UNIVERSITETI I PRISHTINES

FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE-NATYRORE

FEVZI BERISHA

PERGJITHESIMI I MODULEVE TE VAZHDÜESHMERISE NE TEORINE E PERAFRIMEVE

(Disertacioni i doktoranturës)

MENTORI,
DR. M.K. PATAPOV

PRISHTINE, 1989.

P E R M B A J T J A

H Y R J E

Në disertacion do të shqyrtohet lidhmëria e përgjithsimit të modulit të vazhdueshmërisë me përafrimin më të mirë të funksioneve me anë të polinomeve algjebrike.

Të paraqesim disa shprehje dhe përkufizime të nevojshme për paraqitjen e rezultateve themlore të këtij punimi.

Do të themi, që $f(x) \in \bar{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, në qoftë se $f(x)$ është funksion periodik me periodë 2π, si dhe për $1 \leq p < \infty$, $f(x)$ i matshëm në $[0,2\pi]$ dhe

$$\| f \|_{\bar{L}_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

ndërsa, për $p = \infty$, $f(x)$ i vazhdueshëm në $[0,2\pi]$ dhe

$$\| f \|_{\bar{L}_\infty} = \| f \|_C = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| .$$

Shenojmë me $\bar{E}_n(f)_p$ përafrimin më të mirë të funksionit $f(x) \in \bar{L}_p$, me anë të polinomeve trigonometrike $T_n(x)$ të shkallës jo më të lartë se $n-1$, në metrikën L_p, pra:

$$\bar{E}_n(f)_p = \inf_{T_n} \| f(x) - T_n(x) \|_{L_p}$$

Shenojmë me $\bar{\omega}_k(f,\delta)_p$ modulin e thjeshtë të lëmueshmërisë të rendit k të funksionit $f(x) \in L_p$, pra

$$\bar{\omega}_k(f,\delta)_p \quad \sup_{|t| \leq \delta} \|\Delta_t^k f(x)\|_{L_p} ,$$

ku

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} C_k^i f(x+ih)$$

kemi shenuar diferencën e rendit k me hapin h të funksionit $f(x)$.

Në qoftë se $\bar{\omega}_1(f,\delta) = O(\delta^\gamma)$, atëherë shenojmë $f(x) \in \bar{L}ip(\gamma,p)$. Me $Lip(\gamma,p)$ kemi shenuar klasën e Lipshicit të rendit të dhënë γ.

Gjithashtu do të themi, që $f(x) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, në qoftë se, për $1 \leq p < \infty$ funksioni $f(x)$ i matshëm në $[-1,1]$ dhe

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty ,$$

ndërsa, $p = \infty$, funksioni $f(x)$ i vazhdueshëm në segmentin $[-1,1]$ dhe

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_C = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

Në këtë punim, kryesisht, do të shqyrtohen funksionet $f(x)$ që i takojnë hapsirës $L_{p,\alpha,\beta}$, d.m.th. funksionet e tilla që prodhimi $f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\in L_p$, pra

$$\|f\|_{L_{p,\alpha,\beta}} = \|f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\|_{L_p} .$$

Me $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$, do të shenojmë përafrimin më të mirë të funksionit $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$, me anë të polinomeve algjebrike $P_n(x)$ të shkallës jo më të lartë se $n-1$ në metrikën $L_{p,\alpha,\beta}$, pra,

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_n} \|f(x) - P_n(x)\|_{L_{p,\alpha,\beta}}$$

Për funksionet periodike me periodë 2π, është mirë e njohur teorema e Xheksonit dhe teorema e anasjelltë (inverze) me te, të cilat paraqesin lidhshmërinë e modulit të lëmueshmërisë dhe përafrimit më të mirë të këtyre funksioneve me polinomet trigonometrike në metrikën $\bar{L}_p$:

Teorema A. Le të jetë $f(x)\in \bar{L}_p$, $1 < p < \infty$. Atëherë konditat $f(x)\in \overline{Lip}(\gamma,p)$ dhe $\bar{E}_n(f)_p = 0(n^{-\gamma})$ $(0<\gamma<1)$ janë ekuivalente.

Teorema B. Le të jetë $f(x)\in \bar{L}_p$, $1 < p < \infty$. Atëherë për çdo numër natyral n vlejnë jobarazimet:

$$\bar{E}_n(f)_p < C_1\ \bar{\omega}_k(f, \tfrac{1}{n})_p ,$$

$$\bar{\omega}_k(f, \frac{1}{n}) < \frac{C_2}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \bar{E}_\nu(f)_p^{\frac{1}{p}}$$

ku konstantet C_1 dhe C_2 nuk varen nga $f(x)$ dhe n.

Qysh në fillim të këtij shekulli është sqaruar, që për funksionin e vazhdueshëm joperiodik kondita $f(x) \in Lip\, \gamma\, (0 < \gamma < 1)$ në tërë segmentin $[-1,1]$ nuk është ekuivalente me konditën $E_n(f)_{C[-1,1]} = O(n^{-\gamma})$. Kjo do të thotë, që për modulet e thjeshtë të lëmueshmërisë të funksioneve të vazhdueshme joperiodike aq më parë nuk vlen teorema B.

Për këtë arsye që në fillim janë paraqitur dy probleme:

1) Gjetja e karakteristikave konstruktive të klasës së funksioneve joperiodike që e plotësojnë konditën e Lipshicit të rendit γ d.m.th. klasës së funksioneve $Lip\,(\gamma, p)$.

2) Gjetja e karakteristikave strukturale të klasës së funksioneve joperiodike që plotësojnë konditën:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} < C\, n^{-\gamma}$$

Problemi i parë është zgjidhur plotësisht në metrikën uniforme.

Në fillim, me 1946 S.M. Nikolski [1] ka konstatuar, që karakteristika konstruktive e funksioneve të vazhdueshme joperiodike në tërë segmentin $[-1,1]$ duhet të varet nga pozita e pikës në këtë segment. E pastaj më vonë në punimet e A.F. Timanit [2] , V.K. Djadik [3] dhe G. Fred [4] një konstatim i tillë është vërtetuar.

Faktikisht është vërtetuar ky pohim: që funksioni i vazhdueshëm joperiodik në segmentin $[-1,1]$ t'i takojë klasës Lip γ, $0 < \gamma < 1$ (në tërë segmentin $[-1,1]$), kondità e nevojshme dhe e mjaftueshme është që për çdo numër natyral n të gjendet polinomi algjebrik $P_n(x)$ i shkallës jo më të lartë se $n-1$, i tillë që të plotëson konditën:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C(n^{-1}\sqrt{1-x^2} + n^{-2})^{\gamma}, \quad x \in [-1,1], \qquad (1)$$

Kjo konditë nuk mund të bartët në metrikat $L_p[-1,1]$ $1 \leq p < \infty$. De Vore [5], V.P. Motornij [6] duke shfrytëzuar rezultatet e G.K. Lebedit [7] dhe M.K. Potapovit [8], [9] kanë vërtetuar që kondita:

$$\inf \|(\sqrt{1-x^2} + n^{-1})^{-\gamma} (f(x) - P_n(x))\|_{L_p[-1,1]} = O(n^{-\gamma}) \quad (2)$$

nuk paraqet karakteristikat konstruktive të klasës Lip(γ,p).

Për këtë arsye më vonë është shqyrtuar problemi i sqarimit të karakteristikave konstruktive të klasës së funksioneve $f(x) \in L_p$, që plotësojnë konditën (2).

Në një varg rastesh (shih p.sh. [7] dhe [10] është gjetur zgjidhja e këtij problemi.

Në këtë punim do të shqyrtohet ky problem për funksionet të cilat plotësojnë konditën më të përgjithëshme se kondita (2).

Në vitet e 50-ta është tregua, që problemi i dytë i paraqitur më lartë, në metrikën $C[-1,1]$ do të ketë zgjidhje në qoftë se shëndrrohet në rastin trigonometrik, përkatësisht ka vend ky pohim: që funksioni $f(x)$ joperiodik i vazhdueshëm në segmentin $[-1,1]$ të plotësojë jobarazimin:

$$E_n(f)_C = O(n^{-\gamma})$$

kondità e nevojshme dhe e mjaftueshme është që funksioni $f(x)$ të plotësojë konditën:

$$\| f(x) - f(x \tilde{\mp} h) \|_C = O(|h|^{\gamma})$$

funksioni $f(x \tilde{+} h) = \frac{1}{2} [f(x \cos t + \sqrt{1-x^2} \sin t) + f(x \cos t - \sqrt{1-x^2} \sin t)]$, $h = \sin t$, quhet funksion i translacionit të përgjithshëm të tipit të Çebishevit.

Pastaj, në një varg punimesh [11 - 21] ky problem është shqyrtuar dhe zgjidhur detalisht. Në këto punime problemi është zgjidhur në termin të përkufizimit të funksionit të translacionit të përgjithshëm të tipit të Jakobit $f(x,t,\nu,\mu)$ (ku si rast i veçantë paraqitet funksioni i përmendur i translacionit të përgjithshëm të tipit të Çebishevit). Poashtu në një varg rastesh janë vërtetuar teoremat analoge me teoremën B (për $1 < p < \infty$), por në këto punime influenca $(1-x)^{\alpha}$ $(1+x)^{\beta}$ ka qenë ngushtë e lidhur me funksionin e translacionit të përgjithshëm: $\alpha = \frac{\nu}{p}$, $\beta = \frac{\mu}{p}$.

Në vitet e fundit po shqyrtohet problemi se në ç'mënyrë ose si është i "lidhur" translacioni i përgjithshëm $f(x,t,\nu,\mu)$ me influencën e shqyrtuar $(1-x)^{\alpha}$ $(1+x)^{\beta}$. Zgjidhja e problemit të tillë p.sh. është paraqitur në punimet [23 — 26] . Në këto punime është vërtetuar, se translacioni i përgjithsëm i tipit të Jakobit mund të shqyrtohet vetëm për influencën $(1-x)^{\alpha_1}$ $(1+x)^{\beta_1}$ të tillë që α_1 dhe β_1 duhet të plotësojnë disa jobarazime të dhënë më parë. Po ashtu translacioni i përgjithshëm i tipit të Çevishevit mund të shqyrtohet vetëm në qoftë se $\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$

Prandaj edhe natyrsisht se paraqitet problemi i përkufizimit të një moduli të përgjithshëm të vazhdueshmërisë të tillë që translacioni i përgjithshëm të mos varet nga influenca e hapsirës së shqyrtuar dhe për të cilin do të vlejë teorema analoge me teoremën B.

Këtu do të shqyrtohet përgjithësimi i modulit të vazhdueshmërisë të përkufizuar me anë të translacionit të përgjithshëm të tipit të Çebishevit që nuk varet nga influenca e hapsirës së shqyrtuar. Për këtë modul të vazhdueshmërisë vërtetohet teorema analoge me teoremën B, si dhe është dhënë karakteristika konstruktive e klasës së funksioneve që plotësojnë konditën më të fuqishme se kondita (2).

Në kapitullin e parë do të përkufizohen modulet e njohur më parë dhe paraqitën vetit themelore të këtyre moduleve. Për funksionet joperiodike nga klasa $L_{p,\alpha,\beta}$ përkufizohet një tip i përgjithshëm i modulit të vazhdueshmërisë. Duke u bazuar në lemën e vërtetuar në këtë kapitull pastaj në mënyrë analoge do të paraqitën dhe do të vërtetohen disa veti të këtij moduli të përgjithshëm të vazhdueshmërisë të përkufizuar më parë. Në paragrafin 1.4 janë paraqitur disa përkufizime dhe pohime ndihmëse të cilat janë të nevojshme për vërtetimin e rezultateve themelore të këtij punimi.

Në kapitullin e dytë shqyrtohen dhe vërtetohen teoremat e tipit të Xheksonit për modulin e vazhdueshmërisë $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$. Këtu vërtetohet teorema e drejtë dhe e anasjelltë në teorinë e përafrimeve. Gjithashtu bëhet vlerësimi i modulit të përkufizuar me anë të përafrimeve të funksioneve joperiodike me polinome algjebrike. Vërtetimi i teoremës së drejtë në teorinë e përafrimeve bëhet duke përdorur një metodologji të re. Këtu më parë përkufizohet K- funksionela e cila pastaj vërtetohet se është ekuivalente me modulin e vazhdueshmërisë $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ në metrikën $L_{p,\alpha,\beta}$. Në paragrafin 2.4 formulohet dhe vërtetohet teorema e cila jep vlerësimin e përafrimit më të mirë të funksionit të vazhdueshëm me anë të polinomeve algjebrike dhe normës së derivatit të këtij funksioni të vazhdueshëm. Duke u bazuar në këto teorema pastaj pa vështërsi vërtetohet teorema analoge me teoremën e Xheksonit. Vërtetimi i teoremës së anasjelltë në teorinë e përafrimit bëhet sipas një sheme e cila përdoret për vërtetimin e teoremave të formës së tillë. Pra në mënyrë analoge sikurse tek vërtetimi për funksionet periodike. Teorema e drejtë dhe teorema e anasjelltë paraqesin karakteristikat strukturale të një klase të funksioneve nga klasa L_p. Andaj edhe në këtë kapitull është paraqitur klasa e funksioneve të tilla që plotësojnë konditën më të fuqishme se kondita (2).

Në kapitullin e tretë përkufizohet dhe shqyrtohet një tip tjetër i përgjithësimit të modulit të vazhdueshmërisë me translacion. Këtu translacioni nuk varet nga influenca e klasës L_p. Për modulin e përkufizuar $\omega(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$ po ashtu vërtetohet teorema e drejtë dhe teorema e anasjelltë në teorinë e përafrimeve. Përkufizohet ndonjë funksionellë e cila vërtetohet se është ekuivalente me këtë modul. Teoremat e formuluara dhe të vërtetuara të tipit të Xheksionit në këtë kapitull poashtu japin karakteristikat strukturale të një klase tjetër të funksioneve nga klasa $L_{p,\alpha,\beta}$. Sikurse kapitujt tjerë edhe ky kapitull paraqet një tërësi.

Të gjitha rezultatet themelore të këtij punimi janë origjinale dhe janë paraqitur në seminarin nga teoria e përafrimeve të mbajtur në Moskvë gjatë vitit 1989.

I MODULET FUNKSIONALE

Në analizën matematike e posaqërisht në teorinë e përafrimeve që të përcaktohen karakteristikat e funksioneve përdoren të ashtuquajturit "modulet funksionale". Në këtë kapitull do të shqyrtohen modulet e thjeshtë të vazhdueshmërisë, modulet e lëmueshmërisë dhe përgjithësimet e tyre si dhe përgjithësimi i moduleve të vazhdueshmërisë të cilët do të jenë edhe bazë të këtij punimi.

1.1. MODULET E VAZHDUESHMËRISË DHE MODULET E LËMUESHMËRISË

Le të jetë $f(x)$ një funksion i kufizuar në ndonjë segment $[a,b]$.

Përkufizimi 1.1. Modul të vazhdueshmërisë të funksionit $f(x)$ e quajmë këtë funksion prej $\delta\in[0,b-a]$:

$$\omega(f,\delta)=\left\{\sup|f(x_1)-f(x_2)|;|x_1-x_2|<\delta,x_1,x_2\in[a,b]\right\}$$

E thënë në mënyrë jo rigoroze, moduli i vazhdueshmërisë tregon se sa mund të ndryshojë njëra nga tjetra dy vlera të funksionit $f(x)$, në qoftë se dihet që vlerat e argumentit ndryshojnë, jo më shumë se δ. Përkatësisht, moduli i vazhdueshmërisë $\omega(f)$ i funksionit f e karakterizon madhësinë e oscilimit më të madh të funksionit $f(x)$ në segmentin me gjatësi $\delta > 0$.

Kondità e nevojshme dhe e mjaftueshme që funksioni $f(x)$ të jetë i vazhdueshëm në segmentin $[a,b]$ është që të plotësohet kondita:

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f,\delta) = \omega(f,0) = 0$$

Vërtetimi i kësaj vetie është i qartë.

Si përgjithësim i natyrshëm i moduleve të vazhdueshmërisë përdoren modulet e lëmueshmërisë.

Për funksionin e dhënë $f(x)$ (të kufizuar) përkufizojmë diferencën e k-të me hapin h në pikën x në këtë mënyrë:

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} f(x+mk)$$

Le të jetë $f(x)$ funksion i kufizuar në segmentin $[a,b]$ dhe k- një numër natyral i çfarëdoshëm.

Përkufizimi 2.1. Modul i lëmueshmërisë i rendit k i funksionit $f(x)$ quhet funksioni:

$$\omega_k(f,\delta) = \sup\left\{ |\Delta_h^k f(x)| \; : \; |h| < \delta, x, x+kh \in [a,b] \right\}$$

ku $\delta \in [0, \frac{b-a}{k}]$

Është e qartë se moduli i lëmueshmërisë i rendit të parë në tërësi përputhet me modulin e thjeshtë të vazhdueshmërisë, d.m.th. $\omega_1(f,\delta) = \omega(f,\delta)$. Ndërsa në të shumtën e rasteve moduli i lëmueshmërisë i rendit të dytë $\omega_2(f,\delta)$ quhet edhe moduli i Zigmundit.

Po paraqesim disa veti të cilat i gëzon moduli i lëmueshmërisë:

1) Funksioni $\omega_k(f,\delta)$ është monotono jo zvogëlues:

$$\omega_k(f,\delta_1) < \omega_k(f,\delta_2) \;, \quad \text{për} \quad 0 < \delta_1 < \delta_2$$

2) Funksioni $\omega_k(f,\delta)$ gëzon vetin e gjysëmadivitetit:

$$\omega_k(f,\delta_1+\delta_2) < \omega_k(f,\delta_1) + \omega_k(f,\delta_2)$$

3) Moduli i rendit më të lartë vlerësohet me anë të modulit të rendit më të ultë:

$$\omega_k(f,\delta) < 2\,\omega_{k-1}(f,\delta)$$

4) Moduli i lëmueshmërisë së funksionit vlerësohet me anë të modulit të rendit më të ultë të derivatit të atij funksioni:

$$\omega_k(f,\delta) \leq \delta\ \omega_{k-1}(f',\delta)$$

5) Faktori i plotë mund të shkruhet para shenjës së modulit:

$$\omega_k(f,n\delta) \leq n^k\ \omega_k(f,\delta)$$

5') Faktori i çfarëdoshëm mund të shkruhet para shenjës së modulit në këtë mënyrë:

$$\omega_k(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)^k\ \omega_k(f,\delta)\ , \quad \lambda > 0\ .$$

Vetit 1) dhe 2) rrjedhin drejtëpërsëdrejti nga përkufizimi i modulit të lëmueshmërisë ndërsa vërtetimin e vetive 3), 4) dhe 5) p.sh. shiqo në monografin ([27], f. 21).

Përveç pesë vetive themelore të përmendura moduli i lëmueshmërisë $\omega(f,\delta)$ e gëzon edhe një veti specifike:

6) Moduli $\omega(f,\delta)$ vlerësohet me anë të normës së derivatit të funksionit:

$$\omega(f,\delta) \leq \delta\ \| f' \|_{C[a,b]}$$

Vërtetimin shih [27], f. 24.

Vetia 3) tregon se modulin $\omega_k(f,\delta)$ mund ta vlerësojmë me anë të modulit $\omega_i(f,\delta)$ për çdo $i < k$. Pohimi i anasjelltë, vlerësimi i modulit më të ultë me anë të modulit të rendit më të lartë është më i ndërlikuar. Ai rrjedh nga kjo teoremë e Marshit.

Teorema Marshi [28] . Për çdo $i < k$ vlen jobarazimi:

$$\omega_i(f,\delta) < C_k \ \delta^i \left\{ \int_0^{(b-a)/k} t^{-i-k} \ \omega_k(f,t)dt + \right.$$

$$\left. + (b-a)^{-i} \| f \|_{C[a,b]} \right\}$$

ku konstanta C_k varet vetëm nga k .

1.2. MODULET INTEGRALE

Në qoftë se përdorim normën integrale, atëherë fitohen modulet analoge me modulet e lëmueshmërisë të cilët i quajmë modulet integrale të lëmueshmërisë ose thjeshtë modluet e lëmueshmërisë në metrikën L_p.

Le të jetë $f(x) \in L_p[a,b]$

Përkufizimi 1.3. Modul integral (modul të lëmueshmërisë në L_p, ose p-modul) të rendit k të funksionit $f(x)$ ose thjesht modul të lëmueshmërisë në metrikën L_p e quajmë funksionin:

$$\omega_k(f,\delta)_p = \sup_{0<h<\delta} \| \Delta_h^k f(x) \|_{L_p[a,b]}, \quad \delta \in [0, \frac{b-a}{k}]$$

Të vërtetojmë një veti karakteristike të modulit integral $\omega_1(f,\delta)_1 = \omega(f,\delta)_L$.

7) Në qoftë se funksioni $f(x)$ është me variacion të kufizuar në segmentin $[a,b]$, atëherë:

$$\omega(f,\delta)_L < \frac{\delta}{b-a} \; V_a^b \, f(x)$$

Me të vërtetë,

$$\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| \, dx < \int_a^{b-h} V_x^{x+h} f(x) \, dx =$$

$$= \int_a^{b-h} (V_a^{x+h} f(x) - V_a^x f(x)) \, dx = \int_{a+h}^{b} V_a^x f(x) \, dx -$$

$$- \int_a^{b-a} V_a^x f(x) \, dx < h \, V_a^b f(x) .$$

Eshtë me rëndësi të cekët në këtë rast se mosbarazimi i mësipërm vlenë edhe në anën tjetër. Ky fakt rrjedh nga teorema Hardi-Litelvud ([28], f. 117).

1.3. PËRGJITHËSIMI I MODULEVE TË VAZHDUESHMËRISË

Për funksionet periodike teorema e Xheksonit dhe e anasjellta me te japin lidhjen e modulit të vazhdueshmërisë të këtyre funksioneve me përafrimin më të mirë të tyre me polinome trigonometrike. Për funksionet joperiodike akoma nuk është vërtetuar një lidhje e tillë e modulit të vazhdueshmërisë dhe përafrimit më të mirë të tyre me polinome algjebrike. Në shumë punime të publikuara në vitet e fundit është vërtetuar se analogjia e plotë me rastin e funksioneve trigonometrike do të vlejë atëherë në qoftë se moduli i thjeshtë i vazhdueshmërisë zëvendësohet me përgjithësimin e modulit të vazhdueshmërisë.

Kështu M.K. Patapov në punimin [23] përgjithësimin e modulit të vazhdueshmërisë e përkufizon në këtë mënyrë:

$$\tilde{\omega}(f,\delta,p,\nu,\mu) = \sup_{|t|<\delta} \| f(x) - f(x,t,\nu,\mu) \|_{L_p^{\nu,\mu}}$$

ku $f(x,t,\nu,\mu)$ është funksion i translacionit të përgjithshëm. Për këtë modul vërtetohen teorema analoge me teoremën e Xheksonit si dhe teorema e anasjelltë me te.

Në punimin [24] një tip i përgjithshëm i modulit të vazhdueshmërisë përkufizohet në këtë mënyrë:

$$\Omega(f,\delta)_{p,\lambda} = \sup_{|t|<\delta} \| [T_t^{\lambda}(f,x) - f(x)](1+x)^{\frac{\lambda}{2}} \|_p$$

ku $T_t^{\lambda}(f,x)$ quhet operator i translacionit të përgjithshëm dhe paraqitet në këtë formë:

$$T_t^{\lambda}(f,x) = \frac{1}{\pi(\cos\frac{t}{2})^{\lambda}} \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\left(\frac{1+\cos\theta}{1+x}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \cos\lambda r d\varphi ,$$

$$|t| < \pi, \quad \cos\theta = x\cos t + \cos\varphi \sin t\sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq r \leq \pi$$

$$\cos r = \frac{\sqrt{1+x}\cos\frac{t}{2} + \cos\varphi\sqrt{1-x}\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{1+x\cos t + \cos\varphi\sqrt{1-x^2}\sin t}}$$

Edhe për këtë modul vërtetohet teorema e drejtë dhe teorema e anasjelltë në teorinë e përafrimeve.

Po shqyrtojmë përgjithësimin e një tipi të modulit të vazhdueshmërisë i cili është analog me modulin e thjeshtë të lëmueshmërisë të rendit të parë për funksionet periodike me periodë 2π .

Le të jetë $f(x) \in L_{p.\alpha.\beta}[-1,1]$.

Përkufizimi 1.4. Përgjithësim i modulit të vazhdueshmërisë i funksionit $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}[-1,1]$ quhet funksioni:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{0 < t < \delta}\left\{\left[\int_{0}^{\pi-\lambda} |f(\cos(\theta+t)) - f(\cos\theta)|^{p}(\sin\tfrac{\theta}{2})^{2p\alpha+1}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{2p\beta+1}d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\lambda}^{\pi}|f(\cos(\theta-t)) - f(\cos\theta)|^{p}(\sin\tfrac{\theta}{2})^{2p\alpha+1}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{2p\beta+1}d\theta\right]^{\frac{1}{p}}\right\}$$

për $1 \leq p < \infty$, ndërsa për $p = \infty$, funksionin:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{\infty,\alpha,\beta} = \sup_{0 \leq t \leq \delta}\left\{\max_{0<\theta<\pi-\lambda}\left[|f(\cos(\theta+t)) - f(\cos\theta)|(\sin\tfrac{\theta}{2})^{2\alpha}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{2\beta}\right] + \max_{\lambda<\theta<\pi}\left[|f(\cos(\theta-t)) - f(\cos\theta)|(\sin\tfrac{\theta}{2})^{2\alpha}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{2\beta}\right]\right\}$$

ku $0 < \delta < \mu < \lambda$, $1 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, λ dhe μ janë numra të fiksuar.

Për $\lambda = \frac{3\pi}{8}$ një modul i tillë për herë të parë është përkufizuar në punimin [29] . Ky modul është shfrytëzuar për vlerësimet e përafrimit më të mirë të funksioneve me anë të polinomeve algjebrike dhe ate në metrikën L_2.

Që të vërtetojmë disa veti të këtij moduli $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ të cilat veti do të zbatohen në kapitujt e ardhshëm është e nevojshme kjo lemë.

Lema 1.1. Në qoftë se $\alpha > -\frac{1}{2p}$, $\beta \geq -\frac{1}{2p}$, për $1 \leq p < \infty$ dhe $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ për $p = \infty$, atëherë ekzistojnë konstantet pozitive C_1, C_2 dhe C_3 për të cilat vlejnë jobarazimet:

për $0 \leq \theta \leq \pi-\lambda$, $0 \leq h \leq \delta < \mu$, $\mu < \lambda < \frac{\pi}{2}$

$$(\sin\tfrac{\theta}{2})^{2p\alpha}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{2p\beta}\sin\theta \leq C_1(\sin\tfrac{\theta+h}{2})^{2p\alpha}(\cos\tfrac{\theta+h}{2})^{2p\beta}\sin(\theta+h) \tag{1.1}$$

për $\lambda < \theta < \pi$, $0 \leq h \leq \delta < \mu$, $\mu < \lambda < \frac{\pi}{2}$,

$$(\sin\tfrac{\theta}{2})^{2p\alpha}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{2p\beta}\sin\theta \leq C_2(\sin\tfrac{\theta-h}{2})^{2p\alpha}(\cos\tfrac{\theta-h}{2})^{2p\beta}\sin(\theta-h) \tag{1.2}$$

për $\lambda < \theta < \pi$, $0 \leq h \leq \delta < \mu$, $\mu < \lambda < \frac{\pi}{2}$,

$$1 \leq C_3(\sin\tfrac{\theta}{2})^{2p\alpha}(\cos\tfrac{\theta}{2})^{2p\beta} \tag{1.3}$$

ku konstantet $C_i = C_i(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)$, $i = 1,2,3$ nuk varen nga θ dhe h.

Vërtetimi: Kemi:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta+h-h}{2} \leq \sin\frac{\theta+h}{2} + \sin\frac{h}{2}$$

Meqë, $0 \leq \frac{h}{2} \leq \frac{h+\theta}{2} < \frac{\pi-\lambda+\mu}{2} = \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda-\mu}{2} < \frac{\pi}{2}$, atëherë

$\sin \frac{h}{2} \leq \sin \frac{h+\theta}{2}$, prandaj $\sin\frac{\theta}{2} \leq 2 \sin \frac{\theta+h}{2}$,

për $2p\alpha + 1 \geq 0$, kemi:

$$(\sin\frac{\theta}{2})^{2p\alpha+1} \leq C_4(p, \ )(\sin \frac{\theta+h}{2})^{2p\alpha+1} \tag{1.4}$$

Meqë $0 < \frac{\theta+h}{2} < \frac{\pi-\lambda+\mu}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda-\mu}{2} < \frac{\pi}{2}$, atëherë:

$\cos \frac{\theta}{2} \leq 1$, $\cos \frac{\theta+h}{2} \geq \cos (\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda-\mu}{2}) = \sin \frac{\lambda-\mu}{2} = C_5(\lambda-\mu) > 0$,

prandaj:

$\cos \frac{\theta}{2} \leq C_5 \cos \frac{\theta+h}{2}$

për $2p\beta + 1 \geq 0$, kemi:

$$(\cos\frac{\theta}{2})^{2p\beta+1} \leq C_6(\cos \frac{\theta+h}{2})^{2p\beta+1} \tag{1.5}$$

Kështu, nga jobarazimet (1,4) dhe (1.5) rrjedh jobarazimi (1.1).

Të vërtetojmë jobarazimin (1.2). Le të jetë:

$0 < \frac{\lambda-\mu}{2} \leq \frac{\theta-h}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{h}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$,

atëherë: $\sin \frac{\theta}{2} \leq 1$ dhe $\sin \frac{\theta-h}{2} \geq \sin \frac{\lambda-\mu}{2} = C_5(\lambda-\mu) > 0$.

Për këtë arsye vlenë jobarazimi:

$\sin \frac{\theta}{2} \leq C_5 (\sin \frac{\theta-h}{2})$

për $2p\alpha + 1 \geq 0$, kemi:

$$(\sin \frac{\theta}{2})^{2p\alpha+1} \leq C_7 (\sin \frac{\theta-h}{2})^{2p\alpha+1} \tag{1.6}$$

Meqë $0 < \frac{\theta - h}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, atëherë $\cos\frac{\theta}{2} \leq \cos\frac{\theta - h}{2}$,

për $2p\beta + 1 > 0$, kemi:

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2p\beta+1} \leq C_8\left(\cos\frac{\theta-h}{2}\right)^{2p\beta+1} \qquad (1.7)$$

Nga jobarazimet (1.6) dhe (1.7) rrjedh jobarazimi (1.2).

Të vërtetojmë tani jobarazimin (1.3). Le të jetë:

$$\lambda < \theta < \pi-\lambda\ , \quad 0 < \frac{\lambda}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi-\lambda}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2} < \frac{\pi}{2}\ ,$$

atëherë:

$\cos\frac{\theta}{2} > \cos\frac{\pi-\lambda}{2} = \sin\frac{\lambda}{2} > 0$ dhe $\sin\frac{\theta}{2} > \sin\frac{\lambda}{2} > 0$, prandaj

$1 < C_9 \cos\frac{\theta}{2}$ dhe $1 < C_{10}\sin\frac{\theta}{2}$.

Meqë $1 < C_9 \cos\frac{\theta}{2}$, për $2p\beta + 1 > 0$, kemi:

$$1 < C_{11}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2p\beta+1} \qquad (1.8)$$

Meqë $1 < C_{10}\sin\frac{\theta}{2}$, për $2p\alpha + 1 > 0$, kemi:

$$1 < C_{12}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2p\alpha+1} \qquad (1.9)$$

Nga jobarazimet (1.8) dhe (1.9) rrjedh jobarazimi (1.3).

Përgjithësimi i modulit të vazhdueshmërisë gëzon këto veti themelore të cilat janë analoge me vetitë e moduleve tjerë të njohur më parë:

1) Në qoftë se $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, atëherë $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ është i fundëm për çdo δ dhe $\tilde{\omega}(f,0)_{p,\alpha,\beta} = 0$.

2) $\widetilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ - është funksion jo zvoglues d.m.th.

$$\widetilde{\omega}(f,\delta_1)_{p,\alpha,\beta} \leqslant \widetilde{\omega}(f,\delta_2)_{p,\alpha,\beta} \quad , \text{ për } \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2$$

3) Për funksionin $\widetilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ vlenë joabarazimi:

$$\widetilde{\omega}(f,\delta_1+\delta_2)_{p,\alpha,\beta} \leqslant C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)[\widetilde{\omega}(f,\delta_1)_{p,\alpha,\beta} + \widetilde{\omega}(f,\delta_2)_{p,\alpha,\beta}]$$

4) Për çfaredo numri natyral n plotësohet jobarazimi:

$$\widetilde{\omega}(f,n\delta)_{p,\alpha,\beta} \leqslant C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)\cdot n\widetilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} \quad , \quad n\delta < \lambda$$

ndërsa për çdo $\eta > 0$, plotësohet jobarazimi

$$\widetilde{\omega}(f,\eta\delta)_{p,\alpha,\beta} \leqslant C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)\ [\eta+1]\ \widetilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} .$$

Vërtetimi: Nga këto katër veti, dy vetit e para janë plotësisht analoge me vetit e modulit të lëmueshmërisë ndërsa vetit 3) dhe 4) kanë një formë tjetër. Në këto veti paraqiten edhe konstantet të cilat konstante duke u bazuar në lemën 1.2 rrjedh se janë të fundme. Për thjeshtësi, më tej do të përdorim këto shenime:

$$f(\cos\theta) = \varphi(\theta) \ , \quad \varphi(x) = (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta} \ ,$$

për $x = \cos\theta$, $\ell(\cos\theta) = (1-\cos\theta)^{\alpha}\ (1+\cos\theta)^{\beta} = w(\theta)$

Po vërtetojmë tani këto veti:

1) $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta} \Leftrightarrow [\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^{\alpha p}(1+x)^{\beta p} dx]^{\frac{1}{p}} < \infty$

Duke bërë zavendësimin $x = \cos\theta$ në integralin:

$$I = \int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^{\alpha p} (1+x)^{\beta p} dx$$

fitojmë: për $1 \leq p < \infty$;

$$I = \int_{0}^{\pi} |\varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta < \infty$$

ndërsa për $p = \infty$;

$$I = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |\varphi(\theta) \; w(\theta)| < \infty$$

Prandaj kemi:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p\,\alpha\,\beta} = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \Big\{ [\int_{0}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_{\lambda}^{\pi} |\varphi(\theta-t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} \Big\} = I_1 + I_2 .$$

Le të jetë $1 \leq p < \infty$, atëherë kemi:

$$I_1 = [\int_{0}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t) - \varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq [\int_{0}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} + [\int_{0}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= A_1 + A_2.$$

Eshtë e qartë se $A_2 < \infty$. Tani vlerësojmë integralin A_1. Në qoftë se në integralin A_1 zbatojmë lemën 1.1, kemi:

$$A_1 \leq C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)\left[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)|^p w^p(\theta+t)\sin(\theta+t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

Bëjmë zëvendësimin $u = \theta + t$ dhe duke pasur parasyshë që $t \leq \mu < \lambda$, fitojmë:

$$A_1 \leq \left[\int_t^{\pi-\lambda+t} |\varphi(u)|^p w^p(u)\sin u\, du\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left[\int_0^{\pi} |\varphi(u)|^p w^p(u)\sin u\, du\right]^{\frac{1}{p}} = I < \infty$$

Në mënyrë analoge vërtetohet, se $I_2 < \infty$.

Për $p = \infty$ kemi:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{\infty,\alpha,\beta} = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left\{ \max_{0<\theta<\pi-\lambda} |[\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)]w(\theta)| + \right.$$

$$\left. + \max_{\lambda<\theta<\pi} |[\varphi(\theta-t)-\varphi(\theta)]\cdot w(\theta)| \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{0<t<\delta} \left[\max_{0<\theta<\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)\ w(\theta)| + \max_{0<\theta<\pi-\lambda} |\varphi(\theta)w(\theta)| + \right.$$

$$\left. + \max_{\lambda<\theta<\pi} |\varphi(\theta-t)\ w(\theta)| + \max_{\lambda<\theta<\pi} |\varphi(\theta)\ w(\theta)|\right] .$$

Pa vështërsi vërtetohet se sejcili nga mbledhësit e shumës së mësipërme është më e vogël se I. Prandaj, fitojmë:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{\infty,\alpha,\beta} < \infty .$$

2) Vetia rrjedh nga fakti se për vlerat më të mëdha të variablit δ kemi mundësi që supremumin ta shqyrtojmë në një bashkësi më të gjërë të vlerave të t-së.

3) Parametrin $t \in [0,\delta_1+\delta_2]$ po e paraqesim në formën $t = t_1 + t_2$, ku $t_1 \in [0,\delta_1]$ dhe $t_2 \in [0,\delta_2]$. Në këtë mënyrë kemi:

për $1 < p < \infty$:

$$\tilde{\omega}(f,\delta_1+\delta_2)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{\substack{o<t_1<\delta_1\\ o<t_2<\delta_2}} \Big\{[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t_1+t_2) -$$

$$- \varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} + [\int_\lambda^\pi |\varphi(\theta-t_1-t_2)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta d\theta]^{\frac{1}{p}}\Big\} <$$

$$< \sup_{o<t_1<\delta_1} [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t_1+t_2)-\varphi(\theta+t_2)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_\lambda^\pi |\varphi(\theta-t_1-t_2)-\varphi(\theta-t_2)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \sup_{o<t_2<\delta_2} [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t_2)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_\lambda^\pi |\varphi(\theta-t_2)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} < I_1' + I_1''$$

Eshtë e qartë se $I_1'' = \tilde{\omega}(f,\delta_2)_{p,\alpha,\beta}$. Shqyrtojmë tani I_1'. Kemi:

$$I_1' < J_1 + J_2$$

ku

$$J_1 = [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t_1+t_2)-\varphi(\theta+t_2)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} \text{ , dhe}$$

$$J_2 = [\int_{\lambda}^{\pi} |\varphi(\theta-t_1-t_2)-\varphi(\theta-t_2)|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}}$$

Në qoftë se në integralin J_1 zbatojmë lemën 1.1 kemi:

$$J_1 \leq C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t_1+t_2)-\varphi(\theta+t_2)|^p w^p(\theta+t_2)\sin(\theta+t_2)d\theta]^{\frac{1}{p}}$$

Bëjëmë zëvendësimin: $u = \theta+t_2$, kemi:

$$J_1 \leq C_1[\int_{t_2}^{\pi-\lambda+t_2} |\varphi(u+t_1)-\varphi(u)|^p w^p(u)\sin u \, du]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_2[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(u+t_1)-\varphi(u)|^p w^p(u)\sin u \, du]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ C_3[\int_{\pi-\lambda}^{\pi-\lambda+t_2} |\varphi(u+t_1)-\varphi(u)|^p w^p(u)\sin u \, du]^{\frac{1}{p}} \leq B_1 + B_2$$

Është e qartë se $B_1 \leq \tilde{\omega}(f,\delta_1)_{p,\alpha,\beta}$.

Shqyrtojmë tani B_2. Në qoftë se bëjmë zëvendësimin $v = u+t_1$, fitojmë:

$$B_2 \leq C_4[\int_{\pi-\lambda+t_2}^{\pi-\lambda+t_1+t_2} |\varphi(v)-\varphi(v-t_1)|^p w^p(v)\sin v \, dv]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_5[\int_{\lambda}^{\pi} |\varphi(v)-\varphi(v-t_1)|^p w^p(v)\sin v \, dv]^{\frac{1}{p}} \leq C_5\tilde{\omega}(f,\delta_1)_{p,\alpha,\beta}$$

Në mënyrë analoge vërtetohet jobarazimi:

$$J_2 \leq C_6\tilde{\omega}(f,\delta_1)_{p,\alpha,\beta}.$$

Kështu vetia 3) është vërtetuar për $1 \leq p < \infty$, ndërsa për $p = \infty$ vërtetohet në mënyrë analoge.

4) Për $n = 1$, vetia është evidente. Për $n = 2$, kemi:

$$\tilde{\omega}(f,2\delta)_{p,\alpha,\beta} = \tilde{\omega}(f,\delta+\delta)_{p,\alpha,\beta}$$

Duke u bazuar në vetinë 3), kemi:

$$\tilde{\omega}(f,2\delta)_{p,\alpha,\beta} \leq C_7[\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} + \tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}] \leq$$

$$\leq C_7 \; 2\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} .$$

Supozojmë se vetia vlenë për $n = k$, atëherë kemi:

$$\tilde{\omega}(f,(k+1)\delta)_{p,\alpha,\beta} \leq C_8[\tilde{\omega}(f,k\delta)_{p,\alpha,\beta} + \tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}] \leq$$

$$\leq C_9(k+1)\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} .$$

1.4. DISA POHIME NDIHMËSE

Për vërtetimin e rezultateve themelore janë të nevojshme këto pohime ndihmëse:

Lema 1.2.[18] . Le të jetë $P_n(x)$ - polinom algjebrik i shkallës jo më të lartë se $n - 1$, $1 \leq p < \infty$ dhe $\alpha > -\frac{1}{2p}$

$\beta > -\frac{1}{2p}$ ndërsa $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ për $p = \infty$. Atëherë vlenë jobarazimi:

$$\| P_n'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta} \leq Cn\| P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} .$$

Përkufizojmë funksionin e translacionit të përgjithshëm $f(x,t,\nu,\mu)$ në këtë mënyrë:

për $\nu = \mu = -\frac{1}{2}$:

$$f(x,t,\nu,\mu) = \frac{1}{2}[f(x\cos t + \sin t\sqrt{1-x^2}) + f(x\cos t - \sin t\sqrt{1-x^2})]$$

për $\nu = \mu > -\frac{1}{2}$:

$$f(x,t,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)}\int_{-1}^{1} f(x\cos t + z\sin t\sqrt{1-x^2})(1-z^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dz,$$

për $\nu > \mu = -\frac{1}{2}$:

$$f(x,t,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)}\int_{-1}^{1} f(x\cos t + r\sin t\sqrt{1-x^2} - (1-r^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2})(1-r^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dr,$$

për $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$:

$$f(x,t,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)}\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} f(x\cos t + rz\sin t\sqrt{1-x^2} - (1-r^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2})(1-r^2)^{\nu-\mu-1} r^{2\mu+1}(1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dz\,dr,$$

ku $\gamma(\nu) = \int_{-1}^{1}(1-r^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dr$, dhe

$$\gamma(\nu,\mu) = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}(1-r^2)^{\nu-\mu-1} r^{2\mu+1}(1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dz\,dr.$$

Lehtë shihet se $f(x,t,\nu,\mu) = f(x,-t,\nu,\mu)$, prandaj mund të konsiderojmë që $0 \leq t \leq \pi$.

Le të jenë dhënë numrat m dhe q. Na është e njohur se funksioni:

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2q+4}$$

është polinom trigonometrik çift i rendit $(q+2)(m-1)$. Lehtë shihet se funksioni:

$$k(t,m,\nu,\mu) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(m,\nu,\mu)}$$

ku $\gamma(m,\nu,\mu) = \int_0^{\pi} \gamma(t)(\sin\frac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}dt$, $\nu \geq \mu \geq -\frac{1}{2}$,

për $\lambda \geq 0$ dhe $2q+2 > \lambda + 2\nu > -2$ plotëson kondítat:

$$\int_0^{\pi} k(t,m,\nu,\mu)(\sin\frac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}dt = 1 \tag{1.10}$$

$$\int_0^{\pi} t^{\lambda} k(t,m,\nu,\mu)(\sin\frac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}dt \leq C\, m^{-k} \tag{1.11}$$

konstanta C nuk varet nga m.

Lema 1.3. Në qoftë se funksioni $f(x) \in L_{p,\nu,\mu}$, $\nu \geq \mu \geq -\frac{1}{2}$, atëherë funksioni:

$$Q(x) = \int_0^{\pi} f(x,t,\nu,\mu)k(t,m,\nu,\mu)(\sin\frac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}dt$$

është polinom algjebrik i shkallës jo më të lartë se $(q+2)(m-1)$.

Për $\nu = \mu = -\frac{1}{2}$ lema 1.3 është vërtetuar në punimin [31], për $\nu = \mu > -\frac{1}{2}$ në punimin [15], për $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$ në punimin [16] dhe për $\nu > \mu = -\frac{1}{2}$ në punimin [17].

Lema 1.4. [16]. Në qoftë se $0 < r < 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, ρ - një numër i çfarëdoshëm realë dhe:

$$x = y\cos t + RV\sqrt{1-y^2}\sin t - (1-R^2)(1-y)\sin^2\frac{t}{2},$$

$$z = \frac{(1-R^2+y+yR^2)\sin t - 2RV\cos t\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{[(1-R^2+y+yR^2)\sin t - 2RV\cos t\sqrt{1-y^2}]^2 + 4R^2(1-V^2)(1-y^2}}$$

$$r = \sqrt{\frac{R^2(1-y)\cos^2\frac{t}{2} - RV\sqrt{1-y^2}\sin t + (1+y)\sin^2\frac{t}{2}}{4-[R^2(1-y)\sin^2\frac{t}{2} + RV\sqrt{1-y^2}\sin t + (1+y)\cos^2\frac{t}{2}}}$$

atëherë: $0 \leqslant R \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant V \leqslant 1$

$$(1-r^2)(1-x) = (1-R^2)(1-y)$$

$$r^2(1-z^2)(1-x^2) = R^2(1-V^2)(1-y^2)$$

$$x\sin t - rz\cos t\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-r^2)(1-x)\sin t = RV\sqrt{1-y^2}$$

$$x\cos t + rz\sin t\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-r^2)(1-x)\cos t = y + \frac{1}{2}(1-R^2)(1-y)$$

$$(1-x+\frac{1}{n^2})^\rho \leqslant C\,[1+(n|\sin\tfrac{t}{2}|)^{2|\rho|}]\,(1-y+\frac{1}{n^2})^\rho$$

$$(1+x+\frac{1}{n^2})^\rho \leqslant C\,[1+(n|\sin\tfrac{t}{2}|)^{2|\rho|}]\,(1+y+\sin^2\frac{t}{2})^\rho$$

$$(1-x+\frac{1}{n^2})^{\rho} < C\,[1+(n|\sin\frac{t}{2}|)^{-2\rho}]\,(1-y+\sin^2\frac{t}{2})^{\rho}$$

$$(1+x+\frac{1}{n^2})^{\rho} < C\,[1+(n|\sin\frac{t}{2}|)^{-2\rho}]\,(1+y+\sin^2\frac{t}{2})^{\rho}$$

konstanta C nuk varet nga x, t, y dhe n.

Lema 1.5. [18]. Le të jetë $Q_n(x)$ polinom algjebrik i shkallës jo më të lartë se $n-1$. Le të jenë dhënë numrat $p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2$ të tillë që $1 < p < \infty$; $\alpha > -\frac{1}{2p}$, $\beta > -\frac{1}{2p}$, për $1 < p < \infty$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ për $p = \infty$, $-\infty < \rho_1 < \infty$, $-\infty < \rho_2 < \infty$, atëherë plotësohet jobarazimi:

$$\|Q_n'(x)(1-x)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+x)^{\beta+\frac{1}{2}}(1-x+\frac{1}{n^2})^{\rho_1}(1+x+\frac{1}{n^2})^{\rho_2}\|_{L_p}$$

$$< Cn\|Q_n(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x+\frac{1}{n^2})^{\rho_1'}(1+x+\frac{1}{n^2})^{\rho_2}\|_{L_p}.$$

Për thjeshtësi do të përdorim këto shenime: $f(\cos\theta)=\varphi(\theta)$.

$$h(\theta,t) = h_{p,\alpha,\beta}^{\rho_1,\rho_2}(\theta,t) = (\sin\frac{\theta}{2})^{q(2\alpha+\frac{1}{p})}(\cos\frac{\theta}{2})^{q(2\beta+\frac{1}{p})}.$$

$$\cdot(\sin^2\frac{\theta}{2}+t^2)^{\rho_1 q}(\cos^2\frac{\theta}{2}+t^2)^{\rho_2 q},$$ ku $q = p$ për $1 < p < \infty$ dhe $q = 1$ për $p = \infty$.

Lema 1.6. Në qoftë se $\alpha > -\frac{1}{2p}$, $\beta > -\frac{1}{2p}$, atëherë për $\frac{\pi}{n} - t < \theta < \frac{\pi}{n}$, $0 < t < \frac{\pi}{n}$, $n > 2$, plotësohet jobarazimi:

$$h(\theta-t,\frac{1}{n}) < C_1 h(\theta,\frac{1}{n}) \tag{1.12}$$

për $\frac{\pi}{n} + t \leq \theta \leq \frac{3\pi}{n}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2n}$, plotësohet jobarazimi:

$$h(\theta+t,\tfrac{1}{n}) \leq C_2 h(\theta,\tfrac{1}{n}) \tag{1.13}$$

konstantet C_1 dhe C_2 nuk varen nga θ, t dhe n.

Vërtetimi: Me të vërtetë, duke u bazuar në kondidat $\alpha > -\frac{1}{2p}$, $\beta > -\frac{1}{2p}$ si dhe në jobarazimet:

$$\sin^2\frac{\theta-t}{2} \leq 2(\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{t}{2});\ \cos^2\frac{\theta-t}{2} \leq 2(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{t}{2})$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} \leq 2(\sin^2\frac{\theta-t}{2}+\sin^2\frac{t}{2});\ \cos^2\frac{\theta}{2} \leq 2(\cos^2\frac{\theta-t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}) \tag{1.14}$$

$$|\sin\frac{\theta-t}{2}| \leq |\sin\frac{\theta}{2}| + |t|\ ;\ |\cos\frac{\theta-t}{2}| \leq |\cos\frac{\theta}{2}| + |t|$$

kemi:

$$h(\theta-t,\tfrac{1}{n}) = h(\theta,\tfrac{1}{n})\frac{(\sin\frac{\theta-t}{2})^{2\alpha p+1}(\cos\frac{\theta-t}{2})^{2\beta p+1}(\sin^2\frac{\theta-t}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_1 p'}}{(\sin\frac{\theta}{2})^{2\alpha p+1}(\cos\frac{\theta}{2})^{2\beta p+1}(\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_1 p}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos^2\frac{\theta-t}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_2 p}}{(\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_2 p}} \leq C_3 h(\theta,\tfrac{1}{n})\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{2\alpha p+1}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^{2\beta p+1}$$

$$\leq C_4 h(\theta,\tfrac{1}{n})\left(1+\frac{1}{n\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{2\alpha p+1} \leq C_5 h(\theta,\tfrac{1}{n}).$$

Po ashtu duke u bazuar në kondititat e dhëna si dhe në jobarazimet (1.14) për $\alpha > -\frac{1}{2p}$, $\beta > -\frac{1}{2p}$ do të kemi:

$$\frac{h(\theta+t,\frac{1}{n})}{h(\theta,\frac{1}{n})} = \frac{|\sin\frac{\theta+t}{2}|^{2\alpha p+1}|\cos\frac{\theta+t}{2}|^{2\beta p+1}(\sin^2\frac{\theta+t}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_1 p}}{|\sin\frac{\theta}{2}|^{2\alpha p+1}|\cos\frac{\theta}{2}|^{2\beta p+1}(\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_1 p}} \cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos^2\frac{\theta+t}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_2 p}}{(\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n^2})^{\rho_2 p}} < C_6\left(\frac{|\sin\frac{\theta}{2}|+\frac{1}{n}}{|\sin\frac{\theta}{2}|}\right)^{2\alpha p+1}\left(\frac{|\cos\frac{\theta}{2}|+\frac{1}{n}}{|\cos\frac{\theta}{2}|}\right)^{2\beta p+1} \leqslant$$

$$< C_6\left(1+\frac{1}{n|\sin\frac{\theta}{2}|}\right)^{2\alpha p+1}\left(1+\frac{1}{n|\cos\frac{\theta}{2}|}\right)^{2\beta p+1} <$$

$$< C_7\left(1+\frac{1}{n\theta}\right)^{2\alpha p+1}\left(1+\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{4n}}\right)^{2\beta p+1} < C_8 \; .$$

Në mënyrë analoge vërtetohet kjo lemë.

Lema 1.7. Në qoftë se $2p\alpha+1 > 0$ dhe $2p\beta+1 \geqslant 0$, atëherë ekzistojnë konstantet C_1, C_2 dhe C_3 për të cilat plotësohen jobarazimet:

për $0 < \theta < \pi-\lambda$, $0 < t \leqslant \delta < \mu$, $\mu < \lambda < \frac{\pi}{2}$,

$$h(\theta,t) < C_1 h(\theta+t,t) \tag{1.15}$$

për $\lambda < \theta < \pi$, $0 < t < \delta < \mu$, $\mu < \lambda < \frac{\pi}{2}$,

$$h(\theta,t) < C_2 h(\theta-t,t) \tag{1.16}$$

për $\lambda < \theta < \pi-\lambda$, $0 < t < \delta < \mu$, $\mu < \lambda < \frac{\pi}{2}$,

$$1 < C_3\, h(\theta,t) \tag{1.17}$$

II. TEOREMA E DREJTE DHE TEOREMA E ANASJELLTE PER MODULIN E PERGJITHSHEM TE VAZHDUESHMERISE

Për çdo funksion $f(x) \in C_{2\pi}$ vërtetohet jobarazimi

$$E_n(f)_C < A\ \omega(f, n^{-1})_C \tag{2.1}$$

ku A është një konstantë pozitive. Jobarazimi (2.1) paraqet teoremën klasike të Xheksonit (shih. [35] f. 112).

Pastaj nga Steçkini [31] jobarazimi (2.1) është përgjithësuar në metrikën L_p dhe për modulin e lëmueshmërisë $\omega_k(f,\delta)_p$, pra është vërtetuar jobarazimi:

$$E_n(f)_{L_p} < C(k)\ \omega_k(f, n^{-1})_{L_p}$$

Nga Steçkini dhe Salemi [28] është vërtetuar ky jobarazim:

$$\omega_k(f, n^{-1})_{L_p} < \frac{C(k)}{n^k} \sum_{s=0}^{n} (s+1)^{k-1} E_s(f)_{L_p} \tag{2.2}$$

Nga jobarazimet (2.1) dhe (2.2) fitohen karakteristikat e përafrimit më të mirë të funksionit me polinome trigonometrike në metrikën L_p. Pra shihet qartë se nga jobarazimet (2.1) dhe (2.2) rrjedhë relacioni:

$$\omega_k(f,\delta)_{L_p} = O(\delta^{\alpha}) <=> E_n(f)_{L_p} = O(n^{-\alpha}),\ 0 < \alpha < k, \tag{2.3}$$

2.1. TEOREMA E ANASJELLTË PËR MODULIN E PËRGJITHSHËM TË VAZHDUESHMËRISË

Teoremë e anasjelltë në teorinë e përafrimeve të funksioneve quhet çdo teoremë e cila përcakton shkallën e lëmueshmërisë së funksionit (ose klasës së funksioneve) në varështmëri të shpejtësisë së tentimit në zero të përafrimit më të mirë të tij (tyre).

Për modulin $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ të funksioneve nga klasa $L_{p,\alpha,\beta}$ do të vërtetojmë jobarazimin analog me jobarazimin e Steçkin-Salemit (2.2).

Teorema 2.1. Le të jetë $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$ dhe $2p\alpha+1>0$, $2p\beta+1>0$, $1<p<\infty$. Atëherë ekziston konstanta $C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)$ që nuk varet nga $f(x)$ dhe n e tillë që

$$\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} < \frac{C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)}{n}\sum_{s=1}^{n} E_s(f)_{p,\alpha,\beta} \tag{2.4}$$

Vërtetimi: Le të jetë $1<p<\infty$, atëherë:

$$\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} = \sup_{0<t<\delta}\left\{\left[\int_0^{\pi-\lambda}|\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$\left.+\left[\int_\lambda^{\pi}|\varphi(\theta-t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}\right\} < I_1+I_2$$

Do të shqyrtojmë më parë I_1,

$$I_1=\left[\int_0^{\pi-\lambda}|\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left[\int_0^{\pi-\lambda}|\varphi(\theta+t)-T_{2^n}(\theta+t)+T_{2^n}(\theta+t)+T_{2^n}(\theta)-T_{2^n}(\theta)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}<$$

$$\leq \left[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-T_{2n}(\theta+t)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta)-T_{2n}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left[\int_0^{\pi-\lambda} |T_{2n}(\theta+t)-T_{2n}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \leq I_1' + I_1'' + I_1'''$$

Meqë polinomi $P_n(\cos\theta) = T(\theta)$ është polinom i përafrimit më të mirë për funksionin $f(x)$, atëherë është e qartë se vlenë:

$$I_1'' \leq E_{2n}(f)_{p,\alpha,\beta} .$$

Vlerësojmë I_1'. Duke u bazuar në jobarazimin (1.1), kemi:

$$I_1' \leq C_1\left[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-T_{2n}(\theta+t)|^p w^p(\theta+t)\sin(\theta+t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

Bëjmë zëvendësimin $u = \theta+t$ dhe pasi që $0 < t < \mu < \lambda$ kemi:

$$I_1' \leq C_2\left[\int_t^{\pi-\lambda+t} |\varphi(u)-T_{2n}(u)|^p w^p(u)\sin u\, du\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_2\left[\int_0^{\pi} |\varphi(u)-T_{2n}(u)|^p w^p(u)\sin u\, du\right]^{\frac{1}{p}} \leq C_2 E_{2n}(f)_{p,\alpha,\beta} .$$

Vlerësojmë tani integralin I_1''':

$$I_1''' = \left[\int_0^{\pi-\lambda} |T_{2n}(\theta+t)-T_{2n}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\int_0^{\pi-\lambda} \left|\int_0^{t} T_{2n}'(\theta+u)\sin(\theta+u)du\right|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, fitojmë:

$$I_1 < C_4 \int_0^t [\int_0^{\pi-\lambda} | T'_{2n}(\theta+u)\sin(\theta+u)|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} du.$$

Zbatojmë tani jobarazimin (1.1), kemi:

$$I_1 < C_5 \int_0^t [\int_0^{\pi-\lambda} | T'_{2n}(\theta+u)\sin(\theta+u)|^p w^p(\theta+u)\sin(\theta+u) d\theta]^{\frac{1}{p}} du.$$

Bëjmë zëvendësimin $v = \theta+u$ dhe duke pasur parasysh që $0 < u < h < \lambda$, kemi:

$$I_1 < C_5 \int_0^t [\int_u^{\pi-\lambda+u} | T'_{2n}(v)\sin v|^p w^p(v)\sin v \, dv]^{\frac{1}{p}} du <$$

$$< C_5 \int_0^t [\int_0^{\pi} | T'_{2n}(v)\sin v|^p w^p(v)\sin v \, dv]^{\frac{1}{p}} du <$$

$$< C_5 t [\int_0^{\pi} | T'_{2n}(v)\sin v|^p w^p(v)\sin v \, dv]^{\frac{1}{p}}$$

Polinomet $Q_k(x)$ po i formojmë në këtë mënyrë:

$$Q_{2^k}(x) = P_{2^k}(x)-P_{2^{k-1}}(x) \quad \text{për} \quad k > 1, \quad Q_1(x) = P_1(x).$$

Është e qartë se $\sum_{k=0}^{N} Q_{2^k}(x) = P_{2^N}(x)$.

Për thjeshtësi po shenojmë $P_n(\cos\theta) = T_n(\theta)$. Kështu kemi:

$$I_1 < C_5 t [\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{N} | Q'_{2^k}(\theta)\sin\theta|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë jobarazimin e Minkovskit, fitojmë:

$$I_1 < C_6 t \sum_{k=1}^{N} [\int_0^{\pi} |Q_{2^k}(\theta)\sin\theta|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë lemën 1.2, kemi:

$$I_1 < C_7 t \sum_{k=1}^{N} 2^k [\int_0^{\pi} |Q_{2^k}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} <$$

$$< C_7 t \sum_{k=1}^{N} 2^k [\int_0^{\pi} |T_{2^k}(\theta)-T_{2^{k-1}}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta]^{\frac{1}{p}} <$$

$$< C_7 t \sum_{k=1}^{N} 2^k [\int_0^{\pi} |T_{2^k}(\theta)-\varphi(\theta)+\varphi(\theta)-T_{2^{k-1}}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta d\theta]^{\frac{1}{p}} <$$

$$< C_8 t (\sum_{k=1}^{N} 2^k E_{2^{k-1}}(f)_{p,\alpha,\beta})$$

Duke pasur parasysh që:

$$2^{k+1} E_{2^k}(f)_{p,\alpha,\beta} < \sum_{s=2^{k-1}}^{2^k} E_s(f)_{p,\alpha,\beta}$$

kemi:

$$I_1 < C_9 t \sum_{s=1}^{2^N} E_s(f)_{p,\alpha,\beta} .$$

Le të jetë: $2^N < n < 2^{N+1}$ dhe $\frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n}$, atëherë

$$I_1 < C_{10} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} E_s(f)_{p,\alpha,\beta} .$$

Vlerësojmë tani I_2:

$$I_2 = [\int_{\lambda}^{\pi} |\varphi(\theta-t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_{\lambda}^{\pi}|\varphi(\theta-t)-T_{2^n}(\theta-t)+T_{2^n}(\theta-t)+T_{2^n}(\theta)-T_{2^n}(\theta)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta d\theta]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq [\int_{\lambda}^{\pi}|\varphi(\theta-t)-T_{2^n}(\theta-t)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_{\lambda}^{\pi}|\varphi(\theta)-T_{2^n}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_{\lambda}^{\pi} |T_{2^n}(\theta-t)-T_{2^n}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} = I_2^1 + I_2^2 + I_2^3$$

Eshtë e qartë se: $I_2^2 \leq E_{2^n}(f)_{p,\alpha,\beta}$.

Vlerësojmë I_2^1. Zbatojmë jobarazimin (1.2), kemi:

$$I_2^1 \leq C_{11}[\int_{\lambda}^{\pi}|\varphi(\theta-t)-T_{2^n}(\theta-t)|^p w^p(\theta-t)\sin(\theta-t)d\theta]^{\frac{1}{p}} .$$

Bëjmë zëvendësimin $u = \theta - t$ dhe duke pasur parasysh që $0 < t < \mu < \lambda$, kemi:

$$I_2^1 \leq C_{12}[\int_{\lambda-t}^{\pi-t}|\varphi(u)-T_{2^n}(u)|^p w^p(u)\sin u\, du]^{\frac{1}{p}} \leq C_{12}E_{2^n}(f)_{p,\alpha,\beta} .$$

Vlerësojmë integralin I_2^3 :

$$I_2^3 = [\int_{\lambda}^{\pi}|T_{2^n}(\theta-t)-T_{2^n}(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_{\lambda}^{\pi} \int_{o}^{t}|T'_{2^n}(\theta-u)\sin(\theta-u)du|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, kemi:

$$I_2^3 < C_{13} \int_0^t \left[\int_\lambda^\pi |T'_{2^n}(\theta-u)\sin(\theta-u)|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du \, .$$

Zbatojmë jobarazimin (1.2), fitojmë:

$$I_2^3 < C_{14} \int_0^t \left[\int_\lambda^\pi |T'_{2^n}(\theta-u)\sin(\theta-u)|^p w^p(\theta-u)\sin(\theta-u)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du \, .$$

Bëjmë zëvendësimin $v = \theta - u$, ku $0 < u < t < \lambda$, kemi:

$$I_2^3 < C_{14} \int_0^t \left[\int_{\lambda-u}^{\pi-u} |T'_{2^n}(v)\sin v|^p w^p(v)\sin v \, dv\right]^{\frac{1}{p}} <$$

$$< C_{14} \int_0^t \left[\int_0^\pi |T'_{2^n}(v)\sin v|^p w^p(v)\sin v \, dv\right]^{\frac{1}{p}} <$$

$$< C_{14} t \left[\int_0^\pi |T'_{2^n}(v)\sin v|^p w^p(v)\sin v \, dv\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Tani me shqyrtime analoge sikurse tek I_1^3, fitojmë:

$$I_2^3 < C_{15} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} E_s(f)_{p,\alpha,\beta} \, .$$

Kështu teorema u vërtetua për $1 \leq p < \infty$. Për $p = \infty$ teorema vërtetohet në mënyrë analoge.

2.2. K - FUNKSIONELA DHE PËRGJITHËSIMI I MODULIT TE VAZHDUESHMERISË

Do të përkufizojmë K - funksionelën e cila vërtetohet se është ekuivalente me modulin e përgjithshëm të vazhdueshmërisë.

Le të jetë $\Lambda_{p,\alpha,\beta}$ bashkësia e funksioneve $g(x)$ - absolutisht të vazhdueshme në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$ dhe të tillë që $g'(x)\sqrt{1-x^2} \in L_{p,\alpha,\beta}$, $g(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$.

Përkufizimi 2.1. Për funksionet $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, $1 < p < \infty$, K - funksionelën e përkufizojmë në këtë mënyrë:

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{g(x)\in\Lambda_{p,\alpha,\beta}} [\|f(x)-g(x)\|_{p,\alpha,\beta} + \|g'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta}]$$

Teorema 2.2. Le të jetë $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, $1 < p < \infty$, $\alpha > -\frac{1}{2p}$, $\beta > -\frac{1}{2p}$. Atëherë ekzistojnë konstantet A_1 dhe A_2 që nuk varen nga $f(x)$ dhe δ të tilla që:

$$A_1\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} < K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} < A_2\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$$

Vërtetimi: Le të jetë $g(x) \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}$, atëherë kemi:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{0<t<\delta} \left\{ [\int_0^{\pi-\lambda} |f(\cos(\theta+t))-f(\cos\theta)|^p w^p(\theta)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} + [\int_{\lambda}^{\pi} |f(\cos(\theta-t))-f(\cos\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} \right\} = J_1 + J_2$$

Vlerësojmë integralin J_1:

$$J_1 = [\int_0^{\pi-\lambda} | f(\cos(\theta+t)) - g(\cos(\theta+t)) + g(\cos(\theta+t)) - g(\cos\theta) +$$

$$+ g(\cos\theta) - f(\cos\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} \leq [\int_0^{\pi-\lambda} | f(\cos(\theta+t)) -$$

$$- g(\cos(\theta+t))|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} + [\int_0^{\pi-\lambda} | f(\cos\theta) - g(\cos\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_0^{\pi-\lambda} | g(\cos(\theta+t)) - g(\cos\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} = J_1^1 + J_1^2 + J_1^3.$$

Është e qartë se $J_1^2 \leq \| f(x) - g(x)\|_{p,\alpha,\beta}$.

Shqyrtojmë J_1^1:

$$J_1^1 = [\int_0^{\pi-\lambda} | f(\cos(\theta+t)) - g(\cos(\theta+t))|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}}$$

Zbatojmë jobarazimin (1.1), kemi:

$$J_1^1 \leq A_3[\int_0^{\pi-\lambda} | f(\cos(\theta+t)) - g(\cos(\theta+t))|^p w^p(\theta+t)\sin(\theta+t)d\theta]^{\frac{1}{p}}$$

Bëjmë zëvendësimin $u = \theta+t$ dhe meqë $0 < t < \mu < \lambda$, kemi:

$$J_1^1 \leq A_4[\int_t^{\pi-\lambda+t} | f(\cos u) - g(\cos u)|^p w^p(u)\sin u\, du]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq A_4 [\int_0^{\pi} | f(\cos u) - g(\cos u)|^p w^p(u)\sin u\, du]^{\frac{1}{p}} = A_4 \| f(x) - g(x)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Vlerësojmë J_1^3:

$$J_1 = [\int_0^{\pi-\lambda} | g(\cos(\theta+t)) - g(\cos\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\int_0^{\pi-\lambda} \left|\int_0^t g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)du\right|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, fitojmë:

$$J_1^3 < A_5 \int_0^t \left[\int_0^{\pi-\lambda} |g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du.$$

Zbatojmë, lemën 1.1, kemi:

$$J_1^3 < A_6 \int_0^t \left[\int_0^{\pi-\lambda} |g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)|^p w^p(\theta+u)\sin(\theta+u)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du .$$

Bëjmë zëvendësimin $v = \theta+u$, kemi:

$$J_1^3 < A_7 \int_0^t \left[\int_u^{\pi-\lambda+u} |g'(\cos v)\sin v|^p w^p(v)\sin v\, dv\right]^{\frac{1}{p}} du <$$

$$< A_7 \int_0^t \left[\int_0^{\pi} |g'(\cos v)\sin v|^p w^p(v)\sin v\, dv\right]^{\frac{1}{p}} du <$$

$$< A_7 t \left[\int_0^{\pi} |g'(\cos v)\sin v|^p w^p(v)\sin v\, dv\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Pasi që $0<t < \mu < \delta$, kemi:

$$J_1^3 < A_7\delta \left[\int_0^{\pi} |g'(\cos v)\sin v|^p w^p(v)\sin v\, dv\right]^{\frac{1}{p}} < A_7\delta \| g'(z)\sqrt{1-z^2}\|_{p,\alpha,\beta} .$$

Në mënyrë analoge vlerësohet edhe J_2. Kështu është vërtetuar jobarazimi:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} < A_8 K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} \tag{2.5}$$

Të vërtetojmë tani jobarazimin e anasjelltë:

Le të jetë $n = 1,2, \ldots,$ shqyrtojmë:

$$\mathcal{K}_n = \int_{\lambda}^{\pi-\lambda} |2n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta-t)]dt|^p d\theta^{\frac{1}{p}}$$

ku, $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ dhe $w(\theta) = (\sin\frac{\theta}{2})^{2\alpha}(\cos\frac{\theta}{2})^{2\beta}$.

Në qoftë se në integralin $\mathcal{K}_n$ zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, fitojmë:

$$\mathcal{K}_n \leq 2n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\int_{\lambda}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta-t)|^p d\theta]^{\frac{1}{p}} dt.$$

Zbatojmë jobarazimin (1.3), kemi:

$$\mathcal{K}_n \leq A_g n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\int_{\lambda}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta-t)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} dt \leq$$

$$\leq A_g n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\int_{\lambda}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)+\varphi(\theta)-\varphi(\theta-t)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} dt \leq$$

$$\leq A_g n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\int_{\lambda}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_{\lambda}^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta-t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} dt \leq A_g \omega(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta}.$$

Meqë $\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} < \infty$, atëherë rrjedh: $\mathcal{K}_n < \infty$. Pra, ekziston θ_n, $\lambda < \theta_n < \pi-\lambda$ e tillë që:

$$\left|2n\int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}}[\varphi(\theta_n+t)-\varphi(\theta_n-t)]dt\right| \leq A_g\omega(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} \qquad (2.6)$$

Shenojmë:

$$\rho_n = 2n\int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}}[\varphi(\theta_n+t)-\varphi(\theta_n-t)]dt.$$

Shqyrtojmë funksionin:

$$\varphi_n(\theta) = \begin{cases} 2n\int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}}\varphi(\theta+t)dt, & 0 \leq \theta \leq \theta_n \\ 2n\int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}}\varphi(\theta-t)dt+\rho_n, & \theta_n \leq \theta \leq \pi \end{cases} \qquad (2.7)$$

Funksioni $\varphi_n(\theta)$ e shenojmë në formën:

$$\varphi_n(\theta) = \begin{cases} 2n\left[\int_0^{\theta+n^{-1}}\varphi(t)dt - \int_0^{\theta+(2n)^{-1}}\varphi(t)dt\right], & 0 \leq \theta \leq \theta_n \\ 2n\left[\int_0^{\theta-(2n)^{-1}}\varphi(t)dt - \int_0^{\theta-(n)^{-1}}\varphi(t)dt\right]+\rho_n, & \theta_n \leq \theta \leq \pi \end{cases} \qquad (2.8)$$

Nga formula (2.8) shihet se funksioni $\varphi_n(\theta)$ në çdo segment $[c,d] \subset (0,\theta_n) \cup (\theta_n,\pi)$ është paraqitur si diferencë e dy integraleve të pacaktuar të funksionit të integrueshëm $\varphi(t)$. Prandaj, funksioni $\varphi_n(\theta)$ është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[c,d] \subset (0,\theta_n) \cup (\theta_n,\pi)$. Meqë funksioni $\varphi_n(\theta)$ është i vazhdueshëm edhe në pikën $\theta = \theta_n$, atëherë ai është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[c,d] \subset (0,\pi)$. Pasi që funksioni $\varphi_n(\theta)$ është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[c,d] \subset (0,\pi)$ atëherë funksioni $\psi_n(x) = \varphi_n(\arccos x)$ është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$.

Shqyrtojmë tani integralin: $J = \|\psi_n(x) - f(x)\|_{p,\alpha,\beta}$. Pra, integralin:

$$J = \Big[\int_{-1}^{1} |\psi_n(x) - f(x)|^p (1-x)^{\alpha p} (1+x)^{\beta p} dx\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Bëjmë zëvendësimin $x = \cos\theta$, kemi:

$$J = \Big[\int_0^{\pi} |\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta\Big]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \Big[\int_0^{\theta_n} |\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int_{\theta_n}^{\pi} |\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Zbatojmë barazimin (2.7), fitojmë:

$$J = \int_0^{\theta_n} \Big| 2n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\varphi(\theta+t) - \varphi(\theta)] dt \Big|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \int_{\theta_n}^{\pi} \Big| 2n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\varphi(\theta-t) - \varphi(\theta)] dt \Big|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \Big[\int_{\theta_n}^{\pi} |\rho_n|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta\Big]^{\frac{1}{p}} = J^1 + J^2 + J^3.$$

Vlerësojmë integralin J^1:

$$J^1 = \int_0^{\theta_n} \Big| 2n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} [\varphi(\theta+t) - \varphi(\theta)] dt \Big|^p w^p(\theta) \sin\theta \, d\theta^{\frac{1}{p}}$$

Zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskıt, fitojmë:

$$J^1 < 2n \int_{(2n)^{-1}}^{n^{-1}} \left[\int_0^{\theta_n} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} dt.$$

Pasi që $\theta_n < \pi-\lambda$ dhe duke u bazuar në vetit e përgjithësimit të modulit të vazhdueshmërisë, kemi:

$$J^1 < A_{10}\, \tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} .$$

Në mënyrë analoge shqyrtohet edhe J^2, d.m.th. vërtetohet jobarazimi:

$$J^2 < A_{11}\, \tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} .$$

Shqyrtojmë tani integralin J^3.

$$J^3 = \left[\int_{\theta_n}^{\pi} |\rho_n|^p w^p(\theta)\sin\theta \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

Në bazë të jobarazimit (2.6), kemi:

$$J^3 < A_{12}\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} .$$

Kështu është vërtetuar jobarazimi:

$$J = \|\psi_n(x)-f(x)\|_{p,\alpha,\beta} < A_{13}\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} \tag{2.9}$$

Meqë funksioni $\psi_n(x)$ është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$, atëherë ky funksion ka derivat të rendit të parë në segmentin $[a,b]$.

Shqyrtojmë tani: $R = \|\psi_n'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta}$ pra kemi:

$$R = [\int_{-1}^{1} |\psi_n'(x)\sqrt{1-x^2}|^p (1-x)^{\alpha p}(1+x)^{\beta p}\, dx]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_{-1}^{1} |\psi_n'(\text{arc } \cos x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}|^p (1-x)^{\alpha p}(1+x)^{\beta p}\, dx]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_{-1}^{1} |\varphi_n'(\text{arc } \cos x)|^p (1-x)^{\alpha p}(1+x)^{\beta p}\, dx]^{\frac{1}{p}} .$$

Pas zëvendësimit $x = \cos\theta$, kemi:

$$R = [\int_{0}^{\pi} |\varphi_n'(\theta)|^p (1-\cos\theta)^{p\alpha}(1+\cos\theta)^{p\beta} \sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_{0}^{\pi} |\varphi_n'(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} \leq [\int_{0}^{\theta_n} |\varphi_n'(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_{\theta_n}^{\pi} |\varphi_n'(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë barazimin (2.7), kemi:

$$R = 2n[\int_{0}^{\theta_n} |\varphi(\theta+\frac{1}{n}) - \varphi(\theta+\frac{1}{2n})|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ 2n[\int_{\theta_n}^{\pi} |\varphi(\theta-\frac{1}{n}) - \varphi(\theta-\frac{1}{2n})|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2n\left[\int_0^{\theta_n} |\varphi(\theta+\tfrac{1}{n})-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + 2n\left[\int_0^{\theta_n} |\varphi(\theta+\tfrac{1}{2n}) -\right.$$

$$\left.- \varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + 2n\left[\int_{\theta_n}^{\pi} |\varphi(\theta-\tfrac{1}{n})-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ 2n\left[\int_{\theta_n}^{\pi} |\varphi(\theta-\tfrac{1}{2n})-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Meqë $\lambda < \theta_n < \pi-\lambda$, kemi:

$$R \leq A_{14} n\left[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+\tfrac{1}{n})-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\lambda}^{\pi} |\varphi(\theta-\tfrac{1}{n}) -\right.$$

$$\left.- \varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+\tfrac{1}{2n})-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left[\int_{\lambda}^{\pi} |\varphi(\theta-\tfrac{1}{2n})-\varphi(\theta)|^p w^p(\theta)\sin\theta\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \leq A_{15} n\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta}.$$

Pra, është vërtetuar jobarazimi:

$$\|\psi_n'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta} \leq A_{15} n\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta}. \tag{2.10}$$

Shqyrtojmë tani K - funksionelën. Le të jetë δ e të tillë që $\frac{1}{n+1} < \delta \leq \frac{1}{n}$, atëherë

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} \leq K(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} = [\|f(x)-\psi_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{n}\|\psi_n'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta}]. \tag{2.11}$$

Për funksionin $\psi_n(x)$ janë vërtetuar jobarazimet (2.9) dhe (2.10). Zbatojmë këto jobarazime në jobarazimin (2.11), fitojmë:

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} \leqslant A_{16}\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} \leqslant A_{16}\tilde{\omega}(f,\frac{2}{n+1})_{p,\alpha,\beta} \leqslant$$

$$\leqslant A_{17}\tilde{\omega}(f,\frac{1}{n+1})_{p,\alpha,\beta} \leqslant A_{17}\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} .$$

Pra u vërtetua jobarazimi i anasjelltë, përkatësisht u vërtetua në tërësi teorema 2.2.

2.3. TEOREMA E DREJTË PËR MODULIN E PËRGJITHSHËM TË VAZHDUESHMËRISË

Teoremë të drejtë në teorinë e përafrimeve e quajmë çdo teoremë e cila e përcakton vlerësimin e devijimit në çfarëdo mënyre të funksionit (ose klasës së funksioneve) nga polinomet ose çfarëdo elementesh tjerë më të cilët ky funksion pasqyrohet në një varg të çfarëdoshëm të operatorëve (në teorinë e përafrimeve më së shpeshti të polinomeve).

Para se të vërtetojmë teoremën e drejtë do të vërtetojmë teoremën e cila përcakton vlerësimin e përafrimit më të mirë të funksionit me polinome algjebrike me anë të normës së derivatit të atij funksioni:

Teorema 2.3. Në qoftë se funksioni $g(x) \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}$ ku $\alpha > -\frac{1}{2p}$, $\beta > -\frac{1}{2p}$ për $1 \leqslant p < \infty$, dhe $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ për $p = \infty$, atëherë vlenë jobarazimi:

$$E_n(g)_{p,\alpha,\beta} < \frac{C}{n} \| g'(x) \sqrt{1-x^2} \|_{p,\alpha,\beta} .$$

Vërtetimi: Për secilin n zgjedhim numrat natyralë m dhe q të tillë që të plotësohet kondita:

$$\frac{n}{q+2} < m < \frac{n}{q+2} + 1 \tag{1.13}$$

Shqyrtojmë polinomin $Q(x)$ e përkufizuar në lemën 1.3. Polinomi $Q(x)$ është i shkallës jo më të lartë se $(q+2)(m-1) < n$. Për të gjithë n që plotësojnë konditën (1.13) në vend të polinomit $P_n(x)$ marrim në konsiderim polinomin $Q(x)$. Atëherë:

$$S(x) = g(x) - P_n(x) = g(x) - \int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu) g(x,t,\nu,\mu) \cdot$$

$$\cdot (\sin \frac{t}{2})^{2\nu+1} (\cos \frac{t}{2})^{2\mu+1} dt .$$

Tani, do të dallojmë këto raste: 1) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$; 2) $\alpha = \beta > -\frac{1}{2p}$; 3) $\alpha > \beta = -\frac{1}{2p}$; 4) $\alpha > \beta > -\frac{1}{2p}$; 5) $\beta > \alpha > -\frac{1}{2p}$; 6) $\beta > \alpha = -\frac{1}{2p}$.

1) Në këtë rast polinomin $Q(x)$ e marrim të tillë që $\nu = \mu = \frac{1}{2}$, pra kemi:

$$S(x) = g(x) - \int_0^\pi k(t,m,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) g(x,t,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) dt$$

Zëvendësojmë $x = \cos\theta$, kemi:

$$S(\cos\theta) = g(\cos\theta) - \int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})g(\cos\theta,t,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})dt$$

Në bazë të përkufizimit të funksionit të translacionit të përgjithshëm $g(\cos\theta,t,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ (shih faqën 27), kemi:

$$S(\cos\theta) = g(\cos\theta) - \int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}[g(\cos\theta\ \cos t+\sin\theta\sin t)+$$

$$+ g(\cos\theta\ \cos t-\sin t\ \sin\theta)]dt = g(\cos\theta) - \int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}[g(\cos(\theta-t))+$$

$$+ g(\cos(\theta+t))]dt = -\frac{1}{2}\int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})[g(\cos(\theta+t))-2g(\cos\theta) +$$

$$+ g(\cos(\theta-t))]dt = -\frac{1}{2}\int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\int_0^t[g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u) -$$

$$- g'(\cos(\theta-u))\sin(\theta-u)]du\ dt .$$

Shqyrtojmë tani normën: $\|S(x)\|_{p,\alpha,\beta} = \|g(x)-P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta}$.

Pra, për $\alpha = -\frac{1}{2p}$, $\beta = -\frac{1}{2p}$ dhe $x = \cos\theta$, kemi:

$$S_1 = \|S(x)\|_{p,\alpha,\beta} = [\int_0^\pi |g(\cos\theta)-P_n(\cos\theta)|^p(1-\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}(1+\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_0^\pi |g(\cos\theta)-P_n(\cos\theta)|^p d\theta]^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2}[\int_{-\pi}^{\pi} |g(\cos\theta)-P_n(\cos\theta)|^p d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{2}[\int_{-\pi}^{\pi}|\frac{1}{2}\int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\int_0^t [g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u) -$$

$$- g'(\cos(\theta-u))\sin(\theta-u)]du\ dt|^p d\theta]^{\frac{1}{p}}.$$

Zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, kemi:

$$S_1 < \frac{1}{4}\int_0^{\pi} k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\int_0^{t}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}|g'(\cos(\theta+u)\sin(\theta+u) -$$

$$- g'(\cos(\theta-u))\sin(\theta-u)|^{p}\,d\theta\Big]^{\frac{1}{p}}du\,dt <$$

$$< \frac{1}{2}\int_0^{\pi} k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\int_0^{t}\Big[\Big|\int_{-\pi}^{\pi} g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)|^{p}d\theta\Big]^{\frac{1}{p}}\,du\,dt.$$

Bëjmë zëvendësimin $v = \theta+u$ në integralin e mbrendshëm, prandaj kemi:

$$S_1 < \frac{1}{2}\int_0^{\pi} k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\int_0^{t}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}|g'(\cos v)\sin v|^{p}dv\Big]^{\frac{1}{p}}\,du\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})t\,dt\Big[\int_0^{\pi}|g'(\cos v)\sin v|^{p}\,dv\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Zbatojmë lemën 1.3, kemi:

$$S_1 < \frac{C_1}{n}\Big[\int_0^{\pi}|g'(\cos v)\sin v|^{p}\,dv\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Meqë:

$$\|g'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta} = \Big[\int_{-1}^{1}|g'(x)\sqrt{1-x^2}|^{p}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx\Big]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \Big[\int_{-1}^{1}|g'(x)|^{p}(1-x)^{\frac{p-1}{2}}(1+x)^{\frac{p-1}{2}}dx\Big]^{\frac{1}{p}} = \Big[\int_0^{\pi}|g'(\cos\theta)|^{p}|(\sin\theta)|^{p}\,d\theta\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Kemi:

$$S_1 < \frac{C_1}{n}\|g'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Kështu teorema u vërtetua për $\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$ dhe $1 < p < \infty$.

Le të jetë $p = \infty$, atëherë $\alpha = \beta = 0$. Në këtë rast, kemi:

$$S_1 = \max_{0<\theta<\pi} |g(\cos\theta)-P_n(\cos\theta)| = \max_{-\pi<\theta<\pi} |g(\cos\theta)-P_n(\cos\theta)| =$$

$$= \max_{-\pi<\theta<\pi} \left|\frac{1}{2}\int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\int_0^t [g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)-g'(\cos(\theta-u))\sin(\theta-u)]du\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \int_0^t \max_{-\pi<\theta<\pi} |g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)|du\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^\pi k(t,m,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})t\,dt \max_{-\pi<\theta<\pi} |g'(\cos\theta)\sin\theta| \leq \frac{C_2}{n}\|g'(x)\sqrt{1-x^2}\|_C.$$

2) Për $\alpha = \beta > -\frac{1}{2p}$, polinomin $Q(x)$ e marrim të tillë që $\alpha = \nu = \mu > -\frac{1}{2}$. Në këtë rast kemi:

$$S(x) = g(x)-\int_0^\pi k(t,m,\alpha,\alpha)g(x,t,\alpha,\alpha)(\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1}(\cos\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1}dt$$

$$= \int_0^\pi k(t,m,\alpha,\alpha)[g(x)-g(x,t,\alpha,\alpha)](\tfrac{1}{2}\sin t)^{2\alpha+1}dt = \int_0^\pi k(t,m,\alpha,\alpha)[g(x)$$

$$-\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^\pi g(x\cos t+\cos\lambda\sin t\sqrt{1-x^2})(\sin\lambda)^{2\alpha}d\lambda](\tfrac{1}{2}\sin t)^{2\alpha+1}dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^\pi k(t,m,\alpha,\alpha)\int_0^\pi [g(x)-g(x\cos t+\cos\lambda\sin t\sqrt{1-x^2})](\sin\lambda)^{2\alpha}d\lambda\,\cdot$$

$$\cdot\,(\tfrac{1}{2}\sin t)^{2\alpha+1}dt = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^\pi k(t,m,\alpha,\alpha)\int_0^\pi[\int_0^t g'(x\cos u+\cos\lambda\sin u\sqrt{1-x^2})\cdot$$

$$\cdot(x\sin u-\cos\lambda\cos u\sqrt{1-x^2})du](\sin\lambda)^{2\alpha}d\lambda(\frac{1}{2}\sin t)^{2\alpha+1}dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^{\pi}k(t,m,\alpha,\alpha)(\frac{1}{2}\sin t)^{2\alpha+1}(\int_0^{\pi}(\int_0^{t}g'(R)R_1du)\cdot(\sin\lambda)^{2\alpha}d\lambda)dt ,$$

ku $R = x\cos u+\cos\lambda\sin u\sqrt{1-x^2}$, $R_1 = x\sin u-\cos\lambda\cos u\sqrt{1-x^2}$. Shqyrtojmë tani normën $R_2 = \|g(x)-P_n(x)\|_{p,\alpha,\alpha}$. Pra:

$$S_2 = [\int_{-1}^{1}|g(x)-P_n(x)|^{p}(1-x)^{\alpha p}(1+x)^{\alpha p}dx]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_{-1}^{1}|g(x)-P_n(x)|^{p}(1-x^2)^{\alpha p}dx]^{\frac{1}{p}} = [\int_{-1}^{1}|S(x)|^{p}(1-x^2)^{\alpha p}dx]^{\frac{1}{p}}.$$

Po të zëvendësojmë në vend të $S(x)$ shprehjen e mësipërme do të kemi:

$$S_2<C_3[\int_{-1}^{1}|\int_0^{\pi}k(t,m,\alpha,\alpha)(\sin t)^{2\alpha+1}[\int_0^{\pi}(\int_0^{t}g'(R)R_1du)\sin^{2\alpha}\lambda d\lambda)dt|^{p}(1-x^2)^{\alpha p}dx]^{\frac{1}{p}}$$

Tani zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, kemi:

$$S_2<C_4\int_0^{\pi}k(t,m,\alpha,\alpha)(\sin t)^{2\alpha+1}\int_0^{t}[\int_0^{\pi}\|g'(R)R_1(1-x^2)^{\alpha}\|_p(\sin\lambda)^{2\alpha}du]d\lambda dt.$$

Zbatojmë jobarazimin e Holderit, marrim:

$$S_2 < C_5\int_0^{\pi}k(t,m,\alpha,\alpha)(\sin t)^{2\alpha+1}(\int_0^{t}I_1(u)du)dt$$

ku

$$I_1^p(u) = \int_0^{\pi}\int_{-1}^{1}|g'(R)R_1(1-x^2)^{\alpha}(\sin\lambda)^{2\alpha}|^{p}\,dx\,d\lambda$$

Në qoftë se zëvendësojmë $y = \cos\lambda$, kemi:

$$I_1^p(u) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|g'(x\cos u+y\sin u\sqrt{1-x^2})(x\sin u-y\cos u\sqrt{1-x^2})|^p(1-x^2)^{\alpha p}(1-y^2)^{\alpha p-\frac{1}{2}}dxdy\ .$$

Bëjmë zëvendësimin e ndryshoreve sipas formulave:

$$z = x\ \cos u+y\ \sin u\sqrt{1-x^2}$$

$$v = \frac{x\ \sin u+y\ \cos u\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)+(x\ \sin u-y\ \cos u\sqrt{1-x^2})^2}}$$

atëherë do të kemi:

$$I_1^p = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|g'(z)\sqrt{1-z^2}v|^p(1-z^2)^{\alpha p}(1-v^2)^{\alpha p-\frac{1}{2}}dz\ dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}|g'(z)\sqrt{1-z^2}|^p(1-z^2)^{\alpha p}dz\int_{-1}^{1}v^p(1-v^2)^{\alpha p-\frac{1}{2}}dv <$$

$$< C_6\int_{-1}^{1}|g'(z)\sqrt{1-z^2}|^p(1-z^2)^{\alpha p}dz.$$

Pra,

$$S_2 < C_7\int_0^{\pi}k(t,m,\alpha,\alpha)(\sin t\ )^{2\alpha+1}\int_0^{t}[\int_{-1}^{1}|g'(z)\sqrt{1-z^2}|^p(1-z^2)^{\alpha p}dz]^{\frac{1}{p}}du\ dt \leq$$

$$< C_7\int_0^{\pi}k(t,m,\alpha,\alpha)(\sin t)^{2\alpha+1}t\ dt[\int_{-1}^{1}g'(z)\sqrt{1-z^2}|^p(1-z^2)^{\alpha p}dz]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{C_8}{n}\|g'(z)\sqrt{1-z^2}\|_{p,\alpha,\alpha}\ .$$

Teorema u vërtetua për $\alpha = \beta \geq -\frac{1}{2p}$.

Për $p = \infty$, $\alpha = \beta \geqslant 0$ teorema vërtetohet në mënyrë analoge sikurse në rastin e mëparshëm.

3) Le të jetë $\alpha > \beta = -\frac{1}{2p}$. Në këtë rast polinomin $Q(x)$ e zgjedhim të tillë që $\alpha \geqslant \nu$, $\beta \geqslant \mu$ dhe $\nu > \mu = -\frac{1}{2}$.

Pra, kemi:

$$S(x) = g(x) - \int_0^\pi k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2}) g(x,t,\alpha,-\tfrac{1}{2}) (\sin t)^{2\alpha+1}\, dt =$$

$$= \int_0^\pi k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2}) [g(x) - g(x,t,\alpha,-\tfrac{1}{2})] (\sin \tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^\pi k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2}) \int_{-1}^1 [g(x) - g(x\cos t + r \sin t \sqrt{1-x^2} -$$

$$- (1-r^2)(1-x)\sin^2 \tfrac{t}{2})] (1-r^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\sin \tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} dr\, dt .$$

Zëvendësojmë $x = \cos\theta$, fitojmë

$$g(x) - g(x\cos t + r\sin t\sqrt{1-x^2} - (1-r^2)(1-x)\sin^2 \tfrac{t}{2}) = -2\int_0^t g'(2v^2-1) v v_1 du$$

ku $v = z \cos \frac{u}{2} + r\sqrt{1-z^2} \sin \frac{u}{2}$, $v_1 = -z \sin \frac{u}{2} + r\sqrt{1-z^2} \cos \frac{u}{2}$.

Në këtë rast, kemi:

$$S(x) = \frac{2}{\gamma(\alpha)} \int_0^\pi k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2}) \int_{-1}^1 \int_0^t g'(2v^2-1) v v_1 du (1-r^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} dr\, dt.$$

Shqyrtojmë tani normën:

$$S_3 = \| S(x) \|_{p,\alpha,\beta} = \| g(x) - P_n(x) \|_{p,\alpha,-\frac{1}{2p}} .$$

Pra, në barazimin:

$$S_3 = \left\| \frac{2}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\pi} K(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2}) \int_{-1}^{1} \int_0^{t} g'(2v^2-1)vv_1 du (1-r^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} dr\, dt \right\|_{p,\alpha,-\frac{1}{2p}},$$

zbatojmë më parë jobarazimin e Minkovskit e pastaj jobarazimin e Holderit, fitojmë:

$$S_3 = \frac{2}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2})(\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} \int_0^{t} \left\| \int_{-1}^{1} g'(2v^2-1)vv_1(1-r^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dr \right\|_{p,\alpha,-\frac{1}{2p}} du dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2})(\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} \int_0^{t} \Big[\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |g'(2v^2-1)v_1 v|^{p} (1-r^2)^{\alpha p-\frac{1}{2}} .$$

$$\cdot (1-x)^{\alpha p}(1+x)^{-\frac{1}{2}} dx dr \Big]^{\frac{1}{p}} du\ dt.$$

Bëjmë zëvendësimin $x = \cos\theta$, $z = \cos\frac{\theta}{2}$, kemi:

$$S_3 \leq \frac{2}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2})(\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} \int_0^{t} \Big[\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |g'(2v^2-1)vv_1|^{p} .$$

$$\cdot (1-r^2)^{\alpha p-\frac{1}{2}} (1-z^2)^{\alpha p} dz\ dr \Big]^{\frac{1}{p}} du\ dt\ .$$

Në integralin e mbrendshëm të dyfishtë bëjmë zëvendësimin e ndryshorëve sipas formulave:

$$z = v\cos\frac{u}{2} + R\sqrt{1-v^2}\sin\frac{u}{2}$$

$$r = \frac{v\sin\frac{u}{2} - R\sqrt{1-v^2}\cos\frac{u}{2}}{\sqrt{(1-v^2)(1-R^2)-(v\sin\frac{u}{2} - R\sqrt{1-v^2}\cos\frac{u}{2})^2}}$$

dhe duke pasur parasysh që $|v_1| \leq \sqrt{1-v^2}$, fitojmë:

$$S_3 < C_9 \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2})(\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} t [\int_0^1 |g'(2v^2-1)|^p (1-v^2)^{\alpha p+\frac{p}{2}} |v|^p dv]^{\frac{1}{p}} du\, dt .$$

Pas zëvendësimit $v = \sqrt{\frac{w+1}{2}}$, kemi:

$$S_3 < C_9 \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2})(\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} \int_0^t [\int_{-1}^1 |g'(w)|^p (1-w)^{\alpha p+\frac{p}{2}} (1+w)^{\frac{p-1}{2}} dw]^{\frac{1}{p}} du\, dt \leq$$

$$\leq C_9 \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2})(\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} t\, dt [\int_{-1} |g'(w)\sqrt{1-w^2}|^p (1-w)^{\alpha p} (1+w)^{-\frac{1}{2}} dw]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{C_{10}}{n} \| g'(w)\sqrt{1-w^2}\|_{p,\alpha,-\frac{1}{2p}} .$$

Teorema u vërtetua për $\alpha > \beta = -\frac{1}{2p}$ dhe $1 \leq p < \infty$. Për $p = \infty$, $\alpha > \beta = 0$, kemi:

$$S_3 = |S(x)(1-x)^{\alpha}| \cdot |\int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2}) \int_{-1}^1 \int_0^1 g'(2v^2-1) v v_1 \cdot$$

$$\cdot (1-r^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} (1-x)^{\alpha} du\, dr\, dt .$$

Meqë $|v_1| < \sqrt{1-v^2}$, $(1-r^2)(1-x) < 2(1-v^2)$, atëherë shenojmë $w = 2v^2-1$, prandaj kemi:

$$S_3 < C_{11} \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,-\tfrac{1}{2}) \int_0^t \int_{-1}^1 g'(w)(1-w^2)^{\frac{1}{2}}(1-w)^{\alpha} (1-w^2)^{-\frac{1}{2}} (\sin\tfrac{t}{2})^{2\alpha+1} dw\, dt \leq$$

$$\leq C_{11}\|g'(w)\sqrt{1-w^2}\|_{\infty,\alpha,o}\int_0^\pi k(t,m,\alpha,o)t(\sin\frac{t}{2})^{2\alpha+1}dt \leq$$

$$\leq \frac{C_{11}}{n}\|g'(w)\sqrt{1-w^2}\|_{\infty,\alpha,o} .$$

Nga jobarazimi i fundit rrjedh vërtetimi i teoremës për $p=\infty$ dhe $\alpha > \beta = 0$.

4) Le të jetë $\alpha > \beta > -\frac{1}{2p}$. Në këtë rast polinomin $Q(x)$ e marrim të tillë që $\nu_1 > \mu > -\frac{1}{2}$, prandaj kemi:

$$S(x) = \int_0^\pi k(t,m,\nu_1,\mu)[g(x)-g(t,x,\nu_1,\mu)](\sin\frac{t}{2})^{2\nu_1+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma(\nu_1,\mu)}\int_0^\pi k(t,m,\nu_1,\mu)\int_0^1\int_{-1}^1[g(x)-g(x\cos t+rz\sin t\sqrt{1-x^2}-$$

$$-(1-r^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2})](1-r^2)^{\nu_1-\mu-1}r^{\mu+1}(1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}}dzdr(\sin\frac{t}{2})^{2\nu_1+1}\cdot$$

$$\cdot(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}dt = \frac{1}{\gamma(\nu_1,\mu)}\int_0^\pi k(t,m,\nu_1,\mu)(\int_0^1\int_{-1}^1(\int_0^t g'(y)y_1(1-r^2)^{\nu_1-\mu-1}\cdot$$

$$\cdot r^{2\mu+1}(1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}}(\sin\frac{t}{2})^{2\nu_1+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}du\,dz\,dr)dt .$$

ku, $y = x\cos u+rz\sin u\sqrt{1-x^2} - (1-r^2)(1-x)\sin^2\frac{u}{2}$

$y_1 = x\sin u-rz\cos u\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-r^2)(1-x)\sin u$.

Tani vlerësojmë normën: $S_4 = \|S(x)\|_{p,\alpha,\beta} = \|g(x)-P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta}\cdot$

Pra:

$$S_4 = \frac{1}{\gamma(\nu_1,\mu)} \int_0^{\pi} k(t,m,\nu_1,\mu) \int_0^{t} (\sin\frac{t}{2})^{2\nu_1+1} (\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1} \cdot$$

$$\cdot \| \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} f'(y) y_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-r^2)^{\nu_1-\mu-1} r^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dr dz \|_p du dt.$$

Tani dallojmë këto raste:

a) Shqyrtojmë më parë rastin $p = 1$. Në këtë rast zgjedhim numrat ν_1 dhe μ të tillë që $\nu_1 = \alpha$, $\mu = \beta$. Pra, kemi:

$$S_4 = \frac{1}{\gamma(\alpha,\beta)} \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,\beta) \int_0^{t} (\sin\frac{t}{2})^{2\alpha+1} (\cos\frac{t}{2})^{2\beta+1} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} \int_{-1}^{1} | g'(y) y_1 | \cdot$$

$$\cdot (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-r^2)^{\alpha-\beta-1} r^{2\beta+1} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2}} dx\, dz\, dr\, du\, dt\ .$$

Në intervalin e mbrendshëm të trefishtë bëjmë zëvendësimin e ndryshoreve sipas formulave të dhëna në lemën 1.4, kemi:

$$S_4 < \frac{c_{12}}{\gamma(\alpha,\beta)} \int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,\beta) \int_0^{t} (\sin\frac{t}{2})^{2\alpha+1} (\cos\frac{t}{2})^{2\beta+1} [\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} \int_{-1}^{1} | g'(y) \cdot$$

$$\cdot (1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}} (1+y)^{\beta+\frac{1}{2}} | (1-R^2)^{\alpha-\beta-1} R^{2\beta+1} (1-v^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dy\, dR\, dv] du\, dt <$$

$$< \frac{C_{12}}{\gamma(\alpha,\beta)} [\int_0^{\pi} k(t,m,\alpha,\beta) (\sin\frac{t}{2})^{2\alpha+1} (\cos\frac{t}{2})^{2\beta+1} t dt] \int_{-1}^{1} | g'(y) \sqrt{1-y^2} | \cdot$$

$$\cdot (1-y)^{\alpha} (1+y)^{\beta} dy < \frac{C_{13}}{n} \| g'(y) \sqrt{1-y^2} \|_{1,\alpha,\beta}\ .$$

b) Le të jetë tani $1 < p < \infty$ Në këtë rast zgjedhim numrat ν_1 dhe ϵ të tillë që $0 < \epsilon < \nu - \mu$ si dhe $\nu_1 = \alpha + \epsilon$ ndërsa $\mu = \beta$.

Në integralin:

$$S_4 = \frac{1}{\gamma(\nu_1,\mu)} \int_0^{\pi} k(t,m,\nu_1,\mu) \int_0^t (\sin \frac{t}{2})^{2\nu_1+1} (\cos \frac{t}{2})^{2\mu+1} \| \int_{-1}^{1} \int_0^1 g^{\prime}(y) y_1 \cdot$$

$$\cdot (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-r^2)^{\nu_1-\mu-1} r^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} drdz \|_p \, dudt,$$

Zbatojmë jobarazimin e Minkovskit, kemi:

$$S_4 = \frac{1}{\gamma(\nu_1,\mu)} \int_0^{\pi} k(t,m,\nu_1,\mu) \int_0^t (\sin \frac{t}{2})^{2\nu_1+1} (\cos \frac{t}{2})^{2\mu+1} I_1 \, dudt,$$

ku:

$$I_1 = \left\{ \int_{-1}^{1} [\int_{-1}^{1} \int_0^1 | g^{\prime}(y) y_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} | (1-r^2)^{\alpha+\epsilon-\beta-1} r^{2\beta+1} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2}} drdz]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \int_{-1}^{1} [\int_{-1}^{1} \int_0^1 | g^{\prime}(y) y_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-r^2)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2p}} r^{2\beta+\frac{1}{2p}} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2p}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1-r^2)^{\epsilon+\frac{1}{p}-1} r^{1-\frac{1}{p}} (1-z^2)^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}} dzdr |^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Në I_1 zbatojmë jobarazimin e Holderit, fitojmë:

$$I_1 < C_{13} \left\{ \int_{-1}^{1} [\int_{-1}^{1} \int_0^1 | g^{\prime}(y) y_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-r^2)^{\alpha-\beta-\frac{1}{p}} r^{2\beta+\frac{1}{p}} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2p}} |^p dzdrdx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$$\cdot \left\{ \int_{-1}^{1} \int_0^1 | (1-r^2)^{\epsilon+\frac{1}{p}-1} r^{1-\frac{1}{p}} (1-z^2)^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}} |^{p_1} dzdr \right\}^{\frac{1}{p_1}} <$$

$$< C_{14} \int_{-1}^{1} [\int_{-1}^{1} \int_{o}^{1} |g'(y) y_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-r^2)^{\alpha-\beta-\frac{1}{p}} r^{2\beta+\frac{1}{p}} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2p}} |^p dz dr dx]^{\frac{1}{p}}$$

ku, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1.$

Tani në integralin I_1 bëjmë zëvendësimin e ndryshoreve sipas formulave të dhëna në lemën 1,4, kemi:

$$I_1 < C_{14} [\int_{-1}^{1} \int_{o}^{1} \int_{-1}^{1} |g'(y)(1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}} (1+y)^{\beta+\frac{1}{2}} |^p (1-R^2)^{p(\alpha-\beta)-1} R^{2\beta p+1} \cdot$$

$$\cdot (1-v^2)^{\beta p-\frac{1}{2}} dy dR dv]^{\frac{1}{p}} < C_{15} \| g'(y)(1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}} (1+y)^{\beta+\frac{1}{2}} \|_p .$$

Prandaj kemi:

$$S_4 < C_{15} \int_{o}^{\pi} k(t,m,\nu_1,\mu) \int_{o}^{t} (\sin \frac{t}{2})^{2\nu_1+1} (\cos \frac{t}{2})^{2\mu+1} \| g'(y)\sqrt{1-y^2} \|_{p,\alpha,\beta} \, du dt <$$

$$< \frac{C_{16}}{n} \| g'(y) \sqrt{1-y^2} \|_{p,\alpha,\beta} .$$

c) Le të jetë $p = \infty$. Në këtë rast zgjedhim ϵ, ν_1, μ të tillë që: $0 < \epsilon < \nu_1 - \mu$, $\nu_1 = \alpha + \epsilon$, $\beta = \mu$. Në integralin:

$$S_4 < C_{18} \int_{o}^{\pi} k(t,m,\nu_1,\mu) \int_{o}^{t} (\sin \frac{t}{2})^{2\nu_1+1} (\cos \frac{t}{2})^{2\beta+1} \int_{-1}^{1} \int_{o}^{1} \| g'(y) y_1 \cdot$$

$$\cdot (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-r^2)^{\alpha+\epsilon-\beta-1} r^{2\beta+1} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2}} dr \, dz \|_C \, du \, dt.$$

E zbatojmë lemën 1.4, fitojmë:

$$S_4 < C_{18} \int_{o}^{\pi} k(t,m,\nu_1,\mu) \int_{o}^{t} (\sin \frac{t}{2})^{2\nu_1+1} (\cos \frac{t}{2})^{2\mu+1} \int_{-1}^{1} \int_{o}^{1} \| g'(y)(1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}} .$$

$$\cdot(1+y)^{\beta+\frac{1}{2}}(1-R^2)^{\alpha-\beta}R^{2\beta+1}(1-v^2)\, v\|_C(1-r^2)^{\epsilon-1}r(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}dr\,dz\,dv\,dt \leq$$

$$\leq C_{19}\int_0^{\pi}k(t,m,\nu_1,\mu)\int_0^{t}(\sin\tfrac{t}{2})^{2\nu_1+1}(\cos\tfrac{t}{2})^{2\mu+1}\|g'(y)\sqrt{1-y^2}(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}\|_C dt \leq$$

$$\leq \frac{C_{20}}{n}\|g'(y)\sqrt{1-y^2}\|_{\infty,\alpha,\beta}.$$

5) Le të jetë $\beta > \alpha > -\frac{1}{2p}$. Atëherë kemi:

$$I = [\int_{-1}^{1}|g(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}|^p\,dx]^{\frac{1}{p}} = [\int_{-1}^{1}|g(-x)(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}|^p\,dx]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [\int_{-1}^{1}|G(x)(1-x)^{\beta}(1+x)^{\alpha}|^p\,dx]^{\frac{1}{p}} = \|F(x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

ku $g(-x) = G(x)$. Meqë $G(x) \in L_{p,\beta,\alpha}$ dhe $\beta > \alpha > -\frac{1}{2p}$ atëherë zbatojmë rastin 4), d.m.th.

$$L_n(g)_{p,\alpha,\beta} \leq \|g(x)-P_n^*(x)\|_{p,\alpha,\beta} - \|g(-x)-P_n^*(-x)\|_{p,\alpha,\beta} -$$

$$= \|G(x)-P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} < \frac{C_{21}}{n}\|G'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta} = \frac{C_{21}}{n}\|g'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta}.$$

6) Në mënyrë analoge sikurse në rastin 5), me zëvendësimin e x-it me -x rasti 6) shëndrrohet në rastin 3). Pra teorema u vërtetua në tërsi.

Teorema 2.4. Le të jetë $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ ku $\alpha \geq -\frac{1}{2p}$, $\beta \geq -\frac{1}{2p}$, $1 < p < \infty$, atëherë vlenë jobarazimi:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)\omega(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} .$$

Vërtetimi: Le të jetë $g(x) \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}$. Shenojmë me $P_n(x)$-polinomin algjebrik të shkallës jo më të lartë se $n-1$ i cili është polinomi i përafrimit më të mirë për funksioni $g(x)$ në hapsirën $L_{p,\alpha,\beta}$. Prandaj, shenojmë:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq \| f(x)-P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)-g(x)+g(x)-P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} \leq$$

$$\leq \|f(x)-g(x)\|_{p,\alpha,\beta} + \|g(x)-P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \|f(x)-g(x)\|_{p,\alpha,\beta} + E_n(g)_{p,\alpha,\beta}$$

Tani zbatojmë teoremën 2.3 dhe duke pasur parasysh që ana e majtë e jobarazimit të mësipërm nuk varet nga $g(x)$, kemi:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leq \|f(x)-g(x)\|_{p,\alpha,\beta} + \frac{1}{n}\|g'(x)\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta}$$

Në bazë të teoremës 2.2 rrjedh, jobarazimi:

$$E_n(f)_{p,\,,} \leq C(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)\,\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta} .$$

Vërejtje 2.1. Në bazë të teoremës 2.1 dhe teoremës 2.4 rrjedh drejtëpërsëdrejti relacioni:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = O(\delta^{\gamma}) \Leftrightarrow E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = O(n^{-\gamma}) \ , \quad 0<\gamma<1$$

që paraqet njëherit karakteristikat e klasës $Lip(\gamma,p,\alpha,\beta)$.

Vërejtje 2.2. Për $p = 2$, $\lambda = \frac{3\pi}{8}$ teoremat 2.1 dhe 2.4 janë vërtetuar në punimin [29].

Vërejtje 2.3. Për $\lambda = 0$, moduli i tillë është përkufizuar në punimin [30] dhe janë vërtetuar teoremat analoge me teoremat e mësipërme.

III. TEOREMA E DREJTE DHE TEOREMA E ANASJELLTE PER MODULIN E VAZHDUESHMERISE ME TRANSLACION

Në këtë kapitull do të përkufizojmë një tip tjetër të modulit të vazhdueshmërisë me translacion dhe për një modul të tillë do të vërtetojmë jobarazimet analoge me jobarazimet (2.1) dhe (2.2).

Për funksionin $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ përkufizojmë modulin e vazhdueshmërisë me translacion në këtë mënyrë:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} = \sup_{0<t<\delta}\left\{\left[\int_0^{\pi-\lambda}|f(\cos(\theta+t)) - f(\cos\theta)|^p h(\theta,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\lambda^{\pi}|f(\cos(\theta-t))-f(\cos\theta)|^p h(\theta,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Shenojmë me $E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$ përafrimin më të mirë me peshë të funksionit $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, me anë të polinomeve algjebrike $P_n(x)$ të shkallës jo më të lartë se $n-1$, në metrikën $L_{p,\alpha,\beta}$, d.m.th.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} = \inf_{P_n}\|[f(x)-P_n(x)](1-x+n^{-2})^{\rho_1}(1+x+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}$$

3.1. TEOREMA E ANASJELLTË PËR MODULIN E VAZHDUESHMËRISË ME TRANSLACION

Për modulin e vazhdueshmërisë $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$ do të formulojmë dhe vërtetojmë teoremën e anasjelltë në teorinë e përafrimeve.

Teorema 3.1. Le të jetë $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$, $1<p<\infty$, $2p\alpha+1>0$, $2p\beta+1>0$, ρ_1 dhe ρ_2 numra realë të çfarëdoshëm. Atëherë për çdo numër natyral n vlenë jobarazimi:

$$\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}<\frac{C}{n}\sum_{s=1}^{n}E_s(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$$

ku konstanta C nuk varet nga $f(x)$ dhe n.

Vërtetimi: Shenojmë me $P_n(x)$ polinomin algjebrik të shkallës jo më të lartë se $n-1$, i tillë që ky polinom është polinom i përafrimit më të mirë me peshë për funksionin $f(x)$ në metrikën $L_{p,\alpha,\beta}$, d.m.th.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}=\|[f(x)-P_n(x)](1-x+n^{-2})^{\rho_1}(1+x+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}$$

Formojmë vargun e polinomeve algjebrike $Q_{2^k}(x)$ në këtë mënyrë:

$$Q_{2^k}(x)=P_{2^k}(x)-P_{2^{k-1}}(x),\quad k>1,\quad Q_1(x)=P_1(x).$$

Është e qartë se vlenë barazimi:

$$\sum_{k=0}^{N} Q_{2^k}(x) = P_{2^N}(x)$$

Vlerësojmë tani modulin $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$:

Shenojmë:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < J_1 + J_2$$

ku

$$J_1 = [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} = [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t) -$$

$$- T_{2^N}(\theta+t)+T_{2^N}(\theta+t)-T_{2^N}(\theta)+T_{2^N}(\theta)+\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} <$$

$$< [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-T_{2^N}(\theta+t)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} + [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta)-T_{2^N}(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_0^{\pi-\lambda} |T_{2^N}(\theta+h)-T_{2^N}(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} < J_1' + J_1'' + J_1''' .$$

Zgjedhim N të tillë që $\frac{1}{2^{N+1}} < t < \frac{1}{2^N}$. Për N të tillë, kemi:

$$J_1 < A_1 E_{2^N}(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} .$$

Në integralin J_1', zbatojmë lemën 1.7, fitojmë:

$$J_1' < A_2 [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-T_{2^N}(\theta+t)|^p h(\theta+t,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} .$$

Bëjmë zëvendësimin $v = \theta + t$ dhe meqë $0 < t \leq 2^{-N} < \lambda$, kemi:

$$J_1^1 \leq A_3 \left[\int_t^{\pi-\lambda+t} |\varphi(v) - T_{2^N}(v)|^p h(v,t)dv\right]^{\frac{1}{p}} \leq A_4 \left[\int_0^{\pi} |\varphi(v) -$$

$$- T_{2^N}(v)|^p h(v,t)dv\right]^{\frac{1}{p}} \leq A_4 \; E_{2^N}(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} .$$

Vlerësojmë tani J_1^3, kemi:

$$J_1^3 = \left[\int_0^{\pi-\lambda} |T_{2^N}(\theta+t) - T_{2^N}(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^{\pi-\lambda} \left|\left[\int_0^t T'_{2^N}(\theta+u) \cdot\right.\right.\right.$$

$$\cdot \sin(\theta+u)du\Big]\Big|^p h(\theta,t)d\theta \Big]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, fitojmë:

$$J_1^3 \leq A_5 \int_0^t \left[\int_0^{\pi-\lambda} |T_{2^N}(\theta+u)\sin(\theta+u)|^p h(\theta,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du .$$

Zbatojmë lemën 1./, kemi:

$$J_1^3 \leq A_6 \int_0^t \left[\int_0^{\pi-\lambda} |T_{2^N}(\theta+u)\sin(\theta+u)|^p h(\theta+u,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du .$$

Bëjmë zëvendësimin $v = \theta + u$, dhe duke pasur parasysh që $0 < u < t \leq 2^{-N} < \lambda$, kemi:

$$J_1^3 \leq A_7 t \left[\int_0^{\pi} \left|\sum_{k=1}^{N} Q'_{2^k}(v)\sin v\right|^p h(v,t)dv\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë jobarazimin e Minkovskit, kemi:

$$J_1^3 < A_8 t \sum_{k=1}^{N} \left[\int_0^{\pi} |Q'_{2^k}(v)\sin v|^p h(v,t)dv \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Në bazë të lemës 1.5, kemi:

$$J_1^3 < A_9 t \sum_{k=1}^{N} 2^k \left[\int_0^{\pi} |Q_{2^k}(v)|^p h(v,t)dv \right]^{\frac{1}{p}} < A_{10} t \sum_{k=1}^{N} 2^k \left[\int_0^{\pi} |T_{2^k}(v) -\right.$$

$$\left. - T_{2^{k-1}}(v)|^p h(v,t)dv \right]^{\frac{1}{p}} < A_{10} t \sum_{k=1}^{N} 2^k \left[\int_0^{\pi} |T_{2^k}(v) - \varphi(v) + \varphi(v) -\right.$$

$$\left. - T_{2^{k-1}}(v)|^p h(v,t)dv \right]^{\frac{1}{p}} < A_{11} t \sum_{k=1}^{N} 2^k E_{2^{k-1}}(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} .$$

Duke pasur parasysh jobarazimin:

$$2^k E_{2^{k-1}}(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < \sum_{s=2^{k-1}}^{2^k} E_s(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$$

do të kemi:

$$J_1^3 < A_{12} t \sum_{s=1}^{2^N} E_s(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$$

Meqë, $2^N < n < 2^{N+1}$ dhe $\frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n}$, atëherë

$$J_1^3 < A_{13} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} E_s(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} .$$

Në mënyrë analoge vlerësohet edhe integrali J_2. Kështu teorema u vërtetua plotësisht.

3.2. FUNKSIONELA DHE MODULI I VAZHDUESHMËRISË ME TRANSLACION

Shenojmë me $\Lambda_{p,\alpha,\beta}$ bashkësinë e funksioneve $g(x)$ të tilla që $g(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, $g(x)$ absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$ dhe $g'(x)\sqrt{1-x^2} \in L_{p,\alpha,\beta}$.

Për funksionet $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, $1 \leq p \leq \infty$ përkufizojmë funksionelën në këtë mënyrë:

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} = \inf_{g(x) \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}} \Big\{ \| [f(x)-g(x)](1-x+\delta^2)^{\rho_1}(1+x+\delta^2)^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} +$$

$$+ \delta \| g'(x)\sqrt{1-x^2}(1-x+\delta^2)^{\rho_1}(1+x+\delta^2)^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} \Big\} .$$

Teorema 3.2. Le të jetë $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, $1 \leq p \leq \infty$, $2p\alpha+1 \geq 0$, $2p\beta+1 \geq 0$, atëherë ekzistojnë konstantet pozitive B_1 dhe B_2 që nuk varen nga $f(x)$ dhe δ të tilla që:

$$B_1\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq B_2\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$$

ku $-\infty < \rho_1 < \infty$, $-\infty < \rho_2 < \infty$, $0 < \delta < \mu < \lambda$.

Vërtetimi: Le të jetë $g(x) \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}$. Vlerësojmë modulin e vazhdueshmërisë $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$. Shenojmë:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq T_1 + T_2$$

Vlerësojmë integralin T_1. Pra, kemi:

$$T_1 = [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} = [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-d(\theta+t) +$$

$$+ d(\theta+t)-d(\theta)+d(\theta)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} \leq [\int_0^{\pi-\lambda} |d(\theta)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-d(\theta+t)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} + [\int_0^{\pi-\lambda} |d(\theta+t)-d(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq T_1^1 + T_1^2 + T_1^3 .$$

Është e qartë se:

$$T_1^1 \leq B_3 \| f(x)-g(x)(1-x+\delta^2)^{\rho_1} (1+x+\delta^2)^{\rho_2} \|_{p.\alpha.\beta} , \quad \text{ku } g(\cos\theta)=d(\theta).$$

Në integralin T_1^2, zbatojmë lemën [illegible]. Fitojmë

$$T_1^2 \leq B_4 [\int_0^{\pi-\lambda} |\varphi(\theta+t)-d(\theta+t)|^p h(\theta+t,t)d\theta]^{\frac{1}{p}}$$

Bëjmë zëvendësimin $v = \theta+t$ dhe meqë $0 < t \leq \delta < \mu < \lambda$ kemi:

$$T_1^2 \leq B_4 [\int_t^{\pi-\lambda+t} |\varphi(v)-d(v)|^p h(v,t)dv]^{\frac{1}{p}} \leq B_4 [\int_0^{\pi} |\varphi(v)-d(v)|^p h(v,t)dv]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq B_4 \| [f(x)-g(x)] (1-x+\delta^2)^{\rho_1} (1+x+\delta^2)^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} .$$

Vlerësojmë tani integralin T_1^3. Pra kemi:

$$T_1^3 = \left[\int_0^{\pi-\lambda} \left|\int_0^u d'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)du\right|^p h(\theta,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Zbatojmë përgjithësimin e jobarazimit të Minkovskit, kemi:

$$T_1^3 \leqslant B_5 \int_0^t \left[\int_0^{\pi-\lambda} |g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)|^p h(\theta,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du .$$

Tani zbatojmë lemën 1./, fitojmë:

$$T_1^3 \leqslant B_6 \int_0^t \left[\int_0^{\pi-\lambda} |g'(\cos(\theta+u))\sin(\theta+u)|^p h(\theta+u,t)d\theta\right]^{\frac{1}{p}} du.$$

Bëjmë zëvendësimin e ndryshoreve $v = \theta+u$ dhe meqë $0<u<t<\delta<\lambda$, kemi:

$$T_1^3 < B_6 \int_0^t \left[\int_u^{\pi-\lambda+u} |g'(\cos v)\sin v|^p h(v,t)dv\right]^{\frac{1}{p}} du \leqslant B_6 \int_0^t \left[\int_0^{\pi} |g'(\cos v)\sin v|^p \cdot\right.$$

$$\left.\cdot h(v,t)dv\right]^{\frac{1}{p}} du \leqslant B_6 t\left[\int_0^{\pi} |g'(\cos v)\sin v|^p h(v,t)dv\right]^{\frac{1}{p}} du .$$

Meqë $0<t<\delta$ dhe $\sin^p v\, h(v,t) \leqslant \sin^p v\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{2p\alpha+1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{2p\beta+1}$

$$\cdot\left(\sin^2\frac{v}{2}+\delta^2\right)^{\rho_1}\left(\cos^2\frac{v}{2}+\delta^2\right)^{\rho_2} = 2\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{2p\alpha+p+1}\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{2p\beta+p+1} \cdot$$

$$\cdot\left(\sin^2\frac{v}{2}+t^2\right)^{\rho_1}\left(\cos^2\frac{v}{2}+t^2\right)^{\rho_2} .$$

Në integralin T_1^3 bëjmë zëvendësimin $x = \cos v$, kemi:

$$T_1^3 < B_7\delta\left[\int_{-1}^{1} |g'(x)|^p (1-x)^{p(\alpha+\frac{1}{2})} (1+x)^{p(\beta+\frac{1}{2})} (1-x+\delta^2)^{\rho_1} (1+x+\delta^2)^{\rho_2} dx\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Kështu, kemi:

$$T_1^3 < B_7 \delta \| g'(x)\sqrt{1-x^2}(1-x+\delta^2)^{\rho_1}(1+x+\delta^2)^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Në mënyrë analoge vlerësohet edhe integrali T_2. Në këtë mënyrë është vërtetuar jobarazimi:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < B_8 K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}.$$

Vërtetojmë tani jobarazimin e anasjelltë. Marrim për shqyrtim funksionin $\varphi_n(\theta)$ të dhënë me formulën (2.8) Shenojmë:

$$F_1 = \|[\psi_n(x)-f(x)](1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x+t^2)^{\rho_1}(1+x+t^2)^{\rho_2}\|_p,$$

ku $\psi_n(x) = \varphi_n(\arccos x)$. Pra, kemi:

$$F_1 = [\int_0^{\pi}|\varphi_n(\theta)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} = [\int_0^{\theta_n}|\varphi_n(\theta)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ [\int_{\theta_n}^{\pi}|\varphi_n(\theta)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} < 2n\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}[\int_0^{\theta_n}|\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}}dt +$$

$$+ 2n\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}[\int_{\theta_n}^{\pi}|\varphi(\theta-t)-\varphi(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}}dt + \rho_n[\int_{\theta_n}^{\pi}|h(\theta,t)|^p d\theta]^{\frac{1}{p}}.$$

Duke u bazuar në jobarazimin (2.6) dhe përkufizimin e modulit të vazhdueshmërisë, fitojmë:

$$F_1 < B_8\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}.$$

Funksioni $\psi_n(x)$ është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b] \subset (-1,1)$ prandaj edhe në çdo segment të tillë ekziston derivati i tij $\psi_n'(x)$. Në këtë rast, shenojmë:

$$F_2 = \|\psi_n'(x)\sqrt{1-x^2}(1-x+t^2)^{\rho_1}(1+x+t^2)^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}, = \|\varphi_n'(\text{arc } \cos x)\cdot$$

$$\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x+t^2)^{\rho_1}(1+x+t^2)^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta} =$$

$$= \|\varphi_n'(\text{arc } \cos x)(1-x+t^2)^{\rho_1}(1+x+t^2)^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Bëjmë zëvendësimin $x = \cos\theta$, kemi:

$$F_2 < [\int_0^{\pi}|\varphi_n'(\theta)|^p(\sin\frac{\theta}{2})^{2p\alpha+1}(\cos\frac{\theta}{2})^{2p\beta+1}(\sin^2\frac{\theta}{2}+t^2)^{p\rho_1}(\cos^2\frac{\theta}{2}+t^2)^{p\rho_2}d\theta]^{\frac{1}{p}} =$$

$$[\int_0^{\theta_n}|\varphi_n'(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} + [\int_{\theta_n}^{\pi}|\varphi_n'(\theta)|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}}$$

Zëvendësojmë tani formulën për derivatin e funksionit $\varphi_n'(\theta)$, fitojmë:

$$F_2 < 2n[\int_0^{\theta_n}|\varphi(\theta+\frac{1}{n})-\varphi(\theta+\frac{1}{2n})|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} + 2n[\int_{\theta_n}^{\pi}|\varphi(\theta-\frac{1}{n}) -$$

$$-\varphi(\theta-\frac{1}{2n})|^p h(\theta,t)d\theta]^{\frac{1}{p}} < B_9\,\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$$

Le të jetë tani $\frac{1}{n+1} < \delta < \frac{1}{n}$, në këtë rast kemi:

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < K(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq \|[f(x)-\psi_n(x)](1-x+\frac{1}{n^2})^{\rho_1} \cdot$$

$$\cdot(1+x+\frac{1}{n^2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta} + \frac{1}{n}\|\psi_n'(x)(1-x+\frac{1}{n^2})^{\rho_1}(1+x+\frac{1}{n^2})^{\rho_2}\sqrt{1-x^2}\|_{p,\alpha,\beta} .$$

Ku $\psi_n(x)$ është funksioni i shqyrtuar më parë. Pra, kemi:

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < B_{10}\tilde{\omega}(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < B_{10}\tilde{\omega}(f,\frac{2}{n+1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq$$

$$< B_{11}\tilde{\omega}(f,\frac{1}{n+1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < B_{12}\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} .$$

D.m.th. teorema 3.2 u vërtetua.

3.3. TEOREMA E DREJTË PËR MODULIN E VAZHDUESHMËRISË ME TRANSLACION

Para se të vërtetojmë teoremën e drejtë për modulin $\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$, do të vërtetojmë teoremën e cila paraqet vlerësimin e përafrimit më të mirë të funksionit të derivueshëm në intervalin $(-1,1)$, me anë të normës së derivatit të këtij funksioni.

Teorema 3.3. Le të jetë $g(x) \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}$, $1 < p \leq \infty$, $2\alpha p+1 > 0$, $2\beta p+1 > 0$, atëherë vlenë jobarazimi:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} < B_{13}n^{-1}\|g'(x)\sqrt{1-x^2}(1-x+n^{-2})^{\rho_1}(1+x+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta} ,$$

ku konstanta pozitive B_{13} nuk varet nga $f(x)$ dhe n .

Vërtetmi: Le të jenë ρ_1 dhe ρ_2 numra real të çfarëdoshëm. Zgjedhim numrin natyral q të tillë që $q > \alpha + |\rho_1| + |\rho_2|$. Për çdo n zjgedhim numrin natyral m, të tillë që të plotësohet kondita:

$$\frac{n}{q+2} < m \leq \frac{n}{q+2} + 1 \tag{3.1}$$

Shqyrtojmë polinomin $Q(x)$ të përkufizuar në lemën 1.3. Polinomi $Q(x)$ është i shkallës jo më të lartë se $(q+2)(m-1) \leq n$. Për çdo n, që plotëson konditën (3.1) në vend të polinomit $P_n(x)$ marrim polinomin $Q(x)$. Atëherë:

$$M(x) = g(x) - P_n(x) = g(x) - \int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu) g(x,t,\nu,\mu) \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\nu+1} \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2\mu+1} dt$$

Për vërtetimin e teoremës do të dallojmë këto raste:

1) $\alpha > \beta > -\frac{1}{2p}$, 2) $\alpha = \beta > -\frac{1}{2p}$, 3) $\alpha > \beta = -\frac{1}{2p}$,

4) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$, 5) $\beta > \alpha = -\frac{1}{2p}$, 6) $\beta > \alpha > -\frac{1}{2p}$.

1) Po shqyrtojmë më parë rastin $\alpha > \beta > -\frac{1}{2p}$. Në këtë rast polinomin $Q(x)$ e marrim për rastin $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$. Pra, kemi:

$$M(x) = \int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu)[g(x) - g(x,t,\nu,\mu)] \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\nu+1} \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2\mu+1} dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)} \int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu) \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^t g'(y) y_1 (1-r^2)^{\nu-\mu-1} r^{2\nu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} \sin\frac{t}{2} \cos\frac{t}{2}\, du\,dz\,dr\,dt,$$

ku $y = x\cos u + rz \sin u\sqrt{1-x^2} - (1-r^2)(1-x)\sin^2 \frac{u}{2}$

$y_1 = x\sin u - rz\cos u\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-r^2)(1-x)\sin u$

Shqyrtojmë tani normën: $M = \| M(x)(1-x+n^{-2})^{\rho_1}(1+x+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}$.

Në M zbatojmë jobarazimin e Minkovskit, kemi:

$$M < \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)}\int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu)\int_0^t (\sin\frac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}\| \int_{-1}^1\int_0^1 f'(y)y_1(1-x)^\alpha\cdot$$

$$\cdot(1+x)^\beta(1-x+n^{-2})^{\rho_1}(1+x+n^{-2})^{\rho_2}(1-r^2)^{\nu-\mu-1}r^{2\nu+1}(1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}}drdz\|_p dudt.$$

Tani do të dallojmë këto raste:

a) Po shqyrtojmë rastin $p = 1$. Në këtë rast marrim numrat ν dhe μ të tillë që $\nu = \alpha$, $\mu = \beta$. Në mosbarazimin e mësipërm bëjmë zëvendësimin e ndryshoreve në integralin e trefishtë sipas formulave të dhëna në lemën 1.4. Duke u bazuar në lemën 1.4, kemi:

$$M < B_{14}\int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu)\int_0^t(\sin\frac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\frac{t}{2})^{2\mu+1}[1+(n|\sin\frac{u}{2}|)^{2(|\rho_1|+|\rho_2|)}]\cdot$$

$$\cdot[\int_{-1}^1\int_0^1\int_{-1}^1 |g'(y)(1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+y)^{\beta+\frac{1}{2}}(1-y+n^{-2})^{\rho_1}(1+y+n^{-2})^{\rho_2}(1-R^2)^{\nu-\mu-1}\cdot$$

$$\cdot R^{2\mu+1}(1-v^2)^{\mu+\frac{1}{2}}dydRdv]dudt < \frac{B_{15}}{n}\|g'(y)\sqrt{1-y^2}(1-y+n^{-2})^{\rho_1}(1+y+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}$$

b) Le të jetë p e tillë që $1 < p < \infty$. Në këtë rast zgjedhim ϵ të tillë që $0 < \epsilon < \nu-\mu$, $\nu = \alpha+\epsilon$, $\mu = \beta$.

Vlerësojmë normën:

$$M = \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)} \int_0^{\pi} k(t,m,\nu,\mu) \int_0^{t} (\sin \tfrac{t}{2})^{2\nu+1} (\cos \tfrac{t}{2})^{2\mu+1} \| \int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} g'(y) y_1 \cdot$$

$$\cdot (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} (1-r^2)^{\nu-\mu-1} r^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dudzdrdt \|_{p,\alpha,\beta} .$$

Zbatojmë tani jobarazimin e Minkovskit, kemi:

$$M \leq \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)} \int_0^{\pi} k(t,m,\nu,\mu) \int_0^{t} (\sin \tfrac{t}{2})^{2\nu+1} (\cos \tfrac{t}{2})^{2\mu+1} \| \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} g'(y) y_1 \cdot$$

$$\cdot (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} (1-r^2)^{\nu-\mu-1} r^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} drdz \|_{p,\alpha,\beta} dudt =$$

$$= \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)} \int_0^{\pi} k(t,m,\nu,\mu) \int_0^{t} (\sin \tfrac{t}{2})^{2\nu+1} (\cos \tfrac{t}{2})^{2\mu+1} M_1 dudt ,$$

ku

$$M_1 = \| \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} g'(y) y_1 (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} (1-r^2)^{\nu-\mu-1} r^{2\mu+1} (1-r^2)^{\mu-\frac{1}{2}} drdz \|_{p,\alpha,\beta} .$$

Në M_1 zbatojmë jobarazimin e Holderit, kemi:

$$M_1 \leq \int_{-1}^{1} [\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} g'(y) y_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} (1-r^2)^{\alpha-\beta-\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\cdot r^{2\beta+\frac{1}{p}} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2p}}]^{p} dzdrdx^{\frac{1}{p}} [\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} | (1-r^2)^{\epsilon+\frac{1}{p}-1} r^{1-\frac{1}{p}} (1-z^2)^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}} |^{p_1} dzdr]^{\frac{1}{p_1}} \leq$$

$$\leq B_{16} \int_{-1}^{1} [\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} | g'(y) y_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} (1-r^2)^{\alpha-\beta-\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\cdot r^{2\beta+\frac{1}{p}} (1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2p}} |^{p} dzdrdx^{\frac{1}{p}} .$$

Në integralin e fundit bëjmë zëvendësimin e ndryshoreve sipas formulave të dhëna në lemën 1.4, prandaj kemi:

$$M_1 \leq [1+(n|\sin\tfrac{u}{2}|)^{2(|\rho_1|+|\rho_2|)}][\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}|g'(y)(1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+y)^{\beta+\frac{1}{2}}|^p \cdot$$

$$\cdot(1-y+n^{-2})^{p\rho_1}(1+y+n^{-2})^{p\rho_2}(1-R^2)^{p(\alpha-\beta)-1}R^{2p\beta+1}(1-v^2)^{p\beta-\frac{1}{2}}dydRdv]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq [1+(n|\sin\tfrac{u}{2}|)^{2(|\rho_1|+|\rho_2|)}]\|g'(y)\sqrt{1-y^2}(1-y+n^{-2})^{\rho_1}(1+y+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Shprehjen e mësipërme për M_1 e zëvendësojmë në M, kemi:

$$M \leq B_{16}\int_0^{\pi}K(t,m,\nu,\mu)\int_0^{t}(\sin\tfrac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\tfrac{t}{2})^{2\mu+1}[1+(n|\sin\tfrac{u}{2}|)^{2(|\rho_1|+|\rho_2|)}]\cdot$$

$$\cdot\|g'(y)\sqrt{1-y^2}(1-y+n^{-2})^{\rho_1}(1+y+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}\,dudt \leq$$

$$\leq \frac{B_{17}}{n}\|g'(y)\sqrt{1-y^2}(1-y+n^{-2})^{\rho_1}(1+y+n^{-2})^{\rho_2}\|_{p,\alpha,\beta}.$$

c) Në fund po vërtetojmë teoremën $p=\infty$. Në këtë rast zgjedhim ϵ të tillë që $0<\epsilon<\nu-\mu$, $\nu=\alpha+\epsilon$, $\mu=\beta$. Pra, kemi:

$$M \leq B_{18}\int_0^{\pi}K(t,m,\nu,\mu)\int_0^{t}(\sin\tfrac{t}{2})^{2\nu+1}(\cos\tfrac{t}{2})^{2\mu+1}\int_{-1}^{1}\int_0^{1}\|g'(y)y_1(1-x+n^{-2})^{\rho_1}\cdot$$

$$\cdot(1+x+n^{-2})^{\rho_2}(1-r^2)^{\alpha+\epsilon-\beta-1}r^{2\beta+1}(1-z^2)^{\beta-\frac{1}{2}}drdz\|_{\infty,\alpha,\beta}\,dudz\ .$$

Tani bëjmë zëvendësimin e ndryshoreve sipas formulave të dhëna në lemën 1.4, kemi:

$$M \leq B_{19}\int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu)\int_0^t \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2\mu+1}\int_{-1}^{1}\int_0^1 \| g'(y)(1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+y)^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot(1-y+n^{-2})^{\rho_1}(1+y+n^{-2})^{\rho_2}(1-R^2)^{\alpha-\beta}R^{2\beta+1}(1-v^2)^{\beta}v\|_\infty\cdot$$

$$\cdot(1-R^2)^{\epsilon-1}R(1-z)^{-\frac{1}{2}}dR\,dz\,dv\,dt \leq B_{20}\int_0^\pi k(t,m,\nu,\mu)\int_0^t\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2\mu+1}\cdot$$

$$\cdot\left[1+\left(n\left|\sin\frac{u}{2}\right|\right)^{2(|\rho_1|+|\rho_2|)}\right] g'(y)(1-y)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+y)^{\beta+\frac{1}{2}}(1-y+n^{-2})^{\rho_1}\cdot$$

$$\cdot(1+y+n^{-2})^{\rho_2}\|_\infty dt \leq \frac{B_{21}}{n}\| g'(y)\sqrt{1-y^2}(1-y+n^{-2})^{\rho_1}(1+y+n^{-2})^{\rho_2}\|_{\infty,\alpha,\beta}\cdot$$

Në mënyrë analoge vërtetohen edhe rastet 2)-4) por vetëm duhet bërë zgjedhje tjetër te polinomit $Q(x)$ varësisht nga funksioni i translacionit të përgjithshëm $f(x,t,\nu,\mu)$. Me zëvendësimin [illegible] me [illegible] rasti 5) shëndrrohet në rastin 3), ndërsa rasti 6) në rastin 1).

Teorema 3.4. Le të jetë $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$, $2p\alpha+1\geq 0$, $2p\beta+1\geq 0$, $1<p<\infty$, atëherë ekziston konstanta pozitive B_{22} që nuk varet nga $f(x)$ dhe për të cilën vlenë jobarazimi:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}\leq B_{22}(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu)\,\omega(f,n^{-1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}\cdot$$

Vërtetimi: Le të jetë $g(x) \in \Lambda_{p,\alpha,\beta}$. Po shenojmë me $P_n(x)$ polinomin algjebrik të shkallës jo më të lartë se $n-1$, i cili është polinom i përafrimit më të mirë me peshë për funksionin $g(x)$ në metrikën $L_{p,\alpha,\beta}$. Atëherë kemi:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq \| [f(x)-P_n(x)] (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} =$$

$$= \| [f(x)-g(x)+g(x)-P_n(x)] (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} \leq$$

$$\leq \| [f(x)-g(x)] (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} + \| [g(x)-P_n(x)] \cdot$$

$$\cdot (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} = \| [f(x)-g(x)] (1-x+n^{-2})^{\rho_1} \cdot$$

$$(1+x+n^{-2})^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} + E_n(g)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2}$$

Zbatojmë teoremën [illegible], fitojmë

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq B_{24} \| [f(x)-g(x)] (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} +$$

$$+ \frac{1}{n} \| g'(x) \sqrt{1-x^2} (1-x+n^{-2})^{\rho_1} (1+x+n^{-2})^{\rho_2} \|_{p,\alpha,\beta} .$$

Ana e majtë e jobarazimit të fundit nuk varet nga $g(x)$, andaj në bazë të teoremës 3.2, kemi:

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} \leq B_{25}(p,\alpha,\beta,\lambda-\mu) \; (f, n^{-1})_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} .$$

Vërejtje 3.1. Nga teorema 3.1 dhe teorema 3.4 drejtëpërsëdrejti rrjedh relacioni:

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} = O(\delta^{\gamma}) \Longleftrightarrow E_n(f)_{p,\alpha,\beta,\rho_1,\rho_2} = O(n^{-\gamma})$$

ku $0 < \gamma < 1$, relacioni i mësipërm është ekuivalent me relacionin e njohur të Salem-Steçkinit. Për $\rho_1 = \rho_2 = 0$, fitohet relacioni i dhënë në vërejtjen 2.1.

Vërejtje 3.2. Në qoftë se $\rho_1 = \rho_2 = 0$ dhe $p = 2$, ndërsa $\lambda = \frac{3\pi}{8}$ teorema 3.1 dhe teorema 3.4 janë vërtetuar në punimin [29].

Vërejtje 3.3. Për $\lambda = 0$, moduli i tillë është përkufizuar në punimin [30] i cili modul nuk është i fundëm për çdo rast.

Vërejtje 3.4. Për $\rho_1 = \rho_2 = 0$ dhe $p = 1$ teoremat e mësipërme janë vërtetuar në punimin [33].

Р Е З Ю М Е

В данной работе рассматривается обобщенный модуль непрерывности, определенный через обобщеный сдвиг Чебышевского типа , не зависящий от веса изучаемого пространства. Доказаны свойства которые обльдает обобщенный модуль непрерывности. Для этот модулья непрерывности доказаны прамая и обратная теорема теории приближения и вияснен вопрос о конструктивной характеристике класса функции удовлетворяющих более общему условию чем условие дано ранше. Также в работе введен еще один обобщенный модуль непрерывности для которого справедливы прямая и обратная теоремы теории приближении.

L I T E R A T U R A

[I] Никольский С.М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица Изв.АН СССР, серия матем., I946, IO, № 4, 295 - 322.

[2] Тиман А.Ф. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами, ДАН СССР, т.77, №6, 969 - 972., I95I.

[3] Дзядык В.К. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию $Lip\,\gamma\ (0<\gamma<1)$, на конечном отрезке вещественной оси, Изв. АН СССР, серия матем., I956, т.20, №2, 623-642.

[4] Fred G. A contribution to the problems of weighted polynomial approximation, ISNM - 20, Birkhauser, Basel, 1972, 431-447.

[5] De Vore $L_p[-1,1]$ approximation by algebraic polinomials. ISNM. VOL 40, Bikhauser, Verlag, Basel-Stüttgart, 1978, 397-406.

[6] Моторный В.П. Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p. Изв. АН СССР, сер.матем., I97I, т.35, №4, 874 - 899.

[7] Лебедь Г.К. Некоторые вопросы приближения функций одной переменной алгебраическими многочленами. ДАН СССР, I958, т.II8, № 2, 239 - 242.

[8] Потапов М.К. О теоремах типа Джексона в метрике L_p Докл. АН СССР, 1956, т. III, № 6, 1185 - 1188.

[9] Потапов М.К. О приближении непериодических функций алгебраическими полиномами. Вестн. МГУ, 1960, № 4, 14 - 25.

[10] Потапов М.К. Некоторые вопросы наилучшего приближения в метрике L_p , дисс. на соискание ученой степени канд. физ. мат. наук, М., 1956.

[11] Жидков Г.В. Конструктивная характеристика одного класса непериодиодических функций, ДАН СССР, 1966, т. 169, № 5, 1002 - 1005.

[12] Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье-Якоби, Изв. вузов, серия Матем., 1968, № 4, 54 - 62.

[13] Pavelke S. Ein satz von Jacksonechen Typ fur algebraiche polinome. Acta sci. Math. , 1972, V-33 №3-4, 323-336.

[14] Халилова Б.А. Приближение функций полиномами и их обобщениями, дисс. на соискание ученой степени канд. физ-мат. наук, Баку, 1977, I - 146.

[15] Потапов М.К. О структурных и конструктивных характеристиках некоторых классов функций. Тр. МИАН СССР, т. 131, 1974, 211 - 231.

[16] Потапов М.К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения, Тр. МИАН СССР, 1975, т. 134, 260-277.

[I7]Потапов М.К. О приближении многочленами Якоби, Вестн. МГУ,Серия Матем. ,1977,№ 5, 70-82.

[I8]Халилова Б.А. О некоторых оценках для полиномов. Изв. АН АзССР, Сер. физ-матем. наук № 2, 46 - 55.

[I9] Butzer P.L. and Stens R.L. The operational properties of the Chebyshev transform II. Frac. deriva. В кн.:Теория аппроксимации функций,труды международной конференции, Калуга,1975, под ред. Стечкина С.Б.,М.,1977, 49-6I.

[20] Butzer P.L., Stens R.L. ,Wehrens M. Approximation by algebraic convolution integrals , in: Approximation Theory and Functional Analysis:71-120,North-Hollerd,P.C.A.,1979 .

[2I]Stens R.L.,Wehrens M. Legandre transform methodes and best algebraic approximation,annales Soc. Math.Pol.Ser.I,Commen. Math. XXI, 1979.

[22]Потапов М.К. Об условиях совпадения некоторых классов функций. Тр. семинара им. И.Г. Петровского,198I,вып. 6, 223 - 238.

[23]Потапов М.К. О приближении алгебраическими многочленами в интегралной метрике с весом Якоби. Вестн. Моск. Ун. -та .Сер. I, матем-мех.,1983, № 4, 43-52.

[24]Потапов М.К. , Федоров В.В. О теоремах Джексона для обобщеного модулья гладкости. ТМИ АН СССР, 1985, т. I72, 29I-298.

[25] Potapov M.K. , Lopez G. Sobre el problema de la estructura caracteristica de funciones cocierto orden de medor aproximation mediante pol. algebraicos.Revista Ciencias,mat II,1981.

[26] Ржавинская Е.В. О приближении непериодических функций алгебраическими полиномами, рукопись депонирована в ВИНИТИ,№ 2968-79 деп.,с.I-30.

[27] Сендов Б.,Попов А.В. Усредние модули нагладкост.София, I983.

[28] Тиман А.Ф. Теория приближений функций деиствителного переменного. М.Физматгиз, I960.

[29] Nguen Xuan Ky. On weighted polinomial approximation with a weight $(1-x)^{\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}}$ in L_2-space Acta Math. Sci Hungarika t.27 (1 - 2). 1976, 101 - 107. .

[30] Аль Лазкани В. теоремы Джексона для обобщенных модулей гладкости.Дисс. на соискание ученой сте. кан. физ-мат.наук, МГУ,I986.

[31] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближении непрерывных функции. Изв. АН СССР сер. мат. I951, № 3, I5, 2I3-242.

[32] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p $(0<p<1)$. Матм. заметки, I975, I8, № 5, 64I-658.

[33] Бериша М.,Бериша Ф. Об одном обобщеном модулье непрерывности. Тр. конфференции мол. учёных мехмат. факультета МГУ,I989 (në shtyp).

[34] Бериша Ф., Бериша М. О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_p , Punime matematike, Prishtinë, 1989, (në shtyp).

[35] Натансон И.П. Конструктивная теория функции. М-Л, 1949.

[36]Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации, Огиз, Гостехиздат, 1947.

B I O G R A F I A

I lindur jamë më 22 shtator 1955 në Suharekë. Shkollën fillore si dhe atë të mesme e kam kryer në vendlindje. Ndërsa studimet në Fakultetin e Shkencave Matematiko-Natyrore në Prishtinë. Në vitin 1984 e kam mbrojtur temën e magjistraturës me titull: "Vlerësimi, me anën përafrimit më të mirë i koeficientëve Furie të funkcioneve çift ose tek në disa klasa funksionesh. Tani jamëdúke punuar në Fakultetin e Ndërtimtarisë dhe Arkitekturës në Prishtinë në cilësinë e ligjeruesit të lëndës - Matematika.