УНИВЕРЗИТЕТ "КИРИЛ И МЕТОДИЈ"-СКОПЈЕ

ПРОРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Билана Јанева

НЕКОИ КЛАСИ ПОЛИАДИЧНИ ПОЛУГРУПИ И ГРУПИ

Докторска дисертација

Ментор:

Проф.д-р. Ѓорѓи Чупона

Скопје, 1989

М-р. Билана Јанева

Природно-математички факултет

С К О П Ј Е

НЕКОИ КЛАСИ ПОЛИАДИЧНИ ПОЛУГРУПИ И ГРУПИ

(АВТОРЕЗИМЕ)

За резиме на работата "Некои класи полиадични полугрупи и групи" ќе го искористиме воведот од истата работа со некои мали измени.

1. Во третата деценија на овој век започнува интензивно проучување на алгебарски структури кои што се обопштувања на групите, односно полињата. Во овој период обопштувањата се добиваат со ослабување на аксиомите за група односно поле; се дефинираат полугрупи, квазигрупи, прстени и др.

Меѓутоа, до обопштување на поимот група може да се дојде и со напуштање на условот операцијата да биде бинарна, односно со земање произволна финитарна операција (n-арна операција, $n \geq 0$) и задржување на другите аксиоми за група (асоцијативност на операцијата и решливост на равенки). Прва работа во оваа смисла се смета статијата на Dörnte од 1928 година ([28]), во која алгебарските структури од овој вид се наречени n-групи. Во монографската статија "Polyadic groups" од Post ([33]) од 1940 година е дадено поподробно и подлабоко проучување на n-групите.

Воведувањето на поимот n-група се оправдува со фактот дека ако во дефиницијата на n-група се земе $n=2$, се добива обична, бинарна група, како и со фактот дека секоја n-група може да се смести во бинарна како n-подгрупа.

Како што се обопштува поимот за група со воведување n-арна операција наместо бинарна, може да се обопшти и поимот за полугрупа. Поимот за n-полугрупа се сретнува уште во работата на Tvermoes [36], но предмет на постојано изучување стана десетина години подоцна. Поимот n-полугрупа може да се обопшти и ако наместо алгебра со една n-арна операција се разгледува алгебра со фамилија финитарни операции, таква што секоја од тие операции е асоцијативна и уште ако сите тие се "меѓусебно асоцијативни". Некои проблеми во врска со овој поим се разгледани во [4],[5] и [6], а таквите алгебарски структури се викаат асоцијативи.

Поимите n-група, n-полугрупа може да се обопштат и со воведување на векторско вредносна операција наместо финитарна операција. Првпат, според нашите информации, векторско вредносни операции се разгледувани во работата на Schweizer и Skalar [34], од 1967 година,(не земајки ја предвид употребата на векторско вредносни функции во математичката анализа и нејзината примена). Во статијата [34] се разгледува проблемот на карактеризација на некои алгебри со делумни векторско вредносни операции. Слични прашања се разгледуваат и во [7], каде се испитува класа алгебри од преброиво многу делумни бинарни операции и се покажува дека секоја таква алгебра е подалгебра од алгебра со векторско вредносни операции. Поинакви проблеми поврзани со композициони алгебри, а особено нивната комплетност, се разгледувани во [30]. Имено, ако $Op(A)$ е множеството од векторско вредносни операции на A, "$\cdot$" е обичната композиција а $\times$ е директен производ на пресликувања, тогаш $\mathfrak{A}=(Op(A);\cdot,\times,1_A)$ се вика <u>композициона</u> <u>алгебра</u> на A. Ако $F\subseteq Op(A)$, тогаш $(A;F)$ е <u>векторско</u> <u>вредносна</u> <u>алгебра</u>. Специјално внимание е посветено на случајот кога F е генераторно множество за композиционата алгебра $\mathfrak{U}$.

Дефинициите на поимите векторско вредносен групоид и векторско вредносна полугрупа за прв пат се воведени во [3]. Поимот слаби векторско вредносни квазигрупи е воведен во [2], додека поимот векторско вредносни квазигрупи за прв пат е воведен во [20]. Неколку интерпретации на векторско вредносни квазигрупи се дадени во [20], од кои најинтересна е геометриската.

Статијата [11] од 1983 година ги испитува векторско вредносните полугрупи. За прв пат во неа се појавува поимот векторско вредносна група. Истотака, во [11] е докажано и обопштување на Постовата теорема за сместување на векторско вредносна полугрупа во (бинарна) полугрупа. На крајот на [11] дадена е и листа проблеми, од кои некои веќе се решени.

Од 1983 година во Скопје работеше семинар за векторско вредносни алгебарски структури. Како резултат на тој семинар се појави и зборник трудови "Векторско вредносни полугрупи и групи", како и некои трудови изнесувани на разни собири во земјата и странство. На овој семинар се добиени и нови обопштувања на Постовата теорема [16], теоремата на Кон-Ребане [17], даден е и комбинаторен опис на векторско вредносни полугрупи [19] од дадена многукратност. Истотака обопштен е и поимот асоцијатив [8], т.е. дефиниран е поимот векторско вредносен асоцијатив, и за него се докажани некои својства, [9], кои се обопштувања на некои својства за асоцијативи.

Прашањето за егзистенција на нетривијална $(m+1,m)$-група за секое $m>1$, иако разгледувано и во [11], е докажано во [25]. Во [25] дадена е конструкција на слободна $(m+1,m)$-група, во [24] се дадени примери на векторско вредносни групи, а во [23] доказ дека не постои нетривијална конечна $(m+1,m)$-група.

Познато е дека нема нетривијални комутативни (n,m)-групи за $m\geq 2$ [11], но за некои класи векторско вредносни групи корисно е да се ослаби условот за комутативност така што се добива голема класа од векторско вредносни групи. Така, во [26] се испитувани $(2m,m)$-групи чија придружена група е комутативна, и дадени се примери на нетривијални такви в.в. групи.

Слично како и за полугрупи и групи, од интерес е да се разгледуваат и испитуваат непрекинати векторско вредносни полугрупи и групи. Во [35] е покажано дека не постојат непрекинати $(3,2)$-групи над реалните броеви, а прашањето за некои непрекинати в.в. групи е разгледувано во [27].

2. Предмет на проучување во оваа работа се некои класи полијадични полугрупи и групи. Трудот е поделен на четири глави, а секоја од главите на повеќе раздели.

Во воведниот дел изложен е краток историјат на развитокот на оваа гранка од универзална алгебра.

Во првата глава дадени се некои основни дефиниции за полијадични полугрупи и групи, како и за потполно комутативна векторско вредносна група, кои ќе бидат користени во натамошниот текст. Исто така, прикажани се и некои резултати и својства за полијадичните полугрупи и групи, дефиницијата на слободни векторско вредносни полугрупи и групи со база B, и некои основни резултати од универзална алгебра за слободни алгебри со база B, и слободни производи на полугрупи (моноиди).

Во втората глава дефиниран е поимот векторско вредносна подполугрупа од полугрупа и најдена е врска помеѓу векторско вредносните потполугрупи од полугрупи и векторско вредносните полугрупи.

Имено, докажано е дека на секоја $(m+k,m)$-потполугрупа Q од дадена полугрупа S ѝ одговара $(m+k,m)$-полугрупа, и обратно, за секоја $(m+k,m)$-полугрупа Q универзалната покривачка полугрупа $Q^{\wedge}$ е таква што Q е $(m+k,m)$-потполугрупа од $Q^{\wedge}$, и $Q^{\wedge}$ е универзална покривчка полугрупа за Q.

Во вториот раздел од втората глава конструирана е (n,m)-полугрупа користејќи полугрупа $S=(S;\circ)$ генерирана од непразно множество A во која важи условот (m), т.е. за секои $a_\nu, b_\lambda \in A$,

$$a_1 \circ \ldots \circ a_m = b_1 \circ \ldots \circ b_m \Longleftrightarrow a_\nu = b_\nu, \nu=1,\ldots,m.$$

Во третиот раздел од втората глава дефинирани се конгруенции на векторско вредносни полугрупи и докажани се некои својства за конгруенции на (n,m)-полугрупи кои се обопштувана на својствата докажани во [29] за конгруенции на n-полугрупи .

Во последниот дел од втората глава конструирана е слободна (n,m)-полумрежа со база A.

Во третата глава се изнесени некои нови резултати за векторско вредносните групи. Таа е поделена на шест раздели. Во првиот се дефинирани векторско вредносни подгрупи од групи, и за нив се докажани некои својства, додека во вториот е дадена врската помеѓу векторско вредносните подгрупи од групи и векторско вредносните групи. На тој начин се добива "убав" опис на универзалната покривачка група на векторско вредносна подгрупа од група. Во третиот раздел се дефинирани конгруенции на векторско вредносни групи и се обопштени некои својства, докажани во [29], за конгруенции на n-групи . На тој начин се добива карактеризација на конгруенциите на векторско вредносна група преку специјални нормални подгрупи од универзалната покривачка група. Имено се добива следното својство:

За секоја конгруенција α на (n,m)-групата Q постои нормална подгрупа K од покривачката група $Q^{\vee}$, таква што $K\subseteq Q_{m+p}$, $0\leq p<k$, $m+p=sk$, и

$$x_j y_j^{-1}\in K \& x_1\dots x_n=\alpha_1\dots\alpha_m,\ y_1\dots y_n=\beta_1\dots\beta_m \Longrightarrow \alpha_i\beta_i^{-1}\in K, \qquad (1)$$

за секој $i=1,2,\dots,m$.

Обратно, за секоја нормална подгрупа K од $Q^{\vee}$, којашто е подмножество од Q_{m+p} и за која важи условот (1), постои конгруенција α на (n,m)-групата Q, таква што нормалната подгрупа од $Q^{\vee}$ индуцирана од конгруенцијата $\alpha^{\vee}$ е точно подгрупата K.

Во наредниот раздел конструирана е (n,m)-група со помош на група генерирана од дадено непразно множество A, којашто го задоволува условот (m). Оваа конструкција се користи за конструирање слободна векторско вредносна група со база A и за конструирање на векторско вредносна група што содржи слободна векторско вредносна подгрупа со база A. Конструкцијата на слободна векторско вредносна група со база A, кога k е делител на m, е разработена во [1].

Во последната глава се пренесени некои својства, докажани за векторско вредносни полугрупи и групи, во случај кога работиме со потполно комутативни векторско вредносни полугрупи, односно групи. Таа е поделена на девет раздели. Својствата кои се докажуваат како и во претходните раздели, само водејќи сметка за комутативноста, се изнесени без доказ. Во првите три раздели дефинирана е потполно комутативна векторско вредносна потполугрупа од комутативна полугрупа, дадена е врската меѓу потполно комутативни векторско вредносни полугрупи и потполно комутативни векторско вредносни потполугрупи од полугрупи, дефинирани се конгруенции на потполно комутативни векторско вредносни полугрупи, конструирана е потполно комутативна (n,m)-полугрупа користејќи комутативна полугрупа $S=(S;\circ)$ генерирана од непразно множество A во која важи својството (M), т.е. важи следното својство: ако $a_\nu, b_\nu \in A$, тогаш:

$$a_1\circ\ldots\circ a_m=b_1\circ\ldots\circ b_m \Leftrightarrow a_1,\ldots,a_m \text{ е пермутација на } b_1,\ldots,b_m.$$

Оваа конструкција е искористена за конструкција на слободна потполно комутативна (n,m)-полугрупа со база A. За неа важи следното својство:

Ако $B=(B;[\,])$ е слободна потполно комутативна (n,m)-полугрупа со база A, $Q=(Q;[\![\,]\!])$ е произволна потполно комутативна (n,m)-полугрупа, и ако φ е пресликување од A во Q, тогаш постојат бесконечно многу хомоморфизми од B во Q кои што се проширувања на φ.

За да се покаже "единственост" на слободна потполно комутативна (n,m)-полугрупа со база A, на крајот од овој раздел, се докажува дека било кои две слободни потполно комутативни (n,m)-полугрупи со иста база се изоморфни.

Во наредните пет раздели се пренесуваат својствата докажани во третата глава за векторско вредносни групи на потполно комутативни векторско вредносни групи. Се дефинира потполно комутативна векторско вредносна подгрупа од комутативна група; се дава врската меѓу потполно комутативни векторско вредносни подгрупи од комутативни групи и потполно комутативни векторско вредносни групи; се дефинираат конгруенции на потполно комутативни векторско вредносни групи; се добива соодветна карактеризација на конгруенциите на потполно комутативни векторско вредносни групи; се конструира потполно комутативна (n,m)-група со помош на комутативна група генерирана од дадено множество А во која важи условот (М); се конструира слободна потполно комутативна векторско вредносна група со база А и потполно комутативна (n,m)-група што содржи слободна потполно комутативна (n,m)-група со база А. Во последниот раздел се докажува Постовата теорема за потполно комутативни векторско вредносни групи и се дава нов доказ на Постовата теорема за потполно комутативни векторско вредносни полугрупи, користејќи ги конструкциите разработени во претходните раздели.

Во оваа работа повеќето резултати изнесени во втората, третата и четвртата глава се нови.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Илиќ С.: Неке класе векторско вредносних група, Докторска дисертација, Скопје 1989

[2] Стојменовски К.: За [m,n]-квазигрупите,Год.Зб.Мат.фак.Скопје 28 (1978),33-37

[3] Трпеноски Б.,Чупона Ѓ.: [m,n]-групоиди,Билтен ДМФ СРМ Скопје 21,(1970),19-29

[4] Чупона Ѓ.: За асоцијативите; МАНУ, Прилози I-1(1969),9-20

[5] Чупона Ѓ.: Асоцијативи со кратење; Год. зб.ПМФ-Скопје,19 (1969),5-14

[6] Чупона Ѓ.: М-асоцијативи во кои некои леви идеали се М-подгрупи; Год.зб.ПМФ-Скопје, 22(1972),39-49

[7] Чупона Ѓ.: Една класа делумни алгебри;Год.зб.ПМФ Скопје,22 (1972)5-37

* * *

[8] Celakoski N., Janeva B.: Vector valued associatives;Proc. Conf. "Algebra and Logic",Cetinje 1985,15-21

[9] Celakoski N.,Markovski S.,Janeva B.: Some classes of vector valued associatives; "Vector valued semigroups and groups",Maced.Acad. of Sci. and Arts,(1988)123-140

[10] Čupona Ǵ.: On representation of Algebras in Semigroups; Maced.Acad. of SC. and Arts, Contributions

[11] Čupona Ǵ.: Vector valued semigroups; Semigroup forum, Vol 26(1983),65-74

[12] Čupona Ǵ.,Celakoski N.: On Representation of n-Associatives Into Semigroups;Maced.Acad. of Sc. and Arts,

Contributions VI-2(1974),23-34

[13] Čupona Ǵ.,Celakoski N.,Markovski S.,Dimovski D.:Vector valued groupoids, semigroups and groups; "Vector valued semigroups and groups",Maced.Acad. of Sci. and Arts (1988),1-78

[14] Čupona Ǵ.,Dimovski D.: On a class of vector valued groups; Proc.Conf. "Algebra and Logic", Zagreb (1984), 29-38

[15] Čupona Ǵ.,Dimovski D.,Samardžiski A.: Fully commutative vector valued groups;in print

[16] Čupona Ǵ.,Markovski S.,Janeva B.: Post Theorem for vector valued semigroups;Proc.Conf. "Algebra and Logic", Cetinje (1985),33-46

[17] Čupona Ǵ.,Markovski S.: Cohn-Rebane Theorem for vector valued algebras; Maced.Acad.Sc.and Arts, Contributions, VI/2,Sect.Math.Techn.Sci.(1985),143-149

[18] Čupona Ǵ.,Markovski S.: Vector valued subgroupoids of semigroups;Maced.Acad.Sc.and Arts, Contributions, VII/2, Sect.Math.Techn.Sci.(1986),5-12

[19] Čupona Ǵ.,Markovski S.,Dimovski D.,Janeva B.: Introduction to combinatorial theory of vector valued semigroups; "Vector valued semigroups and groups",Maced.Acad. of Sci. and Arts (1988),141-183

[20] Čupona Ǵ.,Usan J., Stojaković Z.: Multiquasigroups and some related structures; Maced.Acad.of Sc. and Arts, Contributions, Sect.Math.Techn.Sci.I.2 (1980),5-12

[21] Dimovski D.: Some existance conditions for vector valued groups; God.zb.Math.fac. Skopje 33-34 (1982-83),99-103

[22] Dimovski D.: Free vector valued semigroups; Proc. Conf.

"Algebra and Logic", Cetinje 1985, 55-62

[23] Dimovski D.: On (3,2)-groups;Proc. Conf. "Algebra and Logic",Cetinje 1985, 63-71

[24] Dimovski D.: Examples of (2m+s,m)-groups; Maced.Acad.Sc.and Arts, Contributions, Sect.Math.Techn.Sci.(1987),103-114

[25] Dimovski D.: Free (n+1,n)-groups;"Vector valued semigroups and groups",Maced.Acad. of Sci. and Arts (1988)103-123

[26] Dimovski D.,Ilić S.: Commutative (2m,m)-groups;"Vector valued semigroups and groups",Maced.Acad. of Sci. and Arts (1988),79-90

[27] Dimovski D.,Trenčevski K.: 1-dimensional (4,2)-Lie groups; "Vector valued semigroups and groups",Maced.Acad. of Sci. and Arts (1988),91-103

[28] Dörnte W.: Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff; Math.Z.,29(1928),1-19

[28] Janeva B.: Cogruences on n-groups; God. zb.PMF Skopje,in print

[30] Linn R.: Composition completness of algebras with (m,n)-pace operations(in German);Mitt.Math.Sem.Gissen No.160 (1983)

[31] Markovski S.,Janeva B.: Post and Hosszu-Gluskin Theorem for vector valued groups;Proc.Conf. "Algebra and Logic", Sarajevo 1987

[32] Monk J.D.,Sioson F.M.: On the general theory of m-groups; Fund.Math.LXXII(1971)

[33] Post E.L.: Polyadic groups; Trans.Amer.Math.Soc.,48 (1940), 208-250

[34] Schweizer B.,Skalar A.: The algebra of multiplace vector

valued functions; Bull. Amer.Math.Soc. (1967), 510-515

[35] Trenčevski K.: Non existence for some classes of continuous (3,2)-groups;Proc.Conf "Algebra and Logic" Cetinje 1985,205-208

[36] Tvermoes H.:Über eine verallgemeinerung des Gruppenbegriffs Math.Scand. 1 (1953), 18-30

[37] Hosszu M.: On the explicit form of n-group operations;Publ. math.,10 N°1-4(1963),88-92

* * *

[38] Чупона Ѓ., Трпеноски В.: Предавања по алгебра, кн.II,Скопје, 1972

[39] Cohn P.M.:Universal algebra,Harper&Row,London,1965

[40] Lang S.: Algebra,Addison-Wesley,Reading,1965 (превод на руски)

[41] Magnus W.,Karras A.,Solitar D.:Combinatorial group theory, Wiley, New York,1966