Univerzitet u Beogradu

Prirodno-matematički fakultet

Lav Ivanović

PRILOG APROKSIMACIJI I REGULARIZACIJI PROBLEMA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

doktorska disertacija

Beograd , 1983

SADRŽAJ

U v o d

Sistemi čiji parametri ne zavise samo od vremena nego i od prostornih koordinata nazivaju se sistemi sa distribuiranim ili rasporedjenim parametrima. Matematički modeli kojima se opisuju takvi sistemi su najčešće parcijalne diferencijalne jednačine. Takvi sistemi se javljaju u termodinamici, mehanici kontinuuma, teoriji elastičnosti, teoriji termonuklearnih reakcija i.t.d. .

Tema ovog rada je numeričko rešavanje zadataka optimalnog upravljanja sistemima sa rasporedjenim parametrima. Svaki problem optimalnog upravljanja determinisanim sistemima, a to znači i sistemima sa rasporedjenim parametrima, definisan je :

a) upravljanjem, koje možemo sami birati iz nekog dopustivog skupa U ;

b) stanjem sistema, koje zavisi od izabranog upravljanja i ono je obično rešenje neke jednačine ili nejednačine. U slučaju sistema sa rasporedjenim parametrima to je parcijalna diferencijalna jednačina ;

c) izlazom iz sistema, koji je neka daterminisana funkcija stanja , odnosno upravljanja ;

d) funkcijom cilja $J(u)$, koja skup svih izlaza , odnosno upravljanja, preslikava u neki uredjen skup.

U slučaju da je skup vrednosti funkcije cilja podskup skupa realnih brojeva, zadatak optimalnog upravljanja je : naći

$$\inf_{U} J(u) = J_*$$

i tačku $u_* \in U$ takvu da $J(u_*) = J_*$, ako ona postoji.

U slučaju da je skup vrednosti funkcije cilja iz R^k zadatak je naći , na primer , Pareto optimalne tačke (definicija 1.1.2) ili Slater optimalne tačke (definicija 1.1.1).

U zadacima upravljanja sistemima sa raspoređenim parametrima upravljanje je obično element nekog beskonačno-dimenzionog prostora , pa se prirodno javlja ideja zamene početnog zadatka nizom "približnih" zadataka u kojima je upravljanje iz nekog konačno-dimenzionog prostora [5] , [6] ,[7],[11],[12],[13] . Niz takvih aproksimativnih zadataka pripada klasi problema matematičkog programiranja za koje postoje dobre metode rešavanja [9],[15],[34],[38],[47].

U ovom radu razmatraju se dve grupe problema :

a) aproksimacija nizom konačno-dimenzinih zadataka; odnosno konvergencija rešenja niza konačno-dimenzionih zadataka ka rešenju početnog zadatka ;

b) regularizacija , odnosno efektivna konstrukcija niza $u_n \in U$, pomoću niza konačno-dimenzionih zadataka, takvog da $u_n \to u_*$ u nekoj topologiji skupa U .

Opštim uslovima aproksimacije posvećeni su sledeći radovi [5],[6],[7],[36],[37],[48], dok su problemi regularizacije razmatrani , na primer, u radovima [2],[3],[7],[45].

Sve teoreme i leme koje se u radu dokazuju imaju originalni karakter a uz citirane teoreme navedene su odgovarajuće reference. Rad je podeljen u četiri dela.

Prvi deo posvećen je opštim uslovima aproksimacije. U § 1. razmatra se zadatak vektorske optimizacije , kada funkcija cilja uzima vrednosti iz R^K . U definiciji 1.1.6 uveden je pojam aproksimacije po funkcionalu zadataka vektorske optimizacije. Opšti uslovi aproksimacije dokazani su u teoremama 1.1.1. , 1.1.2. , 1.1.3. , 1.1.4.. U § 2. navedene su teoreme o aproksimaciji po funkcionalu jednokriterijalnih zadataka optimizacije koje su dokazali Vasiljev [48] i Avakov[2]. U § 3. razmatrani su jedno-kriterijalni glatko konveksni zadaci. U teoremama 1.3.1. i 1.3.2. dokazani su potrebni i dovoljni uslovi za aproksimaciju po funkcionalu i izvršena je regularizacija. U § 4. navedene su teoreme Avakova [3],[48], o aproksimaciji po funkcionalu max-min zadataka sa nevezanim i vezanim skupovima dopustivih upravljanja.

U drugom delu navedene su teoreme o regularizaciji aproksimativnog niza ekstremalnih zadataka i niza max-min zadataka , koje se koriste u trećem i četvrtom delu. Dokazi citiranih teorema mogu se naći u radovima [2],[3],[48].

U trećem delu se razmatra zadatak optimalnog zagrevanja štapa [8],[29]. U § 1. je precizno postavljen zadatak i skiciran dokaz o egzistenciji rešenja [24]. U § 2. konstruisan je niz aproksimativnih zadataka, pomoću implicitne diferencne sheme i elementarnih kvadraturnih formula, i dokazana je jedna apriorna ocena. § 3. posvećen je lemi Tartar-a [10] koja u prostorima Soboljeva ima ulogu Taylorove formule. U radovima [25], [26] se za dokazivanje konvergencije diferencnih shema ka uopštenim rešenjima koristi lema Bramble-Hilbert-a [4] koja je specijalni slučaj leme Tartar-a. U slučaju anizotropnih i razlomljenih prostora Soboljeva lema Bramble-hilbert-a se ne može primeniti a lema Tartar-a može [21], [22], [43] . U § 4. se, primenjujući lemu Tartar-a, dokazuje konvergencija diskretnog rešenja ka usrednjenom neprekidnom rešenju u diskretnoj $\tilde{H}^{1,0}$ normi. Dobijena je ocena brzine konvergencije $O(h)$ ako je rešenje neprekidnog zadatka iz $H^{2,1}$. Koristeći rezultate prethodnih paragrafa u § 5. dokazano je da niz diskretnih zadataka aproksimira po funkcionalu početni zadatak. U § 6. izvršena je regularizacija niza aproksimativnih, diskretnih zadataka. Neki rezultati trećeg dela objavljeni su u [19].

Četvrti deo posvećen je max-min zadatku optimalnog zagrevanja štapa sa ograničenim stanjem [20].

Postavka zadatka i konstrukcija niza aproksimativnih zadataka razmatrani su u prva dva paragrafa. U § 3. dokazano je da niz aproksimativnih zadataka aproksimira po funkcionalu početni zadatak. Na osnovu rezultata paragrafa 3.4.,2.4., 4.1.,4.2. dokazani su dovoljni uslovi za regularizaciju po prvom argumentu.

Beograd, maja 1983g. L.D. Ivanović

I DEO

Aproksimacija ekstremalnih zadataka

§ 1. Aproksimacija zadataka vektorske optimizacije

U poslednjih deset godina intenzivno se razvija teorija vektorske optimizacije i već postoje neki postupci za rešavanje konačno-dimenzionih zadataka [33]. U slučaju vektorske optimizacije sistema sa rasporedjenim parametrima, gde je upravljanje element nekog beskonačno-dimenzionog prostora, može se konstruisati niz zadataka, u kojima je upravljanje iz konačno-dimenzionog prostora, koji aproksimiraju početni zadatak. U ovom paragrafu razmatraju se neki opšti kriterijumi za konstrukciju niza aproksimativnih zadataka.

Postavka zadatka. Neka je poznat skup X, i neka su poznati funkcionali $J_i: X \to R$, $i=\overline{1,k}$. Na taj način svaki element $u \in X$ je okarakterisan vektorom $J=(J_1, J_2, \ldots, J_k)$. To znači da se izbor "optimalnog" upravljanja $u \in X$ svodi na izbor "optimalne" ocene $J \in R^k$. Ako u R^k uvedemo neki poredak imaćemo mogućnost izbora optimalne ocene u odnosu na taj poredak.

Poredak ćemo uvesti pomoću konusa [49]. Definišimo dva konusa

$$K^+=\{x\in R^k : x_i \geq 0,\ i=\overline{1,k}\} \tag{1}$$

$$\overset{\circ}{K}{}^{+} = \{x \in R^K : x_i > 0 \vee x_i = 0, \ i = \overline{1,K}\} \tag{2}$$

a sa $\dot{K}^{+}$ označavaćemo

$$\dot{K}^{+} = K^{+} \setminus \{0\} \tag{3}$$

Sada možemo definisati dva poretka $\geq$ i $>$. Naime

$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in K^{+}$ i $x > y \Leftrightarrow x - y \in \overset{\circ}{K}{}^{+}$.

Konusi K^{-} i $\overset{\circ}{K}{}^{-}$ se prirodno uvode $K^{-} = \{x \in R^K : x_i \leq 0, \ i = \overline{1,K}\}$

$\overset{\circ}{K}{}^{-} = \{x \in R^K : x_i < 0 \vee x_i = 0, \ i = \overline{1,K}\}$.

Za preciznu formulaciju zadatka vektorske optimizacije potrebne su nam sledeće definicije (na primer u [33])

D e f i n i c i j a 1. Tačku $d \in D \subset R^K$ zvaćemo slabo optimalnom Pareto tačkom ili Slater optimalnom za skup D ako

$$(d + \overset{\circ}{K}{}^{+}) \cap D = d \tag{4}$$

D e f i n i c i j a 2. Tačku $d \in D \subset R^K$ zvaćemo Pareto optimalnom za skup D ako

$$(d + K^{+}) \cap D = d \tag{5}$$

Skup svih Pareto tačaka za skup D označavaćemo sa $P(D)$ a skup svih Slater optimalnih tačaka sa $S(D)$. Očigledno je da $P(D) \subset S(D)$.

Formulacija zadatka vektorske optimizacije je : za dati skup $U \subset X$ i funkcionale $J_1, \dots, J_k$ naći skupove $S(D)$ ili $P(D)$ gde je

$$D = \{d \in R^K : d = J(U)\}. \tag{6}$$

Ovako formulisan zadatak označavaćemo sa Z_S ili Z_P u zavisnosti od toga da li se traži skup $S(D)$ ili $P(D)$.

Formulacija niza aproksimativnih zadataka. Neka su dati skupovi $D_n \subset R^k$, $n \in N$ i ... funkcionali $I_n^1, I_n^2, \ldots, I_n^n$, $n \in N$. Naći skupove $S(D_n)$ ili $P(D_n)$ gde je

$$D_n = \{ d \in R^k : d \in I_n(D_n) \} \tag{7}$$

a $I_n = (I_n^1, \ldots, I_k^n)$.

Niz ovakvih zadataka označavaćemo sa Z_{nS} ili Z_{nP} u zavisnosti od toga da li se traži skup $S(D_n)$ ili $P(D_n)$.

Treba još definisati u kom smislu niz zadataka Z_n aproksimira zadatak Z. Naime niz zadataka Z_n aproksimira zadatak Z po funkcionalu ako niz skupova $S(D_n)$ ili $P(D_n)$ "konvergira" ka skupu $S(D)$ ili $P(D)$. Da bismo precizno definisali konvergenciju skupova potrebne su nam sledeće definicije.

D e f i n i c i j a 3. [23] Niz skupova $A_n \subset R^k$ h - konvergira ka skupu $A \subset R^k$ ako $\lim_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ gde je h Hausdorff-ova metrika.

D e f i n i c i j a 4. [23] Neka je $A_n \subset R^k$ niz zadatih skupova. Skup tačaka $p \in R^k$ takvih da postoji niz $a_{n_k} \in A_{n_k}$ sa osobinom $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p$ (u smislu obične topologije u R^k) označavaćemo sa $Ls\, A_n$. Sa $Li\, A_n$ označavaćemo skup tačaka $p \in R^k$ takvih da postoji niz $a_n \in A_n$ takav da $\lim_{n\to\infty} a_n = p$. U slučaju da je $Ls\, A_n =$

$\lim A_n = A$ skup A označavaćemo sa $\lim A_n$.

D e f i n i c i j a 5. [23] Skupovi D_1, D_2 su konfinalni ako za svako $d_1 \in D_1$ postoji [illegible] tako da $d_2 \geq d_1$.

U daljem tekstu koristićemo sledeće oznake

$$D^+ = \bigcup_{d \in D} (d + K^+), \quad \overset{\circ}{D}{}^+ = \bigcup_{d \in D} (d + \overset{\circ}{K}{}^+), \quad \dot{D}^+ = \bigcup_{d \in D} (d + \dot{K}^+)$$

U sledećim teoremama dokazuju se neki dovoljni uslovi za različite vidove aproksimacije zadatka $\mathcal{Z}$ zadacima $\mathcal{Z}_n$. Naime teorema 1. daje odgovor na pitanja kako konstruisati niz aproksimativnih zadataka, kako definisati konvergenciju niza rešenja aproksimativnih zadataka ka rešenju početnog zadatka i dokaz konvergencije .

T E O R E M A 1. Ako postoje preslikavanja

$$P_n : X_n \to X \quad i \quad Q_n : X \to X_n \quad n \in N \tag{8}$$

takva da :

a) za svako $u \in U$, $Q_n(u) \in U_n$ i svako [illegible] $\in \operatorname{int} K^+$ postoji prirodan broj $n_0(\cdot, u)$ i važi

[illegible] (9)

b) za svaki niz [illegible] i svako [illegible] postoji prirodan broj [illegible] i važi

[illegible] (1o)

i ako su skupovi [illegible] i [illegible], [illegible] i [illegible] konfinalni tada

$$Ls\, S(D_n) \subset [illegible] \qquad (11)$$

$$P(D) - [illegible] \qquad (12)$$

D o k a z . Za fiksirano [illegible] i proizvoljno izabrani niz [illegible] $S(D_n)$ možemo naći niz [illegible] takav da [illegible] pa je

$$[illegible] - I_n(Q_n(u_n)) + I_n([illegible]) [illegible]$$

Sa druge strane po definiciji tačke [illegible] sledi

$$[illegible] - I_n(Q_n [illegible]$$

što znači , prema (9) , da za sve tačke nagomilavanja skupa [illegible] , u oznaci $A([illegible])$,važi

$$A([illegible]) [illegible]$$

Poslednja relacija važi za svako [illegible] pa je

$$Ls\, S(D_n) \subseteq R^{K} \setminus ([illegible] + int\, K^{+}) .$$

Lako se može pokazati [33] da

$$S(D) + int\, K^{+} = int\, D^{!}$$

ako su $P(D)$ i D konfinalni skupovi.

Pretpostavimo sada da postoji niz [illegible] $S(D_{n_k})$ takav da [illegible] K [illegible] . Skup [illegible] K [illegible] je otvoren što znači da postoji prirodan broj [illegible] , [illegible] i niz [illegible]

tako da je

$$I_{n_k}(u_{n_k}) [illegible] K [illegible]$$

Sa druge strane prema (10) postojao bi [illegible] takav da

$$[illegible] K [illegible]$$

a na osnovu uslova konfinalnosti postojao bi [illegible] ali $f_j \in P(D) \cap (K \setminus D^{+}) = \emptyset$. Dobijena kontradikcija dokazuje (11) jer je očigledno [illegible], gde je [illegible] oznaka za granicu skupa A .

Da bismo dokazali (12) dokazaćemo da za bilo koju tačku $f \in P(D)$ bilo koja njena okolina seče sve skupove [illegible] počevši od nekog n_0 .

Uočimo proizvoljno [illegible] (ova jednakost se lako dokazuje [33]) i bilo koju okolinu tačke [illegible] U_j . Tada postoji niz tačaka $u_k \in U$ takav da $J(u_k) \to f \in P(D)$ a odatle sledi da postoji k_0 takvo da [illegible] $\subset U_j$. Na osnovu uslova (9) i uslova konfinalnosti za skupove $P(D_n)$ i D_n sledi egzistencija niza $f_n \in P(D_n)$ takvog da za $n \geq n_0$ [illegible] gde je [illegible] izabrano tako da važi [illegible] $\subset U_j$ .Označimo sa [illegible] a sa U označimo takvu okolinu nule da [illegible]. Iz dokazanog tvrdjenja (11) sledi da sve tačke nagomilavanja skupa $\{f_n\}$ pripadaju P_1 ,odnosno van skupa $P_1 + U$ nalazi se samo konačno mnogo članova niza te $f_n \in U_j$ za [illegible] pa je $f \in Li\, P(D_n)$ [23].

Jednakost

$$[illegible]$$

sledi iz jednakosti [illegible] [33]. Dokaz je završen

P o s l e d i c a . Ako je [illegible] tada

$$\lim P(D_n) \subset D \quad . \tag{13}$$

Dokaz. $P(D_n) \subset P(D_n)$ [illegible] a tada iz uslova (11) i (12) sledi tvrdjenje.

Sada možemo definisati aproksimaciju po funkcionalu zadataka vektorske optimizacije.

D e f i n i c i j a 6. Niz zadataka [illegible] I-aproksimira zadatak [illegible] ako važi (13).

T E O R E M A 2. Ako postoje preslikavanja

$$P_n : X_n \to X \ , \ Q_n : X \to X_n \quad n \in N$$

takva da : a) $Q_n(U) \subset U_n$ i za svako [illegible] važi

$$\lim_{n \to \infty} (I_n(Q_n u) - I(u)) = 0 \tag{14}$$

b) $P_n(U_n) \subset U$ i za svaki niz $u_n \in U_n$ važi

$$\lim_{n \to \infty} (I(P_n(u_n)) - I_n(u_n)) = 0 \tag{15}$$

i skupovi $P(D)$ i D , $P(D_n)$ i D_n su konfinalni

tada

$$P(D) \subset [illegible] P(D_n) [illegible] \tag{16}$$

$$\lim [illegible] \tag{17}$$

D o k a z . Prve dve inkluzije slede iz teoreme 1. pa treba još dokazati poslednju inkluziju. Pretpostavimo da postoji niz [illegible] i niz [illegible] takav da [illegible] .

Tada postoji niz u_n takav da [illegible] pa iz uslova (15) dobijamo

[illegible]

odnosno $g \in D$ jer je D zatvoren skup. Kako je [33], [illegible] na osnovu teoreme 1. sledi da [illegible]. Tako je (16) dokazano. Uočimo sada proizvoljni niz [illegible] takav da [illegible]. Kao i kod dokaza prethodne inkluzije sledi da $g \in D$ odnosno [illegible]. Ako je sada [illegible] proizvoljna tačka iz [illegible] tada za svako [illegible] postoji [illegible] tako da [illegible] što zajedno sa uslovom (14) daje [illegible] a prema definiciji 4. sledi [illegible] odnosno [illegible]. Iz dokazanih inkluzija [illegible] sledi (17). Dokaz je završen.

U sledećoj teoremi dokazani su neophodni uslovi [illegible]-aproksimacije zadatka [illegible] nizom zadataka [illegible].

D e f i n i c i j a 7. Niz zadataka [illegible] [illegible]-aproksimira zadatak [illegible] ako niz [illegible] [illegible]-konvergira ka [illegible].

T E O R E M A 3. Ako su skupovi [illegible] i [illegible], [illegible] i [illegible] konfinalni i ako niz zadataka [illegible] [illegible]-aproksimira zadatak [illegible] tada postoje preslikavanja [illegible] i [illegible] koja zadovoljavaju uslove (9) i (1o).

D o k a z. Za svako [illegible] postoji, na osnovu uslova konfinalnosti, [illegible] takvo da [illegible]. Iz uslova teoreme sledi egzistencija niza [illegible] takvog da [illegible]. Sa druge strane postoji niz tačaka [illegible] takvih da [illegible] jer je [illegible] zatvoren skup.

Definišimo preslikavanje Q_n na sledeći način $\forall u \in U$ $Q_n(u) = u_n$,gde je u_n prethodno definisan niz, i pokažimo da je ispunjen uslov (9).Naime

$$I_n(Q_n(u)) - J(u) = I_n(Q_n(u)) \text{ [illegible] } J(u)$$

odakle sledi da za proizvoljno [illegible] postoji [illegible] tako da

$$I_n(Q_n(u)) - J(u) \leq \varepsilon$$

što znači da je ispunjen uslov (9).

Dalje, neka je $u_n \in U_n, n \in N$ proizvoljni niz. Na osnovu uslova konfinalnosti postoji niz tačaka $j_n \in S(D_n)$ takvih da $j_n - I_n(u_n) \leq 0$. Iz uslova teoreme sledi egzistencija niza tačaka $j^{(n)} \in S(D)$ takvih da $\lim_{n \to \infty}(j_n - j^{(n)}) = 0$, a na osnovu definicije tačaka $j^{(n)}$ postoji niz $u^{(n)} \in U$ takav da je $\lim_{n \to \infty}(J(u^{(n)}) - j^{(n)}) = 0$.

Definišimo preslikavanje P_n na sledeći način $\forall n \in N$ $P_n(U_n) = \{u^{(n)}\}$, gde je $u^{(n)}$ prethodno definisan niz, i pokažimo da je ispunjen uslov (lo). Na osnovu jednakosti

$$J(P_n(u_n)) - I_n(u_n) = J(u^{(n)}) - j^{(n)} + j^{(n)} - j_n + j_n - I_n(u_n)$$

sledi da za svako $\varepsilon \in$ [illegible] postoji [illegible] tako da važi relacija (lo). Dokaz je završen.

Dokažimo još jednu teoremu o dovoljnim uslovima za h-aproksimaciju zadatka $\tilde{Z}_p$ nizom zadataka $\tilde{Z}_{np}$.

T E O R E M A 4. Ako su skupovi [illegible], [illegible] kompaktni a [illegible] i [illegible], [illegible] i [illegible] konfinalni skupovi i [illegible] tada niz zadataka $\tilde{Z}_{np}$ h-aproksimira zadatak $\tilde{Z}_p$ ako i samo ako postoje preslikavanja

$$P_n : X_n \to X \; ; \; Q_n : X \to X_n \quad n \in N$$

takva da su ispunjeni uslovi a) i b) teoreme 1.

D o k a z . Tvrdjenje teoreme sledi iz posledice teoreme 1., teoreme 3. i činjenice da je

$$\lim h(P(D_n), P(D)) = 0 \iff \lim P(D_n) = P(D)$$

ako su $P(D_n)$ i $P(D)$ kompaktni skupovi [23] .Dokaz završen.

Teoreme 1.-4. omogućuju da se ispitivanje zadatka Z, svede na ispitivanje niza zadataka Z_n pod uslovom da znamo da konstruišemo preslikavanja P_n i Q_n . Na primer , ako je u pitanju problem vektorske optimizacije sistema sa raspoređjenim parametrima a funkcionali imaju neku neprekidnost onda se za niz aproksimativnih zadataka može uzeti niz zadataka vektorske optimizacije sistema koji se opisuje odgovarajućum diferencnom shemom a P_n je neki operator produženja [32] a Q_n neki operator usrednjenja [32] , [41], [44]. Rešavanje aproksimativnih konačno-dimenzionih zadataka ,na koje se svodi početni zadatak , je takodje težak problem koji se u poslednje vreme sve više izučava . U [4] navedena je opširna literatura po ovom pitanju.

§ 2. Aproksimacija jednokriterijalnih zadataka optimizacije

U ovom paragrafu citiraćemo neke teoreme o opštim uslovima aproksimacije po funkcionalu jednokriterijalnih zadataka optimizacije. Dokazi niže navedenih teorema , koje su dokazali Vasiljev i Avakov sledeći ideje Budaka [5],[6],[7] mogu se naći u knjizi [48]. Koristićemo standardne oznake iz radova [7],[48].

Poatavka zadatka. Neka su dati skupovi $X, X_1, X_2, \ldots$ proizvoljne prirode. Elemente skupa X označavaćemo sa u a elemente skupova X_n sa $[u]_n$ .Neka je $\emptyset \neq U \subset X$, $\emptyset \neq U_n \subset X_n$, $n \in N$. Funkcionali $J(u), I_1([u]_1), I_2([u]_2), \ldots$ definisani su na $U, U_1, U_2, \ldots$ respektivno.

Zadatak je nalaženje

$$\inf_{u \in U} J(u) \tag{1}$$

a niz aproksimativnih zadataka je nalaženje

$$\inf_{[u]_n \in U_n} I_n([u]_n) \quad , n = 1,2, \ldots \tag{2}$$

D e f i n i c i j a 1. Niz zadataka (2) aproksimira po funkcionalu zadatak (1) ako

$$\lim_{n \to \infty} I_{n*} = J_* \tag{3}$$

gde je $J_* = \inf_{U} J(u)$, $I_{n*} = \inf_{U_n} I_n([u]_n)$, $n = 1,2, \ldots$

Napomena. Lako se može pokazati da je aproksimacija po funkcionalu ekvivalentna L-aproksimaciji , definicija 1.1.6. za $k = 1$.

T E O R E M A 1. 48 a) Niz zadataka (2) aproksimira po funkcionalu zadatak (1) ako i samo ako postoje preslikavanja $P_n : X_n \to X$, $Q_n : X \to X_n$, $n=1,2,\dots$ tako da

1) za svako $u \in U$ važi $Q_n(u) \in U_n$, $n \in N$ i

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(I_n(Q_n(u)) - J(u) \right) \le 0 \qquad (4)$$

2) za svako $[u]_n \in U_n$ važi $P_n([u]_n) \in U$, $n \in N$ i

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(J(P_n([u]_n)) - I_n([u]_n) \right) \le 0 \qquad (5)$$

za svaki niz $\{[u]_n\}$.

b) Ako važi a) i postoje nenegativni nula nizovi $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$ takvi da za svako $u \in U$ važi

$$I_n(Q_n(u)) - J(u) \le \beta_n, \quad n = 1,2,\dots \qquad (6)$$

i za svako $[u]_n \in U_n$ važi

$$J(P_n([u]_n)) - I_n([u]_n) \le \delta_n, \quad n = 1,2,\dots \qquad (7)$$

tada važi ocena

$$-\delta_n \le I_{n*} - J_* \le \beta_n, \quad n = 1,2,\dots \qquad (8)$$

c) ako je niz $\{[u]_{n\varepsilon}\}$ takav da $[u]_{n\varepsilon} \in U_n$ i

$$I_{n*} \le I_n([u]_{n\varepsilon}) \le I_{n*} + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \qquad (9)$$

tada, ako važi a) sledi $\lim_{n\to\infty} J(P_n([u]_{n\varepsilon})) = J_*$

a ako važi i b) tačna je ocena

$$0 \le J(P_n([u]_{n\varepsilon})) - J_* \le \beta_n + \delta_n + \varepsilon_n, \quad n = 1,2,\dots \qquad (10)$$

D o k a z . Tvrdjenje a) direktno sledi iz teorema 1.1.1. i 1.1.3. za $k = 1$. Dalje iz (6) sledi da za svako $u \in U$

$$I_{n*} \le I_n(Q_n(u)) \le J(u) + \beta_n, \quad n = 1,2,\dots$$

odnosno

$$I_{n*} \le J_* + \beta_n, \quad n = 1,2,\dots \qquad (11)$$

a iz ocene (7) imamo

$$J_* \le J(P_n(\Pi_n u_{n\varepsilon})) \le I_n(\Pi_n u_n) + \delta_n \qquad n = 1,2,\dots$$

odnosno

$$J_* \ge I_{n*} - \delta_n \qquad n = 1,2,\dots \qquad (12)$$

Iz (11) i (12) sledi (8). Dalje, iz jednakosti

$$0 \le J(P_n(Q_n u_{n\varepsilon})) - J_* = J(P_n(Q_n u_{n\varepsilon})) - I_n(Q_n u_{n\varepsilon}) + I_n(Q_n u_{n\varepsilon}) - I_{n*} + I_{n*} - J_*$$

pomoću (7) , (8),(9) dobijamo ocenu (lo).Dokaz je završen..

Konstrukcija preslikavanja P_n i Q_n sa osobinama $P_n(U_n) \subseteq U$, $Q_n(U) \subseteq U_n$, $n \in N$ je često vrlo složena ili nemoguća. U mnogim zadacima mogu se relativno prosto konstruisati preslikavanja P_n i Q_n ali sa osobinama $P_n(U_n) \subseteq U^{\varepsilon}$, $Q_n(U) \subseteq U_n^{\varepsilon}$, $n \in N$ gde su U^{ε}, U_n^{ε} neka proširenja ili suženja skupova U, U_n.U takvim slučajevima može se iskoristiti sledeća teorema.

T E O R E M A 2. [48] Niz zadataka (2) aproksimira po funkcionalu zadatak (1) ako i samo ako za neko $\varepsilon_0 > 0$ postoje familije nepraznih skupova $U^{\varepsilon} \subseteq X$, $U_n^{\varepsilon} \subseteq X_n$ za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ i preslikavanja $P_n: X_n \to X$, $Q_n: X \to X_n$ takva da je funkcional $J(u)$ definisan na $\bigcup_{\varepsilon} (U^{\varepsilon} \cup U^{-\varepsilon})$ i

1) za svako ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ postoji $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tako da važi $Q_n(u) \in U_n$ za svako $u \in U^{-\varepsilon}$ i $n > n_1$ i za svako fiksirano $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ i za svako $u \in U^{-\varepsilon}$ važi

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(I_n(Q_n(u)) - J(u) \right) \le 0 \qquad (13)$$

2) za svako $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ postoji $n_2 = n_2(\varepsilon)$ tako da $P_n(\Pi_n u_n) \in U^{\varepsilon}$

za svako $[u]_n \in U_n$ i $n \geq n_2$ i za bili kakav niz $[u]_n \in U_n, n \in N$

važi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(J(P_n([u]_n)) - I_n([u]_n) \right) \leq 0 \tag{14}$$

3) važe nejednakosti

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \inf_{U^{\varepsilon}} J(u) \leq J_* \tag{15}$$

$$\underline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \inf_{U^{-\varepsilon}} J(u) \geq J_* \tag{16}$$

U sledećoj teoremi pokazuje se mogućnost ocene greške.

T E O R E M A 3. [48] a) Niz zadataka (2) aproksimira po funkcionalu zadatak (1) ako i samo ako postoji niz nepraznih skupova $U^{\varepsilon_n} \subseteq X, n \in N$ i preslikavanja $Q_n : X \to X_n$, $P_n : X_n \to X$ takva da je funkcional $J(u)$ definisan na $U \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U^{\varepsilon_n} \right)$ i

1) za svako $u \in U$ važi $Q_n(u) \in U_n, n \in N$ i

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(I_n(Q_n(u)) - J(u) \right) \leq 0$$

2) za svako $[u]_n \in U_n$ važi $P_n([u]_n) \in U^{\varepsilon_n}, n \in N$ i

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(J(P_n([u]_n)) - I_n([u]_n) \right) \leq 0$$

3) $\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{U^{\varepsilon_n}} J(u) \geq J_*$.

b) Ako važi a) i postoje nenegativni nula nizovi $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}, \{\gamma_n\}$ takvi da za svako $u \in U, [u]_n \in U_n, n \in N$

$$I_n(Q_n(u)) - J(u) \leq \gamma_n \tag{17}$$

$$J(P_n([u]_n)) - I_n([u]_n) \leq \delta_n \tag{18}$$

$$J_* - \inf_{U^{\varepsilon_n}} J(u) \leq \beta_n \tag{19}$$

tada

$$-\beta_n - \delta_n \leq I_{n*} - J_* \leq \gamma_n .$$

§ 3. Aproksimacija glatko-konveksnih zadataka jednokriterijalne optimizacije

U ovom paragrafu razmatra se specijalni slučaj zadatka 1.2.(1) kada su skupovi X, X_i, [illegible] hilbertovi prostori a funkcionali [illegible] diferencijabilni konveksni funkcionali na konveksnim skupovima U, U_1, U_2, ... U ovom slučaju uslovi aproksimacije po funkcionalu, koji se dokazuju u sledećim teoremama, lakši su za proveru.

T E O R E M A 1. Neka je X hilbertov prostor a $U \subseteq X$ je konveksan, zatvoren i ograničen skup, i neka je funkcional $J: U \to R$ konveksan i diferencijabilan u Frechet-ovom smislu na U. Neka su dalje X_i, $i=1,2,\ldots$ zadati hilbertovi prostori i $U_i \subseteq X_i$, $i=1,2,\ldots$ su konveksni, zatvoreni i ograničeni skupovi a $I_n: U_n \to R$ su konveksni funkcionali diferencijabilni u Frechet-ovom smislu na U_n .

a) Ako postoje linearni ograničeni operatori $P_n: X_n \to X$, $Q_n: X \to X_n$, $n=1,2,\ldots$ takvi da $P_n(U_n) \subseteq U$ i $Q_n(U) \subseteq U_n$ i važe uslovi

1) [illegible] (1)

za svako $[x]_n, [y]_n \in X_n$, $n=1,2,\ldots$

2) za svako $u \in U$ važi

$$\lim_{n\to\infty}\left(I_n(Q_n(u)) - J(u)\right) = 0 \tag{2}$$

3) za svako $u \in X$

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(Q_n(u)) - u\|_X = 0 \tag{3}$$

4) za svako $u \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(I_n'(Q_n(u))) - J'(u) \|_X = 0 \qquad (4)$$

tada

$$\lim_{n\to\infty} I_{n*} = J_* \qquad (5)$$

b) Ako je $[v]_{n\varepsilon} \in U_n$ takav niz tačaka da važi $I_n([v]_{n\varepsilon}) \leq I_{n*} + \varepsilon_n$ gde je ε_n nenegativan nula niz

tada

$$\lim_{n\to\infty} I_n([v]_{n\varepsilon}) = J_* \qquad (6)$$

i sve tačke nagomilavanja niza $P_n([v]_{n\varepsilon})$,u slaboj topologiji u X , pripadaju skupu $U_* = \{u : J(u) = \inf_U J(u)\}$.

c) Ako važe tvrdjenja a) i b) i $J(u)$ je slabo neprekidan funkcional tada

$$\lim_{n\to\infty} J(P_n([v]_{n\varepsilon})) = J_* \qquad (7)$$

D o k a z. a) Kako je U zatvoren, ograničen i konveksan skup on je slabo kompaktan [50], a J je konveksan Frechet-diferencijabilan pa je slabo poluneprekidan odozdo [9], i dostiže infimum na U [47]. Neka je sada $u_* \in U \cap U_*$ tada na osnovu uslova (2)

$$\lim_{n\to\infty} (J(u_*) - I_n(Q_n(u_*))) = 0 \qquad (8)$$

Na osnovu istih rasudjivanja može se dokazati $[v]_{n*} \in U_n \cap U_{n*}$.

Dalje , za $[v]_{n*} \in U_n \cap U_{n*}$

$$I_n(Q_n(u_*)) - I_n([v]_{n*}) \leq \langle I_n'(Q_n(u_*)), Q_n(u_*) - [v]_{n*} \rangle_{X_n} =$$

$$= \langle P_n(I_n'(Q_n(u_*))), P_n(Q_n(u_*)) - P_n([v]_{n*}) \rangle_X =$$

$$= \langle P_n(I_n'(Q_n(u_*))) - J'(u_*), P_n(Q_n(u_*)) - P_n(\omega_{n*}) \rangle_X +$$

$$+ \langle J'(u_*), P_n(Q_n(u_*)) - \text{[illegible]} \rangle_X \le$$

$$\le \|P_n(I_n'(Q_n(u_*))) - J'(u_*)\| \cdot \|P_n(Q_n(u_*)) - P_n(\omega_{n*})\|_X +$$

$$+ \|J'(u_*)\| \cdot \|P_n(Q_n(u_*)) - u_*\|_X + \langle J'(u_*), u_* - P_n(\omega_{n*}) \rangle \qquad (9)$$

Na osnovu osobine operatora P_n da [illegible], iz pretpostavki (3) i (4), ograničenosti skupa [illegible] i osobina tačke u_* sledi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(I_n(Q_n(u_*)) - I_n(\omega_{n*}) \right) \le 0 \qquad (10)$$

Iz jednakosti

$$J_* - I_{n*} = J(u_*) - I_n(Q_n(u_*)) + I_n(Q_n(u_*)) - I_n(\omega_{n*})$$

i (9) i (10) sledi $\overline{\lim_{n\to\infty}} (J_* - I_{n*}) \le 0$ (11)

Sa druge strane

$$I_{n*} - J_* = I_{n*} - I_n(Q_n(u_*)) + I_n(Q_n(u_*)) - J(u_*)$$

pa iz (2) imamo $\overline{\lim_{n\to\infty}} (I_{n*} - J_*) \le 0$ (12)

Iz (11) i (12) sledi (5).

b) Uočimo bilo koji slabo konvergentni podniz niza $P_n(\omega_{n_k*})$ i neka on slabo konvergira ka ω°

$$P_n(\omega_{n_k*}) \rightharpoonup \omega^\circ \qquad (13)$$

Treba pokazati da [illegible]. Za svako [illegible] važi

$$\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}$$

$$+ \langle I_{n_k}'(Q_{n_k}(\omega^\circ)), Q_{n_k}(\omega^\circ) - \omega_{n_k*} \rangle \text{[illegible]} \qquad (14)$$

Dalje imamo $\langle I_{n_k}'(Q_{n_k}(\omega^\circ)), Q_{n_k}(\omega^\circ) - \omega_{n_k*} \rangle_{n_k} =$

[illegible]

$$[illegible] \qquad (15)$$

Ako sada $k \to \infty$ iz (3),(4),(13),(14),(15) a prema uslovima teoreme [illegible] .Tako je dokazano tvrdjenje b).

c) Tvrdjenje sledi iz b) , osobina skupa [illegible] i funkcionala $J(u)$. Dokaz je završen.

U prethodno dokazanoj teoremi pored aproksimacije izvršena je regularizacija niza aproksimativnih zadataka (tvrdjenja b) i c)). U sledećoj teoremi dokazan je potreban i dovoljan uslov aproksimacije zadatka 1.2.(1) nizom zadataka 1.2.(2) u kojem učestvuje samo preslikavanje Q_n .

T E O R E M A 2. Neka je [illegible] konveksan i Frechet-diferencijabilan funkcional a [illegible] konveksan skup u nekom banahovom prostoru [illegible] za [illegible] .

Tada

$$\lim_{n\to\infty} I_{n*} = [illegible] \qquad (16)$$

ako i samo ako: 1) postoji niz $\{u_k\}$ takav da [illegible]

2) postoji preslikavanje [illegible] sa osobinom [illegible]

3) postoji niz $\{\omega_n\}$ takav da važi [illegible]

$$\lim (I_n(Q_n(\omega_n)) - I_{n*}) = 0$$

4) $$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} (I_n(Q_n(u_k)) - J(u_k)) = 0$$

5) $\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle I_n'(Q_n(u_k)), Q_n(u_k) - [u^0]_n \rangle \le 0$

($\langle f, x\rangle$ je oznaka za dejstvo linearnog funkcionala f na element x).

D o k a z . Neka važi (16) . Izaberimo niz $[u^0]_n \in U_n$ tako da $\lim_{n\to\infty} \| [u^0]_n - u_{n*} \| = 0$ i definišimo preslikavanje

$$Q_n(u) = [u^0]_n \quad \text{za svako } u \in X \tag{17}$$

Uslovi 2) , 3) , 5) se vrlo jednostavno proveravaju. Treba još dokazati 4) jer 1) sledi iz postavke zadatka 1.2.(1) . Neka niz u_k zadovoljava 1) . Tada

$$J(u_k) - I_n(Q_n(u_k)) = J(u_k) - J_* + J_* - I_{n*} + I_{n*} - I_n(Q_n(u_k))$$

pa iz 1), 3), (16) i (17) sledi tvrdjenje 4) .

Neka sada važe uslovi 1) - 4) . Na osnovu nejednakosti

$$J_* - I_{n*} = J_* - J(u_k) + J(u_k) - I_n(Q_n(u_k)) +$$
$$+ I_n(Q_n(u_k)) - I_{n*} \ge J_* - J(u_k) + J(u_k) - I_n(Q_n(u_k))$$

i iz uslova 1) i 4) sledi

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (J_* - I_{n*}) \ge 0 \tag{18}$$

Dalje je $J_* - I_{n*} = J_* - J(u_k) + J(u_k) - I_n(Q_n(u_k)) +$

$$+ I_n(Q_n(u_k)) - I_n([u^0]_n) + I_n([u^0]_n) - I_{n*} \le J_* - J(u_k) +$$
$$+ J(u_k) - I_n(Q_n(u_k)) + \langle I_n'(Q_n(u_k)), Q_n(u_k) - [u^0]_n \rangle + I_n([u^0]_n) - I_{n*}$$

pa na osnovu 1) , 4) , 5) , 3) sledi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (J_* - I_{n*}) \le 0 \tag{19}$$

Iz (18) i (19) sledi (16). Dokaz je završen.

Na osnovu dokazane teoreme zaključuje se da u slučaju glatko-konveksnih zadataka lako dokazujemo aproksimaciju.

§ 4. Aproksimacija max-min zadataka

Ideje iz prethodnih paragrafa mogu se iskoristiti i za konstrukciju niza aproksimativnih zadataka za zadatak max-min optimizacije. Teoreme koje navodimo u ovom paragrafu dokazali su Avakov i Vasiljev [3, 48], a slična problematika razmatrana je i u radovima [16], [36], [37].

Postavka zadatka. Neka su X, Y skupovi proizvoljne prirode a U, V su dati skupovi $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$. Na skupu $U \times V$ definisan je funkcional $J: U \times V \to R$.

Rešava se zadatak nalaženja veličine

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in V} J(u,v) = J_* \qquad (1)$$

Zadaci ovog tipa sreću se u teoriji igara, aproksimaciji funkcija i.t.d. U radovima [15] i [16] navedena je literatura po ovom pitanju.

Postavka niza aproksimativnih zadataka. Neka su skupovi X_n, Y_n, $n=1,2,\ldots$ proizvoljne prirode a $U_n \subseteq X_n$, $V_n \subseteq Y_n$, $n=1,2,\ldots$ su dati skupovi. Za svako $n=1,2,\ldots$ definisan je funkcional $I_n: U_n \times V_n \to R$.

Zadatak koji rešavamo je : za svako $n=1,2,\ldots$ naći veličinu

$$\sup_{[u]_n \in U_n} \inf_{[v]_n \in V_n} \left(I_n([u]_n, [v]_n) \right) = I_{n*} \qquad (2)$$

Skupovi U, U_n, V, V_n nisu medjusobno zavisni.

Prirodno se postavlja problem kada će niz zadataka (2) aproksimirati po funkcionalu zadatak (1) odnosno

$$[illegible] \tag{3}$$

T E O R E M A 1. [48] Niz zadataka (2) aproksimira po funkcionalu (u smislu jednakosti (3)) zadatak (1) ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi :

1) za svako $n \in N$ postoje preslikavanja $P_n : X_n \to X$ i za svako $[u]_n \in U_n$ postoje preslikavanja $Q_n : Y \to Y_n$ takva da $P_n(U_n) \subseteq U$, $Q_n(V) \subseteq V_n$ i za svako $[u]_n, v_n$ važi

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(I_n([u]_n, Q_n(v_n)) - J(P_n([u]_n), v_n) \right) \leq 0 \tag{4}$$

2) za svako $n \in N$ postoje preslikavanja $\overline{Q}_n : X \to X_n$ i za svako $u \in U$ postoje preslikavanja $\overline{P}_n : Y_n \to Y$ takva da $\overline{Q}_n(U) \subseteq U_n$, $\overline{P}_n(V_n) \subseteq V$ i za svako $u \in U$, $[v]_n \in V_n$ važi

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(J(u, \overline{P}_n([v]_n)) - I_n(\overline{Q}_n(u), [v]_n) \right) \leq 0 \tag{5}$$

(Preslikavanja Q_n i $\overline{P}_n$ u opštem slučaju zavise od izbora $[u]_n \in U_n$, $u \in U$).

U formulisanoj teoremi skupovi U i V nisu bili medjusobno zavisni. Takve zadatke zvaćemo max-min zadaci sa nezavisnim argumentima. U teoriji igara sa neprotivurečnim interesima [16] ili u zadacima sa ograničenjima na stanje javljaju se zadaci u kojima su skupovi U, V zavisni. Takve zadatke nazivaćemo zadaci sa zavisnim skupovima.

Neka su X, Y proizvoljni skupovi i neka je $U \subseteq X$ zadat i neka svakom $u \in U$ odgovara neki skup

$V(u)\subseteq Y$, i neka je dat funkcional $J: U\times V \to R$.

Zadatak koji se rešava je nalaženje veličine

$$\sup_{u\in U}\ \inf_{v\in V(u)} J(u,v) = J_* \qquad (6)$$

Neka su X_n, Y_n , $n\in N$ proizvoljni skupovi , skupovi $U_n\subseteq X_n$, $n\in N$ su dati skupovi pri čemu svakom $[u]_n\in U_n$ odgovara skup $V_n([u]_n)\subseteq Y_n$ a funkcionali $I_n: U_n\times Y_n\to R$ su poznati za svako $n\in N$.

Niz aproksimativnih zadataka je naći

$$\sup_{[u]_n\in U_n}\ \inf_{[v]_n\in V_n([u]_n)} I_n([u]_n,[v]_n) = I_{n*} \qquad (7)$$

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove da niz zadataka (7) aproksimira po funkcionalu zadatak (6).

T E O R E M A 2. [48] Niz zadataka (7) aproksimira po funkcionalu zadatak (6) ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi :

1) za svako $n\in N$ postoji preslikavanje $P_n: X_n\to X$ i za proizvoljno fiksirano $[u]_n\in U_n$ postoje preslikavanja $Q_n: Y\to Y_n$ takva da $P_n(U_n)\subseteq U$, $Q_n(V(P_n([u]_n)))\subseteq V_n([u]_n)$ i za svako $v_n\in V(P_n([u]_n))$, $[u]_n\in U_n$ važi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\big(I_n([u]_n, Q_n(v_n)) - J(P_n([u]_n), v_n)\big)\le 0$$

2) za svako $n\in N$ postoji preslikavanje $\bar{Q}_n: X\to X_n$ i za proizvoljno fiksirano $u\in U$ postoje preslikavanja $\bar{P}_n: Y_n\to Y$ tako da $\bar{Q}_n(U)\subseteq U_n$, $\bar{P}_n(V_n(\bar{Q}_n(u)))\subseteq V(u)$

i za svako $[u]_n \in V_n(\bar{Q}_n(u))$, $u \in U$ važi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(J(u, \bar{P}_n([u]_n)) - I_n(\bar{Q}_n(u), [u]_n)) \le 0$$

U konkretnim zadacima vrlo je teško konstruisati preslikavanja P_n, Q_n koja bi zadovoljavala uslove teorema 1.4.1. i 1.4.2. . Teškoće takve prirode često se mogu smanjiti ako se radi sa nekim proširenjima i suženjima skupova U, V. Takve ideje javljaju se i u teoremama 1.2.2. i 1.2.3. Sledeća teorema, koju su dokazali Avakov i Vasiljev [48], daje potrebne i dovoljne uslove za aproksimaciju po funkcionalu ako se mora raditi sa proširenjima i suženjima početnih skupova.

T E O R E M A 3. [48] Niz zadataka (7) aproksimira po funkcionalu zadatak (6) ako i samo ako postoje nizovi skupova $U^{\varepsilon_n} \subseteq X$, $V^{\lambda_n}(u), V^{-\delta_n}(u) \subseteq Y$ takvi da je $U^{-\varepsilon_n} \neq \emptyset$, $V^{-\delta_n}(u) \neq \emptyset$ za $u \in U$, $V^{-\delta_n}(u) \neq \emptyset$ za $u \in U^{\varepsilon_n}$, $n=1,2,\dots$, a funkcional $J: ((\bigcup_{n=1}^{\infty} U^{\varepsilon_n}) \cup U) \times Y \to R$ i važe sledeći uslovi

1) za svako $n \in N$ postoje $P_n: X_n \to X$ i za proizvoljno fiksirano $[u]_n \in U_n$ postoje preslikavanja $Q_n: Y \to Y_n$ takva da $P_n(U_n) \subseteq U^{-\varepsilon_n}$, $Q_n(V^{\delta_n}(P_n([u]_n))) \subseteq V_n([u]_n)$ i za svako $v_n \in V^{-\delta_n}(P_n([u]_n))$ važi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(I_n([u]_n, Q_n(v_n)) - J(P_n([u]_n), v_n)) \le 0$$

2) za svako $n \in N$ postoji preslikavanje $\bar{Q}_n: X \to X_n$ i za svako fiksirano $u \in U$ postoje preslikavanja $\bar{P}_n: Y_n \to Y$ takva da $\bar{Q}_n(U) \subseteq U_n$, $\bar{P}_n(V_n(\bar{Q}_n(u))) \subseteq V^{\lambda_n}(u)$

i za svako $[\ldots]_n \in V_n(\bar{Q}_n[illegible])$ važi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; [illegible] \; - I_n(\bar{C}_n(\cdot)) \; [illegible] = 0$$

3) važe nejednakosti

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \; J_*(0, [illegible]) \geq J_*$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; J_*(\varepsilon_n, [illegible]) \leq J_*$$

gde je

$$J_*(\varepsilon_n, \delta_n) = \sup_{u \in U^{[illegible]}} \; \inf_{v \in V^{[illegible]}} J(u, v)$$

$$J_*(0, X_n) = \sup_{u \in U} \; \inf_{v \in V^{X_n}[illegible]} J(u, v) \quad .$$

II D E O

Regularizacija aproksimativnog niza ekstremalnih i max-min zadataka

§ 1. Regularizacija

U prethodnoj glavi razmatrali smo ekstremalne zadatke u kojima treba naći $\inf_{U} J(u) = J_*$ i pri tome nismo , osim u teoremi 1.3.1. , razmatrali problem nalaženja onih tačaka $u_* \in U$ u kojima se infimum dostiže . Takodje nismo razmatrali problem nalaženja minimizacionog niza na osnovu konstrukcije aproksimativnih zadataka.

U primenama veliki značaj imaju i zadaci u kojima se pored veličine J_* traži bar jedna tačka u_* za koju se infimum i dostiže, a u slučaju da takva tačka ne postoji treba naći jedan minimizacioni niz. Takav zadatak se naziva optimizacija po argumentu . Da bi ovakav zadatak imao smisla prirodno se postavlja uslov

$$U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset .$$

Pre nego što predjemo na regularizaciju aproksimacije ekstremalnih zadataka, definisaćemo neke standardne pojmove regularizacije. Fundamentalni radovi o nekorektnim zadacima pripadaju Tihonovu [45] gde su i definisani osnovni pojmovi teorije nekorektnih zadataka koje i navodimo u ovom paragrafu.

U daljem tekstu , na osnovu rezultata prethodne glave, podrazumeva se mogućnost konstrukcije minimizirajućeg niza [illegible] takvog da [illegible] $\to$ [illegible].

Neka je U topološki prostor s topologojom τ .

D e f i n i c i j a 1. Zadatak 1.2.(1) je korektno postavljen u topologiji τ ako bilo koji minimizirajući niz $\{u_k\}$ τ-konvergira ka skupu U_* . Ako postoji bar jedan minimizirajući niz koji u topologiji τ ne konvergira ka skupu U_* onda se kaže da zadatak 1.2.(1) nije korektan u topologiji τ .

Ako je zadatak korektno postavljen onda se za aproksimaciju rešenja može uzeti član sa dovoljno velikim indeksom iz bilo kojeg minimizirajućeg niza. Ako je zadatak nekorektan treba izvršiti regularizaciju odnosno konstruisati minimizirajući niz koji u zadatoj topologiji konvergira ka nekom elementu skupa U_* .

U slučaju kada skup U_* sadrži više od jedne tačke postavlja se pitanje nalaženja "najboljeg"rešenja iz skupa U_* . Neka je na U definisan funkcional [illegible] $\to R$.

D e f i n i c i j a 2. Tačku [illegible] $\in U_*$ nazivamo [illegible] -normalno rešenje zadatka 1.2.(1) ako [illegible] $= \inf$ [illegible] .
$u \in U_*$

D e f i n i c i j a 3. Funkcional $\Omega(u)$ definisan na nepraznom skupu $U_\Omega \subseteq U$ nazivamo s t a b i l i z a t o - r o m zadatka 1.2.(1) u topologiji ako :

1) $\Omega(u) \geq 0$ za svako $u \in U_\Omega$,

2) skup $\Omega_c = \{u \in U_\Omega : \Omega(u) \leq c\}$ je -sekvencijalno kompaktan za svako $c \geq c^*$,

3) $U_{\Omega *} = U_\Omega \cap U_* \neq \emptyset$

Za rešavanje problema regularizacije koristićemo sledeći metod ; minimizirajuće niz $\{u_k\}$ se definiše uslovima

$$T_k(u_k) = \inf_{u \in U_\Omega} T_k(u) \;, \quad u_k \in U_\Omega \;, \; k = 1,2,\ldots$$

gde je Ω stabilizator a funkcional Tihonova T_k je $T_k(u) = J(u) + \alpha_k \Omega(u)$ a $\{\alpha_k\}$ je pozitivni nula niz.

U monografiji [45] dokazani su opšti uslovi pod kojima minimizirajući niz definisan pomoću funkcionala Tihonova konvergira ka rešenju polaznog problema. U [45] je takodje pokazano da je izbor topologije u skupu U vrlo važan. Isti zadatak u raznim topologijama može biti i korektan i nekorektan . U [45] su pokazani vrlo interesantni kontraprimeri. Jedan primer nekorektno postavljenog zadatka je i problem optimalnog zagrevanja štapa [8] [29] . U trećem delu ovog rada izvršićemo regularizaciju zadatka optimalnog zagrevanja štapa.

§ 2. Regularizacija aproksimativnog niza ekstremalnih zadataka

U ovom paragrafu navešćemo teoremu Avakova, o opštim kriterijumima regularizacije aproksimativnog niza ekstremalnih zadataka , koju ćemo primeniti u trećem delu. Dokaz ove teoreme nalazi se u [48] .

Neka su zadati skup X , na kojem je definisana neka topologija τ , i funkcional $J : X \to R$.

Zadatak koji rešavamo je standardan : naći

$$\inf_{u \in U} J(u) = J_* \tag{1}$$

gde je $U \subseteq X$ dati skup . Pretpostavimo još da

$$J_* = \inf_{u \in U} J(u) > -\infty , \; U_* = \{ u \in U : J(u) = J_* \} \neq \emptyset .$$

Neka niz zadataka , naći

$$\inf_{u_n \in U_n} I_n(u_n) = I_{n*} \quad , \; n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

gde su X_n , U_n dati skupovi a $I_n : X_n \to R$ dati funkcionali , aproksimira po funkcionalu zadatak (1).

Zadatak regularizacije se sastoji u tome da se pomoću niza zadataka (2) konstruiše minimizirajući niz za zadatak (1) koji će τ -konvergirati ka skupu U_* .

T E O R E M A 1. [48] Neka su ispunjeni sledećih pet uslova :

1) $J_* > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$, [illegible] X ,

2) niz $\{u_n\}$ definisan je uslovima $u_n \in U_n$,

$T_n([u]_n) \le T_{n*} + \mu_n$, $n=1,2,\dots$ gde je T_n funkcional Tihonova za zadatak (2) odnosno

$$T_n([u]_n) = I_n([u]_n) + \alpha_n \Omega_n([u]_n), \quad T_n$$

$$\Omega_n : U_n \to R, \quad T_{n*} = \inf_{[u]_n \in U_n} T_n([u]_n), \quad \{\mu_n\} \text{ i } \{\alpha_n\} \text{ su}$$

pozitivni nula nizovi pri čemu μ_n može biti i nula ukoliko se infimum dostiže ,

3) postoji familija skupova $U^{\varepsilon_n} \subseteq X$ i preslikavanja $P_n : X_n \to X$ takva da

$$P_n(U_n) \subseteq U^{\varepsilon_n}, \quad n=1,2,\dots$$

$$J(P_n([u]_n)) - I_n([u]_n) \le \gamma_n, \quad n=1,2,\dots$$

$$\Omega(P_n([u]_n)) \le \Omega_n([u]_n) + \xi_n, \quad n=1,2,\dots$$

gde su $\{\gamma_n\}, \{\xi_n\}$ nula nizovi ,

4) postoje preslikavanja $Q_n : X \to X_n$ takva da

$$Q_n(U_*) \subseteq U_n, \quad n=1,2,\dots$$

$$\forall u_* \in U_* \quad I_n(Q_n(u_*)) - J(u_*) \le \beta_n, \quad n=1,2,\dots$$

$$\Omega_n(Q_n(u_*)) \le \Omega(u_*) + \eta_n, \quad n=1,2,\dots$$

gde su $\{\beta_n\}, \{\eta_n\}$ nula nizovi ,

5) važi ocena

$$J_* \le J_*(\varepsilon_n) + \nu_n; \quad J_*(\varepsilon_n) = \inf_{u \in U^{\varepsilon_n}} J(u), \quad n=1,2,\dots$$

gde je $\{\nu_n\}$ nula niz.

Tada

$$\lim_{n\to\infty} J(P_n([u]_n)) = J_* .$$

Neka pored uslova 1)-5) važe i sledeći uslovi

6) funkcionali J , [illegible] su [illegible] -sekvencijalno poluneprekidni odozdo na X ; Ω je [illegible] -stabilizator; ako niz $u_n \in (\ldots)_{n\in N}$ Z-konvergira ka [illegible] tada [illegible] ;

7) zadovoljena je jednakost

$$\lim_{n\to\infty} (\delta_n + \xi_n + [illegible]) = [illegible]$$

Tada niz $\{P_n([v]_n)\}$ Z -konvergira ka skupu

$$U_{**} = \{u \in U_* : \Omega(u) = \inf_{u \in U_*} \Omega(u)\}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(P_n([v]_n)) = \Omega_* \quad .$$

§ 3. Uslovi regularizacije po prvom argumentu aproksimativnog niza max-min zadataka sa nezavisnim argumentima

Razmotrimo ponovo zadatak 1.4.(1) uz dopunsku pretpostavku da je skup

$$U_* = \{u \in U : \inf_{v \in V} J(u,v) = J_*\} \neq \emptyset \qquad (1)$$

Kao niz aproksimativnih zadataka posmatrajmo ponovo zadatke 1.4.(2) .

U prvom delu dati su uslovi pod kojima niz zadataka 1.4.(2) aproksimira po funkcionalu zadatak 1.4.(1) . U ovom paragrafu citiraćemo teoremu Avakova o regularizaciji po prvom argumentu niza aproksimativnih zadataka , odnosno kako pomoću niza aproksimativnih zadataka naći minimizujući niz koji konvergira ka skupu (1) u odgovarajućoj topologiji.

Pre nego što predjemo na formulaciju teoreme uvedimo funkcional Tihonova za niz aproksimativnih zadataka

T_n [illegible] (2)

gde je $\{\alpha_n\}$ pozitivni nula niz.

Definišimo niz [illegible] iz uslova

T_n [illegible] $-\eta_n$ (3)

gde je $\{\eta_n\}$ nenegativni nula niz.

T E O R E M A 1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi

1) U je dati skup iz nekog banahovog prostora X $J: U \times V \to R$ je ograničen ; ispunjen je uslov (1) ; funkcional $\Omega: U \to R^+$ je strogo ravnomerno konveksan,

2) za svako $n \in N$ definisani su skupovi U_n i V_n i funkcionali $I_n: U_n \times V_n \to R$ i [illegible] ;

3) postoje preslikavanja P_n [illegible] i $Q_n: V \to V_n$ takva da za niz $\{[\tilde{u}]_n\}$ definisan uslovom (3) i niz $v_n \in V$ takav da

[illegible] μ_n

gde je $\{\mu_n\}$ nenegativan nula niz , važi

$J(P_n([\tilde{u}]_n, v_n) >$ [illegible] $\to 0$ (4)

$\Omega(P_n [\tilde{u}]_n)) \leq$ [illegible] $\to 0$ (5)

4) postoje preslikavanja $\overline{Q}_n: U \to U_n$ i $\overline{P}_n: V_n \to V$ takva da za svako $u_* \in U_*$ i za niz [illegible] takav da

[illegible] $-\nu_n$

gde je $\{\nu_n\}$ nenegativan nula niz , [illegible] $\in V_n$, [illegible] $\in V$ važi

$$I_n(\overline{Q}_n(u_*),[\widetilde{v}]_n) \geq$$ [illegible] (6)

$$\Omega_n(\overline{Q}_n(u_*)) \leq \Omega($$ [illegible] (7)

Tada

$\lim\inf$ [illegible]

Neka su pored uslova 1)-4) ispunjeni i sledeći uslovi : 5) $J(u,v)$ je za svako $v \in V$ slabo poluneprekidan odozgo na U ; $\Omega(u)$ je slabo poluneprekidan odozdo na U;

6) skup $\Omega_c = \{u \in U$ [illegible] je slabo kompaktan za svako $c > 0$;

7) $\lim_{n \to \infty} (\delta_n + \delta_n$ [illegible] $)/\alpha_n = 0$

8) za svako $u \in U$ skup $V(u)$ [illegible] gde je

$$V(u) = \{v \in V : J(u,v)$$ [illegible]

Tada

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{u_* \in U_*} \| R_n([\widetilde{u}]_n) - u_* \|_X = 0 ; \lim \inf \| R_n$$ [illegible] $$- u_{**} \|_X = 0$$

$$U_{**} = \{u \in U_* :$$ [illegible] $\}$

Ako su ispunjeni uslovi 1)-7) a U_{**} se sastoji samo od jedne tačke [illegible], na primer ako je [illegible] strogo ravnomerno konveksan funkcional a U_* konveksan skup , tada je

$$\lim_{n \to \infty} \| R_n$$ [illegible] $$\|_X = 0$$

Napomena. Uslovi 1)-4) su dovoljni za aproksimaciju po funkcionalu zadatka 1.4.(1) nizom zadataka 1.4.(2). Drugi deo teoreme odnosno uslovi 5)-8) potrebni su isključivo radi regularizacije , što pokazuje vezu izmedju aproksimacije po funkcionalu i regularizacije.

§ 4. Regularizacija aproksimativnog niza max-min zadataka sa zavisnim argumentima

Ponovo ćemo razmatrati zadatak 1.4.(6) pri čemu skup U pripada banahovom prostoru X, odnosno rešavamo zadatak

$$\inf_{v \in V(u)} J(u,v) = J_1(u) \to \sup; \quad u \in U \tag{1}$$

gde je $J: X \times Y \to R$. Pretpostavimo još da je

$$\sup_X \inf_Y J(u,v)$$

ograničena veličina i da je $U_* \neq \emptyset$ gde je

$$U_* = \{u_* \in U : \inf_{V(u_*)} J(u_*,v) = J_*\}$$

Definišimo sada niz aproksimativnih zadataka. Neka su za $n \in N$ definisani skupovi X_n, Y_n i $U^{\varepsilon_{1n}} \subseteq X_n$ gde je ε_{1n} nenegativan nula niz, i za svako $[u]_n \in U^{\varepsilon_{1n}}$ definisan je skup $V_n^{\varepsilon_{2n}}([u]_n) \subseteq Y_n$, ε_{2n} je nenegativni nula niz. Aproksimativni niz zadataka je

$$\inf_{[v]_n \in V_n^{\varepsilon_{2n}}([u]_n)} I_n([u]_n,[v]_n) = I_{1n}([u]_n) \to \sup; \; [u]_n \in U_n^{\varepsilon_{1n}} \tag{2}$$

gde je $I_n: X_n \times Y_n \to R$.

Sledeća teorema Avakova [3] daje dovoljne uslove za regularizaciju aproksimativnog niza zadataka (2) po prvom argumentu. Istovremeno se u teoremi dokazuje i aproksimacija po funkcionalu zadatka (1) nizom zadataka (2) .

T E O R E M A 1. [3] Neka su ispunjeni sledeći uslovi :

1) J_* je konačna veličina , [illegible]

2) niz [illegible] definisan je uslovom [illegible]

[illegible]

gde je [illegible] funkcional Tihonova za zadatak (2), a [illegible] i

[illegible]

gde su $\{\alpha_n\}$ i $\{h_n\}$ nula nizovi.

3) postoji niz nepraznih skupova [illegible] X , višeznačno preslikavanje $V^{\delta_n} : U^{\delta_n} \to \mathcal{P}(Y)\setminus\emptyset$, gde je $\mathcal{P}(Y)$ partitivni skup od Y , i postoje preslikavanja $P_n : X_n \to X, Q_n : Y \to Y_n$ takva da za svaki niz [illegible] definisan uslovima [illegible]

[illegible]

gde je μ_n nenegativan nula niz, važi [illegible] N

[illegible]

gde su [illegible] i [illegible] nula nizovi ;

4) postoji niz višeznačnih preslikavanja

$$V^{\varepsilon_{3n}} : U_* \to 2^{Y}\setminus\emptyset \qquad n\in N$$

i postoje preslikavanja $\overline{Q}_n : X \to X_n$, $\overline{P}_n : Y_n \to Y$ takva da

$$\overline{Q}_n\, u_* \in U_n ;\ \overline{P}_n(V_n^{\varepsilon_{2n}}(\overline{Q}_n u_*)) \subset V^{\varepsilon_{3n}}(u_*),\ n\in N$$

i za svaki niz $\{[\tilde{v}]_n\}$ definisan uslovima

$$[\tilde{v}]_n \in V_n^{\varepsilon_{2n}}(\overline{Q}_n u_*) \qquad n\in N$$

$$I_n(\overline{Q}_n(u_*),[\tilde{v}]_n) \le \inf_{[v]_n\in V_n^{\varepsilon_{2n}}(\overline{Q}_n(u_*))} I_n(\overline{Q}_n(u_*),[v]_n) + \nu_n$$

gde je $\{\nu_n\}$ nenegativan nula niz , važi

$$I_n(\overline{Q}_n(u_*),[\tilde{v}]_n) \ge J(u_*,\overline{P}_n[\tilde{v}]_n) - \gamma_n^2,\ n\in N$$

$$\Omega_n(\overline{Q}_n(u_*)) \le \Omega(u_*) + \beta_n \ , \ n\in N$$

gde su $\{\gamma_n^2\}$, $\{\beta_n\}$ nula nizovi ;

5) važe sledeće ocene

$$J_*(\varepsilon_{1n},\varepsilon_{2n}) - J_* \le \lambda_{1n} \qquad n\in N$$

$$\inf_{v\in V(u_*)} J(u_*,v) - \inf_{v\in V^{\varepsilon_{3n}}(u_*)} J(u_*,v) \le \lambda_{2n},\ n\in N$$

gdesu $\{\lambda_{1n}\}$, $\{\lambda_{2n}\}$ nula nizovi a

$$J_*(\varepsilon_{1n},\varepsilon_{2n}) = \sup_{u\in U^{\varepsilon_{1n}}} \inf_{v\in V^{\varepsilon_{2n}}(u)} J(u,v)$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{v\in V^{\varepsilon_{2n}}(P_n[\tilde{u}]_n)} J(P_n([\tilde{u}]_n),v) = J_*$$

Neka pored uslova 1)-5) važe i sledeći uslovi

6) $J(u,v)$ je za svako fiksirano $v\in V$ slabo polune-prekidan odozgo na X , $\Omega(u)$ je strogo ravnomerno kon-

veksan i slabo poluneprekidan odozdo na X ;

7) [illegible] $\alpha_n = 0$

8) skupovi [illegible] su takvi da svaka tačka [illegible] koja je slaba granična vrednost za neki niz tačaka iz [illegible] pripada skupu [illegible] .

9) za svako fiksirano [illegible] gde je

[illegible]

Tada

[illegible]

gde je [illegible] .

Lako se uočava da je centralno mesto i svim navedenim i dokazanim teoremama konstrukcija preslikavanja P_n , Q_n sa odredjenim osobinama . Konstrukcija takvih preslikavanja je vrlo složen zadatak tako da je svaka primena izložene opšte metodike sama po sebi interesantna. U sledeće dve glave primenjivaćemo opštu metodiku na rešavanje zadatka optimalnog zagrevanja štapa.

III D E O

Aproksimacija i regularizacija zadatka optimalnog zagrevanja štapa

§ 1. Postavka zadatka

Zadatak optimalnog zagrevanja štapa , pored svoje praktične primenljivosti , često služi kao modelni zadatak za proveru i dokazivanje opštijih stavova teorije optimizacije sistema sa rasporedjenim parametrima. Ovim zadatkom bavili su se mnogi autori , na primer [8],[27],[29],[42] .

U ovom radu razmatraćemo problem aproksimacije i regularizacije zadatka optimalnog zagrevanja štapa sa ograničenjima . U radu [46] konstruisan je jedan od mogućih aproksimativnih nizova , formulisana je teorema o aproksimaciji po funkcionalu ali bez dokaza . Medjutim korektan dokaz je realizovan u radu autora [19] primenom ranije izložene metodike uz korišćenje preciznih ocena brzine konvergencije koje se dobijaju primenom tzv. leme Tartara [10] .

Razmatra se zadatak minimizacije funkcionala

$$J(u)=\int_0^\ell\int_0^T f_0(x(s,t),u(s,t))\,ds\,dt+\int_0^\ell f_1(x(s,T))\,ds \qquad (1)$$

gde je $x(s,t)$ rešenje zadatka :

$$x_t(s,t) = x_{ss}(s,t) + \text{[illegible]} \qquad (2)$$

$$x_s /_{s=0} = \alpha\left[x(0,t) - u\text{[illegible]}\right], x_s\text{[illegible]} \qquad (3)$$

$$x(s,0) = \text{[illegible]} \qquad (4)$$

a unravljanje je uredjena četvorka

$$u = (u_0, u\text{[illegible]})$$

gde je

$$U = \{u \in H : \text{[illegible]}\}$$

a

$$G(u) = \int_0^l \int_0^T g_0(x(s,t), x_s(s,t)\text{[illegible]})\,ds\,dt + \int_0^l g_1(x(s,T))\,ds \qquad (5)$$

Prostor H definisaćemo kasnije kada budemo razmatrali problem egzistencije rešenja [illegible].

Ovakav zadatak se javlja , na primer kada treba za dato vreme T postići radnu temperaturu štapa ako je pod našom kontrolom početna temperatura , temperatura krajeva štapa i eventualni izvori toplotne energije koji se nalaze u samom štapu . Ako je tražena temperatura zadata nekom funkcijom $y(s)$, $s \in (0,l)$ tada funkcional koji treba minimizirati možemo definisati,na primer na sledeći način

$$J(u) = \int_0^l |x(s,T) - y(s)|^2\,ds$$

gde je $x(s,t)$ rešenje sistema 2)-5) . .

Pre nego što predjemo na problem egzistencije rešenja uvešćemo neke oznake .

Neka je $\Omega \subset R^n$ otvoren ograničen skup sa beskonačno diferencijabilnom granicom [illegible] . Z a svako [illegible] definišimo prostore Soboljeva reda τ [28]:

$$H^{\tau}(R^n) = \{ v \in \mathcal{S}'(R^n) : \text{[illegible]} \}$$

gde je $\mathcal{S}'(R^n)$ prostor umerenih distribucija [39] a [illegible] je Fourier-ova transformacija umerene distribucije [illegible] .

Norma u prostorima Soboljeva definiše se sa

$$\| v \|_{H^{\tau}(R^n)} := \| \text{[illegible]} \| \tag{6}$$

gde je $|y|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$.

Prostori $H^{\tau}(\Omega)$ se definišu kao restrikcija prostora $H^{\tau}(R^n)$ na Ω [28] sa normom

$$\| u \|_{H^{\tau}(\Omega)} = \text{[illegible]} \tag{7}$$

gde je $\tilde{u} = u$ na Ω u smislu distribucija .

Ako je $m \in N$, u $H^{m}(\Omega)$ se može uvesti norma

$$\| u \|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \le m} \| D^{\alpha} u \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{8}$$

gde je $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a D^{α} odgovarajući diferencijalni operator . Norma (8) je ekvivalentna normi (7) [28].

Neka je $\tau = m + \sigma$, m ceo broj a [illegible] ,tada

$$\| u \|^2_{\tau,\Omega} = \| u \|^2_{m,\Omega} + \text{[illegible]} \tag{9}$$

Norma (9) je za dovoljno regularnu granicu Γ ekvivalentna normi (7) [1] .

Definišimo sada anizotropne prostore Soboljeva [28] . Neka je Ω isti skup a [illegible] , [illegible] , [illegible] tada

$$H^{\tau,\lambda}(R^n_x \times R_t) = \{ v \in \mathcal{S}'(R^n_x \times R_t) : \text{[illegible]} \}$$

gde je $\hat{v}$ Fourier-ova transformacija po x i t .

Prostori $H^{r,s}(\Omega)$ su restrikcije prostora [illegible] na Ω.

Ekvivalentna definicija je

$$H^{r,s}(Q)=H^{0}(0,T; \ldots)$$ [illegible]

gde je [illegible]

a prostor $H^{r}(0,T;H^{0}(\Omega))$ se definiše pomoću interpolacije [28]

$$H^{r}(0,T;H(\Omega))=[H^{m}(0,T; \ldots), \ldots]_{\theta}$$ [illegible]

gde je m ceo broj i $(1-\theta)m$ [illegible]. Može se dokazati [28] da je ova definicija korektna tj. da ne zavisi od m. Ako je m ceo broj tada [28]

$$H^{m}(0,T;H^{0}(\Omega))=\{ \ldots \| \ldots \|_{L_2(\Omega)} \ldots < \infty \}$$

Neka je $r = m+\theta > 0$, [illegible] m [illegible] su celi brojevi a $\theta, \eta \in (0,1)$ tada se u $H^{r,s}$ može uvesti ekvivalentna norma [1] $\|u\|^2_{r,s,Q} = \|u\|^2_{m,n,Q} + \ldots \int\int\int$ [illegible] $dx\,dy\,dt$

$$+ \ldots \frac{|D^{n}_{t} u(x, \ldots)|}{|t-t'|^{\ldots}} \ldots \tag{10}$$

Navedimo sada nekoliko teorema egzistencije rešenja zadatka (2)-(4).

T E O R E M A 1. [28] Ako [illegible]

tada postoji jedinstveno rešenje zadatka (2)-(4) [illegible] koje [illegible] $H^{2,1}(Q)$ gde je [illegible].

T E O R E M A 2. [28] Ako [illegible] $C(0,T)$

tada postoji jedinstveno rešenje zadatka (2)-(4) koje pripada prostoru $\chi(S,t) \in H^{2\alpha, \alpha}(Q)$ za [illegible].

U teoremi 2. koristili smo sledeće oznake [28]

([illegible] je topološki dual od [illegible])

T E O R E M A 3. [23] Ako [illegible] tada rešenje zadatka (2)-(4) [illegible] gde je [illegible] a [illegible] ceo broj [illegible].

Napomena 1. Jednačina (2) je zadovoljena u smislu distribucija a granični uslovi u smislu tragova [23].

Dokazaćemo jednu lemu o egzistenciji rešenja, koja se ne uklapa direktno u tzv. Hilbertovu teoriju, a koja se koristi u sledećim paragrafima.

L e m a 1. Ako [illegible] tada postoji jedinstveno rešenje [illegible] sistema (2)-(4)

[illegible]

i važi energetska ocena

[illegible]

Ako uvedemo oznake [illegible] tada gornju ocenu možemo zapisati u obliku

$$\|u\|_P \leq C \|u\|_H \tag{11}$$

D o k a z . Pretpostavimo da su sve funkcije u (2)-(4) beskonačno diferencijabilne i pomnožimo skalarno u $L_2(Q)$ jednačinu (2) sa $u(x,t)$ a zatim koristeći klasičnu tehniku dobijenja energetskih ocena [18] dobijamo

$$\|x\|_{L_2,\infty} + \|x_s\|_{L_2(Q)} + \|x\| \text{[illegible]} \le C(\text{[illegible]}) \qquad (12)$$

Pomnožimo sada jednačinu (2) skalarno u [illegible] sa [illegible] i posle standardnih transformacija korišćenjem jednostavne teoreme potapanja

$$\|u\|_{C(0,T)} \le C\|u\|_{\text{[illegible]}(0,T)}$$

dobijamo ocenu

$$\|x_t\|_{L_2(Q)} + \|x_{ss}\|_{L_2(Q)} + \|x_s\| \text{[illegible]} \qquad (13)$$

Iz ocena (12),(13) sledi ocena (11).

Ako su ispunjeni odgovarajući uslovi saglasnosti postoji klasično rešenje [18] . Neka je [illegible] fundamentalan u H niz pri čemu su ispunjeni odgovarajući uslovi saglasnosti, tada koristeći ocenu (11) možemo lako pokazati da je odgovarajući niz rešenja fundamentalan u [illegible] na graničnu vrednost tog niza zovemo rešenje sistema (2)-(4). Na taj način dokazana je lema.

Napomena 2. Lako se može dokazati da je potapanje prostora $H(Q)$ u $C(Q)$ neprekidno i da važi ocena

$$\|x\|_{C(Q)} \le C\|x\|_{H(Q)}$$

Napomena 3."Višak" glatkosti rešenja koju smo dobili u lemi u odnosu na prethodno navedene teoreme dobijen je na račun veće glatkosti graničnih funkcija [illegible] i [illegible] .

§ 2. Diferencna aproksimacija

Za konstrukciju aproksimativnog niza možemo koristiti metod diferencnih shema , metod konačnog elementa , Galerkinov metod i.t.d. . U [17] i [30] pri konstrukciji diskretnog rešenja korišćene su tzv. proekciono diferencne sheme. U ovom radu koristi se implicitna diferencna shema a isti rezultati mogu se dobiti i za druge sheme.

Definišimo niz mreža [illegible] gde je

$x_{in} = i h_n - h_n/2$, $t_{jn} =$ [illegible]

i postoje C_1 , C_2 tako da je [illegible] . U daljem tekstu , ako je jasno o kojoj se mreži radi , izostavljaćemo indeks n . Takodje uvedimo standardne oznake

$$y_{\bar{t}} = (y_{ij})_{\bar{t}} = (y_{ij} - y_{ij-1})/\tau \;\; [illegible] \;\; (y_{ij} - y_{i-1j})/h$$

$$y_{x\bar{x}} = (y_{ij})_{x\bar{x}} \;\; [illegible]$$

Definišimo sada niz aproksimativnih zadataka :

minimizirati funkcional

$$I_n([u]) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} [illegible] (y_{iM}) \qquad (1)$$

gde je $\{y_{ij}\}$ rešenje zadatka

$$y_{\bar{t}} = y_{x\bar{x}} \;\; [illegible] \qquad (2)$$

$$y_{ij\bar{x}} = u(y_{0j} - L_j^{(1)}) \;\; [illegible] \;\; j = \overline{1,M} \qquad (3)$$

$$y_{i0} = [illegible] \qquad (4)$$

a diskretno upravljanje je četvorka .

[illegible] (5)

gde je [illegible] matrica čiji su elementi [illegible]

a [illegible] su vektori [illegible]

takvi da

[illegible]

[illegible] (6)

Diskretni prostor [illegible]

([illegible] je oznaka za diskretne analoge Soboljevskih prostora) je definisan na sledeći način

[illegible]

L e m a 1. za svako fiksirano [illegible] postoji jedinstveno rešenje [illegible] zadatka (2)-(4) i važi ocena

[illegible] (7)

D o k a z . Ako jednačinu (2) pomnožimo skalarno u [illegible] sa [illegible] i primenjući diskretnu tehniku energetskih ocena [4o], [41] kao i diskretnu teoremu potapanja

$$\max_i |y_i| \le C \|[y]\|_{\tilde{H}^1}$$

dobijamo ocenu (7) čime je lema dokazana.

Napomena. Za konstrukciju aproksimativnog niza koristili smo implicitnu diferencnu shemu na ravnomernoj mreži. Primena drugih diferencnih shema i neravnomernih mreža takodje je moguća . Dokazi konvergencije se mogu izvesti na isti način kao i za implicitnu shemu samo što su izračunavanja obimnija . Moguća je takodje i primena tačnijih kvadraturnih formula ali treba voditi računa o saglasnosti ocena greške diferencnih shema i kvadraturnih formula.

§ 3. Lema Tartar-a

Pri dokazivanju konvergencija diferencnih shema ka klasičnim rešenjima centralno mesto ima formula Taylor-a. Kada rešenje parcijalne diferencijalne jednačine pripada izotropnim prostorima Soboljeva H^m gde je m ceo broj ulogu formule Taylor-a ima lema Bramble-Hilbert-a [4] . U radovima [25] , [26] Lazarov je primenjujući lemu Bramble-Hilbert-a dobio ocene brzine konvergencije diferencnih shema ka uopštenim rešenjima koja pripadaju celobrojnim prostorima Soboljeva .

Rešenja paraboličkih jednačina najčešće pripadaju nekim anizotropnim prostorima Soboljeva u kojima se ne može primeniti lema Bramble-Hilbert-a već ulogu Taylor-ove formule ima lema Tartar-a 10 .

L e m a . Neka je B banahov prostor a V_1, V_2 normirani prostori. Neka je $A_1 \in \mathcal{L}(B,V_1)$ i $A_2 \in \mathcal{L}(B,V_2)$ pri čemu je A_1 kompaktni operator i neka važi ocena

$$\|u\|_B \leq C(\|A_1 u\|_{V_1} + \|A_2 u\|_{V_2}) \qquad (1)$$

Tada

1) $\ker A_2 = P$, $\dim P < \infty$

2) $\inf_{p \in P} \|u - p\|_B \leq C \|A_2 u\|_{V_2}$

($\mathcal{L}(X,Y)$ je prostor linernih neprekidnih operatora iz X u Y .)

D o k a z . Na osnovu ocene (1) sledi da za svako $p \in P$

$$\|p\|_B \leq C \|A_1 p\|_{V_1}$$

što znači da linearan, neprekidan i kompaktan operator A_1 preslikava jediničnu kuglu podprostora P u kompaktan skup. Prema tome jedinična kugla prostora P je kompaktan skup pa je P konačno-dimenzion prostor. Tvrdjenje (1) je dokazano.

Neka je $N = \dim P$ a f_i, $i = 1, \dots, N$ baza u konjugovanom prostoru P^* prostora P . Na osnovu Hahn-Banach-ove teoreme postoji produženje funkcionala f_i na ceo prostor B koje ćemo označiti sa $\hat{f}_i$. S obzirom na to da je f_i baza u prostoru P^* sledi

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i(u)| = 0 \Rightarrow \text{[illegible]}, \quad u \in P \tag{2}$$

Dokažimo da postoji konstanta [illegible] takva da za svako [illegible] važi

$$\|u\|_B \le C(\|A \text{[illegible]}\|_{V_2} + \sum \text{[illegible]}) \tag{3}$$

Pretpostavimo suprotno odnosno da za svako [illegible] postoji $u \in B$ tako da

$$\|u\|_B > C(\|A \text{[illegible]}\|_{V_2} + \sum |f_i(u)|) \tag{4}$$

što znači da postoji niz $u_j \in B$ takav da

$$\|u_j\|_B = 1, \quad \lim_{j\to\infty}(\|A_2 u_j\|_{V_2} + \sum |f_i(u_j)|) = 0 \tag{5}$$

Iz uslova (1) sledi

$$\|u_j - u_k\|_B \le C(\|A_1 \text{[illegible]}\| + \|A_2 \text{[illegible]}\|_{V_2})$$

pa na osnovu kompaktnosti operatora [illegible] i (5) sledi da je u_j fundamentalan niz. Kako je [illegible] banahov prostor to znači da postoji $u \in B$ takav da [illegible]. Tada na osnovu relacije (5) sledi A_2 [illegible] odnosno [illegible] pa na osnovu (2) dobijamo [illegible] što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $\|u_j\|_B = 1$. Tako smo dokazali (3).

Tada na osnovu (2) za svako [illegible] postoji [illegible] tako da je [illegible] pa prema (3) sledi

$$\|u\|_B \le \|u - z\|_B \le C(\text{[illegible]} f_i(u-z)|) \le$$

$$\le C\|A \text{[illegible]}\|_{V_2}.$$

Dokaz je završen.

$$[\ldots] = (\ldots) \quad (5)$$

gde je [illegible] matrica čiji su elementi [illegible]

a [illegible] su vektori [illegible]

takvi da

[illegible] (6)

Diskretni prostor [illegible]

([illegible] je oznaka za diskretne analoge Soboljevskih prostora) je definisan na sledeći način

[illegible]

L e m a 1. za svako fiksirano [illegible] postoji jedinstveno rešenje [illegible] zadatka (2)-(4) i važi ocena

[illegible] (7)

D o k a z . Ako jednačinu (2) pomnožimo skalarno u [illegible] sa [illegible] i primenjući diskretnu tehniku energetskih ocena [40], [41] kao i diskretnu teoremu potapanja

D o k a z . Označimo sa

Neka je operator potapanja i neka je

. Kako je potapanje

kompaktno [31] na osnovu leme sledi tvrdjenje.

Lema Tartar-a se može primeniti i u prostorima Soboljeva razlomljenog stepena [21], [22], [43]. U navedenim radovima dobijene su saglasne ocene brzine konvergencije diferencnih shema ka uopštenim rešenjima koja pripadaju prostorima Soboljeva razlomljenog stepena primenom leme Tartar-a. U radu [14] izložen je konstruktivan dokaz leme Tartar-a primenjene u prostorima Soboljeva .

§ 4. Ocena brzine konvergencije rešenja zadatka 3.3.(2)-(4) ka rešenju zadatka 3.1.(2)-(4)

U daljem tekstu koristićemo neke standardne oznake [4o]

Posledica 1. (lema Bramble-Hilbert-a [4]) Neka je $\Omega\subset R^n$ otvoren , povezan skup sa granicom neprekidnom u smislu Lipschitz-a. Neka je, pored toga , za neko celo $k\ge 0$ i neko $p\in[1,\infty]$, f neprekidni linearni funkcional na prostoru Soboljeva $W_p^{k+1}(\Omega)$ takav da je

$$P_k(\Omega)\subset \ker f$$

gde je $P_k(\Omega)$ skup polinoma stepena $\le k$.

Tada postoji konstanta $C>0$ takva da za svako $v\in W_p^{k+1}$

$$|f(v)|\le C\|f\|^*_{k+1,p}|v|_{k+1,p}$$

gde je $\|\cdot\|^*_{k+1,p}$ norma u dualnom prostoru $(W_p^{k+1}(\Omega))'$ a

$$|v|_{k+1,p}=\Big(\sum_{|\alpha|=k+1}\int_\Omega|D^\alpha v|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

D o k a z . Neka je v proizvoljna funkcija iz $W_p^{k+1}(\Omega)$ tada za svako $p\in P_k$ važi

$$|f(v)|=|f(v+p)|\le\|f\|^*_{k+1,p}\inf_{p\in P_k}\|v+p\|_{k+1,p} \qquad (6)$$

Označimo sa $B=W_p^{k+1}$, $A_1=I: W_p^{k+1}\to W_p^{k}$, $A_2=D^\alpha$, $A_2: W_p^{k+1}\to(L_2)^{\Gamma_{k+1}}$ gde je $\Gamma_{k+1}=\{\alpha\in N^n: |\alpha|=k+1\}$.

Ali operator A_1 je kompaktan [1] što znači da su ispunjeni svi uslovi leme pa iz (6) sledi tvrdjenje.

Posledica 2. Neka je $Q=(0,1)\times(0,1)$ i $P_{1,0}$ skup polinoma od dve promenjive prvog stepena po x i nultog stepena po t . Neka je dat funkcional $f\in L(H^{2,1}(Q),R)$ takav da je $P_{10}\subseteq\ker f$.

Tada postoji konstanta $C>0$ takva da za svako $v\in H^{2,1}(Q)$

Znači

$$Q_n(u) = [u] = (\ldots) \quad [illegible] \tag{3}$$

Napomena. Operator Q_n je korektno definisan jer svi integrali u (2) postoje ako [illegible] gde je [illegible] prostor definisan u lemi 3.1.1. . Ako u zadovoljava uslove teorema 3.1.1-3. može se , koristeći teoremu o tragovima [28] , korektno definisati operator Q_n . Umesto operatora Q_n definisanog u (2) mogli smo uzeti i neka druga usrednjenja [44] ali za potrebe našeg zadatka ovaj operator je ,što će se kasnije pokazati , vrlo pogodan .

Neka je sada [illegible] gde je [illegible] rešenje zadatka 3.2.(2)-(4) a u_{ij} je definisan relacijama (1) . Koristeći jednačinu 3.2.(2) lako možemo dobiti

[illegible]

a posle parcijalne sumacije sledi

[illegible]

Dalje , primenom ε-nejednakosti dobijamo

[illegible] (4)

gde je

[illegible] (5)

S obzirom na to da ćemo brzinu konvergencije ispitivati u diskretnoj normi neophodno je izvršiti neko usrednjenje neprekidnog rešenja . To znači da svakoj "neprekidnoj" funkciji [illegible] pridružimo diskretnu funkciju [illegible] definisanu na čvorovima mreže uvedene u 3.4.2. .

Neka je [illegible] . Definišimo diskretnu funkciju [illegible] na sledeći način :

$$[illegible] \qquad (1)$$

gde je [illegible] Hestenes-ovo produženje 1 funkcije u oblast $G_h = (-h, l+h) \times (0, T)$ sa očuvanjem odgovarajuće klase diferencijabilnosti.

Operator usrednjenja (1) je korektno definisan jer za [illegible] u smislu tragova [illegible] gde je [illegible] a to znači da [illegible] .

Definišimo sada operator [illegible] koji svakom upravljanju [illegible] definisanom u lemi 3.1.1 pridružuje neko diskretno upravljanje [illegible] , na sledeći način :

$$[illegible] \qquad (2)$$

i označiti [illegible] , tada

[illegible]

Na osnovu teoreme o tragovima 28 sledi da je [illegible] linearan ograničen funkcional na [illegible]

Sa druge strane direktnom proverom se dokazuje da je

[illegible]

pa na osnovu posledice 2. leme 3.3.1. sledi

[illegible]

Vraćajući se na stare promenljive dobijamo

[illegible]

gde je [illegible]

Na osnovu gornjih razmatranja sledi

[illegible] (9)

Na isti način , primenjujući lemu Tartar-a ,možemo oceniti i funkcionale [illegible] , pa na osnovu (7),(8),(9) i 3.1.(11) dobijamo konačnu ocenu

[illegible] (1o)

Tako smo dokazali sledeću teoremu, koja ima centralno mesto za dokaze aproksimacije i regularizacije niza diskretnih zadataka.

Definišimo Hestenes-ovo produženje [illegible] s očuvanjem klase [illegible]. Tada formule (1) možemo precizirati na sledeći način :

[illegible] (6)

Dalje , neka je

[illegible]

gde je x^* gore definisano produženje.

Na osnovu (4) sledi

$$\|z\|^2_{V(G)} = C(\| \ldots \text{[illegible]} \qquad (7)$$

Poslednja dva sabirka u (7) ocenjujemo na sledeći način [32]

[illegible] (8)

Treba još oceniti funkcionale [illegible]. Ocenićemo [illegible] dok se ostali ocenjuju na isti način. Naime

[illegible]

Uvešćemo nove promenljive [illegible]

L e m a 1. Postoji konstanta [illegible] takva da

a) [illegible] b) [illegible] (2)

za svako [illegible] , [illegible] .

D o k a z . a) prema definiciji prostora [illegible] važi

[illegible]

Slično se dobija [illegible]

b) Na osnovu definicije preslikavanja [illegible] i prostora [illegible]

sledi

[illegible] (3)

gde je

[illegible]

T E O R E M A 1. Ako je [illegible] usrednjenje rešenja sistema 3.1.(2)-(4) po formulama (1) i (6) tada diskretno rešenje zadatka 3.2.(2)-(4) u [illegible] normi konvergira ka $\overline{u}$ i važi ocena (1o).

Slične ocene mogu se dobiti i kada rešenje pripada prostoru $H^{2,2}$, $2 > \frac{3}{2}$, [illegible] .

§ 5. Aproksimacija po funkcionalu

Za dokazivanje aproksimacije po funkcionalu koristićemo metod izložen u prvom delu rada. Realizacija tih ideja je moguća samo ako znamo da konstruišemo preslikavanja P_n, G_n sa odredjenim osobinama . Preslikavanje G_n neka je definisan relacijama 3.4.(2) . Definišimo preslikavanja $P_n : H_n \to H$ na sledeći način :

$$u_0 [illegible] = (u_{i_d}^{(0)} [illegible]$$

$$[illegible] \qquad (1)$$

$$[illegible]$$

Dokazaćemo sada neka svojstva preslikavanja

[illegible]

gde su Q_n, P_n i [illegible] operatori takodje definisani relacijama 3.4.(2) i 3.5.(1). Naime , pokazaćemo da [illegible] i [illegible] imaju osobina koje omogućuju primenu teorema iz prvog dela.

L e m a 3. Neka su [illegible] i [illegible] sopstvene funkcije za koje postoji funkcija [illegible] ograničena na ograničenim skupovima, takva da

[illegible]

[illegible] (7)

a $f_1 : R \to R$ i $g_1 : R \to R$ su sopstvene konveksne funkcije koje zadovoljavaju Lipschitz-ov uslov sa konstantom M.

Tada za svako $u \in$ [illegible] i [illegible]

[illegible]

[illegible] (8)

gde su J, G, I_n, G_n funkcionali definisani u 3.1.(1) 3.1.(5), 3.2.(1) i 3.2.(6).

D o k a z . Po definiciji funkcionala [illegible] i [illegible] važi

[illegible]

Dalje, za svako [illegible] važi

[illegible]

[illegible]

[illegible] (4)

S obzirom na to da je [illegible] iz (3),(4)

sledi

[illegible]

Slično se dokazuje

[illegible]

Tako je lema dokazana.

L e m a 2. Za svako [illegible] važi ocena

$$\| \tilde{z}(x) - Q_h(P_h(\tilde{z}(x))) \| [illegible] \quad (5)$$

gde je

$$\tilde{Z}_h(\Omega) = \tilde{Z}_2(\Omega) \times \tilde{Z}_2 [illegible] \quad (6)$$

D o k a z . Po definiciji preslikavanja [illegible], [illegible] sledi

[illegible]

Dalje,

[illegible]

pa važi

[illegible]

Slično se dokazuju i odgovarajuće nejednakosti za diskretne funkcije [illegible]. Lema je dokazana.

T E O R E M A 1. Neka su ispunjeni uslovi lema 3.5.3. i 3.1.1. a preslikavanja [illegible] i [illegible] neka su definisana kao u 3.5.(1) i 3.4.(2) i neka postoji [illegible] takvo da je [illegible] gde je U definisano u 3.1.(5) .

Tada niz zadataka 3.2.(1)-(6) aproksimira po funkcionalu zadatak 3.1.(1)-(5) i postoji konstanta [illegible] takva da važi ocena

[illegible] (12)

D o k a z . Označimo sa

$$U^{-\varepsilon_n} = \{u \in H : \ldots\} .$$

Na osnovu lema 3.5.1.,3.5.2. i 3.5.3. sledi da postoji konstanta $C>0$ takva da je

$Q_n(U^{-\varepsilon_n}) \ldots$ (13)

gde ε_n [illegible]

Sa druge strane na osnovu istih lema sledi da je

[illegible] (14)

Na osnovu leme 3.5.3 i (13) i (14) sledi da su ispunjena prva dva uslova teoreme 1.2.3. i važe relacije 1.2.(17)-(18) pa za dokaz teoreme ostaje da se provere uslov 3) teoreme 1.2.3. i nejednakost 1.2.(19) .

Izaberimo [illegible] tako d [illegible] i označimo sa [illegible] a sa [illegible] gde je [illegible] . S obzirom na to da je $G(t_n)$ [illegible] sledi

[illegible] (9)

gde je [illegible] usrednjenje rešenja sistema 3.1.(2)-(4) definisano relacijama 3.4.(1) .

Koristeći lemu Tartar-a na sličan način kao u dokazu teoreme 3.4.1. može se dokazati da je

[illegible] (1o)

Sa druge strane , ako u dokazu ocene 3.4.(1o) ne izaberemo diskretno upravljanje [illegible] nego pretpostavimo da su [illegible] bilo koja diskretna upravljanja tada se umesto ocene 3.4.(1o) dobija ocena

[illegible] (11)

Tvrdjenje leme sledi iz (9),(1o) i (11),jer se za funkcionale [illegible] i [illegible] može ,na identičan način,dokazati ocena tipa (9) odnosno ocena (9) ostaje ista ako umesto funkcionala [illegible] i [illegible] uzmemo funkcionale [illegible] i [illegible] .

Sada možemo dokazati teoremu o aproksimaciji po funkcionalu zadatka 3.1.(1)-(5) nizom zadataka 3.2.(1)-(6) .

U ovom paragrafu ćemo , primenom metoda regularizacije izloženih u drugom delu , konstruisati minimizirajući niz pomoću niza aproksimativnih zadataka i dokazati konvergenciju ka skupu U_* u jakoj topologiji prostora .

Neka su ispunjeni svi uslovi teoreme 3.5.1. , što znači da su prostori,kojima pripadaju diskretna upravljanja i neprekidno upravljanje , hilbertovi. Takodje sledi da su svi funkcionali slabo poluneprekidni na slabo kompaktnim skupovima.

Definišimo diskretni i neprekidni stabilizator

$$\Omega_{N}(u_N) = \|u_N\|^2_{H_N} \quad , \quad \Omega(u) = \|u\|^2_{H} \quad . \tag{1}$$

Ovako definisani stabilizatori su , s obzirom na to da su norme, slabo poluneprekidni odozdo a nivoski skupovi

$$\Omega_c = \{ u \in U : \Omega(u) \le c \}$$

su zatvoreni , ograničeni i konveksni što znači da su slabo kompaktni. Iz ovih razmatranja možemo zaključiti da problem konvergencije treba posmatrati u slaboj topologiji skupa H .

Na osnovu uslova teoreme 3.5.1. lako se može zaključiti da je $J_* > -\infty$ i da je U konveksan , zatvoren i ograničen skup te jako konveksan funkcional Ω dostiže minimum u jedinstvenoj tački [47] . To znači da pod pretpostavkom da znamo dokazati slabu konvergenciju konstruisanog

$$c \leq J_{\alpha}(\ldots) - J_{\kappa} = \ldots$$

$$\leq \ldots$$

Poslednja nejednakost v[illegible]i za svako [illegible] pa je

[illegible]

Dalje , označimo sa [illegible] i izaberimo niz

[illegible] takav da $J(\alpha_n) - \ldots$. Neka je [illegible]

tada

$$G(\omega_n^{\beta}) \geq \delta \cdot (\ldots - \varepsilon_0) \ldots$$

što znači da $\omega_n^{\beta} \in \overline{U}$.

Prema tome na osnovu nejednakosti

$$c \leq J_{\kappa} - J_{\kappa}(\alpha_n) = J_{\kappa} - J(\omega \ldots) \ldots J_{\kappa}(\alpha_n) \leq$$

$$\leq \delta + L\delta \| u - \ldots$$

sledi $0 \leq J_{\kappa} - J_{\kappa}(\ldots)$.

Na taj način je dokazano da su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.2.3. na osnovu koje sledi tvrdjenje teoreme .

§ 6. Regularizacija niza aproksimativnih zadataka

U prethodnom paragrafu smo dokazali aproksimaciju po funkcionalu ali nismo dobili nikakvu informaciju o načinu konstrukcije minimizirajućeg niza . Takodje nismo dobili informaciju o skupu [illegible] .

uslovi teoreme 2.2.1. . To znači [illegible] tvrdjenje teoreme direktno sledi iz teoreme 2.2.1. . Dokaz je završen.

Dokazana teorema daje algoritam za efektivnu konstrukciju minimizirajućeg niza koji konvergira ka [illegible]-normalnom rešenju. To rešenje možemo interpretirati i kao rešenje sa minimalnim utroškom energije.

Treba napomenuti da se regularizacija mogla izvesti zbog toga što smo dobili ocene brzine konvergencije a ne samo konvergenciju. Ta činjenica daje još veći značaj lemi Tartara , pomoću koje smo i dobili ocene, jer je sada moguće rešavati probleme aproksimacije i regularizacije u prostorima Soboljeva razlomljenog reda . Neki od takvih zadataka razmatrani su u [27] .

minimizirajućeg niza ka [illegible] iz uslova [illegible] sledilo bi da minimizirajući niz jako konvergira ka [illegible] .

Napomena . Norma se kao stabilizator može koristiti u svakom ravnomerno konveksnom banahovom prostoru.

Definišimo diskretni funkcional Tihonova

$$T_n([u]) = I_n([u] \ldots) \ldots$$

gde je α_n pozitivni nula niz.

Neka je

$$U_n = \{[u] \in \tilde{H}_n : \ldots \}$$

gde je konstanta C izabrana na osnovu leme 3.5.1. i neka je $T_{n*} = \inf_{U_n} T_n([u])$.

Izaberimo za svako n element [illegible] takav da

$$T_{n*} \leq T_n([u \ldots]) \ldots \tag{2}$$

T E O R E M A 1. Ako važe uslovi teoreme 3.5.1. i

$$\lim_{n \to \infty} \ldots$$

tada $\lim_{n \to \infty} \ldots (T_n([u])) \ldots$ gde je niz [illegible] definisan u (2) , i pored toga niz [illegible] konvergira ka skupu [illegible] $\{u_*\}$ i

$$\lim_{n \to \infty} \ldots$$

D o k a z . Na osnovu leme 3.5.1. sledi

$$\ldots P_n \ldots$$

$$\ldots Q_n \ldots$$

te na osnovu prethodnih razmatranja u ovom paragrafu kao i na osnovu teoreme 3.5.1. zaključujemo da su ispunjeni svi

Upravljanja u i v su uredjene četvorke

[illegible]

i elementi su prostora

[illegible] .

Skup [illegible] je definisan na sledeći način

$$V(u) = \{ v \in H : \| \ldots \| [illegible] \} \qquad (7)$$

gde je

$$G(v) = \int_0^T \int_0^T G_0(x(\ldots) [illegible] \, ds \qquad (8)$$

$$\overline{J} = \{ u \in H : \|u\|_H \leq R, \ V(u) \neq \emptyset \} \qquad (9)$$

Ovakva vrsta zadataka javlja se , na primer , pri ispitivanju uticaja greške ulaznih podataka na maksimalnu vrednost funkcionala $J(u,v)$. Veličina [illegible] označava garantovanu maksimalnu vrednost funkcionala pri najgorem mogućem uticaju greške . Zadaci ovog tipa razmatrani su u [15] ,[16], [36],[37].

Navešćemo dve osobine postavljenog zadatka.

1. Na osnovu rezultata § 3.1. sledi ocena

$$\| x \|_P \leq [illegible] \qquad (10)$$

2. Ako su F_0 , F_1 , [illegible] , [illegible] , sopstvene konveksne funkcije tada iz ocene (10) sledi ograničenost funkcionala [illegible] ili [illegible] . (11)

Napomena. Svi prostori koje koristimo definisani su u trećem delu.

IV DEO

Aproksimacija i regularizacija max-min zadatka optimalnog zagrevanja štapa sa ograničenjima

§ 1. Postavka zadatka

Zahvaljujući ocenama brzine konvergencije dobijenim u § 3.4. možemo rešiti i max- min zadatak optimalnog zagrevanja štapa sa ograničenjima.

Razmatra se sledeći problem :

naći

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in V(u)} J(u, [illegible] \quad (1)$$

gde je

$$J(u,v) = \int_0^T\int [illegible] \quad (2)$$

a [illegible] je rešenje graničnog zadatka

$$[illegible] \quad (3)$$

$$[illegible]\big|_{s=0} = [illegible] \quad (4)$$

$$[illegible]\big|_{s=\ell} = \beta [illegible] \quad (5)$$

$$[illegible](s,0) = [illegible] \quad (6)$$

pri čemu je $Q = (0,\ell) \times (0,T)$.

gde je $\hat{P}_n$ definisan u § 3.1.

Ako važe uslovi 4.1.(11) lako se može dokazati , koristeći ocenu (9) da [illegible] .

§ 3. Aproksimacija na funkcionalu

Definišimo preslikavanja

$$P_n : \overline{H}_n \to H$$ [illegible]

kao u 3.5.(1) i 3.4.(2)-(3). Takodje kao u 3.4.(1),(6) definišimo usrednjenje funkcije [illegible] i označimo ga sa [illegible]

L e m a 1. Ako je [illegible] rešenje diskretnog zadatka 4.2.(3)-(5) a $x(u,v)$ rešenje zadatka 4.1.(3)-(5) tada važi ocena

$$\|x - P_n y\|_{V(\Omega)} \leq C(\|Q_n(u) [illegible] \|_p) \quad (1)$$

D o k a z . Izvodi se analogno dokazu ocene 3.5.(11).

L e m a 2. Ako su ispunjeni uslovi 4.1.(11) važi sledeća ocena

$$\max\{ [illegible] \} \leq C(\|Q_n(u) - Eu\| [illegible] \|_p)$$

D o k a z . Izvodi se analogno dokazu leme 3.5.3. .

T E O R E M A 1. Neka postoje brojevi [illegible] , [illegible] i upravljanja $\hat{u} \in U$, $\hat{v} \in V$ [illegible] takvi da

$$Gr(x(\hat{u},\hat{v})) \leq -\beta < 0 \quad \text{i} \quad [illegible] \; h_n \; [illegible] .$$

Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da u [illegible]

§ 2. Diferencna aproksimacija

Neka je definisana mreža kao u § 3.2. . Koristeći iste oznake kao u §3.2. definišimo niz aproksimativnih zadataka : naći

[illegible] (1)

gde je

$$I_{[illegible]}(u, [illegible]) = \sum_{i=1}^{N-1} [illegible] \quad (2)$$

a $\{y_{ij}\}$ je rešenje zadatka

[illegible] (3)

[illegible] (4)

[illegible] (5)

Diskretna upravljanja [illegible] i [illegible] su uredjene četvorke

[illegible] ,

i elementi su prostora [illegible] definisanog u § 3.2. pri čemu

[illegible] (6)

[illegible] (7)

[illegible] (8)

Na isti način kao u § 3.2. može se dokazati ocena

[illegible] (9)

Označimo sa $[\hat{u}] \in C_{\varepsilon_n}$ ono diskretno upravljanje za koje važi

$$\inf \{ \Gamma_n([\hat{u}], \ldots) : \ldots \in V_n^{\varepsilon_n}([\hat{u}]) \} \quad \text{[illegible]} \tag{1}$$

gde je $\lim_{n \to \infty} \ldots = 0$.

T E O R E M A 1. Ako su ispunjeni uslovi teoreme 4.3.1. odnosno uslovi leme 4.3.2. i ako je $\lim_{n \to \infty} h_n \alpha_n = 0$ [illegible] t da postoji konstanta C takva da je za $\varepsilon_n \ldots C h_n$

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\hat{v} \in V^{Ch_n}(P_n [\hat{u}])} \ldots (\hat{u}, \hat{v}) = J_* \quad \text{[illegible]}$$

gde je $[\hat{u}]$ definisano u (1) , i

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{u_* \in U_{**}} \| \ldots [\hat{u}] - u_* \|_H = 0$$

gde je $U_{**} = \{ u_* \in U_* : \| u_* \| = \inf_{u \in U_*} \| u \| \}$.

D o k a z . Koristeći osobine preslikavanja $P_n, G_n, \bar{P}_n, \bar{G}_n$ dokazane ranije kao i leme 4.3.1. i 4.3.2. mogu se proveriti uslovi teoreme 2.4.1. . S obzirom na to da je ta provera tehnički vrlo slična dokazu teoreme 3.4.1. dokaz gore formulisane teoreme nećemo navoditi.

Na kraju treba reći da rešavanje konačno-dimenzionih aproksimativnih zadataka nije jednostavan problem . Kako naći približnu tačku minimuma za funkcional Tihonova takodje nije jednostavno . Ali metodika izložena u ovom radu važi ocena

$$[illegible]$$

D o k a z . Dokaz se svodi na proveru uslova teoreme 1.3.3. Medjutim , koristeći leme 1.i 2. i rezultate trećeg dela provera uslova je vrlo slična tehnici koju smo koristili pri dokazivanju teoreme 3.5.1. . S obzirom na to što sem malih tehničkih detalja nema novih momenata dokaz nećemo izvoditi.

§ 4. Regularizacija niza aproksimativnih max-min zadataka

Teorema 2.4.1. daje dovoljne uslove za regularizaciju aproksimativnog niza max-min zadataka što znači da moramo znati kako konstruisati preslikavanja [illegible] , [illegible] , [illegible] , [illegible] , sa traženim osobinama.

Neka su preslikavanja [illegible] , [illegible] , [illegible] , [illegible] , definisana kao u prethodnom paragrafu.

Definišimo diskretni funkcional Tihonova

$$[illegible]$$

gde je [illegible] a [illegible] i neka je

$$[illegible] = [illegible] .$$

L I T E R A T U R A

1 ADAMS R.A. Sobolev spaces , Acad. Press 1975

2 АВАКОВ Е.Р. Условия регуляризации аппроксимирующего семейства экстремальных задач, Вестн. МГУ , сер 15, №1, 1988

3 АВАКОВ Е.Р., Условия регуляризации аппроксимирующего семейства максиминных задач по связанным множествам, ДАН СССР, т.263, №2, 1982

4 BRAMBLE J.H. , HILBERT S., Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, Numer. Math. 16, 1971

5 БУДАК Б М , БЕРКОВИЧ Е М , СОЛОВЬЕВА Е А . О сходимости разностных аппроксимации для задач оптимального управления, ЖВМиМФ, 9, №3, 1969

6 БУДАК Б М , БЕРКОВИЧ Е М , Об аппроксимации экстремальных задач, ДАН СССР, 192, №5, 1970

7 БУДАК Б М , ВАСИЛЬЕВ Ф П , Некоторые вычислительные аспекты задач оптимального управления Изд. МГУ, 1975

8 БУТКОВСКИЙ А Г , Методы управления системами с распределенными параметрами, Наука, Москва 1975

9 CEA J. , Optimisation, theorie et algorithmes Dunod , Paris , 1971

daje mogućnost rešavanja zadataka optimalnog upravljanja sistemima sa rasporedjenim parametrima.

U ovom radu nije uradjen ni jedan zadatak vektorske optimizacije koji takodje, ako znamo da ocenjujemo brzine konvergencije i da konstruišemo odgovarajuća preslikavanja u $\hat{\Omega}_{t_1}$, mogu da se rešavaju izloženom metodikom.

19 ИВАНОВИЧ Л Д, Разностная аппроксимация и регуляризация задачи об [illegible] отражении, [illegible], вер [illegible], 73, 198[illegible]

20 ИВАНОВИЧ Л Д, Аппроксимация и регуляризация максиминной задачи с [illegible]

21 ИВАНОВИЧ Л Д, ЙОВАНОВИЧ Б С, [illegible] С С, Оценка скорости сходимости для уравнения Пуассона на обобщенных решениях [illegible] /предат за штампу у [illegible]/

22 ЙОВАНОВИЧ Б С, [illegible] С С, ИВАНОВИЧ Л Д, О сходимости разностных схем для бигармонического уравнения / предат за штампу у [illegible]/

23 KURATOWSKI K., Topology, vol I, Acad. Press 1966

24 ЛАДЫЖЕНСКАЯ О А, СОЛОННИКОВ [illegible], УРАЛЬЦЕВА Н Н Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Наука, Москва, 19[illegible]

25 ЛАЗАРОВ Р Д, МАКАРОВ В Л, Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решениях, ДАН СССР, 19[illegible], [illegible]

26 ЛАЗАРОВ Р [illegible], МАКАРОВ [illegible], [illegible] А А. Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях, [illegible], 117/159/ [illegible], 19[illegible]

10 Ciarlet Ph., The finit element method for elliptic problems, North-Holland, 197[illegible]

11 CULLUM J., Discrete approximations to continuous optimal control problems, SIAM J.control 1969, 7, No 1

12 CULLUM J. Finite-dimensional approximation of state-constrained continuous optimal control problems, SIAM J.control, 1972, 10, No4

13 DANIEL J.W. The Ritz-Galerkin method for abstract optimal control problems, SIAM J.control 1973, 11, No1

14 DUPONT T., SCOTT R., Polynomial approximations of functions in Sobolev spaces, Math.of.Comput 1980, 34, No150

15 ФЕДОРОВ В В, Численные методы [illegible] Наука, Москва, 197[illegible]

16 ГЕРМЕЙЕР Ю Б, Игры с [illegible] интересами Наука, Москва, 197[illegible]

17 HACKBUSH W. Optimal $H^{p,\frac{p}{2}}$ error estimates for a parabolic Galerkin method, SIAM J.Numer. anal., Vol 18, No4, 1981

18 ИЛЬИН А М, КАЛАШНИКОВ А С, [illegible] С А, Линейные уравнения [illegible] параболического типа, УМН 17, 3/10[illegible]/, [illegible]

[36] ПОТАПОВ М М ,Об аппроксимации по функционалу максиминных задач со связанными переменными ЖВМиМФ ,19,№3 ,1979

[37] ПОТАПОВ М М , Разностная аппроксимация максиминных задач для систем Гурса-Дарбу при наличии фазовых ограничений Вест.МГУ,сер 15,№4,1978

[38] ПШЕНИЧНЫЙ Б Н,ДАНИЛИН Ю М ,Численные методы в экстремальных задачах,Наука,Москва,1975

[39] RUDIN W.,Functional analysis,McGraw-Hill,1973

[40] САМАРСКИЙ А А, Введение в теорию разностных схем Наука,Москва,1971

[41] САМАРСКИЙ А А, АНДРЕЕВ В Б , Разностные методы для эллиптических уравнений,Наука,Москва,1976

[42] СИРАЗЕТДИНОВ Т К,Оптимизация систем с распределенными параметрами ,Наука,Москва,1977

[43] SÜLI E.,IVANOVIĆ L.,JOVANOVIĆ B.,Finite difference approximations of generalized solutions (predat za štampu u Math.of Comput.)

[44] SÜLI E.,JOVANOVIĆ B,IVANOVIĆ L.,ON MOLLIFIERS IN Sobolev spaces,(predat za štampu)

[45] ТИХОНОВ А Н, АРСЕНИН В Я, Методы решения некорректных задач,Наука,Москва,1979

[46] ВАСИЛЬЕВ Ф П, Лекции по методам решения экстремальных задач,Изд.МГУ ,Москва, 1974

27 LIONS J.L., Contrôle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles Dunod, Paris, 1968

28 LIONS J.L., MAGENES E., Non-homogeneous boundary value problems and applications, Springer-Verlag, Vol I, II, 1972

29 ЛУРЬЕ К А, Оптимальное управление в задачах математической физики, Наука, Москва, [illegible]

30 MALANOWSKI K., Convergence of approximatons to quadratic optimal control problems with amplitude constrained control, Control and Cybernetics, 9, 1980, No4

31 НИКОЛЬСКИЙ С М, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, Москва, 1977

32 ОГАНЕСЯН Л А, РУХОВЕЦ Л А, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнения Изд. АН АССР, Ерева, 1979

33 ПОДИНОВСКИЙ ВВ, НОГИН В Д, Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Наука, Москва, 1982

34 POLAK E., Computational methods in optimization Acad. Press, 1971

35 ПОНТРЯГИН Л С и др., Математическая теория оптимальных процессов, Наука, Москва, 1976

[47] ВАСИЛЬЕВ Ф П, Численные методы решения экстремальных задач, Наука, Москва, 1980

[48] ВАСИЛЬЕВ Ф П, Методы решения экстремальных задач Наука, Москва, 1981

[49] ВУЛИХ Б З, Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Учебное пособие, Калинин, 1977

[50] YOSIDA K! , Functional analysis, Springer-Verlag 1965