijentacije u $\mathcal{I}m\, Q$.

1.2. Neka je dalje $\varphi : Q \to Q$ proizvoljan <u>involutivan automorfizam</u> tela Q, tj. jednoznačno preslikavanje sa osobinama:

$$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta),$$
$$\varphi(r\alpha) = r\varphi(\alpha), \quad \varphi^2(\alpha) = \alpha \qquad (\alpha, \beta \in Q;\ r \in \mathcal{R}).$$

Nije teško videti da je tada $\varphi(r) = r$ za svako realno r, $\varphi(\bar{\alpha}) = \overline{\varphi(\alpha)}$ $(\alpha \in Q)$, i kako $\varphi(i) = p_1$, $\varphi(j) = p_2$, $\varphi(k) = p_3$ obrazuju jedan o.n.s. desne orijentacije u $\mathcal{I}m\, Q$, φ – izometrički preslikava telo Q i potprostor $\mathcal{I}m\, Q$ u sebe same.

Ako označimo:

$$\Phi^0 = \{\alpha \in \mathcal{I}m\,Q : \varphi(\alpha) = \alpha\}, \quad \Phi'' = \{\alpha \in \mathcal{I}m\,Q : \varphi(\alpha) = -\alpha\},$$

zbog involutivnosti preslikavanja φ, nije teško videti da su potprostori Φ^0 i Φ'' ortogonalni, $\Phi^0 \oplus \Phi'' = \mathcal{I}m\,Q$; i preslikavanje $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\mathcal{I}m\,Q}$ je simetrija u odnosu na Φ^0 (ili identično preslikavanje, ako je $\Phi^0 = \mathcal{I}m\,Q$).

Ističemo sledeće:

> Potprostor Φ^0 poklapa se sa potprostorom $\mathcal{I}m\,Q$ (ako je $\varphi = id$), ili je realne dimenzije 1 (ako je $\varphi \neq id$), te niujednom slučaju ne može biti realne dimenzije 2.

Zaista, simetrija u realnom 3-dimenzionalnom prostoru u odnosu na dvodimenzionalnu ravan menja orijentaciju nekog o.n.s., pa bi sistemi $\{i, j, k\}$, $\{\varphi(i), \varphi(j), \varphi(k)\}$ bili različite orijentacije, što je nemoguće.

Označimo dalje sa p_1 bilo koji vektor skupa K^+ (ako je $\varphi = id$), odnosno $p_1 = \Phi^0 \cap K^+$ u ostalim slučajevima. Tada je $\Phi' = \mathcal{R} \oplus \Phi^0 = \pi(p_1)$ kompleksna ravan tela Q, takva da je

$$\Phi' = \{\alpha \in Q : \varphi(\alpha) = \alpha\}, \quad \Phi' \oplus \Phi'' = Q.$$

Nazivaćemo je uslovno, <u>svojstvenom ravni preslikavanja</u> φ, i ako je $\varphi \neq id$, očigledno predstavlja <u>simetriju prostora Q u odnosu na tu ravan.</u>

Osim toga označavaćemo $\Phi^\perp = (\Phi^0)^\perp = \mathcal{R} \oplus \Phi''$.

Istaknimo još da su (ako je $\varphi \neq id$), potprostori Φ^0 i Φ'' respektivno, skupovi skalara $\alpha \in Q$ za koje je $\varphi(\alpha) = -\bar{\alpha}$, odnosno $\varphi(\alpha) = \bar{\alpha}$.

1.3. Neka je φ - proizvoljan fiksirani involutivni automorfizam tela Q. Ako je S bilo koji podskup tela Q, reći ćemo da on ima <u>osobinu φ-rotabilnosti</u>, ako je on invarijantan pri svakoj transformaciji $\varrho \to \varphi(\alpha)\varrho\alpha^{-1}$ $(\alpha \in Q\setminus 0)$, tj. za svako $\alpha \in Q\setminus 0$, $\varrho \in S$ povlači $\varphi(\alpha)\varrho\alpha^{-1} \in S$. Uopšte, za proizvoljan skup $S \subseteq Q$, može se posmatrati skup

$$rot_\varphi \{S\} = \{\varphi(\alpha)\varrho\alpha^{-1} \mid \varrho \in S, \alpha \in Q\setminus 0\}$$

(najmanji φ-rotabilni skup koji obuhvata S), i S je – rotabilan ako je $rot_\varphi\{S\} = S$.

Može se videti sledeće:
Ako je $\lambda = a + bp$ $(a, b \in \mathbb{R}; p \in K^+)$, odnosno $\lambda = ap_1 + bq$ $(p_1 \in \Phi^\circ \cap K^+, q \in \Phi^\perp)$, razlaganje skalara $\lambda \in Q$, saglasno dekompoziciji $\mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\,Q = Q$ $(\varphi = id)$, odnosno $\Phi^\circ \oplus \Phi^\perp = Q$ $(\varphi \neq id)$, tada je $rot\{S\}$ skup svih $a + bp$ gde $p \in \mathrm{Im}\,Q$, $|p| = 1$ i $a + bp_0 \in S$ za neko $p_0 \in K^+$, i $rot_\varphi\{S\}$ skup svih $ap_1 + bq$, gde $q \in \Phi^\perp$, $|q| = 1$ i $ap_1 + bq_0 \in S$ za neko jedinično $q_0 \in \Phi^\perp$.

Ako uvedemo funkciju

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \varphi = id \\ -1, & \varphi \neq id \end{cases} ,$$

tada je $\Theta(\lambda) = \varepsilon\varphi(\bar{\lambda})$ simetrija tela Q u odnosu na potprostor definisan jednakošću $\varphi(\lambda) = \varepsilon\bar{\lambda}$ (realna osa ili p_1 - osa automorfizma φ) , i za proizvoljno $S \subseteq Q$, može se definisati

$$S^* = conj\{S\} = \{\bar{\lambda} : \lambda \in S\} ,$$
$$conj_\varphi\{S\} = \varepsilon\,\varphi(S^*) = \varepsilon\,\varphi(S)^* .$$

Reći ćemo da je skup S <u>φ - simetričan,</u> ako je $conj_\varphi\{S\} = S$.

Sledećim trima lemama sumiramo izvestan broj jednostavnih osobina operacije $S \to rot_\varphi\{S\}$, koje će nam biti potrebne na dalje.

<u>L E M A 1.1.</u> <u>Svaki φ-rotabilan skup S je φ-simetričan i važi $S = rot_\varphi\{S(p_1)\}$, gde je $S(p_1)$ presek skupa S i svojstvene ravni preslikavanja φ</u> .

D o k a z. Druga osobina je neposredna, te ćemo dokazati samo prvu.

Dokazaćemo najpre da je skup $S(p_1)$ φ-simetričan. Zaista, ako $\lambda = a + bp_1 \in S(p_1)$, i p_2 je bilo koji vektor skupa K^+ ortogonalan na p_1 , biće $\varphi(p_2) = \varepsilon p_2$, odakle je

$$\varphi(p_2)\,\lambda\,\bar{p}_2 = \varepsilon p_2 \lambda \bar{p}_2 = \varepsilon\bar{\lambda} = \varepsilon\varphi(\bar{\lambda}),$$

dakle $\Theta(\lambda) = \varepsilon\varphi(\bar{\lambda}) \in S(p_1)$, q.e.d.

[illegible] osobine sada neposredno sleduje tvrđenje.

Označimo sa $\overline{S}$ atherenciju, sa $\overset{\circ}{S}$ unutrašnjost, i sa $conv\{S\}$ konveksni omotač skupa $S \subseteq Q$.

L E M A 1.2. Za bilo koja dva skupa S , $S_1 \subseteq Q$, važe jednakosti:

$$(1^\circ) \qquad \mathrm{rot}_\varphi\{S\} \cup \mathrm{rot}_\varphi\{S_1\} = \mathrm{rot}_\varphi\{S \cup S_1\} ;$$

$$(2^\circ) \qquad \mathrm{rot}_\varphi\{S\} \cap \mathrm{rot}_\varphi\{S_1\} = \mathrm{rot}_\varphi\{S \cap \mathrm{rot}_\varphi(S_1)\} = \mathrm{rot}_\varphi\{S_1 \cap \mathrm{rot}_\varphi(S)\} ;$$

$$(3^\circ) \qquad \mathrm{rot}_\varphi\{\overline{S}\} = \overline{\mathrm{rot}_\varphi\{S\}} ;$$

$$(4^\circ) \qquad \mathrm{rot}_\varphi\{\overset{\circ}{S}\} \subseteq \overset{\circ}{\mathrm{rot}_\varphi}\{S\} .$$

D o k a z. Dokazaćemo samo relacije (3°) i (4°).

(3°) Ako je λ proizvoljna tačka iz skupa $\mathrm{rot}_\varphi\{\overline{S}\}$, biće $\lambda = \varphi(\alpha)\mu\overline{\alpha}$ gde je $|\alpha| = 1$ i $\mu \in \overline{S}$. Stoga postoji niz tačaka $\mu_n \in S$, takav da je $\lim(\mu_n) = \mu$, odakle je

$$\lambda = \varphi(\alpha)\lim(\mu_n)\overline{\alpha} = \lim\{\varphi(\alpha)\mu_n\overline{\alpha}\} \qquad (\varphi(\alpha)\mu_n\overline{\alpha} \in \mathrm{rot}_\varphi(S))$$

Stoga $\mathrm{rot}_\varphi\{\overline{S}\} \subseteq \overline{\mathrm{rot}_\varphi\{S\}}$.

Ako obratno, $\lambda \in \overline{\mathrm{rot}_\varphi\{S\}}$, postoji niz tačaka $\mu_n \in S$ i jediničnih skalara α_n tako da je

$$\lambda = \lim\{\varphi(\alpha_n)\mu_n\overline{\alpha}\} .$$

Iz kompaktnosti jedinične sfere prostora Q, sledi da niz $\{\alpha_n\}$ sadrži bar jedan konvergentan podniz $\{\alpha_{n_k}\}$; neka je $\lim(\alpha_{n_k}) = \alpha$ $(|\alpha|=1)$. Ako stavimo $\lambda_{n_k} = \varphi(\alpha_{n_k})\mu_{n_k}\overline{\alpha_{n_k}}$, tada $\lambda_{n_k} \to \lambda$ i

$$\mu_{n_k} = \varphi(\overline{\alpha}_{n_k})\lambda_{n_k}\alpha_{n_k} \longrightarrow \varphi(\overline{\alpha})\lambda\alpha \qquad (\mu_{n_k} \in S),$$

dakle $\mu = \varphi(\overline{\alpha})\lambda\alpha \in \overline{S}$, i prema tome $\lambda = \varphi(\alpha)\mu\overline{\alpha} \in \mathrm{rot}_\varphi\{\overline{S}\}$.

Time je tvrđenje dokazano.

(4°) Kako je preslikavanje $\lambda \to \varphi(\alpha)\lambda\overline{\alpha}$ tela Q (α-fiksirano, $|\alpha|=1$) - izometrično, bilo koja kružna okolina $\mathcal{U}_r(\lambda_0) = \{\lambda \in Q : |\lambda - \lambda_0| \leq r\}$ tačke λ_0 preslikava se u okolinu $\mathcal{U}_r(\varphi(\alpha)\lambda_0\overline{\alpha})$ tačke $\varphi(\alpha)\lambda_0\overline{\alpha}$. Odavde neposredno sledije tvrđenje.

P o s l e d i c a. Ako je S – zatvoreni (otvoreni) skup, tada je i $\mathrm{rot}_\varphi\{S\}$ – takav. Ako je S φ – rotabilan, tada su i skupovi $\overline{S}$, $\overset{c}{S}$ – takvi.

Dokaz se lako izvodi primenom relacija (3°) i (4°) iz prethodne leme.

L E M A 1.3. Ako su S, S_1 bilo koja dva φ – simetrična podskupa svojstvene ravni $\pi(p_1)$ preslikavanja φ, tada je:

$$(1^\circ) \qquad \mathrm{rot}_\varphi\{S\} \cap \mathrm{rot}_\varphi\{S_1\} = \mathrm{rot}_\varphi\{S \cap S_1\};$$

$$(2^\circ) \qquad \mathrm{rot}_\varphi\{\pi(p_1) \setminus S\} = Q \setminus \mathrm{rot}_\varphi\{S\};$$

$$(3^\circ) \qquad \mathrm{rot}_\varphi\{\mathrm{conv}(S)\} = \mathrm{conv}\{\mathrm{rot}_\varphi(S)\}.$$

D o k a z. Jednakost (1°) je neposredna posledica osobine (2°) iz prethodne leme.

Isto se i jednakost (2°) lako izvodi, uzimajući u obzir da je $\mathrm{rot}_\varphi\{\pi(p_1)\} = Q$.

Bez pretpostavke o φ – simetričnosti skupa $S \subseteq \pi(p_1)$, ova jednakost inače ne važi. Naprimer, ako je $S = \{p_1\}$, tada je $\mathrm{rot}_\varphi\{\pi(p_1) \setminus S\} = Q \neq Q \setminus \mathrm{rot}_\varphi\{S\}$.

(3°) Dokazaćemo da važi sledeće:

(a) $L \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rot}_\varphi\{\mathrm{conv}(S)\} \supseteq \mathrm{rot}_\varphi\{S\}$;

(b) $L \subseteq \mathrm{conv}\{\mathrm{rot}_\varphi(S)\}$;

(c) L – je konveksan skup.

Prvi deo je očigledan i sleduje iz toga što $\mathrm{conv}\{S\} \supseteq S$. Ako je dalje λ proizvoljna tačka skupa L, imaćemo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \varphi(\alpha)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \lambda_\nu\Big)\alpha^{-1} && (\lambda_\nu \in S;\ t_\nu \geq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \{\varphi(\alpha)\lambda_\nu \alpha^{-1}\} && (\varphi(\alpha)\lambda_\nu \alpha^{-1} \in \mathrm{rot}_\varphi\{S\}), \end{aligned}$$

dakle $\lambda \in \mathrm{conv}\{\mathrm{rot}_\varphi(S)\}$.

Još preostaje da dokažemo deo (c).

Dokažimo najpre da skup $\mathrm{conv}\{S\}$ ima takođe osobinu φ – simetričnosti.

Ako je λ proizvoljna tačka skupa $\mathrm{conv}\{S\} = S_1$, biće:

$$\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \lambda_\nu \qquad (\lambda_\nu \in S;\ t_\nu \geq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1),$$

te je

$$\varepsilon\bar{\lambda} = \sum t_\nu (\varepsilon\bar{\lambda}_\nu) \qquad (\varepsilon\bar{\lambda}_\nu \in S),$$

dakle zaista, $\varepsilon\bar{\lambda} = \varepsilon\varphi(\bar{\lambda}) \in S_1$.

U daljem dokazu ograničićemo se samo na slučaj kada je φ identično preslikavanje (slučaj $\varphi \neq id$ je inače dosta sličan ovome, s tom razlikom što se umesto dekompozicije tela skalara na realni i imaginarni deo, koristi dekompozicija na ortogonalne potprostore $\Phi^\perp$ i Φ°).

Uočimo bilo koje dve tačke skupa L :

$$\lambda_1 = a_1 + b_1 p', \; \lambda_2 = a_2 + b_2 p'' \quad (p', p'' \in K^+).$$

Treba da dokažemo da sve tačke odsečka $[\lambda_1, \lambda_2]$ takođe pripadaju L . Svaku tačku odsečka $[\lambda_1, \lambda_2]$ možemo predstaviti u obliku

$$\lambda = (1-t_0)\lambda_1 + t_0\lambda_2 = (1-t_0)(a_1 + b_1 p') + t_0(a_2 + b_2 p'') =$$
$$= (1-t_0)a_1 + t_0 a_2 + (1-t_0)b_1 p' + t_0 b_2 p'' \quad (0 \leq t_0 \leq 1).$$

Pri tom je

$$\mathcal{R}e\,\lambda = (1-t_0)a_1 + t_0 a_2, \; \mathcal{I}m\,\lambda = (1-t_0)b_1 p' + t_0 b_2 p'',$$

i broj $\mathcal{I}m\,\lambda$ može se napisati u obliku

$$\mathcal{I}m\,\lambda = |\mathcal{I}m\,\lambda|\, p_0 \qquad (p_0 \text{ – imaginarna jedinica}).$$

Da bi dokazali da tačka $\lambda = \mathcal{R}e\lambda + |\mathcal{I}m\lambda| p_0 \in L$, zbog osobine rotabilnosti skupa L , dovoljno je dokazati da tačka

$$\mu = \mathcal{R}e\,\lambda + |\mathcal{I}m\,\lambda|\, p_1 \in L \cap \pi(p_1) = S_1 .$$

Na osnovu pretpostavke, tačke $\lambda_\nu = a_\nu + b_\nu p^{(\nu)} \in L \quad (\nu = 1, 2)$, odakle sleduje da $\mu_\nu = a_\nu + b_\nu p_1 \in S_1 \; (\nu = 1, 2)$.

Stoga će sa tačkama $a_1 + b_1 p_1$, $a_2 + b_2 p_1$ istovremeno pripadati skupu S_1 i tačke $a_1 + |b_1| p_1$, $a_2 + |b_2| p_1$, a zbog konveksnosti S_1 takođe i tačka

$$\mu_0 = (1-t_0)a_1 + t_0 a_2 + [(1-t_0)|b_1| + t_0|b_2|]\, p_1 .$$

Još primetimo da je

$$\mu = (1-t_0)a_1 + t_0 a_2 + |(1-t_0)b_1 p' + t_0 b_2 p''|\, p_1 =$$

$$= (1-t_0)a_1 + t_0 a_2 + r p_1 \qquad (0 \leq r \leq (1-t_0)|b_1| + t_0|b_2|),$$

i za dovršenje dokaza dovoljno je iskoristiti činjenicu da, zbog konveksnosti i simetričnosti u odnosu na realnu osu, skup S_1 sa svakom tačkom $\mu_0 = a_0 + b_0 p_1$ sadrži i ceo odsečak $[a_0 + b_0 p_1, a_0 - b_0 p_1]$.

Prema tome, L je konveksan skup koji obuhvata $rot_\varphi\{S\}$, i sadržan je u skupu $conv\{rot_\varphi(S)\}$, te se poklapa sa njim. Time je tvrđenje dokazano.■

Iz jednakosti (3^0) kao poseban slučaj imamo da je, za bilo koji konveksan φ – simetričan skup S u ravni $\pi(p_1)$, $rot_\varphi\{S\}$ isti takav skup u Q.

Takođe, može se primerom lako pokazati da i ova jednakost nije tačna bez pretpostavke o φ – simetričnosti skupa S. Osim toga može se videti da je za proizvoljni podskup S svojstvene ravni $\pi(p_1)$, konveksnost [illegible] $rot_\varphi\{S\}$ ekvivalentna konveksnosti skupa $S \cup conj_\varphi\{S\}$.

D E O II

DEFINICIJA I IZVESNE OSOBINE LINEARNIH PROSTORA NAD TELOM KVATERNIONA.

U ovom delu uvodimo pretpostavke linearnih prostora nad telom kvaterniona (Q), i dokazujemo izvesne osobine tih prostora.

Za razliku od prostora posmatranih u radovima [95] i [102] , posmatramo nešto specijalnije prostore sa definisanim množenjem skalarima sa obe (leve i desne) strane.

Za ovakvo uvođenje linearnih prostora nad telom Q postoji nekoliko opravdanja:

(1°) Algebra $\mathcal{L}(H)$ svih levo linearnih ograničenih operatora na takvom normiranom prostoru H , postaje takođe dvostrani normirani prostor nad telom Q, ako se na odgovarajući način uvede množenje skalarima (a ne samo realni prostor kao u radu [102]) .

Osim toga, dokazi izvesnih osobina se pojednostavljuju, a dobijaju se eventualno i nove.

(2°) Kod odgovarajućeg normiranog prostora nad telom Q, konjugovani prostor H'_L je takođe dvostrani prostor nad Q, i mogu se preneti izvesne spektralne osobine operatora, koje ne važe u širim prostorima.

(3°) Moguće je posmatrati i klase operatora s obzirom na uslov homogenosti sa desne strane (uslov d-homogenosti), razne međuklase operatora, desni spektar levo linearnih operatora itd.

S tim u vezi, moguće je dokazati da postoji jedno interesantno razlaganje takvog prostora, koje je na neki način slično razlaganju tela Q (ili prostora Q^n), i ne važi u jednostranim kvaternionskim prostorima. Njegovom primenom takođe se može dokazati da važi jedna dekompozicija proizvoljnog operatora $A \in \mathcal{L}(H)$ slična dekompoziciji kvaternionske matrice (tj. operatora u konačno-dimenzionalnom slučaju).

Stoga su, i pored opravdane primedbe da izvesni dobijeni rezultati važe i u opštijim jednostranim prostorima, zbog bogatije strukture isto tako mnogi rezultati karakteristični za ovako uvedene prostore.

Opisaćemo u najkraćim crtama sadržaj ovog dela.

Najpre navodimo pretpostavke vektorskih i normiranih prostora, prostora sa poluskalarnim i skalarnim proizvodom nad telom kvaterniona.

Teoremom 2.1 pokazujemo da je svaki prostor sa poluskalarnim proizvodom - normiran, i korišćenjem uopštene Han-Banachove teoreme Suhomlinova pokazujemo da važe i dva delimična inverza ovoga stava. Takođe navodimo i otvoreno pitanje o tačnosti obratnog stava. *)

Zatim na naš slučaj uopštavamo i poznatu teoremu o postojanju skalarnog proizvoda u normiranom prostoru, čiji su jedan deo (za jednostrane kvaternionske prostore), dokazali Rubin i Stone u radu [81] .

U narednoj tački analiziramo u izvesnoj meri pretpostavke vektorskih i normiranih prostora, kao i prostora sa skalarnim i poluskalarnim proizvodom, i navodimo izvesne kontraprimere i jedno otvoreno pitanje.

U poslednjoj tački dokazujemo osnovni stav o dekompoziciji prostora koji ćemo često koristiti kasnije, i neke njegove posledice.

2.1. Pretpostavke prostora nad telom Q.

U svakom vektorskom prostoru nad telom Q, pretpostavljamo da je definisano množenje skalarima sa leve i sa desne strane, koje osim uobičajenih pretpostavki (za levo i desno množenje skalarima), zadovoljava i uslove:

(a.1) $\quad rx = xr \quad (x\in H, r\in \mathcal{R})$, $\qquad$ (a.2) $\alpha(x\beta)=(\alpha x)\beta \quad (\alpha,\beta\in Q)$.

---

*) O drugim rezultatima koji se odnose na prostore sa poluskalarnim proizvodom nad telom Q, može se videti u [97] .

Pod normiranim prostorom nad Q, podrazumevaćemo vektorski prostor sa normom koja osim uobičajenih, zadovoljava dva uslova homogenosti:

(b.1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, (b.2) $\|x\alpha\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $(x \in H, \alpha \in Q)$.

Pod pret-Hilbertovim prostorom nad Q (prostorom sa skalarnim proizvodom) podrazumevaćemo vektorski prostor nad Q , neobavezno kompletan, u kome je definisan skalarni proizvod, tj. "seskvilinearna" funkcionela $\langle \cdot , \cdot \rangle : H \times H \to Q$, koja zadovoljava obične pretpostavke u odnosu na množenje skalarima sa leve strane, i osim toga uslov:

(c) $\langle x\alpha , y \rangle = \langle x , y\bar{\alpha} \rangle$ $(x, y \in H ; \alpha \in Q)$.

Ako je takav prostor kompletan u odnosu na normu $\|x\| = \sqrt{\langle x ; x \rangle}$ govorićemo o Vaksovom prostoru (prema E. Wachs-u, u terminologiji Teichmüllera [95]).

Osim prostora sa skalarnim proizvodom, mogu se posmatrati i opštiji, prostori sa poluskalarnim proizvodom, uvedeni u slučaju kompleksnih vektorskih prostora u radu [47] .

Ako je H vektorski prostor nad telom Q, reći ćemo da je na H definisan poluskalarni proizvod, ako postoji funkcionela $[\cdot , \cdot] : H \times H \to Q$, takva da je za svako x , $x' , y \in H$ i $\alpha \in Q$ ispunjeno:

(d) $[x + x' , y] = [x , y] + [x' ; y]$;

(d.1) $[\lambda x , y] = \lambda [x , y]$; (d.2) $[x , \lambda y] = [x , y]\bar{\lambda}$;

(d.3) $[x\lambda , y] = [x , y\bar{\lambda}]$;

(d.4) $|\langle x , y \rangle|^2 \leq [x , x] [y ; y]$;

(d.5) $[x , x] \geqslant 0$ i jednako nuli samo za $x = 0$.

2.2. Neke osobine prostora sa skalarnim i poluskalarnim proizvodom.

Po analogiji sa Vaksovim prostorom u kome pretpostavljamo da skalarni proizvod ima osobinu linearnosti (po prvom argumentu) s obzirom na množenje skalarima sa leve strane, u normiranom prostoru, od dva moguća dualna prostora H'_L i H'_D ograničenih levo linearnih i desno linearnih funkcionela definisanih na H, uočavamo samo prvi.

Ako na H'_L definišemo normu na uobičajeni način:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

i levo i desno množenje skalarima iz Q na sledeći način:

$$(\alpha f)x \overset{\text{def}}{=} f(x\alpha), \quad (f\alpha)x \overset{\text{def}}{=} f(x)\alpha \quad (\alpha \in Q),$$

nije teško videti da prostor H'_L postaje normirani prostor nad Q (v. [97]).

Nadalje, biće nam potrebno uopštenje Han-Banahove teoreme za normirane prostore nad Q, i funkcionele $f \in H'_L$. Stav je inače dokazao još Suhomlinov, godine 1938 u radu [98]. Samo ćemo citirati navedeno uopštenje, s napomenom da se sličan stav može dokazati i u mnogo opštijem slučaju – lokalno konveksnih prostora nad telom Q.

<u>T E O R E M A</u> (Uopštena Han-Banahova). <u>Neka je f_1 ograničena ℓ - linearna funkcionela definisana na ℓ - linearnom potprostoru E normiranog prostora H. Tada postoji ograničena funkcionela $f \in H'_L$ definisana na celom prostoru H koja produžava f_1, takva da je $\|f\| = \|f_1\|$</u>.

<u>P o s l e d i c a .</u> Ako je x_0 proizvoljan vektor prostora H $(x_0 \neq 0)$, postoji funkcionela $f \in H'_L$, takva da je $f(x_0) = \|x_0\|$, i $\|f\| = 1$.

<u>T E O R E M A 2.1.</u> <u>Svaki prostor sa poluskalarnim proizvodom je normiran sa normom $\|x\| = [x,x]^{1/2}$. Obratno, u svakom normiranom prostoru nad Q, postoji bar jedan</u> (u opštem slučaju beskonačno mnogo) <u>poluskalarni proizvod saglasan sa normom, koji od uslova homogenosti zadovoljava</u> (d.1) <u>i</u> (d.2), <u>i bar jedan koji zadovoljava uslove</u> (d.1) <u>i</u> (d.3).

P r i m e d b a. Prirodno je postaviti pitanje o vezi između uslova homogenosti (d.1), (d.2), (d.3) poluskalarnog proizvoda u normiranom prostoru, i posebno pitanje da li postoji p.s.p. koji zadovoljava prva dva od tih uslova ali ne i (d.3). Na [illegible] ćemo se uveriti da uslov (d.3) povlači osobinu norme (b.2). Zbog toga nemamo (d.3) ako ne važi osobina norme (b.2), i odgovarajući primer kada taj slučaj nastupa konstruisaćemo kasnije. Osim toga, kasnije ćemo pokazati da postoji poluskalarni proizvod u normiranom prostoru, koji zadovoljava uslov (d.2) ali ne i (d.3), to je ovaj poslednji uslov nezavisan od osobine norme (b.2), a baš u slučaju skalarnog proizvoda, (d.3) posledica slabije pretpostavke (b.2).

I pored toga ostaje otvoreno pitanje o postojanju poluskalarnog proizvoda u normiranom prostoru koji zadovoljava sva tri uslova (d.1)–(d.3).

D o k a z. Pretpostavimo najpre da je $[\cdot,\cdot]$ neki p.s.p. na prostoru H, i dokažimo da je $\|x\| = [x,x]^{1/2}$ zaista norma. Proverićemo samo osobinu (b.2), jer se ostale osobine dokazuju isto kao u radu [47].

Imaćemo:

$$\|x\lambda\|^2 = [x\lambda, x\lambda] = [x, x\lambda\bar{\lambda}] = [x, x|\lambda|^2] =$$

$$= |\lambda|^2 [x,x] = |\lambda|^2 \|x\|^2, \quad \|x\lambda\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

što je i trebalo dokazati.

Dokažimo drugi deo tvrđenja.

Ideja dokaza za ovaj deo tvrđenja sastoji se u razlaganju jedinične sfere $\mathcal{S}$ prostora H na disjunktne kosete s obzirom na relaciju ekvivalencije

$$s_1 \sim s_2 \text{ ako } \exists \alpha \, (|\alpha| = 1), \quad s_1 = \alpha s_2 .$$

Kod drugog dela imali bi samo malu promenu relacije u $s_1 = s_2 \alpha$. Izgleda inače, da bi se oba slučaja mogla spojiti u jedan, razmatrajući relaciju ekvivalencije:

$$s_1 \sim s_2 \text{ ako } \exists \alpha_1, \alpha_2 \; (|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1), \quad s_1 = \alpha_1 s_2 \alpha_2 ,$$

međutim ovo nije korektno. Teškoća je u tome što gornji prikaz nije jedinstven već eventualno važi $s_2 = \alpha_1 s_2 \alpha_2$ za neki par jediničnih skalara α_1, α_2 .

Neka je $\mathcal{S}_0$ bilo koji skup predstavnika navedenih klasa s obzirom na prvu relaciju ekvivalencije. Na osnovu uopštene Hahn-Banachove teoreme, za svako $s_0 \in \mathcal{S}_0$ postojaće funkcionela $f_{s_0} \in H'$ takva da je:

$$f_{s_0}(s_0)=1, \quad \|f_{s_0}\|=1.$$

Za svako $s\in\mathcal{S}$, $s=\alpha s_0$ $(|\alpha|=1)$, definisaćemo:

$$f_s=f_{\alpha s_0}=f_{s_0}\overline{\alpha},$$

tojest $f_s(x)=f_{s_0}(x)\overline{\alpha}$ $(x\in H)$, i za proizvoljno $y\in H$ $(y\neq 0)$, $y=\|y\|s=\|y\|\alpha s_0$,

$$f_y(x)=\|y\|f_s(x)=\|y\|f_{s_0}(x)\overline{\alpha},$$

i $f_0\equiv 0$.

Očigledno $f_y\in H'_L$ $(y\in H)$ i time je definisano preslikavanje $V: H\xrightarrow{\leq} H'_L$, $V(y)=f_y$.

Ono ima sledeće osobine:

(1) $\qquad f_x(x)=\|x\|^2 \quad (x\in H)$;

(2) $\qquad f_{\alpha y}(x)=f_y(x)\overline{\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{K})$,

(3) $\qquad \|f_y\|=\|y\|$.

Proverićemo samo drugu od njih jer se ostale dokazuju slično. Ako je y bilo koji vektor $\neq 0$, biće

$$y=\|y\|\alpha s_0\ (|\alpha|=1,\ s_0\in\mathcal{S}_0),\quad \beta y=\|y\|\cdot|\beta|\cdot\beta_0\alpha s_0$$

odakle je

$$f_{\beta y}(x)=f_{\|y\||\beta|\beta_0\alpha s_0}(x)=\|y\|\,|\beta|\,f_{s_0}(x)\overline{\alpha}\,\overline{\beta_0}=$$
$$=\|y\|f_{s_0}(x)\overline{\alpha}\cdot|\beta|\overline{\beta_0}=f_y(x)\overline{\beta}=(f_y\overline{\beta})x,$$

dakle zaista $f_{\beta y}=f_y\overline{\beta}$.

Dalje za svako $x,y\in H$ definišimo: $[x,y]=f_y(x)$.

Dokažimo da je ovo poluskalarni proizvod saglasan sa normom prostora H i osobinama (d.1), (d.2).

Imaćemo:

$$[\lambda x,y]=f_y(\lambda x)=\lambda f_y(x)=\lambda[x,y],$$
$$[x,\lambda y]=f_{\lambda y}(x)=f_y(x)\overline{\lambda}=[x,y]\overline{\lambda},$$

i osim toga, $[x,x]=f_x(x)=\|x\|^2$. Kako je $\|f_y\|=\|y\|$ iz definicije neposredno sledi

$$|f_y(x)|^2\leq\|f_y\|^2\|x\|^2=\|y\|^2\|x\|^2,$$

čime je tvrdenje dokazano.

Drugi deo dokazuje se na potpuno sličan način. Razlika je jedino u tome što za definisanje f_{s_0} $(s_0\in\mathcal{S}_0$ - skup predstavnika klasa druge relacije), i proizvoljno $y \neq 0$, $y = \|y\| s_0 \alpha$, definišemo:

$$f_y(x) = \|y\| f_{s_0}(x\bar{\alpha}) = \|y\| (\bar{\alpha} f_{s_0}) x .$$

Lako se dokazuje da je za svako $\beta \in Q$, ispunjeno $f_{y\beta} = \bar{\beta} f_y$, te odgovarajući poluskalarni proizvod od osobina homogenosti ispunjava (d.1) i (d.3).

Time je tvrđenje dokazano.

<u>P i t a n j e.</u> Da li u svakom normiranom prostoru postoji bar jedan poluskalarni proizvod sa osobinama homogenosti (d.1)-(d.3).

Sledećim stavom uopštavamo poznatu teoremu iz rada [40], kojom se daje potreban i dovoljan uslov pod kojim je normirani prostor pret-Hilbertov.

<u>S T A V 2.1.</u> <u>Normirani prostor nad telom Q je pret-Hilbertov, ako i samo ako njegova norma zadovoljava identičnost paralelograma, tj. za svako $x, y \in H$ važi:</u>

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

<u>Ako je prostor H osim toga i kompletan, postoji jedinstveni poluskalarni proizvod saglasan sa normom (sâm skalarni proizvod prostora H).</u>

D o k a z. Jedan deo stava (za jednostrane kvaternionske normirane prostore), dokazali su još Rubin i Stoun u radu [81]. Ostaje još da proverimo osobinu

$$\langle x\lambda, y \rangle = \langle x, y\bar{\lambda} \rangle \quad (\lambda \in Q)$$

gde je $\langle x, y \rangle$ skalarni proizvod na H uveden kao u citiranom radu, naime

$$\langle x, y \rangle = g(x,y) - i\, g(ix,y) - j\, g(jx,y) - k\, g(kx,y),$$

pri čemu je

$$g(x,y) = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle .$$

Gornju jednakost dovoljno je proveriti ako je $\lambda = i, j, k$ ili uopšte $\lambda = p$, gde je p bilo koja imaginarna jedinica u Q.

Kako je:

$$g(xp,y)=\frac{1}{4}\left(\|xp+y\|^2-\|xp-y\|^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\|x-y\bar{p}\|^2-\|x+y\bar{p}\|^2\right)=g(x,-y\bar{p})=g(x,y\bar{p}),$$

biće neposredno $\langle xp,y\rangle=\langle x,y\bar{p}\rangle$, što je i trebalo dokazati.

Neka je dalje prostor H kompletan prostor sa skalarnim proizvodom $\langle x,y\rangle$ i $[x,y]$ bilo koji p.s.p. na H. Kod dokaza da je $[x,y]=\langle x,y\rangle$, iskoristićemo ideju iz rada [27].

Za svako fiksirano y, biće $x\to[x,y]$ ograničena ℓ - linearna funkcionela na H, i primenom stava o reprezentaciji takvih funkcionela u Vaksovom prostoru (v. [95]), sleduje da postoji $z=Ty$, takvo da je $[x,y]=\langle x,z\rangle$. Time je jednakošću $[x,y]=\langle x,Ty\rangle$ definisano preslikavanje $T:H\to H$, i nije teško videti da je T ℓ - linearni operator (jer pretpostavljamo da p.s.p. ima osobinu (d.2)). Imaćemo da je

$$[x,x]=\|x\|^2=\langle x,Tx\rangle\leq\|Tx\|\cdot\|x\|\quad(x\in H),$$

dakle $\|Tx\|\geqslant\|x\|$, i s druge strane

$$[Tx,x]=\langle Tx,Tx\rangle=\|Tx\|^2\leqslant\|Tx\|\cdot\|x\|,$$

odnosno $\|Tx\|\leqslant\|x\|^2$ $(x\in H)$, odakle je $\|Tx\|=\|x\|$. Stoga je

$$\langle x,Tx\rangle=\|x\|^2=\|x\|\cdot\|Tx\|.$$

No Švarcova nejednakost i u slučaju Vaksovog prostora (što nije teško dokazati) prelazi u jednakost ako i samo ako su argumenti ℓ - linearno zavisni. Stoga je $Tx=\alpha x$ odakle lako nalazimo $Tx=x$, dakle $[x,y]=\langle x,y\rangle$, što je i trebalo dokazati.

Time je tvrđenje dokazano.

<u>P r i m e d b a.</u> Iz dokaza prethodnog stava neposredno se vidi i sledeće: Skalarni proizvod u pret-Hilbertovom prostoru H ima osobinu (c) ako i samo ako odgovarajuća norma zadovoljava uslov (b.2), tj. ako je ispunjen slabiji uslov

$$\langle x\alpha,x\alpha\rangle=\langle x,x\alpha\bar{\alpha}\rangle\quad(\alpha\in Q).$$

2.3. Analiza pretpostavki prostora.

U ovoj tački navodimo izvesne kontraprimere koji se odnose na pretpostavke linearnih prostora nad telom kvaterniona.

Naime, neposredno se dokazuje da sistem pretpostavki Vaksovog (odnosno pret-Hilbertovog prostora), kao najširi, nije protivrečan; primer samog tela Q sa prirodno definisanim množenjem skalarima sa leve i desne strane, i skalarnim proizvodom $\langle x,y\rangle = x\bar{y}$ $(x,y\in Q)$. Isto tako primer n-dimenzionalnog prostora Q^n.

Stoga se postavlja pitanje da li su neke od pretpostavki posledice ostalih, posebno (a.1),(a.2),(b.2), (c), kao i odnos osobina (d.2) i (d.3) poluskalarnog proizvoda. Na neka od tih pitanja dobijen je odgovor.

Primetimo najpre da je u normiranom prostoru, pretpostavka (a.1) posledica ostalih osobina vektorskog prostora. Zaista, lako se dokazuje da je ona ispunjena za sve realne racionalne (pozitivne i negativne) brojeve, odakle zbog neprekidnosti množenja skalarima sleduje isto za sve realne brojeve.

<u>P i t a n j e.</u> Da li je to tačno i u vektorskim prostorima bez topologije, ili u normiranim prostorima bez jedne od pretpostavki (b.1),(b.2) o normi.

<u>P r i m e r 2.1.</u> <u>Postoji vektorski prostor sa osobinom</u> (a.1) <u>ali bez osobine</u> (a.2). <u>Stoga je ona nezavisna od ostalih pretpostavki vektorskog prostora.</u>

D o k a z. Uočimo prostor $H = Q$, i bilo koju (R) - linearnu jednoznačnu funkciju $\varphi : Q \xrightarrow{1\text{-}1\,na} Q$, takvu da je $\varphi(1)=1$. Definišimo levo množenje skalarima sa $\alpha\vec{x} = \alpha x$ $(x\in H, \alpha\in Q)$, i desno sa $\vec{x}\alpha = \varphi[\varphi^{-1}(x)\alpha]$. Tada se lako proverava da su ispunjene obične pretpostavke vektorskih prostora i (a.1), a nije teško videti da je (a.2) ekvivalentno sa uslovom $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ $(\alpha,\beta\in Q)$, tj. φ je endomorfizam tela Q, dakle u opštem slučaju (a.2) ne važi. Gornji uslov svodi se inače na uslov da su $p_1 = \varphi(i)$,

$p_2=\varphi(j)$, $p_3=\varphi(k)$ imaginarne jedinice i $p_1 p_2 = p_3 = -p_2 p_1$.

P r i m e r 2.2. Postoji normirani prostor u kome norma ima osobinu (b.1) ali ne i (b.2) (kao i obratno). Stoga su ove dve osobine međusobno nezavisne.

D o k a z. Za prvi deo tvrđenja, dokaz će sledovati iz narednog primera, s obzirom da su za skalarni proizvod na osnovu Teoreme 2.1, osobine (b.2) i (c) ekvivalentne. Takođe se može konstruisati i primer za drugi deo tvrđenja.

P r i m e r 2.3. Postoji pret-Hilbertov prostor u kome skalarni proizvod ne zadovoljava uslov (c). Stoga je taj uslov nezavisan od ostalih pretpostavki pret-Hilbertovog prostora.

D o k a z. Označimo sa $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1$ bilo koji realni vektorski prostor sa realnim skalarnim proizvodom $\langle x_0,x_1\rangle$ (x_0, $x_1\in\mathcal{R}$) , koji poprima kompleksne vrednosti i zadovoljava uslov:

$$(\omega) \qquad |\mathcal{R}e\,(i\langle x_0,x_1\rangle)| < \|x_0\|\cdot\|x_1\| \quad (x_0,x_1\neq 0)$$

Naprimer, za $\mathcal{R}$ se može uzeti sama kompleksna ravan

$$\mathbb{C} = \{x = a+ib \mid a,b\in\mathcal{R}\},$$

sa skalarnim proizvodom

$$\langle x_0,x_1\rangle = \mathcal{R}e\,(x_0\overline{x_1}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\,\mathcal{I}m\,(x_0\overline{x_1}),$$

i normom $\|x_0\|=|x_0|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Lako se proverava da gornja funkcionela zaista predstavlja skalarni proizvod i ima posebno osobinu (ω).

Primetimo još da ovaj s.p. nema osobinu linearnosti s obzirom na levo množenje kompleksnim skalarima iz $\mathbb{C}$ (naime, $\langle i,1\rangle\neq i\langle 1,1\rangle$) .

Za prostor H uzećemo Dekartov proizvod $H=\mathcal{R}^4$, sa množenjem skalarima iz Q definisanim na sledeći način:

Ako je

$$\alpha\in Q, \quad \alpha=\alpha_0+i\alpha_1+j\alpha_2+k\alpha_3,$$
$$x\in H, \quad x=(x_0,x_1,x_2,x_3) \quad (x_\nu\in\mathcal{R}),$$

stavićemo

$$\begin{aligned}\alpha x = (&\alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 ,\\ &\alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 ,\\ &\alpha_0 x_2 + \alpha_2 x_0 + \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 ,\\ &\alpha_0 x_3 + \alpha_3 x_0 + \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) ,\\ x\alpha = (&\alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 ,\\ &\alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_0 + \alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3 ,\\ &\alpha_0 x_2 + \alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_3 - \alpha_3 x_1 ,\\ &\alpha_0 x_3 + \alpha_3 x_0 + \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) ,\end{aligned}$$

i može se dokazati da je ovako definisano množenje skalarima korektno.

Osim toga, ako je $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_0,y_1,y_2,y_3)$, definisaćemo:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = {} & \langle x_0,y_0\rangle - i\langle x_1,y_1\rangle i - j\langle x_2,y_2\rangle j - k\langle x_3,y_3\rangle k +\\ & + i\langle x_1,y_0\rangle - \langle x_0,y_1\rangle i - j\langle x_2,y_3\rangle k - k\langle x_3,y_2\rangle j +\\ & + j\langle x_2,y_0\rangle - \langle x_0,y_2\rangle j - k\langle x_3,y_1\rangle i - i\langle x_1,y_3\rangle k +\\ & + k\langle x_3,y_0\rangle - \langle x_0,y_3\rangle k - i\langle x_1,y_2\rangle j - j\langle x_2,y_1\rangle i .\end{aligned}$$

Može se pokazati da funkcionela $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zadovoljava uobičajene pretpostavke skalarnog proizvoda, i posebno pozitivnu definitnost forme $\langle x,x\rangle$ $(x\in H)$. Kod dokaza poslednje osobine, koristi se činjenica da je $\mathbb{R}$ izomorfno potprostoru

$$\mathbb{R}_1 = \{ (x_0, 0, 0, 0) \mid x_0 \in \mathbb{R} \},$$

i $\langle x', y'\rangle \in \mathbb{C}$ ako $x', y' \in \mathbb{R}_1$. Dobija se naime,

$$\langle x,x\rangle = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(i\langle x_1,x_0\rangle) - 2\,\mathrm{Re}\,(i\langle x_3,x_2\rangle)$$

i koristi nejednakost (w) .

No uslov (c) nije ispunjen.

Naprimer, za

$$x = (x_0, 0, 0, 0) , \quad y = (y_0, 0, 0, 0) \qquad (x_0, y_0 \in \mathbb{R}),$$

biće $xj = (0, 0, x_0, 0)$, $y\bar{j} = (0, 0, -y_0, 0)$ i

$$\langle xj, y\rangle = j\langle x_0, y_0\rangle , \quad \langle x, y\bar{j}\rangle = -\langle x_0, -y_0\rangle j = \langle x_0, y_0\rangle j ,$$

a to je u opštem slučaju različito (naprimer za $x_0 = i$, $y_0 = 1$, biće $\langle i, 1\rangle = i/\sqrt{2}$).

Time je tvrđenje dokazano.

P r i m e r 2.4. Postoji normirani prostor sa poluskalarnim proizvodom koji ima osobinu (d.2) ali ne i (d.3) (kao i obratno). Stoga su osobine homogenosti (d.2) i (d.3) u definiciji p.s.p. međusobno nezavisne.

D o k a z. Uočimo prostor $H = Q^2$ sa obično definisanim množenjem sa leve i sa desne strane skalarima iz Q, i normom

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2| \qquad (x_1, x_2 \in Q).$$

Ako su a, b fiksirani nerealni brojevi iz Q $(|a|, |b| \leq 1)$, za svako $y = (y_1, y_2) \in H$ definisaćemo funkcionelu f_y na sledeći način:

1. $f_{(y_1, y_2)}(x_1, x_2) = (|y_1| + |y_2|)\left(x_1 \dfrac{\overline{y_1}}{|y_1|} + x_2 \dfrac{\overline{y_2}}{|y_2|}\right) \quad (y_1, y_2 \neq 0)$,
2. $f_{(y_1, 0)}(x_1, x_2) = x_1 \overline{y_1} + x_2 a \overline{y_1}$,
3. $f_{(0, y_2)}(x_1, x_2) = x_1 b \overline{y_2} + x_2 \overline{y_2}$.

Može se lako pokazati da je $[x, y] = f_y(x)$ poluskalarni proizvod na H, saglasan sa normom, i poseduje osobinu (d.2) ali ne i (d.3). Zaista,

$$f_{(0,1)q}(x_1, x_2) = x_1 b \overline{q} + x_2 \overline{q},$$
$$f_{(0,1)}(x_1 \overline{q}, x_2 \overline{q}) = x_1 \overline{q} b + x_2 \overline{q}$$

dakle u opštem slučaju različiti, jer je b - nerealan broj.

Osim toga, malom promenom funkcionela u prethodnom primeru tačnije permutacijom koeficijenata a i b sa $\overline{y_\nu}$ u (2) i (3), dobija se poluskalarni proizvod koji ima osobinu (d.3) ali ne i (d.2).

Time je tvrđenje dokazano.

2.4. Jedna dekompozicija prostora i neke posledice.

U ovoj tački dokazaćemo jedan pomoćan stav o dekompoziciji proizvoljnog Vaksovog prostora H.

Napomenimo najpre da ćemo levu, odnosno desnu linearnost nekog potprostora označavati kratko sa "l-" ili "d-" sa naznakom na koje se telo odnosi (Q, $\pi(p_4)$ ili $\mathcal{R}$); bez naznake podrazumevaćemo da se radi o telu Q.

Osim skalarnog proizvoda Vakeovog prostora H, može se za proizvoljno $p_1 \in K^+$ uočiti i kompleksni s.p.

$$(*) \qquad [x,y]_{p_1} = \tfrac{1}{2}(\langle x,y\rangle - p_1\langle x,y\rangle p_1) \quad (x,y \in H),$$

kao i realni s.p.

$$(**) \qquad [x,y]_0 = \mathcal{R}e\langle x,y\rangle .$$

Oni su oba saglasni sa normom prostora H, i sam prostor postaje levi (kompleksan ili realan) Hilbertov prostor sa ovim skalarnim proizvodima.

Važi relacija:

$$\langle x,y\rangle = [x,y]_{p_1} - p_2[p_2x,y]_{p_1} \qquad (p_2 \perp p_1)$$
$$= [x,y]_0 - p_1[p_1x,y]_0 - p_2[p_2x,y]_0 - p_3[p_3x,y]_0 \quad (p_2 \perp p_1, p_3 = p_1p_2)$$

Ortogonalni komplement proizvoljnog skupa $E \subseteq H$ u odnosu na skalarni proizvod prostora i pomoćne s.p. $(*)$ i $(**)$ označavaćemo respektivno sa $\perp$, $\perp_{p_1}$ i $\perp_0$, i sa $\oplus$, $\oplus_{p_1}$, $\oplus_0$ odgovarajuće ortogonalne zbirove.

Označimo sa $\mathfrak{R}$ skup svih vektora $x \in H$ za koje je $\lambda x = x\lambda$ za svako $\lambda \in Q$ (uslovno, takve vektore nazivaćemo realnim). Tada se može dokazati sledeći stav.

S T A V 2.2. Skup $\mathfrak{R}$ je zatvoreni realni potprostor prostora H i H se može predstaviti u obliku ortogonalnog zbira

$$(1) \qquad H = \mathfrak{R} \oplus_0 i\mathfrak{R} \oplus_0 j\mathfrak{R} \oplus_0 k\mathfrak{R} .$$

Ako sa $H(i)$ označimo skup svih elemenata $x \in H$ za koje je $\lambda x = x\lambda$ za svako $\lambda \in \pi(i)$, tada je $H(i) = \mathfrak{R} \oplus_0 i\mathfrak{R}$, i važi jednakost

$$(2) \qquad H = H(i) \oplus_i jH(i) = H(i) \oplus_i H(i)j .$$

Štaviše, potprostori $\mathfrak{R}$ i $H(i)$ su realan odnosno kompleksan Hilbertov prostor (sa istovetnim levim i desnim množenjem skalarima) nad poljem $\mathcal{R}$ odnosno $\pi(i)$ respektivno, u odnosu na prvobitni skalarni proizvod prostora H.

P r i m e d b a . Slična razlaganja važe i ako se umesto i, j, k uoče bilo koje tri ortogonalne imaginarne jedinice p_1, p_2, p_3 ($p_1 \in K^+$) .

D o k a z. Zatvorenost potprostora $\mathcal{R}$ i $H(i)$ sledi neposredno iz definicije, imajući u vidu da je levo i desno množenje skalarima neprekidno.

Označimo dalje za proizvoljan vektor $x \in H$,

$$\mathcal{R}e(x) = \frac{1}{4}(x - ixi - jxj - kxk).$$

Tada nije teško videti da se vektor x može predstaviti u obliku

$$x = \mathcal{R}e(x) + i\,\mathcal{R}e(-ix) + j\,\mathcal{R}e(-jx) + k\,\mathcal{R}e(-kx),$$

i preostaje jedino da dokažemo da za svako $y \in H$, $\mathcal{R}e(y) \in \mathcal{R}$.

S obzirom na $(\mathcal{R})$- linearnost operatora $y \to \mathcal{R}e(y)$, dovoljno je dokazati da je $\lambda\,\mathcal{R}e(y) = \mathcal{R}e(y)\lambda$, za $\lambda = i, j, k$. No to se lako proverava. Naprimer za $\lambda = i$ imaćemo:

$$i\,\mathcal{R}e(y) = \frac{1}{4}(iy + yi - kyj + jyk),$$
$$\mathcal{R}e(y)i = \frac{1}{4}(yi + iy + jyk - kyj),$$

i slično za $\lambda = j, k$. Odatle neposredno dobijamo razlaganje (1) . Takođe se lako dokazuje da je potprostor $H(i) = \mathcal{R} \oplus_0 i\mathcal{R}$, odakle se dobija jednakost (2) . Naime, nije teško videti da je $x \in H(i)$ ekvivalentno sa $ix = xi$. Ako vektor x predstavimo u obliku $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$, dobijamo uslov

$$ix = -x_1 + ix_0 - jx_3 + kx_2 = -x_1 + ix_0 + jx_3 - kx_2 = xi .$$

Zbog direktnosti gornjeg zbira sledi $x_2 = x_3 = 0$, odnosno $x = x_0 + ix_1$. Stoga je $H(i) \subseteq \mathcal{R} \oplus_0 i\mathcal{R}$, i kako očigledno važi obratno, dobijamo $H(i) = \mathcal{R} \oplus_0 i\mathcal{R}$.

Dokažimo dalje da skalarni proizvod na potprostoru $\mathcal{R}$ poprima samo realne vrednosti. Zaista, ako $x, y \in \mathcal{R}$, imaćemo

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle x\lambda, y\rangle =$$
$$= \langle x, y\bar{\lambda}\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y\rangle = \langle x, y\rangle\lambda$$

za svako $\lambda \in \mathcal{Q}$, prema tome $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ $(x, y \in \mathcal{R})$. Odavde neposredno sledi da na potprostoru $H(i)$ skalarni proizvod poprima vrednosti iz ravni $\pi(i)$, kao i ortogonalnost (s obzirom na odgovarajuće pomoćne s.p.) komponentnih potprostora u razlaganjima (1) i (2).

N a p o m e n a. Slično razlaganje važi i u proizvoljnom kompletnom normiranom kvaternionskom prostoru, s tom razlikom što će odgovarajući zbirovi, umesto ortogonalni, biti samo direktni.

Kao primenu gornje teoreme, dokazaćemo sledeća dva stava.

S T A V 2.3. Vaksovi prostori H_1, H_2 su izomorfni, ako i samo ako imaju jednake odgovarajuće ℓ - ortogonalne dimenzije, tj. ako je

$$\ell\text{-}\dim(H_1) = \ell\text{-}\dim(H_2).$$

D o k a z. Dovoljno je dokazati samo da je navedeni uslov dovoljan.

Označimo sa $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bilo koji realni ortogonalni bazis Hilbertovog potprostora $\mathfrak{R}$ prostora H u razlaganju (1) iz prethodnog stava.

Kako se pomoćni s.p. $[\cdot,\cdot]_0$ poklapa sa skalarnim proizvodom prostora H na potprostoru $\mathfrak{R}$, $\{e_\alpha\}_\alpha$ je ℓ - ortonormirani skup vektora, a neposredno se vidi da predstavlja i ℓ - bazis prostora H.

Stoga je

$$\ell\text{-}\dim(H) = (R)\text{-}\dim(\mathfrak{R}) = d\text{-}\dim(H).$$

Primenom odgovarajućeg stava iz realnih Hilbertovih prostora je gornje tvrđenje neposredno. $\square$

Iz ovog tvrđenja sledi posebno da je svaki Vaksov prostor ℓ - dimenzije (a time i d - dimenzije) jednake n, izomorfan prostoru Q^n.

Imajući u vidu osobine algebre $\mathcal{L}(H)$ svih ℓ -linearnih ograničenih operatora na Vaksovom prostoru H, može se dati i definicija apstraktne (dvostrane) algebre nad nekomutativnim telom kvaterniona.

Takva algebra je dakle specijalnija od odgovarajuće algebre (i posebno algebre operatora u Vaksovom prostoru) u radu [102], koja je samo realna.

<u>Definicija.</u> Kvaternionska Banahova algebra je kompletan normirani prostor $\mathfrak{B}$, u kome je definisano asocijativno i distributivno (prema sabiranju) množenje $(x,y)\to$ $\to x\circ y\in\mathfrak{B}$, sa jedinicom e, i sledećim osobinama:

1°) $\|x\circ y\|\leq\|x\|\,\|y\|\quad(x,y\in\mathfrak{B})$;

2°) $\alpha(x\circ y)=x\circ(\alpha y)$; $(x\circ y)\alpha=(x\alpha)\circ y$;
$(\alpha x)\circ y=x\circ(\alpha y)$;

3°) Jedinica e pripada potprostoru $\mathfrak{R}$ (iz Stava 2.2).

Izrazi u jednakostima (2°) u opštem slučaju ne moraju biti jednaki, no lako se proverava da su oni jednaki za svako realno α.

<u>S T A V 2.4.</u> (Uopštenje Geljfand-Mazurove teoreme). <u>Kvaternionska Banahova algebra u kojoj je operacija množenja komutativna na potprostoru $\mathfrak{B}(i)$ (iz st. 2.2) i svaki element različit od nule poseduje inverz, izomorfna je sa samim telom kvaterniona i množenjem: $\lambda\circ\mu=\mu\lambda\quad(\lambda,\mu\in\mathbb{Q})$</u>.

D o k a z. Lako se proverava da je potprostor $\mathfrak{B}(i)$ od $\mathfrak{B}$ – kompleksna Banahova podalgebra od $\mathfrak{B}$, nad poljem $\mathbb{C}$, i poseduje jedinicu e.

Kako je na potprostoru $\mathfrak{B}(i)$ množenje po pretpostavci komutativno, i iz $x\in\mathfrak{B}(i)\setminus 0$ sledi da inverzni element $x^{-1}\in\mathfrak{B}(i)$, na kompleksnu alegebru $\mathfrak{B}(i)$ može se primeniti kompleksna Geljfand-Mazurova teorema ([105], s.185), odakle neposredno sledi tvrđenje.

<u>P r i m e d b a.</u> Prethodna teorema ne pretenduje na opštost, i dokazana je samo kao ilustracija stava 2.2.

Ne znamo da li se uslov (3°) može eventualno oslabiti, a takođe je moguće da je tvrđenje poseban slučaj opštijih rezultata koji se odnose na realne normirane algebre (Ingelstam [37], [38], Malviya [48]).

D E O III

NUMERIČKI RANG I SPEKTAR UOPŠTENIH LINEARNIH OPERATORA

U prvoj tački ovog dela posmatramo numerički rang i spektar uopštenih linearnih operatora u Vaksovim prostorima.

Pod uopštenim linearnim operatorom (φ - linearnim operatorom) podrazumevamo, koristeći pritom ideju P.Miličića iz radova [50] , [51] , ograničene linearne operatore u Vaksovom prostoru, koji zadovoljavaju uslov homogenosti $A(\alpha x)=\varphi(\alpha)Ax$ $(x\in H, \alpha\in Q)$, gde je φ-fiksirani involutivni automorfizam tela Q. Dakle za razliku od definicije u radovima [50] , [51] , gde se pretpostavlja da je φ samo automorfizam , pretpostavljamo još da je on i involutivan. Ovaj uslov se inače prirodno pojavljuje, jer samo u tom slučaju odgovarajući adjungovani operator pripada istoj klasi operatora, i može se posmatrati klasa samoadjungovanih operatora.

Pokazujemo najpre da su numerički rang ,spektar i karakteristični delovi spektra takvog operatora φ- rotabilni skupovi, i na takve operatore uopštavamo mnoge osobine numeričkog ranga i spektra običnih linearnih operatora u Hilbertovim prostorima.

Posebno ispitujemo mogućnost uopštenja Toeplitz-Hausdorffove teoreme o konveksnosti numeričkog ranga na takve operatore i pokazujemo da ona u opštem slučaju ne važi.

I pored toga, primenom pomoćnog skalarnog proizvoda, uspevamo da svakom l_φ- linearnom operatoru pridružimo jednu vrstu numeričkog ranga, koji smo nazvali F - numerički rang, za koji dokazujemo da ima osobinu konveksnosti i da se štaviše poklapa sa konveksnim omotačem običnog numeričkog ranga.

S obzirom na prethodni negativni rezultat, prirodno je postaviti pitanje određivanja bar nekih posebnih klasa

ℓ_φ- linearnih operatora za koje važi uopštenje Teplic--Hauzdorfove teoreme.

Primenom stava o dekompoziciji prostora, dokazanom u prethodnom delu, dokazujemo da ona važi bar za $\ell_\varphi d$- linearne operatore, a takođe i za ℓ - linearne samoadjungovane operatore.

Osim toga, pokazujemo da je u opštem slučaju, numerički rang iako ne konveksan, uvek bar povezan skup, i dokazujemo izvesne strukturne osobine preseka numeričkog ranga sa svojstvenom ravni preslikavanja φ . U vezi toga navodimo i izvesna otvorena pitanja.

Najzad pokazujemo da je numerički rang bilo kog ℓ_φ- linearnog samoadjungovanog operatora (i u slučaju $\varphi \neq \neq$ id) takođe konveksan, i predstavlja vrlo jednostavan skup u telu kvaterniona.

U drugoj tački ovog dela, prenosimo, ali samo na d - linearne operatore, pojam numeričkog ranga u normiranom kvaternionskom prostoru, i kao jedan od glavnih rezultata, pokazujemo da je n.r. takvog operatora u Vaksovom prostoru - - konveksan. Na taj način dobijamo uopštenje jednog od rezultata prvog dela, koji se odnosi na $\ell_\varphi d$ — linearne operatore Odgovarajuća tvrđenja koja se odnose na ℓ—linearne ili ℓ_φ — linearne operatore, nisu tačna.

U poslednjoj tački ovog dela, opisujemo spektar φ-linearnih operatora u jednom karakterističnom slučaju - -kompaktnih operatora i dobijamo spektralnu dekompoziciju takvih <u>normalnih</u> operatora u Vaksovom prostoru.

S obzirom na opšte rezultate u radovima Teichmüllera [95] , i Viswanatha [102] , koji se odnose na normalne ℓ - linearne operatore, ovi rezultati predstavljaju mala uopštenja prethodnih za klasu kompaktnih operatora. Takođe navodimo i uopštenje dekompozicije Tajhmilera i Visvanata u opštem slučaju - normalnih ℓ_φ - linearnih operatora.

3.1. Numerički rang operatora u Vaksovim prostorima.

U celoj ovoj tački posmatraćemo dakle, sledeći ideju P. Miličića ([50], [54]), ograničene uopštene levo linearne operatore na Vaksovom prostoru H, kao i skup $\mathcal{L}_{\varphi}(H)$ svih takvih operatora.

Skup $\mathcal{L}_{\varphi}(H)$ je normirani prostor nad telom Q, ako definišemo:

$$(\alpha A)x = A(x\alpha), \quad (A\alpha)x = (Ax)\alpha \quad (x \in H, \alpha \in Q),$$

a takođe i algebra, ako se uvede množenje operatora na poseban način. Kod operatora λI i $I\lambda$ odstupamo od te definicije, usvajajući običnu.

Za svako $A \in \mathcal{L}_{\varphi}(H)$, jednakošću

$$< Ax, y > = \varphi < x, A^{*}y > \quad (x, y \in H),$$

jednoznačno je definisan adjungovani operator A^{*} operatora A, on je takođe ℓ_{φ}- linearan, i ima uobičajene osobine koje se lako dokazuju. Osim toga važi naprimer,

(a) $(\alpha A)^{*} = A^{*}\bar{\alpha}$; (b) $(A\beta)^{*} = \bar{\beta}A^{*}$;

(c) A je $\ell_{\varphi}d$ - linearan, ako i samo ako je operator A^{*} takav.

Ako je A ℓ_{φ}- linearan operator, i $\pi(p_1)$ svojstvena ravan automorfizma φ, on je očigledno obično linearan s obzirom na množenje skalarima iz ravni $\Phi' = \pi(p_1)$ sa leve strane. Stoga se često kod dokazivanja izvesnih osobina, mogu primeniti odgovarajuće osobine iz kompleksnih Hilbertovih prostora.

Ako označimo sa A^{+} običan adjungovani operator operatora A, s obzirom na pomoćni skalarni proizvod $[\cdot,\cdot]_{p_1}$, tada nije teško videti da je $A^{+} = A^{*}$.

Ako je A ℓ_{φ}- linearan operator, definišemo na uobičajeni način numerički rang operatora A :

$$W(A) = \{ < Ax, x > \mid \|x\| = 1 \}.$$

Očigledno je $W(A)$ podskup skupa $\{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}$ i numerički radijus

$$w(A) = \sup |W(A)| \leq \|A\|.$$

Na navedenu klasu operatora može se preneti definicija rezolventnog skupa, spektra i njegovih karakterističnih delova (v. [102] za slučaj $\mathcal{E}$ - linearnih operatora). Posmatraćemo inače samo levi spektar operatora, tj. spektar s obzirom na operator λI.

S T A V 3.1. Numerički rang $W(A)$, njegovo zatvaranje $\overline{W(A)}$, spektar $\sigma(A)$ i karakteristični delovi spektra su φ - rotabilni i time φ - simetrični skupovi.

D o k a z. Ako tačka $\lambda = \langle Ax_0, x_0\rangle \in W(A)$ $(\|x_0\|=1)$, biće za proizvoljno $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus 0$,

$$\varphi(\alpha)\lambda\alpha^{-1} = \varphi(\alpha)\langle Ax_0, x_0\rangle\alpha^{-1} =$$
$$= \langle A(\tfrac{\alpha}{|\alpha|}x_0), \tfrac{\alpha}{|\alpha|}x_0\rangle \in W(A),$$

što je i trebalo dokazati.

Kako je skup $W = W(A)$ φ - rotabilan, na osnovu Leme 1.2 biće

$$rot_{\varphi}\overline{W} = \overline{rot_{\varphi}W} = \overline{W},$$

dakle i zatvoreni numerički rang $\overline{W(A)}$ takođe φ - rotabilan skup.

Da bi dokazali da spektar $\sigma(A)$ i rezolventni skup $\rho(A)$ imaju navedenu osobinu, dovoljno je primetiti da je za proizvoljno $\alpha \in \mathbb{Q}$, rang

$$\mathcal{R}(A - \varphi(\alpha)\lambda\alpha^{-1} I) = \varphi(\alpha)\mathcal{R}(A - \lambda I),$$

dakle oba potprostora su istovremeno gusti ili ne.

Kako je

$$A - \varphi(\alpha)\lambda\alpha^{-1} I = (\varphi(\alpha)I)(A - \lambda I)(\alpha^{-1} I),$$

biće:

$$(A - \varphi(\alpha)\lambda\alpha^{-1} I)^{-1} = (\alpha I)(A - \lambda I)^{-1}(\varphi(\alpha^{-1})I),$$

dakle norme rezolventnih operatora jednake:

$$\|R(A; \varphi(\alpha)\lambda\alpha^{-1})\| = \|R(A; \lambda)\|,$$

(istovremeno ograničene ili ne).

S obzirom da za sopstvene potprostore operatora važi jednakost

$$\mathcal{N}(A - \varphi(\alpha)\lambda\alpha^{-1} I) = \varphi(\alpha)\mathcal{N}(A - \lambda I),$$

neposredno sledi da i karakteristični delovi spektra imaju navedenu osobinu.

<u>S T A V 3.2.</u> <u>Spektar levo φ- linearnog ograničenog operatora je kompaktan skup sadržan u zatvorenom numeričkom rangu $\overline{W(A)}$ i spektralni radijus</u>

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

D o k a z. Ako označimo sa $\sigma(p_1)$ presek skupa $\sigma(A)$ sa karakterističnom ravni $\pi(p_1)$ preslikavanja φ , tada je $\sigma(A) = rot_\varphi\, \sigma(p_1)$, $\sigma(p_1)$-kompaktan skup kompleksne ravni $\pi(p_1)$ i

$$r_{\sigma(p_1)}(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Odavde neposredno dobijamo stav o spektralnom radijusu.

Primenom Leme 1.2, sledi da je spektar $\sigma(A)$ zatvoren i time kompaktan skup.

Dokaz inkluzije $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$ može se izvesti slično kao u kompleksnom slučaju, pri čemu se razdvaja slučaj aproksimativnog odnosno rezidualnog spektra.

Ako tačka $\lambda \notin \overline{W(A)}$, tj.

$$\Delta = d(\lambda; \overline{W(A)}) = \inf_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle - \lambda| > 0,$$

dobija se lako

$$\|R(A;\lambda)\| \leq 1/\Delta,$$

dakle $\lambda \notin \pi(A)$ (aproksimativni spektar operatora A) ; stoga $\pi(A) \subseteq \overline{W(A)}$.

Ako dalje $\lambda \in \sigma_{res}(A)$, primenom narednog stava, potpuno slično kao i u kompleksnom slučaju, dobijamo da $\lambda \in$ $\in W(A)$, q.e.d.

<u>S T A V 3.3.</u> <u>Ako je A^* adjungovani operator operatora</u> $A \in \mathcal{L}_\varphi(H)$, <u>tada je</u>

$$W(A^*) = \varepsilon W(A), \quad \sigma(A^*) = \varepsilon\, \sigma(A)$$

<u>i kao u kompleksnom slučaju,</u> $\sigma_{res}(A) \subseteq \sigma_{punkt}(A^*)^*$.+)

+) Ovde je funkcija $\varepsilon = \pm 1$ zavisno od toga da li je $\varphi = id$ ili $\varphi = -id$ (v. Deo I, t. 1.3).

D o k a z. Iz definicije adjungovanog operatora, neposredno dobijamo da je $W(A^*) = \varphi[W(A^\dagger)]$, odakle s obzirom na φ - simetričnost numeričkog ranga sledi

$$W(A^*) = \varepsilon W(A).$$

Ako označimo sa $A^\dagger$ adjungovani operator operatora A u odnosu na množenje skalarima iz kompleksne ravni $\mathbb{C}(p_1)$ sa leve strane i pomoćni s.p. $[\cdot,\cdot]_{p_1}$, tada je $A^\dagger = A^*$.

Primenom odgovarajućeg stava iz kompleksnih prostora dobija se

$$\sigma(A^\dagger) = \sigma(p_1)^* = \varphi[\sigma(p_1)^*] = \varphi[\sigma(A)^* \cap \mathbb{C}(p_1)].$$

Odavde je

$$\sigma(A^*) = \mathrm{rot}_\varphi\{\sigma(A^\dagger)\} = \varphi[\sigma(A)^*]$$

i zbog φ - simetričnosti spektra, ponovo $\sigma(A^*) = \varepsilon\sigma(A)$.

Kod dokaza poslednje inkluzije, dovoljno je dokazati da je

$$\sigma_{res}(A) \cap \mathbb{C}(p_1) \subseteq \sigma_{punkt}(A^*)^* \cap \mathbb{C}(p_1) = \sigma_{punkt}(A^\dagger)^*.$$

No to sledi isto iz odgovarajućeg kompleksnog slučaja, kao i pre.

Osim toga, može se primetiti da važi još jedna interesantna relacija. Ako je λ proizvoljan skalar koji ne pripada potprostoru definisanom jednakošću $\mathrm{rot}_\varphi\{\lambda\} = \lambda$ (ili, što je isto, $\varphi(\lambda) = \varepsilon\bar{\lambda}$), tada je $\mathcal{R}(A-\lambda I)^\perp = \{0\}$, no potprostor $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ ne mora biti gust u H (inače je za preostale λ, ovaj ortogonalni komplement jednak sopstvenom potprostoru $\mathcal{N}(A^* - \bar{\lambda} I)$).

Naime, ako je $y \perp \mathcal{R}(A-\lambda I)$, biće:

$$\langle Ax - \lambda x, y\rangle = 0, \quad \langle Ax, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad (x \in H).$$

Ako ovde uvrstimo αx umesto x, imaćemo:

$$\varphi(\alpha)\langle Ax, y\rangle = \varphi(\alpha)\lambda\langle x, y\rangle = \lambda\alpha\langle x, y\rangle.$$

Za $x = y$, dobija se $\varphi(\alpha)\lambda\|y\|^2 = \lambda\alpha\|y\|^2$ (za svako $\alpha \in \mathbb{Q}$).
Iz pretpostavke o parametru λ sledi $y = 0$, tj.

$$\mathcal{R}(A-\lambda I)^\perp = \{0\}.$$

Iz Stava 3.1 sledi da su numerički rang i spektar potpuno određeni svojim presecima sa karakterističnom ravni

$W(\varphi_i)$, te se može postaviti pitanje o njihovoj strukturi i posebno konveksnosti numeričkog ranga. Za izvesne klase operatora se o ovim skupovima može nešto više reći, ali postoji i dosta otvorenih pitanja.

Kao što je poznato, u slučaju kompleksnih Hilbertovih prostora numerički rang ima osobinu konveksnosti. U opštem slučaju ovde nemamo sličnu osobinu. Navedimo dva primera.

Primer 3.1.

Prostor H jednak je telu skalara Q, sa obično definisanim množenjem skalarima sa leve i desne strane i s.p. $\langle x,y\rangle = x\bar{y}$ $(x,y\in Q)$.

Uočimo ℓ - linearni operator $Ax = x(1+i)$. Tada nije teško videti da je n.r. operatora A homeomorfan 3-dimenzionalnoj realnoj Euklidskoj sferi, dakle nekonveksan skup. $\square$

Primer 3.2.

Pokazaćemo da prethodni slučaj prostora $H=Q$ nije izuzetan.

Neka je prostor H Dekartov proizvod $Q\times Q$ sa skalarnim proizvodom

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 \qquad (x_\nu, y_\nu\in Q),$$

i normom $\|x\| = (|x_1|^2+|x_2|^2)^{1/2}$. Uočimo ℓ - linearni operator $Ax = (x_1 i, x_2)$. Tada je

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= x_1 i\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 \qquad (\|x\|^2 = |x_1|^2+|x_2|^2 = 1)\\ &= 1 - |x_1|^2 + x_1 i\bar{x}_1 .\end{aligned}$$

Može se lako videti da tačke $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i \in W(A)$, no tačka $\lambda = 0 = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$ ne pripada $W(A)$, dakle i u ovom slučaju je $W(A)$ nekonveksan skup. $\square$

U oba prethodna slučaja, nije teško videti da su operatori i normalni, te ni normalnost operatora nije dovoljan uslov konveksnosti numeričkog ranga.

Ipak se, polazeći od skalarnog proizvoda prostora H , operatoru $A\in\mathcal{L}_\varphi(H)$ može pridružiti jedan konveksan skup , neka vrsta numeričkog ranga; nazivaćemo ga F-numerički rang, i označavati sa $F(A)$.

Ako je $\pi(p_1)$ svojstvena ravan preslikavanja φ , uočimo pomoćni s.p. $[\cdot,\cdot]_{p_1}$ i definišimo skupove

$$S(p_1) = \{[Ax,x]_{p_1} : \|x\|=1\},$$

$$F(A) = rot_\varphi \{S(p_1)\},$$

($S(p_1) \subseteq \pi(p_1)$ je n.r. operatora A u odnosu na pomoćni s.p.).

Primenom teoreme Teplic-Hauzdorfa sledi da je $S(p_1)$ konveksan skup u ravni $\pi(p_1)$. Osim toga, dokazaćemo da je on i φ - simetričan.

Zaista, ako $\lambda \in S(p_1)$, biće

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(\mu - p_1\mu p_1) \qquad (\mu \in W(A)),$$

odakle je

$$\theta(\lambda) = \varepsilon\varphi(\bar\lambda) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon\varphi(\bar\mu) - p_1\varepsilon\varphi(\bar\mu)p_1),$$

i tvrđenje neposredno sledi iz slične osobine skupa $W(A)$.

<u>S T A V 3.4. Važi inkluzija $W(A) \subseteq F(A)$, i ako je φ identično preslikavanje, skup $F(A)$ ne zavisi od determinacije ravni $\pi(p_1)$</u> .

D o k a z. Dokazaćemo samo prvi deo tvrđenja.

Uočimo proizvoljno $\lambda = \langle Ax,x\rangle \in W(A)$ $(\|x\|=1)$. Kako je $rot_\varphi \pi(p_1) = Q$, biće $\lambda = \varphi(\alpha)\lambda_0\bar\alpha$ $(|\alpha|=1)$ za neko $\lambda_0 \in \pi(p_1)$. Stoga je

$$\lambda_0 = \varphi(\bar\alpha)\langle Ax,x\rangle\alpha = \langle A(\bar\alpha x), \bar\alpha x\rangle \equiv$$

$$\equiv [A(\bar\alpha x), \bar\alpha x]_{p_1} \in S(p_1),$$

dakle $\lambda \in rot_\varphi\{S(p_1)\} = F(A)$, što je i trebalo dokazati.

<u>S T A V 3.5. F - numerički rang $F(A)$ ℓ_φ - linearnog operatora A je konveksan skup i , štaviše,</u>

$$F(A) = conv\{W(A)\}.$$

D o k a z. S obzirom na definiciju skupa $F(A)$ i osobine skupa $S(p_1) = F(A) \cap \pi(p_1)$ (φ- simetričnost i konveksnost), na osnovu Leme 1.3 (t.3°) sledi da je $F(A)$ konveksan podskup tela Q. Dokazaćemo da $F(A) \subseteq conv\{W(A)\}$, odakle će neposredno slediti tvrđenje.

U dokazu ćemo se opet ograničiti samo na slučaj kada je $\varphi =$ id (v. napomenu uz navedenu lemu).

Ako je λ proizvoljna tačka skupa $F(A)$, biće

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\alpha(q - p_1 q p_1)\bar{\alpha}^{1} \quad (q \in W(A), \alpha \neq 0).$$

Broj q može se predstaviti u obliku $q = a + bp$ $(p \in K^{+})$, odakle dobijamo

$$\lambda = a + \tfrac{1}{2} b\alpha(p - p_1 p p_1)\bar{\alpha}^{1} = a + b\alpha c\bar{\alpha}^{1}.$$

Kako je $c = \frac{1}{2}(p - p_1 p p_1)$ čisto imaginarno, pripada ravni $\pi(p_1)$ i $|c| \leq 1$, može se predstaviti u obliku $r p_1$, gde je $-1 \leq r \leq 1$; zamenom dobijamo

$$\lambda = a + r b\alpha p_1 \bar{\alpha}^{1}.$$

Kako je dalje $\alpha p_1 \bar{\alpha}^{1}$ – imaginarna jedinica, biće $\alpha p_1 \bar{\alpha}^{1} = \pm p_0$ (za neko $p_0 \in K^{+}$), i određenosti radi uzećemo $+p_0$, dakle $\lambda = a + r b p_0$.

Pošto tačka $a + bp \in W(A)$, i zbog osobine rotabilnosti takođe i tačke

$$\lambda_1 = a + b p_0, \quad \lambda_2 = a - b p_0 \in W(A),$$

dovoljno je primetiti da se λ može predstaviti u obliku:

$$\lambda = \frac{1+r}{2}(a + b p_0) + \frac{1-r}{2}(a - b p_0) =$$

$$= \frac{1+r}{2}\lambda_1 + \frac{1-r}{2}\lambda_2 = r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 \quad (r_1, r_2 \geq 0;\ r_1 + r_2 = 1)$$

dakle zaista $\lambda \in conv\{W(A)\}$.

Time je tvrđenje dokazano.

<u>P r i m e d b a.</u> Iz dokaza prethodnog stava lako se vidi i sledeće: numerički rang $W(A)$ je konveksan ako i samo ako za svaku svoju tačku λ sadrži i ceo odsečak $[\lambda, \leq\varphi(\bar{\lambda})]$.

Kao što smo videli, n.r. u opštem slučaju nema osobinu konveksnosti, čak ni u slučaju normalnih λ - linearnih operatora. Zbog toga je od interesa izdvojiti što više posebnih klasa operatora sa navedenom osobinom.

Pokazaćemo najpre da ovu osobinu imaju bar λ_φ-di-

- linearni operatori.

S T A V 3.5! Numerički rang proizvoljnog $l_\varphi d$-linearnog operatora je konveksan.

D o k a z. Kako je $F(A)$ konveksni omotač skupa $W(A)$, dovoljno je dokazati da je $W(A)=F(A)$.

Određenosti radi pretpostavimo da je svojstvena ravan automorfizma φ, $\pi(p_1)=\pi(i)$, tj. $p_1=i$. Označimo sa $A(i)$ restrikciju operatora A na kompleksni Hilbertov potprostor $H(i)$ (iz Stava 2.2), i sa $W(i)=W(A(i))$ odgovarajući numerički rang s obzirom na s.p. prostora H.

Dokažimo da $W(i)\subseteq\pi(i)$ i predstavlja φ-simetričan skup.

Ako je $v=x_0+ix_1$ ($x_0,x_1\in\mathcal{R}$) proizvoljan vektor potprostora $H(i)$, biće:

$$\langle Av,v\rangle = \langle Ax_0+iAx_1, x_0+ix_1\rangle = \langle Ax_0,x_0\rangle+\langle Ax_1,x_1\rangle+i\left(\langle Ax_1,x_0\rangle-\langle Ax_0,x_1\rangle\right).$$

Ako uslovno označimo: $\tilde v = x_0-ix_1$, dobija se

$$\langle A\tilde v,\tilde v\rangle = \langle Ax_0,x_0\rangle+\langle Ax_1,x_1\rangle-i\left(\langle Ax_1,x_0\rangle-\langle Ax_0,x_1\rangle\right).$$

Iz uslova $l_\varphi d$ - linearnosti sledi da je $H(i)$ invarijantan potprostor operatora $A(i)$, i kako nije teško videti da $A(i)$ preslikava potprostor $\mathcal{R}$ u sebe samog (ako je $\varphi=id$), odnosno u potprostor $i\mathcal{R}$ (ako je $\varphi\neq id$), dobijamo jednakost

$$\langle A\tilde v,\tilde v\rangle = \varepsilon\overline{\langle Av,v\rangle} \quad (v\in H(i)).$$

Stoga je n.r. $W(i)$ i φ - simetričan skup.

Označimo dalje:

$$P(i)=W(A)\cap\pi(i),\quad S(i)=F(A)\cap\pi(i).$$

Sada su $W(i)$, $P(i)$, $S(i)$ φ - simetrični skupovi u ravni $\pi(i)$, i $W(i)\subseteq P(i)\subseteq S(i)$. Dokazaćemo da je $S(i)\subseteq W(i)$ prema tome $S(i)=W(i)$.

Uočimo bilo koje $\chi=\langle Ax,x\rangle\in W(A)$ ($\|x\|=1$). Vektor x može se predstaviti u obliku $x=v_1+jv_2$ ($v_1,v_2\in H(i)$, $\|v_1\|^2+\|v_2\|^2=1$), te je

$$\chi = \langle Av_1+\varepsilon jAv_2,\ v_1+jv_2\rangle =$$

$$= \langle Av_1, v_1\rangle + \varepsilon \overline{\langle Av_2, v_2\rangle} + i\,(\varepsilon \langle Av_2, v_1\rangle - \langle Av_1, v_2\rangle).$$

Stoga se bilo koja tačka $\lambda \in S(i)$ može predstaviti u obliku

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(g - i g i) = \langle Av_1, v_1\rangle + \varepsilon \overline{\langle Av_2, v_2\rangle}$$

$$(v_1, v_2 \in H(i), \quad \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = 1).$$

Vektore v_1, v_2 možemo napisati u obliku $v_1 = \|v_1\| w_1$, $v_2 = \|v_2\| w_2$, gde su w_1, w_2 odgovarajući jedinični vektori, odakle dobijamo:

$$\lambda = \|v_1\|^2 \langle Aw_1, w_1\rangle + \|v_2\|^2 \varepsilon \overline{\langle Aw_2, w_2\rangle} =$$

$$= r_1 \langle Aw_1, w_1\rangle + r_2 \langle \hat{A}\hat{w}_2, \hat{w}_2\rangle \qquad (r_1, r_2 \geq 0;\ r_1 + r_2 = 1).$$

Kako $\langle Aw_1, w_1\rangle$, $\langle \hat{A}\hat{w}_2, \hat{w}_2\rangle \in W(i)$, i $W(i)$ je konveksan skup, neposredno sledi tvrđenje.

Stoga je $W(i) = P(i) = S(i)$, dakle $W(A) = F(A)$, što je i trebalo dokazati.

P r i m e d b a. Na primeru operatora $Ax = \varphi(x)$ u prostoru $H = Q$, vidi se da $\ell_\varphi d_\varphi$- linearni operator ne mora imati konveksan numerički rang.

Takođe, može se videti da se u uslovu stava, $\ell_\varphi d$-- linearnost ne može zameniti slabijim uslovom $\ell_\varphi(Q)\, d(\varphi_1)$-- linearnosti (koji je inače blizak prethodnom), što pokazuje operator iz Primera 3.2.

Sledećim stavom pokazujemo da je n.r. bilo kog ℓ_φ-- linearnog operatora, iako u opštem slučaju nekonveksan, bar <u>povezan</u> podskup tela Q. Osim toga pokazujemo da je njegov presek $P(\varphi_1)$ sa svojstvenom ravni $\pi(\varphi_1)$ preslikavanja φ uvek sa stavljen od dva φ- simetrična povezana skupa.

<u>S T A V 3.6.</u> <u>Numerički rang $W(A)$ bilo kog ℓ_φ-linearnog operatora je uvek povezan skup.</u>

D o k a z. Poznato je da je jedinična sfera bilo kog realnog normiranog prostora povezan skup, pa je to tačno i u našem slučaju. Izuzetan slučaj kada je (R)-$\dim(H) = 1$ ovde nikad ne nastupa jer je, što je lako videti, uvek realna ortogonalna dimenzija $(\mathcal{R})\text{-}dim(H) \geq 4$. Sada je dovoljno primetiti da je $W(A)$ neprekidna slika jedinične sfere prostora H .

S T A V 3.7. Presek numeričkog ranga i svojstvene ravni $\mathcal{K}(p_1)$ sastoji se od dva φ - simetrična povezana skupa P^+ i $P^- = \varepsilon(P^+)^*$.

D o k a z. Neka je određenosti radi, opet $p_1 = i$. Osim toga pretpostavićemo da je φ - identično preslikavanje, jer se dokaz u slučaju $\varphi \neq id$ malo razlikuje od prethodnog.

Označimo:

$$P^+ = P(i) \cap \mathbb{C}^+ , \quad P^- = P(i) \cap \mathbb{C}^- ,$$

gde su $\mathbb{C}^+, \mathbb{C}^-$ gornja i donja zatvorena poluravan kompleksne ravni $\mathbb{C}$. Očigledno je $P^- = \varepsilon(P^+)^*$ i $P = P^+ \cup P^-$, a dokazaćemo da je skup P^+ povezan.

Ako su $\lambda_1 = a_1 + b_1 i$, $\lambda_2 = a_2 + b_2 i$ $(b_1, b_2 \geq 0)$ bilo koje dve tačke skupa P^+ , na osnovu prethodnog stava postojaće neprekidna kriva $f : [0,1] \to W(A)$, takva da je $f(0) = \lambda_1$, $f(1) = \lambda_2$. Imaćemo da je

$$f(t) = a(t) + b(t)p(t) \quad (p(t) \in K^+, \ 0 \leq t \leq 1),$$

i kako je $a(t) = \mathcal{R}e f(t)$, $|b(t)| = |\mathcal{I}m f(t)|$ i imaginarne jedinice $p(t)$ - normirane (v. tačku 1.1), lako se dokazuje da su obe realne funkcije $a(t)$, $b(t)$ - neprekidne.

Stoga je kriva $g : [0,1] \to P^+$, definisana sa

$$g(t) = a(t) + |b(t)|i \quad (0 \leq t \leq 1),$$

neprekidna, i zadovoljava uslov $g(0) = \lambda_1$, $g(1) = \lambda_2$, što završava dokaz.

U vezi prethodnog rezultata mogu se postaviti izvesna pitanja na koja zasad nemamo odgovor.

(1) Da li je za svaki ℓ_φ - linearan operator, skup P^+ iz prethodnog stava - konveksan.

(2) Ako to nije tačno u opštem slučaju, da li je tačno bar za normalne ℓ_φ- linearne operatore.

(3) Ako je $\varphi = id$, da li je presek $W(A) \cap \mathcal{R}$,

kao i $W(A) \cap \mathrm{Im}\,\mathbb{Q}$ konveksan, i da li je to tačno bar za normalne operatore.

(4) Ako je $\varphi = id$, da li numerički rang $W(A)$ normalnog operatora u prostoru ortogonalne ℓ - dimenzije različite od 1, uvek sadrži bar jednu realnu tačku.

Jedan broj primera i nedostatak kontraprimera pokazuju da bi odgovor na neka od tih pitanja mogao da bude potvrdan.

Ograničeni ℓ_φ - linearni operator u Vaksovom prostoru H nazivaćemo samoadjungovanim, ako je $A^* = A$, i normalnim ako je $A^*A = AA^*$ (o mnogim osobinama samoadjungovanih i normalnih ℓ - linearnih operatora može se videti u [95] i [102]).

Na ove dve klase operatora mogu se preneti mnoge osobine operatora iz kompleksnih Hilbertovih prostora, naprimer stav o aproksimativnom spektru normalnog operatora, spektralnom radijusu normalnog i posebno samoadjungovanog operatora itd.

Posebno za $\varphi = id$ važi sledeće tvrđenje.

<u>S T A V 3.8.</u> <u>Zatvoreni numerički rang samoadjungovanog ℓ - linearnog operatora je zatvoreni interval realne ose, i krajnje tačke tog intervala pripadaju njegovom spektru $\sigma(A)$</u>.

Stoga je n.r. samoadjungovanog ℓ_φ - linearnog operatora u slučaju $\varphi = id$ - konveksan. Kasnije ćemo to dokazati i u komplementarnom slučaju $\varphi \neq id$.

Narednim stavom uopštavamo poznatu činjenicu iz kompleksnih Hilbertovih prostora, po kojoj je svaki normalni operator konveksoidan.

<u>S T A V 3.9.</u> <u>Za svaki normalni ℓ_φ - linearni operator A, važi jednakost</u>

$$\overline{\mathrm{conv}}\{W(A)\} = \mathrm{conv}\{\sigma(A)\}.$$

D o k a z. Označimo sa $\sigma(p_1)$ presek skupa $\sigma(A)$ i svojstvene ravni $\pi(p_1)$; skupovi $P(p_1)$, $S(p_1)$ imaju isto značenje kao u dokazu Stava 3.5:

$$P(\varphi_1)=W(A)\cap\pi(\varphi_1),\quad S(\varphi_1)=F(A)\cap\pi(\varphi_1).$$

Kako je operator A običan normalan $\mathcal{L}(\varphi_1)$- linearni operator u kompleksnom Hilbertovom prostoru $\{H,[\cdot,\cdot]_{\varphi_1}\}$, na osnovu odgovarajuće teoreme obične teorije (v. [33]), tada je

$$\overline{S(\varphi_1)}=\operatorname{conv}\{\sigma(\varphi_1)\}.$$

Odavde je primenom Lema 1.2 i 1.3,

$$\operatorname{conv}\{\sigma(A)\}=\operatorname{conv}\{\operatorname{rot}_\varphi\sigma(\varphi_1)\}=\operatorname{rot}_\varphi\{\operatorname{conv}\sigma(\varphi_1)\}=$$
$$=\operatorname{rot}_\varphi\{\overline{S(\varphi_1)}\}=\overline{\operatorname{rot}_\varphi\{S(\varphi_1)\}}=\overline{F(A)},$$

i na osnovu Stava 3.5,

$$\operatorname{conv}\{\sigma(A)\}=\overline{\operatorname{conv}}\{W(A)\},$$

što je i trebalo dokazati. □

Nadalje, pretpostavljaćemo da je (ne umanjujući opštost), $\pi(\varphi_1)=\pi(i)$, i osim toga $\varphi\neq id$. Kao važan rezultat pokazaćemo da je i u slučaju kada je $\varphi\neq id$, numerički rang samoadjungovanog $\mathcal{L}_\varphi$- linearnog operatora konveksan skup.

Ako je $\varphi=id$, kao što smo videli, on predstavlja interval realne ose (i krajnje tačke tog intervala pripadaju spektru operatora), a ako je $\varphi\neq id$ dokazaćemo da predstavlja 3-dimenzionalnu kuglu u telu Q sa centrom u koordinatnom početku - tačnije, centralnu (otvorenu ili zatvorenu) kuglu potprostora $\Phi^\perp$ radijusa jednakog normi operatora.

Najpre, lako se vidi da je n.r. takvog operatora sadržan u potprostoru $\Phi^\perp=\{\lambda\in Q:\ \varphi(\lambda)=\overline{\lambda}\}$, i zbog osobine φ - rotabilnosti, predstavlja neku uniju 3-dimenzionalnih sfera u tom potprostoru. Kako je osim toga, na osnovu Stava 3.3, $W(A)=-W(A)$, on je simetričan u odnosu na koordinatni početak, dakle neka unija koncentričnih sfera potprostora $\Phi^\perp$. S obzirom da je za normalne $\mathcal{L}_\varphi$- linearne operatore, spektralni radijus $r_\sigma(A)=\|A\|$, na osnovu Stava 3.9 sledi da je sfera $\mathcal{G}=\{\lambda\in\Phi^\perp\mid|\lambda|=\|A\|\}$ deo spektra operatora A. No kako je $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$, a dokazaćemo da je $W(A)$ konveksan skup, sledi će da je $\overline{W(A)} = \{\lambda \in \Phi^{\perp} : |\lambda| \leq \|A\|\}$, čime je n.r. takvog operatora potpuno opisan.

<u>L E M A 3.1.</u> <u>Numerički rang samoadjungovanog ℓ_{φ} - - linearnog operatora ($\varphi \neq id$) u prostoru $H = Q^2$ je konveksan skup.</u>

D o k a z. Svaki ℓ_{φ} - linearni operator u ovom prostoru može se predstaviti u obliku

$$Ax = A(x_1, x_2) = (\varphi(x_1)m_1 + \varphi(x_2)m_2, \varphi(x_1)n_1 + \varphi(x_2)n_2);$$

i on je samoadjungovan, ako i samo ako $m_1, n_2 \in \Phi^{\perp}$ i $n_1 = \varphi(\overline{m}_2)$ (m_2 - proizvoljno).

Osim toga, tada je $W(A)$ zatvoreno (kao neprekidna slika kompaktne jedinične sfere $\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$), spektar $\sigma(A)$ svodi se na punktualni spektar $\sigma_{punkt}(A)$, i zbog osobine φ - rotabilnosti, sastoji se od dve koncentrične sfere u potprostoru $\Phi^{\perp}$, neobavezno različitih poluprečnika, sa centrom u koordinatnom početku.

Ako opet označimo: $P(i) = W(A) \cap \pi(i)$, $\sigma(i) = \sigma(A) \cap \pi(i)$, tada su $P(i)$, $\sigma(i)$ podskupovi realne ose (i $P(i)$ - zatvoreno), simetrični u odnosu na koordinatni početak i $\sigma(i)$ se sastoji od četiri realne sopstvene vrednosti λ_1, λ_2, $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \geq 0)$. Da bi dokazali da je $W(A)$ konveksan skup, dovoljno je dokazati da je $P(i)$ takav. Pokazaćemo da je štaviše, $P(i) = conv\{\sigma(i)\}$.

S obzirom da sopstvene vrednosti pripadaju n.r., primenom stava o spektralnom i numeričkom radijusu normalnog operatora, sledi da je $conv\{\sigma(i)\} = conv\{P(i)\}$.

Pretpostavimo da je $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$, tj. $\lambda_1 = \max|\sigma(i)|$. Treba da dokažemo da ceo odsečak $[-\lambda_1, \lambda_1] \subseteq P(i)$.
Kako je

$$[-\lambda_1, \lambda_1] = [-\lambda_1, \lambda_2] \cup [-\lambda_2, \lambda_1],$$

i tačke λ_1 i $-\lambda_2$ nalaze se sa raznih strana koordinatnog početka, dovoljno je dokazati da je naprimer interval $[-\lambda_2, \lambda_1]$ sadržan u skupu $P(i)$.

Označimo sa $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2)$ - sopstvene potprostore operatora A koji odgovaraju sopstvenim vrednostima λ_1 i

$-\lambda_2$ (inače $\ell(i)$ - linearni potprostori u H). Dokazaćemo da uvek postoji bar jedan par vektora $x' \in V(\lambda_1)$, $x'' \in V(\lambda_2)$, takav da je $\langle x', x'' \rangle = 0$ ($x', x'' \neq 0$). Razlikovaćemo dva slučaja.

<u>Slučaj 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.</u> Neka su x', x'' bilo koja dva vektora $\neq$ od 0 iz tih potprostora. Tada je:

$$\lambda_1 \langle x', x'' \rangle = \langle \lambda_1 x', x'' \rangle = \langle Ax', x'' \rangle =$$

$$= \varphi \langle x', Ax'' \rangle = \varphi \langle x', -\lambda_2 x'' \rangle = -\lambda_2 \varphi \langle x', x'' \rangle,$$

i na osnovu učinjene pretpostavke ($|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$), $\langle x', x'' \rangle = 0$.

<u>Slučaj 2: $\lambda_1 = \lambda_2$.</u> Može se pretpostaviti da je $\lambda_1 \neq 0$, jer je slučaj $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ($A \equiv 0$) - trivijalan.

Za bilo koja dva vektora x', x'' iz tih potprostora biće

$$\lambda_1 \langle x', x'' \rangle = -\lambda_1 \varphi \langle x', x'' \rangle,$$

dakle $\langle x', x'' \rangle \in \{ \chi : \varphi(\chi) = -\chi \}$. Stoga se $\langle x', x'' \rangle$ može predstaviti u obliku $\gamma^2 j$, gde $\gamma^2 \in \pi(i)$. Neka je x_1 fiksirani vektor iz $V(\lambda_1)$ i $\langle x_1, x'' \rangle = \theta_1 j \neq 0$. S obzirom da je $\lambda_1 = \lambda_2$ potprostor $V(\lambda_1)$ je $\ell(i)$-dimenzije jednake 2. Stoga skup $\Gamma = \{ \alpha x_1 \mid \alpha \in \pi(i) \}$ ne iscrpljuje $V(\lambda_1)$, te postoji bar jedno $x_1' \in V(\lambda_1) \setminus \Gamma$ ($x_1' \neq 0$). Ako pretpostavimo da je $\langle x_1', x'' \rangle = \theta_1' j \neq 0$, lako se vidi da za vektore $\beta x_1'$ ($\beta \in \pi(i)$), skalari $\langle \beta x_1', x'' \rangle = \beta \theta_1' j$ opisuju skup $\pi(i) j$. Stoga je za neko $\beta = \beta_0$,

$$\langle \beta_0 x_1', x'' \rangle = \theta_1 j = \langle x_1, x'' \rangle.$$

Ako stavimo $x' = x_1 - \beta_0 x_1'$ ($x' \in V(\lambda_1)$), imaćemo $\langle x', x'' \rangle = 0$ i $x' \neq 0$ zbog $\ell(i)$ - nezavisnosti vektora x_1 i x_1'.

Time je tvrđenje dokazano.

Neka su dalje x', x'' bilo koja dva jedinična, uzajamno ortogonalna vektora iz $V(\lambda_1)$ i $V(-\lambda_2)$. Označimo sa M potprostor

$$M = \{ \alpha x' + \beta x'' \mid \alpha, \beta \in \pi(i) \}$$

Dokazaćemo da funkcija $g(x) = \langle Ax, x \rangle$ ($x \in M$, $\|x\| = 1$) uzima sve vrednosti sa odsečka $[-\lambda_2, \lambda_1]$. Imaćemo:

$$g(x) = \langle A(\alpha x' + \beta x''), \alpha x' + \beta x'' \rangle =$$

$$= \langle \alpha \lambda_1 x' - \beta \lambda_2 x'', \alpha x' + \beta x'' \rangle =$$

$$= \alpha\lambda_1\bar{\alpha} - \beta\lambda_2\bar{\beta} = |\alpha|^2\lambda_1 + |\beta|^2(-\lambda_2)$$
$$(\|x\|^2 = \|\alpha x' + \beta x''\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1),$$

odakle neposredno dobijamo tvrđenje.

Time je dokazano da je $P(i) = conv\{\theta(i)\}$ dakle zatvoreni interval $[-\|A\|, \|A\|]$ realne ose, i $W(A)$ odgovarajuća 3-dimenzionalna kugla potprostora $\Phi^{\perp}$.

<u>S T A V 3.10. Numerički rang samoadjungovanog $\mathcal{L}_\varphi$ - linearnog operatora ($\varphi \neq id$), u Vaksovom prostoru $\mathcal{L}$ - ortogonalne dimenzije veće od 1, je uvek konveksan skup.</u>

D o k a z. Označimo opet: $P(i) = W(A) \cap \pi(i)$, i dokažimo da je on konveksan. Uočimo proizvoljnu tačku $m_1 = \langle Ax_1, x_1\rangle \in P(i)$ ($\|x_1\| = 1$) ; može se pretpostaviti da je $m_1 \neq 0$, i određenosti radi uzećemo da je $m_1 > 0$. Dokazaćemo da postoji vektor $x_2 \perp x_1$ ($\|x_2\| = 1$) takav da je

$$\langle Ax_2, x_2\rangle = -a\,m_1 \quad (a \geq 0).$$

Zaista, ako za sve vektore x_2 ($x_2 \perp x_1$) nije ispunjeno identički $\langle Ax_2, x_2\rangle = 0$, već naprimer

$$\langle Ax_2, x_2\rangle = b\,z \quad (b \in \mathbb{R};\ z \in \Phi^{\perp},\ \|z\| = 1),$$

tada postoji neko $\alpha \in Q$ takvo da je $\varphi(\alpha)\,z\,\bar{\alpha}^{1} = -\operatorname{sgn} b$.
Za takvo α biće:

$$\langle A(\alpha x_2), \alpha x_2\rangle = b\,\varphi(\alpha)\,z\,\bar{\alpha}^{1} = -|b| = -a\,m_1 \quad (a \geq 0),$$

i vektor $\alpha x_2 \perp x_1$.
Neka je x_2 fiksirani vektor ortogonalan na x_1 ($\|x_2\| = 1$) takav da je

$$m_2 = \langle Ax_2, x_2\rangle = -a\,m_1 \quad (a \geq 0).$$

Zbog simetričnosti skupa $P(i)$ u odnosu na koordinatni početak, dovoljno je pokazati da odsečak $[m_2, m_1] = [-a m_1, m_1] \subseteq P(i)$.

Uočimo $\mathcal{L}$ - linearan potprostor generisan vektorima x_1, x_2:

$$E = \{\alpha x_1 + \beta x_2 \mid \alpha, \beta \in Q\}.$$

Pomoću preslikavanja $\alpha x_1 + \beta x_2 \longrightarrow (\alpha, \beta)$, on je očigledno izomorfan sa prostorom $Q^2 = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in Q\}$ sa levim množenjem skalarima iz Q.

Stavimo: $m_2 = \langle Ax_2, x_2\rangle$, $m_1 = \langle Ax_1, x_1\rangle = \varphi(m_2)$ i uočimo u prostoru Q^2 sledeći operator:

$$B(\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha) m_1 + \varphi(\beta) m_2, \varphi(\alpha) m_1 + \varphi(\beta) m_2).$$

Nije teško videti da je on λ - linearan i samoadjungovan, i da se skup

$$\{\langle Ax, x\rangle \mid x \in E, \|x\| = 1\}$$

poklapa sa numeričkim rangom $W(B)$. Osim toga je, ako stavimo $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1) \in Q^2$,

$$m_1 = \langle Ax_1, x_1\rangle = \langle Be_1, e_1\rangle,$$
$$m_2 = \langle Ax_2, x_2\rangle = \langle Be_2, e_2\rangle.$$

Na osnovu prethodne leme, skup $W(B)$, a time i $P(A)$, sadrži ceo odsečak $[m_2, m_1] = [-a m_1, m_1]$, što je i trebalo dokazati.

Stoga je i u ovom slučaju skup $P(A)$ (zatvoreni ili otvoreni) interval realne ose, i n.r. $W(A)$ (potpuno otvorena ili zatvorena) kugla u potprostoru $\Phi^{\perp}$. Njen radijus poklapa se sa normom operatora A. Osim toga, omotač te kugle pripada spektru operatora A. □

Primetimo najzad da dokazano tvrđenje nije tačno ako je prostor dimenzije 1. Zaista, dovoljno je malo izmeniti operator iz primera 3.1.

Bilo bi još interesantno videti da li se svi prethodni rezultati o konveksnosti numeričkog ranga, mogu na neki način objediniti, tj. naći najopštija klasa operatora za koju važi uopštenje Teplic-Hauzdorfove teoreme.

3.2. Numerički rang operatora u normiranom prostoru.

Poznato je da se koncept numeričkog ranga operatora u Hilbertovom prostoru može na određeni način (tačnije na više načina) uopštiti na normirane prostore (v. [6] , [47] kao i [17] , [18]).

U ovoj tački pokazujemo da se slično može učiniti i za normirane prostore nad telom kvaterniona.

No bilo je iznenađujuće da se glavni rezultati (i posebno stav o bliskosti numeričkog ranga i prostornog numeričkog ranga) koji važe u kompleksnim normiranim prostorima, ne mogu preneti na uopštene linearne, pa čak ni na samo ℓ - linearne operatore u kvaternionskim normiranim prostorima. Stoga se, slično kao kod Teplic-Hauzdorfove teoreme, postavlja pitanje određivanja bar jedne (pogodne) klase, kao i najšire klase operatora, za koju ovi rezultati važe.

Pokazali smo da se zadovoljavajući rezultati dobijaju bar za klasu d - linearnih operatora; stoga u celoj ovoj tački posmatramo samo takve operatore.

Osim toga pokazali smo da za takve operatore važi uopštenje Teplic-Hauzdorfove teoreme, čime u jednom pravcu uopštavamo jedan od prethodno dobijenih rezultata koji se odnosi na $\ell_\gamma d$ - linearne operatore.

Neka je H normirani prostor nad telom kvaterniona, i H'_L levi dualni prostor prostora H .

<u>T E O R E M A</u> (Burbaki-Alaoglua). <u>Jedinična kugla $\mathcal{S}(H'_L)$ konjugovanog prostora H'_L je slabo kompaktna.</u>

Dokaz teoreme je potpuno sličan običnom (v. naprimer Wilansky - "Functional Analysis", s.239).

Napomenimo samo da se slaba, odnosno w^* - topologija u prostoru H'_L uvodi sa:

$$f_n \xrightarrow{w^*} f \iff f_n(x) \to f(x) \qquad (\forall x \in H).$$

Označimo sa $\mathcal{D}(H)$ skup svih ograničenih d - linearnih operatora na H , i za $A \in \mathcal{D}(H)$ definišimo:

$$(\alpha A)x = \alpha(Ax), \quad (A\alpha)x = A(\alpha x) \quad (\alpha \in \mathcal{Q}).$$

Skup $\mathcal{D}(H)$ sa ovako uvedenim množenjem skalarima je takođe normirani prostor, i štaviše normirana algebra. Važi sledeće:

(1°) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$; (2°) $(AB)\alpha = A(B\alpha)$;

(3°) $A(\alpha B) = (A\alpha)B$.

Označimo sa Σ jediničnu sferu prostora $\mathcal{D}(H)$, i sa $\mathcal{D}'_L$ njegov levi dualni prostor.

Za svako $F \in \Sigma$ definišimo skup

$$[\mathcal{D};F] = \{ w \in \mathcal{D}'_L \mid w(F)=1,\ \|w\|=1 \}.$$

Na osnovu Han-Banahove teoreme, to je neprazan podskup od $\mathcal{D}'_L$. Ako je dalje A proizvoljan d-linearan operator, definišimo:

$$V(\mathcal{D};A,F) = \{ w(AF) \mid w \in [\mathcal{D};F] \},$$
$$V(\mathcal{D};A) = \bigcup_{F\in\Sigma} V(\mathcal{D};A,F),$$

i $v(A) = \sup |V(\mathcal{D};A)|$.

Oba ova skupa sadržana su u kugli $\{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}$ i $v(A) \leq \|A\|$.

Skup $V(\mathcal{D};A)$ naziva se <u>numeričkim rangom</u> operatora A , i $v(A)$ odgovarajućim <u>numeričkim radijusom</u>.

Važi sledeće:

$$V(\mathcal{D};A_1+A_2) \subseteq V(\mathcal{D};A_1) + V(\mathcal{D};A_2),$$
$$V(I) = \{1\}, \quad V(\mathcal{D};\alpha A) = \alpha V(\mathcal{D};A) \quad (\alpha \in \mathbb{C}),$$

ali je u opštem slučaju $V(\mathcal{D};A\alpha)$ različito od $V(\mathcal{D};A)\alpha$ i $\alpha V(\mathcal{D};A)$. Osim toga $V(\mathcal{D};A) \supseteq V(\mathcal{D};A,F)$.

<u>S T A V 3.11. Ako je A proizvoljan operator iz skupa $\mathcal{D}(H)$, važi jednakost</u>

$$V(\mathcal{D};A) = V(\mathcal{D};A,I).$$

D o k a z. Dovoljno je dokazati da $V(\mathcal{D};A) \subseteq V(\mathcal{D};A,I)$. Ako je λ proizvoljna tačka skupa $V(\mathcal{D};A)$, biće $\lambda = w(F)$ gde je $\|F\|=1,\ w(F)=1,\ \|w\|=1$.

Definišimo funkcionelu w_1 na $\mathcal{D}(H)$ sa

$$w_1(B) = w(BF) \quad (B \in \mathcal{D}(H)).$$

Tada se lako proverava da $w_1 \in [\mathcal{D};I]$ i $\lambda = w_1(A) \in V(\mathcal{D};A,I)$.

<u>S T A V 3.12. Skup $V(\mathcal{D};A)$ je kompaktan konveksan podskup u Q.</u>

D o k a z. Dokaz je potpuno sličan običnom (v. na primer [18]). Naime neposredno se proverava da je $[\mathcal{D};I]$ konveksan, w^*- kompaktan podskup od $\mathcal{D}'_L$ (kompaktnost sledi iz w^*- zatvorenosti primenom Teoreme Burbaki-Alaoglua).

Kako je $V(\mathcal{D};A)=\{w(A): w\in[\mathcal{D};1]\}$ slika skupa $[\mathcal{D};1]$ pri w^*- neprekidnom preslikavanju $w \to w(A)$, dobijamo tvrđenje.

Za proizvoljan operator $A\in\mathcal{D}(H)$, označićemo sa $\Pi=\Pi_A$ sledeći podskup Dekartovog proizvoda $H\times H'_L$:

$$\Pi_A=\{(a,f_a)\mid \|a\|=1,\ f_a(a)=1,\ \|f_a\|=1\}.$$

Tada se skup

$$W(A)=\{f_a(Aa)\mid (a,f_a)\in\Pi_A\},$$

naziva prostornim numeričkim rangom (spatial numerical range) operatora A , i u slučaju Vaksovog prostora poklapa se sa običnim numeričkim rangom .

U opštem slučaju on je nekonveksan skup.

Primer 3.2.

Uočimo u prostoru $H=\mathbb{C}^2$ sa normom $\|(x_1,x_2)\|=$ $=|x_1|+|x_2|$ d. - linearni operator:

$$Ax=A(x_1,x_2)=(i x_1+x_2,\,-x_1-i x_2).$$

Može se videti da je prostorni numerički rang ovog operatora dat sa:

$$W(A)=\{i\,|a_1|-i\,|a_2|+\lambda\,|a_2|-\overline{\lambda}\,|a_1| \ :\ |a_1|+|a_2|=1,\ |\lambda|=1\},$$

i da se njegov presek sa ravni $\pi(i)$ poklapa sa običnim prostornim n.r. operatora A na kompleksnom normiranom potprostoru $H(i)=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, a to je nekonveksan skup (v. primer u [18] , s.98). ∎

Istaknimo još da i prostorni n.r. ima osobinu homogenosti s obzirom na levo množenje skalarima, naime $W(\alpha A)=\alpha W(A)$, dok za desno množenje skalarima to u opštem slučaju ne važi.

STAV 3.13. Ako je A proizvoljan operator iz $\mathcal{D}(H)$, važi inkluzija $W(A)\subseteq V(\mathcal{D};A)$.

Dokaz. Ako tačka $\lambda=f_a(Aa)\in W(A)\ ((a,f_a)\in\Pi_A)$, za proizvoljno $B\in\mathcal{D}(H)$ definisaćemo funkcionelu

$$w(B)=f_a(Ba).$$

Tada je $w(I)=1$ i $\|w\|=1$, odakle sleduje da

$\lambda \in V(\mathcal{D}; A, I) = V(\mathcal{D}; A)$.

Sledeće dve leme su po formulaciji i dokazima potpuno slične odgovarajućim običnim stavovima (v. napr. [47] ili [18]).

<u>L E M A 3.2.</u> Ako za $A \in \mathcal{D}(H)$ označimo:

$$\delta = \lim_{t \to +0} \frac{\|I + tA\| - 1}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\|I + tA\| - 1}{t}$$

tada je $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in V(\mathcal{D}; A)\} = \delta$.

<u>L E M A 3.3.</u> Ako je Γ podskup od $\mathcal{T}_A$ takav da je prirodna projekcija $\pi_1(\Gamma) = \{s \in H : (s, f_s) \in \Gamma\}$ gusta u $\mathcal{S}_H$ ili, posebno, jednaka $\mathcal{S}_H$, tada je

$$\sup\{\mathrm{Re}\, f_s(As) \mid (s, f_s) \in \Gamma\} = \delta .$$

Posebno je $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in W(A)\} = \delta$.

<u>S T A V 3.14.</u> <u>Za svaki d - linearni operator</u> A <u>važe jednakosti:</u>

$$\text{(1)} \qquad \overline{\mathrm{conv}}\{W(A)\} = V(\mathcal{D}; A),$$

$$\text{(2)} \qquad \sup|W(A)| = \sup|V(\mathcal{D}; A)| .$$

D o k a z. Iz prethodne leme dobija se

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in W(A)\} = \sup\{\mathrm{Re}\,\mu : \mu \in V(\mathcal{D}; A)\},$$

i zbog osobine homogenosti $W(A)$ i $V(\mathcal{D}; A)$ neposredno:

$$(*) \qquad \sup\{\mathrm{Re}\,(\alpha\lambda) : \lambda \in W(A)\} = \sup\{\mathrm{Re}\,(\alpha\mu) : \mu \in V(\mathcal{D}; A)\} \quad (\alpha \in Q)$$

Označimo: $M = \mathrm{conv}\{W(A)\}$. Treba da dokažemo da je $\overline{M} = V(\mathcal{D}; A)$.

Pretpostavimo suprotno tvrđenju, da postoji tačka $\lambda \in V(\mathcal{D}; A) \setminus \overline{M}$. Na osnovu poznatog stava o separaciji zatvorenog konveksnog skupa i tačke, u prostoru Q postojaće (3-dimenzionalna) hiperravan

$$(h): \qquad \langle \theta, q \rangle = \sum_1^4 \theta_\nu q_\nu = c \qquad (|\theta| = 1),$$

koja razdvaja tačku λ i skup $\overline{M}$. Može se pretpostaviti da je

$$(**) \qquad \sum_1^4 \theta_\nu \lambda_\nu > c , \quad \sum_1^4 \theta_\nu q_\nu \leq c \qquad (q = (q_\nu) \in M)$$

(u suprotnom slučaju treba uočiti skupove $-M$ i $-V(\mathcal{D}; A)$) .

Za $\alpha = \bar{\theta}$ biće:

$$\mathcal{R}e\,(\alpha\lambda) = \mathcal{R}e\,(\bar{\theta}\lambda) = \theta_1\lambda_1 + \dots + \theta_4\lambda_4\,,$$

$$\mathcal{R}e\,(\alpha q) = \theta_1 q_1 + \dots + \theta_4 q_4 \quad (q = (q_\nu) \in M),$$

i nejednakost $(**)$ je u protivrečnosti sa $(*)$.

Druga jednakost takođe se neposredno dokazuje. □

Slično kao u kompleksnim normiranim prostorima (v. [18]), prostorni numerički rang je uvek povezan skup. Kod izvođenja dokaza, uvodi se na Dekartovom proizvodu $H \times H'_L$ $n \times w^*$- topologija (proizvod normne topologije na H i w^*- topologije na H'_L), i koristi potpuno slično rasuđivanje kao u kompleksnom slučaju (v. [17] ili [18]).

Navodimo bez dokaza ovu osobinu.

S T A V 3.15. Prostorni numerički rang $W(A)$ proizvoljnog d - linearnog operatora A je povezan skup u telu Q. □

Ako je H Vaksov prostor, prostorni numerički rang poklapa se sa običnim n.r. operatora A.

Dokazaćemo da u tom slučaju važi uopštenje Teplic--Hauzdorfove teoreme.

S T A V 3.16. Prostorni numerički rang ograničenog d - linearnog operatora u Vaksovom prostoru je konveksan skup.

D o k a z. Neka su ξ_1, ξ_2 bilo koje dve tačke skupa $W(A)$, tj.

$$\xi_1 = \langle Ax_1, x_1\rangle, \quad \xi_2 = \langle Ax_2, x_2\rangle \quad (\|x_1\| = \|x_2\| = 1).$$

Kod dokaza da je ceo odsečak $[\xi_1, \xi_2]$ sadržan u $W(A)$, može se pretpostaviti da je $\xi_1 \neq \xi_2$ i štaviše, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$. Naime, ako uočimo operator $B = (\xi_1 - \xi_2)^{-1}(A - \xi_2 I) \in \mathcal{B}(H)$, biće očigledno $W(A) = \xi_2 + (\xi_1 - \xi_2)W(B)$.

Dokazaćemo da ako x opisuje sve jedinične vektore oblika $x_1\alpha + x_2\beta$, funkcija

$$g(\alpha, \beta) = \langle A(x_1\alpha + x_2\beta), x_1\alpha + x_2\beta\rangle$$

poprima sve vrednosti iz intervala $[0,1]$.

Imaćemo:

$$\|x\|^2 = \|x_1\alpha + x_2\beta\|^2 =$$
$$= \|x_1\|^2|\alpha|^2 + \|x_2\|^2|\beta|^2 + 2\,\mathcal{R}e\,\langle x_1, x_2\beta\bar\alpha\rangle =$$
$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,\mathcal{R}e\,\langle x_1, x_2\Delta\rangle \qquad (\Delta = \beta\bar\alpha),$$

$$g(\alpha,\beta) = \langle (Ax_1)\alpha + (Ax_2)\beta\,,\, x_1\alpha + x_2\beta\rangle =$$
$$= \langle Ax_1, x_1|\alpha|^2\rangle + \langle Ax_2, x_2|\beta|^2\rangle + \langle Ax_1, x_2\beta\bar\alpha\rangle +$$
$$+ \langle Ax_2, x_1\alpha\bar\beta\rangle =$$
$$= |\alpha|^2\xi_1 + |\beta|^2\xi_2 + \langle Ax_1, x_2\Delta\rangle + \langle Ax_2, x_1\bar\Delta\rangle =$$
$$= |\alpha|^2 + \langle Ax_1, x_2\Delta\rangle + \langle Ax_2, x_1\bar\Delta\rangle .$$

Uzmimo $\alpha = a$, $\beta = \gamma b$ (a, b - realni). Tada je $\Delta = \beta\bar\alpha = \gamma a b$ ($\gamma \in \mathcal{Q}$, zasad neodređeno), i

$$\|x\|^2 = a^2 + b^2|\gamma| + 2ab\,\mathcal{R}e\,\langle x_1, x_2\gamma\rangle,$$
$$g(a, \gamma b) = a^2 + ab\,[\langle Ax_1, x_2\gamma\rangle + \langle Ax_2, x_1\bar\gamma\rangle].$$

Dokazaćemo da se može odabrati $\gamma \in \mathcal{Q}\setminus 0$, tako da je

1. izraz $m = \langle Ax_1, x_2\gamma\rangle + \langle Ax_2, x_1\bar\gamma\rangle$ realan,

2. $|\gamma| = 1$ i $c = \mathcal{R}e\,\langle x_1, x_2\gamma\rangle \geq 0$.

Dovoljno je ispuniti samo osobinu 1, jer se 2. lako ispunjava odabiranjem $\gamma = \pm\gamma_0/|\gamma_0|$ (γ_0 iz 1.).

Neka je $\gamma_0 = \gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3 + k\gamma_4$ i

$$\langle Ax_1, x_2\rangle + \langle Ax_2, x_1\rangle = q_1,$$
$$\langle Ax_1, x_2 i\rangle - \langle Ax_2, x_1 i\rangle = q_2,$$
$$\langle Ax_1, x_2 j\rangle - \langle Ax_2, x_1 j\rangle = q_3,$$
$$\langle Ax_1, x_2 k\rangle - \langle Ax_2, x_1 k\rangle = q_4.$$

Tada je izraz $m = \sum_1^4 (\mathcal{R}e\, q_\nu)\gamma_\nu + \sum_1^4 (\mathcal{J}m\, q_\nu)\gamma_\nu$ realan ako i samo ako je:

$$(*) \qquad \sum_1^4 (\mathcal{J}m\, q_\nu)\gamma_\nu = 0 .$$

Kako su skalari $\mathcal{J}m\, q_1, \dots, \mathcal{J}m\, q_\nu$ čisto imaginarni, jednačina $(*)$ ima bar jedno netrivijalno realno rešenje $\gamma_1, \dots$ $\dots, \gamma_4$. Tada je $\gamma_0 = \gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3 + k\gamma_4 \neq 0$, čime je tvrđenje dokazano.

Osim toga je $c = \mathcal{R}e\,\langle x_1, x_2\gamma\rangle \geq 0$, $|c| \leq \|x_1\|\|x_2\||\gamma| = 1$, dakle $0 \leq c \leq 1$.

Po pretpostavci je:

$$\|x\|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\bar{c} = 1 \ ,$$

$$g(a, \gamma b) = a^2 + ab\,m \quad (m \text{ - realno, jednako ili} \neq 0).$$

Iz prve jednačine sledi:

$$b^2 + 2acb + a^2 - 1 = 0, \quad b = -ac + \sqrt{a^2c^2 + 1 - a^2}$$

(uzimamo pozitivan koren, pri čemu pretpostavljamo da je $0 \leq a \leq 1$) , odakle je

$$g_1(a) = g(a, \gamma b) = a^2 + am\left[-ac + \sqrt{a^2c^2 + 1 - a^2}\,\right].$$

Kako je $g_1(0) = 0$, $g_1(1) = 1$ i $g_1(a)$ - neprekidna funkcija po a $(0 \leq a \leq 1)$, ona poprima sve vrednosti iz intervala $[0, 1]$. Time je stav dokazan.

3.3. Spektar jedne klase operatora.

U ovoj tački posmatramo normalne ℓ_γ- linearne operatore u Vaksovom prostoru H , dobijamo jednu vrstu spektralne dekompozicije takvog operatora, i detaljnije opisujemo spektar kompaktnih operatora u Vaksovom prostoru.

Naglasimo da je inače, u fundamentalnom radu [95] , Tajhmiler 1936. god. između ostalog potpuno rešio i problem spektralne dekompozicije proizvoljnog ℓ - linearnog normalnog (ne-samoadjungovanog) operatora u Vaksovom prostoru, i dobio neku vrstu analogona odgovarajućoj dekompoziciji u Hilbertovom prostoru.

Ne znajući za ovaj rezultat, indijski matematičar Visvanat u radu [102] , i svojoj tezi, nezavisno od Tajhmilera dolazi pored drugih svojih rezultata, i do rezultata identičnog prethodnom.

Oni su oba dokazali da se svaki takav normalni ne-samoadjungovani operator može prikazati u obliku

$$A = \int_{(a,b)\in\mathbb{C}^+} (a + bJ)\, dE_{(a,b)}$$

gde operator J pripada jednoj klasi imaginarnih (tj. koso-adjungovanih) operatora i spektralna mera $E(a,b)$ je parametrisana u odnosu na algebru svih Borelovih skupova u poluravni $\mathbb{C}^+ = \mathbb{R}(i)^+$.

Ako dozvolimo sebi izvesnu slobodu izražavanja, i ovakvu dekompoziciju (u kojoj se pojavljuje t - imaginarni operator $\mathcal{J}$) ,nazovemo "uzdužnom", naša dekompozicija iz Stava 3.18 , koju dokazujemo najpre u slučaju kompaktnih normalnih operatora, mogla bi se nazvati "poprečnom", i predstavlja određeno "preplitanje" prethodne.

Iako su po obliku ove dekompozicije različite, one su u suštini ekvivalentne (jedna se lako dobija iz druge) , i obe se lako izvode primenom odgovarajuće dekompozicije normalnih operatora u Hilbertovom prostoru. Razlika je jedino u tome što umesto karakterističnog operatora $\mathcal{J}$, ovde u prvi plan stavljamo pojam τ - sfere i spektralnu meru $E(\tau)$ operatora A parametriziramo u odnosu na algebru svih Borelovih φ - rotabilnih skupova u telu skalara, ili ekvivalentno, u odnosu na takvu algebru podskupova celele kompleksne ravni $\mathbb{C}$.

Malo uopštenje u odnosu na rezultat Tajhmilera i Visvanata, sastoji se takođe u tome što istu dekompoziciju dokazujemo za slučaj uopštenih ℓ_φ - linearnih operatora.

Inače, pod τ - sferom (koja obuhvata tačku λ) , podrazumevamo skup $\tau(\lambda) = rot_\varphi\{\lambda\}$. Nije teško videti da je ona - realna 3-dimenzionalna sfera u 4-dimenzionalnom telu skalara, i u odnosu na celo telo ima sličnosti sa tačkama u ravni: bilo koje dve τ - sfere se ili poklapaju ili su disjunktne, i unija svih njih je celo telo Q.

1. Neka je H konačno-dimenzionalni Vaksov prostor dimenzije n (kako su na osnovu Stava 2.3,leva i desna ortogonalna dimenzija prostora identične, može se govoriti jednostavno o dimenziji prostora H) .

Ako je A bilo koji ℓ_φ - linearan operator u prostoru H , spektar $\sigma(A)$ svodi se na punktualni spektar, i kao φ - rotabilan skup,predstavlja neku uniju (disjunktnih) τ - - sfera; nazivaćemo ih sopstvenim τ - sferama operatora A . S obzirom da je prostor $H[p_1] = \{H, [\cdot,\cdot]_{p_1}\}$ (pri čemu je $\pi(p_1)$ - svojstvena ravan automorfizma φ) dimenzije $2n$, spektar $\sigma(p_1)$ operatora A u tom prostoru sastoji se od najviše $2n$ φ-simetričnih sopstvenih vrednosti, odakle sledi da i sopstvenih τ - sfera operatora A ima najviše n .

Označimo sa $V(\lambda)$ ($\lambda \in \pi(p_1)$ - svojstvena ravan) sopstveni potprostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ $(\lambda \in \sigma_p(A))$, i sa $K(\lambda)$ odgovarajući korenski potprostor.

Dalje uvedimo potprostore:

$$\mathcal{V}(\lambda) = V(\lambda) + V(\varepsilon\bar{\lambda}),$$
$$\mathcal{K}(\lambda) = K(\lambda) + K(\varepsilon\bar{\lambda}) \qquad (\lambda \in \pi(p_1)).$$

Nije teško videti da je

$$V(\varepsilon\bar{\lambda}) = p_2 V(\lambda), \quad K(\varepsilon\bar{\lambda}) = p_2 K(\lambda) \qquad (p_2 \perp p_1),$$

odakle lako dobijamo da su $\mathcal{V}(\lambda)$ i $\mathcal{K}(\lambda)$ 1 - linearni potprostori od H. Nazivaćemo ih sopstvenim i korenskim potprostorom koji odgovaraju sopstvenoj sferi $\tau(\lambda) = \tau_\lambda$, i označavati još i sa $\mathcal{V}(\tau_\lambda)$, $\mathcal{K}(\tau_\lambda)$.

Uzimajući u obzir i algebarske višestrukosti sopstvenih τ - sfera (tj. 1 - dimenzije odgovarajućih korenskih potprostora), može se videti da tih sopstvenih sfera ima "tačno n".

Time je spektar ℓ_φ - linearnog operatora u konačno-dimenzionalnom prostoru potpuno opisan.

2. Neka je dalje, A normalan ℓ_φ - linearan operator u Vaksovom prostoru dimenzije n.

Tada su sopstveni potprostori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima ortogonalni u prostoru $H[p_1]$ ($\pi(p_1)$ - svojstvena ravan od φ), ali ne moraju biti ortogonalni u H. No dokazaćemo da su sopstveni potprostori koji odgovaraju različitim sopstvenim τ - sferama ortogonalni.

L E M A 3.4. Sopstveni potprostori $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2)$, normalnog operatora, koji odgovaraju sopstvenim vrednostima λ_1, λ_2 sa različitih sopstvenih sfera, su ortogonalni.

P r i m e d b a. Reći ćemo da su λ_1, λ_2 ekvivalentni, ako pripadaju istoj τ - sferi, i neekvivalentni u suprotnom slučaju.

D o k a z. Dokažimo najpre da je za svaki normalni operator $A \in \mathcal{L}_\varphi(H)$ ispunjena jednakost

$$\| Ax - \lambda x \| = \| A^* x - \varphi(\bar{\lambda}) x \| \quad (x \in H, \lambda \in \mathbb{Q}).$$

Imaćemo da je:

$$\|Ax-\lambda x\|^2=\langle A^*Ax,x\rangle-2\,\mathcal{R}e(\langle Ax,x\rangle\bar{\lambda})+|\lambda|^2\|x\|^2,$$
$$\|A^*x-\varphi(\bar{\lambda})x\|^2=\langle AA^*x,x\rangle-2\,\mathcal{R}e(\langle A^*x,x\rangle\varphi(\lambda))+|\varphi(\bar{\lambda})|^2\|x\|^2.$$

No $|\varphi(\bar{\lambda})|=|\lambda|$, i kako je $\langle A^*x,x\rangle=\varphi\,\overline{\langle Ax,x\rangle}$, za dovršenje dokaza dovoljno je iskoristiti činjenicu da je za svako q , $q_1\in\mathcal{Q}$ ispunjeno $\mathcal{R}e(q)=\mathcal{R}e(\varphi(q))$, $\mathcal{R}e(q\,q_1)=\mathcal{R}e(q_1\,q)$.

Odavde posebno sleduje da je za svako $\lambda\in\sigma_p(A)$ ispunjeno $V(\lambda)=V(\varphi(\bar{\lambda}))$.

Ako su dalje x_1 , x_2 bilo koja dva različita od nule vektora iz potprostora $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2)$, biće:

$$\lambda_1\langle x_1,x_2\rangle=\langle Ax_1,x_2\rangle=\varphi\langle x_1,A^*x_2\rangle=$$
$$=\varphi\langle x_1,\varphi(\bar{\lambda}_2)x_2\rangle=\varphi(\langle x_1,x_2\rangle\varphi(\lambda_2))=(\varphi\langle x_1,x_2\rangle)\lambda_2\,,$$

odakle bi za $q=\langle x_1,x_2\rangle\neq 0$ sledilo $\lambda_1=\varphi(q)\lambda_2 q^{-1}\in\tau(\lambda_2)$, što je suprotno pretpostavci. □

Iz prethodne leme neposredno dobijamo da su sopstveni potprostori $\mathcal{V}(\tau_1)$, $\mathcal{V}(\tau_2)$ normalnog operatora ($\tau_1\neq\tau_2\subseteq\sigma_p(A)$) uvek ortogonalni.

Ako su $\tau_1,\dots,\tau_m$ sve sopstvene sfere normalnog operatora A , primenom obične spektralne teoreme za normalne operatore u prostoru $H[p_1]$ ($\tau(p_1)$ - svojstvena ravan), lako dobijamo da je:

$$\mathcal{V}(\tau_1)\oplus\dots\oplus\mathcal{V}(\tau_m)=H\,,$$

i potprostor $\mathcal{V}(\tau_\nu)$ redukuje A .

Ako označimo sa $E(\tau_\nu)$ ortoprojekotor na ℓ - linearni potprostor $\mathcal{V}(\tau_\nu)$ i sa $A(\tau_\nu)$ restrikciju operatora A na taj potprostor, tada je

$$\sum_{\nu=1}^{m}\oplus E(\tau_\nu)=I\,,\qquad A=\sum_{1}^{m}\oplus A(\tau_\nu)\,E(\tau_\nu)\,,$$

i dakle $\{E(\tau_\nu)\}$ familija međusobno ortogonalnih ortoprojektora.

3. Sledećim stavom opisujemo spektar kompaktnih i normalnih kompaktnih operatora u (beskonačno-dimenzionalnom) Vaksovom prostoru.

S T A V 3.17. Spektar kompaktnog ℓ_φ - linearnog operatora A sastoji se od punktualnog spektra i tačke $\lambda = 0$ pri čemu sadrži najviše prebrojivo mnogo sopstvenih τ - sfera; njihovi centri i poluprečnici teže nuli.

Sopstveni potprostori koji odgovaraju sopstvenim sferama su konačnih ℓ - dimenzija.

Ako je A osim toga i normalan operator, postoji familija međusobno ortogonalnih ortoprojektora $\{E(\tau_\nu)\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, \tau_0 = \{0\})$, koja odgovara sopstvenim sferama $\tau_\nu \subseteq \sigma_p(A)$, takva da je, ako sa A_ν označimo restrikciju $A|_{E(\tau_\nu)H}$:

$$(1^\circ) \quad A = \sum_0^\infty A_\nu E(\tau_\nu) \quad \text{(u unif. konverg. operatora);}$$

$$(2^\circ) \quad \text{Potprostor } E(\tau_\nu)H \text{ redukuje } A \text{ ;}$$

$$(3^\circ) \quad \sigma(A_\nu) = \sigma_p(A_\nu) = \tau_\nu \quad ;$$

$$(4^\circ) \quad A^* = \sum_0^\infty A_\nu^* E(\tau_\nu) .$$

D o k a z. Prvi deo tvrđenja dokazuje se slično kao u konačno-dimenzionalnom slučaju, koristeći pritom odgovarajuće osobine operatora u prostoru $H[\varphi_1]$.

Ako je dalje A normalan kompaktan ℓ_φ - linearan operator, sopstveni potprostori $\mathcal{V}(\tau_1)$ i $\mathcal{V}(\tau_2)$ koji odgovaraju različitim sopstvenim τ - sferama τ_1 i τ_2, biće ortogonalni. Ako označimo sa $E(\tau_\nu)$ ortoprojektor na sopstveni potprostor $\mathcal{V}(\tau_\nu)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, i sa $P(\lambda_\nu)$ ortoprojektor (u prostoru $H[\varphi_1]$) na sopstveni potprostor $V(\lambda_\nu)$ $(\lambda_\nu \in \sigma(\varphi_1))$ nije teško videti da je

$$E(\tau_\nu) = \begin{cases} P(\lambda_\nu), & \lambda_\nu = \varepsilon\bar{\lambda}_\nu \\ P(\lambda_\nu) + P(\varepsilon\lambda_\nu), & \lambda_\nu \neq \varepsilon\bar{\lambda}_\nu \end{cases} .$$

Dekompozicija (1°) se sada lako dobija iz odgovarajuće dekompozicije normalnog operatora u prostoru $H[\varphi_1]$ ([4], Teor.24.5), a takođe i preostale osobine.

4. Neka je A ograničen normalan ℓ_φ - linearan operator u Vaksovom prostoru H (pritom ne-samoadjungovan).

Označimo sa $\mathfrak{B}(\mathbb{Q})$ klasu svih φ - rotabilnih skupova $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}$, za koje $\nabla = \Lambda \cap \Pi(\varphi_1)^+$ pripada klasi $\mathfrak{B}(\mathbb{C}^+)$ svih Borelovih skupova u poluravni $\mathbb{C}^+ = \Pi(\varphi_1)^+$ ($\mathbb{C}^+$ - gornja, odnosno desna poluravan svojstvene ravni $\Pi(\varphi_1)$) .

Osim toga, označimo sa $\mathcal{T}^{\vee}$ klasu svih τ - sfera u telu Q.

S T A V 3.18. Za svaki normalni ℓ_{p} - linearni operator prostora H, postoji familija ℓ_{p} - linearnih kosadjungovanih operatora $\{A_{\tau}\}$ $(\tau \in \mathcal{T}^{\vee})$ i spektralna mera $\{E(\Delta)\}$ $(\Delta \in \mathcal{B}(Q))$ sastavljena od ℓ - linearnih ortoprojektora, takva da se operator A može prikazati u obliku operatorskog integrala

$$(*) \qquad A = \int_{Q} A_{\tau}\, E(d\Delta)\,.$$

Za svako $\Delta \in \mathcal{B}(Q)$, potprostor $H_{\Delta} = E(\Delta) H$ redukuje A, i $\sigma(A|_{H_{\Delta}}) = \Delta$.

D o k a z. Označimo sa $E'(\nabla)$ $(\nabla \in \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ spektralnu meru operatora A u prostoru $H[p_1]$.

Ako $\Delta = \mathrm{rot}_{p}\{\nabla\} = \mathrm{rot}_{p}\{\nabla \cup \varepsilon \nabla^{*}\} \in \mathcal{B}(Q)$ $(\nabla \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{+}))$, stavićemo:

$$E(\Delta) = E'(\nabla \cup \varepsilon \nabla^{*}).$$

Lako se proverava da je $\{E(\Delta)\}$ familija ortogonalnih ℓ - linearnih projektora i pritom spektralna mera na skupu $\mathcal{B}(Q)$ (v. [102]).

Ako kao u navedenom radu uvedemo operator $\mathcal{J}'$ sa

$$\mathcal{J}' = p_1 E'(\mathbb{C}^{+} \setminus \mathbb{R}_{\varpi}) - p_1 E'(\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}^{+}),$$

operator $\mathcal{J}$ definisaćemo sa: $\mathcal{J} = \mathcal{J}' + \varepsilon (p_2 I) \mathcal{J}' (p_2 I)$.
Tako definisan operator $\mathcal{J}$ je ℓ_{p} - linearan i kosoadjungovan.

Ako za svako $\tau \in \mathcal{T}^{\vee}$ uvedemo operator

$$A_{\tau} = A_{\tau_{\lambda}} = 1/2 \left[\frac{\lambda + \varepsilon\bar{\lambda}}{2} + \varpi \frac{\lambda - \varepsilon\bar{\lambda}}{2} \mathcal{J} \right]$$

primenom obične spektralne dekompozicije operatora A u prostoru $H[p_1]$ neposredno se dobija razlaganje (*) , a takođe i preostale osobine. □

U definiciji gornjeg integrala, pretpostavlja se da se uvek vrši dekompozicija ravni $\pi(p_1)$ u familiju γ -simetričnih poluotvorenih pravougaonika od kojih svaki pripada poluravni $\mathbb{C}^{+}$ ili $\mathbb{C}^{-}$, te su svaka dva od njih disjunktni ili imaju zajedničku stranicu na osi $\lambda = \varepsilon\bar{\lambda}$.

D E O IV

NUMERIČKI RANG I SPEKTAR NEOGRANIČENIH OPERATORA

4.1. Numerički rang neograničenih operatora u kompleksnim Hilbertovim prostorima.

1. Ako je A ograničeni linearni operator u kompleksnom Hilbertovom prostoru, $W(A)$ i $\sigma(A)$ njegov numerički rang i spektar, poznato je da važi sledeće:

(1°) $\overline{W(A)}$ je zatvoreni konveksni skup (Toeplitz-Hausdorffova teorema);

(2°) Spektar $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$;

(3°) Ako $\lambda \notin \overline{W(A)}$, rezolventa $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ zadovoljava nejednakost

$$\|R_\lambda(A)\| \leq 1/d(\lambda;\overline{W(A)}) \cdot$$

Poslednje dve osobine bile su dokazane od A. WINTNERa (Wintner - "Zur theorie der beschränkten Bilinearformen", Math. Zeits. - 30(1929), 228-82).

On je ispitivao pod kojim dovoljnim uslovima operator zadovoljava jednakost

$$\overline{W(A)} = \operatorname{conv}\{\sigma(A)\} \tag{4°}$$

(tj. predstavlja konveksoidan operator, u terminologiji HALMOŠa [33]), i dokazao da je svaki normalni operator - konveksoidan.

Nezavisno jedan od drugoga, STAMPFLI [87] i PUTNAM [69] , ispitujući klasu hiponormalnih operatora, dokazali su da je svaki takav operator konveksoidan, a potpuno nezavisno od njih, ORLAND [65] potpuno rešava problem dokazujući: Ograničeni linearni operator je konveksoidan, ako i samo ako za svako λ izvan skupa $\operatorname{conv}\{\sigma(A)\} = \sigma'$ njegova rezolventa zadovoljava nejednakost

$$(5^\circ) \qquad \|\mathcal{R}_\lambda(A)\| \leq 1/d(\lambda; \sigma') \quad .$$

Isti rezultat je između ostalog dobio i nešto kasnije S.HILDEBRANT u radu [35] koristeći spektralne skupove.

Cilj ovog dela je da dokažemo analogne osobine za izvesne klase neograničenih operatora.

Između ostalog, uvodimo pojam σ - numeričkog ranga neograničenog operatora, dokazujemo kriterijum konveksoidnosti sličan ORLANDovom, i uopštavajući na neograničene operatore osobinu hiponormalnosti, dokazujemo da je i svaki takav neograničeni operator - konveksoidan.

2. Pod neograničenim operatorom u kompleksnom Hilbertovom prostoru, podrazumevamo zatvoreni neograničeni operator definisan na gustom potprostoru. Domen i rang operatora označavaćemo sa $\mathcal{D}_A$ (ili $\mathcal{D}(A)$) i $\mathcal{R}(A)$, proširenu kompleksnu ravan (sa tačkom $\lambda=\infty$) sa $\overline{\mathbb{C}}$. Ako je $\sigma(A)$ spektar operatora A, prošireni spektar tj. skup $\sigma(A)\cup\{\infty\}$ označavaćemo sa $\sigma_e(A)$ (v. TAYLOR [94]).

Ako je S proizvoljan podskup kompleksne ravni $\mathbb{C}$, označavaćemo:

$$\alpha S+\beta = \{\alpha\lambda+\beta \mid \lambda\in S\},$$
$$S^{-1}= \{1/\lambda \mid \lambda\in S\}, \quad |S| = \{|\lambda| : \lambda\in S\}.$$

Pod atherencijom $\overline{S}$ skupa S podrazumevamo atherenciju u ravni $\mathbb{C}$.

Ako je A neograničeni operator, tada je prošireni spektar $\sigma_e(A)$ neprazan zatvoreni podskup ravni $\overline{\mathbb{C}}$, štaviše kompaktan u topologiji te ravni ([, str. 257 i 298), ali je moguć slučaj da se on svodi samo na beskonačno daleku tačku. Naprimer, ako je A proizvoljan neograničeni operator za koji je inverz A^{-1} ograničen, definisan na celom prostoru H i $\sigma(A^{-1})=\{0\}$.

Označimo sa $\pi(A)$ aproksimativni spektar operatora A. Označićemo sa

$$\mathcal{R}_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1},$$

rezolventni operator, za svako λ izvan skupa $\pi(A)$; dakle ne pretpostavljamo da je on definisan na gustom potprostoru.

S T A V 4.1. Zatvoreni numerički rang $\overline{W(A)}$ neograničenog operatora je zatvoreni neograničeni konveksni skup u kompleksnoj ravni. Aproksimativni spektar $\pi(A)$ je zatvoreni podskup ravni $\mathbb{C}$ (eventualno prazan), sadržan u $\overline{W(A)}$ i za svako λ izvan $\overline{W(A)}$ važi nejednakost

$$(*) \qquad \|\mathcal{R}_\lambda(A)\| \leqslant 1/d(\lambda;\overline{W(A)}).$$

D o k a z. Dokaz generalisane Toeplitz-Hausdorffove teoreme je potpuno analogan odgovarajućem dokazu za ograničene operatore (napr. [4], str. 388). Može se videti da je ona posledica odgovarajuće osobine operatora u prostoru $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, dakle nezavisna od ograničenosti operatora.

Isto važi i za iskaz o aproksimativnom spektru (s obzirom da je skup regularnih tačaka

$$\varrho_0(A) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \sigma_e(A) = \mathbb{C}\setminus\sigma(A)$$

- otvoren), i takođe nejednakost $(*)$.

Treba još dokazati neograničenost skupa $\overline{W(A)}$.

Poznato je (, s.227; s.323), da iz $|\langle Ax,x\rangle| \leqslant c\,\|x\|^2$ $(x\in\mathcal{D}_A)$ sledi

$$|\langle Ax,y\rangle| \leqslant 2c\,\|x\|\,\|y\| \qquad (x,y\in\mathcal{D}_A).$$

S obzirom na neprekidnost skalarnog proizvoda, sledi da je ova nejednakost tačna za svako $x\in\mathcal{D}_A$, $y\in H$. No onda je (s.323):

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle \leqslant 2c\,\|x\|\cdot\|Ax\| \qquad (x\in\mathcal{D}_A),$$

tj. operator A bi bio ograničen, što je nemoguće. □

3. Kako je numerički rang $\overline{W(A)}$ konveksni neograničeni podskup ravni $\mathbb{C}$, njegova granica $\partial\,\overline{W(A)}$ je neograničena otvorena konveksna kriva, i poseduje tangentu u svim tačkama izuzev najviše prebrojivo mnogo njih (ovu osobinu nije teško dokazati koristeći odgovarajuću osobinu zatvorenih ograničenih konveksnih skupova).

Tačnije, mogući su sledeći slučajevi:

(1.) Granica $\partial\overline{W(A)}$ skupa $\overline{W(A)}$ je otvorena neograničena konveksna kriva (koja ne sadrži ni jednu pravu), te je komplement $\mathbb{C}\setminus\overline{W(A)}$ povezan skup (i u ekstremnom slučaju numerički rang predstavlja polupravu);

(2.) Skup $\overline{W(A)}$ predstavlja zatvorenu poluravan kompleksne ravni, i stoga je $\partial\overline{W(A)}$ – prava;

(3.) Skup $\overline{W(A)}$ je traka u ravni $\mathbb{C}$, i stoga je $\partial\overline{W(A)}$ skup tačaka dveju paralelnih pravih (i u ekstremnom slučaju, on predstavlja pravu);

(4.) Skup $\overline{W(A)}$ poklapa se sa celom ravni $\mathbb{C}$.

Dokazaćemo samo da je svaki od ovih slučajeva zaista moguć.

Primer 4.1.

Neka je H separabilni Hilbertov prostor sa ortonormalnim bazisom $\{e_\nu\}_{\nu\in N}$ i $\Gamma=\{\lambda_\nu\}_{\nu\in N}$ neki niz kompleksnih brojeva. Ako je

$$x=\sum_1^\infty \alpha_\nu e_\nu \qquad \left(\sum_1^\infty |\alpha_\nu|^2<\infty\right),$$

definisaćemo: $Ax=\sum\limits_1^\infty \lambda_\nu\alpha_\nu e_\nu$.

Tada je:

$$\mathcal{D}(A)=\left\{x=\sum_1^\infty \alpha_\nu e_\nu \;\Big|\; \sum_1^\infty (1+|\lambda_\nu|^2)|\alpha_\nu|^2<\infty\right\}.$$

Poznato je da je $\|A\|=\sup\{\Gamma\}=\sup\limits_{\nu\in N}|\lambda_\nu|$ (ograničeno ili ne), i ako je A ograničen operator,

$$\overline{W(A)}=\overline{conv}\{\Gamma\};$$

no, nije teško proveriti da ova jednakost važi i u slučaju neograničenog operatora.

Izabraćemo respektivno:

$$\Gamma_1=\{0\}\cup\{n+ni,\,n-ni : n\in N\} \quad i \quad \Gamma_1'=\{N\};$$

$$\Gamma_2=\{n,\,ni,\,-ni \mid n\in N\};$$

$$\Gamma_3=\{1\}\cup\{ni,\,-ni \mid n\in N\};$$

$$\Gamma_4=\{n,\,ni,\,-n,\,-ni \mid n\in N\},$$

$$\overline{W(A_1)} = \{z : -\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/4\} \; ; \; \overline{W(A_1')} = \{z \in \mathcal{R} : z \geq 1\};$$
$$\overline{W(A_2)} = \{z : \mathcal{R}e\, z \geq 0\} \; ; \; \overline{W(A_3)} = \{z : 0 \leq \mathcal{R}e\, z \leq 1\};$$
$$\text{i} \quad \overline{W(A_4)} = \mathbb{C} \quad .$$

Istaknimo još jednu osobinu proizvoljnog zatvorenog konveksnog skupa ravni $\mathbb{C}$.

Ako oslona prava ℓ nekog zatvorenog konveksnog skupa $S \subseteq \mathbb{C}$ označava bilo koju pravu koja seče S i ovaj skup se ceo nalazi u jednoj zatvorenoj poluravni $\ell(S)$ definisanoj pravom ℓ , tada je

$$S = \bigcap_{\ell} \ell(S)$$

(o ovoj osobini za opšte lokalno konveksne prostore umesto $\mathbb{C}$, videti u N.Dunford, J.T.Schwartz - "Linear Operators", deo I, str.453 ruskog prevoda).

4. Videli smo da je aproksimativni spektar uvek sadržan u $\overline{W(A)}$; pošto to nije tačno i za rezidualni spektar $\sigma_{res}(A)$, u opštem slučaju nije uvek ispunjeno $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$. Naprimer, ako je A zatvoreni (neograničeni) simetrični operator čiji su indeksi defekta jednaki (m, m) , i pritom različiti od 0, tada $W(A) \subseteq \mathcal{R}$, ali obe otvorene kompleksne poluravni $\mathbb{C}^+, \mathbb{C}^-$ pripadaju rezidualnom spektru i pritom nisu sadržane u $\overline{W(A)}$. Štaviše, pošto

$$\sigma_{res}(A) \subseteq W(A^*)^*,$$

i $W(A^*)$ je konveksno, sledi da je $W(A^*) = \mathbb{C}$; dakle u opštem slučaju je i $W(A^*) \neq W(A)^*$ (mada $\sigma(A^*) = \sigma(A)^*$) .

Sledeći iskaz daje bar jedan dovoljan uslov pod kojim važi inkluzija (2°).

Ako je za (neograničeni) operator A zadovoljena inklizuja $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(A)$, tada je

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)} \quad , \text{ i } \quad W(A^*) \subseteq W(A)^* \; .$$

Ako je štaviše, $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ tada je $W(A^*) = W(A)^*$.

Zaista, ako $\lambda \in \sigma_{res}(A)$, tada postoji neko jedinično $x \in \mathcal{D}(A^*)$ da je $A^* x = \bar{\lambda} x$. Tada $x \in \mathcal{D}(A)$ i

$$\lambda = \langle x, \bar{\lambda} x \rangle = \langle x, A^* x \rangle = \langle Ax, x \rangle \in W(A).$$

Drugi iskaz je takođe neposredan.

Gornja pretpostavka nije kontradiktorna; naprimer, ona je zadovoljena ako je A bilo koje produženje nekog neograničenog samoadjungovanog ili normalnog operatora.

S obzirom na prethodne rezultate, izgleda opravdano uvesti sledeći skup (izvesnu vrstu numeričkog ranga, koji ćemo zvati σ- numerički rang).

Definicija 4.1. σ - numerički rang je skup:

$$W_0(A) = \sigma(A) \cup W(A):$$

S T A V 4.2. Zatvoreni σ - numerički rang $\overline{W_0(A)}$ operatora A je zatvoreni konveksni skup u kompleksnoj ravni, koji se poklapa sa skupom $\overline{W(A)}$, ili predstavlja poluravan, ili celu ravan $\mathbb{C}$.

D o k a z. Kako su skupovi $\sigma(A)$ i $\overline{W(A)}$ zatvoreni (i poslednji je konveksan), dovoljno je dokazati iskaz o obliku skupa $\overline{W_0(A)}$.

Razlikovaćemo dva slučaja zavisno od toga da li je komplement $W' = \mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$ povezan ili ne.

Ako je on povezan, s obzirom da

$$W' \subseteq \mathbb{C} \setminus \pi(A) = \rho_0(A),$$

on je otvoren povezan skup, dakle sadržan u nekoj komponenti povezanosti skupa $\rho_c(A)$ (regularnih tačaka od A). No na osnovu poznate teoreme (, u svakoj takvoj komponenti, indeks defekta operatora A je konstantan, tj.

$$\dim \mathcal{R}(A - \lambda I)^{\perp} = \dim \mathcal{N}(A^* - \bar{\lambda} I) = const = m$$

(ortogonalna dimenzija), i zavisno od toga da li je $m = 0$, ili $m \neq 0$, biće

$$\overline{W_0(A)} = \overline{W(A)}, \quad \text{ili} \quad \overline{W_0(A)} = \mathbb{C}.$$

S obzirom na alternativu (1.)-(4.), nije teško videti da skup W' nije povezan ako i samo ako numerički rang $\overline{W(A)}$ predstavlja traku u ravni $\mathbb{C}$ (ili u ekstremnom slučaju, pravu te ravni), odakle koristeći slično rasuđivanje kao gore, dobijamo da je $\overline{W_0(A)}$ poluravan ili cela ravan $\mathbb{C}$.

5. Sledeći stav predstavlja glavni deo Teoreme 4.1, a njegov dokaz sličan je Orlandovom [63], ili Stampflijevom [87] za ograničene hiponormalne operatore.

S T A V 4.3. Ako je X proizvoljni (neograničeni) zatvoreni konveksni skup u kompleksnoj ravni, tada $\overline{W(A)} \subseteq X$ ako i samo ako za svako λ izvan skupa X rezolventa $R_\lambda(A)$ predstavlja ograničeni operator (neobavezno definisan na gustom potprostoru) i zadovoljava nejednakost

$$(**) \qquad \|R_\lambda(A)\| \leq 1/d(\lambda;X) .$$

P r i m e d b a. Ako pretpostavimo da je štaviše za svako takvo λ rezolventa definisana na gustom potprostoru i važi $(**)$, dobijamo odgovarajući kriterijum za inkluziju $\overline{W_0(A)} \subseteq X$.

D o k a z. Ako $\overline{W(A)} \subseteq X$, iz nejednakosti $(*)$ neposredno sledi $(**)$.

Obratno, neka važi $(**)$. Da bi dokazali da $\overline{W(A)} \subseteq X$, dovoljno je dokazati da je $\overline{W(A)}$ sadržano u svakoj oslonoj poluravni skupa X . Očigledno se možemo ograničiti na slučaj kada je odgovarajuća oslona prava - imaginarna osa, i

$$X \subseteq \{z : \mathrm{Re}\, z \geq 0\} .$$

Pretpostavimo da skup $\overline{W(A)}$ nije sadržan cec u odgovarajućoj poluravni. Tada postoji neko jedinično $x_0 \in \mathcal{D}_A$, da je $\langle Ax_0, x_0\rangle = a+ib$ $(a<0)$. Stoga je

$$\langle Ax_0 - ax_0 - ibx_0, x_0\rangle = 0 , \quad \text{tj. } Ax_0 = (a+ib)x_0 + y_0 \quad (x_0 \perp y_0).$$

Kako negativne tačke realne ose ne pripadaju skupu X , za njih je ispunjeno $(**)$, tj.

$$\|(A - mI)x\| \geq d(m;X) \geq |m| \qquad (m<0;\ x \in \mathcal{D}_A, \|x\|=1).$$

Stoga je:

$$\|(a-m+ib)x_0 + y_0\|^2 \geq |m|^2 ,$$

odakle sleduje:

$$a^2 - 2am + b^2 + \|y_0\|^2 = a^2 - 2|a|\cdot|m| + b^2 + \|y_0\|^2 \geqslant 0,$$

što je nemoguće za dovoljno velike $|m|$.

Stoga $\overline{W(A)} \subseteq \{z : \mathcal{R}e\, z \geqslant 0\}$ i lako, $\overline{W(A)} \subseteq X$.

Definicija 4.2. Neograničeni operator A zvaćemo konveksoidnim ako je

$$\overline{W_0(A)} = conv\{\sigma(A)\}.$$

Nije teško videti da je operator konveksoidan ako i samo ako $W(A) \subseteq conv\{\sigma(A)\}$.

Sada se može formulisati glavni stav.

T E O R E M A 4.1. *Neograničeni operator A je konveksoidan ako i samo ako je za svako λ izvan skupa $X = conv\{\sigma(A)\}$ ispunjena nejednakost $(**)$.*

Dokaz je neposredna posledica Stava 4.3 i prethodne primedbe.

P i t a n j e. Da li postoji veza između konveksoidnosti operatora i konveksoidnosti njemu adjungovanog operatora. – Na ovo pitanje zasad nemamo odgovor.

Kako je uvek $\pi(A) \subseteq \overline{W(A)}$, takođe je prirodno postaviti i pitanje kada je

$$\overline{W(A)} = conv\{\pi(A)\}.$$

Odgovor je – ako i samo ako za svako λ izvan skupa $X = conv\{\pi(A)\}$ važi nejednakost $(**)$. Dokaz je isti kao u Teoremi 4.1.

Navodimo još dve činjenice.

1/. *Neograničeni operator A je simetričan ako i samo ako zadovoljava uslov*

$$\| R_\lambda(A) \| \leqslant 1/|\mathcal{I}m\, \lambda|,$$

za svako nerealno λ.

2/. *Neograničeni simetrični operator A je poluograničen u smislu da $W(A) \subseteq [c, +\infty)$ $(c \in \mathcal{R})$ ako i samo ako zadovoljava uslov*

$$\| R_\lambda(A) \| \leqslant 1/|\lambda - c|,$$

za svako $\lambda \in (-\infty, c)$.

Prva od njih je posledica prethodne teoreme, a druga se može dokazati koristeći sličan postupak kao u toj teoremi.

6. U ovom delu uvodimo pojam (neograničenog) seminormalnog operatora (o ograničenim seminormalnim operatorima može se videti u [69], [70], [86] itd.), i dokazujemo da je svaki takav operator konveksoidan, kao i u ograničenom slučaju.

Definicija 4.3. Neograničeni operator A zvaćemo seminormalnim ako je:

$$\text{(a)} \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \quad , \quad \mathcal{D}(A^*A) = \mathcal{D}(AA^*) \quad ;$$

$$\text{(b)} \quad \|Ax\| \geqslant \|A^*x\| \quad \text{ili} \quad \|Ax\| \leqslant \|A^*x\| \quad (x \in \mathcal{D}_A) \quad .$$

Ako je $\|Ax\| \geqslant \|A^*x\|$ $(x \in \mathcal{D}_A)$, operator A naziva se hiponormalnim. Ako je $\|Ax\| \leqslant \|A^*x\|$ $(x \in \mathcal{D}_A)$, nije teško videti da je A^* hiponormalan i $W(A^*) = W(A)^*$.

Kako je uvek $\sigma(A^*) = \sigma(A)^*$, zbog toga se često možemo ograničiti na slučaj hiponormalnih operatora.

Iz ove definicije posebno sledi da je za hiponormalni operator A , operator $A^*A - AA^*$ samoadjungovan i pozitivan.

Navodimo primer bar jednog hiponormalnog operatora koji nije i normalan.

P r i m e r 4.2.

Neka je H separabilan Hilbertov prostor sa ortonormalnim bazisom $\{e_\nu\}_{\nu \in N}$. Ako je $x = \sum_1^\infty \alpha_\nu e_\nu$ $(\sum |\alpha_\nu|^2 < \infty)$, definišimo operator A sa

$$Ax = \sum_1^\infty 2^{\nu/2} \alpha_\nu e_{\nu+1} \ , \ \text{tj.} \ Ae_\nu = 2^{\nu/2} e_{\nu+1} \ (\nu \in N) \ .$$

On je očigledno neograničen, definisan na gustom potprostoru $\mathcal{D}(A)$. Nije teško videti da je adjungovani operator definisan sa:

$$A^* x = \sum_1^\infty 2^{\nu/2} \alpha_{\nu+1} e_\nu \ .$$

Stoga je

$$\mathcal{D}(A) = \{ x = \sum \alpha_\nu e_\nu \mid \sum |\alpha_\nu|^2 < \infty, \ \sum 2^\nu |\alpha_\nu|^2 < \infty \} =$$

$$= \{x : \sum 2^{\nu} |\alpha_\nu|^2 < \infty\} ;$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \{x : \sum |\alpha_\nu|^2 < \infty , \sum 2^{\nu} |\alpha_{\nu+1}|^2 < \infty\} =$$

$$= \{x : \sum 2^{\nu-1} |\alpha_\nu|^2 < \infty\},$$

no kako je $2^{\nu-1}|\alpha_\nu|^2 \leqslant 2^{\nu} |\alpha_\nu|^2 \leqslant 2\,[2^{\nu-1}|\alpha_\nu|^2]$, dobijamo $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

Dalje je:

$$\mathcal{D}(A^*A) = \{x : \sum |\alpha_\nu|^2 < \infty , \sum 4^{\nu} |\alpha_\nu|^2 < \infty\} =$$

$$= \{x : \sum 4^{\nu} |\alpha_\nu|^2 < \infty\} ,$$

$$\mathcal{D}(AA^*) = \{x : \sum 4^{\nu-1} |\alpha_\nu|^2 < \infty\} .$$

Stoga je slično, $\mathcal{D}(A^*A) = \mathcal{D}(AA^*)$.

Kako je

$$\|Ax\|^2 = \sum_1^{\infty} 2^{\nu} |\alpha_\nu|^2 ,$$

$$\|A^*x\|^2 = -|\alpha_1|^2 + \sum_1^{\infty} 2^{\nu-1} |\alpha_\nu|^2$$

očigledno je $\|Ax\| \geqslant \|A^*x\|$ $(x \in \mathcal{D}_A)$, te je zaista A hiponormalan (ali ne i normalan) operator. □

Poznato je da je za svako λ iz rezolventnog skupa $\varrho(A)$ neograničenog operatora, ispunjena nejednakost

$$\|R_\lambda(A)\| \geqslant 1/d(\lambda ; \sigma(A)) \qquad (\lambda \in \varrho(A)),$$

i za normalne neograničene operatore važi jednakost ([16]). Takođe je poznato da je ova jednakost zadovoljena za ograničene hiponormalne operatore. Sledećom lemom dokazujemo da isto važi i za neograničene hiponormalne operatore.

<u>L E M A 4.1. Rezolventa proizvoljnog neograničenog hiponormalnog operatora zadovoljava jednakost</u>

$$\|R_\lambda(A)\| = 1/d(\lambda ; \sigma(A)) \qquad (\lambda \in \varrho(A)). \tag{6°}$$

D o k a z. Označimo $A - \lambda I$ sa A_λ. Tada je A_λ neograničeni operator, a dokazaćemo da je on hiponormalan.

Kako je $A_\lambda^* = A^* - \bar{\lambda} I$ imaćemo

$$\mathcal{D}(A_\lambda^*) = \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_\lambda) .$$

Dalje je:

$$A_\lambda^* A_\lambda = A^*A - \bar{\lambda} A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I,$$
$$A_\lambda A_\lambda^* = AA^* - \bar{\lambda} A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I,$$

dakle

$$\mathcal{D}(A_\lambda^* A_\lambda) = \mathcal{D}(A^*A) \cap \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A^*A),$$
$$\mathcal{D}(A_\lambda A_\lambda^*) = \mathcal{D}(AA^*) \cap \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(AA^*),$$

tako da je $\mathcal{D}(A_\lambda^* A_\lambda) = \mathcal{D}(A_\lambda A_\lambda^*)$.

Kako je osim toga, za $x \in \mathcal{D}(A)$:

$$\|Ax - \lambda x\|^2 = \|Ax\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,[\bar{\lambda} \langle Ax, x\rangle] + |\lambda|^2 \|x\|^2,$$
$$\|A^*x - \bar{\lambda} x\|^2 = \|A^*x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,[\lambda \overline{\langle Ax, x\rangle}] + |\lambda|^2 \|x\|^2,$$

neposredno sledi da je i operator A_λ takođe hiponormalan.

S obzirom da je $d(\lambda; \sigma(A)) = d(0; \sigma(A_\lambda))$, očigledno se možemo ograničiti na slučaj kada je $\lambda = 0$.

Pretpostavimo da je $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, štaviše $0 \in \rho(A)$, i dokažimo da je $B = A^{-1}$ ograničeni hiponormalni operator definisan na celom prostoru H.

Kako je A zatvoreno i $0 \in \rho(A)$ sledi da je $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) = H$ ([94], str. 178/254). No,

$$\langle A^*Ax - AA^*x, x\rangle = \|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 \quad (x \in \mathcal{D}(A^*A)),$$

i A^{-1} je ograničeno i definisano na H, tako da je operator

$$A_0 = A^{-1}(A^*A - AA^*)A^{-1*} = A^{-1}(A^*A)A^{*-1} - I$$

definisan na potprostoru $A^*\mathcal{D}(A^*A)$ i ako $x \in A^*\mathcal{D}(A^*A)$, važi

$$\langle A_0 x, x\rangle = \langle (A^*A - AA^*)(A^{-1*}x), A^{-1*}x\rangle - \|x\|^2 \geq 0.$$

Stoga je A_0 pozitivan operator i osim toga $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$. Naime,

$$\begin{aligned} A^*\mathcal{D}(A^*A) &= A^*\mathcal{D}(AA^*) = \\ &= \{A^*x \mid x \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A),\ A^*x \in \mathcal{D}(A)\} = \\ &= \mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{D}(A) = H \cap \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

pošto $0 \in \rho(A^*) = \rho(A)^*$. Odavde dobijamo $A^*\mathcal{D}(A^*A) = \mathcal{D}(A)$.

Označimo dalje: $A_1 = A^{-1}(A^*A)A^{-1*}$. Tada je

$$\langle A_1 x, x\rangle \geq \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{D}_A),$$

tj. A_1 je poluograničeni operator za koji $W(A_1) \subseteq [1,+\infty)$. Medutim on nije samoadjungovan. Naime, iz nejednakosti (*) Stava 4.1 sledi da $0 \in \varrho_0(A_1)$ i $\|R_0(A_1)\| \leqslant 1$. No u slučaju samoadjungovanog operatora bilo bi $\varrho_0(A_1) = \varrho(A_1)$, odakle bi sledilo

$$H = \mathcal{R}(A_1) = \mathcal{D}(A_1^{-1}) = \mathcal{D}(A^* A^{-1} A^{*-1} A) = \mathcal{D}(A),$$

što je nemoguće.

Tako dobijamo:

$$\langle A^*(A^*A)^{-1}Ax, x\rangle \leqslant \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{D}_A) \quad , \text{ tj.}$$

$$\langle A^{-1}A^{*-1}(Ax), Ax\rangle \leqslant \|x\|^2 .$$

Kako je $\mathcal{R}(A) = H$, gornju nejednakost možemo napisati u obliku:

$$\langle A^{-1}A^{*-1}x, x\rangle \leqslant \|A^{-1}x\|^2 = \langle A^{*-1}A^{-1}x, x\rangle \quad (x \in H).$$

Odavde dobijamo da je ograničeni samoadjungovani operator $A^{*-1}A^{-1} - A^{-1}A^{*-1}$ (definisan na H) - pozitivan, drugim rečima A^{-1} je hiponormalan, q.e.d.

Iz teoreme o preslikavanju spektra za neograničene operatore ([94] , str.302) sledi:

$$\sigma(A^{-1}) = 1/\sigma_e(A) \quad , \text{ tj. } \quad 1/\sigma(A) = \sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} \quad .$$

Stoga je

$$1/d(0;\sigma(A)) = 1/\inf|\sigma(A)| = \sup|\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\}| .$$

Kako je dalje, svaki ograničeni hiponormalni operator B spektraloidan, tj. $\sup|\sigma(B)| = \|B\|$, dobijamo:

$$1/d(0;\sigma(A)) = \|B\| = \|A^{-1}\|,$$

što je i trebalo dokazati. ∎

S T A V 4.4. Svaki neograničeni hiponormalan operator je konveksoidan.

D o k a z. S obzirom na prethodnu lemu, očigledno je ispunjen uslov Teoreme 4.1. ∎

4.2. Slučaj operatora u Vaksovom prostoru.

Prethodno dobijeni rezultati mogu se lako uopštiti na operatore u Vaksovom prostoru.

Ako je A ograničeni ili neograničeni $\mathcal{L}_\varphi$ - linearni operator u Vaksovom prostoru H, tada je numerički rang $W(A)$ ograničeni (odnosno neograničeni) φ - rotabilni podskup tela Q, i zatvoreni n.r. $\overline{W(A)}$ obuhvata spektar $\sigma(A)$, odnosno samo aproksimativni spektar $\pi(A)$ (u prvom odnosno drugom slučaju) .

U oba slučaja važi:

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq 1/d(\lambda;\overline{W(A)}) \qquad (\lambda \notin \overline{W(A)}).$$

Ako, kao u kompleksnom slučaju, uvedemo σ - numerički rang sa: $W_0(A)=\sigma(A)\cup W(A)$, tada je $W_0(A)=W(A)$, ako je operator ograničen.

U opštem slučaju, to je nekonveksan, φ - rotabilan skup, i nije teško videti da je

$$\operatorname{conv}\{W_0(A)\} = \operatorname{conv}\{\sigma(A)\cup \operatorname{conv} W(A)\} = \operatorname{conv}\{\sigma(A)\cup F(A)\} = \sigma(A)\cup F(A).$$

($F(A)$ - F-numerički rang operatora A) .

Reći ćemo da je operator A - konveksoidan, ako je

$$\overline{\operatorname{conv}}\{W_0(A)\} = \operatorname{conv}\{\sigma(A)\}$$

tj. $\sigma(A)\cup F(A)=\operatorname{conv}\{\sigma(A)\}$.

Navodimo samo uopštenje Teoreme 4.1, koje se njenom primenom lako dokazuje.

S T A V 4.5. Operator $A\in\mathcal{L}_\varphi(H)$ je konveksoidan, ako i samo ako za svako λ izvan skupa $X=\operatorname{conv}\{\sigma(A)\}$ rezolventa zadovoljava nejednakost

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq 1/d(\lambda;X) .$$

Bez ikakvih teškoća se osim toga mogu preneti i drugi rezultati prethodne tačke, pojam hiponormalnih operatora itd. Posebno je svaki (ograničeni ili neograničeni) hiponormalan operator - konveksoidan, čime uopštavamo i odgovarajuću osobinu normalnih operatora iz Stava 3.9.

D E O V

INDEKS DEFEKTA I PRODUŽENJA DVEJU KLASIČNIH VRSTA OPERATORA

U ovom delu generališemo izvesne klasične rezultate koji se odnose na produženja simetričnih operatora u Hilbertovim prostorima na odgovarajuće levo linearne operatore u Vaksovim prostorima, sledeći pritom rezultate von Neumanna [63], M.G.Krejna [43], itd.

Kako u Vaksovim prostorima u opštem slučaju nemamo neku jednostavnu vezu između (levo linearnih) simetričnih i koso-simetričnih operatora, zajedno sa prethodnim problemima postavljamo i rešavamo analogne probleme za kososimetrične operatore. Interesantno je da se dobijeni rezultati, posebno kriterijumi produživosti ovih dveju klasičnih vrsta operatora -- razlikuju i, štaviše, kriterijum produživosti kososimetričnih operatora sličniji klasičnom, za kompleksne simetrične operatore.

Inače, problem produženja simetričnog operatora u Vaksovom prostoru je bio posmatran i rešen od Tajhmilera u radu [95], korišćenjem metode grafika. Ovde taj problem rešavamo koristeći metod koji je mnogo sličniji fon Nojmanovom, naime primenom Kelijeve transformacije operatora.

Kako osim toga pretpostavljamo da je Vaksov prostor uvek "obostran" (tj. definisano je množenje skalarima sa leve i sa desne strane), možemo da formulišemo odgovarajuće probleme i za ld - linearne operatore.

Iz dobijenih rezultata vidi se da između ove dve klase operatora postoji dosta razlike. Radi upoređenja, navodimo uporedo neke od ovih rezultata.

(1') Numerički rang simetričnog operatora ne razlaže telo Q, i karakteristične tačke $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ pripadaju istoj komponenti skupa regularnih tačaka;

(1") Numerički rang kososimetričnog operatora uvek razlaže telo Q, i karakteristične tačke $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ u opštem slučaju ne pripadaju istoj komponenti skupa reg. tačaka;

(2') Indeksi defekta zatvorenog simetričnog operatora su uvek jednaki, i on je produživ (tj. poseduje bar jedno samoadjungovano produženje), ako i samo ako su ti indeksi defekta parni;

(2") Indeksi defekta zatvorenog kososimetričnog operatora ne moraju biti jednaki, i on je produživ (tj. poseduje bar jedno kosoadjungovano produženje), ako i samo su oni jednaki;

(3') Simetričan ld - linearan operator je uvek produživ;

(3") Kososimetričan ld - linearan operator ne mora biti produživ;

(4') Moguće je uopštiti pojam pozitivnosti i poluograničenosti na klasu simetričnih operatora.

(4") Ovo nije moguće za klasu kososimetričnih operatora, jer se numerički rang svakog takvog operatora poklapa sa celim $\operatorname{Im} Q$.

Napominjemo da je važno oruđe ovde, slično kao i u običnoj teoriji, Teorema 5.1 o konstantnosti indeksa defekta zatvorenog (ograničenog ili neograničenog) operatora, koja uopštava poznatu teoremu iz kompleksnih prostora.

Interesantno je, ali ne i odmah očigledno, da su potpuno slično kompleksnom slučaju, pozitivni i opštije poluograničeni operatori u Vaksovom prostoru - produživi. Isto tako, mada su kriterijumi produživosti simetričnih i kososimetričnih operatora različiti, postojanje realnog odnosno čisto imaginarnog spektralnog otvora predstavlja u oba slučaja dovoljan uslov produživosti ovakvih operatora.

Na kraju ovog dela posmatramo simetrične i kososimetrične operatore sa spektralnim otvorom i uopštavamo (sledeći M.G.Krejna [43]) izvesne rezultate o specijalnim produženjima takvih operatora. Takođe navodimo i neka otvorena pitanja. Ovi poslednji rezultati najvećim delom predstavljaju primene odgovarajućih rezultata obične teorije.

5.1. Indeks defekta ℓ - linearnog operatora.

Glavni rezultat je Teorema 5.1 o konstantnosti indeksa defekta ℓ - linearnog zatvorenog operatora u svakoj komponenti povezanosti skupa regularnih tačaka.

Najpre ćemo dokazati nekoliko lema potrebnih kod izvođenja dokaza teoreme.

L E M A 5.1. Ako je $S = \mathrm{rot}\{S(i)\}$, gde je $S(i)$ proizvoljan otvoren povezan skup u kompleksnoj ravni $\mathbb{C} = \pi(i)$, tada je S otvoren povezan skup u Q.

D o k a z. Otvorenost skupa S neposredno se dokazuje.

Dalje primetimo da je svaka τ - sfera u Q, tj. skup $\tau(a,b) = \mathrm{rot}\{a+ib\}$ $(a,b \in \mathbb{R})$ - povezan skup. Zaista, ona je homeomorfna sa jediničnom sferom 3-dimenzionalnog Euklidskog prostora, dakle povezana.

Stoga za bilo koje dve tačke $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{rot}\{S(i)\}$, postoje dve neprekidne krive u S koje povezuju tačke λ_1 , λ_2 sa izvesnim tačkama μ_1 , μ_2 skupa $S(i)$. No ovaj poslednji skup je na osnovu pretpostavke - povezan, što završava dokaz.$\square$

Iz ove leme sleduje da su skupovi $Q \setminus \mathbb{R}$ i $\mathcal{U} \setminus \mathbb{R}$, gde je $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r(\lambda_0)$ bilo koja (otvorena ili zatvorena) kugla u Q, povezani.

S T A V 5.1. Skup regularnih tačaka $\rho_0(A)$ zatvorenog (ograničenog ili neograničenog) operatora A , je otvoren rotabilan skup, i svaka komponenta povezanosti ovog skupa je takođe rotabilna.

D o k a z. Dokaz otvorenosti skupa ρ_0 je potpuno sličan odgovarajućem u kompleksnim prostorima (napr. [28]) . Rotabilnost je bila dokazana u Stavu 3.1 , i jedino još treba dokazati poslednji deo stava.

Neka je $\mathcal{K}(\rho_0)$ bilo koja komponenta ovog skupa, i $\lambda_0 \in \mathcal{K}(\rho_0)$. Kako je $\mathcal{K}(\rho_0)$ otvoren skup, postoji otvorena kugla $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r(\lambda_0)$ oko λ_0 potpuno sadržana u $\mathcal{K}(\rho_0)$. Iz korolara Leme I.2 sleduje da je $\mathrm{rot}\,\mathcal{U}$ takođe otvoreni skup u Q, i kako je njegov presek sa ravni $\pi(i)$ sastavljen od dva otvorena diska u toj ravni, na osnovu prethodne leme sledi da je on povezan skup (sadržan u $\varrho_0(A)$) . Stoga $\operatorname{rot}\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}(\varrho_0)$, dakle $\operatorname{rot}\{\lambda_0\} \subseteq \mathcal{L}(\varrho_0)$, tj. skup $\mathcal{L}(\varrho_0)$ je rotabilan.

L E M A 5.2. Ako je S proizvoljan otvoren, povezan, rotabilan skup u Q, tada je skup $S \setminus \mathcal{R}$ otvoren i povezan.

D o k a z. S obzirom da su topološka i lučna povezanost bilo kog skupa u Q – ekvivalentni (v. naprimer J.DUGUNDJI – "Topology", Allyn-Bacon, Boston-1972, s.116, za slučaj bilo kog realnog konačnodimenzionalnog prostora), dokazaćemo topološku povezanost skupa $S \setminus \mathcal{R}$.

Neka je, suprotno tvrđenju, skup $S \setminus \mathcal{R}$ disjunktna unija dva neprazna otvorena skupa S_1 , S_2 u Q.

Dokazaćemo da su oba ova skupa rotabilna.

Neka je λ bilo koja tačka skupa S_1 $(\lambda \notin \mathcal{R})$. Potpuno analogno prethodnoj lemi, postoji otvoreni, povezani, rotabilni skup koji sadrži λ , ne seče realnu osu, i sadržan je u skupu S . Stoga je on sadržan u nekoj komponenti skupa S ; dakle potpuno u S_1 ; dakle skup S_1 je rotabilan.

Na potpuno sličan način dokazuje se da je i S_2 rotabilno.

Dalje označimo: $S_0 = S \cap \mathcal{R}$ i pretpostavimo da je S_0 neprazno.

Skup S_0 možemo predstaviti u obliku unije $S_0 = S' \cup S''$ na sledeći način: ako tačka $\lambda \in S_0$, postojaće otvorena kugla $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r(\lambda)$ potpuno sadržana u S . Kako je skup $\mathcal{U} \setminus \mathcal{R}$ povezan i otvoren, on je sadržan u nekoj komponenti skupa S , dakle potpuno sadržan u S_1 ili S_2 . Definišimo:

$$S' = \{\lambda \in S_0 \mid \mathcal{U}(\lambda) \setminus \mathcal{R} \subseteq S_1\},$$
$$S'' = \{\lambda \in S_0 \mid \mathcal{U}(\lambda) \setminus \mathcal{R} \subseteq S_2\}.$$

Lako je videti da su skupovi $S^{`} = S_1 \cup S'$, $S^{``} = S_2 \cup S''$ otvoreni, disjunktni i $S = S^{`} \cup S^{``}$. Stoga bi skup S bio nepovezan, što je suprotno pretpostavci.

P r i m e d b a. Dosta sličan dokaz pokazuje da je isto tačno i za proizvoljan otvoreni (neobavezno rotabilni) skup u Q.

L E M A 5.3. Ako je S otvoreni povezani rotabilni skup u Q, tada postoji povezani skup $P(i)$ u ravni $\pi(i)=\mathbb{C}$, otvoren u toj ravni, takav da je $S = \mathrm{rot}\{P(i)\}$.

D o k a z. Kako je skup S otvoren, skupovi $S(i)=S\cap\mathbb{C}$ i $S(i)\setminus\mathcal{R}$ su očigledno otvoreni u $\mathbb{C}$. Označimo sa P^+, P^- presek skupa $S(i)\setminus\mathcal{R}$ sa gornjom i donjom otvorenom kompleksnom poluravni $\mathbb{C}^+,\mathbb{C}^-$ respektivno. Ovi skupovi su otvoreni (u $\mathbb{C}$), $P^-=(P^+)^*$, a pokazaćemo da su i povezani.

Ako je, suprotno tvrđenju,

$$P^+ = P_1 \cup P_2$$

gde su P_1, P_2 neprazni, disjunktni, otvoreni skupovi u $\mathbb{C}$, tada je:

$$S(i)\setminus\mathcal{R} = (P_1\cup P_1^*)\cup(P_2\cup P_2^*) .$$

No skupovi

$$\mathrm{rot}\ P_1 = \mathrm{rot}\{P_1\cup P_1^*\},$$
$$\mathrm{rot}\ P_2 = \mathrm{rot}\{P_2\cup P_2^*\},$$

su otvoreni u Q, i

$$S\setminus\mathcal{R} = \mathrm{rot}\{S(i)\setminus\mathcal{R}\} = \mathrm{rot}\{[P_1\cup P_1^*]\cup[P_2\cup P_2^*]\} = \\ = \mathrm{rot}\{P_1\}\cup\mathrm{rot}\{P_2\} .$$

S obzirom na Lemu 5.1, ovi skupovi su povezani, i kako je

$$\mathrm{rot}\{P_1\}\cap\mathrm{rot}\{P_2\} = \mathrm{rot}\{P_1\cap[P_2\cup P_2^*]\} = \\ = \mathrm{rot}\{(P_1\cap P_2)\cup(P_1\cap P_2^*)\} = \emptyset ,$$

skup $S\setminus\mathcal{R}$ bi bio nepovezan, što je suprotno prethodnoj lemi.

Stoga su skupovi P^+, P^- otvoreni (u $\mathbb{C}$) i povezani. Zavisno od toga da li skup S poseduje realne tačke ili ne, skup $S(i)=S\cap\mathbb{C}$ je povezan ili unija dva takva skupa P^+, P^-. U prvom slučaju stavićemo $P(i)=S(i)$, a u drugom, $P(i)=P^+$, i tako izabran skup $P(i)$ ima navedene osobine. ∎

Sada možemo da dokažemo glavni stav.

Neka je A proizvoljan zatvoreni (ograničeni ili neograničeni) ℓ - linearni operator u Vaksovom prostoru H.

Tada je A $\ell(p_1)$ - linearan u odnosu na bilo koju kompleksnu ravan $\pi(p_1)$ $(p_1 \in K^+)$.

Ako $\lambda \in Q$, rang $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ u opštem slučaju nije ℓ - linearan potprostor od H, no ako $\lambda \in \pi(p_1)$ $(p_1 \in K^+)$, on je $\ell(p_1)$ - linearan. Kao i u kompleksnom prostoru, ako $\lambda \in \varrho_0(A)$, ovaj potprostor je zatvoren i za proizvoljno $\lambda \in \pi(p_1)$,

$$\mathcal{R}(A-\lambda I)^{\perp_{p_1}} = \mathcal{N}(A^*-\bar{\lambda} I).$$

Ako $\lambda \in \pi(p_1)$, ovaj ortogonalni komplement označićemo drugačije sa $\perp_\lambda$, i ako posebno $\lambda \in \mathcal{R}$, pod $\perp_\lambda$ podrazumevaćemo bilo koji ortogonalni komplement $\perp_{p_1}$ gde $p_1 \in K^+$.

Potprostor $\mathcal{R}(A-\lambda I)^{\perp_\lambda}$ zvaćemo <u>defektnim potprostorom</u> operatora A, a pod <u>indeksom defekta</u> (u tački λ), podrazumevaćemo odgovarajuću ortogonalnu dimenziju tog potprostora, tj.

$$\operatorname{def}(A;\lambda) = \ell(\lambda)\text{-}\dim[\mathcal{R}(A-\lambda I)^{\perp_\lambda}].$$

<u>T E O R E M A 5.1.</u> <u>Indeks defekta $\operatorname{def}(A;\lambda)$ ℓ -linearnog zatvorenog operatora A je konstantan u svakoj komponenti povezanosti skupa regularnih tačaka $\varrho_0(A)$.</u>

D o k a z. Ako je λ_0 proizvoljna tačka komponente $\mathcal{K}(\varrho_0)$, dokazaćemo najpre da je tvrđenje tačno za svako $\lambda \in$ $\in \operatorname{not}\{\lambda_0\}$.

Možemo da pretpostavimo da $\lambda_0 \in \pi(i)$ i $\lambda \in \pi(p_1)$. Tada postoji neko $\alpha \in Q$ $(|\alpha| = 1)$ takvo da je $p_1 = \alpha i \alpha^{-1}$, odakle je $\lambda = \alpha\lambda_0\alpha^{-1}$. Kako je

$$\mathcal{R}(A-\lambda_0 I)^{\perp_{\lambda_0}} = \mathcal{N}(A^*-\bar{\lambda}_0 I),$$

$$\mathcal{R}(A-\lambda I)^{\perp_\lambda} = \mathcal{N}(A^*-\bar{\lambda} I),$$

i $\bar{\lambda} = \alpha\bar{\lambda}_0\alpha^{-1}$, dobijamo:

$$\mathcal{N}(A^*-\bar{\lambda} I) = \alpha\,\mathcal{N}(A^*-\bar{\lambda}_0 I).$$

Nije teško videti da između skalarnih proizvoda $[\cdot,\cdot]_i$ i $[\cdot,\cdot]_{p_1}$ postoji sledeća relacija:

$$[x,y]_{p_1} = \alpha\,[\bar{\alpha}^{-1}x, \alpha^{-1}y]_i\,\bar{\alpha}^{-1} \quad (x,y \in H;\ \bar{\alpha}^{-1} = \alpha),$$

odakle neposredno sledi

$$\ell(p_1)\text{-}\dim[\mathcal{R}(A-\lambda I)^{\perp_\lambda}] = \ell(i)\text{-}\dim[\mathcal{R}(A-\lambda_0 I)^{\perp_{\lambda_0}}],$$

što je i trebalo dokazati.

Neka su dalje, λ_1 i λ_2 bilo koje dve tačke skupa $\mathcal{C}(\rho_0)$. Na osnovu prethodne leme postojaće otvoreni povezani skup $P(i)$ u ravni $\mathbb{C}$, takav da je

$$\mathcal{C}(\rho_0) = \operatorname{rot}\{P(i)\},$$

i očigledno, $P(i) \subseteq \rho_0(A)$.

Stoga postoje tačke $\mu_1, \mu_2 \in P(i)$ takve da $\lambda_1 \in \in \operatorname{rot}\{\mu_1\}$, $\lambda_2 \in \operatorname{rot}\{\mu_2\}$, odakle je

$$\operatorname{def}(A;\lambda_1) = \operatorname{def}(A;\mu_1), \quad \operatorname{def}(A;\lambda_2) = \operatorname{def}(A;\mu_2).$$

No kako je skup $P(i)$ sadržan u nekoj komponenti skupa $\rho_0 \cap \mathbb{C}$, koristeći odgovarajuću osobinu operatora u Hilbertovom prostoru ([1]), dobijamo

$$\operatorname{def}(A;\lambda_1) = \operatorname{def}(A;\lambda_2),$$

čime je tvrđenje dokazano.

5.2. Neke pomoćne činjenice.

U II Delu dokazali smo da se Vaksov prostor H može napisati u obliku ortogonalnog zbira

$$H = H(i) \oplus_i H(i)j,$$

gde je $H(i) = \{x \in H : ix = xi\}$ zatvoreni potprostor od H. Štaviše, skalarni proizvod prostora poprima vrednosti iz ravni $\mathfrak{U}(i)$ na potprostorima $H(i)$, $H(i)j$, dakle poklapa se sa pomoćnim skalarnim proizvodom $[\cdot,\cdot]_i$ na ovim potprostorima.

L E M A 5.4. Ako je E proizvoljan $\ell(i)d$ - linearan potprostor u H, tada je

$$E = E(i) \oplus_i E(i)j,$$

gde je $E(i) = E \cap H(i)$, ovi potprostori su $\ell(i)$ - ortogonalni i sadržani u E.

Osim toga je $\overline{E} = \overline{E(i)} \oplus_i \overline{E(i)}j$, odakle sleduje da je:

(1°) E - zatvoren, ako i samo ako je $E(i)$ takav;

(2°) E - gust u H, ako i samo ako je $E(i)$ gust u $H(i)$.

D o k a z. Ako je x bilo koji vektor potprostora E, tada je

$$x = \tfrac{1}{2}(x - ixi) + \tfrac{1}{2}(x + ixi) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(x - ixi) + \tfrac{1}{2}[(-xj) - i(-xj)i]j =$$
$$= v_1 + v_2 j ,$$

i vektori $v_1 = \frac{1}{2}(x - ixi)$, $v_2 = \frac{1}{2}[(-xj) - i(-xj)i]$ sadržani su u $H(i) \cap E$. Kako $E(i) \subseteq H(i)$, $E(i)j \subseteq H(i)j$, ovi potprostori su očigledno $\ell(i)$ - ortogonalni, odakle dobijamo dekompoziciju potprostora E.

Preostali deo tvrđenja se takođe lako proverava.

Na sličan način može se dokazati i sledeća lema.

L E M A 5.5. Svaki ℓd - linearan potprostor E može se razložiti u ortogonalan zbir

$$E = F \oplus_0 iF \oplus_0 jF \oplus_0 kF ,$$

gde je $F = E \cap \mathbb{R}$, i svi ovi potprostori su sadržani u E.

Osim toga je $\overline{E} = \overline{F} \oplus_0 i\overline{F} \oplus_0 j\overline{F} \oplus_0 k\overline{F}$.

Ako je E zatvoreno, takvo je i F, i odgovarajuća ortogonalna dimenzija

$$(\mathbb{R})\text{-}dim(F) = \ell(Q)\text{-}dim(E) .$$

Neka je dalje A ograničeni ℓ - linearni operator na H. Tada definišemo

$$\alpha A = A(I\alpha) , \quad A\alpha = (I\alpha)A$$

Kako je prostor $\mathcal{L}(H)$ svih ograničenih ℓ - linearnih operatora na H normirani prostor nad Q, primenom Teoreme 2.2 sledi da se operator $A \in \mathcal{L}(H)$ može razložiti u direktan zbir:

$$(*) \qquad A = A_1 + iA_2 + jA_3 + kA_4$$

gde su A_ν $(\nu = 1,2,3,4)$ ℓd - linearni operatori.

Operator A_1 zvaćemo "realni deo" od A, i imamo

$$A_1 = \mathrm{re}(A) = \tfrac{1}{4}(A - iAi - jAj - kAk) .$$

U opštem slučaju je:

$$re(A) \neq \mathcal{R}e\,(A) = \tfrac{1}{2}(A+A^*),$$

i nije teško videti da je adjungovani operator,

$$A^* = A_1^* + iA_2^* + jA_3^* + kA_4^*$$

(operatori A_ν^* su takođe ℓd - linearni).

U opštem slučaju komponente A_ν operatora A u razlaganju (*) nisu samoadjungovane.

Zbog direktnosti dekompozicije , nije teško videti sledeće: Ograničeni operator $A = A_1 + iA_2 + jA_3 + kA_4$ je

(1°) samoadjungovan, ako i samo ako je A_1 takav, a preostale komponente kosoadjungovane;

(2°) kosoadjungovan, ako i samo ako je A_1 takav, a druge komponente samoadjungovane.

Osim toga je očigledno $\|A_1\| = \|re(A)\| \leq \|A\|$.

Primerom se lako može pokazati da su klase ℓd - linearnih, samoadjungovanih i kosoadjungovanih operatora u opštem slučaju različite.

5.3. Produženja simetričnih i kososimetričnih operatora.

U ovom delu posmatramo samo neograničene zatvorene ℓ - linearne operatore definisane na gustom ℓ - linearnom potprostoru Vaksovog prostora H .

Operator A naziva se simetričnim ako $A \subseteq A^*$, i samoadjungovanim ako je $A = A^*$. Takođe, A se naziva kososimetričnim ako $A \subseteq -A^*$, i kosoadjingovanim ako je $A = -A^*$.

Simetrični (kososimetrični) operator naziva se produživim ako poseduje bar jedno samoadjungovano (kosoadjungovano) produženje.

Kao i u kompleksnom slučaju, važi sledeće:

Operator A je simetričan ako i samo ako je njegov numerički rang realan, i kososimetričan ako i samo ako ima čisto imaginaran numerički rang.

Primera radi, dokažimo drugi deo tvrđenja.

Kako je gornji uslov očigledno potreban, treba još dokazati da je i dovoljan.

Neka je dakle, $W(A) \subseteq \mathcal{I}m\,\mathcal{Q}$, tj.

$$\langle Ax, x\rangle = -\langle x, Ax\rangle \quad (x \in \mathcal{D}_A).$$

Treba da dokažemo da je $\langle Ax, y\rangle = -\langle x, Ay\rangle$ za svako $x, y \in \mathcal{D}_A$. Kako forma

$$[Ax, x]_i = \tfrac{1}{2}(\langle Ax, x\rangle - i\langle Ax, x\rangle i) \quad (x \in \mathcal{D}_A),$$

poprima vrednosti sa imaginarne i-ose, sledi da je:

$$[Ax, y]_i = -[x, Ay]_i \qquad (x, y \in \mathcal{D}_A).$$

No onda je

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= [Ax, y]_i - j\,[A(jx), y]_i = \\ &= -[x, Ay]_i + j\,[jx, Ay]_i = -\langle x, Ay\rangle,\end{aligned}$$

tj. $A \subseteq -A^*$, što je trebalo dokazati.

S T A V 5.2. Ako je A simetrični operator, tada je povezani skup $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{R}$ sadržan u skupu $\varrho_c(A)$, te je

$$def\,(A; \lambda) = const \quad (\lambda \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{R}).$$

Ako je A kososimetrično, tada su povezani skupovi $\Pi^+ = \{\lambda : \mathcal{R}e\,\lambda > 0\}$, $\Pi^- = \{\lambda : \mathcal{R}e\,\lambda < 0\}$ sadržani u skupu $\varrho_c(A)$, tako da je indeks defekta $def\,(A; \lambda)$ konstantan u ovim otvorenim poluprostorima.

D o k a z. Kako je za svako λ izvan zatvorenog numeričkog ranga $\overline{W(A)}$ ispunjeno

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/d(\lambda; \overline{W(A)}),$$

koristeći karakterističnu osobinu numeričkog ranga simetričnog odnosno kososimetričnog operatora, neposredno dobijamo da je za simetrične operatore,

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/|\mathcal{I}m\,\lambda| \quad (\lambda \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{R}),$$

i za kososimetrične operatore:

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/|\mathcal{R}e\,\lambda| \quad (\lambda \in \Pi^+ \cup \Pi^-),$$

odakle sleduje tvrđenje. $\square$

L E M A 5.6. Numerički rang simetričnog ili kososimetričnog operatora je konveksan i neograničen. Stoga je, ako je A simetričan, njegov numerički rang cela realna prava ili neka njena poluprava, a ako je A kososimetrično, njegov numerički rang poklapa se sa celim $\mathcal{I}m\,Q$.

D o k a z. Ako je A simetričan ili kososimetričan operator, sličnim rezonovanjem kao u stavovima 3.8 i 3.10 , dokazuje se da važi uopštenje Teplic-Hauzdorfova teorema. Osim toga, kako je na osnovu Stava 3.5 ,

$$W(A) = F(A) = \text{rot}\ S(i),$$

gde je $S(i) = \{[Ax,x]_i : x \in \mathcal{D}_A, |x| = 1\}$, i na osnovu Stava 4.1 , kompleksni numerički rang neograničenog operatora u Hilbertovom prostoru takođe neograničen, sleduje slično i za numerički rang $W(A)$.

Odavde neposredno dobijamo tvrđenje.□

Iz prethodnog sledi da je moguće uopštiti pojmove pozitivnosti i poluograničenosti na simetrične operatore. No nikakva klasifikacija kososimetričnih operatora zavisna od njihovog numeričkog ranga nije moguća.

Ako je A simetričan operator, tada ćemo kardinalni broj

$$m = \operatorname{def}(A;i) = \operatorname{def}(A;-i)$$

zvati (karakteristični) indeks defekta ovog operatora.

Nije teško videti da je ova definicija ekvivalentna odgovarajućoj u radu [95], jer je

$$\mathcal{N}(A^{*2}+I) = \mathcal{N}(A^{*}+iI) \oplus_i \mathcal{N}(A^{*}-iI),$$

odakle,

$$\ell(i)\text{-}\dim \mathcal{N}(A^{*}+iI) = \ell(Q)\text{-}\dim \mathcal{N}(A^{*2}+I).$$

Podsećamo da se kardinalni broj m (uslovno) naziva parnim, ako postoji kardinalni broj p takav da je $m = 2p$. Dakle m je paran ako i samo ako je on beskonačan ili konačan paran broj.

Ako je dalje A kososimetričan operator, tada su kardinali

$$m = \operatorname{def}(A;1), \quad n = \operatorname{def}(A;-1),$$

očigledno parni; zvaćemo ih indeksima defekta ovog operatora.

Sledeća teorema potpuno rešava problem produživosti simetričnih operatora. Ona je prvobitno bila dokazana od Tajhmilera [95], no naš dokaz je različit i više vezan za klasični fon Nojmanov. Osim toga dobijamo i neočekivanu osobinu ld - linearnih operatora.

<u>T E O R E M A 5.2. Ako je A simetričan operator sa indeksom defekta m, tada je A produživ ako i samo ako je m parno.</u>

<u>Ako je A ld - linearan simetričan operator, tada je on produživ i osim toga poseduje bar jedno ld - linearno samoadjungovano produženje.</u>

D o k a z. Pretpostavimo najpre da je A produživ i A_0 bilo koje njegovo ℓ - linearno samoadjungovano produženje. Iz obične teorije sledi da je

$$\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A) + (I - V_0)\mathcal{N}_1$$

gde je $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(A^* + iI)$, i V_0 neko $\ell(i)$ - izometrično preslikavanje potprostora $\mathcal{N}_1$ na potprostor $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}(A^* - iI) = j\mathcal{N}_1$.

Koristeći činjenicu da su potprostori $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ disjunktni, i $\mathcal{D}(A_0)$ ℓ - linearno, sledi da potprostor $(I-V_0)\mathcal{N}_1$ mora takođe biti ℓ - linearan. Stoga je

$$\ell(i)\text{-}dim\ (I-V_0)\mathcal{N}_1 = 2\ \ell(Q)\text{-}dim\ (I-V_0)\mathcal{N}_1 .$$

Ako pretpostavimo da je $m < \infty$, dobijamo

$$\ell(i)\text{-}dim\ (I-V_0)\mathcal{N}_1 = \ell(i)\text{-}dim\ \mathcal{N}_1 = m ,$$

dakle m je paran broj.

Obratno, pretpostavimo da je m-parno.

Kako su obični indeksi defekta simetričnog operatora u našem slučaju uvek jednaki, on uvek poseduje neko obično (tj. $\ell(i)$ - samoadjungovano) produženje.

No nije teško videti da je $\ell(i)$ - samoadjungovano produženje operatora A ℓ - samoadjungovano ako i samo ako je njegov domen $\mathcal{D}(A_0)$ ℓ - linearan potprostor. Zaista, ovaj uslov je očigledno potreban. Ako je obratno, $\mathcal{D}(A_0)$ ℓ - linearno, dovoljno je primetiti da je A_0 restrikcija adjunkte A^* na potprostor $\mathcal{D}(A_0)$, tako da je A_0 ℓ - linearno, dakle ℓ -

samoadjungovano.

Odavde je lako videti da $\ell(i)$ - izometrički operator $V_0 : \mathcal{N}_1 \xrightarrow{na} \mathcal{N}_2$ definiše ℓ - samoadjungovano produženje operatora A ako i samo ako zadovoljava uslov

$$(*) \qquad V_0(jV_0x) = jx \qquad (x \in \mathcal{N}_1).$$

Kako je potprostor $\mathcal{N}_1$ zatvoren, iz pretpostavke da je indeks defekta m paran sledi da postoji neki $\ell(i)$ - ortogonalni bazis ovog potprostora, sastavljen od dva uzajamno ortonormalna skupa vektora:

$$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \quad \{e'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}.$$

Definisaćemo operator $V_0 : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$, na sledeći način:

$$V_0 e_\alpha = j e'_\alpha, \quad V_0 e'_\alpha = -j e_\alpha \qquad (\alpha\in\Lambda),$$

i dalje po $\ell(i)$- linearnosti.

Kako je

$$[jx, jy]_i = \overline{[x,y]_i} \qquad (x, y \in H),$$

lako se proverava da je ovaj operator $\ell(i)$- izometričan, i ima osobinu $(*)$. Stoga je potprostor $(I-V_0)\mathcal{N}_1$ ℓ - linearan, tj. odgovarajuće produženje A_0 ℓ- samoadjungovano.

Time je prvi deo teoreme dokazan.

Pretpostavimo dalje da je A ℓd - linearan simetričan operator.

Tada se lako vidi da su defektni potprostori $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ d - linearni. Osim toga neposredno se dokazuje da je samoadjungovano produženje operatora A d - linearno ako i samo ako je odgovarajući operator V_0 takav.

Na osnovu Leme 5.4, $\ell(i)d$- linearni potprostor $\mathcal{N}_1$ može se predstaviti u obliku ortogonalnog zbira

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_1 \oplus_i \mathcal{M}_1 j$$

svojih zatvorenih potprostora $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_1 j$ $(\mathcal{M}_1 \subseteq H(i))$.

Ako je $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bilo koji $\ell(i)$ - ortonormalni bazis potprostora $\mathcal{M}_1$, koristeći jednakost

$$[xj, yj]_i = [x,y]_i \qquad (x, y \in H),$$

dobijamo da je skup $\{e'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ $(e'_\alpha = e_\alpha j)$ jedan $\ell(i)$ - ortonormalni bazis potprostora $\mathcal{M}_1 j$, tako da je skup:

$$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{e'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},$$

jedan $\ell(i)$ - ortonormalni bazis od $\mathcal{N}_1$, tj. operator A je produživ.

Treba još dokazati da postoji bar jedan $\ell(i)d$ - izometričan operator od $\mathcal{N}_1$ na $\mathcal{N}_2$.

Definišimo:

$$V_0 e_\alpha = j e_\alpha j = j e'_\alpha,$$

$$V_0 (e_\alpha j) = -j e_\alpha \qquad (\alpha\in\Lambda).$$

Tada nije teško proveriti relaciju $(\ast)$, i ℓd - linearnost. Odgovarajuće produženje A_0 od A je onda ℓd - linearno samoadjungovano produženje operatora A. □

Nasuprot problemu produženja simetričnih operatora, problem produživosti kososimetričnih operatora je i po rezultatu i po metodu dokazivanja sličniji klasičnom (za kompleksne simetrične operatore). Naime, koristeći standardan metod Kelijeve transformacije operatora, ovaj problem svodimo na odgovarajući problem za ℓ - linearne izometričke operatore.

Dokaz sledeće leme je potpuno sličan običnom, za kompleksne simetrične operatore. Njenom primenom je naredno tvrđenje očigledno.

<u>L E M A 5.7.</u> <u>Ako je A kososimetričan operator, tada je</u>

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \dotplus \mathcal{N}(A^*-I) \dotplus \mathcal{N}(A^*+I).$$

<u>P O S L E D I C A.</u> <u>Kososimetrični operator je kosoadjungovan ako i samo ako su njegovi indeksi defekta oba jednaka nuli.</u>

Svakom kososimetričnom operatoru A, možemo da pridružimo njegovu Kelijevu transformaciju, tj. operator

$$V = (A+I)(A-I)^{-1}.$$

Sledeće tvrđenje se tada proverava slično kao u običnoj teoriji.

<u>S T A V 5.3.</u> <u>Operator $V = V(A)$ je zatvoreni ℓ - li-</u>

nearni izometrički operator, za koji tačka $\lambda = 1$ nije sopstvena vrednost. Svaki takav operator je Kelijeva transformacija nekog kososimetričnog operatora.

Kososimetričan operator A je kosoadjungovan, ako i samo ako je njegova Kelijeva transformacija unitaran operator.

Kososimetričan operator A je ld- linearan, ako i samo ako je njegova Kelijeva transformacija takav operator.

Sada možemo da dokažemo glavni rezultat.

T E O R E M A 5.3. Kososimetričan operator A je produživ ako i samo ako su njegovi indeksi defekta jednaki.

Ako je takav operator A produživ i ld- linearan, on poseduje bar jedno ld- linearno kosoadjungovano produženje.

D o k a z. Kao i u običnoj teoriji, takav operator A je produživ ako i samo ako njegova Kelijeva transformacija ima neko unitarno produženje, dakle ako je

$$\ell(Q)\text{-}\dim \mathcal{N}_1 = \ell(Q)\text{-}\dim \mathcal{N}_2 ,$$

gde je $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(A^* - I)$, $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}(A^* + I)$.

Lako se vidi da je to slučaj, ako i samo ako je

$$\ell(i)\text{-}\dim \mathcal{N}_1 = \ell(i)\text{-}\dim \mathcal{N}_2$$

dakle indeksi defekta jednaki: $m = n$.

Osim toga, ako je A produživ kososimetrični operator, tada se domen $\mathcal{D}(A_0)$ bilo kog njegovog kosoadjungovanog produženja može predstaviti u obliku

$$\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A) + (I - V_0)\mathcal{N}_1 ,$$

gde je V_0 neki izometrični operator koji preslikava potprostor $\mathcal{N}_1$ na $\mathcal{N}_2$. Ako je

$$x = f + y - V_0 y \quad (f \in \mathcal{D}_A , y \in \mathcal{N}_1),$$

tada je $A_0 x = Af + y + V_0 y$.

Preostaje da dokažemo drugi deo teoreme.

Neka je operator A ld - linearan i produživ.

Kao i u Teoremi 5.2, dovoljno je dokazati da postoji kosoadjungovano produženje A_0 čiji je domen $\mathcal{D}(A_0)$ ld - linearan potprostor, ili ekvivalentno, izometrični operator $V_0 : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ koji je ℓd - linearan.

Kako su potprostori $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ očigledno ℓd - linearni, na osnovu Leme 5.5 mogu se predstaviti u obliku ortogonalnog zbira svojih realnih zatvorenih potprostora na sledeći način:

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_1 \oplus_0 i\mathcal{M}_1 \oplus_0 j\mathcal{M}_1 \oplus_0 k\mathcal{M}_1 ,$$
$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_2 \oplus_0 i\mathcal{M}_2 \oplus_0 j\mathcal{M}_2 \oplus_0 k\mathcal{M}_2 ,$$

pri čemu je $\mathcal{M}_\nu = \mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{R}$ $(\nu=1,2)$.

Videli smo da je u potprostoru $\mathcal{R}$, (R) - ortogonalna dimenzija identična običnoj, odakle je:

$$(R)\text{-dim}\ \mathcal{M}_\nu = \ell(Q)\text{-dim}\ \mathcal{N}_\nu \quad (\nu=1,2).$$

Odavde sledi:

$$(\mathcal{R})\text{-dim}\ \mathcal{M}_1 = (\mathcal{R})\text{-dim}\ \mathcal{M}_2 .$$

Stoga će postojati $(\mathcal{R})$ - linearni izometrični operator $\overline{V}$ koji preslikava potprostor $\mathcal{M}_1$ na $\mathcal{M}_2$.

Ako $x \in \mathcal{N}_1$, $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ $(x_\nu \in \mathcal{M}_1)$, definisaćemo:

$$V_0 x = \overline{V}x_1 + i\overline{V}x_2 + j\overline{V}x_3 + k\overline{V}x_4 .$$

Lako se proverava da je V_0 ℓd - linearan operator koji preslikava $\mathcal{N}_1$ na $\mathcal{N}_2$, i osim toga ℓ - izometričan.

Time je dokaz završen.

Primerom ćemo osim toga dokazati da, za razliku od simetričnih operatora, kososimetrični ℓd - linearni operatori ne moraju biti produživi.

<u>Primer 5.1.</u>

Neka je H Vaksov prostor

$$Q^\infty = \{ x = (q_1, q_2, \dots) \mid \sum_1^\infty |q_\nu|^2 < \infty \} ,$$

sa skalarnim proizvodom

$$\langle \{x_\nu\}, \{y_\nu\} \rangle = \sum_1^\infty x_\nu \overline{y}_\nu \qquad (x_\nu, y_\nu \in Q).$$

Uočimo sledeći operator:

$$V(q_1, q_2, \dots) = (0, q_1, q_2, \dots) .$$

On je očigledno ℓd - linearan, izometričan, i $\lambda = 1$

nije sopstvena vrednost operatora V, tako da postoji kososimetrični operator

$$A = (V+I)(V-I)^{-1}.$$

Njegovi indeksi defekta su 0 i 2, tako da on nije produživ.

5.4. Poluograničeni operatori i operatori sa spektralnim otvorom.

Videli smo da se na prirodan način mogu uopštiti pojmovi poluograničenosti i posebno pozitivnosti na simetrične operatore u Vaksovom prostoru.

Interesantno je, što smo naglasili u uvodu, da je i pored toga što je kriterijum produživosti simetričnih operatora u Vaksovom prostoru različit od odgovarajućeg kriterijuma za operatore u Hilbertovom prostoru, slično kao i u kompleksnim prostorima svaki poluograničeni operator - produživ.

Takođe je interesantno da je, slično kompleksnim prostorima, postojanje (realnog tj. čisto imaginarnog) spektralnog otvora simetričnog odnosno kososimetričnog operatora, dovoljan uslov za njihovu produživost.

Napominjemo da je materijal ovog dela usko vezan, i unekoliko uopštava, rezultate fundamentalnog rada M.G.Krejna [43].

S T A V 5.4. Svaki poluograničeni operator je produživ i poseduje bar jedno samoadjungovano produženje sa istom granicom.

Svaki ld - linearni poluograničeni operator poseduje bar jedno ld - linearno samoadjungovano produženje sa istom granicom.

D o k a z. Neka je operator A poluograničen sa donje strane i ima granicu c, tj.

$$W(A) \subseteq [c,+\infty)$$

gde je $c = \inf W(A)$.

Tada sve tačke otvorenog intervala $(-\infty, c)$ pripadaju skupu $\varrho_0(A)$, jer je

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq 1/d(\lambda;\overline{W(A)}) = 1/|\lambda-c| \quad (\lambda<c).$$

Ako je λ_0 proizvoljna fiksirana tačka intervala $(-\infty, c)$, tačke λ_0 i $\lambda_1 = -i$ mogu se spojiti odsečkom koji je očigledno sadržan u skupu $\varrho_0(A)$. Na osnovu Teoreme 5.1 sledi da je indeks defekta ovog operatora,

$$m = \ell(i)\text{-}\dim \mathcal{N}(A^* + iI) = \ell(i)\text{-}\dim \mathcal{N}(A^* - \lambda_0 I).$$

No ovaj poslednji potprostor je očigledno ℓ - linearan, odakle neposredno sledi da je m-paran broj.

Drugi deo tvrđenja može se dokazati slično kao u radu [43], koristeći sledeći stav (koji uopštava Teoremu 2, tog rada).

S T A V 5.5. Ako je A ograničeni simetrični operator definisan na zatvorenom potprostoru $\mathcal{D}(A)$ ($\mathcal{D}(A) \neq H$), tada postoji samoadjungovano produženje A_0 operatora A, definisano na celom prostoru H i takvo da je $\|A_0\| = \|A\|$.

Ako je A osim toga ℓd - linearno, tada on poseduje bar jedno takvo ℓd - linearno produženje.

Slična tvrđenja važe i za kososimetrične operatore.

D o k a z. Na osnovu Teoreme 2 rada [43], postoji bar jedno $\ell(i)$ - samoadjungovano produženje A_1 od A, definisano na H, i takvo da je $\|A_1\| = \|A\|$.

Stavićemo:

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\,(A_1 - (jI)A_1(jI)).$$

Ovaj operator je ℓ - linearan, definisan na H, i kako je

$$A_0^* = \tfrac{1}{2}\,(A_1^+ - (jI)A_1^+(jI))$$

i $A_1^+ = A_1$, očigledno je A_0 i samoadjungovan.

Kako je A ℓ - linearan i $A \subseteq A_1$, sledi da $A \subseteq A_0$. Stoga je $\|A\| \leqslant \|A_0\|$. No kako je

$$\|A_0\| \leqslant \|A_1\| = \|A\|,$$

dobijamo $\|A_0\| = \|A\|$, tj. A_0 je jedno traženo produženje.

Ako je dalje, A simetrično i ℓd - linearno, definisano na zatvorenom ℓd - linearnom potprostoru $\mathcal{D}(A)$, osnačimo sa A_0 bilo koje samoadjungovano produženje od A sa istom normom. Uočimo operator

$$\tilde{A} = re(A) = \frac{1}{4}(A_0 - iA_0 i - jA_0 j - kA_0 k).$$

On je ld - linearan, i produžava A tako da je $\|A\| \leq \|\tilde{A}\|$. No očigledno je $\|\tilde{A}\| \leq \|A_0\| = \|A\|$, odakle sledi $\|\tilde{A}\| = \|A\|$. Kako je

$$\tilde{A}^* = \frac{1}{4}(A_0^* - iA_0^* i - jA_0^* j - kA_0^* k),$$

dobijamo $\tilde{A}^* = \tilde{A}$, tj. $\tilde{A}$ je traženo ld-linearno samoadjungovano produženje operatora A.

Dokaz poslednjeg tvrđenja stava izvodi se na analogan način. □

Ako je A ograničeni simetrični operator koji zadovoljava uslov prethodnog stava, slično kao u [43], označićemo sa $\mathcal{P}(A)$ skup svih samoadjungovanih produženja od A, definisanih na H, sa normom jednakom normi operatora A (pretpostavljamo da je $\|A\| = 1$).

Očigledno $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}_i(A)$, gde je $\mathcal{P}_i(A)$ skup odgovarajućih $l(i)$ - samoadjungovanih produženja.

S T A V 5.6. Skup $\mathcal{P}(A)$ ima minimalni element A_μ, i maksimalni element A_M, i sastoji se od svih samoadjungovanih operatora na H (bez ograničenja norme), za koje je $A_\mu \leq \tilde{A} \leq A_M$.

D o k a z. Dovoljno je dokazati da su operatori A_μ, A_M skupa $\mathcal{P}_i(A)$, definisani Krejnovom metodom, samoadjungovani u našem slučaju.

Ako je A_0 proizvoljan fiksirani operator iz skupa $\mathcal{P}(A)$, imaćemo:

$$A_\mu = A_0 - (I + A_0)_{\mathcal{N}},$$
$$A_M = A_0 - (I - A_0)_{\mathcal{N}},$$

gde je $\mathcal{N} = \mathcal{D}_A^{\perp_i}$.

No operatori $B = I \pm A_0$ su l - linearni, samoadjungovani, definisani na H, i osim toga

$$B_{\mathcal{N}} \overset{def}{=} B^{1/2} P_{\mathcal{L}} B^{1/2},$$

gde je $B^{1/2}$ pozitivni kvadratni koren pozitivnog operatora

B, i $P_{\mathcal{L}}$ $\ell(i)$- ortogonalna projekcija na potprostor

$$\mathcal{L} = \{f \in H : B^{1/2} f \in \mathcal{N}\}.$$

Kako je potprostor $\mathcal{D}(A)$ ℓ - linearan, sledi

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}(A)^{\perp i} = \mathcal{D}(A)^{\perp}.$$

No $B^{1/2}$ je takođe ℓ - linearno (kao limes u uniformnoj konvergenciji niza polinoma po B sa realnim koeficijentima), tako da je i potprostor $\mathcal{L}$ ℓ - linearan. Stoga je i projektor $P_{\mathcal{L}}$ očigledno samoadjungovan (jer je $P_{\mathcal{L}}^{*} = P_{\mathcal{L}}^{+} = P_{\mathcal{L}}$), dakle i operator $B_{\mathcal{N}}$ takođe samoadjungovan.

Stoga operatori $A_{\mu}, A_M \in \mathcal{P}(A)$, što je i trebalo dokazati.

Poslednji deo tvrđenja dokazuje se slično kao u radu [43]. □

Sledeći M.G.Krejna, reći ćemo da je otvorena kugla

$$\mathcal{U}_r(\lambda_0) = \{\lambda \in Q : |\lambda - \lambda_0| < r\}$$

u Q-spektralni otvor zatvorenog operatora A, ako $\lambda_0 \in \rho_c(A)$, i $\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\| = 1/r < \infty$.

S T A V 5.7. Ako je $\mathcal{U}_r(\lambda_0)$ $(\lambda_0 \in \mathcal{R})$ spektralni otvor simetričnog operatora A, tada je A produživ. Štaviše, postoji bar jedno njegovo samoadjungovano produženje sa istim spektralnim otvorom.

Ako je njegov indeks defekta m konačan, spektar bilo kog njegovog samoadjungovanog produženja u realnom intervalu $(\lambda_0 - r, \lambda_0 + r)$ sastoji se od tačno m sopstvenih vrednosti.

D o k a z. Prvi deo tvrđenja se lako dokazuje korišćenjem Stava 5.5, a drugi je neposredna posledica odgovarajućeg tvrđenja rada [43].

S T A V 5.8. Ako je $\mathcal{U}_r(\lambda_0)$ $(\lambda_0 \in \Im m Q)$ spektralni otvor kososimetričnog operatora A, tada je A produživo.

Ako je $\lambda_0 = 0$, postoji bar jedno kosoadjungovano produženje sa istim spektralnim otvorom.

Ako su indeksi defekta takvog operatora konačni $(m = n < \infty)$, tada se spektar bilo kog njegovog kosoadjungovanog produženja, u skupu

$$\operatorname{Im} Q \cap \operatorname{rot} U_r(\lambda_0)$$

sastoji od s sopstvenih r- sfera, gde je $m/2 \leq s \leq m$.

D o k a z. Ako tačke $\lambda_1 = 1$, λ_0 i $\lambda_0, \lambda_2 = -1$ povežemo segmentima, oni su očigledno sadržani u skupu regularnih tačaka $\rho_0(A)$, odakle je primenom Teoreme 5.1,

$$l(i)\text{-}\dim \mathcal{N}(A^* - I) = l(i)\text{-}\dim \mathcal{N}(A^* + I),$$

tj. operator A je produživ.

Neka je dalje $\lambda_0 = 0$ i $U_r(0)$ spektralni otvor kososimetričnog operatora A .

Koristeći prvi deo Stava 5.5 i metod Krejna, lako se vidi da postoji bar jedno kosoadjungovano produženje sa istim spektralnim otvorom.

Neka je najzad, $U_r(\lambda_0)$ spektralni otvor operatora A i indeksi defekta m , n konačni: $m = n = 2p < \infty$.

Nije teško videti da se skup

$$i\mathbb{R} \cap \operatorname{rot} U_r(\lambda_0)$$

sastoji od dva intervala imaginarne i-ose

$$(\mu_0 - ir, \mu_0 + ir) \; , \; (-\mu_0 - ir, -\mu_0 + ir) \quad (\mu_0 \in i\mathbb{R})$$

simetrična u odnosu na koordinatni početak, i interval $(\mu_0 - ir, \mu_0 + ir)$ je spektralni otvor (u $\mathbb{C}$) , operatora A .

Iz odgovarajućeg kompleksnog tvrđenja sledi da se spektar bilo kog njegovog kosoadjungovanog produženja u tom intervalu sastoji od tačno m sopstvenih vrednosti.

Odavde se lako dobija tvrđenje.

Osim toga primetimo da je, ako je $\lambda_0 = 0$, broj tih sopstvenih sfera tačno jednak $p = m/2$, i ako je $\lambda_0 \neq 0$, i $r < |\lambda_0|$, njihov broj jednak m . □

P i t a n j e. Da li je drugi iskaz prethodnog stava tačan za bilo koji spektralni otvor (tj. proizvoljno $\lambda_0 \in \operatorname{Im} Q$) .

U opštem slučaju možemo da dokažemo samo nešto slabije tvrđenje:

Ako je $U_r(\lambda_0)$ $(\lambda_0 \in \operatorname{Im} Q, |\lambda_0| < 2r)$ spektralni otvor kososimetričnog operatora A , tada postoji bar jedno njegovo kosoadjungovano produženje A_0, sa spektralnim otvorom $\mathcal{U}_{r_1}(\lambda_0)$, gde je $r_1 = r - 2|\lambda_0|$.

Zaista, kako je kugla $\mathcal{U}_{r-|\lambda_0|}(0)$ spektralni otvor od A , koristeći prethodni stav, dobijamo da postoji neko kosoadjungovano produženje A_0 sa istim spektralnim otvorom; no onda je $\mathcal{U}_{r-2|\lambda_0|}(\lambda_0)$ spektralni otvor ovog produženja.

D E O VI

KORENI POZITIVNIH I NEGATIVNIH OPERATORA

U ovom delu posmatramo samo ograničene samoadjungovane i kosoadjungovane operatore u Vaksovom prostoru H .

Označimo sa $\mathcal{L}(H)$ algebru svih ℓ - linearnih ograničenih operatora na H , sa $\mathfrak{Sa}(H)$, $\mathfrak{Im}(H)$, $\mathfrak{Sa}_+(H)$, i $\mathfrak{Sa}_-(H)$ skupove svih samoadjungovanih, respektivno kosoadjungovanih, pozitivnih i negativnih ograničenih operatora na H .

Posmatraćemo sledeća pitanja:

(1) Da li za svaki pozitivni samoadjungovani operator A i $n \in N$, postoji pozitivni n -ti koren $A^{1/n}$ od A ;

(2) Da li za svaki pozitivni (ili negativni) operator A i odgovarajuću vrednost n , postoji bar jedan kosoadjungovani n -ti koren od A ;

(3) Da li za svako kosoadjungovani operator A i parno n , postoji bar jedan kosoadjungovani n -ti koren od A .

Napomenimo da je odgovor na prvo pitanje uvek potvrdan, a da su drugo i treće pitanje u kompleksnim Hilbertovim prostorima (imajući u vidu (1)) trivijalni; no u našem slučaju to nije tako.

Koristeći izvesne rezultate fundamentalnog rada [95], koji se odnose na kosoadjungovane operatore, dajemo potreban i dovoljan uslov pod kojim je odgovor na pitanja (2) i (3) potvrdan.

Osim toga rešavamo i interesantno pitanje o kardinalnosti skupova $\mathfrak{Sa}(H)$, $\mathfrak{Im}(H)$.

6.1. Pozitivni koren pozitivnog operatora.

Ako je A pozitivni operator u Vaksovom prostoru, tj. $A \in S_{a+}(H)$, tada je za svako prirodno n, A^n takođe pozitivan operator (dokaz se izvodi neposredno, razdvajajući pritom slučajeve kada je n parno odnosno neparno).

Kao i u kompleksnom slučaju, tačno je i obratno tvrđenje.

S T A V 6.1. Ako je A proizvoljan pozitivan samoadjungovani operator, tada za svako prirodno n postoji bar jedan pozitivan samoadjungovani operator A_0 takav da je $A_0^n = A$ (n-ti koren od A), i A_0 komutira sa svakim ograničenim operatorom koji komutira sa A.

D o k a z. Iskoristićemo konstrukciju sličnu odgovarajućoj u kompleksnom slučaju.

Ne umanjujući opštost, može se pretpostaviti da je operator A kontrakcija, tako da je $A = I - P$ gde je P pozitivni kontraktibilni operator.

Definišimo:

$$A_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{1/n}{\nu} (-1)^\nu P^\nu$$

(limes u uniformnoj konvergenciji niza polinoma po P sa realnim koeficijentima).

Lako se vidi da je A_0 pozitivan operator i $A_0^n = A$, čime je tvrđenje dokazano.

Osim toga, može se dati i dokaz koji se zasniva na spektralnoj dekompoziciji operatora A.

Naime, kako spektralna familija E_λ operatora A pripada skupu $\mathcal{L}(H)$ (za svako $\lambda \in \mathbb{R}^+$), dovoljno je primetiti da integral $A_0 = \int_0^\infty \lambda^{1/n} dE_\lambda$ (pri čemu $\lambda^{1/n}$ poprima pozitivne vrednosti za $\lambda \geq 0$), pripada $S_{a+}(H)$ i $A_0^n = A$.

P r i m e d b a. Prethodna osobina za slučaj kvadratnog korena pozitivnog operatora je navedena i korišćena još od Tajhmilera u radu [95].

U opštem slučaju jednačina $X^n = A$ $(X \in S_a(H))$ ima beskonačno mnogo rešenja, no za sve njih je ispunjeno: $\|X\| = const$.

Zaista, ako je X opštije, bilo koji normalan operator i $X^n = A$, tada je $\|X\|^n = \|X^n\| = \|A\|$, dakle

$\|X\| = \|A\|^{1/n}$.

6.2. Kosoadjungovani n-ti koren samoadjungovanih i kosoadjungovanih operatora.

Ako je B proizvoljan kosoadjungovan operator i n prirodan broj, tada:

$$B^n \in \begin{cases} Sa+(H), & n \equiv 0 \pmod 4 \\ Sa-(H), & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \mathcal{J}m(H), & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

što se lako proverava.

Stoga se može posmatrati jednačina $X^n = A$ u skupu $\mathcal{J}m(H)$, za odgovarajuće vrednosti broja n i odgovarajuću klasu operatora A.

Pre nego što rešimo ove jednačine, daćemo izvesne primedbe o posebnom slučaju $n=2$ i kvadratu B^2 proizvoljnog kosoadjungovanog operatora B.

S T A V 6.2. Ako je B kosoadjungovani operator, tada je zatvoreni numerički rang $\overline{W(B^2)}$ njegovog kvadrata $A=B^2$ zatvoreni interval $[b_1, b_2]$ negativnog dela realne ose, i

$$\|B\| = \sqrt{|b_1|}\ , \qquad \inf|\sigma(B)| = \sqrt{|b_2|}\ .$$

Zatvoreni interval $[b_1, b_2] \subseteq (-\infty, 0]$ je zatvoreni numerički rang kvadrata B^2 kosoadjungovanog operatora B, ako i samo ako su ispunjena prethodna dva uslova.

D o k a z. Primenom teoreme o spektralnom radijusu normalnog operatora, sledi da je za operator B ispunjeno

$$r_\sigma(B) = \sup|\sigma(B)| = \|B\|.$$

Ako stavimo $\sigma_i(B) = \sigma(B) \cap i\mathcal{R}$, i iskoristimo teoremu o preslikavanju spektra (spectral-mapping theorem) iz kompleksnih prostora, dobijamo:

$$\sigma(A) = \sigma_i(B^2) = \sigma_i(B)^2.$$

Kako

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)} = [b_1, b_2] \qquad (b_1 \leq b_2 \leq 0),$$

i A je samoadjungovani operator, sledi da $b_1, b_2 \in \sigma(A)$, tako da je:

$$|b_1| = \sup |\sigma_i(B)|^2 = \|B^2\|,$$
$$|b_2| = \inf |\sigma(A)| = \inf |\sigma(B)|^2.$$

Poslednji deo tvrđenja se takođe lako proverava.

Kako je osim toga, zatvoreni numerički rang bilo kog kosoadjungovanog operatora B - kugla u $\mathfrak{Im}\,Q$, sa centrom u koordinatnom početku i radijusom jednakim normi operatora, lako se vidi da je, ako je $b_2 \neq 0$, kugla

$$\mathcal{U}_{|b_2|}(0) = \{\lambda \in Q : |\lambda| < \sqrt{|b_2|}\}$$

spektralni otvor operatora B.

U daljem biće nam potrebna posebna klasa kosoadjungovanih operatora.

Definicija 6.1. Kosoadjungovani operator J zvaćemo t - imaginarnim, ako postoji bazis $\{e_\alpha\}$ prostora H takav da je $Je_\alpha = ie_\alpha$, ili 0, za svako α.

Ovi operatori bili su korišćeni od Tajhmilera [95], i nezavisno od Visvanata [102], pod nazivom - imaginarni.

Ovde usvajamo prethodni naziv da bi smo ih razlikovali od običnih imaginarnih, tj. kosoadjungovanih operatora.

Za takav operator J ispunjeno je:

$$\overline{\mathcal{R}(J)} = \mathcal{N}(J - iI) \oplus_i \mathcal{N}(J + iI),$$
$$\overline{\mathcal{R}(J)} \oplus \mathcal{N}(J) = H$$

i imaginarni operator J je t - imaginaran ako i samo ako je $J^2x = -x$ ili 0, respektivno za $x \in \mathcal{R}(J)$ i $x \in \mathcal{N}(J)$.

Osim toga, nije teško videti da proizvoljna dekompozicija prostora H,

$$H = \{E(i) \oplus_i (jE(i))\} \oplus E_0,$$

gde je $E(i)$ zatvoreni $\ell(i)$ - linearan potprostor, E_0 zatvoreni ℓ - linearni potprostor, definiše t - imaginarni operator J, za koji je

$$E(i) = \mathcal{N}(J - iI), \quad E_0 = \mathcal{N}(J),$$

i skalarni proizvod prostora poprima vrednosti iz ravni $\mathfrak{X}(i)$, na potprostorima $E(i)$, $jE(i)$.

Ovo se lako proverava, i bilo je dokazano od Tajhmilera [55] (s.97/98).

Definicija 6.2. Normalni operator A zvaćemo dopustivim u odnosu na t - imaginarni operator $\mathfrak{J}$ ako je

$$\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(\mathfrak{J}), \quad A\mathfrak{J}=\mathfrak{J}A.$$

S obzirom da su operatori A i $\mathfrak{J}$ normalni, nije teško videti da je u tom slučaju $\overline{\mathcal{R}(A)}=\mathcal{R}(\mathfrak{J})$ i potprostori $\mathcal{N}(\mathfrak{J}-iI)$, $\mathcal{N}(\mathfrak{J}+iI)$ invarijantni za operator A.

Takođe je tačno i obratno, naime ako je $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(\mathfrak{J})$ i potprostor $\mathcal{N}(\mathfrak{J}-iI)$ je invarijantan za A, tada je A dopustiv u odnosu na $\mathfrak{J}$.

S T A V 6.3. Normalni operator A je dopustiv, ako i samo ako se:

(1°) poprostor $\overline{\mathcal{R}(A)}$ može razložiti u ortogonalni zbir

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = E(i) \oplus_i (jE(i))$$

svojih zatvorenih $\ell(i)$ - linearnih potprostora, koji su invarijantni za A;

(2°) prostor H može razložiti u zbir

$$H = F(i) \oplus_i (jF(i)),$$

pri čemu je $F(i)$ zatvoreni $\ell(i)$ - linearni potprostor invarijantan za A.

Sada možemo da iskažemo glavne rezltate.

T E O R E M A 6.1. Ako $A \in \mathcal{S}a_+(H)$ i $n \equiv 0$ (mod 4), tada jednačina $X^n = A$ ima bar jedno rešenje X u skupu $\mathfrak{Im}(H)$, ako i samo ako je operator A dopustiv.

D o k a z. Neka je najpre pozitivni operator A dopustiv u odnosu na t - imaginarni operator $\mathfrak{J}$. Označimo sa $A_0 = A^{1/n}$ pozitivni n-ti koren od A, iz Stava 6.1.

Imaćemo da je $\mathcal{N}(A_0)=\mathcal{N}(A)$, tako da je $\mathcal{N}(A_0)=\mathcal{N}(\mathfrak{J})$, A_0 komutira sa $\mathfrak{J}$, dakle A_0 je takođe dopustiv s obzirom na $\mathcal{J}$.

Definišimo: $X = A_o \mathcal{J}$ (očigledno kosoadjungovani operator). Tada je

$$X^k = (A_o \mathcal{J})^k = A_o^k \mathcal{J}^k ,$$

i kako je $A_o \mathcal{J}^2 = -A_o$, indukcijom se lako dokazuje da je za $k \equiv 0 \pmod 4$, $X^k = A_o^k$.

Stoga je $X^n = A_o^n = A$, dakle X traženi kosoadjungovani n-ti koren od A.

Dokažimo još da je gornji uslov potreban.

Neka je $X^n = A$, $n \equiv 0 \pmod 4$, i $X \in \in \mathcal{I}m(H)$.

Kako je dokazano u radu [95], svaki kosoadjungovani operator X može se predstaviti u obliku

$$X = P\mathcal{J} = \mathcal{J}P ,$$

gde je $P = (-X^2)^{1/2} \in \mathcal{S}a_+(H)$, $\mathcal{J}$ je t - imaginarni operator takav da je $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(\mathcal{J})$; stoga je operator P dopustiv s obzirom na $\mathcal{J}$.

Kako je $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(P)$, i $X\mathcal{J} = \mathcal{J}X$, sleduje da su i X i P dopustivi s obzirom na $\mathcal{J}$.

Stoga je, za $n \equiv 0 \pmod 4$:

$$X^n = P^n \mathcal{J}^n = P^n = A .$$

S obzirom na pozitivnost A i P, dobijamo

$$\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(P^n) = \mathcal{N}(A),$$

tako da je $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathcal{J})$, i $A\mathcal{J} = \mathcal{J}A$, dakle A je dopustiv u odnosu na $\mathcal{J}$, što je i trebalo dokazati.

<u>T E O R E M A 6.2.</u> <u>Ako</u> $A \in \mathcal{S}a_-(H)$, <u>i</u> $n \equiv 2 \pmod 4$, <u>tada jednačina</u> $X^n = A$ <u>ima bar jedno kosoadjungovano rešenje</u> X, <u>ako i samo ako je negativni operator</u> A <u>dopustiv u odnosu na neki</u> t <u>- imaginarni operator</u>.

D o k a z. Postupak dokazivanja je sličan prethodnom.

Ako je $A\mathcal{J} = \mathcal{J}A$, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathcal{J})$, definisaćemo:

$$A_o = (-A)^{1/n} \text{ (iz Stava 6.1), i } X = A_o \mathcal{J} = \mathcal{J} A_o .$$

Tada je X kosoadjungovano, i:

$$X^n = (-A)\, J^n = -(-1)^{n/2} A = A.$$

Obratno tvrđenje dokazuje se slično kao u prethodnoj teoremi.

T E O R E M A 6.3. Ako $A \in \mathcal{I}m(H)$, $n \equiv 1$ (mod 2) tada jednačina $X^n = A$ uvek ima bar jedno rešenje u skupu $\mathcal{I}m(H)$.

D o k a z. Ako je $A = PJ = JP$ dekompozicija operatora A iz Teor.6.1, definisaćemo:

$$X = (-1)^{\frac{n-1}{2}} P_0 J \quad , \text{ gde je } P_0 = P^{1/n},$$

i može se lako proveriti da $X \in \mathcal{I}m(H)$ i $X^n = A$, što završava dokaz.

P r i m e d b a. Primerom se može lako pokazati da nijedna od prethodno posmatranih jednačina nema jedinstveno rešenje, no i pored toga sva ta rešenja imaju iste norme: $\|X\| = \|A\|^{1/n}$.

Takođe je interesantno pitanje da li je svaki pozitivni (ili negativni), ili opštije, svaki samoadjungovani operator - dopustiv u odnosu na neki t - imaginarni operator .

Odgovor na ovo pitanje ne znamo, no čini nam se da je on negativan.

Navodimo osim toga bar dve klase samoadjungovanih operatora koji zadovoljavaju gornji uslov.

(1) Svaki ld - linearni samoadjungovani operator prostora H (ili opštije, takav $ld(i)$ - linearni operator), je dopustiv.

Zaista, imaćemo da je

$$H = H(i) \oplus_i (j\, H(i))$$

i zatvoreni potprostor $H(i)$ je invarijantan za A, te je dovoljno primeniti Stav 6.3.

(2) Svaki kompaktni samoadjungovani, i posebno, svaki samoadjungovani operator u konačno-dimenzionalnom

Vaksovom prostoru, je dopustiv u odnosu na neki t - imaginarni operator J.

Pre svega, lako se proverava da za bilo koji takav operator postoji neki ortonormalni bazis koji se sastoji od njegovih sopstvenih vrednosti.

Zaista, kao i u kompleksnom prostoru, njegovi sopstveni potprostori su ortogonalni, konačno-dimenzionalni, tako da u svakom od njih postoji bazis formiran od sopstvenih vektora.

Neka je dalje, $\{e_\alpha\}$ bilo koji ortonormalni bazis sastavljen od sopstvenih vektora.
Kako su sve sopstvene vrednosti od A realne, potprostor $E(i)$, zatvoreni $\ell(i)$ - linearni omotač skupa $\{e_\alpha\}$, je invarijantan za A, i Stav 6.3 završava dokaz.

6.3. Kardinalnost skupova $\mathcal{S}a(H)$ i $\mathcal{I}m(H)$.

Za razliku od kompleksnog slučaja, nije trivijalno i interesantno je pitanje o vezi između kardinalnih brojeva $\operatorname{Card} \mathcal{S}a(H)$ i $\operatorname{Card} \mathcal{I}m(H)$.

Dokazaćemo da su oni ipak, kao i u kompleksnom slučaju, jednaki. Dokaz se zasniva na koordinatizaciji prostora H.

T E O R E M A 6.4. Skupovi samoadjungovanih i kosoadjungovanih operatora u Vaksovom prostoru su iste kardinalnosti.

D o k a z. Neka je $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ortonormalni bazis prostora H i $A\in\mathcal{L}(H)$.

Stavimo:

$$f_{\alpha\beta} = \langle Ae_\alpha , \beta\rangle \quad (f_{\alpha\beta}\in Q;\ \alpha,\beta\in\Lambda).$$

Skup skalara $\{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ ima sledeće osobine:

1/ Za svako fiksirano α, $f_{\alpha\beta}\neq 0$ najviše za prebrojivo mnogo $\beta\in\Lambda$;

2/ Red $\sum_\beta |f_{\alpha\beta}|^2$ konvergira, i štaviše,

3/ Skup skalara $\{g_\alpha = \sum_\beta |f_{\alpha\beta}|^2\}$ je uniformno ograničen.

Obratno, svaki skup skalara $\{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ koji ima gornje osobine (nazovimo ga uslovno, dopustivim), jednoznačno određuje neki operator $A\in\mathcal{L}(H)$.

Neposredno se vidi sledeće:

(a) $A\in \mathcal{S}a(H)$ ako i samo ako je $f_{\alpha\beta}=\overline{f_{\beta\alpha}}$ $(\alpha,\beta\in\Lambda)$;

(b) $A\in \mathcal{I}m(H)$ ako i samo ako je $f_{\alpha\beta}=-\overline{f_{\beta\alpha}}$ $(\alpha,\beta\in\Lambda)$.

Označimo sa D dijagonalu skupa $\Lambda^2=\Lambda\times\Lambda$, i sa Π proizvoljni poskup od Λ^2 takav da je

$$\Pi\cup\Pi^*=\Lambda^2\setminus D,\quad \Pi\cap\Pi^*=\phi,$$

gde je $\Pi^*=\{(\beta,\alpha)\mid(\alpha,\beta)\in\Pi\}$ (postojanje bar jednog takvog podskupa sledi iz aksiome izbora).

Tada uslovi (a), (b) poprimaju oblik:

(a') $$f_{\alpha\beta}\in\begin{cases}\mathcal{R}, & (\alpha,\beta)\in D\\ Q, & (\alpha,\beta)\in\Pi\end{cases},\quad (i\ f_{\alpha\beta}=\overline{f_{\beta\alpha}},\ (\alpha,\beta)\in\Pi^*),$$

(b') $$f_{\alpha\beta}\in\begin{cases}\mathcal{I}m\,Q, & (\alpha,\beta)\in D\\ Q, & (\alpha,\beta)\in\Pi\end{cases},\quad (i\ f_{\alpha\beta}=-\overline{f_{\beta\alpha}},\ (\alpha,\beta)\in\Pi^*).$$

Obratno, svaki dopustivi skup skalara $f=\{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ koji zadovoljava uslov (a') ili (b') određuje neki ograničeni samoadjungovani, odnosno kosoadjungovani operator na H.

Označimo sa:

F_1 -klasu svih unif. ograničenih funkcija $f_1=\{f_{\alpha\alpha}\}:D\to\mathcal{R}$;

F_2 - klasu svih unif. ograničenih funkcija $f_2=\{f_{\alpha\alpha}\}:D\to\mathcal{I}m\,Q$;

F - klasu svih dopustivih funkcija $f=\{f_{\alpha\beta}\}:\Pi\to Q$.

Tada su sve ove klase beskonačne, i očigledno,

$$\mathrm{Card}\ \mathcal{S}a(H)=\mathrm{Card}\,F_1\times\mathrm{Card}\,F,$$
$$\mathrm{Card}\ \mathcal{I}m(H)=\mathrm{Card}\,F_2\times\mathrm{Card}\,F.$$

Nije teško videti da je $\mathrm{Card}\,F_1\le\mathrm{Card}\,F_2$, i

$$\mathrm{Card}\,F_2\le(\mathrm{Card}\,F_1)^3=\mathrm{Card}\,F_1,$$

tako da je na osnovu Cantor-Bernštajnove teoreme,

$$\mathrm{Card}\, Sa(H) = \mathrm{Card}\, Im(H),$$

čime je tvrđenje dokazano.

Kako je gornji dokaz egzistencijalnog karaktera, bilo bi interesantno dati bar jedan konstruktivan dokaz ove teoreme.

D E O VII

FUNKCIJE I SPEKTRALNI SKUPOVI LINEARNIH OPERATORA

U radu [102] Visvanat je izgradio jedan funkcionalni račun za normalne l - linearne operatore u (jednostranom) Vaksovom prostoru.

Ovde ćemo to učiniti za opštije (neobavezno normalne) ℓ_φ - linearne operatore, tačnije daćemo potpunu karakterizaciju funkcija operatora koje izgrađene pomoću klasičnog Ris-Danfordovog funkcionalnog računa u kompleksnom prostoru $H[p_1]$ - pripadaju klasi $\mathcal{L}_\varphi(H)$, i za tako dobijeni funkcionalni račun dokazaćemo da poseduje uobičajene osobine. Pritom izgleda da se dobija nešto širi funkcionalni račun od odgovarajućeg u radu [102] .

Napomenimo još da ovim f. računom ne možemo da obuhvatimo i operatore αA , $A\alpha$ (itd.) konstruisane ranije, vezane za desno množenje skalarima, te bi bilo interesantno izgraditi još opštiji f. račun kojim bi obuhvatili i sve takve operatore.

U drugoj tački primenom navedenog funkcionalnog računa, uvodimo pojam spektralnog skupa ℓ_φ- linearnog operatora i na operatore u Vaksovim prostorima uopštavamo neke osnovne rezultate fon Nojmana [63] (v. takođe i [80]) i jedan rezultat Fojaša [24] .

U poslednjoj tački dajemo, ukratko, definiciju i osnovne osobine spektralnih skupova <u>neograničenih</u> operatora u Hilbertovom prostoru, koji dosad (koliko nam je poznato) nisu posmatrani (iako je f. račun takvih operatora izgrađen: Bejd [5] , Tejlor [93]).

Zbog dužine, ne navodimo odgovarajuće rezultate za neograničene ℓ_φ- linearne operatore u Vaksovom prostoru, a takođe ne ispitujemo ni odnos spektralnih skupova i numeričkog ranga (ograničenih i neograničenih) operatora u Vaksovim prostorima. Sistematsko ispitivanje ove problematike i posebno, uopštavanje rezultata Halmoša, Nađa, Fojaša i dr. o spektralnim skupovima, izgleda da bi moglo da posluži kao tema jedne nove disertacije.

7.1. Funkcije ℓ_φ - linearnih operatora.

Navedimo najpre dva primera - polinoma i racionalne funkcije ℓ_φ - linearnog operatora.

Ako u Vaksovom prostoru H operator $A \in \mathcal{L}_\varphi(H)$, i $\pi(p_1)$ je svojstvena ravan preslikavanja φ, za proizvoljni polinom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (z \in \pi(p_1)),$$

sa kvaternionskim koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$ definisaćemo polinom $f(A)$ od A sa:

$$f(A) = a_0 I + (a_1 I) A + (a_2 I) A^2 + \cdots + (a_n I) A^n$$

Osim toga, reći ćemo da je kompleksna funkcija $f(z)$ ekvivalentna sa $g(z)$ $(z \in \pi(p_1))$ ako je $f(A) = g(A)$.

S T A V 7.1. Polinomni operator $f(A) \in \mathcal{L}_\varphi(H)$ ako i samo ako postoji ekvivalentni polinom $g(z)$ (čiji koeficijenti pripadaju ravni $\pi(p_1)$) i ispunjava uslov $\overline{g(z)} = \varepsilon g(\varepsilon \bar{z})$.

D o k a z. Neka je $p_2 \perp p_1$ i $p_3 = p_1 p_2$, tj. p_1, p_2, p_3 obrazuju o.n.s. desne orijentacije u potprostoru $\mathcal{I}m\, Q$.

Nije teško videti da važi sledeće: Ako operatori B_1, B_2, B_3, $B_4 \in \mathcal{L}_\varphi(H)$, tada $B_1 + (p_2 I) B_2 \in \mathcal{L}_\varphi(H)$ ako i samo ako je $B_2 = 0$, a isto tako zbir

$$B_1 + (p_1 I) B_2 + (p_2 I) B_3 + (p_3 I) B_4 \in \mathcal{L}_\varphi(H)$$

ako i samo ako je $B_2 = B_3 = B_4 = 0$.

Razlaganjem kvaternionskih koeficijenata a_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ u odnosu na p_1, p_2, p_3 odavde neposredno sledi tvrđenje.

Navedimo još jedan dokaz tvrđenja.

Kako je gornji uslov očigledno dovoljan, pretpostavimo da obratno, $f(A) \in \mathcal{L}_\varphi(H)$. Tada je:

$$f(A) = 1/4\,[\, f(A) + (p_1 I) f(A) (\bar{p}_1 I) + \varepsilon (p_2 I) f(A) (\bar{p}_2 I) + \varepsilon (p_3 I) f(A) (\bar{p}_3 I) \,] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{4} \left(a_\nu I + p_1 a_\nu \bar{p}_1 I + \varepsilon p_2 a_\nu \bar{p}_2 I + \varepsilon p_3 a_\nu \bar{p}_3 I \right) A^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (b_\nu I) A^\nu = g(A),$$

dakle polinom $g(z) = \sum_{0}^{n} b_\nu z^\nu$ zadovoljava navedene uslove i posebno ima osobinu $\overline{g(z)} = \varepsilon g(\varepsilon \overline{z})$.

Stoga se u definiciji polinomne funkcije $f(A)$ operatora A možemo ograničiti na polinome koji zadovoljavaju uslov: $\overline{f(z)} = \varepsilon f(\varepsilon\overline{z})$ (ili ekvivalentno, $a_1, a_3, a_5, \ldots \in \mathcal{R}$; $\overline{a_{2\nu}} = \varepsilon a_{2\nu}$).

Takve polinome (i opštije, kompleksne funkcije), nazivaćemo φ - dopustivim.

Ako je dalje $f(z) = f_1(z) f_2(z)^{-1}$ proizvoljna racionalna funkcija sa argumentom i koeficijentima iz ravni $\pi(p_1)$, čiji singulariteti pripadaju rezolventnom skupu $\rho(A)$ operatora A, može se definisati $f(A)$ sa $f(A) = f_1(A) f_2(A)^{-1}$.

S T A V 7.2. <u>Operator $f(A)$ pripada klasi $\mathcal{L}_\varphi(H)$ ako i samo ako postoji φ - dopustiva racionalna funkcija $g(z)$ ekvivalentna sa funkcijom $f(z)$.</u>

D o k a z. Kako je gornji uslov očigledno dovoljan (jer je lako videti da je svaka φ - dopustiva racionalna funkcija ekvivalentna količniku dva polinoma sa navedenom osobinom), treba dokazati samo neophodnost.

Neka je $f(z) = f_1(z) f_2(z)^{-1}$ proizvoljna racionalna funkcija čiji skup singulariteta $\mathcal{S}[f]$ pripada rezolventnom skupu $\rho(A)$, dakle operator $f(A) = f_1(A) f_2(A)^{-1}$ je ograničen, definisan na prostoru H i osim toga ℓ_φ- linearan.

Za proizvoljan polinom $h(z)$ sa koeficijentima a_0, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ iz ravni $\pi(p_1)$, označimo sa $h^*(z)$ polinom čiji su koeficijenti redom $\varepsilon\overline{a_0}$, $\overline{a_1}$, $\varepsilon\overline{a_2}$, $\overline{a_3}, \ldots$. Očigledno je $h^*(z) = \varepsilon \overline{h(\varepsilon\overline{z})}$, i skup nula $\mathcal{N}[h^*] = \varepsilon \mathcal{N}[h]^*$.

Takođe za proizvoljnu racionalnu funkciju $f(z) = f_1(z) f_2(z)^{-1}$ označimo: $f^*(z) = f_1^*(z) f_2^*(z)^{-1}$, i očigledno je skup singulariteta $\mathcal{S}[f^*] = \varepsilon \mathcal{S}[f]^*$.

Zbog φ - rotabilnosti skupa $\rho(A)$, iz pretpostavke da $\mathcal{S}[f] \subseteq \rho(A)$, sledi da takođe $\mathcal{S}[f^*] = \varepsilon \mathcal{S}[f] \subseteq \rho(A)$. Stoga je operator $f^*(A) = f_1^*(A) f_2^*(A)^{-1}$ ograničen, definisan na celom prostoru H, i nije teško videti da je, zbog pretpostavke da $f(A) \in \mathcal{L}_\varphi(H)$:

$$(p_2 I) f(A)(\bar{p}_2 I) = (p_2 I) f_1(A)(\bar{p}_2 I)[(p_2 I) f_2(A)(\bar{p}_2 I)]^{-1} =$$
$$= \varepsilon f_1^*(A)\,(\varepsilon f_2^*(A))^{-1} = f_1^*(A) f_2^*(A)^{-1} = \varepsilon f(A),$$

dakle $f(A) = \varepsilon f^*(A)$.

Uočimo racionalnu funkciju $g(z)$:

$$g(z) = 1/2\,[f(z) + \varepsilon f^*(z)] =$$
$$= 1/2\,[f_1(z) f_2^*(z) + \varepsilon f_1^*(z) f_2(z)]\, f_2(z)^{-1} f_2^*(z)^{-1} =$$
$$= g_1(z)\, g_2(z)^{-1}.$$

Očigledno je $g(z)$ φ - dopustiva funkcija, $\mathcal{S}[g] = \mathcal{S}[f] \cup \cup \varepsilon \mathcal{S}[f]^* \subseteq \mathcal{S}(A)$, dakle postoji operator $g(A)$ i $g(A) = f(A)$. Time je tvrđenje dokazano. □

Uopštavajući prethodne rezultate, primenom klasičnog funkcionalnog računa Risa-Danforda u prostoru $H[p_1]$, određujemo najširi (sadržan u prethodnom) skup funkcija za koje odgovarajući funkcionalni operatori datog operatora pripadaju klasi $\mathcal{L}_\varphi(H)$, i dokazujemo da važe uobičajene osobine.

Podsetimo (Taylor [94] , s.289), da se skup D u ravni $\mathbb{C}(p_1)$ naziva Košijevim domenom ako je: 1°) D - otvoreno; 2°) D - ima konačan broj komponenti čije su atherencije disjunktne; 3°) granica $\partial(D)$ sastoji se od konačnog broja rektificibilnih Žordanovih krivih od kojih se nikoje dve ne seku.

Za proizvoljan operator $A \in \mathcal{L}_\varphi(H)$, označimo sa $[A]$ klasu svih kompleksnih funkcija $f(z)$, definisanih na otvorenom skupu $\Delta(f) \subseteq \mathbb{C}(p_1)$ koji obuhvata spektar $\sigma(p_1)$, i $f(z)$ je lokalno analitička funkcija na $\Delta(f)$.

Takođe označimo sa $[A]_\varphi$ klasu svih funkcija $f(z)$ iz $[A]$ sa osobinom $f(z) = \varepsilon f(\varepsilon \bar{z})$ $(z \in \Delta(f) \cap \varepsilon \Delta(f)^*)$. Nazivaćemo ih takođe φ- dopustivim.

Za svako $f \in [A]$, i ograničeni Košijev domen D : $\sigma(p_1) \subseteq D$, $\bar{D} \subseteq \Delta(f)$, definiše se ([94] s.289):

$$(*) \qquad f(A) = -1/2\pi p_1 \int_{\partial_+(D)} (f(z) I)(A - zI)^{-1}\, d(zI) .$$

Svaki takav Košijev domen naziva se dopustivim domenom funkcije f.

L E M A 7.1. Ako je D dopustivi domen neke lokalno analitičke funkcije $f(z)$ na $\sigma(p_1)$, tada je i $D \cap \varepsilon D^*$ takav domen, i gornji integral jednak je odgovarajućem integralu s obzirom na domen $D_1 = D \cap \varepsilon D^*$.

D o k a z. Poznato je ([94], str.289), da za proizvoljnu lokalno analitičku funkciju $f \in [A]$ na $\sigma(p_1)$, postoji bar jedan dopustivi domen D $(\sigma(p_1) \subseteq D, \overline{D} \subseteq \Delta(f))$, i integral $(*)$ ne zavisi od izbora domena D.

Zbog φ - simetričnosti spektra $\sigma(p_1)$, lako se proverava da je sa D takođe i $D_1 = D \cap \varepsilon D^*$ Košijev domen funkcije $f \in [A]$, i D_1 homotopno sa D.

Odavde neposredno sledi tvrđenje.

Na osnovu prethodnog, na dalje se možemo ograničiti na slučaj kada je odgovarajući dopustivi domen funkcije $f \in [A]$ φ - simetričan skup.

S T A V 7.3. Ako funkcija $f \in [A]$, tada operator

$$f(A) = -1/2\pi p_1 \int_{\partial+(D)} (f(z)I)(A - zI)^{-1} d(zI)$$

(gde je D proizvoljan φ - simetričan dopustivi domen u ravni $\pi(p_1)$), pripada klasi $\mathscr{L}_\varphi(H)$ ako i samo ako postoji lokalno analitička funkcija $g \in [A]_\varphi$ na $\sigma(p_1)$ ekvivalentna sa f.

D o k a z. Kod dokaza da je navedeni uslov dovoljan, dovoljno je dokazati da je $(p_2 I) g(A)(\overline{p}_2 I) = \varepsilon g(A)$ $(p_2 \perp p_1)$, dakle $f(A) = g(A)$ ℓ_φ- linearan operator.

S obzirom na definiciju krivolinijskog operatorskog integrala, nije teško videti da važi:

$$(p_2 I) g(A)(\overline{p}_2 I) = +1/2\pi p_1 \int_{\partial+(D)} (p_2 g(z) I)(A - zI)^{-1} d(z \overline{p}_2 I) =$$

$$= +1/2\pi p_1 \int_{z \in \partial+(D)} (\overline{g(z)}\, I)(A - \varepsilon \overline{z} I)^{-1} d(\varepsilon \overline{z} I) =$$

$$= +1/\ldots \int (\varepsilon g(\varepsilon \overline{z}) I)(A - \varepsilon \overline{z} I)^{-1} d(\varepsilon \overline{z} I).$$

Kako je D φ - simetričan domen, očigledno $z \in \partial_+(D)$ ako i samo ako $\varepsilon\bar{z} \in \partial_-(\varepsilon D^*) = \partial_-(D)$, odakle je:

$$(p_2 I)g(A)(\bar{p}_2 I) = \varepsilon/2\pi p_1 \int_{\partial_-(D)} (g(z')I)(A-z'I)^{-1} d(z'I) =$$

$$= -\varepsilon/2\pi p_1 \int_{\partial_+(D)} (g(z)I)(A-zI)^{-1} d(zI) =$$

$$= \varepsilon\, g(A)$$

što je i trebalo dokazati.

Obratno, pretpostavimo da $f(A) \in \mathcal{L}_\varphi(H)$, tj. $(p_2 I) f(A)(\bar{p}_2 I) = \varepsilon f(A)$.

Koristeći sličan postupak kao pre, dobijamo:

$$f(A) = -1/2\pi p_1 \int_{\partial_+(D)} (\varepsilon \overline{f(\varepsilon\bar{z})}\, I)(A-zI)^{-1} d(zI)$$

i ako stavimo:

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) + \varepsilon \overline{f(\varepsilon\bar{z})}\right),$$

funkcija $g(z)$ očigledno pripada klasi $[A]_\varphi$ i ekvivalentna je sa $f(z)$, čime je tvrđenje dokazano. □

Ako u skupu $[A]_\varphi$ identifikujemo funkcije koje su jednake na nekom otvorenom skupu koji sadrži skup $\sigma(p_1)$, i uvedemo kompoziciju funkcija na uobičajeni način:

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)),$$

tada se lako dokazuje (slično kao u običnom kompleksnom slučaju) , da je preslikavanje $f \longrightarrow f(A)$ algebarski homomorfizam algebre (klasa ekvivalencije od) $[A]_\varphi$ u algebru $\mathcal{L}_\varphi(H)$. Ovo preslikavanje preslikava funkciju $f(z) = \omega$ u ωI, i funkciju $f(z) = z$ u A .

Primenom navedenog funkcionalnog računa, lako se mogu konstruisati sledeće funkcije operatora A : A^n , e^A , $\ln A$, $A^{1/n}$ itd.

<u>K O R O L A R 7.1. Ako funkcija $f \in [A]_\varphi$, tada funkcija $f_1(z) = f(\varepsilon z)$ pripada klasi $[A^*]_\varphi$ i $f_1(A^*) = \varepsilon f(A)^*$.</u>

D o k a z. Kako je na osnovu Stava 3.3, $\sigma(A)^* = \varepsilon\, \sigma(A)^*$, nije teško videti da funkcija $f_1(z) = f(\varepsilon z)$ pripada klasi $[A^*]_\varphi$, i ako je D bilo koji dopustivi domen funkcije f , tada je εD takav domen funkcije $f_1(z)$. Stoga je:

$$f_1(A^*) = -1/2\pi p_1 \int_{\partial_+(\varepsilon D)} (f(\varepsilon z)I)(A^* - zI)^{-1} d(zI) =$$

$$= \left\{ 1/2\pi p_1 \int_{z\in\partial_+(\varepsilon D)} (\overline{f(\varepsilon \lambda)}I)(A - \bar{z}I)^{-1} d(\bar{z}I) \right\}^*,$$

odakle se lako dobija:

$$f_1(A^*) = \left\{ -\varepsilon/2\pi p_1 \int_{\partial_+(D)} (f(z)I)(A - zI)^{-1} d(zI) \right\}^* =$$

$$= \varepsilon f(A)^*,$$

što je i trebalo dokazati. □

Gornji rezultat može se lako proveriti na primeru funkcija $f(z) = \omega$ i $f(z) = z$.

Pisaćemo formalno: $f(\varepsilon A^*) = \varepsilon f(A)^*$.

7.2. Spektralni skupovi ℓ_φ – linearnih operatora.

S obzirom na prethodne rezultate, izgleda prirodno uvesti na sledeći način definiciju (fon Nojmanovog) spektralnog skupa operatora u Vaksovom prostoru.

<u>Definicija 7.1.</u> Zatvoreni skup X u ravni $\pi(p_1)$ nazivamo <u>ℓ_φ – spektralnim</u> (ili kratko, spektralnim) skupom operatora $A \in \mathcal{L}_\varphi(H)$, ako X sadrži spektar $\sigma(p_1)$, i za svaku racionalnu φ – dopustivu funkciju $f(z)$, čiji singulariteti ne pripadaju X, važi:

$$\| f(A) \| \le \sup_{z\in X} | f(z) | \cdot \| A \| . \quad \square$$

Za razliku od ℓ_φ – spektralnih, "obične" spektralne skupove operatora A (u prostoru $H[p_1]$) označavaćemo sa "$\ell(p_1)$–".

Napomenimo da je teorija spektralnih skupova u Hilbertovom prostoru bila uvedena od fon Nojmana u radu [63] (v. takođe i [80]), i razvijena u radovima Bergera, Lebova [45], posebno Nađa i Fojaša [59], [24], [25], [26] (itd.) i drugih.

Ovde navodimo uopštenja samo nekih od tih klasičnih rezultata.

Sledećim stavom pokazujemo da se možemo ograničiti na φ - simetrične spektralne skupove.

<u>L E M A 7.2. Zatvoreni skup $X \subseteq \mathfrak{U}(p_1)$ je ℓ_φ - spektralan skup operatora A, ako i samo ako je skup X^* takav, i ako i samo ako $X \supseteq \sigma(p_1)$ i $X \cup \varepsilon X^*$ je ℓ_φ - spektralan skup.</u>

D o k a z. Dokazaćemo samo drugi deo tvrđenja.

Ako je X ℓ_φ - spektralan skup operatora A, tada je očigledno i $X \cup \varepsilon X^*$ kao (zatvoreni) nadskup od X, takođe spektralan skup.

Neka obratno $X \supseteq \sigma(p_1)$, $X \cup \varepsilon X^*$ je spektralan i $f(z)$ je proizvoljna racionalna funkcija čiji singulariteti leže van X i ispunjava pritom uslov $\overline{f(z)} = \varepsilon f(\varepsilon \bar{z})$ $(z \in \mathfrak{U}(p_1))$. Kako je $\mathcal{S}(f)$ φ - simetričan skup, on ne seče skup $X \cup \varepsilon X^*$, te je:

$$\|f(A)\| \leq \sup_{z \in X \cup \varepsilon X^*} |f(z)| \cdot \|A\| .$$

No kako je

$$\sup_{z \in X \cup \varepsilon X^*} |f(z)| = \max \left\{ \sup_{\lambda \in X} |f(\lambda)|, \sup_{\lambda \in \varepsilon X^*} |f(\lambda)| \right\} ;$$

lako se dobija da je

$$\sup_{z \in X \cup \varepsilon X^*} |f(z)| = \sup_{z \in X} |f(z)| ,$$

dakle $\|f(A)\| \leq \sup_{z \in X} |f(z)| \cdot \|A\|$.

Stoga je X spektralni skup operatora A, q.e.d.

<u>P r i m e d b a 7.1. Svaki običan spektralan skup operatora A (u prostoru $H[p_1]$) je istovremeno i spektralan.</u>

Tvrđenje je očigledno, no ne znamo da li važi i obratno, tj. da li su ℓ_φ - spektralni i $\ell(p_1)$ - spektralni skupovi jedni te isti ili ne.

<u>P i t a n j e. Da li postoji spektralni skup ℓ_φ - linearnog operatora A koji nije i običan spektralan.</u>

Na ovo jednostavno pitanje zasad nemamo odgovor, i samo u izvesnim jednostavnijim slučajevima (operatora ili skupova) možemo da dokažemo da se ove dve vrste skupova poklapaju.

Kako je jedan od osnovnih zadataka ovde-naći što manji spektralan skup , ako je poznat jedan fiksirani, bilo bi interesantno videti da li je za proizvoljni (neobavezno φ - simetrični) s. skup X takođe i skup $X \cap \varepsilon X^*$ takav. No ovo u opštem slučaju nije tačno i odgovarajući primer može se konstruisati primenom Leme 7.2.

S T A V 7.4. Presek svih spektralnih skupova operatora $A \in \mathcal{L}_\varphi(H)$ poklapa se sa spektrom $\sigma(p_1)$ operatora A (u prostoru $H[p_1]$).

Ako je A normalan ℓ_φ - linearan operator, tada je zatvoreni skup $X \subseteq \mathfrak{C}(p_1)$ spektralan, ako i samo ako je obično spektralan.

D o k a z. Prvi deo tvrđenja je neposredan, s obzirom na odgovarajuću osobinu u prostoru $H[p_1]$, i činjenicu da je klasa ℓ_φ - spektralnih skupova "šira" od klase običnih.

Drugi deo tvrđenja sleduje iz toga što je za normalni operator A , spektar $\sigma(p_1)$ običan, a time i spektralni skup operatora A .

S T A V 7.5. Ako je X φ - simetričan spektralan skup operatora A , i $f(z)$ proizvoljna racionalna funkcija čiji singulariteti ne pripadaju X , tada važi nejednakost:

$$\| f(A) \| \leq 2 \sup_{z \in X} | f(z) | \cdot \| A \| .$$

D o k a z. Funkcija $f(z)$ može se za svako z izvan skupa $\mathcal{S}(f) \cup \varepsilon \mathcal{S}(f)^*$ napisati u obliku:

$$(*) \qquad f(z) = f_1(z) + p_1 f_2(z) ,$$

gde je

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) + \varepsilon \overline{f(\varepsilon \bar{z})}\right), \quad f_2(z) = \frac{1}{2p_1}\left(f(z) - \varepsilon \overline{f(\varepsilon \bar{z})}\right).$$

Pritom su očigledno, $f_1(z)$, $f_2(z)$ φ - dopustive funkcije, sa skupom singulariteta sadržanim u $\mathcal{S}(f) \cup \varepsilon \mathcal{S}(f)^*$, dakle izvan skupa X , te jednakost $(*)$ posebno važi na skupu X .

Osim toga je očigledno,

$$\sup_{z\in X}|f_\nu(z)| \le \sup_{z\in X}|f(z)| \qquad (\nu=1,2).$$

Kako je X spektralni skup operatora A, biće:

$$\|f_\nu(A)\| \le \sup_{z\in X}|f_\nu(z)|\cdot\|A\| \le \sup_{z\in X}|f(z)|\cdot\|A\|,$$

odakle je:

$$\|f(A)\| = \|f_1(A)+f_2(A)\| \le 2\sup_{z\in X}|f(z)|\cdot\|A\|,$$

što je i trebalo dokazati. □

<u>P i t a n j e.</u> Da li se konstanta $c=2$ iz prethodnog stava može zameniti nekom manjom $(1\le c<2)$. Da li se za takvu konstantu c $(c\le 2)$, φ - simetrični spektralni skupovi $X\subseteq \mathbb{I}(p_1)$ mogu opisati na sledeći način: $X\supseteq \sigma(p_1)$ i za <u>svaku</u> racionalnu funkciju čiji singulariteti leže izvan X, važi nejednakost:

$$\|f(A)\| \le c\cdot\sup_{z\in X}|f(z)|\cdot\|A\|.$$

<u>S T A V 7.6. Jedinični disk $G_0=\{\lambda\in\mathbb{I}(p_1):|\lambda|\le 1\}$ je spektralni skup operatora A, ako i samo ako je A kontrakcija.</u>

D o k a z. Kao i u Hilbertovom prostoru, uslov $\|A\|\le 1$ je potreban (dovoljno je uočiti funkciju $f(z)=z$). Ako je obratno, operator A kontrakcija, tada je G_0 običan spektralan skup (fon Nojman [63], ili [80]), dakle i ℓ_φ - spektralni skup od A.

<u>S T A V 7.7 (o preslikavanju spek. skupova).</u>

<u>Ako je $g(z)$ φ - dopustiva racionalna funkcija čiji singulariteti leže izvan skupa $\sigma(p_1)$ operatora A, i X φ - simetričan spektralan skup operatora A, tada je $Y=g(X)$ isti takav skup operatora $g(A)$.</u>

D o k a z. Tvrđenje (i posebno φ - simetričnost skupa $Y=g(X)$) dokazuju se lako, slično kao u kompleksnom slučaju.

Primenom prethodna dva stava se i za izvesne druge skupove u ravni $\mathbb{C}(p_1)$ može dati karakterizacija spektralnosti.

Tako je:

(1.) Disk $|\lambda-\lambda_0|\leq r$ $(\lambda_0\in\mathcal{R}\omega)$ spektralni skup operatora A, ako i samo ako je $\|A-\lambda_0 I\|\leq r$;

(2.) Njegova spoljašnjost spektralni skup, ako i samo ako je $\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|\leq 1/r$;

(3.) Prava $\mathcal{R}\omega$ - takav skup, ako i samo ako je A samoadjungovan operator;

(4.) Poluravan $\mathbb{C}^+$ (odnosno $\mathbb{C}^-$) takav skup, ako i samo je numerički rang $W(A)$ sadržan u odgovarajućoj poluravni.

Primećujemo da je u svim ovim slučajevima skup spektralan, ako i samo ako je on obično spektralan.

Napomenimo osim toga da već mala promena prethodnih skupova (krug, prava, poluravan u opštem položaju) dovode do pitanja na koja nije lako dati odgovor.

U radu [24] Fojaš je dokazao sledeću karakterizaciju kompleksnog Hilbertovog prostora: Banahov prostor H je Hilbertov, ako i samo ako je jedinični disk G_0 običan spektralni skup bilo koje kontrakcije prostora H.

Nije očigledno da slično važi i u Vaksovim (i posebno dvostranim Vaksovim) prostorima.

S T A V 7.8. Ako je jedinični disk $|z|\leq 1$ $(z\in\mathbb{C}(p_1))$ spektralan skup bilo koje kontrakcije $A\in\mathcal{L}_\varphi(H)$, dvostranog kvaternionskog Banahovog prostora H, tada je H Vaksov prostor.

D o k a z. Označimo sa H'_{ℓ_φ} (levi) dualni prostor prostora H, tj. prostor svih ograničenih ℓ_φ- linearnih funkcionela $f: H\to Q$.

Ako $x_0\in H$, $f\in H'_{\ell_\varphi}$, i $\|f\|\leq 1/\|x_0\|$, uočimo operator $A\in\mathcal{L}_\varphi(H)$ definisan sa:

$$Ax = f(x)x_0 \quad (x\in H)$$

Tada je $\|A\|=\|f\|\cdot\|x_0\|\leq 1$.

Ako uočimo funkciju:

$$g(z) = (z+\alpha)(1+\bar{\alpha}z)^{-1} \quad (\alpha \in \mathcal{R}(\omega),\ |\alpha|<1)$$

ona je očigledno φ - dopustiva, te je na osnovu pretpostavke stava,

$$\|(A+\alpha I)(I+(\bar{\alpha}I)A)^{-1}x\| \leq \|x\|, \text{ tj.}$$

$$\|(A+\alpha I)x\| \leq \|(I+(\bar{\alpha}I)A)x\| \quad (x \in H).$$

Potpuno slično kao u radu [24], dokazuje se da je onda za $\|x\| = \|y\|$,

$$\|x+\bar{\alpha}y\| = \|y+\alpha x\| \quad (\text{za svako } \alpha \in \mathcal{R}(\omega)),$$

i odatle, lako,

$$\|ax+by\| = \|bx+ay\| \quad (\text{za svako } a, b \in \mathcal{R}).$$

Ova relacija ekvivalentna je tvrđenju da je prostor $H[p_1]$ Hilbertov, te važi identičnost paralelograma u prostoru $H[p_1]$, dakle i u prostoru H.

No, na osnovu Stava 2.1, ova identičnost je potreban i dovoljan uslov pod kojim kojim je (dvostrani) Banahov kvaternionski prostor - Vaksov. □

7.3. Spektralni skupovi neograničenih operatora u Hilbertovom prostoru.

Mada je funkcionalni račun neograničenih operatora u Hilbertovom prostoru posmatran (Bejd [5], Taylor [93] itd.), izgleda da to nije slučaj i sa odgovarajućom teorijom spektralnih skupova takvih operatora.

Zbog toga dajemo, ukratko, definiciju i osnovne osobine (fon Nojmanovih) spektralnih skupova neograničenih operatora, sa napomenom da se neki od tih rezultata mogu preneti i na ℓ_φ - linearne neograničene operatore u Vaksovim prostorima.

Takođe, iako ovde ne ispitujemo vezu spektralnih skupova i numeričkog ranga takvih operatora (napr. rezultati Hildebranta, Berberijana, Šrajbera, itd. za slučaj ograničenih operatora), izgleda da mnogi od njih važe takođe i u našem slučaju, a takođe sa manjim modifikacijama i za operatore u Vaksovim prostorima.

Svuda nadalje pretpostavljaćemo da je H kompleksan Hilbertov prostor nad telom $\mathbb{C} = \mathfrak{U}(i)$.

Pod "operatorom" podrazumevaćemo zatvoreni neograničeni operator definisan na gustom potprostoru prostora H .

Usvajamo sledeću definiciju.

Definicija 7.2. Zatvoreni skup X u proširenoj kompleksnoj ravni $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zvaćemo spektralnim skupom (neograničenog) operatora A , ako X sadrži prošireni spektar $\sigma_e(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$ tog operatora, i za svaku racionalnu funkciju $f(z)$ ograničenu u celoj ravni $\tilde{\mathbb{C}}$, čiji singulariteti leže izvan skupa X , ograničeni operator $f(A)$ zadovoljava nejednakost:

$$\|f(A)\| \leq \sup_{z \in X} |f(z)| \cdot \|A\| . \square$$

Iz ove definicije sledi da svaki takav spektralni skup sadrži tačku $\lambda = \infty$, te ograničeni skup u ravni $\mathbb{C}$ ne može biti spektralni skup neograničenog operatora.

Osim toga nije teško videti da je racionalna funkcija $f(z)$ ograničena u celoj ravni $\tilde{\mathbb{C}}$, ako i samo ako se razlaže u zbir

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_1)^{-\alpha_1} + \dots + a_n (z - z_n)^{-\alpha_n} \quad (\alpha_\nu \in N)$$

i tada je $f(\infty) = \lim_{|z| \to \infty} f(z) = a_0$.

Osim toga je, ako singulariteti $z_\nu \in \rho(A)$ $(1 \leq \nu \leq n)$:

$$f(A) = a_0 I + a_1 (A - z_1 I)^{-\alpha_1} + \dots + a_n (A - z_n I)^{-\alpha_n} .$$

Ovakve racionalne funkcije $f(z)$ očigledno pripadaju klasi $[A]$ (v. Taylor).

L E M A 7.3. Ako je X spektralni skup (neograničenog) operatora A i $g(z)$ racionalna funkcija takva da operator $g(A) \in \mathcal{L}(H)$, tada je $Y = g(X)$ spektralni skup operatora $g(A)$.

D o k a z. Kako singulariteti funkcije $g(z)$ leže izvan zatvorenog skupa X , očigledno je g neprekidno na X , dakle skup $Y = g(X)$ zatvoren.

Osim toga je na osnovu teoreme o preslikavanju spektra za neograničene operatore (Taylor, s.302),

$$X' = g(X) \supseteq g(\sigma_e(A)) = \sigma(g(A)).$$

Ako je sada $u(z')$ bilo koja racionalna funkcija čiji singulariteti ne leže na X', ona je regularna na skupu $\sigma(g(A))$, dakle $u(g(A)) \in \mathcal{L}(H)$.

Kako je osim toga ([94] s. 293),

$$u(g(A)) = (u \circ g)(A),$$

i singulariteti funkcije $u \circ g$ izvan skupa X, biće:

$$\| u(g(A)) \| = \| (u \circ g) A \| \leq \sup_{z \in X} | u(g(z)) | \cdot \| A \| =$$

$$= \sup_{z' \in X'} | u(z') | \cdot \| A \|,$$

što je i trebalo dokazati.

<u>L E M A 7.4. Neka je $f(z)$ linearna racionalna funkcija koja preslikava zatvoreni skup X (koji sadrži tačku $\lambda = \infty$) u ograničeni skup X'.</u>

<u>Tada je X spektralni skup operatora A, ako i samo ako $A' = f(A) \in \mathcal{L}(H)$ i X' je spektralni skup operatora A'.</u>

<u>Dokaz</u> je potpuno sličan odgovarajućem za ograničene operatore ([80], s.430).

<u>S T A V 7.9. Skup $|\lambda - \lambda_0| \geq r$ $(\lambda_0 \in \mathbb{C})$ je spektralni skup operatora A, ako i samo ako je operator $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ ograničen (definisan na H) i $\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \leq 1/r$.</u>

D o k a z. Dovoljno je primeniti prethodnu lemu za slučaj funkcije $f(z) = r(z - \lambda_0)^{-1}$, i osnovni stav o jediničnom disku ([80], s.431).

Primenom prethodnih rezultata, sada se lako mogu preneti na neograničeni slučaj i druge osobine spektralnih skupova (napr. uopštenje S.7.4), dati karakterizacija operatora za pojedine jednostavne skupove (prave i poluravni u ravni $\mathbb{C}$) itd.

LITERATURA

[1] N.I.Ahijezer, I.M.Glazman - "Teorija linejnih operatorov v Gilbertovom prostranstve", "Nauka", Moskva, 1966.

[2] S.Aljančić -"Uvod u realnu i funkcionalnu analizu", Građevinska knjiga, Beograd, 1969.

[3] T.Ando - On hyponormal operators, Proc.AMS - 14(1963), 29o-291.

[4] G.Bachman, L.Narici - "Functional Analysis", Academic Press, New York, 1966.

[5] W.G.Bade - An operational calculus for operators with spectrum in a strip, Pacific J.M. - 3(1953), 257-29o.

[6] F.L.Bauer - On the Field of Values subordinate to a norm, Numer.Math. - 4(1962), 1o3-113.

[7] F.L.Bauer - Fields of Values and Gershgorin Discs, Numer.Math. - 12(1968), 91-95.

[8] S.Berberian - The numerical range of a normal operator, Duke M.J. - 31(1964), 479-483.

[9] S.Berberian - A note on operators whose spectrum is a spectral set, Acta S.M.Szeged. - 27(1966), 2o1-2o3.

[1o] S.Berberian, G.Orland - On the closure of the numerical range of an operator, Proc.A.M.S. - 18(1967), 499-5o3.

[11] G.Biriuk, E.A.Coddington - Normal extensions of unbounded formally normal operators, Journal Math.Mech.- - 13(1964), 617-37.

[12] S.Bernau - The spectral mapping theorem for normal operators, Journal London M.S. - 4o(1965), 478-486.

[13] -------- - The spectral theorem for unbounded normal operators, Pacific M.J. - 19(1966), 391-4o6.

[14] -------- - Extreme eigenvectors of a normal operator, Proc.A.M.S. - 18(1967), 127-128.

[15] -------- - The square root of a positive selfadjoint operators, Journal Austral.M.S. - 8(1968), 17-36.

[16] ——— - An unbounded spectral mapping theorem, Journal Austral.M.S. - 8(1968), 119-127.

[17] F.Bonsall i dr. - The numerical range of a continous mapping of a normed space, Aequat.Math. - 2(1969), 86-93.

[18] F.Bonsall, J.Duncan - "Numerical ranges of operators on normed spaces"(London M.S. Series 2), Cambridge Univ. Press, London, 1971.

[19] Ch.Davis, D.Rider - Spectral sets and numerical range, Rev.Roum.Math.Pures Appl. - 1o(1965), 125-131.

[2o] J.Dieudonné - "Algèbre linéaire et géometrie élementaire" , Paris, 1968.

[21] N.Dunford, J.Schwartz - "Linear Operators", Part II, Interscience Pub., New York, 1963.

[22] E.Durszt - On the numerical range of normal operators, Acta S. Math. Sz. - 25(1964), 262-265.

[23] D.Finkelstein, J.M.Jauch, S.Schimonovich, D.Speiser - Foudations of quaternion quantum mechanics, Journal Math.Phys. - 3(1962), 2o7- 22o.

[23a] D.Finkelstein, J.M.Jauch, D.Speiser - Quaternionic Representations of Compact groups, Journal Math. Phys. - 4(1963), 136-14o.

[24] C.Foias - Sur certain théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux, Acta S.Math.Szeged - 18(1957), 15-2o.

[25] ——— - La mesure harmonique-spectral et la théorie spectral des opérateurs géneraux d'un espace de Hilbert, Bull. Soc.Math.France. - 85(1957), 263-282.

[26] ——— - Certaines applications des ensembles spectraux. I./Mesure harmonique spectrale/, Studii Cercet. Mat. - 1o(1959), 365-4o1.

[27] J.R.Giles - Classes of semi-inner product spaces, Trans. A.M.S. - 129(1967), 436-446.

[28] I.C.Gohberg, M.G.Krejn - Osnovnije paloženija o defektnih čislah, kornevih čislah i indeksah linejnih operatorov, U.M.N. - 12/2/,/74/,(1957)., 43-118.

[29] B.Gramsch,D.Lay - Spectral mapping theorems for Essential spectra, Math.Ann. - 192(1971), 17-32.

[30] P.R.Halmos - Normal dilations and extensions of operators, Summa Brasil. Math. - 2(1950), 125-134.

[31] ---------- - "Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity", Chelsea Pub., New York, 1951.

[32] ---------- - Numerical ranges and normal dilations, Acta Sci. Math.Szeg. - 25(1964), 1-5.

[33] ---------- - "A Hilbert space problem book", Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey, 1967.

[34] S.Hildebrandt - The closure of the numerical range of an operator as spectral set, Comm.Pure Appl. Math.- 17(1964), 415-421.

[35] ------------- Numerischen Wertebereich und normale dilatationen, Acta S.M.Szeged. - 26(1965), 187-190.

[36] ------------- Über den numerischen Wertebereich eines operators, Math.Ann. - 163(1966), 230-247.

[37] L.Ingelstam - Real Banach Algebras, Ark.Math. - 5(1964), 239-270.

[38] ----------- - Hilbert Algebras with idendity, Bull. A.M.S. - 69(1963), 794-796.

[39] R.C.James - Orthogonality and linear functionals, Trans. A.M.S. - 61(1947), 265-292.

[40] P.Jordan,J.von Neumann - On inner product in linear metric spaces, Ann. of Math. - 36(1935), 719-723.

[41] T.Kato - Some mappings theorems for the numerical range, Proc. Jap. Ac. - 41(1965), 652-655.

[42] ------ - "Perturbation theory for linear operators", Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[43] M.G.Krejn - Teorija samosoprjaženih rasširenij poluograničenih ermitovih operatorov I, M.Sb. - 20/62/, (1947), 431-495.

[44] S.Kurepa - On n-th roots of normal operators, Math. Zeits. - 78(1962), 285-292.

[44a] -------- - "Konačno-dimenzionalni vektorski prostori i primene", Teh.Knjiga, Zagreb, 1967.

-Journal Math.Anal.Appl. - 7(1963), 64-9o.

[46] M.S.Livšic - Izometričeskije operatori sa ravnimi defektnim čislami, M.Sb. - 26/68/,(195o), 247-264.

[47] G.Lumer - Semi-inner product in linear metric spaces, Trans. A.M.S. - 1oo(1961), 29-43.

[48] B.D.Malviya - A note on semi-inner product Algebras, /časopis?/.

[49] P.Miličić - Les normes abslues et les normes opératoires des opérateurs linéaires et bornes sur H, Matematički vesnik - 2/17/,(1965), 1o7-112.

[5o] --------- - Reprezentacija operatora Vignerovog tipa u H prostorima nad sistemom kvaterniona, Matematički vesnik - 4/19/,(1967), 37o-375.

[51] --------- - Kvazi izometrični operatori na unitarnim prostorima, Matematički vesnik - 4/19/,(1967), 376--378.

[52] --------- - Les endomorphismes du corps des quaternions qui conservent les valeurs absolus et le groupe du coube, Publikacije El.-teh. fakulteta u Beogradu, No 247-273(1969), 149-151.

[53] --------- - "Prostori sa poluskalarnim proizvodom i neke primene na normirane a lgebre", Doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet u Beogradu, Beograd, 197o.

[54] --------- - Sur le semi-produit scalaire dans quelques espaces vectoriels normes, Matematički vesnik.-- 8/23/,(1971), 181-185.

[55] --------- - Sur l'existence du produit scalaire, Matematički vesnik - 1o/25/,(1973), 3-7.

[56] --------- - Sur le semi-produit scalaire géneralisé, Matematički vesnik - 1o/25/,(1973), 325-329.

[57] B.Sz.-Nagy - "Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes", Springer-Verlag, Berlin, 1942 /1967/.

[58] --------- - Sur les contractions de l'espace de Hilbert, Acta S.M.Szeged - 15(1953), 87-92.

[59] B.Sz.-Nagy,C.Foias - Sur les contractions de l'espace de Hilbert: III, Acta Szeged. - 19(1958), 26-46.

- IV, Acta Szeged. - 21(1960), 251-59.

[60] ——————— - "Analyse harmoniques des opérateurs de l'espace de Hilbert",Masson et Cie, Paris--Budapest, 1967.

[61] M.A.Najmark - "Linejnije diferencialnije operatori", "Nauka", Moskva, 1969.

[62] J.von Neumann - Algemeine eigenwerttheorie hermitschen Funktionaloperatoren, Math.Ann. - 102(1929), 49-131.

[63] ——————— - Eine Spektraltheorie für allgemeine operatoren eines unitären Raumes, Math.Nachr. - 4, (1951), 258-281.

[64] N.Nirschl,H.Schneider - The Bauer fields of values of a matrix, Numer.Math. - 6(1964), 355-365.

[65] G.Orland - On a class of operators, Proc. A.M.S. - 15(1964), 75-79.

[66] F.Polack - Properties of the matrix range of an operator, Indiana Univ.M.J. - 22(1972/73), 419-427.

[67] C.R.Putnam - On semi-normal operators, Pacific J. Math. - 7(1957), 1649-1652.

[68] ——————— - On semi-normal operators and convex hulls of ranges of power series, Journal London M.S. - 38(1963), 218-222.

[69] ——————— - On the spectra of semi-normal operators, Trans. A.M.S. - 119(1965), 509-523.

[70] ——————— - "Commutation properties of Hilbert space operators" , Springer, Berlin, 1967.

[71] ——————— - The spectra of operators having resolvents of first-order growth, Trans.A.M.S. - 133(1968), 505-510.

[72] ——————— - An inequality for the area of hyponormal spectra, M. Zeit. - 116(1970), 323-330.

[73] ——————— - Unbounded inversis of hyponormal operators, Pacific J.M. - 35(1970), 755-762.

[74] ——————— - The spectra of completely hyponormal operators, Amer.J.M. - 93(1971), 699-708.

[75] ——————— - The spectra of unbounded hyponormal operators, Proc. A.M.S. - 31(1972), 458-464.

[76] ---------- - Trace norm inequality for the measure of hyponormal spectra, Indiana Univ.M.J. - 21 1972, 775-780.

[77] R.Howe - A functional calculus for hyponormal operators, Indiana Univ.M.J. - 23 1974 , 631-644.

[78] M.Radjabolipour - On normality of operators, Indiana Univ.M.J. - 23 1974 , 623-630.

[79] M.C.Reed, B.Simon - A spectral mapping theorem for tensor products of unbounded operators, Bull. A.M.S.- 78 1972 , 730-733.

[80] F.Riesz, B.Sz.-Nagy - "Leçons d'Analyse Fonctionnelle", Akademiai Kiado, Budapest, 1968.

[81] P.Rubin, H.Stone - Postulates for generalizations of Hilbert spaces, Proc. A.M.S. - 4 1953 , 611-616.

[82] D.Sarason - On spectral sets having connected complement, Acta S.M.Szeged - 26 1965 , 289-299.

[83] R.Schatten - Norm Ideals of completely continous operators, Springer, Berlin, 1960.

[84] M.Schreiber - A functional calculus for general operators in Hilbert space, Trans.A.M.S. - 87 1958 , 108-118.

[85] ---------- - Numerical ranges and spectral sets, Michigan M.J. - 10 1963 , 283-288.

[86] J.G.Stampfli - Hyponormal operators, Pacific J.M. - 12 1962 , 1453-1458.

[87] ---------- - Hyponormal operators and spectral density, Trans.A.M.S. - 117 1965 , 469-476.

[88] ---------- - Normality and the numerical range of an operator, Bull.A.M.S. - 72 1966 , 1021-1022.

[89] ---------- - Extreme points of the numerical range of a hyponormal operator, Michigan M.J. - 13 1966 , 87-89.

[90] ---------- - A local spectral theorey for operators: III. Resolvents, spectral sets and similarity, Trans. A.M.S. - 168 1972 , 133-151.

[91] M.Stone - "Linear transformations in Hilbert space

[92] G.A.Suhomlinov - O prodolženii linejnih funkcionalov v kompleksnom i kvaternionom linejnom prostranstve, M.Sb. - 3/45//,(1938), 353-358.

[93] A.Taylor - Spectral theory of closed distributive operators, Acta Math. - 84(1951), 189-224.

[94] -------- - "Introduction to Functional Analysis", John-Wiley, New York, 1958.

[95] O.Teichmüller - Operatoren im Wachschen Raum, Journal für Reine Angew. Math. - 174(1936), 73-124.

[96] A.Torgašev - Jedno uopštenje prostora sa skalarnim i poluskalarnim proizvodom, Matematički vesnik - 11/4 26 ,(1974), 3o1-313.

[97] ---------- - Certain notes on the numerical range of an unbounded operator, Matematički vesnik - 12/2 (27),(1975).

[98] ---------- - Numerički rang operatora u Vaksovim prostorima./Biće objavljeno u Matematičkom vesniku/.

[99] ---------- - O numeričkom rangu operatora u normiranom prostoru. /Biće objavljeno u Matematičkom vesniku/.

[1oo] ---------- - Extensions of two classic kinds of operators in a Wachs space./Biće objavljeno u Matem. vesniku/.

[1o1] ---------- - The roots of positive and negative Wachs space operators./Biće objavljeno u Math.Balcanica/.

[1o2] K.Viswanath - Normal operators on quaternionic Hilbert spaces, Trans.A.M.S. - 162(1971), 337-35o.

[1o3] A.Wilansky - "Functional Analysis", Blaisdel Pub., New York, 1964.

[1o4] A.Wintner - Zur theorie der beschränkten Bilinearformen, Math.Zeits. - 3o(1929), 228-282.

[1o5] K.Yosida - "Functional Analysis", Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[1o6] A.Zaanen - "Linear Analysis", North-Holland, Amsterdam,1956.

[1o7] Chr.Zenger - On convexity properties of the Bauer field of values of a matrix, Numer. Math. - 12(1968), 96-1o5.

NEREŠENA PITANJA (nalaze se na):

Str. 15 (uz teor.2.1)(Deo II);

Str. 17 (Deo II);

Str. 36 (/1/,/2/,/3/,/4/) (Deo III);

Str. 62 (uz teor.4.1) (Deo IV);

Str. 88 (Deo V);

Str. 1o7 (Deo VII);

Str. 1o9 (Deo VII).

Napomena o oznakama ("'", ili "a"):

Stav 3.5' ranije je bio pogrešno označen sa 3.5.

Radovi (knjige): [23a], [44a], [73]', [75]' navedeni su naknadno.