ОСНОВИ ИНФИНИТЕЗИМАЛНОГА РАЧУНА

САСТАВИО

Dr. Димитрије Данић
професор Војне Академије

Први део

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

са 64 слике у тексту

БЕОГРАД
Издавачка књижара
Бранислав Церовић - Ајхштет
Кнез Михаилова улица број 30.
1920

ПРВИ ДЕО

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

Предговор

Ова књига садржи прву половину мојих предавања о Инфините-
ималноме Рачуну, која сам дуг низ година држао у трећој години
ојне Академије. Мислим да дело може послужити корисно и слушао-
има техничког факултета, слушаоцима природно-математичког одсека
илософског факултета као и свима, који желе да добију основу за
роучавање опширнијих страних дела ове врсте.

Примећујем, да се ова књига, на извесним мѐстима, ослања на
оја раније већ штампана предавања из Тригонометрије и Аналитичне
еометрије.

Београд, Маја 1920.

Dr. Димитрије Данић.

САДРЖАЈ.

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН.

Појмови из Алгебарске Анализе.

I.

Општи појмови и дефиниције.

1. О Функцијама уопште.

2. Бесконачно велике и бесконачно мале количине.

3. Границе функција.

II.

Бесконачни редови.

1. О бесконачним редовима уопште.

2. Бесконачни редови чији су чланови сви истога знака.

3. Бесконачни редови са положним и одречним члановима.

4. Бесконачни редови са уображеним члановима.

ПРВИ ДЕО.

Диференциални Рачун.

I.

Диференциалење функција једне прапроменљиве.

Правила за диференциалење алгебарских функција.

Правила за диференциалење трансцендентних функција.

II.

Диференциалење функција које зависе од више прапроменљивих.

III.

Примене Диференциалног Рачуна у Анализи.

1. Развијање функција у редове.

2. Израчунавање неодређених израза.

3. Највеће и најмање вредности функција једне прапромењиве.

4. Највеће и најмање вредности функција, које зависе од више прапромењивих.

5. Растављање рационално разломљених функција на просте разломке.

IV.

Примена Диференциалног Рачуна у Геометрији.

1. Тангенте.

2. Асимптоте.

3. Анвелопе.

4. Пројекционе линије.

5. Тангенциалне координате.

6. Конвексност и конкавност линија.

7. Додиривање кривих линија.

8. Кривина линија.

9. Еволута и еволвента.

10. Особене тачке кривих линија.

ИСПРАВКЕ:

На страни 47. у 14. врсти одозго место изводно читај изводна.
На страни 49. у 16. врсти одозго после знака $=$ још и знак $-$.

На страни 107. у четвртој врсти одозго треба после $A_1 = \frac{\varphi_1(a)}{f_1(a)}$ знак $=$ место знака $+$.

На страни 136. на сл. 38. крајњу тачку полупречника r обележити са B.

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

ПОЈМОВИ ИЗ АЛГЕБАРСКЕ АНАЛИЗЕ

I.

Општи појмови и дефиниције

1. О функцијама уопште.

1. Променљиве и сталне количине. — Количине, које у току једне проблеме своју вредност мењају, зову се *променљиве количине.* Количине, пак, које не зависе од променљивих и које за време целог рачуна задржавају једну исту вредност зовемо *сталним количинама* или *константама.*

Променљиве количине означавамо, обично, последњим писменима азбуке: са u, v, w, x, y, z, сталне количине првим писменима: са $a, b, c \ldots$

2. Функције. — Кад две количине зависе једна од друге тако, ца мењање једне од њих повлачи собом мењање оне друге, онда се каже ца су те количине *функције* једна од друге.

Тако н. пр. периферија круга јесте функција полупречника и обратно.

На исти начин кажемо и за више променљивих количина да су ункције једна од друге, кад се вредност сваке од њих управља према редностима оних осталих. Ми знамо да висина, основица и површина днога троугла зависе једно од друго, тако да задатим вредностима зеју од тих количина одговора увек једна одређена вредност оне реће. То значи, да је свака од тих трију количина функција осталих зеју. И. т. д.

3. Независно променљиве и зависно променљиве. — Кад се кон, по коме две или више количина зависе једна од друге, преведе језик Алгебре, добија се једначина, као аналитички израз за везу, ја постоји између тих количина. Ако у таквој једначини има само е променљиве количине, онда можемо једној од њих да дајемо прозвољне вредности, а вредности оне друге променљиве управљаће се ема овима. Количина, које се мења независно, зове се *прапроменљива;* ону другу кажемо да је њена функција.

Ако у једначини има више од две променљиве количине, онда су осим једне, независне, а она једна је функција њихова, дакле функа од више прапроменљивих.

Напомена. Са чисто теориског гледишта потпуно је свеједно коју ћемо од променљивих сматрати за независно, а коју за зависно променљиву. У многим приликама, а нарочито у применама, тај нам се избор по себи намеће; некада још у самоме почетку, а некада у току расматрања. Ево један пример. Нека је $2\,x^3y + 3\,y - x^5 + 8 = 0$ задата функција за проучавање. Као што видимо ова је једначина у погледу y-а првога, а у погледу x-а петога степена. Према томе је далеко лакше y-а израчунавати y-е из појединих вредности x-а, но обратно. Значи да треба узети x за прапроменљиву. Дотична једначина може да представља извесну линију у Декарт-овим координатама или може да је једначина каквога кретања. — За математичко клатно имамо познати образац $t = \pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Овде су променљиве t (време) и l (дужина клатна); константе су $\pi = 3{,}1415\ldots$ и $g = 9{,}805\ldots$ Проучавајући ову појаву лакше је мењати l и рачуном изналазити t, но обратно: из врло разумљивог разлога. Тако је исто појмљиво зашто је код једначине $y = \pi x^2$, која показује однос између полупречника x и кружне површине y, природније и за проучавање лакше да се узме полупречник x за независно променљиву, но површина y. — Код проучавања неких трансцендентних линија (циклоида), као и при проучавању многих питања о кретању препоручује се да се обе променљиве x и y сматрају као функције нове променљиве t. У Механици је то t обично време. И. т. д.

4. Откривене и скривене функције. — Кад је једначина, која изражава везу између двеју или више променљивих количина, решена по зависно променљивој, тако да је она сама на левој, а све остало на десној страни једначине, функција се зове *откривена* (explicite). У противном случају, т. ј. кад једначина није решена по зависно променљивој количини, ми кажемо да је функција у *скривеној* (implicite) форми.

5. Функциони знаци. — Да бисмо означили да је једна количина, н. пр. z функција једне или више прапроменљивих $x, y\ldots$, а нећемо да карактеришемо ближе на који су начин оне међусобом везане, ми се служимо писменима $f, F, \varphi, \phi\ldots$, такозваним *функционим знацима;* стављамо

$$z = f(x),\ z = \varphi(x,\ y), \ldots$$

и читамо: z је функција x-а или z је функција x-а и y-а. И. т. д.

Овде је z представљено у откривеној форми. У скривеној форми ми бисмо написали овако:

$$F(x,\ z) = 0,\ \ \phi\ (x,\ y,\ z) = 0, \ldots$$

6. Посредне функције и сложене функције. — Ако је $z = f(y)$, а $y = \varphi(x)$, онда се каже да је z *посредна функција* или *функција функције.* z је посредна функција променљиве y, а непосредна функција променљиве x, јер је $z = f\ [\varphi(x)]$.

Нека је $z = F(x, y)$, а претпоставимо да је $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$. Тада се z зове *сложена функција;* $z = F[f(u),\ \varphi(u)]$.

7. Алгебарске и трансцендентне функције. — Ми делимо све функције на алгебарске и на трансцендентне. Функција је *алгебарска* кад су радње, које се са променљивим количинама има да изврше, алгебарске, а то су сабирање, одузимање, множење, дељење, подизање на степен и кореновање са познатим изложитељем. Све остале функције, које нису алгебарске, зову се *трансцендентне.* То су изложитељне, логаритамске, тригонометриске и циклометриске функције.

Најпростије (основне) алгебарске функције јесу ове: $a + x$, $a - x$, $a\,x$, $\dfrac{a}{x}$, x^a, $\sqrt[a]{x}$, а најпростије трансцендентне функције гласе: a^x, $log\ x$, $sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$, $cotg\,x$, $arc\ sin\,x$, $arc\ cos\,x$, $arc\ tg\,x$, $arc\ cotg\,x$.

8. Рационалне и ирационалне функције. — Алгебарска функција је *ирационална* или *рационална* према томе да ли се у њеноме изразу, пошто се овај по могућству сведе, ма једна од променљивих количина налази испод кореног знака или не. Другим речима: функција је рационална, ако су сви изложитељи променљивих количина цели бројеви; функција је ирационална, ако се ма и на једноме месту налази променљива количина са разломљеним изложитељем.

9. Целе и разломљене функције. — За једну алгебарску функцију кажемо да је *цела*, кад се ниједна од променљивих, од којих функција зависи, не јавља у именитељу или, што је једно исто, кад су изложитељи променљивих количина положни. У противноме случају функција се зове *разломљена* или *деловна.*

Према овоме и ономе што смо казали у прошломе члану постављамо дефиницију: под целом и рационалном функцијом разумемо један полином у коме се прапроменљива јавља само са целим и положним изложитељима. Општи тип такве функције то је полином једне алгебарске једначине, дакле

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n,$$

где је n цело и положно, $a_1, a_2, \ldots a_n$ произвољне константе, од којих по неке могу бити $= 0$. Највиши степен прапроменљиве одређује димензију или степен функције.

Количник из две целе и рационалне функције, а то је израз вида

$$\frac{x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n}{x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}\,x + b_m},$$

зовемо *рационално разломљеном функцијом.*

За такву рационално разломљену функцију кажемо да је *чисто* или *нечисто разломљена*, према томе да ли је степен дељеника мањи или већи од степена делитеља, т. ј. да ли је $n \lesseqgtr m$.

На случај да је степен дељеника већи од степена делитеља ($n > m$), да је функција, дакле, нечисто разломљена, она може да се разложи на једну целу и једну чисто разломљену функцију. То се разлагање врши обичним дељењем. Н. пр.

$$\frac{5x^3 - 2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 3x + 2} = 5x + 13 + \frac{32x - 22}{x^2 - 3x + 2}.$$

2. Бесконачно велике и бесконачно мале количине.

10. Дефиниција. — Количина, која непрекидним растењем добија све веће бројне вредности и постаје најзад већа но ма како велики број, зове се *бесконачно велика количина.*

Количина, која непрекидним опадањем постаје мања од сваке ма како мале количине, зове се *бесконачно мала количина.*

Из ових дефиниција следује, да се бесконачно велике и бесконачно мале количине не смеју сматрати као одређене количине; оне су променљиве. Нарочито треба правити разлику између бесконачно мале количине и нуле. Нула није количина; она је негација количине.

11. Правила. — Ако означимо са ∞ бесконачно велике количине, онда је $\frac{1}{\infty}$ бесконачно мала количина. За њих вреде следећа правила.

Сабирање и одузимање.

1. $\infty + \infty + \ldots + \infty = \infty$.
2. $\infty - \infty$ може, према прилици, да буде бесконачно велико, коначно или бесконачно мало. Такав се израз зове *неодређен облик.*
3. $\infty \pm a = \infty$, где a означава какву било коначну количину.
4. $\infty \pm \frac{1}{\infty} = \infty$.
5. $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty} \pm \ldots \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. Ово, пак, вреди само онда кад је број сабирака коначан. У противноме случају, т. ј. ако је број сабирака бесконачно велики, ресултат може па буде коначан, бесконачно мали, па и бесконачно велики. Тако н. пр. ако једну количину (тело, дуж, и. т. д.) растворимо на бесконачно мале делове, збир свију тих делова остаје раван дотичној количини и он је коначан, бесконачно мали или бесконачно велики, према томе каква је количина, коју смо узели у расматрање.

Множење.

6. $\infty \, . \, \infty = \infty$.
7. $\infty \, . \, a = \infty$.
8. $\infty \, . \, \frac{1}{\infty}$ јесте неодређено, јер се своди на случај једнога збира бесконачно много бесконачно малих количина.
9. $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$.
10. $\frac{1}{\infty} \, . \, a = \frac{1}{\infty}$.

Дељење.

11. $\frac{\infty}{\infty} = \infty \, . \, \frac{1}{\infty}$, дакле неодређено (види под 8).
12. $\frac{\infty}{a} = \infty$.
13. $\infty : \frac{1}{\infty} = \infty \, . \, \infty = \infty$.
14. $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ и према томе неодређено.
15. $\frac{1}{\infty} : a = \frac{1}{\infty}$.
16. $\frac{1}{\infty} : \infty = \frac{1}{\infty}$.
17. $a : \infty = \frac{1}{\infty}$.
18. $a : \frac{1}{\infty} = \infty$.

Степеновање и кореновање.

19. $\infty^\infty = \infty$.
20. $\infty^a = \infty$, ако је $a > o$, т. ј. положно, иначе $\infty^a = \frac{1}{\infty}$, ако је $a < o$, т. ј. одречно.
21. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ јесте неодређено, јер кад логаритмујемо добијамо $log \, \infty^{\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\infty} \, log \, \infty = \frac{1}{\infty} \, . \infty$, а то је неодређена вредност.
22. $\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}}$ такође је неодређено, као што се види кад логаритмујемо: $log \left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\infty} \, log \, \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \, . \, \infty$.
23. $\left(\frac{1}{\infty}\right)^a = \frac{1}{\infty}$, ако је $a > o$, напротив $\left(\frac{1}{\infty}\right)^a = \infty$, ако је $a < o$.
24. $\left(\frac{1}{\infty}\right)^\infty = \frac{1}{\infty}$.
25. $a^\infty = \infty$, ако је $a > 1$, међутим $a^\infty = \frac{1}{\infty}$, ако је $a < 1$.

На случај да је $a = 1$ имамо 1^∞, које је неодређено, као што се види из тога што је $log \; 1^\infty = \infty \; log \; 1 = \infty \, . \, \frac{1}{\infty}$.

26. $a^{\frac{1}{\infty}} = 1.$

Ако, ради краћег бележења, означимо бесконачно мале количине са 0, онда можемо изразе, за који смо казали да имају неодређени вид, да напишемо $\infty - \infty$, $\infty \,.\, 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, ∞^0, 0^0, 1^∞.

Ми смо видили да се сви они могу да сведу на једну форму. Опште методе за изналажење правих вредности таквих израза даје Диференциални Рачун.

15./VI.

3. Границе функција.

12. Појам границе. — Кад непрестаним растењем или опадањем прапроменљиве количине и приближавањем исте извесној вредности, н. пр. вредности $x = a$, функција тежи некој сталној вредности, н. пр. $f(x) = b$, тако да разлика између те вредности b и ма које друге функционе вредности постаје све мања у колико је x приближније a-у онда се каже да дотична функција тежи *граници (limes)* b. То се знацима бележи

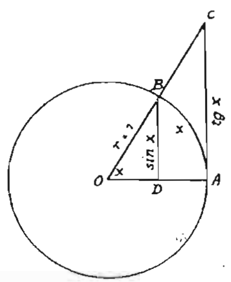
$$\lim_{x=a} f(x) = b,$$

а чита се: граница, којој тежи $f(x)$ за $x = a$ јесте равна b.

1. *Пример.* Функција $f(x) = \frac{4+3x}{x}$ има за свако коначно x своју тачно одређену вредност. За $x = \infty$ јавља се $f(x)$ у неодређеној форми $\frac{\infty}{\infty}$. Међутим кад напишемо $\frac{4+3x}{x} = \frac{4}{x} + 3$ добијамо непосредно

$$\lim_{x=\infty} \frac{4+3x}{x} = \lim_{x=\infty}\left(\frac{4}{x} + 3\right) = 3.$$

2. *Пример.* Кад у $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ставимо непосредно $x = 0$ добијамо неодређени вид $\frac{0}{0}$. При свему томе функција има и тада своју тачно одређену вредност и ми је налазимо на следећи начин.



Сл. 1.

Из слике видимо да је

$$\sin x < x < tg\, x,^{1)}$$

одакле, кад поделимо све три стране неједначине са $\sin x$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

и узмемо изврнуте вредности

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

[1]) Слика нам показује да је површина кружнога исечка OAB већа од $\triangle OAB$, а мања од $\triangle OAC$, т. ј. да је $\frac{1}{2} OA \,.\, OB \,.\, \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} OA \,.\, AC$ или $\frac{1}{2} r^2 \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 tg\, x$ илу најзад, кад скратимо све три стране неједначиве са $\frac{1}{2} r^2$,

$$\sin x < x < tg\, x \qquad q.\ e.\ d.$$

Ми видимо, одавде, да је задата функција $\frac{\sin x}{x}$ навек мања од 1, а већа од $\cos x$. Но у колико се лук x буде више смањивао у толико ће и $\cos x$ бити приближнији 1 и најзад за $x = 0$ лева и десна страна горње неједначине постају једнаке и тако налазимо да је

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

На исти начин изводимо из неједначине $\sin x < x < tg\, x$ да је

$$\lim_{x=0} \frac{tg\, x}{x} = 1.$$

Речима: у колико је лук мањи у толико је разлика између синуса и тангенте и самога лука незнатнија, тако да за врло мале лукове можемо синус и тангенту да заменимо самим луком. Тако н. пр. јесте $\sin 10'' = arc\ 10''$ тачно на тринајест десетних места. На овоме се оснива један подесан начин израчунавања тригонометриских функција[1]).

3. *Пример.* Да бисмо нашли границу, којој тежи збир бесконачне геометриске постепености

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

ставимо

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n},$$

дакле

$$2 s_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

и одузмимо ове две једначине једну од друге, па ћемо добити

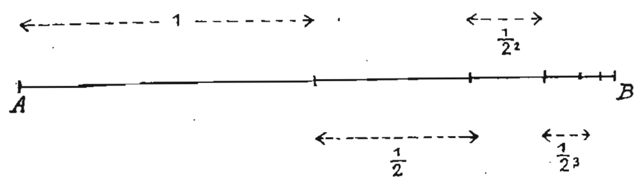
$$s_n = 2 - \frac{1}{2^n},$$

одакле следује

$$\lim_{n=\infty} s_n = 2.$$

Збир горње геометриске постепености са бесконачно много чланова раван је 2.

О томе се можемо уверити на још један, врло очигледан, начин кад узмемо дуж $AB = 2$ и преполовимо је, то исто учинамо и са другом половином итд.



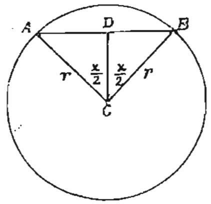
Сл. 2.

Дужи, до којих тако долазимо, представљају графички поједине чланове горње постепености и очигледно је да у колико више будемо вршили ово половљење и сабирање добивених делова, све ћемо се више приближавати тачци B, која је од тачке A удаљена за 2 јединице.

[1]) Види Предавања из Тригонометрије чл. 32. и 33.

13. Начело методе граница. — Од врло велике је важности у питањима о граници, такозвано *начело методе граница*, које гласи: кад две променљиве количине остају вазда једна другој равне и кад једна од њих тежи извесној граници, онда и она друга мора тежити истој граници.

1. Пример. На основу дефиниције, по којој се под периферијом круга има да разуме граничнавредност, којој тежи периметар (збир страна) једнога правилног у кругу уписаног или описаног полигона при бесконачном растењу броја полигонских страна, добијамо следећи израз за кружну периферију.



Сл. 3.

Нека је $AB = s$ страна једнога у круг уписаног правилног полигона са n страна. Спустимо из средишта C управну $CD = \varrho$ на страну AB и означимо $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = \frac{x}{2}$. Из слике читамо да је AD или $\frac{s}{2} = r \sin \frac{x}{2}$, дакле $s = 2 r \sin \frac{x}{2}$, а цео периметар

$$p = 2 n r \sin \frac{x}{2}.$$

Овде имамо две количине, које су вазда (за све n и x) једна другој равне: увек је периметар p раван $2 n r \sin \frac{x}{2}$. Једна од њих, а то је p, тежи извесној граници (периферији круга), дакле мора и она друга тежити истој граници. То значи да је кружна периферија

$$P = \lim_{n=\infty} p = \lim_{n=\infty} 2 n r \sin \frac{x}{2}.$$

Пошто са растењем n-а у бесконачност средишни угао x опада у бесконачност, то видимо, да израз за кружну периферију добија неодређену форму $\infty . 0$. Међутим врло је лако наћи његову истинску вредност. С обзиром на то, да се за бесконачно мали лук синус лука може да замени луком имамо

$$P = \lim_{n=\infty} 2 n r \frac{x}{2} = \lim_{n=\infty} r n x = r \lim_{n=\infty} n x.$$

Слика нам показује да је, за макакво n и x, производ $nx = 360^\circ =$ или 2π и према томе $\quad P = 2 r \pi.$

2. Пример. На исти начин можемо да нађемо површину круга као границу којој тежи површина једнога у круг уписаног или око круга описаног правилног полигона, чији број страна у бесконачност расте.

Из горње слике видимо да је површина троугла $ABC = \frac{s\varrho}{2}$ и према томе површина полигона

$$q = \frac{n s \varrho}{2} = \frac{p \varrho}{2},$$

где p, као и горе, означава полигонски периметар.

На основу начела о методи граница површина круга је

$$Q = \lim_{n=\infty} \frac{p \varrho}{2}.$$

При бесконачноме растењу n-а количина p тежи граници $2 r \pi$, а ϱ тежи полупречнику r:

$$\lim_{n=\infty} p = 2 r \pi, \quad \lim_{n=\infty} \varrho = r,$$

дакле

$$Q = \pi r^2.$$

14. Теорема. — Свака стална количина сама себи је граница:

$$\lim C = C.$$

Ово је само по себи јасно. Стална количина има навек једну исту вредност и неможе, према томе, тежити никаквој другој вредности.

15. Теорема. — Граница алгебарског збира двеју (или више) функција једнака је алгебарскоме збиру граница којима теже поједине функције:

$$\lim [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x).$$

Доказ. Нека је

$$\lim \varphi(x) = a, \qquad \lim \psi(x) = b$$

и ставимо

$$\varphi(x) = a + \alpha, \qquad \psi(x) = b + \beta,$$

где су α и β извесне функције x-а које се у бесконачност умањавају, кад се x приближава оној вредности за коју $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ постају равне a односно b. Тако у 1. примеру чл. 12. $f(x) = \frac{4 + 3x}{x} = 3 + \frac{4}{x}$ нашли смо, да је за извесно x (за $x = \infty$) $\lim f(x) = 3$, док је за свако друго x функциона вредност $3 + \frac{4}{x}$. Овде је дакле $\alpha = \frac{4}{x}$ она количина која, зависна од x, има то својство да се у бесконачност смањује приближавањем x-а оној вредности за коју постаје $f(x) = 3$.

Према датом појму о количинама α и β следује из

$$\varphi(x) \pm \psi(x) = a \pm b + \alpha \pm \beta$$

непосредно

$$\lim [\varphi(x) \pm \psi(x)] = a \pm b = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x).$$

Примедба. Ова теорема престаје важити кад је број сабирака бесконачно велики зато што у таквоме случају алгебарски збир $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots$ бесконачно много бесконачно малих количина не мора да буде $= 0$ (в. чл. 11. под 5).

Специалан случај ове теореме јесте:

$$\lim [\varphi(x) \pm C] = \lim \varphi(x) \pm C.$$

16. Теорема. — Граница производа двеју (или више) функција равна је производу граница, којима теже поједини чинитељи:

$$\lim [\varphi(x) . \psi(x)] = \lim \varphi(x) . \lim \psi(x).$$

Доказ. Ставимо као и горе у чл. 15.

$$\lim \varphi(x) = a, \qquad \lim \psi(x) = b,$$

$$\varphi(x) = a + \alpha, \qquad \psi(x) = b + \beta,$$

дакле

$$\varphi(x) . \psi(x) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta$$

$$\lim [\varphi(x) . \psi(x)] = ab + \lim [a\beta + b\alpha + \alpha\beta],$$

а пошто је

$$\lim [a\beta + b\alpha + \alpha\beta] = 0,$$

то је

$$\lim [\varphi(x) . \psi(x)] = ab = \lim \varphi(x) . \lim \psi(x).$$

Као специалан случај наведимо:

$$\lim [C . \varphi(x)] = C . \lim \varphi(x).$$

17. Теорема. — Граница количника равна је количнику из границе дељеника и границе делитеља:

$$lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{lim\,\varphi(x)}{lim\,\psi(x)}$$

Доказ. Из

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}$$

следује

$$lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a}{b} = \frac{lim\,\varphi(x)}{lim\,\psi(x)},$$

пошто је

$$lim \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)} = 0.$$

Специално:

$$lim \frac{\varphi(x)}{C} = \frac{lim\,\varphi(x)}{C},$$

$$lim \frac{C}{\psi(x)} = \frac{C}{lim\,\psi(x)}.$$

18. Теорема. — Сасвим опште је:

$$lim\,[\varphi(x)^{\psi(x)}] = [lim\,\varphi(x)]^{lim\,\psi(x)}.$$

Доказ. Употребом горњих знакова имамо:

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = (a+\alpha)^{b+\beta} = (a+\alpha)^b\,(a+\alpha)^\beta,$$

одакле, с обзиром на $lim\,(a+\alpha)^\beta = 1$, следује $lim\,[\varphi(x)^{\psi(x)}] = lim\,(a+\alpha)^b = a^b = [lim\,\varphi(x)]^{lim\,\psi(x)}$.

Особени случајеви ове опште теореме јесу:

1. кад ставимо $\psi(x) = C$

$$lim\,[\varphi(x)^C] = [lim\,\varphi(x)]^C.$$

То значи да је граница C-тог степена (или корена) једне функције равна C-томе степену (односно корену) границе дотичне функције.

2. кад ставимо $\varphi(x) = C$ добијамо теорему за изложитељне функције

$$lim\,[C^{\psi(x)}] = C^{lim\,\psi(x)}.$$

19. Теорема. — Граница логаритма једне функције једнака је логаритму границе којој функција тежи:

$$lim\,[log\,\varphi(x)] = log\,[lim\,\varphi(x)].$$

Нека је $\varphi(x) = a + \alpha$, дакле

$$log\,\varphi(x) = log\,(a+\alpha) = log\,[a(1+\frac{\alpha}{a})] = log\,a + log\,(1+\frac{\alpha}{a})$$

и пошто је

$$lim\,(1+\frac{\alpha}{a}) = 1, \quad log\,lim\,(1+\frac{\alpha}{a}) = 0$$

следује теорема:

$$lim\,[log\,\varphi(x)] = lim\,log\,a = log\,a = log\,[lim\,\varphi(x)].$$

20. Прва основна теорема Више Математике. — Граница размере двеју бесконачно малих количина не мења своју вредност кад те количине заменимо другима, које им нису равне, али такве да граница размере наспрам првих количина тежи јединици.

Нека су α и β две бесконачно мале количине, α' и β' друге две, такође бесконачно мале количине и то такве да је

$$lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \qquad lim \frac{\beta}{\beta'} = 1.$$

На основу теореме мора да је

$$lim \frac{\alpha}{\beta} = lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

1. Доказ. Из идентичне једначине

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha'},$$

следује

$$lim \frac{\alpha}{\beta} = lim \frac{\alpha'}{\beta}\cdot lim \frac{\alpha}{\alpha'} = lim \frac{\alpha'}{\beta}.$$

Аналогно из

$$\frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}$$

налазимо

$$lim \frac{\alpha'}{\beta} = lim \frac{\alpha'}{\beta'}\cdot lim \frac{\beta'}{\beta'} = lim \frac{\alpha'}{\beta'},$$

дакле

$$lim \frac{\alpha}{\beta} = lim \frac{\alpha'}{\beta} = lim \frac{\alpha'}{\beta'}, \qquad q.\ e.\ d.$$

2. Доказ. Ставимо

$$\alpha' = \alpha + \delta, \qquad \text{дакле } \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \frac{\delta}{\alpha},$$

$$\beta' = \beta + \varepsilon, \qquad \text{,,} \quad \frac{\beta'}{\beta} = 1 + \frac{\varepsilon}{\beta},$$

где су δ и ε две наспрам α и β (на, разуме се, и наспрам α' и β') бесконачно мале количине. Тада је

$$\frac{\alpha'}{\alpha} : \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1+\frac{\delta}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\beta}},$$

$$lim \frac{\alpha'}{\beta'}\cdot lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{lim\,(1+\frac{\delta}{\alpha})}{lim\,(1+\frac{\varepsilon}{\beta})} = 1,$$

дакле

$$lim \frac{\alpha}{\beta} = lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Према овоме начину доказивања можемо да искажемо горњу теорему:

Граница размере двеју бесконачно малих количина једнака је граници размере других двеју бесконачно малих количина, које се од првих разликују за количине које су бесконачно мале наспрам њих.

Тако н. пр. услед тога што је

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x=0} \frac{tg\, x}{x} = 1$$

јесте

$$\lim_{x=0} \frac{3\,x}{tg\, x} = \lim_{x=0} \frac{3\,x}{x} = 3.$$

$$\lim_{x=0} \frac{x\, tg\, x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x=0} \frac{x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 4.$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin 5\,x}{6\, tg\, x} = \lim_{x=0} \frac{5\,x}{6\,x} = \frac{5}{6}.$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin^2 x}{\sin^3 \frac{x}{2}} = \lim_{x=0} \frac{x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^3} = \infty.$$

21. Друга основна теорема Више Математике. — Граница, којој тежи збир од бесконачно много бесконачно малих количина, не мења се, кад место датих количина, узмемо друге бесконачно мале количине, чија граница размере наспрам првих тежи јединици. Или

Граница збира од бесконачно много бесконачно малих количина не мења се, ако задате количине заменимо другима, које се од њих разликују за вредности бесконачно мале наспрам њих.

Доказ. Нека је

$$s = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \quad \text{у беск.}$$

коначан збир од бесконачно много бесконачно малих количина $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, које по извесноме закону теку и претпоставимо да је

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\beta''}{\alpha''} = 1, \ldots$$

или што је исто

$$\beta = \alpha + \alpha\varepsilon, \quad \beta' = \alpha' + \alpha'\varepsilon', \quad \beta'' = \alpha'' + \alpha''\varepsilon'', \ldots,$$

где су $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ такође бесконачно мале количине и према томе производи $\alpha\varepsilon, \alpha'\varepsilon', \alpha''\varepsilon'', \ldots$ бесконачно мали наспрам количина $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$

Према горњем је

$$\begin{aligned}\beta + \beta' + \beta'' + \ldots &= \alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \quad + \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots \\ &= s + \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots\end{aligned}$$

Узмимо да је η по апсолутној вредности највећа од свију количина ε, онда је, апсолутно узев

$$\begin{aligned}\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots &< \eta\,(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) \\ &< \eta\, s.\end{aligned}$$

Пошто је η једна бесконачно мала количина, s коначно, то је ηs такође бесконачно мало и $\lim \eta s = 0$, а у толико пре

$$\lim\,(\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots) = 0$$

Услед тога је

$$\lim\,(\beta + \beta' + \beta'' + \ldots) = \lim\,(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) = s \quad q.\ e.\ d.$$

Резултат да је

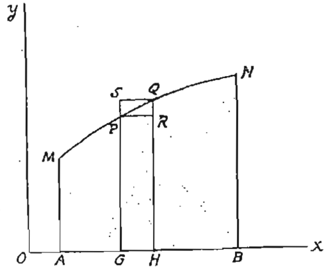
$$\lim\,(\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots) = 0.$$

исказан речима гласи: кад сваки члан једнога коначног збира од бесконачно много бесконачно малих количина $(\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots)$ помножимо једном бесконачно малом количином $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots)$, онда је тако добивени збир производа раван нули.

Она прва теорема у чл. 20. основ је Диференциалном, ова друга основ Интегралном Рачуну.

Покажимо на једноме примеру значај друге теореме у Интегралноме Рачуну.

При израчунавању једне криволиниске површине у равни, н. пр. фигуре $MABN$, која је ограничена с једне стране комадом AB апсцисне осе, с друге две стране ординатама AM и BN и са четврте стране луком MN ма какве криве линије, ми је замишљамо раздељену на бесконачно много бесконачно узане трапезе, као што је н. пр. $PGHQ$. На тај начин је фигура $MABN$ представљена као један коначан збир од бесконачно много бесконачно малих сабирака. Место трапеза $PGHQ$ можемо да узмемо уписани или описани правоугаоник, $PGHR$ или $SGHQ$, јер је разлика између њих и трапеза бесконачно мала наспрам истих. Разлика између описаног и уписаног правоугаоника представљена је правоугаоником $PQRS$, који је раван производу из две бесконачно мале количине (апсцисног елемента GH и ординатног елемента QR), дакле бесконачно мали наспрам уписаног или описаног правоугаоника, чија је површина равна производу из једне коначне дужи (ординате PG односно QH) и једне бесконачно мале количине (апсцисног елемента GH). Означимо са $\alpha, \alpha'\ \alpha'', \ldots$ поједине апсцисне елементе (од којих је и GH такав један), са $\varepsilon, \varepsilon'\ \varepsilon'', \ldots$ ординатне елементе (разлике између две и две бесконачно блиске ординате). Збир $\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots$. изражава разлику између површине свију описаних и површине свију уписаних правоугаоника. Но пошто је $\lim\,(\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots) = 0$[1]), то следује да се при израчунавању криволиниске површине $MABN$ трапези $PGHQ$ могу да замене било уписаним, било описаним правоугаоницима.



Сл. 4.

22. Бесконачно мале количине разног реда. — При расматрању више бесконачно малих количина, које зависе једна од друге, узима се једна од њих као *главна бесконачно мала количина*, са којом се остале упоређују. За другу коју бесконачно малу количину каже се да је *бесконачно мала првога реда (ступња)*, ако размера исте наспрам главне бесконачно мале количине тежи, као граници својој, једној коначној

[1]) Претпоставимо да сви правоугаоници, односно трапези, на које замишљамо раздељену криволиниску фигуру, имају једнаку ширину, т. ј. узмимо да је $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots$, онда је збир бесконачно малих правоугаоника $PQRS$, означимо га са $\Sigma\ PQRS = \alpha\,(\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots) = \alpha\,(NB - MA)$, дакле раван производу из једне бесконачно мале количине α и једног коначног броја $NB - MA$. Отуда одмах следује да је $\lim \Sigma\, PQRS = 0$.

вредности. Нека је α главна бесконачно мала количина, p један коначан, а ε један бесконачно мали број. Бесконачно малу количину првога реда можемо да представимо, онда, у виду

$$\beta = \alpha\,(p + \varepsilon),$$

јер је

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\,(p + \varepsilon) = p.$$

Једна бесконачно мала количина је *бесконачно мала другог реда*, ако је њена размера наспрам главне бесконачно мале количине бесконачно мала количина првога реда. Бесконачно мала количина другог реда је

$$\gamma = \alpha^2 (p + \varepsilon),$$

јер је $\dfrac{\gamma}{\alpha} = \alpha\,(p + \varepsilon)$ бесконачно мало првога реда.

Сасвим опште кажемо за једну количину да је *бесконачно мала n-тога реда*, ако је њена размера наспрам главне бесконачно мале количине бесконачно мала n-1-вога реда. Бесконачно мала количина n-тога реда има вид

$$\nu = \alpha^n (p + \varepsilon).$$

Тако на пр., ако узмемо да је лук x бесконачно мала количина првога реда, онда је и $\sin x$ бесконачно мала количина првога реда, јер је $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Међутим $1 - \cos x$ је бесконачно мало другог реда, јер је $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

Правоугаоник $PQRS$, конструисан из бесконачно малих координатни елемената PR и QR (в. сл. 4.) јесте бесконачно мали према правоугаоницима $PGHR$, $SGHQ$ и трапезу $PGHQ$. Ако ове последње узмемо за бесконачно мале првога реда, онда је правоугаоник $PQRS$ бесконачно мала количина најмање (т. ј. извесним случајима још и вишег но) другог реда.

Користећи се овим појмовима о бесконачно малим количинама разнога реда можемо горње две теореме (у чл. 20. и чл. 21.) да искажемо на следећи начин.

Граница размере двеју количина, које се састоје из бесконачно малих количина разнога реда, не мења се, кад је код једне и друге задрже само бесконачно мале количине најнижег реда.

Н. пр.

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x + 8 \sin^3 x}{x + 5x^2 - x^4} = \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Тако исто кад се тражи граница збира бесконачно малих количина разног реда довољно је, и без утицаја на тачност резултата, ако се узму у рачун само бесконачно мале количине најнижег реда.

1. Напомена. Код *многозначних функција* ваља испитати сваку њену грану, т. ј. сваки низ вредности, које су међусобом везане законом непрекидности, по наособ. Тако н. пр. код функције $f(x) = \sqrt{x}$ једну грану образују вредности $+\sqrt{x}$, а другу грану $-\sqrt{x}$. Ако су све гране непрекидне, онда се каже и за целу функцију да је непрекидна.

2. Напомена. За непрекидност функција, које зависе од више прапромењљивих количина, важи сасвим слична дефиниција као и за функције које зависе само од једне прапромењљиве. Тако н. пр. једнозначна функција $f\,(x,\,y)$ непрекидна је функција у границима од $x = a$ па до $x = b$ и од $y = \alpha$ па до $y = \beta$, кад за сваки спрег вредности њених прапромењљивих x и y, н. пр. за $x = c$ и $y = \gamma$ (где c лежи између a и b, а γ између α и β) она добија само једну и то стварну и коначну вредност.

Непрекидност функција, које зависе од две прапромењљиве, може да се протумачи геометриски употребом Аналитичке Геометрије у простору, док за функције, које зависе од три и више прапромењљивих, геометриско тумачење постаје немогућно.

II.

Бесконачни редови.

1. О бесконачним редовима уопште.

24. Појмови. — Под *редом* разумемо један низ количина, који је образован по извесном закону. Количине, из којих се ред састоји, зову се *чланови* реда.

Ако, од лева па на десно, чланови бивају већи, онда *ред расте*. У противноме случају *ред опада*.

Ред се зове *коначан* или *бесконачан*, према томе да ли је број његових чланова коначан или бесконачно велики.

Број, који показује на коме се месту налази исвесан члан реда, зове се казаљка места тога члана или просто *казаљка* члана.

Чланове једнога реда бележићемо са $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Члан u_n зове се n-ти или *општи члан*.

25. Закон реда. — Ред се може сматрати да је познат, ако је познат закон по коме теку његови чланови. Тај закон може, поглавито, бити изражен на ова два начина:

1-во сваки члан реда $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots$ може бити дат као функција његове казаљке: $u_n = f(n)$, у коме се случају закон реда зове *независан*.

2-го закон реда може да изражава ма који члан као функцију, претходећих чланова: $u_n = f(u_{n-1},\ u_{n-2}, \ldots)$. Закон реда зове се тада *повратан*.

Тако н. пр. код геометриске постепености $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \dots aq^{n-1},\ aq^n,\ aq^{n+1}, \dots$ јесте $u_n = aq^{n-1},\ u_{n+1} = aq^n,\ u_{n+2} = aq^{n+1}, \dots$ и тиме је закон реда исказан у независној форми, пошто сваки члан израчунавамо непосредно из његове казаљке места. Узевши да је $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$, дакле $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ добијамо закон реда у повратној форми. Да бисмо израчунали извесан члан потребна су нам два претходећа члана.

26. Збирни образац. — Аналитички израз збира првих n чланова једнога реда зове се *збирни образац.* Ставићемо

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Кад је познат аналитички израз збира, онда смо у стању да определимо не само збир од ма колико чланова, него и цео ред за који тај образац важи. Ма који члан реда добијамо као разлику из два збира

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Нека нам је дат н. пр. овај збирни образац

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}. \text{ Онда је } s_{n-1} = \frac{a(1-q^{n-1})}{1-q}, \text{ дакле}$$

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{a}{1-q}(q^{n-1} - q^n) = aq^{n-1}.$$

За $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ налазимо чланове

$$u_1 = a,\ u_2 = aq,\ u_3 = aq^2,\ u_4 = aq^3, \dots$$

То значи да се горњи збирни образац односи на геометриску постепеност.

27. Збир бесконачнога реда. — По себи је јасно шта ваља разумети под збиром једног коначног реда, пошто се збир таквога реда добија непосредним сабирањем. Други је случај код сабирања бесконачних редова, које се неможе непосредно да изврши. Под *збиром једног бесконачног реда* разумемо границу којој тежи збир првих n чланова, кад пустимо n да расте у бесконачност. Дакле, ако означимо са s збир бесконачног реда, онда је према дефиницији

$$s = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Збир бесконачног реда може да буде

1-во коначан и одређен, у коме се случају ред зове *збирљив* или *конвергентан.* Збир $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ у беск. раван је извесноме коначном броју s.

2-го збир је бесконачно велики: $\lim_{n=\infty} s = \infty$. Такав се ред зове *незбирљив* или *дивергентан.*

3-ће збир има више разних вредности: није одређен и зато се и ред зове *неодређен* или *осцилирајући.*

Узмимо као пример бесконачну геометриску постепеност

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n + \dots \text{ у беск.}$$

Збирни образац, т. ј. образац за првих n чланова

$$a + aq + aq^2 + \dots aq^{n-1},$$

гласи

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Одавде видимо да је ред збирљив, ако је $-1 < q < 1$, јер је онда

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty}\left[\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right] = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n=\infty} q^n = \frac{a}{1-q},$$

дакле коначно и одређено.

Ред је незбирљив, ако је $q \geqq 1$, јер је у томе случају $\lim_{n=\infty} s_n = \infty$.

За $q < -1$ ред је неодређен и незбирљив, јер је $\lim_{n=\infty} s_n = \pm\infty$, према томе да ли је n непарно или парно.

За $q = -1$ ред је чисто неодређен. Ако будемо узели да је n паран број, онда је $s_n = a - a + a - a \dots - a = 0$, узмемо ли, пак, да је n непарно биће $s_n = a - a + a - a \dots + a = a$. Према томе је $\lim_{n=\infty} s_n = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$ неодређено.

Примедба. Збирљиви редови служе за израчунавање многих функција, као н. пр. логаритама и тригонометриских функција. Незбирљиви редови немогу да се употребе за израчунавање функција, али су од посредне користи утолико помоћу њих долазимо до многих збирљивих редова. Неодређени редови немају никакве примене.

28. Остатак бесконачног реда. — Збир бесконачног реда, који настаје после n-тога члана зове се *остатак* реда. Обележићемо га са R_n. Отуда што је

$$\begin{aligned} s &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \text{ у беск.} \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ R_n &= u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \text{ у беск.} \end{aligned}$$

следује

$$\begin{aligned} s &= s_n + R_n, \\ R_n &= s - s_n. \end{aligned}$$

Одавде изводимо закључак:

1-во да остатак R_n збирљивог реда мора имати само једну и то коначну вредност.

2-го да је за незбирљиве редове $R_n = \infty$.

3-ће да R_n има две или више разних вредности код неодређених редова.

Нарочито је по збирљиве редове остатак од велике важности. Пошто је за конвергентне редове $\lim_{n=\infty} s_n = s$ или $\lim_{n=\infty}(s - s_n) = 0$, то је дакле за њих

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Ово можемо да искажемо у форми теореме: бесконачан ред је збирљив, ако је граница, којој тежи његов остатак, при бесконачном растењу броја чланова, равна нули.

Овај услов мора да је испуњен код сваког конвергентног реда, пошто тај услов у себи садржи саму дефиницију за збирљивост.

1. *Пример.* Узмимо ред
$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\dots+\frac{x^{n-1}}{1\,.\,2\dots(n-1)}+\frac{x^n}{1\,.\,2\dots n}+\dots$$
Овде је
$$R_n=\frac{x^n}{1\,.\,2\dots n}+\frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\dots n(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{1\,.\,2\dots n(n+1)(n+2)}+\dots$$
$$=\frac{x^n}{1\,.\,2\dots n}\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\dots\right].$$
Ма какво било x овај ће остатак, узевши n довољно велико, тежити нули, јер ако узмемо да је n преко сваке мере велико, R_n ће бити равно збиру бесконачно малих количина, од којих је свака помножена другом бесконачно малом количином. Ми знамо да је такав збир производа раван нули (в. чл. 21.). Пошто је $\lim_{n=\infty} R_n=0$ задати је ред збирљив и то за све могуће вредности x-а, како положне, тако и одречне.

Испитајмо између којих граница лежи остатак R_n за коначно n, т. ј. у којим границама лежи *грешка*, коју чинимо кад при сабирању реда занемаримо све чланове иза n-тога члана.

Претпоставимо да је x положно. Пре свега видимо да је $R_n>0$, а из горњег обрасца закључујемо
$$R_n<\frac{x^n}{1\,.\,2\dots n}\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\dots\right]$$
и узев $x<n+1$ (јер је само тако збирљива геометриска постепеност $1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\dots$ и њен је збир $=\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}=\frac{n+1}{n+1-x}$) имамо $0<R_n<\frac{x^n}{1\,.\,2\dots n}\,\frac{n+1}{n+1-x}$.

Решимо питање: који је члан у задатоме реду највећи, узевши за x извесну бројну вредност, означимо је са x_1, где у општем случају x_1 лежи између два узастопна цела броја p и $p+1$, дакле $p<x_1<p+1$. Имајмо на уму да се члан
$$\frac{x_1^p}{1\,.\,2\,.\,3\dots p}=\frac{x_1}{1}\cdot\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_1}{3}\cdots\frac{x_1}{p}$$
састоји из чинитеља који су сви >1. Сваки овоме претходећи члан је мањи од њега зато што је састављен само из неколико таквих чинитеља. Али је и сваки доцнији члан мањи од наведенога, јер се добија, кад се овај члан помножи са $\frac{x_1}{p+1}$, $\frac{x_1}{p+1}\cdot\frac{x_1}{p+2}$ итд. дакле са чинитељима <1.

2. *Пример.* Код реда
$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots$$
јесте
$$R_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{n+2}}{n+2}+\dots$$
$$<\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[1+x+x^2+\dots\right],$$
дакле, ако претпоставимо да је $-1<x<1$ (у коме је случају геометриска постепеност $1+x+x^2+\dots$ збирљива и њен збир $=\frac{1}{1-x}$),
$$R_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1-x},\quad \lim_{n=\infty} R_n=0.$$
Значи да је задати ред конвергентан за вредности x-а од -1 па до $+1$.

Примедба I. Из горње теореме о остатку збирљивих редова следује да код сваког конвергентног реда чланови мора да опадају, ако не одмах, а оно почев од извесног места па на даље, и мора да постану мањи од ма како малога броја. Но тај услов, и ако је *нужан* за збирљивост једнога реда, није *довољан*, т. ј. тај услов може да је испуњен, па ипак да ред не буде збирљив. О томе ћемо се уверити код *хармониског реда*
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\dots$$
кад га напишемо на овај начин
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}\right)+$$
$$\dots+\left(\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)+\dots$$
Сваки од ових израза у загради је $>\frac{1}{2}$, а пошто их има бесконачно много, јасно је да је њихов збир бесконачно велики. У хармонискоме реду имамо, дакле, пример реда, чији чланови опадају у бесконачност, а ред је дивергентан.

Примедба II. Као и код она горња два реда у 1. и 2. Примеру, тако врло често, није могуће дати у савршеној форми аналитички израз за остатак реда, но само његове приближне вредности. Међутим те су нам приближне вредности ипак од велике користи, јер нам служе за оцењивање грешке коју чинимо кад се, при сабирању реда, зауставимо код извесног n-тога члана, а све идуће чланове занемаримо. Ако су те приближне вредности, између којих остатак лежи, коначне и ако се оне, при бесконачноме растењу броја n, све више приближавају одређеној коначној граници, онда је дотични ред конвергентан.

2. Бесконачни редови чији су чланови сви истога знака.

29. Метода за испитивање збирљивости. — Да би сазнали да ли је један задати ред збирљив или не, ми га упоређујемо са једним познатим редом, т. ј. са редом за који знамо да ли је збирљив или не. Означимо са
$$t_1+t_2+t_3+\dots+t_n+\dots$$
познати нам ред, са
$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$
ред чију збирљивост хоћемо да испитамо.

Претпостављамо да су сви чланови у оба реда једног истог знака: било да су сви положни или сви одречни.

Узмимо да је познати t-ред збирљив и претпоставимо да је почевши од извесног места па на даље, количник из ма којег члана реда u и одговарајућег члана (т. ј. члана с истом казаљком места) реда t вазда мањи или највише раван 1, дакле

$$\frac{u_n}{t_n} \leqq 1$$

за свако $n > k$. Тада је

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots \leqq t_{k+1} + t_{k+2} + \ldots$$

Пошто збир на десној страни ове неједначине има своју одређену и коначну вредност, јер смо претпоставили да је ред t збирљив, то мора, на основу неједначине, да је и збир на левој страни коначан и према томе и ред u конвергентан. Значи: кад се нађе, при сравнивању редова t и u, да су, почевши од којег било k-тога члана, сви чланови задатог u-реда мањи или највише равни одговарајућим члановима као збирљива познатог t-реда, да и задати ред мора да је збирљив.

Напротив, ако је познати t-ред дивергентан и ако се, при сравнивању, покаже да су, почев од извесног места, н. пр. k-тога, па све на даље сви чланови задатог u-реда већи или равни одговарајућим члановима познатог реда, онда је и ред u незбирљив. Јер, ако претпоставимо да је за сваку казаљку $n > k$

$$\frac{u_n}{t_n} \geqq 1,$$

дакле

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots \geqq t_{k+1} + t_{k+2} + \ldots,$$

а знамо да је $t_{k+1} + t_{k+2} + \ldots = \infty$, то је и $u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots = \infty$, дакле ред u незбирљив.

30. Теорема. — У геометриској постепености

$$a + aq + aq^2 + \ldots$$

имамо ред, који нам је, у погледу његове збирљивости, потпуно познат. Под претпоставком да су сви чланови положни ми знамо да је геометриска постепеност збирљива кад је количник $q < 1$, а незбирљива кад је $q \geqq 1$.

Упоређењем једног задатог реда са геометриском постепености на горе (у чл. 29.) показати начин долазимо до теореме:

бесконачан ред, чији сви чланови или бар они који следују некоме ма како удаљеноме члану, имају један исти знак, јесте збирљив, ако је — почев од извесног места, н. пр. k-тога, па на даље — количник из ма којег члана и њему предходећег члана мањи или највише раван једноме броју q, који је мањи од 1.

Доказ. Претпоставимо да је, од k-тога члана па на даље, код задатог реда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leqq q$$

$$\cdots\cdots$$

где је број $q < 1$. Отуда следује

$$u_{n+1} \leqq q u_n$$

$$u_{n+2} \leqq q u_{n+1} \leqq q^2 u_n$$

$$u_{n+3} \leqq q u_{n+2} \leqq q^3 u_n$$

$$\cdots\cdots$$

дакле $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$ или

$$R_n \leqq u_n (q + q^2 + q^3 + \ldots)$$
$$\leqq u_n \frac{q}{1-q}.$$

Но пошто је $q < 1$ и чланови реда, почев од k-тога, опадају, дакле $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$, то је

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

а то значи да је задати ред збирљив.

I. Допуна. С погледом на то што је код познатог реда (геометриске постепености) $\frac{t_{n+1}}{t_n} = q$, а знамо да је тај ред збирљив, кад је $q < 1$, а незбирљив кад је $q \geqq 1$, можемо да формулишемо горњу теорему на овај начин:

задати је ред збирљив, ако, почев од извесног места па на даље количник из два узастопна члана $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ није већи од одговарајућег количника $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ једнога збирљивог реда.

Обратно: задати је ред незбирљив, ако, почев од извесног места па на даље, количник из два узастопна члана $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ није мањи од одговарајућег количника $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ једног дивергентног реда.

II. Допуна. Имавши на уму да је геометриска постепеност збирљива за $q<1$, а незбирљива за $q \geqq 1$, ми можемо да искажемо горњу теорему још на овај трећи начин:

ред, у коме је, од извеснога места па на даље, $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, дакле и $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, јесте збирљив.

Ред је незбирљив, ако је, од извеснога места па на даље, $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, дакле и $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

На случај да је $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ имамо да правимо разлику да ли количник $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ опада или расте са n (казаљком места) или другим речима да ли чланови реда опадају или расту, т. ј. да ли је за коначно n количник $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ већи или мањи од 1. У првоме случају $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}>1, \lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=1\right)$ ред је дивергентан, јер није испуњен услов збирљивости да чланови опадају у бесконачност. У другоме случају $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}<1, \lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=1\right)$ остајемо у неизвесности у погледу збирљивости задатог реда и ми смо принуђени да то испитамо на други начин.

1. Пример.

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}+\ldots$$

Овде је

$$u_n=\frac{x^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)},\quad u_{n+1}=\frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)\,n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{n},$$

а ово је, за довољно велико n, навек мање од ма којег броја $q<1$. Тако исто је и

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0, \text{ т. ј. } <1.$$

Задати је ред збирљив и то за све вредности од x.

Задати ред, који представља изложитељну функцију e^x, даје за $x=1$ број e (основу *Непер*-ове логаритамске системе)

$$e=2+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}+\ldots$$

Примећујемо да је $e>2$, али $<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$, т. ј. $2<e<3$.

На основу остатка

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{1\,.\,2\ldots n\,(n+1)}+\frac{1}{1\,.\,2\ldots n\,(n+1)\,(n+2)}+\ldots\\
&=\frac{1}{1\,.\,2\ldots n\,(n+1)}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)\,(n+3)}+\ldots\right]\\
&<\frac{1}{1\,.\,2\ldots n\,(n+1)}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]\\
&<\frac{1}{1\,.\,2\ldots n\,(n+1)}\;\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\\
&<\frac{1}{1\,.\,2\ldots n\,.\,n}
\end{aligned}$$

у стању смо да оценимо грешку, која се чини, кад се при сабирању реда e узму само првих n чланова. Пре свега видимо да је збирљивост реда e веома брза. Непосредним сабирањем првих 11 чланова добија се на седам десетних места тачно

$$e=2{,}7182818.$$

2. Пример.

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Овде је

$$u_n=\frac{x^n}{n},\quad u_{n+1}+\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}\,x,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\lim_{n=\infty}\frac{n}{n+1}=x\lim_{n=\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=x.$$

Одавде закључујемо да је задати ред збирљив, ако је $x<1$, а незбирљив, ако је $x>1$. За $x=1$ ред је такође незбирљив, јер се, у томе случају, он претвара у хармониски ред, за који знамо да је дивергентан.

3. Пример. Пошто је сваки члан доле наведених примера мањи од одговарајућег члана реда у 1. Примеру (кад први члан тога реда, а то је члан 1, одузмемо, које, разуме се, не мења збирљивост), то су збирљиви и ови редови:

$$x\sin x+\frac{x^2}{1\,.\,2}\sin 2x+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\sin 3x+\ldots+\frac{x^n}{1\,.\,2\ldots n}\sin nx+\ldots$$

$$x\cos x+\frac{x^2}{1\,.\,2}\cos 2x+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cos 3x+\ldots+\frac{x^n}{1\,.\,2\ldots n}\cos nx+\ldots$$

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{1\,.\,2}+\frac{\sin 3x}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{\sin nx}{1\,.\,2\ldots n}+\ldots$$

$$\cos x+\frac{\cos 2x}{1\,.\,2}+\frac{\cos 3x}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{\cos nx}{1\,.\,2\ldots n}+\ldots$$

$$\sin x+\frac{\sin^2 x}{1\,.\,2}+\frac{\sin^3 x}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{\sin^n x}{1\,.\,2\ldots n}+\ldots$$

$$\cos x+\frac{\cos^2 x}{1\,.\,2}+\frac{\cos^3 x}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{\cos^n x}{1\,.\,2\ldots n}+\ldots$$

итд. за све вредности од x.

Упоређењем са редом у 2. Примеру долазимо до закључка да су збирљиви редови

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots$$

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\ldots+\frac{\cos nx}{n}+\ldots$$

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3}+\ldots+\frac{\sin^n x}{n}+\ldots$$

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{\cos^3 x}{3}+\ldots+\frac{\cos^n x}{n}+\ldots$$

итд.

4. *Пример.*

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{4}{4^m}+\ldots+\frac{1}{n^m}+\frac{1}{(n+1)^m}+\ldots$$

На први поглед видимо да је задати ред дивергентан, ако је $m=1$, јер се он тада претвара у хармониски ред. Још из јачег разлога је задати ред незбирљив, ако је $m<1$, пошто су чланови таквога реда већи од одговарајућих чланова хармониског реда. Ред, је, дакле, незбирљив за $m \leqq 1$. Остаје да испитамо какав је он за $m>1$.

Отуда што је

$$u_n=\frac{1}{n^m},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^m},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^m=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^m,$$

дакле за коначно n количник $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, а за бесконачно велико n $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, нисмо у стању да одредимо да ли је наш ред збирљив или не.

Међутим, ако задати ред напишемо

$$1+\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\left(\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{7^m}\right)+\left(\frac{1}{8^m}+\ldots+\frac{1}{15^m}\right)+\ldots$$

$$<1+\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}\right)+\left(\frac{1}{4^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{4^m}\right)+\left(\frac{1}{8^m}+\ldots+\frac{1}{8^m}\right)+\ldots$$

$$<1+\frac{2}{2^m}+\frac{4}{4^m}+\frac{8}{8^m}+\ldots$$

$$<1+\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{4^{m-1}}+\frac{1}{8^{m-1}}+\ldots$$

и будемо имали на уму да је ово последње једна збирљива геометриска постепеност, јер је овде

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{1}{(2^n)^{m-1}}:\frac{1}{(2^{n-1})^{m-1}}=\frac{1}{2^{m-1}}<q<1,$$

уверићемо се да је горњи ред конвергентан за $m>1$.

5. *Пример.*

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2p}\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\ldots$$

Отуда што је

$$u_n=\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-3)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2p-2)}\,\frac{x^{2p-1}}{2p-1},$$

$$u_{n+1}=\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-3)\;(2p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2p-2)\;.\;2p}\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1},$$

дакле

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2p-1}{2p}\,\frac{2p-1}{2p+1}\,x^2,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x^2\lim_{p=\infty}\frac{2p-1}{2p}\lim_{p=\infty}\frac{2p-1}{2p+1}=x^2\lim_{p=\infty}\frac{2-\frac{1}{p}}{2}\lim_{p=\infty}\frac{2-\frac{1}{p}}{2+\frac{1}{p}}=x^2$$ видимо

да је ред збирљив, ако је $x<1$.

31. Теорема. — Ред са положним члановима збирљив је, ако је, почев од извесног места па на даље,

$$\sqrt[n]{u_n}<q<1.$$

Пошто је

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots<q^{n+1}+q^{n+2}+q^{n+3}+\ldots$$
$$<q^{n+1}(1+q+q^2+\ldots),$$

дакле

$$R_n<\frac{q^{n+1}}{1-q},\quad \lim_{n=\infty}R_n=0,$$

ред је збирљив.

Напротив ред је незбирљив, ако је

$$\sqrt[n]{u_n}>q>1,$$

јер је онда $u_n>q^n$, $\lim\limits_{n=\infty}u_n=\infty$ и у толико више

$$\lim_{n=\infty}R_n=\infty.$$

3. Бесконачни редови са положним и одречним члановима.

32. Теорема. — Ред, који се састоји из положних и одречних чланова збирљив је, ако је збирљив ред, који произилази из задатог реда, кад се сви чланови узму са положним знаком. Доказ је прост. Пошто је збир задатога реда мањи од збира реда, који из задатог постаје кад је сви чланови узму са положним знаком, јасно је, да ако збир овога положног реда буде имао коначну вредност, исти случај мора бити и са збиром задатог реда.

Овај услов за збирљивост редова са положним и одречним члановима јесте довољан, али није нуждан. Значи: ако је тај услов испуњен ред мора да буде збирљив, но ред може бити збирљив и онда ако речени услов није испуњен.

1. *Пример.* Ред

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+-\dots$$

представља тригонометриску функцију $\cos x$. За ред, у коме су сви чланови положни, имамо

$$u_n=\frac{x^{2n-2}}{1.2\dots(2n-2)},\qquad u_{n+1}=\frac{x^{2n}}{1.2\dots(2n-2)(2n-1)2n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^2}{(2n-1)2n}$$

и пошто је овај количник за довољно велико n, т. ј. почев од извесног члана па на даље, вазда <1, за ма какву вредност x-а, то значи да је тај ред, па дакле и задати ред, збирљив и то за све могуће вредности x-а.

2. *Пример.*

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+-\dots$$

Овај ред представља тригонометриску функцију $\sin x$. Он је, као и прошли ред, збирљив за све могуће вредности x-а.

Узев све чланове са положним знаком имамо

$$u_n=\frac{x^{2n-1}}{1.2\dots(2n-1)},\qquad u_{n+1}=\frac{x^{2n+1}}{1.2\dots(2n-1)2n(2n+1)},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^2}{2n(2n+1)}.$$

Ма како велико било x овај количник из два узастопна члана постаје, од извесног места па на даље, мањи од 1, а за $n=\infty$ он је $=0$.

3. *Пример.*

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n+\dots$$

Овај ред представља функцију $(1+x)^m$.

Отуда што је

$$u_n=\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots\dots(n-1)}x^{n-1},$$

$$u_{n+1}=\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2\dots\dots(n-1).n}x^n,$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n+1}{n}x=\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x,$$

а на основу теореме о количнику из два узастопна члана, закључујемо да је задати ред збирљив, ако је $-1<x<+1$, а незбирљив, ако је апсолутна вредност x-а већа од 1.

Када је $0<x<1$, онда чланови реда опадају у бесконачност и почев од члана $\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots\dots k}x^k$, где је $k-1<m<k$, мењају наизменично знак. Ако је, пак, $-1<x<0$, онда они чланови, који наведеноме члану са x^k претходе мењају алтернативно знак, док они доцнији чланови имају сви знак $+$ или знак $-$, према томе какво је k: непарно или парно.

4. *Пример.*

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\dots$$

Овај ред представља логаритамску функцију $l(1+x)$. Збирљивост његова утврђује се непосредно упоређењем са редом у 2. примеру чл. 30., за који смо доказали да је конвергентан за $-1<x<1$.

33. Теорема. — Ред, у коме су сви, или бар они удаљени чланови наизменце положни и одречни, а осим тога и опадају у бесконачност, јесте збирљив.

Доказ. Претпоставимо да је то случај са редом

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_p+\dots$$

почев од $n+1$-вог члана, који ћемо узети да је положан. Означимо са $U_{n+1}, U_{n+2},\dots$ апсолутне вредности чланова $u_{n+1}, u_{n+2},\dots$ и узмимо да је $p>n$. Онда је

$$s_p=s_n+(U_{n+1}-U_{n+2})+(U_{n+3}-U_{n+4})+\dots,$$

дакле

$$s_p>s_n,$$

јер је, на основу претпоставке, $U_{n+1}>U_{n+2}>U_{n+3}>\dots$

Ако, међутим, напишемо

$$s_p=s_n+U_{n+1}-(U_{n+2}-U_{n+3})-(U_{n+4}-U_{n+5})-\dots$$

видићемо да је

$$s_p<s_n+U_{n+1},$$

дакле

$$s_n<s_p<s_n+U_{n+1}.$$

Но пошто је $\lim_{n=\infty}U_{n+1}=0$, јер, према учињеној претпоставци, чланови опадају у бесконачност, следује да се збир реда приближује све више извесној коначној вредности, а то значи да је дотични ред конвергентан.

Пример. Код реда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\dots-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-+\dots$$

испуњена су оба услова за збирљивост редова са положним и одречним члановима: чланови наизменце мењају знак и опадају у бесконачност. Ред је, према томе, збирљив и ако су редови

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2k+1}+\dots \qquad (1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2k}+\dots \qquad (2$$

из којих је горњи ред састављен посебице дивергентни. О томе је лако уверити се.

Да је ред 2), који је састављен из негативних чланова, незбирљив видимо отуда што је

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\right],$$

дакле његов збир раван половини збира једног незбирљивог реда (хармониске постепености). Незбирљивост реда 1), који је образован из позитивних чланова, утврђујемо тиме што су његови чланови појединце већи од чланова реда 2), за који смо доказали да је дивергентан.

4. Бесконачни редови са уображеним члановима.

34. Теорема. — Ред са уображеним члановима збирљив је, ако је збирљив ред, који је састављен из стварних делова, као и ред, који је састављен из чисто уображених делова задатог реда.

Ред са уображеним члановима

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + (u_3 + iv_3) + \ldots + (u_n + iv_n) + \ldots$$

где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица, конвергентан је, ако су конвергентни редови

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2$$

Доказ. Означимо са s_1 и s_2 суме редова 1) и 2), где су, према претпоставци s_1 и s_2 коначни и одређени бројеви. Збир задатог реда је

$$s = s_1 + is_2,$$

дакле такође коначан и одређен број.

35. Теорема. — Ред са уображеним члановима је збирљив, ако је збирљив ред који је састављен из модуа појединих чланова задатог реда.

Доказ. Нека је

$$\varrho_1 = mod\ (u_1 + iv_1), \text{ т. ј. } \varrho_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2},$$
$$\varrho_2 = mod\ (u_2 + iv_2), \text{ „ „ } \varrho_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\varrho_n = mod\ (u_n + iv_n), \text{ „ „ } \varrho_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}.$$

Отуда што је

$$u_1 < \varrho_1 > v_1,$$
$$u_2 < \varrho_2 > v_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n < \varrho_n > v_n,$$

дакле сваки члан следећа два реда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2$$

мањи од одговарајућег члана модуског реда

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots + \varrho_n + \ldots$$

следује, да ако је овај последњи ред конвергентан, и она два реда под 1. и 2. морају бити такви, па дакле (према теореми у чл. 34.) и уображени ред

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + (u_3 + iv_3) + \ldots + (u_n + iv_n) + \ldots$$

ПРВИ ДЕО

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

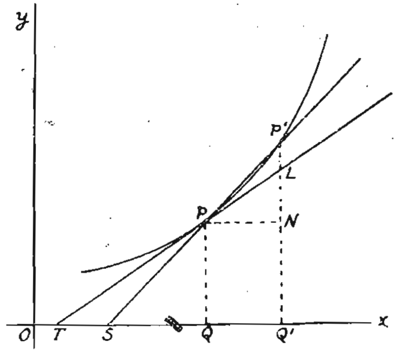
I.

Диференциалење функција једне прапроменљиве.

36. Како је пронађен Диференциални Рачун. — Покушаји да се нађе општа метода за повлачење тангенте на криве линије у равни, замишљајући линије дате њиховом једначином, дали су повод за проналазак Диференциалног Рачуна.

Узмимо да се хоће тангента у тачци $P\ (x,\ y)$ једне линије чија је једначина у правоуглим координатама $y = f\ (x)$.

Под тангентом разумемо крајни положај, којем тежи сечица при бесконачном приближавању њених пресечних тачака једна другој. Према томе се тангента у тачци P има сматрати као крајни положај TL којем сечица SP' тежи кад замислимо да се тачка P' до у бесконачност приближава тачци P.



Сл. 6.

Означимо са x и y координате тачке P, са $x + h$ и $y + k$ координате тачке P'. Пошто се тачке P и P' налазе на задатој кривој линији, то важе једначине

$$y + k = f\ (x + h)$$
$$y = f\ (x),$$

одакле

$$k = f\ (x + h) - f\ (x).$$

Количине h и k зову се *координатне промене*. Одредити тангенту у тачци P значи управо наћи њен правац, јер је додирна тачка P већ дата њеним координатама $x,\ y$. Правац се одређује (аналитички) угловним сачинитељем, а то је tangens угла који дотична права (овде дирка) заклапа са положним правцем x-осе.

Повуцимо $PN \parallel x$-оси. Из $\triangle PP'N$ видимо да је угловни сачинитељ сечице

$$tg\ P'PN = \frac{P'N}{PN} = \frac{P'Q' - PQ}{OQ' - OQ} = \frac{(y + k) - y}{(x + h) - x} = \frac{k}{h},$$

дакле раван промени ординате подељеној са променом апсцисе.

На основу горње дефиниције за дирку закључујемо да је угловни сачинитељ тангенте

$$tg\ LPN = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} tg\ P'PN = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} \frac{k}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Нашли смо да је угловни сачинитељ дирке на линију $y = f(x)$ у тачци $P(x, y)$ изражен границом којој тежи количник из бесконачно малих промена ординате и апсцисе, које су међусобом везане једначином $y + k = f(x + h)$.

Напомена. Инфинитезимални Рачун (рачун са бесконачно малим и бесконачно великим количинама) дели се на: *Диференциални, Интегрални и Вариациони Рачун и Теорију Диференциалних Једначина.*

Први, за кога се са сигурношћу може казати да је употребљавао инфинитезималне количине, то је славни грчки математичар старога века *Архимед* (Сиракуза 287 — Сиракуза 212 пре Хр.) доказивши да је површина круга једнака са површином троугла, чија је основа једнака периферији, а висина једнака полупречнику круга. После долазе, као највише главнији, *Галилеј* (Galileo Galilei, Пиза 1564 — Арцетри 1642), *Кавалиери,* (Bonaventura Cavalieri, Болоња 1598 — Болоња 1647), *Кеплер* (Johannes Kepler, Magstatt 1571 — Регенсбург 1630), *Њутн* (Isaak Newton, Whoolstorpe 1642 — Лондон 1726), *Лајбниц* (Gottfried Wilhelm Leibnitz, Лајпциг 1646 — Ханoвер 1716).

Распра око приоритета за проналазак Инфинитезималног Рачуна, која и данас још постоји, беспредметна је, јер Галилеови partes non quantae, Кавалиериово indivisibile, Баровљев (Isaak Barrow, Лондон 1630 — Лондон 1677) triangulum characteristicum, Њутнови моменти и флуксије и Лајбницови диференциали све су то само разни изрази за једну исту замисао. Та замисао је код Њутна најјасније концептована, а рачунска страна најсавршеније изведена код Лајбница.

Осим горе наведених твораца, и са напоменом да је Лајбниц у своме рукопису од год. 1675 први употребио интегрални знак $\int$, вредно је напоменути имена оних, који су поглавито радили на усавршавању Интегралног Рачуна. То су браћа *Јаков и Јован Бернули* (Jakob Bernoulli, Базел 1654 — Базел 1705, Johann Bernoulli, Базел 1667 — Базел 1748), *Ајлер* (Leonhard Euler, Базел 1707 — Петроград 1783) *Даламбер* (Jeane-Rond d'Alembert, Париз 1717 — Париз 1783), *Лагранж* (Joseph-Louis Lagrange, Турин 1736 — Париз 1813), *Лежандр* (Adrien-Marie Legendre, Париз 1752 — Париз 1833).

Вариациони Рачун почиње са год. 1696. када је Јован Бернули решио *проблем брахистохроне.*[1])

Кратко време после тога решио је Јаков Бернули *изопериметриски проблем.*[2]) Први уџбеник за Вариациони Рачун издао је Ајлер год. 1774. под насловом Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes, у коме је показао начин за решавање општих задатака ове врсте. Најзад год. 1762 публиковао је Лагранж своју методу, по којој се и данас у главноме решавају проблеми из Вариационог Рачуна.

[1]) Линије, по којој једна тешка тачка под утицајем теже пада како би у најкраћем времену из једног положаја стигла у други положај који се налази ниже од првога.

[2]) Изопериметриски проблеми: наћи линију одређене дужине која с извесним правама у истој равни даје највећу површину тако ограничене фигуре. — Наћи линију, која обртањем око једне осе даје тело одређене запремине, а најмање површине. — Од свих изопериметриских линија (линија једнаке дужине) наћи ону, која обртањем око једне осе образује обртно тело са најмањом запремином. Итд.

Док се у Диференциалноме Рачуну у Теорији Максима и Минима испитује за коју вредност прапромењљиве или које вредности прапромењљивих *задата функција* добија своје највеће односно најмање вредности, — у Вариациономе Рачуну се обрнуто *тражи функција,* која има да испуни извесне услове у погледу максимума или минимума.

37. Изводна функција. — Граница, којој тежи количник из промене функције и промене прапромењљиве за бесконачно малу промену прапромењљиве количине, зове се *изводна функција.*

Задаћа је Диференциалноме Рачуну да за сваку функцију нађе њену изводну функцију.

Према горњем тумачењу изводне функције јасно је да је и она извесна функција прапромењљиве и да ни у колико не зависи од промене ове последње.

Ако је $y = f(x)$ задата функција, онда се њена изводна бележи са y' или са $f'(x)$.

Пример. Једначина круга, са средиштем у почетку правоуглих координата, гласи

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Ако апсцису (прапромењљиву) x променимо за h ордината (функција) y промениће се за k. Промена k одређена је једначином

$$y + k = \sqrt{r^2 - (x+h)^2},$$

дакле

$$k = \sqrt{r^2 - (x+h)^2} - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Из

$$\frac{k}{h} = \frac{\sqrt{r^2 - (x+h)^2} - \sqrt{r^2 - x^2}}{h} =$$

$$= \frac{\left[\sqrt{r^2 - (x+h)^2} - \sqrt{r^2 - x^2}\right]\left[\sqrt{r^2 - (x+h)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}\right]}{h\left[\sqrt{r^2 - (x+h)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}\right]}$$

$$= \frac{-2x - h}{\sqrt{r^2 - (x+h)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}}$$

добијамо, кад пређемо граници, т. ј. претпоставимо да промена h (па разуме се и промена k) постаје бесконачно мала или геометриски: да се тачка $P'(x+h, y+k)$ бесконачно приближи тачци $P(x, y)$, у коме случају сечица PP' прелази у положај дирке на круг у тачци P,

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Ово је, дакле, угловни сачинитељ тангенте круга $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ у тачци x, y или изводна функција:

$$y' = f'(x) = -\frac{x}{y}.$$

38. Диференциал. — Придајмо прапромењљивој x промену h. Нека је k одговарајућа промена функције $y = f(x)$. Тада је

$$y + k = f(x + h)$$

и пошто је

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = y',$$

можемо за ма какво h (које није бесконачно мало) да напишемо

$$\frac{k}{h} = y' + \alpha,$$

где се под α има да разуме једна количина која зависи од x и h, а постаје бесконачно мала у исто време са променом h.

Из последње једначине, пошто је напишемо

$$k = y' h + \alpha h,$$

видимо да се промена k функције састоји из два дела. Први је део производ $y' h$ из изводне функције y' и промене h прапроменљиве количине. Тај се део зове *диференциал* функције и бележи се са dy, тако да је

$$dy = y' h \text{ или } dy = f'(x) h.$$

Други део фукционе промене k то је производ αh из промене h и једне количине α, која изчезава заједно са h. Ако је промена h бесконачно мала, онда овај други део, као бесконачно мала количина вишега ступња, може да се занемари према првоме делу (диференциалу функције). (Види на крају чл. 22.). До истог закључка долазимо и на овај начин. Из

$$k = (y' + \alpha) h$$
$$dy = y' h$$

следује

$$\frac{k}{dy} = \frac{y' + \alpha}{y'} = 1 + \frac{\alpha}{y'},$$

и с претпоставком да y' није $= 0$

$$\lim \frac{k}{dy} = 1.$$

Значи да се промена функције може заменути њеним диференциалом и обратно. (Види чл. 20.)

Пример. Нека је

$$y = \pi x^2$$

задата функција, дакле

$$y + k = \pi (x + h)^2 = \pi x^2 + 2 \pi x h + \pi h^2$$
$$k = 2 \pi x h + \pi h^2$$
$$\frac{k}{h} = 2 \pi x + \pi h$$
$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = 2 \pi x.$$

Овде је $y' = 2 \pi x$, $\alpha = \pi h$.

39. Диференциал прапроменљиве. — Диференциал прапроменљиве x није ништа друго до сама промена h, јер кад ставимо

$$y = x,$$

дакле

$$y + k = x + h$$
$$k = h$$
$$y' = \lim_{h=0} \frac{k}{h} = 1$$

видимо да је изводна функција овде $= 1$ и према томе

$$dy = dx = 1 \,.\, h = h,$$

а то је што смо хтели доказати:

$$h = dx.$$

На тај начин може горњи израз $dy = y' h$ и овако да се напише

$$dy = y' dx,$$

одакле

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Дошли смо до ресултата да је изводна функција равна количнику из диференциала функције и диференциала прапроменљиве. С тога се разлога изводна функција зове и *диференциални количник*.

40. Геометриско тумачење промене и диференциала. — На сл. 6 примећујемо да је

$$QQ' = PN = h = dx,$$
$$P'N = k,$$
$$tg\ LPN = \lim_{h=0} \frac{k}{h} = y',$$

дакле

$$LN = PN \,.\, tg\ LPN$$

или

$$LN = hy' = dy.$$

Из овога видимо да дуж LN представља диференциал функције y, док је, међутим, њена промена $k = P'N$. То можемо да искажемо на овај начин: диференциали dx и dy јесу бескрајно мале промене координата x и y, када се од неке тачке P на кривој линији пређе тачци L, која је на тангенти линије повученој у тачци P, док је k промена ординате коју добијамо кад одемо тачци P', која је, као и тачка P, на самој линији и којој, као и тачци L, одговара апсцисна промена $h = dx$.

41. Једно опште својство изводне функције. — Отуда што је $k = y'h + \alpha h$ (в. чл. 38.), где је α таква количина која у исто време са h постаје бесконачно мала, закључујемо да, узевши h довољно мало, алгебарски знак промене k зависи од знака првога члана $y'h$, а ни у колико од знака другога члана αh, који је, у таквоме случају, незнатан према првоме члану. Ако, при томе, будемо још претпоставили да су промене h положне (а то је дозвољено, јер је h промена независно променљиве количине), онда следује да функциона промена k и изводна функција y' морају имати један исти алгебарски знак, т. ј. према томе да ли је $y' \gtrless 0$ биће и $k \gtrless 0$. То значи: ако је изводна y' положна, онда задата функција расте (јер је њена промена положна), а ако је изводна y' одречна, онда задата функција опада (јер је њена промена одречна). Или: функција расте или опада, почевши од извесне вредности њене прапроменљиве x, према томе да ли је њена изводна y' за дотичну вредност x-а положна или одречна.

Ако, дакле, изводна једне функције остаје положна за све вредности прапромењливе x, почевши н. пр. од $x = a$ па до $x = b$, онда у целоме том интервалу функција расте. Напротив функција опада за све време док је њена изводна одречна.

И обратно: изводна једне функције, која у извесноме интервалу њене прапромењливе (н. пр. од $x = a$ па до $x = b$) непрестано расте може бити само положна и местимице равна нули, а никако одречна, као што, опет, изводна такве функције, која у извесноме размаку њене прапромењливе непрекидно опада, мора бити одречна или местимице равна нули, али никако неможе бити положна.

Ови се ресултати могу и геометриски врло лако да протумаче с обзиром на геометриски значај изводне функције. (В. чл. 36. и 37.)

Пошто је $y' = tg\,\alpha$ видимо да је

за $y' > 0$, угао $\alpha < 90^0$, одакле изводимо, да y расте, а напротив

за $y' < 0$, угао $\alpha > 90^0$, а то значи да y опада.

Као даљи закључак изводимо: ако је изводна функција у извесноме интервалу, н. пр. између $x = a$ и $x = b$, равна нули (т. ј. није ни положна ни одречна), онда задата функција у томе интервалу нити расте нити опада, она, дакле, има константну вредност.

У тачкама, у којима је $y' = 0$, дирка на линију $y = f(x)$ паралелна је са x-осом, јер је тада и угао $\alpha = 0$.

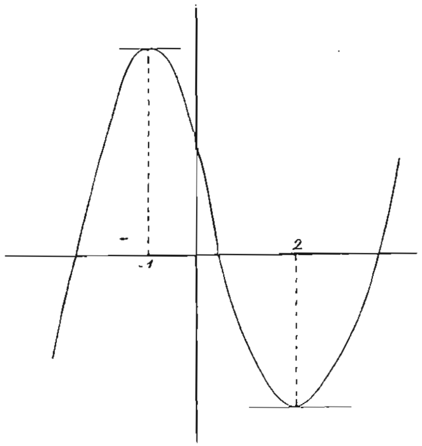
Пример. Узмимо функцију
$$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 2.$$
Њена је изводна
$$y' = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-2).$$
Одавде видимо да је

за $-\infty < x < -1$ изводна $y' > 0$, а то значи да у томе интервалу задата функција расте.

За $-1 < x < 2$ изводна је $y' < 0$ и према томе функција од $x = -1$ па до $x = 2$ опада.

Најзад за $2 < x < +\infty$ постаје $y' > 0$, а то је знак да функција од $x = 2$, па на даље расте.

Отуда што је за $x = -1$ и за $x = 2$ изводна $y' = 0$ закључујемо да је на тим местима дирка повучена на линију, коју нам горња функција представља, паралелна са x-осом.



Сл. 7.

42. Напомена. — Ми смо у претходећем промене x-а и y-а означавали са h и k. Но пошто ћемо, у скоро, имати посла са већим бројем промењљивих количина упутно је да, у будуће, употребимо такве знаке из којих ће се моћи, одмах, да позна на које се количине односе поједине промене. Ми ћемо, за ту циљ, изабрати знак $\triangle$ и употребићемо га тако да промене промењљивих количина $x, y, z, u, v, \ldots$ означимо са $\triangle x, \triangle y, \triangle z, \triangle u, \triangle v, \ldots$

43. Теорема. — Две функције које се разликују само у једној сталној количини имају једнаке изводне, па, дакле, и једнаке диференциале.

Нека су u и v две функције прапромењливе x и нека је
$$u = v + c,$$
где c обележава једну константу. Замислимо да је се x променуло за $\triangle x$, тада ће се и функције u и v променути за извесне вредности: функција u за $\triangle u$, функција v за $\triangle v$. Заменувши x са $x + \triangle x$, горња се једначина претвара у
$$u + \triangle u = v + \triangle v + c.$$
Одузимањем горње једначине од ове последње налазимо
$$\triangle u = \triangle v,$$
па дакле и
$$\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{\triangle v}{\triangle x}.$$
На основу начела у чл. 13. следује
$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle v}{\triangle x},$$
а то је
$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$
а тако исто
$$du = dv \qquad q. e. d.$$

Обратно: ако су изводне или диференциали двеју функција прапромењливе x једнаки у извесноме интервалу x-а, онда се такве функције у дотичноме интервалу њихове прапромењливе разликују само за једну сталну вредност.

Нека је
$$u - v = y$$
и претпоставимо да је, у некоме интервалу прапромењливе x,
$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$
Отуда што је
$$y = u - v$$
изводимо даље
$$y + \triangle y = u + \triangle u - v - \triangle v$$
$$\triangle y = \triangle u - \triangle v$$
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} - \frac{\triangle v}{\triangle x}$$
и на основу чл. 13.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$
Према претпоставци је десна страна последње једначине равна нули, дакле
$$\frac{dy}{dx} = 0,$$
а то показује да је у посматраноме интервалу x-а функција y или $u - v$ константна. (В. чл. 41.)

44. Изводне посредних функција. — Нека је

$$u = \varphi(y)$$
$$y = f(x),$$

дакле u посредна функција y-а или функција функције од x.

Да бисмо нашли изводну функције u по x-у ми бисмо могли променљиву y да заменимо са $f(x)$, да напишемо

$$u = \varphi[f(x)]$$

и онда да поступимо са u као са непосредном функцијом прапроменљиве x.

До истога ресултата доћиђемо и на овај начин. Из идентичне једначине

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где је Δx произвољна промена прапроменљиве x, а Δy и Δu одговарајуће промене променљивих количина y и u, следује, на основу познатога начела (чл. 13.), да је и

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta u}{\Delta y}\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Овде је $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$ изводна функције u узета по x-у;

$\lim\limits_{\Delta y=0}\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du}{dy} = \varphi'(y)$ изводна функције $u = \varphi(y)$ узета по y-у, сматравши y као прапроменљиву (независно од везе која постоји између y и x); и најзад $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ то је изводна функције $y = f(x)$ узета по x-у. Овим смо нашли да је

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y).f'(x)$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Речима: изводна функције једне функције равна је производу изводних посматраних функција.

Ову последњу једначину нетреба ни пошто сматрати као идентичну једначину, гледајући на то што се на њеној десној страни dy јавља у исто време у именитељу и у бројитељу. dy у именитељу првога количника и dy у бројитељу другога количника имају разна значења и нису, према томе, једно другом равни. dy у именитељу јесте бесконачно мала промена y-а, сматравши ту количину као независно променљиву, док оно dy у бројитељу представља бесконачно малу промену y-а, где се y сматра као функција прапроменљиве x.

Горњу једначину можемо и овако да напишемо

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y)\cdot\frac{dy}{dx},$$

одакле

$$du = \varphi'(y)\cdot dy.$$

Ово нам показује да диференциал функције $u = \varphi(y)$, где је $y = f(x)$ (т. ј. y зависно од x) има исти вид као и онда када је y независно променљива количина. Разлика је у томе, што у овоме случају, где је $y = f(x)$, треба ставити $dy = f'(x)\,dx$.

Пример. Нека је

$$u = y^3$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

дакле

$$u = \sqrt{r^2 - x^2}^{\,3} = (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Из

$$u = y^3$$

следује

$$u + \Delta u = (y + \Delta y)^3 = y^3 + 3y^2\Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3$$
$$\Delta u = 3y^2\Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3$$
$$\frac{\Delta u}{\Delta y} = 3y^2 + 3y\Delta y + (\Delta y)^2$$
$$\lim_{\Delta y=0}\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du}{dy} = 3y^2.$$

У примеру чл. 37. нашли смо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

На основу правила $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$ добијамо

$$\frac{du}{dx} = 3y^2.\frac{-x}{y} = -3xy = -3x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Примедба. Појмљиво је да правило за диференциалење посредних функција важи сасвим уопште: ма колики био број функција, које су међусобом везане. Тако н. пр. ако је

$$v = \psi(u), \qquad u = \varphi(y), \qquad y = f(x)$$

јесте

$$dv = \psi'(u)\,du, \quad du = \varphi'(y)\,dy, \quad dy = f'(x)\,dx,$$
$$\frac{dv}{dx} = \psi'(u)\,\varphi'(y)\,f'(x) = \frac{dv}{du}\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Правила за диференциалење алгебарских функција.

45. Диференциал збира и разлике. — Нека је

$$y = u + v - w,$$

где су u, v, w ма какве функције прапроменљиве x. Мењањем x-а у $x + \Delta x$ произилази једначина

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w,$$

одакле

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

и кад пређемо граници, т. ј. узмемо да је промена Δx бесконачно мала,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

или

$$dy = d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

Овим смо доказали да је диференциал збира и разлике из разних функција раван збиру и разлици диференциала појединих функција.

Примедба. Ако је један од сабирака константан, онда при диференциалењу он нестаје:

$$d\,(u + C) = du$$

(в. чл. 43.).

46. Диференциал производа. — Из

$$y = uv,$$

променом x-а за $\triangle x$, произилази

$$y + \triangle y = (u + \triangle u)\,(v + \triangle v) = uv + v\,\triangle u + u\,\triangle v + \triangle u\,\triangle v,$$

дакле

$$\triangle y = v\,\triangle u + u\,\triangle v + \triangle u\,\triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = v\,\frac{\triangle u}{\triangle x} + u\,\frac{\triangle v}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x}\,\triangle v,$$

које, прешав граници (т. ј. за $lim\,\triangle x = 0$), пошто је

$$lim\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}, lim\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{du}{dx}, lim\frac{\triangle v}{\triangle x} = \frac{dv}{dx}, lim\,(\frac{\triangle u}{\triangle x}\triangle v) = \frac{du}{dx}, lim\,\triangle v = 0$$

своди се на

$$\frac{dy}{dx} = v\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{dv}{dx}$$

или

$$dy = d\,(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Речима: диференциал производа двеју функција добијамо кад сваку функцију помножимо диференциалом оне друге функције и та два производа саберемо.

1. *Примедба.* Правило за диференциалење производа лако је проширити и на већи број чинитеља. Тако н. пр. ако је

$$y = uvw$$

имаћемо

$$d\,(uvw) = vw\,du + u\,d\,(vw) = vw\,du + u\,(w\,dv + v\,dw),$$

дакле

$$d\,(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw.$$

То значи: диференциал производа из ма колико функција раван је збиру производа, које добијамо кад помножимо диференциал сваке од тих функција са свима осталим функцијама.

2. *Примедба.* На случај да је један чинитељ константан диференциал производа је раван производу из те константе и диференциала променљивог чинитеља:

$$d\,(Cu) = C\,du.$$

47. Диференциал количника. — Нека је

$$y = \frac{u}{v},$$

дакле

$$u = yv$$

и на основу горњег правила

$$du = v\,dy + y\,dv = v\,d\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{u}{v}\,dv,$$

одакле

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Диференциал количника добијамо кад диференциал дељеника помножимо делитељем, од тога одузмемо производ из диференциала делитеља и дељеника и цело поделимо квадратом делитеља.

1. *Примедба.* До истог ресултата долазимо и на овој начин:

$$y = \frac{u}{v};$$

$$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v},$$

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{v\triangle u - u\triangle v}{v\,(v + \triangle v)},$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\,\frac{\triangle u}{\triangle x} - u\,\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v\,(v + \triangle v)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

$$dy = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

2. *Примедба.* Ако је дељеник константан

$$y = \frac{C}{v}$$

имамо

$$d\left(\frac{C}{v}\right) = -\frac{C\,dv}{v^2}.$$

48. Диференциал степена. — Ставимо

$$y = u^m$$

и претпоставимо да је изложитељ m цео и положан број. У таквоме случају u^m није ништа друго до производ из m чинитеља, који су сви $= u$ и на основу правила за диференциалење производа следује непосредно образац

$$du^m = mu^{m-1}\,du.$$

Да ово важи сасвим опште, ма какав био изложитељ m: цео или разломљен, положан или одречан, увериhемо се врло лако.

Узмимо прво да је изложитељ m разломљен: $m = \frac{p}{q}$ где су p и q цели и положни бројеви. Из

$$y = u^{\frac{p}{q}}$$

или

$$y^q = u^p,$$

кад диференциалимо обе стране, следује

$$q\,y^{q-1}\,dy = p\,u^{p-1}\,du,$$

одакле, пошто помножимо лево и десно са y и имамо у виду да је $y^q = u^p$,

$$\cancel{qu^p\,d}y = p\,y\,u^{p-1}\,du,$$

$q y^q dy$

дакле

$$dy = \frac{p}{q}\,y\,\frac{du}{u}.$$

Најзад, пошто заменимо y са $u^{\frac{p}{q}}$, добијамо

$$d u^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\; u^{\frac{p}{q}-1}\, du.$$

Видимо да је ово онај исти образац као и горњи, где смо претпоставили да је изложитељ m цео број.

Узмимо сада да је изложитељ m одречан: $m = -n$, дакле

$$y = u^{-n} = \frac{1}{u^n}.$$

Пошто је овде n положно, то је, на основу доказатих правила за диференциалење количника и степена са положним изложитељем

$$dy = -\frac{du^n}{u^{2n}} = -\frac{n u^{n-1}\, du}{u^{2n}} = -n u^{-n-1}\, du,$$

а то је идентично с обрасцем $du^m = m u^{m-1}\, du$.

Примедба. Ово опште правило за диференциалење степена показује нам и диференциалење корених количина, јер кад ставим $m = \frac{1}{n}$ добијамо

$$d\sqrt[n]{u} = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

Од нарочите је важности образац

$$d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

49. Примери. — Помоћу добивених правила за диференциалење алгебарских функција

1) $\begin{cases} d(u+v-w) = du + dv - dw \\ d(u+C) = du \end{cases}$

2) $\begin{cases} d(uv) = u\,dv + v\,du \\ d(Cu) = C\,du \end{cases}$

3) $\begin{cases} d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2} \\ d\left(\dfrac{C}{v}\right) = -\dfrac{C\,dv}{v^2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} du^m = m u^{m-1}\, du \\ d\sqrt{u} = \dfrac{du}{2\sqrt{u}} \end{cases}$

у стању смо да за сваку алгебарску функцију у откривеној форми нађемо њен диференциал и њену изводну.

1. Пример.

$$y = \frac{a+x}{a-x}$$

$$dy = \frac{(a-x)\,d(a+x) - (a+x)\,d(a-x)}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{(a-x)\,dx + (a+x)\,dx}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{2a}{(a-x)^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } y' = \frac{2a}{(a-x)^2}.$$

2. Пример.

$$y = 5 + 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{x\sqrt[4]{x}}$$ dx

или

$$y = 5 + 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{5}{4}}\, dx$$

$$dy = 3\,.\,\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\, dx - 6\,.\,\frac{5}{4}\,x^{-\frac{9}{4}}$$

$$\left[\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{15}{2x^2\sqrt[4]{x}}\right] dx$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{15}{2x^2\sqrt[4]{x}}.$$

3. Пример.

$$y = (3 + 4x^2)^5$$

или

$$y = u^5, \text{ где је } u = 3 + 4x^2.$$

На основу правила за диференциалење посредних функција: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, а с обзиром на то да је овде

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(3+4x^2)^4, \quad \frac{du}{dx} = 8x,$$

имамо

$$\frac{dy}{dx} = 40x(3+4x^2)^4$$

$$dy = 40x\,(3+4x^2)^4\, dx.$$

4. Пример.

$$y = \frac{a}{x} f\left(\frac{a}{x}\right).$$

Ставимо

$$u = \frac{a}{x},$$

дакле

$$du = -\frac{a\,dx}{x^2}.$$

Задата функција добија вид

$$y = u f(u),$$

одакле

$$dy = f(u)\,du + u f'(u)\,du = [f(u) + u f'(u)]\,du$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x} f'\left(\frac{a}{x}\right)\right]\frac{-a}{x^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\left[f\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x} f'\left(\frac{a}{x}\right)\right]\frac{a}{x^2}.$$

5. Пример.

$$y = (x^2 + 3x - 5)\,(2x^2 - x - 1)$$

$$dy = (2x^2 - x - 1)\,d(x^2 + 3x - 5) + (x^2 + 3x - 5)\,d(2x^2 - x - 1)$$

$$= [(2x^2 - x - 1)(2x + 3) + (x^2 + 3x - 5)(4x - 1)]\,dx$$

$$= (8x^3 + 15x^2 - 28x + 2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 8x^3 + 15x^2 - 28x + 2.$$

50. Диференциал комплексних количина. — Узмимо да је задата функција у виду комплексне количине

$$y = u + iv,$$

где је $i = \sqrt{-1}$, u и v ма какве функције x-а. Мењањем прапроменљиве x за $\triangle x$ произилази једначина

$$y + \triangle y = u + \triangle u + i(v + \triangle v),$$

дакле
$$\Delta y = \Delta u + i \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x},$$
а прешав граници
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx}$$
и према томе
$$dy \text{ или } d(u + iv) = du + i\, dv.$$

То значи да се диференциал комплексне количине добија као и диференциал збира сматравши имагинарну јединицу i као сталну количину.

51. Диференциал сложених функција. — Узмимо да је
$$y = f(u, v),$$
где су u и v функције прапроменљиве x. Ми кажемо да је y сложена функција; овде сложена из двеју функција: u и v,

Ако променимо x за Δx променуће се u за Δu, v за Δv, а y за Δy. Међутим, место да у једанпут заменимо u са $u + \Delta u$ и v са $v + \Delta v$ у изразу $f(u, v)$, ми можемо да извршимо ту замену и поступно.

Замислимо да се прво мења u, а v да задржава ону вредност коју већ има, функција y добиће промену
$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v)$$
која, кад је поделимо са Δu и пређемо граници, даје
$$lim \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \frac{d f(u, v)}{du} = \varphi(u, v).$$
Ако, напротив, пустимо v да се мења, а количину u задржимо као сталну, добићемо
$$lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = \frac{d f(u, v)}{dv} = \psi(u, v).$$
Означимо са α извесну количину, која заједно са Δu постаје бесконачно мала и то за сваку вредност v-а; са β другу количину, која изчезава заједно са Δv, па ма какво било u, онда, према ранијем посматрању (чл. 38.), можемо да ставимо
$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [\varphi(u, v) + \alpha]\, \Delta u$$
$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = [\psi(u, v) + \beta]\, \Delta v.$$
Ако сада у овој другој једначини пустимо да се u промени за Δu добићемо
$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) = [\psi(u + \Delta u, v) + \beta']\, \Delta v$$
подразумевајући под β' количину у коју се претвара β кад у њој заменимо u са $u + \Delta u$. Јасно је да β', исто као и β, постаје бесконачно мало заједно са променом Δv.

Саберимо последњу једначину са горњом првом и поделимо цело са Δx, па ћемо добити
$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x} = [\varphi(u, v) + \alpha] \frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u + \Delta u, v) + \beta'] \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

одакле, кад пређемо граници, следује
$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v) \frac{du}{dx} + \psi(u, v) \frac{dv}{dx}$$
$$dy = \varphi(u, v)\, du + \psi(u, v)\, dv$$
или
$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv.$$

Код ове једначине ваља да имамо на уму да се у диференциалним количницима $\frac{dy}{du}$ и $\frac{dy}{dv}$ количине u и v имају сматрати као прапроменљиве, од којих зависи y, док, међутим, у чинитељима du и dv, са којима су поменути количници помножени, u и v треба сматрати као функције x-а.

Примедба. Није тешко увидити да ово, што смо доказали за функцију y, која је сложена из две функције u и v, важи уопште и онда кад је y сложено из ма колико функција x-а. Тако н. пр. ако је
$$y = f(u, v, w)$$
јесте
$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dw} dw.$$

Постоји, дакле, правило да се диференциал једне сложене функције добија кад се поступно узме диференциал те функције у однос на сваку од функција из којих је она сложена, сматравши, при томе, функцију, у однос на коју се узима диференциал, као прапроменљиву и једино променљиву, и по томе се сви тако добивени диференциали саберу.

Лако је увидити да ово правило обухвата сва правила за диференциалење алгебарских функција.

Правила за диференциалење трансцендентних функција.

52. Диференциал логаритма. — Ставимо
$$y = log\, x.$$
Логаритам нека је за ма какву основу.

Имамо
$$y + \Delta y = log(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = log(x + \Delta x) - log\, x$$
$$= log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$
или, ако ставимо
$$\Delta x = \frac{x}{m},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{x} log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x} log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$
Имавши на уму да при бесконачноме опадању промене Δx број m у бесконачност расте, да је за $lim\, \Delta x = 0$, $lim\, m = \infty$, изводимо из
$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{m = \infty} log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{x} log \lim_{m = \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

а с обзиром на то да је $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$

ресултат
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\, log\, e,$$
дакле
$$d\, log\, x = \frac{dx}{x}\, log\, e.$$

На случај да је логаритам узет у Непер-овој системи (природан логаритам: са основом e), образац гласи
$$d\, l\, x = \frac{dx}{x}.$$

Диференциал природног логаритма једне количине раван је, дакле, диференциалу те количине подељено истом количином. Због тога се количник из диференциала једне функције и исте функције зове *логаритамски диференциал.*

Примедба Правило за диференциалење логаритма може да се, у многим приликама, примени на диференциалење других функција. Тако н. пр. из
$$y = u^m,$$
где је u ма каква функција прапроменљиве x, а m произвољна константа, следује
$$l y = m\, l\, u$$
$$\frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}$$
$$dy = my\frac{du}{u} = mu^{m-1}\, du,$$
дакле
$$du^m = mu^{m-1}\, du \qquad \text{(в. чл. 46.)}$$

Или ако узмемо
$$y = uvw$$
добијамо логаритмовањем
$$l y = l u + l v + l w,$$
а одавде диференциалењем
$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

Речима: логаритамски диференциал производа раван је збиру логаритамских диференциала његових чинитеља.

Из последње једначине, кад помножимо њену леву и десну страну са y или са uvw, произлази познато правило
$$d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw.$$

Логаритамским диференциалењем долазимо до правила:
$$d\,(uv) = uv\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right)$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right).$$

Опште:
$$d\left(\frac{uvw\ldots}{rst\ldots}\right) = \frac{uvw\ldots}{rst\ldots}\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s} - \frac{dt}{t}\ldots\right).$$

53. Диференциал изложитељне функције. — Узмимо
$$y = a^x.$$
Логаритмовањем у Непер-овој системи следује
$$l y = x\, l a,$$
одакле диференциалењем
$$\frac{dy}{y} = l a\, dx$$
$$dy \text{ или } da^x = a^x\, l a\, dx.$$

Ако ставимо $a = e$ добићемо простије
$$de^x = e^x\, dx.$$

Видимо да је
$$\frac{de^x}{dx} = e^x,$$
а то значи да је изводна изложитељне функције e^x равна истој функцији.

Примедба. Интересно је констатовати да је изложитељна функција једина, која ужива то својство да је њена изводна њој равна.

Доказ. Из
$$\frac{dy}{dx} = y$$
или
$$\frac{dy}{y} = dx$$
следује
$$d l y = dx.$$

Ми знамо да се две функције, овде $l y$ и x, које имају једнаке диференциале могу разликовати једна од друге само за константну вредност (в. чл. 43.) и на основу тога закључујемо да је
$$l y = x + c$$
$$y = e^{x+c} = e^c e^x$$
или простије
$$y = Ce^x.$$

То значи да је Ce^x заиста једина функција која горе изречено својство ужива.

54. Диференциал тригонометриских функција. —

а) Синус:
$$y = sin\, x$$
$$y + \Delta y = sin\,(x + \Delta x) = sin\, x\, cos\, \Delta x + cos\, x\, sin\, \Delta x,$$
$$\Delta y = sin\, x\,(cos\, \Delta x - 1) + cos\, x\, sin\, \Delta x$$
$$= -2\, sin\, x\, sin^2\frac{\Delta x}{2} + cos\, x\, sin\, \Delta x,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -sin\, x\, sin\frac{\Delta x}{2}\,\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} + cos\, x\,\frac{sin\, \Delta x}{\Delta x}.$$

Ако пређемо граници и узмемо у обзир да је $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{sin\, \Delta x}{\Delta x} = 1$ (чл. 12. пример 2.) добићемо
$$\frac{dy}{dx} = cos\, x,$$
дакле dy, т. ј. $d\, sin\, x = cos\, x\, dx.$

b) Косинус: $y = \cos x$

или ако напишемо $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

следује на основу горњег правила

$$dy = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x\, dx,$$

т. ј.

$$d \cos x = -\sin x\, dx.$$

c) Тангента: $y = tg\, x$

или $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

и према горњем

$$dy = \frac{\cos x\, d \sin x - \sin x\, d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x\, dx + \sin^2 x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

дакле

$$d\, tg\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

d) Котангента: $y = cotg\, x$

или $y = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$

дакле

$$dy = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d\, cotg\, x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

55. Диференциал циклометриских функција. —

a) Arcus sinus: $y = arc \sin x,$

дакле

$$x = \sin y,$$

$$dx = \cos y\, dy,$$

$$dy = \frac{dx}{\cos y}$$

и кад заменимо dy са $d\, arc \sin x$, $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$

$$d\, arc \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Arcus cosinus: $y = arc \cos x,$

дакле

$$x = \cos y,$$

$$dx = -\sin y\, dy,$$

$$dy = -\frac{dx}{\sin y},$$

које, кад заменимо $dy = d\, arc \cos x$, $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$, даје

$$d\, arc \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

c) Arcus tangens: $y = arc\, tg\, x,$

дакле

$$x = tg\, y,$$

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y},$$

$$dy = \cos^2 y\, dx$$

или кад заменимо $dy = d\, arc\, tg\, x$, $\cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$

$$d\, arc\, tg\, x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

d) Arcus cotangens: $y = arc\, cotg\, x.$

Одавде

$$x = cotg\, y,$$

$$dx = -\frac{dy}{\sin^2 y},$$

$$dy = -\sin^2 y\, dx,$$

а пошто је $dy = d\, arc\, cotg\, x$, $\sin^2 y = \frac{1}{1 + cotg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$, следује

$$d\, arc\, cotg\, x = \cancel{\frac{dx}{1 + x^2}} = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

L. Stojković

56. Примери. — Добивеним правилима за диференциалење алгебарских функција (в. чл. 49.) и правилима за диференциалење трансцендентних функција

$$\left.\begin{aligned} d \log x &= \frac{dx}{x} \log e \\ d\, l\, x &= \frac{dx}{x} \end{aligned}\right\} (1$$

$$\left.\begin{aligned} d\, a^x &= a^x\, l\, a\, dx \\ d\, e^x &= e^x\, dx \end{aligned}\right\} (2$$

$$\left.\begin{aligned} d \sin x &= \cos x\, dx \\ d \cos x &= -\sin x\, dx \end{aligned}\right\} (3$$

$$\left.\begin{aligned} d\, tg\, x &= \frac{dx}{\cos^2 x} \\ d\, cotg\, x &= -\frac{dx}{\sin^2 x} \end{aligned}\right\} (4$$

$$\left.\begin{aligned} d\, arc \sin x &= \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ d\, arc \cos x &= -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}\right\} (5$$

$$\left.\begin{aligned} d\, arc\, tg\, x &= \frac{dx}{1 + x^2} \\ d\, arc\, cotg x &= -\frac{dx}{1 + x^2}, \end{aligned}\right\} (6$$

где x може да је или прапроменљива количина или ма каква функција прапроменљиве, постављени смо у могућност да диференциалимо сваку експлицитну функцију.

1. *Пример.*

$$y = v^u,$$

где су u и v ма какве функције x-а. Из

$$l\,y = u\,l\,v$$

следује

$$\frac{dy}{y} = l\,v\,du + u\frac{dv}{v},$$

$$dy = y\,l\,v\,du + y\,u\frac{dv}{v},$$

дакле

$$d\,v^u = v^u\,l\,v\,du + v^{u-1}\,u\,dv.$$

До истога ресултата долазимо применом правила за диференциалење сложених функција (в. чл. 51.), пошто је $y = f(u, v)$. Имамо

$$d\,v^u = \frac{d\,v^u}{du}\,du + \frac{d\,v^u}{d\,v}\,d\,v.$$

У првоме члану $\frac{d\,v^u}{du}\,du$ задата функција v^u има да се сматра као изложительна функција (пошто се само u узима као променљива количина) и да се као таква диференциали (в. чл. 53.), у другоме члану $\frac{d\,v^u}{d\,v}\,d\,v$ функцију v^u треба сматрати као степену количину, јер се ту узима v као променљива и, према томе, треба применути правило у чл. 48.

2. *Пример.*

$$y = l\,(sin\,x),$$

$$dy = \frac{d\,sin\,x}{sin\,x} = \frac{cos\,x\,dx}{sin\,x} = cotg\,x\,dx,\ y' = cotg\,x.$$

3. *Пример.*

$$y = sin\,(lx),$$

$$dy = cos\,(lx)\,dlx = cos\,lx\,\frac{dx}{x},\ y' = \frac{cos\,lx}{x}.$$

4. *Пример.*

$$y = l\,lx,$$

$$dy = \frac{dlx}{lx} = \frac{dx}{x\,lx},\ y' = \frac{1}{x\,lx}.$$

5. *Пример.*

$$y = l\,(x\,tg\,x),$$

$$dy = \frac{d\,(x\,tg\,x)}{x\,tg\,x} = \frac{tg\,x\,dx + x\,d\,tg\,x}{x\,tg\,x} = \frac{tg\,x + \frac{x}{cos^2 x}}{x\,tg\,x}\,dx$$

$$= \frac{sin\,x\,cos\,x + x}{x\,sin\,x\,cos\,x}\,dx = \frac{sin\,2\,x + 2\,x}{x\,sin\,2\,x}\,dx,\ y' = \frac{sin\,2\,x + 2\,x}{x\,sin\,2\,x}.$$

6. *Пример.*

$$y = e^{tg\,x}$$

$$dy = e^{tg\,x}\,d\,tg\,x = e^{tg\,x}\frac{dx}{cos^2 x},\ y' = \frac{e^{tg\,x}}{cos^2 x}.$$

7. *Пример.*

$$y = arc\,tg\,(n\,tg\,x),$$

$$dy = \frac{d\,(n\,tg\,x)}{1 + n^2\,tg^2\,x} = \frac{n\,dx}{[1 + n^2\,tg^2\,x]\,cos^2 x} = \frac{n\,dx}{cos^2 x + n^2\,sin^2 x},\ y' = \frac{n}{cos^2 x + n^2\,sin^2 x}.$$

8. *Пример.*

$$y = arc\,sin\frac{x-a}{x+a},$$

$$dy = \frac{d\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2}} = \frac{(x+a)\,d\,(x-a) - (x-a)\,d\,(x+a)}{(x+a)^2\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2}}$$

$$dy = \frac{[(x+a)-(x-a)]\,dx}{(x+a)\sqrt{(x+a)^2-(x-a)^2}} = \frac{\sqrt{a}\,dx}{(x+a)\sqrt{x}},\ y' = \frac{\sqrt{a}}{(x+a)\sqrt{x}}.$$

9. *Пример.*

$$y = e^{arc\,sin\,(lx)}$$

$$dy = e^{arc\,sin\,(lx)}\,d\,arc\,sin\,(lx) = e^{arc\,sin\,(lx)}\frac{dlx}{\sqrt{1-(lx)^2}}$$

$$= \frac{e^{arc\,sin\,(lx)}\,dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}},\ y' = \frac{e^{arc\,sin\,(lx)}}{x\sqrt{1-(lx)^2}}.$$

10. *Пример.*

$$y = cos\,(x\,tg\,x),$$

$$dy = -sin\,(x\,tg\,x)\,d\,(x\,tg\,x) = -sin\,(x\,tg\,x)\,(tg\,x\,dx + x\,d\,tg\,x)$$

$$= -sin\,(x\,tg\,x)\left(tg\,x + \frac{x}{cos^2 x}\right)dx,\ y' = -sin\,(x\,tg\,x)\left(tg\,x + \frac{x}{cos^2 x}\right).$$

57. Диференциалење скривених функција. — Узмимо да је функција дата у скривеној форми

$$F(x,\ y) = 0.$$

Тражи са изводна функција y', а да се једначина не решава по y-у.

С погледом на то, што се полином на левој страни једначине може сматрати као једна сложена функција зависна од променљивих x и y и имавши на уму да та сложена функција има константну вредност $= 0$, то онда, на основу посматрања у чл. 41. и на основу правила за диференциалење сложених функција (чл. 51.) добијамо

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Изводна имплицитне функције равна је одречноме количнику из изводне по x-у и изводне по y-у, обе изводне узете од леве стране на нулу сведене једначине.

1. *Пример.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{2\,x\,dx}{a^2} + \frac{2\,y\,dy}{b^2} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

2. *Пример.*

$$x \sin y + y \cos x = 0,$$
$$(\sin y - y \sin x)\, dx + (x \cos y + \cos x)\, dy = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}.$$

58. Диференциалење двеју и више скривених функција једне исте прапромењљиве. — Узмимо да су нам дате две функције y и z прапромењљиве x и да је веза између тих количина изражена у скривеној форми овим двема једначинама

$$F(x,\ y,\ z) = 0$$
$$\Phi(x,\ y,\ z) = 0.$$

Траже се изводне $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и $z' = \dfrac{dz}{dx}$, а да се задате једначине не решавају по y и z.

Пошто се леве стране горњих једначина могу сматрати као функције које су сложене из три промењљиве x, y и z, које све три зависе од промењљиве x, и пошто су вредности тих функција (леве стране задатих једначина) константне (равне нули), то, на основу чл. 41 и чл. 51., следује диференциалењем непосредно

$$\frac{dF}{dx}\, dx + \frac{dF}{dy}\, dy + \frac{dF}{dz}\, dz = 0$$
$$\frac{d\Phi}{dx}\, dx + \frac{d\Phi}{dy}\, dy + \frac{d\Phi}{dz}\, dz = 0.$$

Кад поделимо обе једначине са dx добијамо две једначине првога степена са двема непознатама $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{dz}{dx}$. Пошто их решимо налазимо изводне

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dF}{dx}\dfrac{d\Phi}{dz} - \dfrac{dF}{dz}\dfrac{d\Phi}{dx}}{\dfrac{dF}{dz}\dfrac{d\Phi}{dy} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{d\Phi}{dz}}$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{dF}{dy}\dfrac{d\Phi}{dx} - \dfrac{dF}{dx}\dfrac{d\Phi}{dy}}{\dfrac{dF}{dz}\dfrac{d\Phi}{dy} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{d\Phi}{dz}}.$$

Тако исто треба поступити и онда, кад је број функција, које зависе од једне исте прапромењљиве, ма колики. Нпр. ако имамо n једначина између $n+1$ промењљиве количине, онда је само једна од њих независно промењљива, а све су остале зависне (функције) од ње. Диференциалењем задатих једначина добијамо нових n једначина у којима улазе диференциали промењљивих $(dx, dy, dz, dt, \ldots)$ у првоме степену и помоћу којих n једначина, врло лако, израчунавамо n изводних $\left(\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{dt}{dx}, \ldots\right)$.

Пример.

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Диференциалењем добијамо

$$x\, dx + y\, dy + z\, dz = 0$$
$$A\, dx + B\, dy + C\, dz = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx - Az}{Bz - Cy}$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{Ay - Bx}{Bz - Cy}.$$

8-X-1930. L.S.

59. Изводне функције и диференциали разног ступња. — Нека је

$$y = f(x),$$

а изводна њена је $\quad y' = \dfrac{dy}{dx}$ или $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$.

Пошто је y' такође зависно од прапромењљиве x, то можемо и за y' да тражимо изводну. Ова изводна од изводне y' зове се *друга изводна* задате функције y или *изводна (диференциални количник) другога ступња* и бележи се са y'' или са $f''(x)$.

На исти начин добијамо из друге изводне *трећу изводну* y''' или $f'''(x)$, из ове опет *четврту изводну* итд.

Из прве изводне
$$y' = \frac{dy}{dx}$$
следује друга изводна
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$$
и пошто се dx, као бесконачно мала промена независно промењљиве количине, може сматрати као стална, имамо да је
$$y'' = \frac{d(dy)}{dx^2}.$$
$d(dy)$, а то је диференциал диференциала (бесконачно мала промена једне бесконачно мале промене), бележи се краће са d^2y и зове се *диференциал другог ступња* или *други диференциал*. Дакле
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$
Трећу изводну добијамо из друге изводне онако исто као другу из прве, односно као прву изводну из задате функције. Према томе је
$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d(d^2y)}{dx^3},$$
које, кад означимо $d(d^2y)$ са d^3y (диференциал трећег ступња), гласи
$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}.$$
Сасвим опште n-та изводна или n-ти диференциални количник јесте
$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

1. *Примедба.* Поступни диференциални количници или изводне неке функције $y = f(x)$ бележе се по *Лајбницу* са

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

или са $$\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \ldots \frac{d^nf(x)}{dx^n},$$

а по *Лагранжу* са $$y', y'', y''', \ldots y^{(n)}$$

или са $$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x).$$

2. *Примедба.* Растављајући време на бесконачно мале интервале, ми замишљамо да је свако кретање тачке, ма како компликованоме закону следовало, сложено из бесконачно много равномерних (т. ј. најпростијих) кретања.[1] Према дефиницији за равномерно кретање јесте

$$\text{брзина} = \frac{\text{дужина путање}}{\text{утрошено време}}.$$

Узмимо какво било кретање. Нека је закон кретања представљен једначином $y = f(x)$, где y означава путању, x време. На основу горе реченога је

$$\text{брзина кретања} = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Изводна функција или диференциални количник показује брзину, којом се функција мења или у механичкому смислу (када функција представља путању, прапроменљива време) брзину кретања.

Пошто се изводна другога реда добија из прве изводне онако исто као и изводна првога реда из задате функције, јасно је да изводна другога реда, као изводна изводне првога реда, даје брзину, којом се брзина мења. У Механици се то зове убрзање или акцелерација. Дакле:

$$\text{убрзање кретања} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

У Механици се утврђује да је сила пропорционална акцелерацији и маси m, којој саопштава дотично убрзање. То значи:

$$\text{сила} = m\frac{d^2y}{dx^2}.$$

60. Примери. —

1. *Пример.*

$$y = x^m.$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

[1] Аналогно схватању да се свака крива линија може сматрати да је сложена из бесконачно много бесконачно малих праволиниских елемената, на чему се, између осталога, оснива израчунавање кривих линија (дужине лукова), теорија тангенте итд.

Ако је изложитељ m цео и положан број, онда је

$$\frac{d^my}{dx^m} = m(m-1)(m-2)\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1,$$

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} = \frac{d^{m+3}y}{dx^{m+3}} = \ldots = 0.$$

2. *Пример.*

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x la$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^x(la)^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^x(la)^3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^x(la)^n.$$

За $y = e^x$ јесте $$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots = \frac{d^ny}{dx^n} = y.$$

3. *Пример.*

$$y = lx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 \,.\, x^{-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1 \,.\, 2 \,.\, x^{-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1} \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)\, x^{-n}.$$

4. *Пример.*

$$y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) = y$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

На исти начин изводимо за

$$y = \cos x$$

општи образац

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

61. Изводне вишега ступња скривених функција. — Замишљамо да је функција дата у скривеној форми

$$F(x, y) = 0.$$

Према правилу у чл. 57. имамо:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

одакле налазимо прву изводну

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Диференциалећи поново горњу једначину и имавши, при томе, на уму, да су $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ и $\frac{dy}{dx}$ функције x-а и y-а следује, на основу правила за диференциалење сложених функција,

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2F}{dx\,dy} + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

или краће

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

одакле

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dF}{dy}}.$$

До истог ресултата долазимо пошав од израза

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

диференциалећи десну страну као количник у коме су дељеник и делитељ сложене функције (зависни од x и од y). На тај начин налазимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{dF}{dy}\left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dF}{dx}\left(\frac{d^2F}{dx\,dy} + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}$$

које, с обзиром на горњи израз за прву изводну, даје исту вредност за $\frac{d^2y}{dx^2}$, коју смо већ нашли.

На сличан начин нашли бисмо из друге изводне трећу изводну, итд.

Пример.

$$x \sin y + y \cos x = 0.$$

Овде је (в. 2. пример у чл. 57.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x},$$

одакле налазимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x\cos y + \cos x)\left[y\cos x + (\sin x - \cos y)\frac{dy}{dx}\right] - (y\sin x - \sin y)\left[\cos y - \sin x - x\sin y\frac{dy}{dx}\right]}{(x\cos y + \cos x)^2}$$

62. Мењање прапромењливе.[1]) Нека је

$$y = f(x).$$

Треба заменути прапромењљиву x новом прапромењљивом t на основу тога што је

$$x = \varphi(t).$$

Задатак је: да се изразе изводне односно диференциали од y, сматравши t као прапромењљиву, помоћу изводних од y, узимајући y као функцију x-а, дакле помоћу $f'(x)$, $f''(x)$, . . . и помоћу изводних и диференциала од x као функције прапромењљиве t. Треба, дакле, да се изразе поступне изводне и диференциали од y, као функције прапромењљиве t, а да се не врши замена прапромењљиве x новом прапромењљивом t.

Пошто су x и y функције од t, то онда, на основу правила за диференциалење посредних функција (чл. 44.) или на основу правила за диференциалење сложених функција (чл. 51.), следује

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt} = f'(x)\,\varphi'(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + f'(x)\frac{d^2x}{dt^2} = f''(x)\,\varphi'(t)^{\cancel{3}} + f'(x)\,\varphi''(t)$$

$\varphi'(t)^2$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = f'''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 3f''(x)\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + f'(x)\frac{d^3x}{dt^3} = f'''(x)\,\varphi'(t)^3$$
$$+ 3f''(x)\,\varphi'(t)\,\varphi''(t) + f'(x)\,\varphi'''(t)$$

итд. Обратно: познавајући изводне или диференциале од y и x као функције прапромењљиве t добијамо из горњих једначина диференциале и изводне од y као функције прапромењљиве x:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}\right) - 3\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5} \text{ итд.}$$

---

[1]) Види напомену у чл. 3.

До истога ресултата долазимо кад диференциалимо

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

по прапромењивој t. Добијамо

$$f''(x)\,dx = d\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},\quad f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{d^3x} \quad \text{и т. д.}$$

Примећујемо да је прва изводна $f'(x)$ у свакоме случају представљена са $\frac{dy}{dx}$, било да је количина x прапроменљива или не, док, међутим израз за изводне вишега ступња $f''(x)$, $f'''(x)$, ... зависи од тога да ли је x прапроменљива или функција друге које количине.

1. Пример. Заменимо у једначини

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

прапроменљиву x новом прапроменљивом t узевши

$$x = \cos t.$$

С погледом на то што је

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2} - \cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t}$$

и према томе задата једначина гласи сада

$$(1 - \cos^2 t)\frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2} - \cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t} + \frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt} + n^2y = 0,$$

које се своди на

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

2. Пример. Дата је једначина

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} = 0.$$

У њој да се изврши замена

$$t = l\,(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Услед тога што је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{d\,(x + \sqrt{1 + x^2})}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

задата једначина добија овој простији вид

$$\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

63. Односи између изводних инверзних функција.[1]) — Као један особени случај нашег расматрања у прошломе члану узмимо да се од задате функције

$$y = f(x)$$

прелази инверзној функцији

$$x = F(y)$$

код које је x зависно променљива, а y прапроменљива. У овоме је случају

$$y = t, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^3y}{dt^3} = \ldots = 0$$

и на основу образаца у прошломе члану добијамо ове једначине

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{F'(y)}$$

$$f''(x) = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = -\frac{F''(y)}{F'(y)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-dx\,dy\,d^3x + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^5} = \frac{-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

$$= \frac{3\,F''(y)^2 - F'(y)\,F'''(y)}{F'(y)^5}$$

итд.

II.

Диференциалење функција које зависе од више прапроменљивих.

64. Делимични и потпуни диференциали функције, која зависи од више прапроменљивих. — Замислимо да се у функцији

$$u = f(x,\ y,\ z),$$

која зависи од више прапроменљивих, само једна од ових мења, н. пр. само x и ми узмемо изводну од функције u по тој променљивој x, онда се тако добивена изводна зове *делимична* или *парциална изводна*. У овоме случају делимична изводна узета је по прапроменљивој x и она се бележи са $\frac{\partial u}{\partial x}$ или са $\frac{\partial f(x,\ y,\ z)}{\partial x}$. Према оваквоме појмању јесте

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Парциалну изводну функције u узету по x-у треба, дакле, разумети као диференциални количник сматравши функцију u као једино зависну од променљиве x.

[1]) Види Напомену у чл. 3.

Производ из делимичне изводне и промене дотичне прапромењиве, н. пр. $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ или $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx$, зове се *делимични* или *парцијални диференциал* од u по x-у.

Обележимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial y}=\psi(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial z}=\chi(x,y,z),$$

Збир свију делимичних диференциала, а то је у овоме случају

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\varphi(x,y,z)\,dx+\psi(x,y,z)\,dy+\chi(x,y,z)\,dz,$$

зове се *потпуни* или *тотални диференциал* од u бележи се, као и до сада, са du.

Да бисмо показали, да овакав појам за потпуни диференциал једне функције, која зависи од *више* прапромењивих, одговара раније утврђеном појму за диференциал функције, која зависи само од *једне* прапромењиве, поступићемо слично као при извођењу правила за диференциалење сложених функција (чл. 51.). Као тамо, тако и овде ставићемо

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)&=[\varphi(x,y,z)+\alpha]\,\Delta x\\ f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)&=[\psi(x,y,z)+\beta]\,\Delta y\\ f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)&=[\chi(x,y,z)+\gamma]\,\Delta z\end{aligned}$$

разумевајући и сада под $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ извесне количине које ишчезавају заједно са дотичним променама $\Delta x,\ \Delta y$ и Δz.

Ако пустимо у другој једначини да се промени x, а у трећој једначини да се промени x и y, добићемо ове изразе

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y,z)-f(x+\Delta x,y,z)=[\psi(x+\Delta x,y,z)+\beta']\,\Delta y$$
$$\begin{aligned}f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x+\Delta x,y+\Delta y,z)&=\\=[\chi(x+\Delta x,y+\Delta y,z)+\gamma']\,\Delta z,&\end{aligned}$$

где β' означава количину, која ишчезава заједно са променама Δx и Δy, а γ' количину, која ишчезава са $\Delta x,\ \Delta y$ и Δz.

Ако саберемо прву, четврту и пету једначину и означимо са β'' и γ'' извесне количине које упоредно са променама прапромењивих теже нули, онда се тај резултат, с погледом на то што се на левој страни налази $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(x,\ y,\ z)$, а то је промена Δu функције u, може да напише

$$\begin{aligned}\Delta u=[\varphi(x,y,z)\,\Delta x+\psi(x,y,z)\,\Delta y+\chi(x,y,z)\,\Delta z]+\\+[\alpha\,\Delta x+\beta''\,\Delta y+\gamma''\,\Delta z].\end{aligned}$$

Одавде видимо да се промена функције састоји, у главноме, из ова два дела: први је део збир производа из појединих делимичних изводних и промене дотичне прапромењиве, а други је део збир производа из промена појединих прапромењивих и извесних количина, које упоредно са променама теже нули. Овај други део, као бесконачно мали према првоме, смемо да занемаримо на основу прве и друге основне теореме Више Математике (чл. 20., 21. и 22). Према томе, у претпоставци да су промене бесконачно мале, јесте

$$du=\varphi(x,y,z)\,dx+\psi(x,y,z)\,dy+\chi(x,y,z)\,dz$$

или

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Пример.

$$u=x^p\,y^q$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=p\,x^{p-1}\,y^q,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=q\,x^p\,y^{q-1},$$
$$du=px^{p-1}\,y^q\,dx+qx^p\,y^{q-1}\,dy=x^{p-1}\,y^{q-1}\,(py\,dx+qx\,dy).$$

65. Диференциалење сложених функција, које зависе од више прапромењивих. — Нека је

$$t=f(u,v),$$

а

$$u=\varphi(x,y,z),\quad v=\psi(x,y,z),$$

дакле t сложена функција из двеју функција u и v, које зависе од промењивих $x,\ y,\ z$.

Делимичним диференциалењем функције t по $x,\ y$ и z добијамо

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial x}&=\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial t}{\partial y}&=\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial t}{\partial z}&=\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}.\end{aligned}$$

Ако ове делимичне изводне $\frac{\partial t}{\partial x},\frac{\partial t}{\partial y},\frac{\partial t}{\partial z}$ помножимо са $dx,\ dy$ и dz и тако добивене делимичне диференциале $\frac{\partial t}{\partial x}dx,\ \frac{\partial t}{\partial y}dy,\ \frac{\partial t}{\partial z}dz$ саберемо добићемо потпуни диференциал

$$\begin{aligned}dt=\frac{\partial t}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)+\\+\frac{\partial t}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right),\end{aligned}$$

које с обзиром на то што је

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=du$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=dv,$$

може да се напише

$$dt=\frac{\partial t}{\partial u}du+\frac{\partial t}{\partial v}dv.$$

Овим је доказано да правило за диференциалење сложених функција (в. чл. 51.) важи сасвим уопште и за случај више прапромењивих.

66. Диференциал скривених функција, које зависе од више прапроменљивих. — Замислимо да су нам дате две функције u и v, које зависе од прапроменљивих x, y, z, једначинама

$$F(x, y, z, u, v) = 0$$
$$\Phi(x, y, z, u, v) = 0,$$

дакле у скривеној форми.

Диференциалењем задатих једначина по горњем правилу за диференциалење сложених функција следује

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv = 0,$$

одакле добијамо диференциале du и dv.

67. Делимичне изводне и делимични диференциали разнога ступња функција, које зависе од више прапроменљивих. — Узмимо

$$u = f(x, y, z).$$

На основу сличних посматрања каква смо чинили приликом изналажења изводних и диференциала разнога ступња за функције које зависе само од једне прапроменљиве (чл. 59.) налазимо у овоме случају поступне делимичне изводне. Пошто су делимичне изводне $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ такође функције, које зависе од променљивих x, y, z, то је јасно да сваку од њих можемо поново да диференциалимо и од сваке да тражимо изводну по ма којој од прапроменљивих. Тако н. пр. од парциалне изводне $\frac{\partial u}{\partial x}$ можемо да узмемо поново изводну по x, по y или по z и налазимо

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x}.$$

Тако исто од парциалне изводне $\frac{\partial u}{\partial y}$ добијамо

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}.$$

Најзад из парциалне изводне $\frac{\partial u}{\partial z}$ следује

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Од ових изводних можемо поново да тражимо изводне по x, y и z итд. Тако н. пр. $\frac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z}$ јесте парциална изводна четвртог ступња добивена парциалним диференциалењем један пут по x-у, два пута по y-у и један пут по z-у.

Теорема. При делимичноме диференциалењу по разним прапроменљивима потпуно је свеједно којем ћемо редом вршити диференциалење.

Довољно је да докажемо да је

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}.$$

Узимајући делимичне изводне функције u по x и по y, ми можемо функцију u сматрати да зависи само од тих променљивих, а о осталима променљивима не морамо ни водити рачуна. Ставимо дакле

$$u = f(x, y)$$

и означимо са $\Delta_x u$ и $\Delta_y u$ промене од u које та функција добија променом x-а за h односно променом y-а за k. Према томе је

$$\Delta_x u = f(x + h, y) - f(x, y)$$
$$\Delta_y u = f(x, y + k) - f(x, y).$$

Означимо са $\Delta_y \Delta_x u$ и $\Delta_x \Delta_y u$ промене од $\Delta_x u$ $\Delta_y u$ које те количине добијају пошто заменимо у првој y са $y + k$, а у другој x са $x + h$. На основу горње две једначине следује

$$\Delta_y \Delta_x u = [f x + h, y + k) - f(x, y + k)] - [f(x + h, y) - f(x, y)]$$
$$\Delta_x \Delta_y u = [f x + h, y + k) - f(x + h, y)] - [f(x, y + k) - f(x, y)],$$

које, кад сравнимо, видимо да је

$$\Delta_y \Delta_x u = \Delta_x \Delta_y u,$$

па, дакле, и

$$\frac{\Delta_y \Delta_x u}{k\,.\,h} = \frac{\Delta_x \Delta_y u}{h\,.\,k},$$

$$\lim_{\substack{h=0\\k=0}} \frac{\Delta_y \Delta_x u}{k\,.\,h} = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} \frac{\Delta_x \Delta_y u}{h\,.\,k},$$

т. ј.

$$\frac{\partial_y\, \partial_x u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial_x\, \partial_y u}{\partial x\, \partial y}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \quad \text{q. e. d.}$$

Врло је појмљиво да се ова теорема може да примени и на ма колики број поступног диференциалења. Тако н. пр. јесте

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x\, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2},$$
$$\frac{\partial^6 u}{\partial x\, \partial z\, \partial x\, \partial z\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial^6 u}{\partial z^2\, \partial y\, \partial x^3}.$$

1. Пример. $u = x^p\, y^q$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p x^{p-1}\, y^q, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = p q x^{p-1}\, y^{q-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q x^p\, y^{q-1}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = p q x^{p-1}\, y^{q-1},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}\right) = p(p-1) q\, x^{p-2}\, y^{q-1}, \text{ итд.}$$

2. *Пример.*

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

68. Тотални диференциали функције више прапромењљивих. — Задатак је да нађемо тоталне диференциале разног ступња једне функције, која зависи од више прапромењљивих, н. пр. функције

$$u = f(x,\ y,\ z).$$

Први тотални диференциал је

$$d\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\, d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\, d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\, d\,z.$$

Други тотални диференциал (или тотални диференциал другога ступња) добићемо кад од свакога члана на десној страни у изразу за $d\,u$ узмемо тотални диференциал. Тиме налазимо

$$\begin{aligned} d^2 u = &\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, d\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}\, d\,z\right] d\,x + \\ &\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, d\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\, d\,z\right] d\,y + \\ &\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}\, d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\, d\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\, d\,z\right] d\,z \\ = &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, d\,x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, d\,y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\, d\,z^2 + 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, d\,x\, d\,y + \\ &2\, \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\, d\,y\, d\,z + 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x}\, d\,z\, d\,x. \end{aligned}$$

Из овога обрасца видимо да се други тотални диференциал $d^2 u$ добија из првог диференциала $d u$ кад се вредност првог тоталног диференциала, а то је овде трином $\frac{\partial u}{\partial x}\, d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\, d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\, d\,z$, подигне на квадрат па у тако добивеноме резултату замени $d\,u^2$ са $d^2 u$. Са таквом погодбом можемо да напишемо символну формулу

$$d^2 u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\, d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\, d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\, d\,z\right]^{(2)}.$$

Сасвим опште важи образац

$$d^{(n)} u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\, d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\, d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\, d\,z\right]^{(n)},$$

чија се десна страна има разумети као резултат, до којег се долази, кад се трином $\frac{\partial u}{\partial x}\, d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\, d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\, d\,z$, који нам представља први тотални диференциал, подигне на n-ти степен и онда свуда $d\,u^n$ замени са $d^n u$.

69. Делимичне изводне скривених функција. — Узмимо да нам је дата једначина са три[1]) промењљиве x, y, z у скривеној форми

$$F(x,\ y,\ z) = 0.$$

Свака од ових трију количина може се сматрати као функција осталих двеју. Нека су x и y прапромењљиве, а z функција њихова. Траже се делимичне изводне функције z.

Диференциалењем задате једначине парциално по x-у следује

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\, \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

одакле парциална изводна z-а по x-у

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};$$

диференциалењем парциално по y-у добијамо

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\, \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

одакле парциална изводна функције z по y-у

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Парциалним диференциалењем задате једначине два пута по x-у или два пута по y-у или најзад један пут по x-у и један пут по y-у (у ма коме реду), долазимо до резултата

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\, \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z}\, \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\, \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z}\, \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z}\, \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z}\, \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\, \frac{\partial z}{\partial x}\, \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$$

из којих добијамо парциалне изводне другог ступња $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$. Итд.

Пример. $$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Парциалним диференциалењем 1) по x-у; 2) по y-у; 3) два пута по x-у; 4) два пута по y-у; 5) један пут по x-у и један пут по y-у налазимо

$$x + z\, \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad y + z\, \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\, \frac{\partial z}{\partial y} + z\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

одакле добијамо парциалне изводне првог и другог ступња

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{x\, y}{z^3}.$$

[1]) Ако задата једначина садржи само две промењљиве, онда је скривена функција зависна само од једне прапромењљиве и ми, за такав случај, имамо у чл. 61. упутство за изналажење поступних изводних.

III.

Примене Диференциалног Рачуна у Анализи.

1. Развијање функција у редове.[1]

70. Taylor-ов ред. — Означимо са m најмању, са M највећу вредност од $f^{(n+1)}(x)$, т. ј. $n+1$ве изводне функције $f(x)$, у извесноме интервалу прапроменљиве, н. пр. од $x = x_1$ до $x = x_2$. Онда је, очевидно, за $x_1 < x + h < x_2$

$$f^{(n+1)}(x+h) - m > 0. \tag{a^1}$$

Пошто је лева страна ове неравности, сматрана као изводна узета по h од

$$f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) - mh, > 0 \tag{a}$$

положна и пошто је функција под a) за $h = 0$ такође $= 0$, то, на основу нашег расматрања у чл. 41., следује да речена функција под a) расте упоредно са h и да, према томе за $h > 0$ мора и она бити > 0, т. ј.

$$f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) - mh > 0. \tag{b^1}$$

Лева страна ове неравности под b^1) може се сматрати као изводна узета по h од

$$f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) - hf^{(n)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}m. \tag{b}$$

С погледом на то што је изводна ове функције положна и што је за $h = 0$ и сама функција $= 0$, закључујемо (на основу чл. 41.) да је за $h > 0$ и

$$f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) - hf^{(n)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}m > 0, \tag{c^1}$$

одакле, на исти начин, изводимо неравности

$$f^{(n-2)}(x+h) - f^{(n-2)}(x) - hf^{(n-1)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}f^{(n)}(x) - \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}m > 0,$$

$$f^{(n-3)}(x+h) - f^{(n-3)}(x) - hf^{(n-2)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}f^{(n-1)}(x) - \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f^{(n)}(x) - \frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}m > 0$$

итд. и на послетку

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) - \ldots - \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) - \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}m > 0$$

или

$$f(x+h) > f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}m. \tag{A}$$

[1]) Види Примедбу у чл. 27.

Полазећи од неравности

$$f^{(n+1)}(x+h) - M < 0$$

долазимо, сличним умовањем, до ресултата да је

$$f(x+h) < f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}M. \tag{B}$$

На основу неравности A) и B) постављамо једначину

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}\text{м}, \tag{C}$$

где је м извесна количина чија вредност лежи између m и M, дакле $m <$ м $< M$.

Имавши на уму да је m најмања, M највећа вредност изводне $f^{(n+1)}(x)$ за све x од $x = x_1$, па до $x = x_2$ и с погледом на то да су овде (т. ј. у неравностима A и B) те крајње вредности x-а (т. ј. x_1 и x_2) ове: x и $x + h$; даље под претпоставком да је $f^{(n+1)}(x)$ непрекидна за све вредности x-а у означеноме интервалу, у коме случају $f^{(n+1)}(x)$ мора поступно да пређе све вредности од најмање m, па до највеће M, па, дакле, и вредност броја м (који је између m и M), — јасно је да се тај број м може представити као вредност изводне $f^{(n+1)}(x)$ за неко x које лежи у посматраноме интервалу између x и $x + h$. Ако то x, за које $n+1$ва изводна $f^{(n+1)}(x)$ постаје $=$ м, изразимо са $x + \Theta h$, разумевајући под Θ разломак мањи од 1, ставимо, дакле, м $= f^{(n+1)}(x + \Theta h)$ добијамо, према једначини под C), ову такозвану *Taylor*[1])-*ову формулу*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x + \Theta h).$$

Ми смо, у нашем извођењу, претпоставили да је промена $h > 0$. На случај да је $h < 0$ имали бисмо само да променимо знак неједнакости у неравностима под A) и B) и све друго остаје како је. То значи да Taylor-ова формула важи како за положне тако и за одречне промене h.

1. Напомена. Код Taylor-ове формуле претпоставља се да је $n+1$ва изводна задате функције непрекидна у извесноме интервалу од x па до $x + h$. За идуће изводне ($n + 2$гу, $n + 3$ћу, ...) не одређује се ништа: оне могу бити непрекидне или прекидне. То значи да развијање једне функције помоћу Taylor-ове формуле може бити правилно, ако се,

[1]) Brook Taylor (* Edmonton 1685, † London 1731) показао је ту формулу у једноме свом делу године 1715.

при развијању, будемо зауставили код извесног члана, а постати погрешним, ако развијање будемо и даље продужили. Такав је случај н. пр. са функцијом

$$f(x) = \sin x + (x - a)^{6\frac{1}{7}}\, e^x.$$

Пошто су, овде, функције $\sin x$ и e^x непрекидне за све вредности x-а, а тако исто и све њихове изводне, међутим изводне од $(x-a)^{6\frac{1}{7}}$ за $x = a$ непрекидне само до шесте закључно, а све изводне вишег ступња (седма, осма, ...) прекидне за $x = a$, јер постају ∞, то видимо да се са развијањем задате функције $f(x)$ у ред, помоћу Taylor-ове формуле, може ићи само до члана са $f^{(6)}(x + \Theta h)$.

2. *Напомена.* При извођењу Taylor-овог обрасца претпоставили смо да је $n+1$ ва изводна $f^{(n+1)}(x)$, функције коју развијамо, непрекидна у интервалу од x па до $x+h$ и тиме смо добили као закључни члан (остатак) реда ово

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x + \Theta h).$$

Cauchy-ев остатак R,

Међутим, ако је констатована непрекидност само за n-ту изводну $f^{(n)}(x)$ у интервалу од x па до $x+h$, али непрекидност није утврђена за $n+1$ву изводну, Taylor-ова се формула може тада да напише

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x + \Theta h).$$

Када овде на десној страни додамо и одузмемо $\dfrac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x)$ Taylor-ов образац добија нову форму

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} \left[f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)\right]$$

из које се види да је закључни члан (остатак), који треба додати $n+1$ члану бесконачног реда $f(x) + h f'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$ да би се добила тачна вредност за $f(x+h)$, ово

$$R = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} \left[f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)\right].$$

Разуме се да количина Θ у овоме изразу за R није она иста која у горњој формули за R, али је у свакоме случају $\Theta < 1$.

3. *Напомена.* Ако Taylor-ов ред прекинемо код извесног члана, прекинемо н. пр. са чланом $\dfrac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x)$ и претпоставимо да тај члан није $= 0$, онда се h може увек узети тако мало да поменути члан буде по апсолутној вредности већи од остатка који треба додати збиру

$$f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x)$$

да би се добила тачна вредност за $f(x+h)$.

Да би речени услов, да је

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) > \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} \left[f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)\right]$$

(према оној форми остатка R у 2. Напомени) или краће

$$f^{(n)}(x) > f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x),$$

био испуњен стоји нам на расположењу да узмемо h у толикој мери мало како ће разлика на десној страни неравности по апсолутној вредности постати мања од сваке количине, па, дакле, мања и од $f^{(n)}(x)$, са претпоставком да је на левој страни $f^{(n)}(x) \gtrless 0$ и претпоставком да $f^{(n)}(x)$ остаје коначно и непрекидно у интервалу од x до $x+h$. Шта више за бесконачно мало h јесте

$$\lim_{h=0} \frac{f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{h=0} \frac{R}{\dfrac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x)} = 0.$$

71. Примена Taylor-ове формуле при решавању бројних једначина. — Нека су α и β две вредности x-а за које $y = f(x)$ добија супротне знаке, н. пр.

за $x = \alpha$ полином $f(\alpha) > 0$, а
за $x = \beta$ полином $f(\beta) < 0$

и означимо са γ (где је γ између α и β) извесну приближну корену вредност једначине $f(x) = 0$. Обележимо са h грешку приближне вредности, т. ј. одступање броја γ од праве корене вредности, дакле

$$x = \gamma + h.$$

На основу Taylor-овог обрасца имамо

$$f(\gamma + h) = f(\gamma) + h f'(\gamma) + \frac{h^2}{1.2} f''(\gamma) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(\gamma) + \ldots = 0.$$

Ову једначину треба разрешити по h и тиме добити тачну корену вредност $x = \gamma + h$. Међутим та једначина је у погледу h истога степена којега је и задата једначина у погледу x-а, али задовољавајући се приближном вредношћу (ипак тачнијом од оне већ познате вредности γ) можемо чланове у којима су виши степени од h да занемаримо узев, место горње једначине за h, ову краћу

$$f(\gamma) + h f'(\gamma) + \frac{h^2}{1.2} f''(\gamma) = 0,$$

одакле

$$h = -\frac{f'(\gamma)}{f''(\gamma)} \pm \frac{1}{f''(\gamma)} \sqrt{f'(\gamma)^2 - f(\gamma) f''(\gamma)}.$$

У примени може да се, врло често, занемари и члан са h^2 и да са h определи из једначине првог степена

$$f(\gamma) + h f'(\gamma) = 0,$$

дакле

$$h = -\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}.$$

С овим се добија од γ тачнија корена вредност

$$\gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)},$$

помоћу које се, истим начином (понављањем горње методе), може да нађе нова, још тачнија корена вредност. Итд. сукцесивна апроксимација

Ово је онај, нама познати Њутн-ов начин израчунавања корена приближавањем.

Пример. Дата је једначина

$$x^5 - 9x^2 + x + 4 = 0.$$

Овде је

$$f(x) = x^5 - 9x^2 + x + 4$$
$$f'(x) = 5x^4 - 18x + 1.$$

Приближна корена вредност задате једначине јесте

$$\gamma = 1{,}9107$$

и према томе

$$f(\gamma) = 1{,}9107^5 - 9 \,.\, 1{,}9107^2 + 1{,}9107 + 4 = -1{,}4802$$
$$f'(\gamma) = 5 \,.\, 1{,}9107^4 - 18 \,.\, 1{,}9107 + 1 = 33{,}2484$$
$$h = -\frac{-1{,}4802}{33{,}2484} = 0{,}0445,$$

а с овим, као тачнија корена вредност, следује

$$\gamma + h = 1{,}9107 + 0{,}0445 = 1{,}9552.$$

Понављањем оваког поступка добили бисмо још приближнију корену вредност.

72. Maclaurin-ов ред. — Кад у Taylor-овој формули заменимо x са 0, h са x добијамо *Maclaurin*[1]*-ову формулу*, која гласи

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(0) +$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\Theta x).$$

Развијање функције у ред по Maclaurin-овој формули постаје немогуће, ако је та функција или једна од њених изводних прекидна за $x = 0$. У таквоме случају ми ћемо задату функцију развити по растућим степенима од $x - a$ пошто у Taylor-овој формули ставимо $x = a$, $h = x - a$. За тако добивене ред

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}[a + \Theta(x-a)]$$

постоји, односно вредности броја a, услов да $n+1$ ва изводна задате функције мора бити непрекидна за све вредности прапроменљиве почев од a (т. ј. x) па до x (т. ј. $x + h$).

---

[1]) Colin Maclaurin (* Kilmoddan 1698, † Jork 1746) саопштио је тај ред у своме делу године 1742.

1. Напомена. Према оној другој форми за остатак R у Taylor-овоме реду (види 2. Напомену у чл. 70.) Maclaurin-ова формула гласи

$$f(x) = f(0) + x f'(0) \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} [f^{(n)}((\Theta x) - f^{(n)}(0)].$$

2. Напомена. Треба приметити да бесконачни ред у Maclaurin-овој формули, па ма он био конвергентан, не мора имати за збир функцију $f(x)$, која је на левој страни обрасца. Узмимо н. пр. функцију $e^{-\frac{1}{x^2}}$, која са свима њеним изводнама за $x = 0$ постаје $= 0$. То значи да су сви чланови у Maclaurin-овој формули, примењеној на ову функцију, равни нули, док сама функција $e^{-\frac{1}{x^2}}$ није равна нули. Претпоставимо сада да је $\varphi(x)$ функција која може да се развије помоћу Maclaurin-овог обрасца и ставимо

$$f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ако развијемо $f(x)$ помоћу Maclaurin-ове формуле добићемо један бесконачан ред, чији збир, и ако је ред конвергентан, није раван развијеној функцији $f(x)$, него $= \varphi(x)$.

Да би збир конвергентнога реда, до којег долазимо употребом Maclaurin-ове формуле, изражавао вредност развијене функције $f(x)$ мора да буде испуњен овај услов: остатак реда, који треба додати извесноме броју првих чланова, па да би се добила вредност задате функције, мора, при бесконачном растењу броја узетих чланова, бивати све мањи и постати најзад бесконачно мали.

Иста напомена важи и за Taylor-ов ред.

73. Теорема. — Maclaurin-ова формула је једини начин да се једна функција развије у ред по растућим степенима њене прапроменљиве.

Претпоставимо да је, осим по Maclaurin-овој формули

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\Theta x), \qquad (1$$

функција $f(x)$ развијена још на један начин по растућим степенима њене прапроменљиве

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \qquad (2$$

Одузимањем прве једначине од ове друге следује

$$[A - f(0)] + [B - f'(0)]\, x + \left[C - \frac{f''(0)}{1\,.\,2}\right] x^2 +$$
$$+ \left[D - \frac{f'''(0)}{1\,.\,2\,.\,3}\right] x^3 + \ldots = 0, \qquad (\alpha$$

одакле, кад ставимо $x = 0$, закључујемо да је

$$A = f(0).$$

На основу овога и пошто поделимо једн. α) са x та се једначина своди на

$$\beta)\quad [B - f'(0)] + \left[C - \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}\right] x + \left[D - \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right] x^2 + \ldots = 0,$$

одакле, опет, кад ставимо $x = 0$, следује

$$B = f'(0).$$

Према томе и пошто једн. β) скратимо са x, она постаје

$$\gamma)\quad \left[C - \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}\right] + \left[D - \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right] x + \ldots = 0,$$

одакле, кад ставимо $x = 0$, излази да је

$$C = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}.$$

На исти начин доказујемо да је

$$D = \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

итд. То значи да су одговарајући сачинитељи у горња два реда 1) и 2) једнаки, а тиме је доказато да су редови 1) и 2) идентични или другим речима да осим Maclaurin-ове формуле нема другог начина да се једна функција развије у ред по растућим степенима њена прапроменљиве.

Тако је Taylor-ова формула једини начин за развијање у ред функције $f(x+h)$ по растућим степенима промене h.

74. Примери. —

1. Пример.

$$f(x) = (1+x)^m,$$

дакле

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \qquad f'(0) = m,$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \qquad f''(0) = m(m-1),$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \qquad f'''(0) = m(m-1)(m-2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \qquad f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1),$$
$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1}, \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

Према овоме, а на основу Maclaurin-ове формуле, имамо

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} x^n + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n+1)} (1+\theta x)^{m-n-1}.$$

У чл. 32. (3. пример) доказали смо да је овај ред на десној страни збирљив за свако m кад је $-1 < x < +1$ и да је, дакле, у томе случају

$$\lim_{n=\infty} R_n = \lim_{n=\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n+1)} (1+\theta x)^{m-n-1} = 0.$$

На основу тога можемо да ставимо

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \text{ у беск.}$$

и развијање функције $(1+x)^m$ у ред можемо да продужимо докле хоћемо.

2. Пример.

$$f(x) = a^x,$$

дакле

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = a^x(la), \qquad f'(0) = la,$$
$$f''(x) = a^x(la)^2, \qquad f''(0) = (la)^2,$$
$$f'''(x) = a^x(la)^3, \qquad f'''(0) = (la)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = a^x(la)^n, \qquad f^{(n)}(0) = (la)^n,$$
$$f^{(n+1)}(x) = a^x(la)^{n+1}, \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = a^{\theta x}(la)^{n+1}.$$

Према овоме даје Maclaurin-ова формула

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\,la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(x\,la)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \frac{(x\,la)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} a^{\theta x}.$$

Овај ред на десној страни збирљив је за све вредности x-а (види чл. 30. 1. пример) и можемо да ставимо

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x\,la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \text{ у беск.}$$

Значи да развијање функције a^x у ред можемо да продужимо докле хоћемо.

Кад у овоме општем изложитељном реду ставимо $a = e$ добијамо специјални изложитељни ред

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \text{ у беск.},$$

одакле, опет, за $x = 1$ следује ред за израчунавање броја e (основе природних логаритама)

$$e = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \text{ у беск.}$$

3. Пример.

$$f(x) = \sin x,$$

дакле

$$f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(0) = 0,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(0) = -1,$$
$$f''''(x) = \sin x, \qquad f''''(0) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ и ако је } n \text{ парно } f^{(n)}(0) = 0,$$
$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = \mp \cos\theta x.$$

Према овоме даје Maclaurin-ова формула

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \mp \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} \cos\theta x.$$

Пошто је ред на десној страни збирљив за све могуће вредности x-а (2. пример у чл. 32.), то можемо развијање функције $\sin x$ да продужимо произвољно и да ставимо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - + \ldots \text{ у беск.}$$

На исти начин изводимо тригонометриски ред

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - + \ldots \text{ у беск.}$$

4. Пример:

$$f(x) = l\,(1+x),$$

дакле

$$f(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -1\,.\,(1+x)^{-2}, & f''(0) &= -1,\\
f'''(x) &= 1\,.\,2\,.\,(1+x)^{-3}, & f'''(0) &= 1\,.\,2,\\
f''''(x) &= -1\,.\,2\,.\,3\,.\,(1+x)^{-4}, & f''''(0) &= -1\,.\,2\,.\,3.\\
&\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\\
&\quad \ldots (n-1(\,(1+x)^{-n}, & &\quad \ldots (n-1)\\
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots & f^{(n+1)}(\Theta x) &= (-1)^n\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\\
&\quad \ldots n\,(1+x)^{-n-1}, & &\quad \ldots n\,(1+\Theta x)^{-n-1}.
\end{aligned}$$

С овим и помоћу Maclaurin-ове формуле добијамо

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Ми знамо (4. пример у чл. 32.) да је овај ред конвергентан и то за $-1 < x < +1$. То значи да је

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \text{ у беск.}$$

Напомена. Помоћу добивеног реда израчунавамо природне логаритме бројева од 0 до 2.

Ако за x узмемо границе 0 и 1, претпоставимо да је $0 < x < 1$, онда место горњег реда можемо да напишемо одвојено ова два реда

1) $$l\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

2) $$l\,(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

одакле, одузимањем, нови ред произилази

3) $$l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right]$$

или ако ставимо $\frac{1+x}{1-x} = u$, дакле $x = \frac{u-1}{u+1}$

4) $$l\,u = 2\left[\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

С обзиром на то, да је $0 < x < 1$, дакле је $1 < u < \infty$, видимо да се ред 4) може да употреби на израчунавање природних логаритама бројева од 1 па до ∞. Тај ред, у неку руку, допуњује ред 2) којим се израчунавају природни логаритми бројева од 0 до 1.

Ставимо у једн. 1) $x = \frac{h}{N}$, дакле $l\,(1+x) = l\,(N+h) - l\,N$, добићемо нови ред

$$l\,(N+h) - l\,N = \frac{h}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{N}\right)^4 + - \ldots \qquad (5$$

И најзад заменом у једн. 3) $x = \frac{h}{2N+h}$, дакле $\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N}$ налазимо ред

$$l\,(N+h) - l\,N = 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots\right]. \qquad (6$$

Помоћу ова последња два обрасца 5) и 6), чији су редови нагло конвергентни, само ако је број N иоле велики према количини h, израчунавамо природан логаритам броја $N+h$ кад нам је познат логаритам броја N. За $h = 1$ претварају се једн. 5) и 6) у

$$l\,(N+1) - l\,N = \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + - \ldots \qquad (7$$

$$l\,(N+1) - l\,N = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right]. \qquad (8$$

Разуме се да сви ови редови могу да послуже и за израчунавање Бриг-ових логаритама. Означимо са $\log$ десетне логаритме, са $M = \frac{1}{l\,10}$ њихов модуо[1]). Једначине 5), 6), 7) и 8) гласе

$$\log(N+h) - \log N = M\left[\frac{h}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{N}\right)^4 + - \ldots\right]$$

$$\log(N+h) - \log N = 2M\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots\right]$$

$$\log(N+1) - \log N = M\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + - \ldots\right]$$

$$\log(N+1) - \log N = 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right].$$

За израчунавање модуа M добијамо врло подесан ред на следећи начин. Заменом $N = 1$ у једн. 8) добијамо

$$l\,2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \frac{1}{7\,.\,3^7} + \ldots\right],$$

а заменом $N = 8$, $h = 2$ у једн. 6) следује

$$l\,10 = 3\,l\,2 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,9^5} + \frac{1}{7\,.\,9^7} + \ldots\right].$$

Ако овде на десној страни за $l\,2$ уметнемо из претпоследне формуле његову вредност добићемо овај врло употребљив образац

$$l\,10 = \frac{1}{M} = 6\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \frac{1}{7\,.\,3^7} + \ldots\right] +$$

$$2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,9^5} + \frac{1}{7\,.\,9^7} + \ldots\right].$$

Опширније о теорији и примени логаритама, а нарочито о израчунавању њиховом елементарним методама види Предавања из Тригонометрије чл. 34.—57.

[1]) Види Предавања из Тригонометрије чл. 40.

75. Taylor-ова формула за функције, које зависе од више прапромењљивих. — Нека је задата функција

1) $$u = f(x, y).$$

Да бисмо развили $f(x+h, y+k)$ по растућим степенима од h и k замењућемо у задатој функцији 1) x и y са $x + ht$ и $y + kt$, развићемо је, по Maclaurin-овоме обрасцу, по растућим степенима од t и ставићемо, најзад, у резултату $t = 1$.

Означимо

2) $$x + ht = p, \qquad y + kt = q,$$

3) $$f(x + ht,\ y + kt) = \varphi(t) = U = f(p, q).$$

На основу Maclaurin-ове формуле имамо

4) $$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(0) + R,$$

где је

5) $$R = \frac{t^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\Theta t) = \frac{t^n}{1.2\ldots n}[\varphi^{(n)}(\Theta t) - \varphi^{(n)}(0)].$$

Из онога под 3), а на основу правила за диференциалење сложених функција (чл. 51.), налазимо

$$\varphi'(t)\,dt = \frac{dU}{dp}dp + \frac{dU}{dq}dq = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)dt,$$

јер је, према ономе под 2),

$$dp = h\,dt, \qquad dq = k\,dt.$$

Дакле

$$\varphi'(t) = \frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k,$$

а одавде

$$\varphi''(t) = \frac{d^2U}{dp^2}h^2 + 2\frac{d^2U}{dp\,dq}hk + \frac{d^2U}{dq^2}k^2 = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(2)},$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(n)},$$?

Ако ставимо $t = 0$, онда се, према ономе под 2) и 3), претвара p у x, q у y, а U у u и дакле

$$\varphi(0) = f(x, y) = u,$$

$$\varphi'(0) = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k,$$

$$\varphi''(0) = \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(2)}$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)}.$$

С овим, када заменимо $t = 1$ у образац 4), а с обзиром да је $\varphi(1) = f(x+h,\ y+k)$, добијамо формулу

$$f(x+h,\ y+k) =$$

$$u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{1}{1.2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)} + R, \qquad (6$$

где је, према обрасцу 5),

$$R = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\Theta) = \frac{1}{1.2\ldots n}[\varphi^{(n)}(\Theta) - \varphi^{(n)}(0)]. \qquad (7$$

Пошто су h и k произвољне промене прапромењљивих x и y, то их можемо да заменимо диференциалима dx и dy и на тај начин можемо формулу 6) да напишемо

$$f(x+h,\ y+k) = u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^nu}{1.2\ldots n} + R. \quad (8$$

Ову Taylor-ову формулу можемо да проширимо и на функције које зависе од ма колико прапромењљивих. Тако н. пр. за

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

имамо

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l, \ldots) =$$

$$u + \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right) +$$

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right)^{(2)} +$$

. . . .

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right)^{(n)} + R \qquad (9$$

или краће

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l, \ldots) = u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^nu}{1.2\ldots n} + R. \qquad (10$$

Овде је

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k + \frac{dU}{dr}l + \ldots\right)^{(n)} - \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right)^{(n)}\right],$$

$$U = f(p, q, r, \ldots),$$

$$p = x + \Theta h,\ q = y + \Theta k,\ r = z + \Theta l, \ldots$$

$$\Theta < 1.$$

Ако са растењем броја чланова остатак бива све мањи и постаје $\lim_{n=\infty} R = 0$ ред на десној страни једн. 10) конвергентан је и његов је збир $= f(x+h,\ y+k,\ z+l, \ldots)$ и ми имамо Taylor-ову формулу примењену на функције које зависе од ма колико прапромењљивих.

Напомена. Као за функције једне прапромењљиве, тако се и овде доказује, да ма који члан у Taylor-овоме реду, ако тај члан није $=0$, може по апсолутној вредности да надмаши цео остатак реда, када се промене $h, k, l, \ldots$ узму довољно мале.

76. Maclaurin-ова формула за функције, које зависе од више прапромењљивих. — Ставимо у општој Taylor-овој формули 9) прошлог члана $x=0,\ y=0,\ z=0, \ldots$ и заменимо онда слова $h, k, l, \ldots$ словима $x, y, z, \ldots$, па ћемо добити

$$f(x,\ y,\ z, \ldots) =$$

$$u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \ldots$$

$$\frac{1}{1\,.\,2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \ldots\right]^{(2)} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1\,.\,2 \ldots n}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \ldots\right]^{(n)} + R.$$

Овде означава $u_0,\ \left(\frac{du}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{du}{dy}\right)_0,\ \left(\frac{du}{dz}\right)_0, \ldots$ ресултат замене $x=0$, $y=0,\ z=0, \ldots$ у изразима $u,\ \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots$ Остатак је

$$R = \frac{1}{1\,.\,2 \ldots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k + \frac{dU}{dr}l + \ldots\right)^{(n)} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right)^{(n)}\right],$$

где треба ставити $x=0,\ y=0,\ z=0, \ldots$, заменути $h, k, l, \ldots$ са $x, y, z, \ldots$; $p, q, r, \ldots$ са $\Theta x,\ \Theta y,\ \Theta z, \ldots$ Ако са растењем n-а остатак R бива све мањи и најзад за $n=\infty$ постаје $\lim_{n=\infty} R = 0$, ред на десној страни горње једначине конвергентан је и његов је збир $= f(x, y, z, \ldots)$. Једначина представља Maclaurin-ову формулу примењену на функције које зависе од више прапромењљивих.

2. Израчунавање неодређених израза.[1]

77. Неодређена форма $\frac{0}{0}$. — Узмимо да количник $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ за извесну вредност прапромењљиве, н. пр. за $x=a$, услед тога што обе функције $\varphi(x)$ и $f(x)$ за ту вредност x-а постају равне нули, добија неодређени вид $\frac{0}{0}$. У колико се x више приближује броју a у толико више функције $\varphi(x)$ и $f(x)$ теже нули. Под правом или истинском вредношћу израза $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ за $x=a$ треба разумети $\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Пошто је, према претпоставци, $\varphi(a)=0$ и $f(a)=0$, дозвољено је ставити

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}},$$

одакле (на основу начела у чл. 13.) закључујемо

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a}\frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}.$$

Права вредност израза $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, који се за $x=a$ јавља у неодређеној форми $\frac{0}{0}$, добија се, дакле, кад се образује количник из изводних дељиника и делитеља и у тим изводнама замени $x=a$.

До истог ресултата долазимо и помоћу Taylor-ове формуле:

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1\,.\,2}\varphi''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2 \ldots n}\varphi^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2 \ldots (n+1)}\varphi^{(n+1)}(a+\Theta h)$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2 \ldots n}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2 \ldots (n+1)}f^{(n+1)}(a+\Theta h),$$

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\varphi'(a) + \dfrac{h}{1\,.\,2}\varphi''(a) + \ldots + \dfrac{h^n}{1\,.\,2 \ldots (n+1)}\varphi^{(n+1)}(a+\Theta h)}{f'(a) + \dfrac{h}{1\,.\,2}f''(a) + \ldots + \dfrac{h^n}{1\,.\,2 \ldots (n+1)}f^{(n+1)}(a+\Theta h)}.$$

[1]) Види на крају чл. 11.

Ставимо овде $h=0$, па ћемо добити

$$\frac{\varphi(a)}{f(a)}=\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}$$

или

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \quad q. \text{ è. } d.$$

На случај да је $\varphi'(a)=0$ и $f'(a)=0$ тако да се и количник из првих изводних за ону вредност $x=a$ јавља у неодређеном виду, т. ј. да је и $\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}=\frac{0}{0}$, Taylor-ова формула даје

$$\varphi(a+h)=\frac{h^2}{1\,.\,2}\varphi''(a)+\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\varphi'''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n}\varphi^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,.(n+1)}\varphi^{(n+1)}(a+\Theta h),$$

$$f(a+h)=\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(a)+\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(a+\Theta h),$$

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)}=\frac{\varphi''(a)+\frac{h}{3}\varphi'''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{3\,.\,4\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(a+\Theta h)}{f''(a)+\frac{h}{3}f'''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{3\,.\,4\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(a+\Theta h)},$$

које, кад ставимо $h=0$, даје ресултат

$$\frac{\varphi(a)}{f(a)}=\frac{\varphi''(a)}{f''(a)}$$

или

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi''(x)}{f''(x)}.$$

У овоме случају праву вредност неодређеног израза даје нам количник из изводних другог ступња у коме се за x ставља она вредност која проузрокује неодређеност. Ако, пак, и тај количник $\frac{\varphi''(x)}{f''(x)}$ за $x=a$ добија неодређену форму $\frac{0}{0}$ (услед тога што је $\varphi''(a)$ и $f''(a)$ равно нули), онда, очевидно, ваља узети количник из трећих изводних и тада је

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)}=\frac{\varphi'''(a)}{f'''(a)}.$$

Према овоме изводимо опште правило: да бисмо нашли праву вредност једнога количника, који за извесно $x=a$ добија неодређени вид $\frac{0}{0}$, треба тражити изводне од дељеника и од делитеља све дотле док се не дође до изводних које за $x=a$ не постају у исто време равне нули. Количник из тих изводних, у којима стављамо $x=a$, даје нам праву вредност израза за $x=a$.

1. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{x^5-2^5}{x-2} \text{ за } x=2 \text{ постаје неодређено } \frac{0}{0}.$$

Овде је $\varphi'(x)=5x^4$, $f'(x)=1$, $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=5x^4$

и према томе

$$\lim_{x=2}\frac{x^5-2^5}{x-2}=\lim_{x=2}5x^4=80.$$

2. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{l(1+x)}{x} \text{ постаје за } x=0 \text{ неодређено } \frac{0}{0}.$$

Имамо

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+x},\; f'(x)=1,\; \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=\frac{1}{1+x},$$

дакле

$$\lim_{x=0}\frac{l(1+x)}{x}=\lim_{x=0}\frac{1}{1+x}=1.$$

3. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{x^x-1}{l\,x} \text{ добија за } x=1 \text{ вид } \frac{0}{0}.$$

Овде је $\varphi'(x)=x^x(1+l\,x)$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=x^{x+1}(1+l\,x)$,

дакле

$$\lim_{x=1}\frac{x^x-1}{l\,x}=\lim_{x=1}x^{x+1}(1+l\,x)=1.$$

4. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x} \text{ за } x=0 \text{ јавља се у форми } \frac{0}{0}.$$

Узимамо $\varphi'(x)=e^x+e^{-x}-2$, $f'(x)=1-\cos x$, $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$, које за $x=0$ опет даје неодређеност $\frac{0}{0}$.

Продужујемо: $\varphi''(x)=e^x-e^{-x}$, $f''(x)=\sin x$, $\frac{\varphi''(x)}{f''(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ и пошто и тај количник за $x=0$ показује неодређену форму $\frac{0}{0}$ идемо даље и узимамо

$$\varphi'''(x)=e^x+e^{-x},\; f'''(x)=\cos x,\; \frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$

и налазимо

$$\lim_{x=0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x=0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

78. Неодређена форма $\frac{\infty}{\infty}$. — Предпоставимо да количник $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ за $x = a$, услед тога што је $\varphi(a) = \infty$ и $f(a) = \infty$, показује неодређену форму $\frac{\infty}{\infty}$.

Ако напишемо $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \dfrac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ и узмемо у обзир да је $\dfrac{1}{\varphi(a)} = 0$ и $\dfrac{1}{f(a)} = 0$ увидићемо да се израчунавање неодређеног израза $\frac{\infty}{\infty}$ своди на исти поступак као и код вида $\frac{0}{0}$ и да, према томе, и овде важи исто правило. Отуда што је

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}}{-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}} = \lim_{x=a} \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)^2\right] = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \left[\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]^2$$

изводимо резултат

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$$

и сасвим опште

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)},$$

где су $\varphi^{(n)}(x)$ и $f^{(n)}(x)$ изводне најнижег ступња које за $x = a$ нису у исто време равне нули или ∞.

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{l(x-a)}{e^{\frac{1}{x-a}}} \text{ постаје за } x = a \text{ неодређено } \frac{\infty}{\infty}.$$

Из тога што је $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x-a}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2} e^{\frac{1}{x-a}}$, дакле $\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \dfrac{a-x}{e^{\frac{1}{x-a}}}$,

следује

$$\lim_{x=a} \frac{l(x-a)}{e^{\frac{1}{x-a}}} = \lim_{x=a} \frac{a-x}{e^{\frac{1}{x-a}}} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

79. Неодређена форма $0 \cdot \infty$. — Узмимо да у изразу $\varphi(x)\, f(x)$ за $x = a$ постаје $\varphi(a) = 0$, а $f(a) = \infty$ и сам израз тиме добија неодређени вид $0 \cdot \infty$. Тај неодређени вид може, врло лако, да се доведе на један од она прошла два: било на вид $\frac{0}{0}$ или на $\frac{\infty}{\infty}$. Јер, ако напишемо $\varphi(x)\, f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ или $\varphi(x) f(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ и обележимо $\dfrac{1}{f(x)} = F(x)$, а $\dfrac{1}{\varphi(x)} = \Phi(x)$, имамо у првоме случају израз $\varphi(x) f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{F(x)}$, који за $x = a$ постаје $\frac{0}{0}$, а у другоме случају израз $\varphi(x) f(x) = \dfrac{f(x)}{\Phi(x)}$, који опет за $x = a$ добија неодређени вид $\frac{\infty}{\infty}$. Праву вредност налазимо дакле

$$\lim_{x=a} [\varphi(x) f(x)] = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{F(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{F'(x)}$$

или

$$\lim_{x=a} [\varphi(x) f(x)] = \lim_{x=a} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\Phi'(x)}.$$

1. Пример.

$\varphi(x) f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) tg\, x$ за $x = \dfrac{\pi}{2}$ постаје неодређено $0 \cdot \infty$. Напишимо

$\varphi(x)\, f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{F(x)} = \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{cotg\, x}$ (које за $x = \dfrac{\pi}{2}$ постаје $\frac{0}{0}$). Отуда, што је

$\varphi'(x) = -1$, $F'(x) = -\dfrac{1}{sin^2 x}$, $\dfrac{\varphi'(x)}{F'(x)} = sin^2 x$, добијамо

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) tg\, x\right] = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} sin^2 x = 1.$$

2. Пример.

$\varphi(x)\, f(x) = sin(a-x)\, tg \dfrac{\pi x}{2a}$ за $x = a$ показује неодређеност $0 \cdot \infty$. Ставимо

$sin(a-x)\, tg \dfrac{\pi x}{2a} = \dfrac{sin(a-x)}{cotg \frac{\pi x}{2a}} = \dfrac{\varphi(x)}{F(x)}$. Из $\varphi'(x) = -cos(a-x)$,

$F'(x) = -\dfrac{\pi}{2a} \dfrac{1}{sin^2 \frac{\pi x}{2a}}$, дакле $\dfrac{\varphi'(x)}{F'(x)} = \dfrac{2a}{\pi} cos(a-x)\, sin^2 \dfrac{\pi x}{2a}$ налазимо

$$\lim_{x=a} \left[sin(a-x)\, tg \frac{\pi x}{2a}\right] = \lim_{x=a} \left[\frac{2a}{\pi} cos(a-x)\, sin^3 \frac{\pi x}{2a}\right] = \frac{2a}{\pi}.$$

80. Напомена. — Није ретко да количник образован из изводних задатих функција $\varphi(x)$ и $f(x)$, па узели те изводне ма којег ступња, показује, за извесно $x = a$, навек неодређен вид, тако да горња метода за изналажење праве вредности израза $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ постаје неупотребљива. За такве случајеве нисмо у стању да дамо опште важеће одредбе. У таквој прилици ми смо упућени да удешавамо средства према случају, који посматрамо. Нека нам за то послуже следећи примери.

1. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \text{ за } x = a \text{ добија вид } \frac{0}{0}.$$

Овде је $\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$, $\lim_{x=a} \dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$,

дакле опет неодређено. Тако је и са осталим количницима из изводних вишег ступња и ми нисмо у стању да, помоћу обичне методе, дођемо до резултата.

Међутим, ако у задатоме изразу ставимо $x = a + h$, узмемо дакле да је

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a+h}}$$

помножимо бројитељ и именитељ са $\sqrt{a+h}+\sqrt{a}$

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\sqrt{h}+\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{2a+h}\,(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

и ставимо $h = 0$ добићемо

$$\frac{\varphi(a)}{f(a)}, \text{ а то је } \lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

2. *Пример.*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\operatorname{cotg}(x-a)}{e^{\frac{1}{x-a}}} \text{ за } x = a \text{ постаје } \frac{\infty}{\infty}.$$

Овде је $\varphi'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x-a)}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}\,e^{\frac{1}{x-a}}$

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{(x-a)^2}{\sin^2(x-a)\,e^{\frac{1}{x-a}}},$$

које за $x = a$ показује неодређену форму $\frac{0}{0.\infty}$. Тако је и са количницима $\frac{\varphi''(x)}{f''(x)}, \frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)}, \ldots$

Међутим ми можемо да дођемо до праве вредности задате функције за $x = a$ врло лако из количника $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ на следећи начин

$$\lim_{x=a}\frac{(x-a)^2}{\sin^2(x-a)\,e^{\frac{1}{x-a}}} = \lim_{z=0}\left[\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}}\right] = \left[\lim_{z=0}\frac{z}{\sin z}\right]^2\lim_{z=0}\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}} = 0.$$

3. *Пример.*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{l(x-a)}{\operatorname{cotg}(x-a)} \text{ за } x = a \text{ добија вид } \frac{\infty}{\infty}.$$

Из $\varphi'(x) = \frac{1}{x-a}$, $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x-a)}$, дакле $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = -\frac{\sin^2(x-a)}{x-a}$ налазимо

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = -\lim_{x=a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}\lim_{x=a}\sin(x-a) = -\lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}\lim_{z=0}\sin z = 0.$$

81. Неодређене форме 0^0, ∞^0 и 1^∞. — Да бисмо добили праву вредност једнога израза $f(x)^{\varphi(x)}$, који за извесно $x = a$ показује један од неодређених видова $0^0, \infty^0, 1^\infty$, треба тражити праву вредност његова логаритма, зато што се логаритам таквог израза, а то је $lf(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\,lf(x)$, јавља у неодређеној форми $0.\infty$, чију праву вредност изналазимо на познати начин.

1. *Пример.*

$$f(x)^{\varphi(x)} = \left(\frac{1}{1-e^x}\right)^{\frac{1}{x}} \text{ постаје за } x = \infty \text{ неодређено } 0^0.$$

Узећемо $\varphi(x)\,lf(x) = \frac{1}{x}\,l\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -\frac{l(1-e^x)}{x}$, које за $x = \infty$ постаје $\frac{\infty}{\infty}$. Ставимо $\psi(x) = l(1-e^x)$, $\chi(x) = x$, дакле $\psi'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$, $\chi'(x) = 1$, $\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $\lim_{x=\infty}\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \lim_{x=\infty}\frac{1}{1-e^{-x}} = 1$ и према томе $\lim_{x=\infty}[\varphi(x)\,lf(x)] = -1$, $\lim_{x=\infty} f(x)^{\varphi(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2. *Пример.*

$$f(x)^{\varphi(x)} = \left(\frac{1}{x}\right)^x \text{ добија за } x = 0 \text{ вид } \infty^0.$$

Овде је $\varphi(x)\,lf(x) = x\,l\left(\frac{1}{x}\right) = -x\,lx = -\frac{lx}{\left(\frac{1}{x}\right)}$, а ово за $x = 0$ постаје $\frac{\infty}{\infty}$. Означимо $\psi(x) = lx$, $\chi(x) = \frac{1}{x}$. Онда је $\psi'(x) = \frac{1}{x}$, $\chi'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = -x$ и на основу тога $\lim_{x=0}\frac{\psi(x)}{\chi(x)} = -\lim_{x=0} x = 0$, дакле $\lim_{x=0}[\varphi(x)\,lf(x)] = 0$, $\lim_{x=0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim[\varphi(x)\,lf(x)]} = e^0 = 1$.

3. *Пример.*

$$f(x)^{\varphi(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ за } x = \infty \text{ јавља се у форми } 1^\infty.$$

Узмимо логаритам

$$lf(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\,lf(x) = x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)},$$

који за $x = \infty$ узима неодређени вид $\frac{0}{0}$. Ставимо $\psi(x) = l\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\chi(x) = \frac{1}{x}$, дакле $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, $\chi'(x) = -\frac{1}{x^2}$,

$\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ и према томе

$$\lim_{x=\infty}\frac{\psi(x)}{\chi(x)} = \lim_{x=\infty}[\varphi(x)\,lf(x)] = \lim_{x=\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x=\infty} f(x)^{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

82. Неодређена форма ∞ — ∞. — Претпоставимо да израз $\frac{\varphi(x)}{f(x)}-\frac{\phi(x)}{F(x)}$ добија за $x=a$ неодређени вид $\infty-\infty$ и то услед тога што су именитељи $f(a)=0$ и $F(a)=0$, док бројитељи $\varphi(a)$ и $\phi(a)$ остају, међутим, коначни и различни од нуле. Ако напишимо

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}-\frac{\phi(x)}{F(x)}=\frac{\varphi(x)F(x)-f(x)\phi(x)}{f(x)F(x)}$$

видићемо да се изналажење праве вредности неодређене форме $\infty-\infty$ на прост начин може да сведе на опредељавање неодређеног вида $\frac{0}{0}$.

1. Пример.

$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}$ показује за $x=0$ неодређеност $\infty-\infty$.

Напишимо $\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$ и ставимо

$$\psi(x)=x\cos x-\sin x,\quad \chi(x)=x\sin x.$$

Задата функција $\frac{\psi(x)}{\chi(x)}$ добија сада за $x=0$ неодређену форму $\frac{0}{0}$, чију ћемо вредност наћи кад узмемо

$$\psi'(x)=-x\sin x,\quad \chi'(x)=\sin x+x\cos x,$$

$$\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)}=-\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=-\frac{1}{\frac{1}{x}+\cot g\, x},$$

дакле

$$\lim_{x=0}\frac{\psi(x)}{\chi(x)}=\lim_{x=0}\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x=0}\frac{-1}{\frac{1}{x}+\cot g\, x}=0.$$

2. Пример.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}$ за $x=0$ добија неодређени вид $\infty-\infty$.

Напишимо $\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$, које за $x=0$ показује неодређеност $\frac{0}{0}$.

Ставимо $\psi(x)=e^x-1-x$, $\chi(x)=x(e^x-1)$, дакле

$$\psi'(x)=e^x-1,\quad \chi'(x)=e^x(1+x)-1,\quad \frac{\psi'(x)}{\chi'(x)}=\frac{e^x-1}{e^x(1+x)-1}.$$

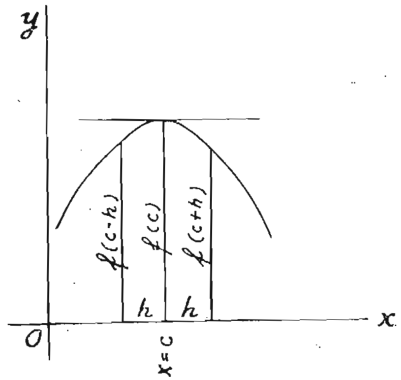
Но пошто је $\lim_{x=0}\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)}=\frac{0}{0}$, дакле неодређено, треба узети $\psi''(x)=e^x$, $\chi''(x)=e^x(2+x)$, $\frac{\psi''(x)}{\chi''(x)}=\frac{1}{2+x}$ и онда следује

$$\lim_{x=0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x=0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

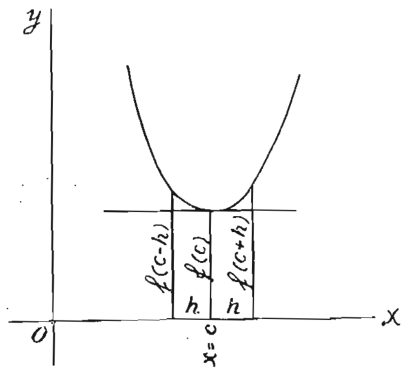
3. Највеће и најмање вредности функција једне прапроменљиве.

83. Појам. — Ако је за неку вредност прапроменљиве, н. пр. за $x=c$, (стварна) вредност функције $f(x)$, дакле $f(c)$, већа како од свију непосредно претходећих, тако и од свију непосредно следећих вредности, а то су $f(c-h)$ и $f(c+h)$, онда се каже да функција $f(x)$ има за $x=c$ највећу вредност или да је она у своме *максимуму* (maximum). Обратно, ако је функциона вредност $f(c)$ мања од свију непосредно обллижњих (следећих и претходећих) вредности $f(c+h)$ и $f(c-h)$, онда је то најмања вредност или *минимум* (minimum) функције.

Ако узмемо да промена h довољно мала (положна или одречна), онда је у случају максимума разлика $f(c+h)-f(c)<0$ (одречна), а у случају минимума је та разлика $f(c+h)-f(c)>0$ (положна).



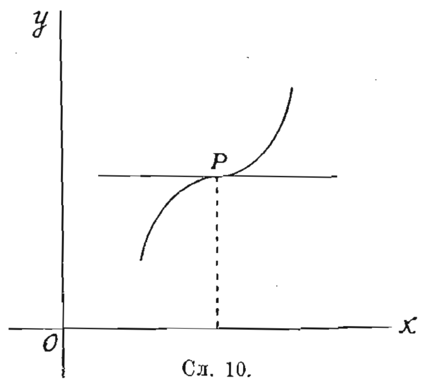
Сл. 8.



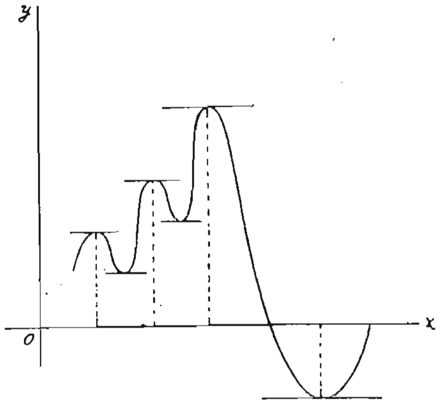
Сл. 9.

Кад задату функцију $y=f(x)$ представимо, на начин Анилитичне Геометрије, као линију, одмах ће нам бити јасно да су тангенте у тачкама линије, које репрезентују максималне и минималне вредности функције (ординате), паралелне са x-осом. Види сл. 8 и 9. Међутим тангента линије може у извесној тачци бити паралелна са x-осом, па ипак да тој тачци не одговара ни максимум ни минимум функције (ординате).

Такве се тачке зову *тачке прегиба* или *инфлексионе тачке*. Види тачку P у сл. 10.



Сл. 10.



Сл. 11.

Једна функција може имати више максимума и више минимума. Један од тих максимума може да је мањи од каквог минимума. Лако је, пак, увидити да максималне и минималне вредности мора да *наизменце* следују једна другој.

Одречан максимум постаје минимум, као апстрахујемо од знака, ако што и одречан минимум добија карактер максимума кад узмемо његову апсолутну вредност.

84. Закључци. — Ми знамо да функција $f(x)$ расте или опада у извесноме интервалу прапроменљиве x (претпостављајући да x расте), према томе да ли је изводна функција положна или одречна у томе интервалу (в чл. 41.) Из тога закључујемо да функција не постаје ни максимумом ни минимумом у размаку x-а у коме изводна $f'(x)$ задржава исти знак. Ако је н. пр. од $x=a$ па до $x=b$ непрестано $f'(x)>0$, онда је $f(a)$ најмања, а $f(b)$ највећа од свих функционих вредности у посматраном интервалу; ако је, пак, од $x=a$ па до $x=b$ вазда $f'(x)<0$, онда је $f(a)$ највећа, а $f(b)$ најмања функциона вредност у томе размаку.

Према томе функција $f(x)$ може само тада имати максималне или минималне вредности у некоме интервалу њене прапроменљиве, ако њена изводна $f'(x)$ у томе интервалу мења знак, т. ј. ако од положних вредности прелази у одречне или обратно. Једна функција (па дакле и $f'(x)$) може само тако променути знак, ако за неку вредност прапроменљиве она постаје или $=0$ или прекидна. Први је начин најобичнији, т. ј. да функција мења знак што за извесно $x=c$ она постаје $=0$, због чега ћемо овакве случајеве искључиво посматрати. Оне друге случајеве, у којима функција мења знак услед прекидности, треба нарочито и по наособ проучавати.

Из свега овога изводимо закључак: функција $f(x)$ је за $x=c$, дакле $f(c)$, максимум или минимум 1) ако је $f'(x)$ за $x=c$, т. ј. $f'(c)=0$ (или прекидно), 2) ако су за довољно мало h знаци од $f'(c-h)$ и $f'(c+h)$ различни и то: $f(c)$ је максимум, ако је $f'(c-h)>0$, а $f'(c+h)<0$, т. ј. ако изводна $f'(x)$ у близини $x=c$ из положних вредности прелази у одречне; $f(c)$ је минимум, ако је $f'(c-h)<0$, а $f'(c+h)>0$, дакле у близини $x=c$ изводна $f'(x)$ из одречних вредности прелази у положне.

85. Метода. — На основу Taylor-овог реда јесте

$$f(c+h)-f(c)=hf'(c)+R_1.$$

Ако $f'(c)$ није $=0$, онда знак разлике $f(c+h)-f(c)$ зависи од знака количине $hf'(c)$, пошто h можемо да узмемо тако мало да знак од $hf'(c)+R_1$ једино од првог члана зависи.[1]) Ако је, дакле, $f'(c)\gtrless 0$, онда знак разлике $f(c+h)-f(c)$ зависи од $hf'(c)$, па дакле и од промене h. Из тога, што су тада $f(c+h)-f(c)$ и $f(c-h)-f(c)$ различног знака, следује да оближње вредности нису све веће или све мање од $f(c)$: напротив, ако су претходеће мање од $f(c)$, т. ј. ако је $f(c-h)-f(c)<0$, следеће су од ње веће, т. ј, онда је $f(c+h)-f(c)>0$ или обратно. То значи да у таквоме случају (кад $f'(c)$ није $=0$) $f(c)$ не представља ни максимум ни минимум функције $f(x)$.

Али, ако је $f'(c)=0$, а $f''(c)\gtrless 0$, дакле

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(c)+R_2$$

видимо да разлика $f(c+h)-f(c)$ има са $f''(c)$ исти знак, било да је промена h положна било да је одречна. И онда, према томе да ли је $f''(c)\lesseqgtr 0$ јесте $f(c)\begin{matrix}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{matrix}$

У случају да је и $f''(c)=0$, а $f'''(c)\gtrless 0$ имамо

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(c)+R_3$$

и пошто знак од $f(c+h)-f(c)$ зависи од знака промене h (јер је h у непарноме степену: h^3), јасно је да $f(c)$ неможе бити ни максимум ни минимум.

Но, ако је, осим $f'(c)=0$ и $f''(c)=0$, још и $f'''(c)=0$, а тек $f''''(c)\lesseqgtr 0$, тако да је

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}f''''(c)+R_4,$$

дакле $f(c+h)-f(c)$ независно од знака промене h (јер се h јавља у парноме степену: h^4), онда закључујемо да је $f(c)\begin{matrix}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{matrix}$ према томе да ли је $f''''(c)\lesseqgtr 0$. Итд.

Сасвим уопште: $f(c)$ је максимум или минимум функције $f(x)$, ако је њена изводна најнижег ступња, која за $x=c$ није $=0$, парног реда и то одречна или положна. Ако је, пак, изводна најнижег ступња, која за $x=c$ није $=0$, непарног реда, онда $f(c)$ нити је максимум нити је минимум.

[1]) Види 3. Напомену у чл. 70.

Напомена. На случај да је функција, чији Max. или Min. тражимо, дата у скривеној форми

$$F(x,\ y) = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{dF}{dx}}{\dfrac{dF}{dy}},$$

а ми знамо да мора, како за Max. тако и за Min., да буде $\dfrac{dy}{dx} = 0$, постоји сада, као условна једначина једна од ових двеју

$$\frac{dF}{dx} = 0 \text{ или } \frac{dF}{dy} = \infty.$$

Помоћу једне од тих једначина и оне задате једначине налазимо вредности x-а за које функција y постаје Max. или Min. Знак друге изводне $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ показује да ли је функција y за добивене вредности x-а у максимуму или је у минимуму.

86. Примери. —

1. Пример.

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 11.$$

Из

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 2x - 15) = 0$$

добијамо за x ове две вредности

$$x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 5.$$

Пошто је

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-1)$$

за $x = -3$ одречно, а за $x = 5$ положно, закључујемо да је за $x = -3$, $y = 92$ највећа вредност функције, а за $x = 5$, $y = -164$ најмања вредност функције.

2. Пример.

$$y = x^4 - 2x^3 + 7.$$

Једначина

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2(2x-3) = 0$$

даје корене

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = \frac{3}{2}.$$

Корена вредност $x = \dfrac{3}{2}$ чини да је друга изводна

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x(x-1)$$

положна и према томе је за $x = \dfrac{3}{2}$ функција y у своме минимуму $= \dfrac{85}{16}$.

За она два једнака корена x_1 и x_2 друга изводна постаје $= 0$ (није, дакле, ни положна ни одречна). То значи да испитивање треба продужити. Али пошто је трећа (као непарна) изводна

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 12(12x-1)$$

за $x = 0$ различна од нуле, то видимо да за ову вредност x-а функција није ни Max. ни Min. Функција има, дакле, свега један минимум и то за $x = \dfrac{3}{2}$.

3. Пример.

Разложити број (или дуж) a на два дела тако да производ (површина правоугаоника) из та два дела буде Max.

Нека су x и z та два дела, дакле

$$x + z = a \quad \text{или} \quad z = a - x$$

и према томе функција за коју се тражи Max.

$$y = x(a-x) = ax - x^2.$$

Из

$$y' = a - 2x = 0$$

добијамо

$$x = \frac{a}{2},$$

а пошто је

$$y'' = -2 < 0$$

видимо да је функција у своме максимуму.

Број (или дуж) треба, дакле, преполовити. То значи, да од свију правоугаоника са једнаким збиром страна квадрат има највећу површину.

4. Пример.

Да се из две стране a и b конструише троугао са највећом површином. Као трећи (непознати) елеменат троугла узмимо захваћени угао x. Тада је функција, чији се максимум жели, ово

$$y = \frac{1}{2}ab\sin x.$$

Из

$$y' = \frac{1}{2}ab\cos x = 0$$

следује $\cos x = 0$, дакле

$$x = 90^\circ.$$

Тиме, што је друга изводна

$$y'' = -\frac{1}{2}ab\sin x$$

за $x = 90^\circ$ одречна, утврђујемо да ова вредност x-а одговара захтеву. То значи, да од свих троуглова, који се могу конструисати из две задате дужи, највећу површину има правоугли троугао, чије су катете једнаке тим дужима.

5. Пример.

У троугао ABC уписати највећи правоугаоник $EFGH$, чија се једна страна HE поклапа са једном страном задатога троугла, н. пр. са страном AC. Спустимо на страну $AC = b$ висину $BD = h$ и означимо правоугаоникове стране $GH = x$, $HE = z$. Функција, чији се максимум тражи, јесте

$$y = xz.$$

Из сразмере

$$AC : BD = GF : BJ$$

или

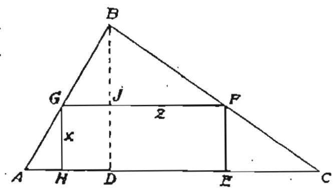
$$b : h = z : h - x$$

следује

$$z = \frac{b}{h}(h-x),$$

дакле

$$y = x\frac{b}{h}(h-x) = \frac{b}{h}(hx - x^2).$$



сл. 12.

Једначина $$y' = \frac{b}{h}(h - 2x) = 0$$

даје $$x = \frac{h}{2} \text{ и према томе } z = \frac{b}{2}.$$

Отуда што је $$y'' = -\frac{2b}{h} < 0$$

видимо да добивено решење одговара највећој вредности функције. То значи да је $y = xz$ за $x = \frac{h}{2}$, $z = \frac{b}{2}$ у своме Max. $= \frac{bh}{4}$, дакле $EFGH = \frac{1}{2} ABC$.

6. Пример.

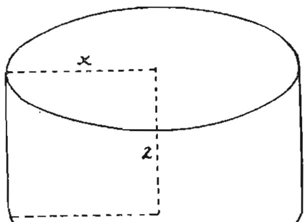
Да се начини на горњој страни отворен цилиндричан суд (дакле као чаша) задате запремине V са најмањом површином. (Са најмањом површином иде упоредно минимум утрошеног материјала.)

Нека је x полупречник, z висина ваљка. Површина основе је $= \pi x^2$, површина омотача $= 2\pi xz$ и према томе површина целога суда, а то је функција, чији се минимум хоће,

$$y = \pi x^2 + 2\pi xz.$$

Висину z можемо да изразимо полупречником x, јер је $V = \pi x^2 z$, дакле $z = \frac{V}{\pi x^2}$ и на тај начин

$$y = \pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$



Сл. 13.

Из $$y' = 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$$

добијамо $$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

а с овим $$z = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

дакле $$x = z.$$

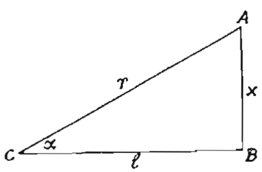
Да ово решење даје Min. показује друга изводна

$$y'' = 2\pi + \frac{4V}{x^3},$$

која је за $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ положна.

7. Пример.

На коју висину $AB = x$ над хоризонталом BC треба поставити светлећу тачку A како би у тачци C имали најинтензивније осветлење?



Сл. 14.

Из Оптике је познато да је интензивност осветлења сразмерна синусу угла α, под којим зраци упадају, а обрнуто сразмерна квадрату одстојања r.

Ако означимо за a интензивност светлеће тачке A, онда се питање своди на то да се одреди вредност x-а која ће учинити да функција

$$y = a\frac{\sin\alpha}{r^2}$$

достигне свој максимум. Из слике видимо да је

$$\sin\alpha = \frac{x}{r}, \qquad r = \sqrt{l^2 + x^2}$$

и онда је $$y = \frac{ax}{(l^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

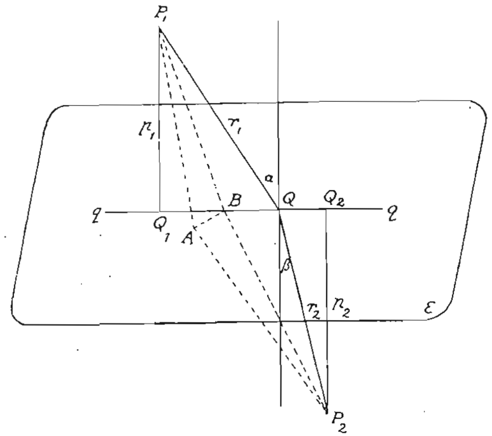
Из $$y' = a\frac{l^2 - 2x^2}{(l^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

налазимо $$x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Није потребно нарочито утврђивати да ово решење одговара максимуму, а не минимуму.

8. Пример.

Из тачке P_1 у извесној оптичкој средини (н. пр. у ваздуху) полази светлосни зрак и долази у тачку P_2, која је у другом неком медиуму (н. пр. у води). Ове оптичке средине раздвојене су равном ε. Означимо са c_1 брзину, којом се светлост простире у првој, са c_2 брзину, којом се она простире у другој средини. Пита се каквом закону мора следовати светлосни зрак па да би из тачке P_1 стигао у тачку P_2 за најкраће време.



Сл. 15.

Пре свега је по себи разумљиво да ће се светлосни зрак простирати по правој линији у једноме и у другоме медиуму. Путања ће, дакле, бити разломљена линија: састављена из двеју дужи. Тако је исто лако увидити да путања мора лежати у равни која пролази кроз тачке P_1 и P_2, а стоји управно на равни ε. Та је раван одређена нормалама P_1Q_1 и P_2Q_2. Јер, ако путања не би лежала у тој равни; ако би светлосни зрак продирао раван ε у тачци A (а не у једној тачци пресека q равни ε и према њој управној равни $P_1Q_1Q_2P_2$), т. ј. ако би путања светлости била $P_1A + AP_2$, онда би, пошто из A повучемо $AB \perp Q_1Q_2$, следовало из правоуглих троуглова P_1AB и P_2AB да је $P_1A > P_1B$, $AP_2 > BP_2$, па дакле и путања $P_1A + AP_2 >$ од путање $P_1B + BP_2$, која се налази у равни $P_1Q_1Q_2P_2$.

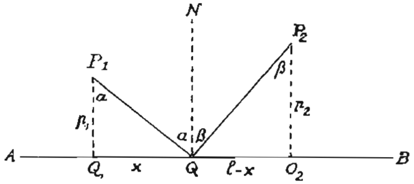
Обележимо: $P_1Q_1 = p_1$, $P_2Q_2 = p_2$, $P_1Q = r_1$, $P_2Q = r_2$, $Q_1Q = x$, $Q_1Q_2 = l$. Време y, које потребно светлосном зраку да из тачке P_1 стигне у тачку P_2, а то је функција, чији се минимум тражи, јесте

$$y = \frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_2} = \frac{\sqrt{p_1^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{p_2^2 + (l - x)^2}}{c_2}.$$

Из $$y' = \frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{p_1^2+x^2}} - \frac{1}{c_2}\frac{l-x}{\sqrt{p_2^2+(l-x)^2}} = 0$$
следује $$\frac{1}{c_1}\frac{x}{r_1} = \frac{1}{c_2}\frac{l-x}{r_2},$$
које, с обзиром на то што је $\frac{x}{r_1} = \sin Q P_1 Q_1 = \sin\alpha$; $\frac{l-x}{r_2} = \sin Q P_2 Q_2 = \sin\beta$, где је α угао упадања, а β угао преламања, може да се напише у форми познатог закона о преламању светлости
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

9. Пример.

Дата је права AB и две тачке P_1 и P_2 на истој страни те праве. Да се одреди тачка Q на правој AB да буде $P_1Q + P_2Q = \text{Min.}$ Из сл. 16. видимо да је функција, чији минимум тражимо, ово
$$y = \sqrt{p_1^2+x^2} + \sqrt{p_2^2+(l-x)^2}.$$
Из
$$y' = \frac{x}{\sqrt{p_1^2+x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{p_2^2+(l-x)^2}} = 0$$
следује
$$\frac{x}{\sqrt{p_1^2+x^2}} = \frac{l-x}{\sqrt{p_2^2+(l-x)^2}}$$

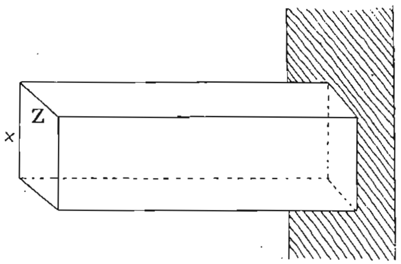


Сл. 16.

или $\sin\alpha = \sin\beta$, дакле $\alpha = \beta$, а то је познати закон о одбијању светлости: угао упадања = углу одбијања.

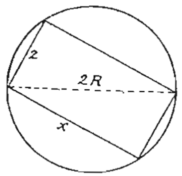
10. Пример.

Имамо једно цилиндрично стабло (дрво) са полупречником R. Из тога стабла да истешемо греду (облика паралелепипеда), која, утврђена једним крајем, даје највећи отпор теретима који вуче о другом крају.



Сл. 17.

Ми знамо из Механике да је чврстина према ломљењу сразмерна првоме степену хоризонталне димензије z пресека, а трећему степену вертикалне димензије x. Функција, чији максимум тражимо, јесте
$$y = x^3 z = x^3\sqrt{4R^2-x^2}.$$



Из једначине
$$y' = 3x^2\sqrt{4R^2-x^2} - \frac{x^4}{\sqrt{4R^2-x^2}} = 0$$
следује
$$3x^2(4R^2-x^2) = x^4,$$
одакле
$$x = R\sqrt{3}, \text{ а с тиме } z = R.$$

Да ово решење одговара максимуму, а не минимуму, по себи је јасно и није потребно нарочито утврђивати помоћу друге изводне.

4. Највеће и најмање вредности функција, које зависе од више прапромењљивих.

87. Опште одредбе. — За функцију $u = f(x, y, z, \ldots)$ кажемо да је у максимуму или у минимуму за извесне специалне вредности њених прапромењљивих, н. пр. за $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$, ако функција за вредности прапромењљивих, које се од оних $a, b, c, \ldots$ разликују за врло мале количине $h, k, l, \ldots$, добија увек мању или увек већу вредност од $f(a. b, c, \ldots)$. Код максимума је функциона вредност већа, код минимума мања од свију непосредно оближњих вредности.

Код максимума је $f(x+h, y+k, z+l, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) < 0$, а код минимума је $f(x+h, y+k, z+l, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) > 0$ за довољно мале промене $h, k, l, \ldots$ ма којег знака биле ове промене.

Узмимо за све прапромењљиве, изузев једне, н. пр. x, сталне вредности; ставимо $y = b$, $z = c, \ldots$ функција се тада мења једино променом x-а. Она ће, према горњему, постати Max. или Min. када x постане $= a$ и на основу теорије највећих и најмањих вредности функције једне прапромењљиве закључујемо да је и овде услов како за Max. тако и за Min. да мора (за $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$) да буде $\frac{\partial u}{\partial x}$ равно нули, бесконачно или прекидно. Аналогно закључујемо да (за $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$) мора да буде $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots$ равно нули, бесконачно или прекидно.

Ограничавајући ово наше проучавање на случај, где су парциалне изводне првога реда функције u непрекидне, утврђујемо резултат: вредности прапромењљивих $x, y, z, \ldots$, које чине да функција u постаје Max. или Min., треба тражити из условних једначина
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots$$

88. Метода. — Узмимо функцију
$$u = f(x, y),$$
која зависи од двеју прапромењљивих x y.

По Taylor-овој формули је функциона промена $\Delta u =$
$$f(x+h, y+k) - f(x, y) =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)} + R.$$

h и k можемо узети увек у таквој мери мале да прекидањем реда на десној страни са којим било чланом $\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)}$ апсолутна вредност тога члана постане већа од остатка R (в. Напомену на крају чл. 75.). Дакле, ако прекинемо ред са чланом $\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k$, онда тај члан опредељује знак промене Δu или разлике $f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)$, а да би тај знак од Δu био независан од знакова промена h и k (које мора да буде, ако је функција u у своме Max. или Min.) треба да је

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Тада је Δu или

$$f(x+h,\ y+k)-f(x.\ y)=\frac{1}{1,2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)}+R.$$

Знак промене Δu је сада (за довољно мало h и k) опредељен чланом

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}=\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}k^2\right).$$

Обележимо краће

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=B,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C,$$

подразумевајући вредности ових диференциалних количника за $x=a$, $y=b$. Знак функционе промене Δu зависи, дакле, од знака који има израз

$$\boxed{Ah^2+2Bhk+Ck^2.}$$

Ако је знак овога тринома независан од знакова количина h и k, онда је исти случај и са изразом

$$A(Ah^2+2Bhk+Ck^2)=(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2.$$

Овај израз не мења свој знак, ако је $AC-B^2\geqq 0$, јер је тада $A(Ah^2+2Bhk+Ck^2)>0$. То значи да су $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ и A истога знака. Пошто $AC-B^2$ може само тако да буде положно, ако су A и C истога знака, следује да количине $Ah^2+2Bhk+Ck^2$, A и C имају све три један исти знак. Ако су $A<0$ и $C<0$, онда је и $Ah^2+2Bhk+Ck^2$, па дакле и промена $\Delta u<0$. Напротив, ако су $A>0$ и $C>0$, тада је и $Ah^2+2Bhk+Ck^2>0$, па и $\Delta u>0$.

i e
ba
a for
$C > B^2$.

Према свему изводимо резултат: ако специалне вредности $x=a$ и $y=b$. које добијамо из једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

испуњавају услов да је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0,$$

онда дотичне вредности $x=a$ и $y=b$, према томе да ли су диференциални количници $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ једновремено одречни или положни, т. ј. према томе да ли је за $x=a$, $y=b$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0,$$

чине да функција $u=f(x,\ y)$ постаје Max. или Min.

Ако је и други члан у Taylor-овом реду, члан $\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}$ раван нули, онда је знак промене $\Delta u=\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(3)}+R_3$ зависан од члана

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(3)}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}k^3.$$

Но пошто мењање знака количина h и k мења и знак овога члана, па дакле и знак целе промене Δu, следује да диференциални количници трећег реда за $x=a$ и $y=b$ мора да буду идентично $=0$, па да би функција u за $x=a$, $y=b$ могла имати Max. или Min. и онда је

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)=\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(4)}+R_4, \text{ где}$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(4)}$ не сме да мења знак. Према томе да ли вредности $x=a$, $y=b$, добивене из једначина $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, за које је

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}=0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(3)}=0,$$

чине да је $\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(4)}\lesseqgtr 0$ добијамо за $x=a$ и $y=b$ Max. или Min. функције u.

У већини случајева можемо, према природи постављеног задатка, на ово питање да одговоримо, а да не улазимо у дискусију меродавног члана.

Аналогно се испитују највеће и најмање вредности функција, које зависе од три или више прапроменљивих. Изузев случајеве када су парцијалне изводне посматране функције прекидне, Taylor-ов ред даје за одређивање специјалних вредности $x = a,\ y = b,\ z = c, \ldots$ за које функција $f\ (x,\ y,\ z, \ldots)$ постаје Max. или Min., условне једначине

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots$$

Чине ли овако добивене вредности прапроменљивих задату функцију максимумом или минимумом, то се, обично, и без нарочите дискусије, може да позна по природи самога задатка.

89. Примери. —

1. *Пример.*

Да се одреде највеће и најмање вредности функције

$$u = 2\,x^2 + 3\,y^2 - xy - 7\,x + 5\,y + 9.$$

Из условних једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\,x - y - 7 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 6\,y + 5 = 0$$

налазимо

$$x = \frac{37}{23},\quad y = -\frac{13}{23}.$$

Отуда што је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -1,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6,$$

дакле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 23 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0,$$

и према томе $\Delta u > 0$ закључујемо да функција u за $x = \frac{37}{23},\ y = -\frac{13}{23}$ постаје минимум и то $= \frac{45}{23}$.

2. *Пример.*

Да се одреде x и y који ће учинити да функција

$$u = (a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 + \ldots$$

постане Min.

Из једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Sigma\,2\,(ax + by + c)\,a = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \Sigma\,2\,(ax + by + c)\,b = 0,$$

које можемо да напишемо

$$x\,\Sigma a^2 + y\,\Sigma ab + \Sigma ac = 0,$$
$$x\,\Sigma ab + y\,\Sigma b^2 + \Sigma bc = 0,$$

добијамо

$$x = \frac{\Sigma ab\,\Sigma bc - \Sigma b^2\,\Sigma ac}{\Sigma a^2\,\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2},\quad y = \frac{\Sigma ab\,\Sigma ac - \Sigma a^2\,\Sigma bc}{\Sigma a^2\,\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2}.$$

Да ово решење одговара минимуму, а не максимуму функције видимо из тога што је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\,\Sigma a^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2\,\Sigma ab,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,\Sigma b^2,$$

дакле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \Sigma a^2\,\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2 > 0,^{1)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0.$$

3. *Пример.*

Број (дуж) a раставити на три дела да производ из њих постане Max.

$$a = x + y + z.$$

Функција, за коју се тражи Max., јесте

$$u = xyz \quad \text{или} \quad u = xy\,(a - x - y).$$

Из условних једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\,(a - 2x - y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\,(a - 2y - x) = 0$$

добијамо решења

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,$$

$$x_2 = \frac{a}{3},\ y_2 = \frac{a}{3}.$$

Прво решење $x_1 = 0,\ y_1 = 0$ очевидно не одговара постављеноме задатку.

За друго решење $x_2 = \frac{a}{3},\ y_2 = \frac{a}{3}$ имамо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\,y = -\frac{2a}{3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = a - 2x - 2y = a - \frac{2a}{3} - \frac{2a}{3} = -\frac{a}{3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\,x = -\frac{2a}{3}.$$

Према томе је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Значи да $x = \frac{a}{3},\ y = \frac{a}{3},\ z = \frac{a}{3}$ чине да је

$$u = \frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3} = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \text{Max.}$$

90. Релативан максимум и минимум. — Задатак, да се за прапроменљиве нађу такве вредности које ће учинити да функција постане Max. или Min. са тиме да дотичне вредности прапроменљивих испуњују извесне услове (једначине), води нас *релативноме максимуму* и *рела-*

[1]) $\Sigma a^2\,\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots)^2$
$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_4 - a_4 b_3) + \ldots$
из чега се јасно види да је то > 0.

тивноме минимуму. Разуме се да број условних једначина мора да је мањи од броја променљивих количина, јер би иначе променљиве самим тим једначинама биле већ потпуно одређене.

На случај да нам је дата функција

$$u = f(x, y, z)$$

са условном једначином

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

ми бисмо, заменом z-а из друге једначине: $z = \varphi(x, y)$ у прву једначину, свели функцију на $u = f(x, y, \varphi(x, y))$, где она зависи само још од две прапроменљиве x и y и тиме задатак свели на случај, који смо посматрали у чл. 88.

Ако узмемо да су нам, осим функције

$$u = f(x, y, z)$$

дате две условне једначине

$$\Phi(x, y, z) = 0 \text{ и } \Psi(x, y, z) = 0,$$

из којих следује $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ и ово заменимо у задату једначину, онда добијамо функцију $u = f(x, \varphi(x), \psi(x))$, која зависи само од једне прапроменљиве и задатак је онда сведен на најпростији случај, који је проучен у чл. 85.

Због тешкоћа, које се, често, јављају приликом замена, о којима је горе била реч, изнећемо нарочиту методу за решење задатка да се одреди Max. или Min. функције

1) $$u = f(x, y, z)$$

под условом да x, y, z задовољавају једначине

2) $$\Phi(x, y, z) = 0 \text{ и } \Psi(x, y, z) = 0.$$

Пошто су (према овим последњим једначинама) y и z функције од x, то за Max. и Min. функције u постоји услов $\frac{du}{dx} = 0$ или

3) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Диференциалне количнике $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ добијамо кад диференциалимо једначине 2), дакле из

4) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

5) $$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Да бисмо из једначине 3) елиминовали $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ помножићемо једн. 3), 4) и 5) редом са 1, λ, μ и сабраћемо их, што даје

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mu\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \\ + \frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mu\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = 0.$$

Факторе λ и μ определићемо из

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mu\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mu\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \\ \text{услед чега је и}\quad &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решење задатка довело нас је једначинама 6) до којих бисмо дошли да смо узели да одредимо Max. и Min. за функцију $v = f + \lambda\Phi + \mu\Psi$ у којој су λ и μ константе, а x, y, z прапроменљиве.

Аналогно постављамо опште правило: да бисмо учинили да функција

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

која зависи од n променљивих $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, постане Max. или Min., кад између ових променљивих постоје m условних једначина

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_m(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$

помножићемо ове последње једначине константним факторима $k_1, k_2 \ldots k_m$, сабраћемо их са задатом функцијом и парциалне диференциалне количнике, узете по $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, добивенога израза

$$v = f + k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_m f_m$$

ставићемо $= 0$. Тако добијамо n једначина

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0, \ldots \frac{\partial v}{\partial x_n} = 0,$$

које у друштву с оних m условних једначина

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots f_m = 0$$

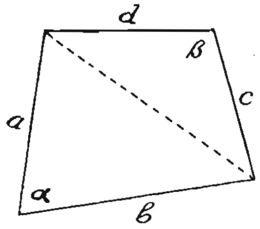
дају средство за определење m констаната $k_1, k_2, \ldots k_m$ и n непознатих $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

91. Примери.

1. Пример.

Из четири стране a, b, c, d да се конструише четвороугао са највећом површином.

Означимо са α угао који заклапају стране a и b, са β угао између страна c и d. Функција, чији се Max. тражи, јесте $\frac{1}{2} ab \sin\alpha + \frac{1}{2} cd \sin\beta$ или



Сл. 18.

простије

$$u = ab \sin\alpha + cd \sin\beta.$$

Између α и β постоји веза (в. сл. 18.)

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

или, ако означимо $\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2} = h$, условна једначина за α и β гласи

$$ab\cos\alpha - cd\cos\beta - h = 0.$$

Према овоме треба, дакле, да се максимумом учини овај израз

$$v = ab\sin\alpha + cd\sin\beta + k\,(ab\cos\alpha - cd\cos\beta - h).$$

Из једначина

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = ab\cos\alpha - k\,ab\sin\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = cd\cos\beta + k\,cd\sin\beta = 0$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{k} \quad tg\,\beta = -\frac{1}{k}, \text{ дакле } tg\,\alpha = -tg\,\beta,$$

$$\alpha + \beta = 180^0.$$

То значи да од сви четвороуглова са задатим странама највећу површину има кружни четвороугао. Да ово решење одговара Max., а не Min., види се из самог задатка.

2. Пример.

У круг са полупречником r да се упише полигон са n страна, а највећом површином.

Нека су $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ средишни углови супротни странама $a, b, c, \ldots$ Функција, чији се Max. тражи, јесте $\frac{r^2}{2}\sin\alpha + \frac{r^2}{2}\sin\beta + \frac{r^2}{2}\sin\gamma + \ldots$ или, ако изоставимо константан фактор $\frac{r^2}{2}$, простије

$$u = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \ldots$$

Између $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ постоји условна једначина

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots - 2\pi = 0.$$

Према томе имамо да учинимо максимумом овај израз

$$v = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \ldots + k\,(\alpha + \beta + \gamma + \ldots - 2\pi).$$

Из једначина

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \cos\alpha + k = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \cos\beta + k = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \gamma} = \cos\gamma + k = 0,$$

следује $\quad \ldots\ldots\ldots$

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots$$

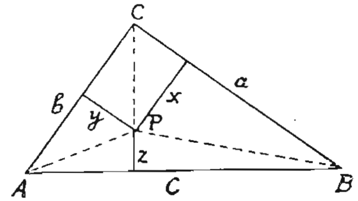
То значи да од свију уписаних полигона правилан полигон има највећу површину.

Да ово решење заиста одговара максимуму потврђује што је тотални диференцијал $d^2 v < 0$.

3. Пример.

У троуглу ABC определити тачку P за коју је производ њених одстојања од троуглових страна максимум, дакле

$$u = xyz = \text{Max}.$$



Сл. 19.

Из слике видимо да за нормале x, y, z постоји условна једначина

$$ax + by + cz - 2\triangle = 0,$$

где $\triangle$ означава површину троугла ABC. Имамо, дакле, да одредимо Max. функције

$$v = xyz + k\,(ax + by + cz - 2\triangle).$$

Из једначина

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yz + ka = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xz + kb = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = xy + kc = 0,$$

а с обзиром на условну једначину $ax + by + cz = 2\triangle$, налазимо

$$x = \frac{2\Delta}{3a},\quad y = \frac{2\Delta}{3b},\quad z = \frac{2\Delta}{3c}.$$

Из самог задатка видимо да добивено решење одговара Maximum-у.

5. Растављање рационално разломљених функција на просте разломке.

92. Теорема. — Пошто се рационално разломљене функције могу увек да сведу на чисто разломљене (в. чл. 9.), то ћемо овде искључиво ове последње узети у расматрање. Нека је $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ таква чисто разломљена рационална функција.

Теорема гласи: ако је a α-струки корен једначине $f(x) = 0$, дакле

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x), \tag{1}$$

где је $f_1(x)$ цео и рационалан полином који није дељив са $x - a$, онда се чисто разломљена функција $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ може да растави на два дела

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}, \tag{2}$$

где означава A једну константу, а $\varphi_1(x)$ извесан цео полином.

Доказ. Имамо идентичну једначину

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}.$$

Да би именитељ у другоме члану на десној страни садржао $x - a$ само у $\alpha - 1$ воме степену, потребно је да бројитељ тога члана буде дељив са $x - a$ или, дакле, да је a корен једначине $\varphi(x) - A f_1(x) = 0$, т. ј. да је

$$\varphi(a) - A f_1(a) = 0,$$

одакле

3) $$A = \frac{\varphi(x)}{f_1(x)}.$$ $A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}$

Да је оваква вредност константе A коначна и различна од нуле следује отуда што су $\varphi(a)$ и $f_1(a)$ различни од нуле. Можемо, дакле, да ставимо

4) $$\varphi(x) - A f_1(x) = (x - a)\,\varphi_1(x)$$

и онда је

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

93. Проширење горње теореме. — Узмимо да је

1) $$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda,$$

дакле $a, b, \dots l$ корени једначине $f(x) = 0$, $\alpha, \beta, \dots \lambda$ цели и положни бројеви, који показују колико се пута сваки корен јавља. Тада се чисто разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ може да разложи на следећи начин

2) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}. \end{aligned}\right.$$

Овде су $A, A_1, \dots A_{\alpha-1}, B, B_1, \dots B_{\beta-1}, \dots L, L_1, \dots L_{\lambda-1}$ одређене константе.

С обзиром што је

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x)$$

и на основу горње теореме можемо да ставимо

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\varphi_{\alpha-1}(x)}{(x-a) f_1(x)} = \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)},$$

које кад саберемо

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}. \qquad (3$$

Ставимо

$$f_1(x) = (x-b)^\beta f_2(x)$$

и поступимо са $\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$ на исти начин као и са $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, па ћемо добити

$$\frac{\varphi_\alpha(x)}{(x-b)^\beta f_2(x)} = \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)},$$

које, кад заменимо у формулу 3), даје

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)}. \end{aligned}$$

Овде су $B, B_1, \dots B_{\beta-1}$ одређене константе, а $\varphi_{\alpha+\beta}(x)$ једна цела и рационална функција. Продужујући овако с остатком $\frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)}$ долазимо најзад до формуле 2).

Напомена. Ако једначина $f(x) = 0$ има све само просте корене, дакле

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l) \qquad (4$$

формула 2) постаје тиме

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l}. \qquad (5$$

94. Метода разлагања за случај многоструких корена. — Узмимо да је a α-струки корен једначине $f(x) = 0$, дакле

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x) \qquad (1$$

Разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ раставља се

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}. \qquad (2$$

Одавде, кад помножимо лево и десно са $(x-a)^\alpha$,

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}} = \frac{\varphi(x)}{f_1(x)} = A + \frac{(x-a)\,\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

и ставимо $x = a$,

3) $$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}.$$

Према формули 4) у чл. 92. јесте

4) $$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{x-a} = \frac{\varphi(x) - \dfrac{\varphi(a)}{f_1(a)} f_1(x)}{x-a}.$$

Ми смо добили овим први прост разломак $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ на које се раставља $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Остале просте разломке добићемо на исти начин примењујући исту методу на други члан $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$ на десној страни једначине 2).

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{3x^4 - 6x^2 + 5x - 7}{x^7 - \frac{1}{2}x^6 - 14x^5 + \frac{37}{2}x^4 + 41x^3 - \frac{215}{2}x^2 + 84x - \frac{45}{2}}.$$

Овде је

$$\varphi(x) = 3x^4 - 6x^2 + 5x - 7$$

$$f(x) = x^7 - \frac{1}{2}x^6 - 14x^5 + \frac{37}{2}x^4 + 41x^3 - \frac{215}{2}x^2 + 84x - \frac{45}{2}$$

$$= (x-1)^4 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Ставимо

$$f(x) = (x-1)^4 f_1(x),$$

где је

$$f_1(x) = (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}.$$

Према формулама 2), 3) и 4) имамо

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A}{(x-1)^4} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-1)^3 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)},$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} = \frac{3 - 6 + 5 - 7}{(1+3)^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right)} = \frac{5}{24},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{x-a} = \frac{3x^4 - 6x^2 + 5x - 7 - \frac{5}{24}\left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)}{x-1}$$

$$= 3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16},$$

дакле

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16}}{(x-1)^3 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

По истој методи растављамо остатак

$$\frac{3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16}}{(x-1)^3 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-1)^2 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Овде је

$$A_1 = \frac{\varphi_1(a)}{f_1(a)} = \frac{3 + \frac{134}{48} - \frac{63}{16} + \frac{37}{16}}{(1+3)^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right)} = -\frac{25}{144},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\varphi_1(x) - A_1 f_1(x)}{x-a} = \frac{3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16} + \frac{25}{144}\left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459).$$

С овим постаје

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{\frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459)}{(x-1)^2 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Аналогно продужујемо

$$\frac{\frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459)}{(x-1)^2 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{\varphi_3(x)}{(x-1)(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)},$$

$$A_2 = \frac{\varphi_2(a)}{f_1(a)} = \frac{\frac{1}{288}(914 + 1893 + 459)}{(1+3)^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right)} = -\frac{1633}{3456},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\varphi_2(x) - A_2 f_1(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{\frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459) + \frac{1633}{3456}\left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{576}(3266x^2 + 36633x + 62469)$$

и тако добијамо

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{-\frac{1633}{3456}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{576}(3266x^2 + 36633x + 62469)}{(x-1)(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Најзад растављамо

$$\frac{\frac{1}{576}(3266x^2 + 36633x + 62469)}{(x-1)(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A_3}{x-1} + \frac{\varphi_4(x)}{(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Овде је

$$A_3 = \frac{\varphi_3(a)}{f_1(a)} = \frac{\frac{1}{576}(3266 + 36633 + 62469)}{(1+3)^2\left(1-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{3199}{432},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{\varphi_3(x) - A_3 f_1(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{\frac{1}{576}(3266\,x^2 + 36633\,x + 62469) + \frac{3199}{432}\left(x^3 + \frac{7}{2}\,x - 6\,x - \frac{45}{2}\right)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503)$$

и према томе

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{-\frac{1633}{3456}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{3199}{432}}{x-1} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503)}{(x+3)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)}.$$

Сада имамо да раставимо последњи члан на десној страни по другоме (двоструком) корену $b = -3$. Ставимо

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503)}{x^3 + \frac{7}{2}\,x^2 - 6\,x - \frac{45}{2}},$$

где је

$$\psi(x) = \frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503),$$

$$f_1(x) = x^3 + \frac{7}{2}\,x^2 - 6\,x - \frac{45}{2} = (x+3)^2 f_2(x),$$

$$f_2(x) = x - \frac{5}{2}.$$

Прво имамо

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{\psi_1(x)}{(x-b)^{\beta-1} f_2(x)} = \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{\psi_1(x)}{(x+3)\left(x-\frac{5}{2}\right)},$$

$$B = \frac{\psi(b)}{f_2(b)} = \frac{\frac{1}{1728}[12796\,.\,(-3)^2 + 67380\,.\,(-3) + 100503]}{-3-\frac{5}{2}} = -\frac{501}{352},$$

$$\psi_1(x) = \frac{\psi(x) - B f_2(x)}{x-b} = \frac{\frac{1}{1728}[12796\,x^2 + 67380\,x + 100503] + \frac{501}{352}\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x+3}$$

$$= \frac{1}{9504}(70378\,x + 172983),$$

дакле

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{-\frac{501}{352}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{1}{9504}(70378\,x + 172983)}{(x+3)\left(x-\frac{5}{2}\right)};$$

затим долази остатак

$$\frac{\frac{1}{9504}(70378\,x + 172983)}{(x+3)\left(x-\frac{5}{2}\right)} = \frac{B_1}{x+3} + \frac{\psi_2(x)}{x-\frac{5}{2}},$$

где је

$$B_1 = \frac{\psi_1(b)}{f_1(b)} = \frac{\frac{1}{9504}[70378\,.\,(-3) + 172983]}{-3-\frac{5}{2}} = \frac{1413}{1936},$$

$$\psi_2(x) = \frac{\psi_1(x) - B_1 f_1(x)}{x-b} = \frac{\frac{1}{9504}(70378\,x + 172983) - \frac{1413}{1936}\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x+3} = \frac{21808}{3267}$$

и на тај начин следује

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{-\frac{501}{352}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{1413}{1936}}{x+3} + \frac{\frac{21808}{3267}}{x-\frac{5}{2}},$$

а сатиме добијамо овај крајњи ресултат

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{-\frac{1633}{3456}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{3199}{432}}{x-1} + \frac{-\frac{501}{352}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{1413}{1936}}{x+3} + \frac{\frac{21808}{3267}}{x-\frac{5}{2}}.$$

95. Метода разлагања за случај простих корена. — Ако једначина $f(x) = 0$ има само просте корене, онда се чисто разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ разлаже према формули 5) у чл. 93., а разлагање може да се модификује на следећи начин.

Помножимо леву и десну страну једначине 5) у чл. 93. са $x - a$, па ћемо добити

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{f(x)}{x-a}} = A + (x-a)\left[\frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}\right],$$

које за $x = a$ даје

$$\frac{\varphi(a)}{\left[\frac{f(x)}{x-a}\right]_{x=a}} = A.$$

Пошто је $f(x)$ дељиво са $x - a$ можемо да ставимо

$$f(x) = (x-a)\,f_1(x),$$

које, кад диференциалимо

$$f'(x) = (x-a)\,f'_1(x) + f_1(x)$$

и ставимо $x = a$, даје

$$f'(a) = f_1(a), \text{ а то је } \left[\frac{f(x)}{x-a}\right]_{x=a}.$$

Дакле

$$1)\left\{\begin{array}{ll} & A=\frac{\varphi(a)}{f'(a)},\\ \text{Исто тако} & B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)},\\ & \cdots\cdots\\ & L=\frac{\varphi(l)}{f'(l)}.\end{array}\right.$$

Формула 5) у чл. 93. може да се напише овако

$$2)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(a)}{f'(a)(x-a)}+\frac{\varphi(b)}{f'(b)(x-b)}+\ldots+\frac{\varphi(l)}{f'(l)(x-l)}.$$

1. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{15x^2-18x+28}{6x^4+11x^3-43x^2+34x-8}.$$

Овде је

$$\varphi(x)=15x^2-18x+28,$$

$$f(x)=6x^4+11x^3-43x^2+34x-8=6(x+4)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1),$$

$$a=-4,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{2}{3},\ d=1,$$

$$f'(x)=24x^3+33x^2-86x+34,$$

$$\varphi(a)=340,\quad f'(a)=-630,\quad A=\frac{340}{-630}=-\frac{34}{63},$$

$$\varphi(b)=\frac{91}{4},\quad f'(b)=\frac{9}{4},\quad B=\frac{\frac{91}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{91}{9},$$

$$\varphi(c)=\frac{68}{3},\quad f'(c)=-\frac{14}{3},\quad C=\frac{\frac{68}{3}}{-\frac{14}{3}}=-\frac{34}{7},$$

$$\varphi(d)=25,\quad f'(d)=5,\quad D=\frac{25}{5}=5.$$

Према томе је

$$\frac{15x^2-18x+28}{6x^4+11x^3-43x^2+34x-8}=\frac{-\frac{34}{63}}{x+4}+\frac{\frac{91}{9}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{34}{7}}{x-\frac{2}{3}}+\frac{5}{x-1}.$$

2. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{1}{p-qx^2},$$

дакле

$$\varphi(x)=1,$$

$$f(x)=p-qx^2=-q\left(x+\sqrt{\frac{p}{q}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

$$a=-\sqrt{\frac{p}{q}},\quad b=+\sqrt{\frac{p}{q}},$$

$$f'(x)=-2qx,$$

$$\varphi(a)=1,\ f'(a)=2q\sqrt{\frac{p}{q}}=2\sqrt{pq},\qquad A=\frac{1}{2\sqrt{pq}},$$

$$\varphi(b)=1,\ f'(b)=-2q\sqrt{\frac{p}{q}}=-2\sqrt{pq},\ B=-\frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

и према томе

$$\frac{1}{p-qx^2}=\frac{1}{2\sqrt{pq}\left(x+\sqrt{\frac{p}{q}}\right)}+\frac{1}{-2\sqrt{pq}\left(x-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)}.$$

96. Други начин разлагања за случај многоструких корена. — Кад у формули 3) чл. 93.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$$

заменимо x са $a+h$, дакле $x-a$ са h и помножимо обе стране једначине са h^α, а узмемо на ум да је $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=f_1(x)$, добијамо

$$\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}=A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}+\frac{h^\alpha\varphi_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)}.\qquad(1$$

На десној страни имамо полином $A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}$, у коме се налазе бројитељи $A, A_1, A_2,\ldots A_{\alpha-1}$ оних простих разломака који се односе на α струки корен a. Ако, дакле, обичним дељењем или помоћу Maclaurin-овог реда развијемо и леву страну $\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}$ по растућим степенима количине h, онда, упоређујући члан по члан лево и десно, налазимо константе $A, A_1,\ldots A_{\alpha-1}$.

Овај начин растављања могли бисмо, независно једно од друго, да применимо на сваки многоструки корен једначине $f(x)=0$. Простије је, пак, да ову методу употребимо на остатак $\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$ горње формуле. Тиме добијамо просте разломке, који се односе на други корен b и опет један остатак на који бисмо применули исту методу у погледу трећег корена c итд.

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{x+2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}.$$

Овде је

$$\varphi(x)=x+2$$

$$f(x)=x^4-5x^3+9x^2-7x+2=(x-1)^3(x-2),$$

$$f_1(x)=x-2.$$

Задата разломљена функција разлаже се на ове просте разломке

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Према горњој формули 1), пошто у њој ставимо $a+h=1+h, \alpha-1=2$, јесте

$$\frac{\varphi(1+h)}{f_1(1+h)}=\frac{3+h}{-1+h}=A+A_1h+A_2h^2+R,$$

а када обичним дељењем развијемо

$$\frac{3+h}{-1+h}=-3-4h-4h^2+R$$

и упоредимо поједине чланове ова два реда следује

$$A=-3,\quad A_1=-4,\quad A_2=-4.$$

Константу B, која се односи на прост корен $b=2$, добијамо по обрасцу прошлога члана 95.

$$B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)}=\left[\frac{x+2}{4x^3-15x^2+18x-7}\right]_{x=2}=4.$$

С овим налазимо

$$\frac{x+2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}=\frac{-3}{(x-1)^3}+\frac{-4}{(x-1)^2}+\frac{-4}{x-1}+\frac{4}{x-2}.$$

97. Продужење прошлог члана. — Метода, са којом смо се упознали у прошломе члану, има то преимућство што нам показује алгебарски израз бројитеља простих разломака на које растављамо разломљену функцију.

Да бисмо одредили константе $A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}$, које се односе на α-струки корен a једначине $f(x)=0$, треба да се $\dfrac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}$ развије по растућим степенима количине h. Пошто се то може да изврши само на један начин (било простим дељењем, било употребом Maclaurin-ове формуле), то ћемо, ако ставимо

$$\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}=\psi(x),$$

добити применом Maclaurin-овог обрасца

$$\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}=\psi(a+h)=\psi(a)+h\psi'(a)+h^2\frac{\psi''(a)}{1.2}+\ldots$$
$$\ldots h^{\alpha-1}\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)}+h^\alpha R_1$$

означивши са $h^\alpha R_1$ остатак реда. Упоређењем овога с оним под 1) у чл. 96. следује

$$A=\psi(a),\ A_1=\psi'(a),\ A_2=\frac{\psi''(a)}{1.2},\ \ldots A_{\alpha-1}=\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)}.$$

На основу овога изводимо овај општи образац. Ако ради скраћеног бележења ставимо

$$\psi(x)=(x-a)^\alpha\frac{\varphi(x)}{f(x)},\quad \chi(x)=(x-b)^\beta\frac{\varphi(x)}{f(x)},\ \ldots\ \pi(x)=(x-l)^\lambda\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

чисто разломљена функција

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}$$

раставља се овако на просте разломке:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\psi(a)}{(x-a)^\alpha}+\frac{\psi'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{\psi''(a)}{1.2(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-a)}$$
$$+\frac{\chi(b)}{(x-b)^\beta}+\frac{\chi'(b)}{(x-b)^{\beta-1}}+\frac{\chi''(b)}{1.2(x-b)^{\beta-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\chi^{(\beta-1)}(b)}{1.2\ldots(\beta-1)(x-b)}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\pi(l)}{(x-l)^\lambda}+\frac{\pi'(l)}{(x-l)^{\lambda-1}}+\frac{\pi''(l)}{1.2(x-l)^{\lambda-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\pi^{(\lambda-1)}(l)}{1.2\ldots(\lambda-1)(x-l)}.$$

98. Случај имагинарних корена. — На случај да једначина $f(x)=0$ има имагинарних корена имаћемо да учинимо малу модификацију при растварању разломљене функције $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ на просте разломке. Пре свега знамо да се имагинарни корени јављају увек у спреговима. То значи: ако је $\alpha+i\beta$ корен једначине $f(x)=0$, онда је и $\alpha-i\beta$ њен корен. Полином $f(x)$ је, дакле, дељив са $(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)$, дакле дељив једним триномом x^2+px+q.

Узмимо да су имагинарни корени $\alpha+i\beta$ и $\alpha-i\beta$, многоструки н. пр. n-струки, тако да је

$$f(x)=(x^2+px+q)^n f_1(x). \tag{1}$$

Разломљена функција раствара се на

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}, \tag{2}$$

где су P и Q стварне константе, а $\varphi_1(x)$ један цео полином.

Доказ. На основу идентичне једначине

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi(x)-(Px+Q)f_1(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}$$

у стању смо да определимо P и Q тако да бројитељ другога члана на десној страни, а то је $\varphi(x)-(Px+Q)f_1(x)$ буде дељив са x^2+px+q, дакле да постане $=0$ кад у њему заменимо x коренима једначине $x^2+px+q=0$, т. ј. кад ставимо $x=\alpha+i\beta$ и $x=\alpha-i\beta$.

Ставимо

$$\varphi(\alpha \pm i\beta) + [P(\alpha \pm i\beta) + Q] f_1(\alpha \pm i\beta) = 0,$$

одакле

3) $$P(\alpha \pm i\beta) + Q = \frac{\varphi(\alpha \pm i\beta)}{f_1(\alpha \pm i\beta)} = M \pm i N,$$

где су M и N стварни и одређени бројеви пошто $f_1(x)$ није дељиво са $x^2 + px + q$. Последња једначина раставра се на ове две

$$P\alpha + Q = M \quad \text{и} \quad P\beta = N,$$

из којих

4) $$P = \frac{N}{\beta}, \quad Q = \frac{M\beta - N\alpha}{\beta}.$$

Пошто смо овако одредили константе P и Q можемо да ставимо

5) $$\frac{\varphi(x) - (Px + Q) f_1(x)}{x^2 + px + q} = \varphi_1(x),$$

где је $\varphi_1(x)$ стваран и цео полином и долазимо тако до једначине

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^n f_1(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} f_1(x)} \quad q.\ e.\ d.$$

Примењујући ову формулу на члан $\dfrac{\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} f_1(x)}$ и продужујући тако даље долазимо до обрасца

6) $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{P_{n-1} x + Q_{n-1}}{x^2 + px + q} + \frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)},$$

где су P, Q, P_1, Q_1, ... P_{n-1}, Q_{n-1} стварне константе, а $\varphi_n(x)$ један стваран и цео полином.

99. Општи образац за раставарање на просте разломке. — Комбинујући формулу 6) у прошлом члану са формулом 2) у чл. 93. добијамо општи образац.

У случају да је

1) $$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda (x^2 + px + q)^n \dots (x^2 + rx + s)^m$$

рационална и чисто разломљена функција $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ разлаже се на просте разломке

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\
& + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\
& + \dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} \\
& + \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots \\
& \qquad \dots + \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{x^2+px+q} \\
& + \dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^m} + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{m-1}} + \dots \\
& \qquad \dots + \frac{R_{m-1}x+S_{m-1}}{x^2+rx+s}.
\end{aligned}\right\} \quad (2$$

Овде су A, A_1, ... $A_{\alpha-1}$, B, B_1, ... $B_{\beta-1}$, ... L, L_1, ... $L_{\lambda-1}$, P, Q, P_1, Q_1, ... P_{n-1}, Q_{n-1}, ... R, S, R_1, S_1, ... R_{m-1}, S_{m-1} стварне константе.

Да бисмо чисто разломљену функцију $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ разложили на просте разломке према општем обрасцу 2) определићемо прво разломке, који се односе на стварне корене (чинитеље првога степена) на начин, који смо показали у чл. 94.—97. Разломке, који се односе на имагинарне корене (т. ј. на чинитеље другога степена), добићемо методом, која је изложена у чл. 98.

Напомена. У случају да једначина $f(x) = 0$ има простих имагинарних корена у изразу за $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ јављају се оваква два разломка

$$\frac{\varphi(\alpha + i\beta)}{f'(\alpha + i\beta)} \frac{1}{x - \alpha - i\beta} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(\alpha - i\beta)}{f'(\alpha - i\beta)} \frac{1}{x - \alpha + i\beta}$$

(в. једн. 2) у чл. 95.), чији се збир доводи на форму

$$\frac{A + iB}{x - \alpha - i\beta} + \frac{A - iB}{x - \alpha + i\beta} = \frac{Px + Q}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

где су P и Q стварне константе: $P = 2A$, $Q = -2(A\alpha + B\beta)$.

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15},$$

дакле

$$\varphi(x) = 2x^2 - 7x + 5,$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = [x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)](x - 3),$$

$$a = \alpha + i\beta = 1 + 2i, \quad b = \alpha - i\beta = 1 - 2i, \quad c = 3,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 11,$$

$$\frac{\varphi(\alpha+i\beta)}{f'(\alpha+i\beta)} = \frac{4+3i}{4+4i} = \frac{7}{8} - \frac{1}{8}i,$$

$$\frac{\varphi(\alpha-i\beta)}{f'(\alpha-i\beta)} = \frac{4-3i}{4-4i} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}i,$$

$$\frac{\varphi(c)}{f'(c)} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\varphi(\alpha+i\beta)}{f'(\alpha+i\beta)}\,\frac{1}{x-\alpha-i\beta} + \frac{\varphi(\alpha-i\beta)}{f'(\alpha-i\beta)}\,\frac{1}{x-\alpha+i\beta} = \frac{\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}}{(x-1)^2+4}$$

и према томе

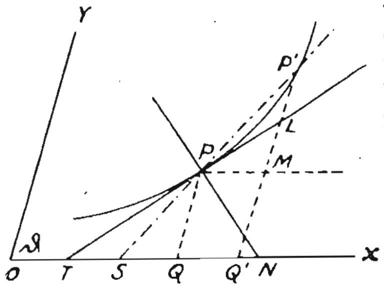
$$\frac{2x^2-7x+5}{x^3-5x^2+11x-15} = \frac{\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}}{(x-1)^2+4} + \frac{\frac{1}{4}}{x-3}.$$

IV.

Примена Диференциалног Рачуна у Геометрији.[1])

1. Тангенте.

100. Једначина тангенте.[2]) — Под *тангентом* или *дирком* једне криве линије разумемо крајни положај сечице коме ова тежи при бесконачном приближавању њених пресечних тачака.



Сл. 20.

Ако означимо са x, y координате тачке P на задатој линији, са $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ координате друге једне тачке P', дакле са $\Delta x = QQ'$, $\Delta y = MP'$, координатне промене и означимо са m' угловни сачинитељ сечице PP', а с погледом на то што је угловни сачинитељ = размери синуса углова које права чини са координатним осама добићемо, на основу синусне теореме за $\Delta PP'M$, $m' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и према томе угловни сачинитељ тангенте $m = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $m = \frac{dy}{dx}$.

Угловни сачинитељ тангенте изражен је, дакле, диференциалним количником $\frac{dy}{dx}$ или првом изводном y' функције, која представља линију на коју замишљамо дирку.

За правоугле координате је $m = tg\,\alpha$ разумевајући под α угао који дирка линије заклапа са x-осом.

[1]) Докази образаца, који су узети из Аналитичне Геометрије, као и детаљно проучавање кривих линија, које су овде наведене као примери, налази се у моме предмету Аналитична Геометрија у равни.

[2]) Садржину овога члана даје у главноме чл. 36.

Угловни сачинитељ дирке у извесној задатој тачци x_1, y_1 јесте $m = \frac{dy_1}{dx_1}$, ако означимо са $\frac{dy_1}{dx_1}$ вредност, коју добија диференциални количник, кад заменимо у њему текуће координате x, y координатама x_1, y_1 *додирне тачке.*

Према томе да ли је једначина криве линије дата у форми открвеној $y = f(x)$ или скривеној $F(x, y) = 0$ имамо

$$m = \frac{dy_1}{dx_1} = f'(x_1) \text{ односно } m = \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dy_1}},$$

а једначина тангенте у тачци x_1, y_1 гласи

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \text{ односно } (x - x_1)\frac{dF}{dx_1} + (y - y_1)\frac{dF}{dy_1} = 0.$$

Овде су $\frac{dF}{dx_1}$ и $\frac{dF}{dy_1}$ вредности делимичних изводних функције $F(x, y)$ по x и по y, кад заменимо текуће координате x, y координатама x_1, y_1 додирне тачке.

101. Једначина нормале. — *Нормала* то је управна на тангенти у додирној тачци. Према резултатима Аналитичне Геометрије њен угловни сачинитељ је $m_n = -\frac{1 + m\cos\vartheta}{m + \cos\vartheta}$, означивши са m угловни сачинитељ дирке, а са ϑ координатни угао. Према томе је

$$m_n = -\frac{dx_1 + dy_1 \cos\vartheta}{dy_1 + dx_1\cos\vartheta}$$

или, ако је једначина линије у скривеној форми

$$m_n = \frac{\frac{dF}{dy_1} - \frac{dF}{dx_1}\cos\vartheta}{\frac{dF}{dx_1} - \frac{dF}{dy_1}\cos\vartheta}.$$

За правоугле координате ($\vartheta = 90^0$) имамо простије

$$m_n = -\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{dF}{dx_1}}.$$

Једначина нормале је

$$y - y_1 = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad x - x_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(y - y_1)$$

односно

$$(x - x_1)\frac{dF}{dy_1} - (y - y_1)\frac{dF}{dx_1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x - x_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{dF}{dy_1}}.$$

102. Дужина тангенте, нормале, подтангенте и поднормале. — Предпоставићемо правоугле координате. У томе је случају

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha, \text{ дакле } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}, \text{[1]}$$

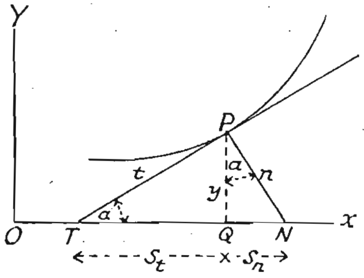
где је α угао који дирка линије у тачци $P(x, y)$ чини са x-осом.

Из правоуглих троуглова PTQ и PNQ читамо да је дужина

$$\text{тангенте } PT = t = \frac{y}{\sin\alpha}, \qquad \text{нормале } PN = n = \frac{y}{\cos\alpha}$$

$$\text{подтангенте } TQ = s_t = y \cot g\,\alpha, \qquad \text{поднормале } QN = s_n = y\,tg\,\alpha,$$

које може да се напише:



Сл. 21.

$$t = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$n = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$s_t = y\frac{dx}{dy},$$

$$s_n = y\frac{dy}{dx}.$$

103. Задатак. — Да се из тачке X, Y повуку тангенте на линију.

Задатак ће бити решен кад нађемо координате x_1, y_1 додирних тачака. Њих ћемо добити када узмемо на ум да оне мора да задовоље једначину задате линије, а тако исто и једначину тангенте, у којој, на основу тога што дирка пролази кроз тачку X, Y, треба заменути текуће координате координатама X, Y задате тачке. Координате x_1, y_1 добићемо, дакле, из ове две једначине

$$y_1 = f(x_1) \text{ и } Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(X - x_1)$$

односно из

$$F(x_1, y_1) = 0 \qquad \text{и} \qquad (X - x_1)\frac{dF}{dx_1} + (Y - y_1)\frac{dF}{dy_1} = 0.$$

1. *Примедба.* Једначина тангенте је у однос на координате додирне тачке за јединицу нижега степена од једначине криве линије и ако предпоставимо ову последњу k-тога степена, дакле једначину тангенте $k-1$-вога степена, следује да горњи задатак има уопште $k(k-1)$ решење.

[1] На основу познатих образаца

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot g^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Највећи број тангената, које се из једне задате тачке могу да повуку на какву криву линију одређује *класу* те линије. Ми смо овде показали да су линије k-тога степена уопште $k(k-1)$ класе. Права линија, као линија 1-вога степена, јесте линија 0-те класе. Линије другога степена ($k = 2$) јесу 2. $(2-1) =$ 2-ге класе, линије трећега степена 3. $(3-1) = 6$-те класе итд.

2. *Примедба.* Ако у једначини $Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(X - x_1)$ односно у једначини $(X - x_1)\frac{dF}{dx_1} + (Y - y_1)\frac{dF}{dy_1} = 0$ замислимо X, Y као текуће координате, а x_1, y_1 као координате додирних тачака, онда је то једначина геометриског места за додирне тачке свију тангената, које се могу да повуку из задате тачке. Ми смо већ приметили да је ова једначина $k-1$-вога степена. За $k = 2$, т. ј. код линија другога степена она је линеарна и представља полару тачке X, Y. Тако исто и код линија k-тога степена, зовемо линију, коју представља она једначина $k-1$-вога степена, *поларом* тачке X, Y у однос на задату линију k-тога степена.

104. Задатак. — Из тачке X, Y да се повуче нормала на задату линију.

Нормала је опредељена кад је позната тачка у којој она сече линију. Координате x_1, y_1 те тачке добијамо из једначине задате линије, пошто заменимо x, y са x_1, y_1, и једначине нормале, у којој место текућих координата x, y ваља узети координате X, Y тачке из које повлачимо нормалу. За израчунавање координата x_1, y_1 имамо, дакле, ове две једначине

$$F(x_1, y_1) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{X - x_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{Y - y_1}{\frac{dF}{dy_1}}.$$

Примедба. Отуда, што су обе једначине: једначина линије и једначина нормале истога степена, н. пр. k-тога степена, закључујемо да овај задатак има уопште k^2 решења.

105. Задатак. — У правцу m да се повуку тангенте на задату линију.

Координате x_1, y_1 додирних тачака налазимо из

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{и} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = m$$

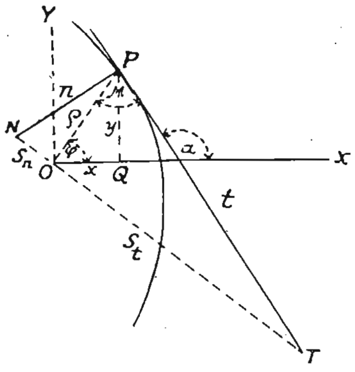
односно из

$$F(x_1, y_1) = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dy_1}} = m.$$

Примедба. Ако је једначина линије k-тога степена, друга је једначина $k-1$-вога степена и задатак има, као и онај у чл. 103., уопште $k(k-1)$ решење.

106. Обрасци за поларне координате. — Узмимо да је једначина криве линије дата у поларним координатама.

Правац тангенте у тачци $P\,(\varrho, \varphi)$ утврдићемо углом, који дирка чини са потегом тачке P. Нека је $\sphericalangle OPT = \mu$. Из слике видимо да је $\mu = \alpha - \varphi$, дакле $tg\,\mu = \frac{tg\,\alpha - tg\,\varphi}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\varphi}$. Ако узмемо управну у тачци O према x-оси за y-осу правоугле координатне системе, онда је



Сл. 22.

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x}, \quad tg\,\alpha = \frac{dy}{dx}$$

и према томе

$$tg\,\mu = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy},$$

које се, опет, на основу тога што је

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi,$$
$$dx = \cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi,$$

може да напише

$$tg\,\mu = \frac{\varrho\cos\varphi\,(\sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi) - \varrho\sin\varphi\,(\cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi)}{\varrho\cos\varphi\,(\cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi) + \varrho\sin\varphi\,(\sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi)}$$

или простије

$$tg\,\mu = \frac{\varrho\, d\varphi}{d\varrho}.$$

Ако кроз пол O повучемо праву NT управно на потегу OP, онда је (из правоуглих троуглова PTO и PNO)

поларна тангента $PT = t = \frac{\varrho}{\cos\mu}$, *поларна нормала* $PN = n = \frac{\varrho}{\sin\mu}$,

поларна подтангента $OT = s_t = \varrho\, tg\,\mu$, *поларна поднормала* $ON = s_n = \varrho\, cotg\,\mu$,

или на основу горње вредности за $tg\,\mu$

$$t = \varrho\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho\, d\varphi}{d\varrho}\right)^2}, \quad n = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}, \quad s_t = \frac{\varrho^2\, d\varphi}{d\varrho}, \quad s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Примедба. Треба имати у виду, да су овде, као и у обрасцима у чл. 102., за t, n, s_t и s_n узете апсолутне вредности.

107. Примери. —

1. Пример. Средишна једначина *круга:*

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Према томе једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \quad \text{или простије} \quad x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}.$$

За конструкцију служи закључак, да нормала пролази кроз средиште, а тангента је управна на пречнику у додирној тачци.

Даље налазимо:

$$t = y\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}\,r, \qquad n = y\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = r,$$
$$s_t = y \cdot \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}, \qquad s_n = y \cdot \frac{x}{y} = x.$$

2. Пример. Средишна једначина *елипсе:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \quad \text{или краће} \quad \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Најзад

$$t = y\sqrt{1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}} = \frac{a y}{b x}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}, \quad n = y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2};$$
$$s_t = \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{a^2 - x^2}{x}, \qquad s_n = \frac{b^2 x}{a^2},$$

где је

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

3. Пример. Средишна једначина *хиперболе:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Одавде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

и на основу тога једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \quad \text{или краће} \quad \frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Даље имамо:

$$t = y\sqrt{1+\frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}} = \frac{a y}{b x}\sqrt{\varepsilon^2 x^2 - a^2},\qquad n = y\sqrt{1+\frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\varepsilon^2 x^2 - a^2},$$

$$s_t = y\,\frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{x^2 - a^2}{x},\qquad s_n = \frac{b^2 x}{a^2}.$$

Овде је

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$

4. *Пример.* Темена једначина *параболе:*

$$y^2 = 2px.$$

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \text{ или простије } y y_1 = p(x + x_1).$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Најзад налазимо:

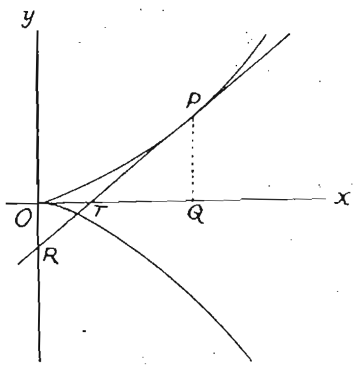
$$t = y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}} = y\sqrt{1+\frac{2x}{p}},\quad n = y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{p^2+y^2} = \sqrt{p(p+2x)},$$

$$s_t = y\,\frac{y}{p} = 2x,\qquad s_n = y\,\frac{p}{y} = p.$$

Ово последње може да се употреби на конструкцију дирке и нормале, јер је подтангента равна два пута апсциси додирне тачке, а поднормала константно равна параметру.

5. *Пример. Најлова парабола:*

$$y^2 = Ax^3.$$



Сл. 23.

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3A}{2}\,\frac{x^2}{y} = \frac{3}{2}\,\frac{y}{x}.$$

Једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = \frac{3}{2}\,\frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{x}{\frac{x_1}{3}} + \frac{y}{\frac{-y_1}{2}} = 1.$$

Помоћу одсечака $\frac{x_1}{3}$ и $\frac{-y_1}{2}$ лако је конструисати дирку. Види сл. 23., где је за тангенту у тачци $P(x_1, y_1)$ узето

$$OT = \frac{OQ}{3},\quad OR = -\frac{PQ}{2}.$$

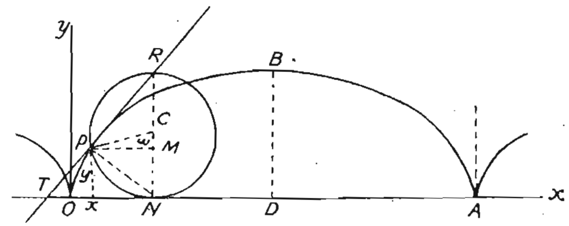
6. *Пример. Проста циклоида:*

$$x = a(\omega - \sin\omega),$$
$$y = a(1 - \cos\omega).$$

Из $dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega$, $dy = a\sin\omega\,d\omega$ следује

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega} = \frac{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}}{2\sin^2\frac{\omega}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right),$$

дакле $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)$ или $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, ако, као и до сада, са α означимо угао, који дирка чини са x-осом. На томе оснивамо следећу



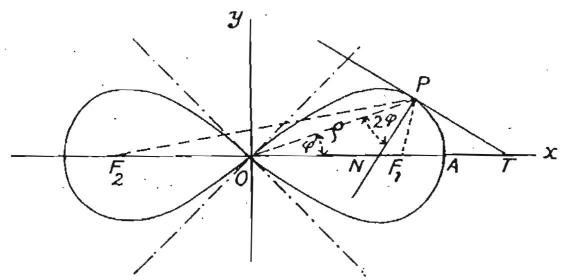
Сл. 24.

конструкцију тангенте. Продужимо NC до пресека R и спојимо P са R, па добијамо дирку у тачци P. Ово се потврђује тиме што је $\sphericalangle PRN = \frac{1}{2}\omega$ (периферијски угао $= \frac{1}{2}$ средишног угла), а $\sphericalangle RTN = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, дакле $= \alpha$ и услед тога права RT тангента циклоиде у тачци P, а PN нормала.

Примедба. Ово последње, да нормала циклоиде пролази кроз додирну тачку круга и линије дуж које се он котрља, важи сасвим опште за све циклоиде. Тај став може да послужи да на врло прост начин конструишемо нормалу и тангенту на циклоиду у којој било тачци.

7. *Пример. Лемниската:*

$$\varrho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$



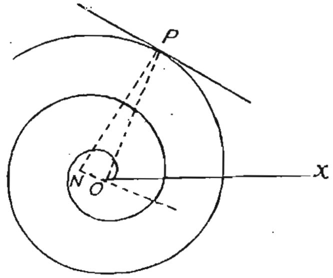
Сл. 25.

Отуда што је

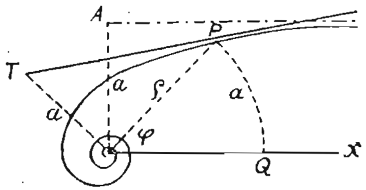
$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{2a^2\sin 2\varphi}$$

налазимо
$$tg\,\mu = \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho} = -\frac{\varrho^2}{2a^2 \sin 2\varphi}$$
$$= -\cot g\, 2\varphi = tg\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi\right),$$
$$\mu = \frac{\pi}{2} + 2\varphi,$$
одакле закључујемо да нормала PN чини угао 2φ са потегом у тачци P, резултат који можемо да употребимо за конструкцију нормале и тангенте.

8. Пример. Архимедова спирала:
$$\varrho = a\,\varphi.$$
Овде је поларна поднормала
$$s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi} = a,$$
дакле константна и конструкција дирке је, према томе, врло проста. Види сл. 26.



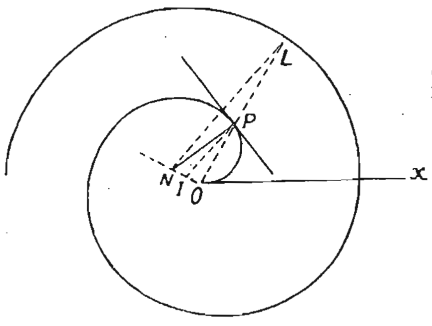
Сл. 26.



Сл. 27.

9. Пример. Хиперболична спирала:
$$\varrho\,\varphi = a.$$
Конструкцију тангенте оснивамо на томе што је поларна подтангента константна:
$$s_t = \frac{\varrho^2\, d\varphi}{d\varrho} = a.$$
Види сл. 27.

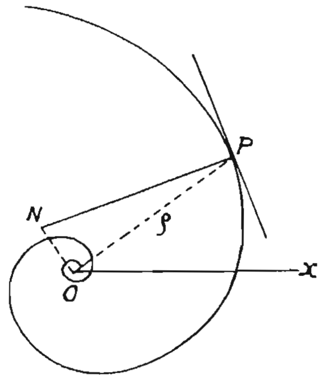
10. Пример. Параболична спирала:
$$\varrho^2 = 2\,p\,\varphi.$$



Сл. 28.

За конструкцију тангенте може да се употреби поларна поднормала
$$s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{p}{\varrho}$$
и то на овај начин: да бисмо повукли дирку у тачци P направићемо $OL = p$. На управној према OP у полу одредићемо $OJ = 1$. Затим ћемо повући $LN \,//\, PJ$. Тада је PN нормала, а управна на њу у тачци P дирка спирале у задатој тачци.
Из сличности троуглова OLN и OPJ следује $OL : ON = OP : OJ$ или $p : ON = \varrho : 1$, одакле $ON = \frac{p}{\varrho}$ а то је s_n.

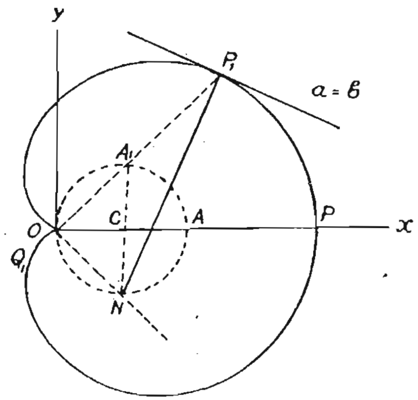
11. Пример. Логаритамска спирала:
$$\varrho = a^{\varphi}.$$
Овде је
$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho\, ln\, a},$$
дакле
$$tg\,\mu = \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{1}{ln\, a}$$
константно, па и угао μ константан. Ова спирала има то значајно својство, да сече све потеге под истим углом. Због тога својства ова се линија зове још *Loxodromica plana*. Она је стереографска пројекција на екватор од локсодроме на лопти, т. j. линије, која сече све меридијане под истим углом. Познато је, да се по тој линији управљају бродови на мору.



Сл. 29.

Тангенту можемо да конструишемо помоћу поларне подтангенте
$$s_t = \frac{\varrho^2\, d\varphi}{d\varrho} = \frac{\varrho}{ln\, a}$$
или помоћу поларне поднормале
$$s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi} = \varrho\, ln\, a.$$
У случају да је $a = e$ имамо простије $s_t = s_n = \varrho$.

12. Пример. Конхоиде: то су линије, које добијамо, кад све потеге једне задате линије продужимо или скратимо за извесну сталну количину c. За ма који поларни угао φ постоји дакле између потеге ϱ_1 задате линије и потеге ϱ њене конхоиде једначина $\varrho = \varrho_1 \pm c$. Одавде следује
$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{d\varrho_1}{d\varphi},$$
а то значи, да су поларне поднормале за један исти угао φ једнаке за све конхоиде са заједничком основицом. Из овога закључујемо, да се, ако нам је позната конструкција нормале или тангенте једне линије, врло лако може конструисати и нормала односно тангента њене конхоиде.



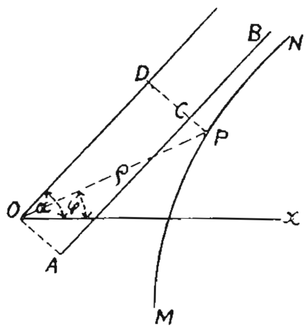
Сл. 30.

Тако н. пр. код Паскалове линије, која такође није ништа до конхоида са кружном основом, налазимо тангенту у тачци P_1 (в. сл. 30.), кад повучемо у тачци A_1 нормалу круга, дакле спојимо A_1 са средиштем C и определимо поларну нормалу ON. Пошто је ово у исто време и поднормала конхоиде за тачку P_1, то следује, да је $P_1 N$ нормала, а управна на њу у тачци P_1 тангента Паскалове линије у тој тачци.

2. Асимптоте.

108. Асимптоте у паралелној системи. — Под *асимптотом* једне криве линије разумемо такву праву, која линију у бесконачној даљини додирује.

Права AB је асимптота линије MN, ако одстојање PC између праве и линије опада са растењем удаљења тачке P од почетка координата, тако, да је најзад $lim\ PC = 0$ за $x = \infty$, или $y = \infty$, или за $x = \infty$ и $y = \infty$.



Сл. 31.

Узмимо, да је $y = m\,x + b$ једначина асимптоте AB, x_1 и y_1 координате тачке P, дакле одстојање те тачке од асимптоте

$$PC = \frac{y_1 - m\,x_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

На основу горе реченога мора да је

$$lim\,\frac{y_1 - m\,x_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}} = 0$$

или у претпоставци, да је m коначно (да није $m = \infty$, т. ј. права AB није // са y-осом[1]) $lim\,(y_1 - m x_1 - b) = 0$, одакле $lim\,(y_1 - m\,x_1) = b$. На основу овога можемо опет да ставимо $y_1 - m\,x_1 - b = \varepsilon$ или $\frac{y_1}{x_1} = m + \frac{b + \varepsilon}{x_1}$, где је ε таква количина која ишчезава растењем x_1 и y_1 у бесконачност. Из последњег следује $lim\,\frac{y_1}{x_1} = m$, но пошто је овај количник на левој страни за $x_1 = \infty$ и $y_1 = \infty$ неодређен $= \frac{\infty}{\infty}$, то је

$$lim\,\frac{y_1}{x_1} = \frac{\dfrac{d\,(y_1)}{d\,x_1}}{\dfrac{d\,(x_1)}{d\,x_1}} = lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1},$$

дакле угловни сачинитељ асимптоте $m = lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}$ и према томе одсечак

$$b = lim\left(y_1 - x_1\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right).$$

Једначина дирке у тачци x_1, y_1 гласи

$$y - y_1 = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad y = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}\,x + y_1 - \frac{d\,y_1}{d\,x_1}\,x_1.$$

[1]) У случају, да је $m = \infty$, т. ј. асимптота // са y-осом, горње излагање престаје важити. Међутим сва се измена своди на то, што у овоме случају треба решити једначину тангенте, место по ординати y, по апсциси x, а иначе поступити као и горе. Случај да је асимптота линије // са y-осом карактерисан је тиме што је за извесну вредност x-а ордината $y = \infty$. Исто тако, кад је асимптота // са x-осом, онда је за извесну вредност y-а апсциса $x = \infty$.

За бесконачно удаљену тачку додира, т. ј. за $x_1 = \infty$ претвара се једначина тангенте у ову

$$y = x\,lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1} + lim\left(y_1 - x_1\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right),$$

а то је једначина асимптоте $y = m\,x + b$ у претпоставци, дакле, да

$$lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1} \text{ и } lim\left(y_1 - x_1\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right)$$

теже (при бесконачном растењу од x_1 и y_1) извесним одређеним вредностима m и b.

Одавде изводимо следећу методу за опредељавање асимптота кривих линија.

У једначини тангенте $y - y_1 = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}(x - x_1)$ треба, на основу једначине задате линије $y = f(x)$, ставити за y_1 његову вредност $y_1 = f(x_1)$ и написати дакле једначину дирке: $y - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$

или $$y = x\,f'(x_1) + f\,(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

Ако претпоставимо затим, да је $x_1 = \infty$ и нађемо, да се при томе $f'(x_1)$ и $f(x_1) - x_1 f'(x_1)$ приближавају извесним одређеним вредностима, н. пр.

$$\lim_{x_1 = \infty} f'(x_1) = m, \quad \lim_{x_1 = \infty}\,[f(x_1) - x_1 f'(x_1)] = b$$

добићемо једначину асимптоте:

$$y = x \lim_{x_1 = \infty} f'(x_1) + \lim_{x_1 = \infty}[f\,(x_1) - x_1 f'(x_1)] \quad \text{или} \quad y = m\,x + b.$$

109. Асимптоте у поларној системи. — Узмимо поларне координате. Нека је права AB асимптота линије MN (в. сл. 31). У колико се тачка P буде више удаљавала од пола O, у толико ће потега $\varrho = OP$ бивати, дакле све већа, и све више тежити извесноме правцу OD, па дакле и поларни угао φ све више приближавати се извесној одређеној вредности α. Кад се тачка P буде удалила у бесконачност, потега $\varrho = \infty$ добиће положај $OD \,//\, AC$, а поларни угао вредност $\varphi = \alpha$. То значи, ако линија има асимптоту и ако је за извесан поларни угао $\varphi = \alpha$ потега $\varrho = \infty$, асимптота мора бити у правцу α. Из правоуглог троугла OPD читамо $DP = \varrho\,sin\,(\alpha - \varphi)$. Одстојање асимптоте од почетка координате јесте дакле $OA = lim\,DP = lim\,[\varrho\,sin\,(\alpha - \varphi)]$. Производ на десној страни ове једначине јавља се у неодређеноме виду $\infty \,.\, 0$. По познатој методи за изналежење правих вредности неодређених израза имамо

$$OA = \lim_{\varrho=\infty}[\varrho \sin(\alpha-\varphi)] = \lim_{\varrho=\infty}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\frac{1}{\varrho}}$$

$$= \lim_{\varrho=\infty}\frac{\frac{d}{d\varphi}[\sin(\alpha-\varphi)]}{\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\varrho}\right)} = \lim_{\varrho=\infty}\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\frac{d\varrho}{\varrho^2 d\varphi}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\varphi=\alpha}\cos(\alpha-\varphi)}{\lim\limits_{\varphi=\alpha}\frac{d\varrho}{\varrho^2 d\varphi}} = \frac{1}{\lim\limits_{\varrho=\infty}\frac{d\varrho}{\varrho^2 d\varphi}} = \lim_{\varrho=\infty}\frac{\varrho^2 d\varphi}{d\varrho}.$$

С погледом на то, да ова последња количина на десној страни иза знака lim није ништа до поларна подтангента асимптоте, можемо казати: ако подтангента линије [или производ $\varrho \sin(\alpha-\varphi)$] тежи извесној одређеној и коначној вредности OA, кад ставимо $\varphi=\alpha$, за који угао је $\varrho=\infty$, онда задата линија има асимптоту и то у правцу α и одстојању OA од пола.

110. Примери. —

1. Пример. Хипербола:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Овде је $y_1 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}$, $\frac{dy_1}{dx_1}$ или $f'(x_1) = \pm\frac{b\,x_1}{a\sqrt{x_1^2-a^2}}$

и према томе угловни сачинитељ асимптоте (в. чл. 108)

$$m = \pm\frac{b}{a}\lim_{x_1=\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}} = \pm\frac{b}{a}\lim_{x_1=\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x_1^2}}} = \pm\frac{b}{a}.$$

За угловни сачинитељ добијамо, дакле, две вредности

$$m=+\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad m=-\frac{b}{a}.$$

Одсечак, који асимптота чини на y-оси, налазимо из $f(x_1)-x_1f'(x_1)$, кад ставимо $x_1=\infty$. У нашем примеру је

$$f(x_1)-x_1f'(x_1) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2} - x_1\frac{\pm b\,x_1}{a\sqrt{x_1^2-a^2}} =$$

$$= \pm\frac{b}{a}\left[\sqrt{x_1^2-a^2}-\frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2-a^2}}\right] = \mp\frac{ab}{\sqrt{x_1^2-a^2}}$$

и према томе одсечак на y-оси $= \mp ab\lim\limits_{x_1=\infty}\frac{1}{\sqrt{x_1^2-a^2}} = 0.$

Асимптоте (има их две услед двојаке вредности за m) пролазе, дакле, кроз почетак координата. Њихове су једначине (в. чл. 108.)

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

2. Пример. Декартов лист:

$$x^3+y^3-axy=0$$

или у поларним координатама ($x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$)

$$\varrho=\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi},$$

одакле

$$\frac{d\varrho}{d\varphi}=a\frac{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+3\sin^2\varphi\cos^2\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}$$

а на основу тога

$$\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho}=\frac{a\sin^2\varphi\cos^3\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)(\cos^2\varphi-\sin^3\varphi)+3\sin^2\varphi\cos^2\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}.$$

Да бисмо определили асимптоту треба (на основу чл. 109.) узети $\lim\limits_{\varrho=\infty}\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho}$. Но пре тога ваља, опет наћи за коју вредност α поларног угла φ постаје $\varrho=\infty$. За ово нам служи једначина задате линије. Из ње видимо, да ϱ може само тако постати ∞, кад је именитељ $\cos^3\varphi+\sin^3\varphi=0$, дакле $\cos\varphi=-\sin\varphi$, а то је за $\varphi=90^0+45^0$ у коме је случају $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Правац асимптоте је дакле одређен углом

$$\alpha=90^0+45^0.$$

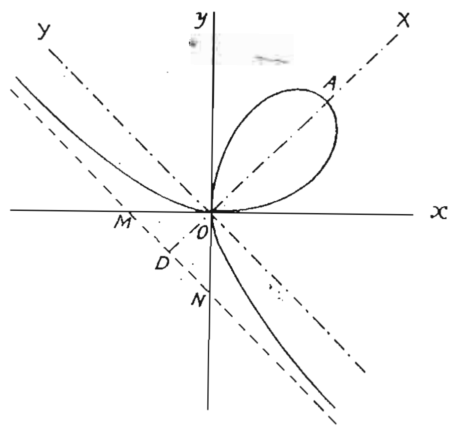
Одстојање OA асимптоте од пола налазимо (помоћу једн. у чл. 109.)

$$\lim_{\varrho=\infty}\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho}=\lim\frac{a\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+3\sin^2\varphi\cos^2\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}$$

(за $\sin\varphi=-\cos\varphi$) или

$$\lim_{\varrho=\infty}\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho}=\frac{a}{3}\lim_{\varrho=135^0}\frac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi}=-\frac{a}{3\sqrt{2}}.$$

Пошто смо нашли одстојање асимптоте од пола и њен правац можемо је лако конструисати. На основу сл. 32, где је



Сл. 32.

$$OD=\frac{-a}{3\sqrt{2}},$$

$$\sphericalangle xOD=90^0+45^0$$

добијамо координатне одсечке

$$OM=ON=\frac{OD}{\cos 45^0}=-\frac{a}{3}.$$

Према томе је једначина асимптоте у правоуглој системи

$$\frac{x}{-\frac{a}{3}}+\frac{y}{-\frac{a}{3}}$$

или

$$x+y+\frac{a}{3}=0.$$

3. Пример. Строфоиди:

$$x^3 + xy(y + 2x\cos\vartheta) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Преведимо једначину у поларне координате са полом у координатном почетку и осом у правцу x-осе. Ставимо дакле

$$x = \varrho\frac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}, \qquad y = \varrho\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$

па ћемо добити (пошто скратимо целу једначину са $\frac{\varrho^2}{\sin^2\vartheta}$ и решимо је по ϱ)

$$\varrho = \frac{a\sin\vartheta\,[\sin^2(\vartheta-\varphi) - \sin^2\varphi]}{\sin(\vartheta-\varphi)\,[\sin^2(\vartheta-\varphi) + \sin^2\varphi + 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta]}.$$

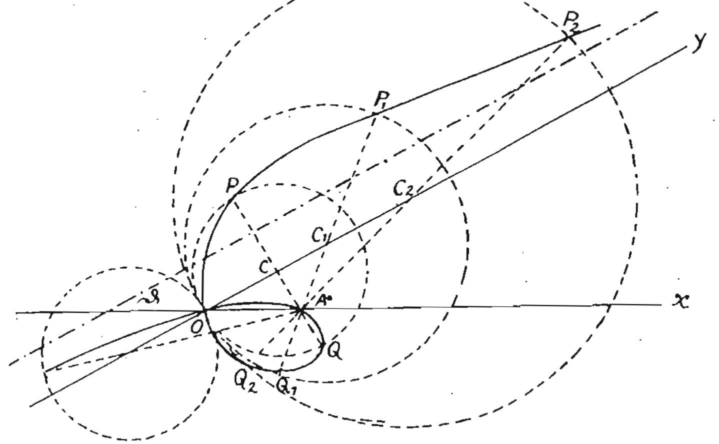
Да бисмо определили правац асимптоте треба да нађемо вредност угла φ, за коју је $\varrho = \infty$. Ово последње је случај, кад је именитељ у изразу за ϱ раван нули. Тај именитељ представља се у виду производа и, као такав, он је раван нули, кад је један од чинитеља раван нули. Потога ϱ је бесконачно велика или кад је $\sin(\vartheta - \varphi) = 0$ или ако је $\sin^2(\vartheta-\varphi) + \sin^2\varphi + 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta = 0$. Први услов даје за φ вредност

$$\varphi = \vartheta.$$

Други услов не води ничему стварному, јер из

$$\begin{aligned}
0 &= \sin^2(\vartheta-\varphi) + \sin^2\varphi + 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta \\
&= \sin(\vartheta-\varphi)\,[\sin(\vartheta-\varphi) + 2\sin\varphi\cos\vartheta] + \sin^2\varphi \\
&= (\sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi)(\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi) + \sin^2\varphi \\
&= \sin^2\vartheta\cos^2\varphi - \cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \\
&= \sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta = \sin^2\vartheta
\end{aligned}$$

следује, да би координатни угао ϑ морао бити $= 0$.



Сл. 33.

Једини случај, у коме је $\varrho = \infty$, то је дакле за $\varphi = \vartheta$. Пошто смо нашли правац асимптоте добићемо њено одстојање од пола, кад узмемо

$$\begin{aligned}
\frac{d\varrho}{d\varphi} = a\sin\vartheta\,\{&\sin(\vartheta-\varphi)\,[\sin^2(\vartheta-\varphi) + \sin^2\varphi \\
&+ 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta]_2\,[-\sin(\vartheta-\varphi)\cos(\vartheta-\varphi) \\
&- \sin\varphi\cos\varphi] - [\sin^2(\vartheta-\varphi) - \sin^2\varphi]\,[-3\sin^2(\vartheta-\varphi)\cos(\vartheta-\varphi) \\
&+ 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\varphi - \cos(\vartheta-\varphi)\sin^2\varphi \\
&+ 2\sin^2(\vartheta-\varphi)\cos\varphi\cos\vartheta - 4\sin(\vartheta-\varphi)\cos(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta]\} \\
&: \sin^2(\vartheta-\varphi)\,[\sin^2(\vartheta-\varphi) + \sin^2\varphi + 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta]^2,
\end{aligned}$$

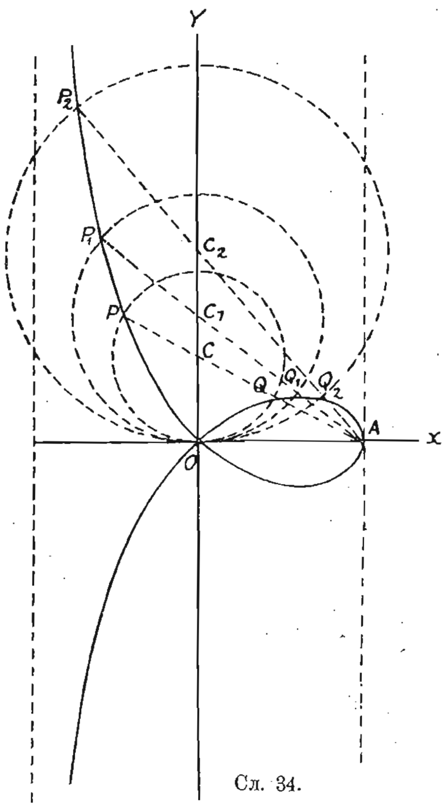
дакле

$$\begin{aligned}
&\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho} = a\sin\vartheta\,[\sin^2(\vartheta-\varphi) - \sin^2\varphi]^2 : \\
&\{-2\sin(\vartheta-\varphi)\,[\sin^2(\vartheta-\varphi) + \sin^2\varphi + 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta] \\
&\times[\sin(\vartheta-\varphi)\cos(\vartheta-\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi] - [\sin^2(\vartheta-\varphi) - \sin^2\varphi] \\
&\times[-3\sin^2(\vartheta-\varphi)\cos(\vartheta-\varphi) + 2\sin(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\varphi \\
&+ 2\sin^2(\vartheta-\varphi)\cos\varphi\cos\vartheta - 4\sin(\vartheta-\varphi)\cos(\vartheta-\varphi)\sin\varphi\cos\vartheta - \\
&\qquad\qquad \cos(\vartheta-\varphi)\sin^2\varphi]\}
\end{aligned}$$

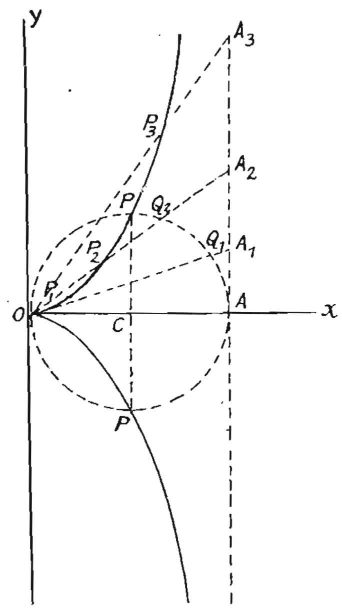
и пређимо граници, т. ј. ставимо $\varphi = \vartheta$ (за коју је вредност $\varrho = \infty$)

$$\lim_{\varrho=\infty}\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho} = -a\sin\vartheta.$$

За $\vartheta = 90^0$, т. ј. код праве строфоиде је $\varphi = 90^0$, $\lim\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho} = a$. Асимптота је, дакле, код косе и код праве строфоиде паралелна са y-осом. Види слике 33 и 34.



Сл. 34.



Сл. 35.

4. *Пример. Цисоида:*

$$\varrho = 2\,r\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Као што видимо потега је $\varrho = \infty$ за $\varphi = 90^0$. Правац асимптоте је дакле // са y-осом

$$\alpha = 90^0.$$

Даље налазимо из једначине цисоиде

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = 2\,r\,\frac{2\sin\varphi\cos^2\varphi + \sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{2\,r\sin\varphi}{\cos^2\varphi}(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{2\,r\sin\varphi\,(1+\cos^2\varphi)}{\cos^2\varphi},$$

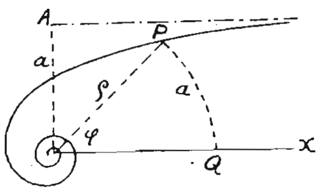
дакле $\varrho^2\dfrac{d\varphi}{d\varrho} = \dfrac{2\,r\sin^3\varphi}{1+\cos^2\varphi}$ и према томе одстојање OA асимптоте од пола односно почетка координата

$$\lim_{\varrho=\infty}\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho} = \lim_{\varphi=90^0}\frac{2\,r\sin^3\varphi}{1+\cos^2\varphi} = 2\,r.$$

Види сл. 35.

5. *Пример. Хиперболична спирала:*

$$\varrho\,\varphi = a.$$



Сл. 36.

Из тога што је $\varrho = \dfrac{a}{\varphi}$ видимо, да је $\varrho = \infty$ за $\varphi = 0$. Правац асимптоте је дакле // са поларном осом

$$\alpha = 0.$$

Одстојање OA од пола добијамо из поларне подтангенте $s_t = \varrho^2\dfrac{d\varphi}{d\varrho}$, која је у овоме случају константна и то $= a$ (в. пример 9. чл. 107.) Види сл. 36.

6. *Пример. Логаритамска линија:*

$$y = b^x.$$

Овде је $\dfrac{d\,y_1}{d\,x_1}$ или $f'(x_1) = b^{x_1}\,l\,b,\quad f(x_1) - x_1 f'(x_1) = b^{x_1}(1 - x_1\,l\,b)$.

Кад бисмо, по упутству чл. 108., ставили овде $x_1 = \infty$ нашли би, како за угловни сачинитељ, тако и за одсечак, који линија чини на y-оси, бесконачно велику вредност. Оваква асимптота не постоји. Али, ако ставимо $x_1 = -\infty$ добићемо

$$\lim_{x_1=-\infty} f'(x_1) = l\,b\,.\lim_{x_1=-\infty} b^{x_1} = 0,$$

$$\lim_{x=-\infty}[f(x_1) - x_1 f'(x_1)] = \lim_{x=-\infty} b^{x_1}(1 - x_1\,l\,b) = 0.$$

На основу првога резултата закључујемо, да је асимптота // са x-осом, а на основу другога, да пролази кроз почетак координата. То значи, да је сама x-оса асимптота ове линије.

3. Анвелопе.

111. Једначина анвелопе. — Нека је

$$F(x,\ y,\ a) = 0$$

општа једначина за целу једну врсту линија. Под a разумемо произвољну константу, која опредељује ближе поједине линије у задатој групи линија. Једној задатој вредности од a одговара дакле једна извесна линија те групе и обрнуто: разним вредностима количине (параметра) a одговарају разне линије. Тако н. пр. параметрима a и $a + \Delta a$ одговарају линије

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } F(x,\ y,\ a + \Delta a) = 0.$$

Координате њихове пресечне тачке P задовољавају обе једначине у исто време, па и сваку другу једначину, која путем сабирања, одузимања, множења или деления из њих произилази. Координате пресечне тачке P задовољиће, дакле, и ове две једначине

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } \frac{F(x,\ y,\ a + \Delta a) - F(x,\ y,\ a)}{\Delta a} = 0.$$

Ако предпоставимо, да је Δa бесконачно мало, т. ј. ако предпоставимо, да су линије, којима припадају параметарне вредности a и $a + \Delta a$, бесконачно приближне једна другој, координате тачке пресека ових задовољиће једначине

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } \lim_{\Delta a = 0}\frac{F(x,\ y,\ a + \Delta a) - F(x,\ y,\ a)}{\Delta a} = 0$$

или простије

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } \frac{dF(x,\ y,\ a)}{da} = 0. \qquad \text{(I}$$

Геометриско место тачака, у којима се секу две и две бесконачно приближне линије извесне групе $F(x,\ y,\ a) = 0$, зове се *анвелопа* (Umhüllungskurve, enveloppe) тих линија (које се опет у однос на ову зову die Eingehüllten, enveloppées).

112. Продужење. — Једначину анвелопе једнога низа линија $F(x,\ y,\ a) = 0$ налазимо, кад елиминујемо из горњих једначина I. параметар a. На тај начин добијамо једначину, која важи за све вредности од a, т. ј. једначину, која важи за тачке пресека свију поступних линија у задатој групи.

Није тешко доказати, да анвелопа једнога низа линија додирује све те линије или да анвелопа и поједине линије, које она обухвата, имају у заједничким тачкама и заједничке тангенте.

Замислимо другу једн. I. решену по a и да следује н. пр. $a = \varphi(x, y)$. Ако ставимо по томе ту вредност у прву једначину т. ј. у општу једначину задатих линија добићемо $F[x,\ y,\ \varphi(x,\ y)] = 0$ као једначину њихове анвелопе.

Узмимо из задате групе једну извесну линију, којој одговара параметар a_1. Онда је у заједничкој тачци те линије и анвелопе и за ову последњу $\varphi(x, y) = a_1$. Једначина $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$, из које налазимо угловни сачинитељ дирке, једна је иста, како за линију са параметром a_1, тако и за анвелопу. То значи, да линија и анвелопа имају у заједничкој тачци једну исту тангенту.

113. Други случај. — У случају, да у општој једначини једнога низа линија улазе две произвољне константе a и b, н. пр.

$$F(x, y, a, b) = 0$$

и да између тих параметара постоји веза

$$\Phi(a, b) = 0$$

другу једначину под I. треба заменити са $\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0$

или пошто је [из $\Phi(a, b) = 0$] $\frac{db}{da} = -\frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{d\Phi}{db}}$ овом $\frac{dF}{da} - \frac{dF}{db}\frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{d\Phi}{db}} = 0$,

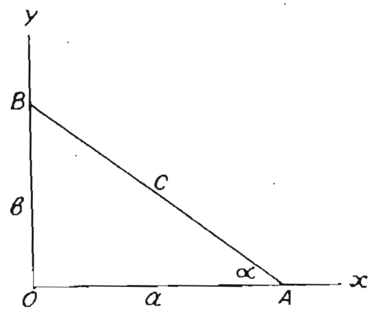
које опет можемо написати $\frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{dF}{da}} = \frac{\frac{d\Phi}{db}}{\frac{dF}{db}}$.

Једначину анвелопе добићемо, кад елиминујемо параметре a и b из једначина

II) $$F(x, y, a, b) = 0, \quad \Phi(a, b) = 0 \text{ и } \frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{dF}{da}} = \frac{\frac{d\Phi}{db}}{\frac{dF}{db}}.$$

114. Примери.

1. *Пример.* Једна права константне дужине $AB = c$ креће се њеним крајњим тачкама дуж координатних оса једне правоугле системе. Да се определи анвелопа за све положаје, које та покретна права заузима.



Сл. 37.

Као општу једначину праве AB, за ма који њен положај, можемо узети

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

или пошто је

$$a = c \cdot \cos\alpha, \quad b = c \cdot \sin\alpha$$

у виду $\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = c.$

Према овоме можемо овај задатак да решимо на два начина.

Први начин. Узмимо једначину праве у виду

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = c. \qquad \text{(I}$$

Параметар, који опредељује поједине положаје покретне праве то је угао α. Једначину анвелопе добићемо, кад елиминујемо угао α из опште једначине I. линија, чију анвелопу тражимо и једначине $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, а то је

$$\frac{x \sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \text{ или } x^{\frac{1}{3}} \sin\alpha = y^{\frac{1}{3}}\cos\alpha. \qquad \text{(II}$$

Из ове последње једн. II налазимо $x^{\frac{2}{3}}\sin^2\alpha = y^{\frac{2}{3}}(1 - \sin^2\alpha)$, одакле

$$\sin^2\alpha = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}, \quad \cos^2\alpha = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}},$$

које, кад ставимо у једн. I., даје једначину анвелопе

$$\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Други начин. Нека је

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{(III}$$

општа једначина покретне праве AB. Између параметара a и b постоји веза

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad \text{(IV}$$

Једначину анвелопе налазимо, кад додамо овим двема једначинама још и трећу (в. једн. II у чл. 113.)

$$\frac{2a}{-\frac{x}{a^2}} = \frac{2b}{-\frac{y}{b^2}} \text{ или } \frac{a^3}{x} = \frac{b^3}{y}, \qquad \text{(V}$$

коју добијамо на основу тога, што је овде

$$\frac{d\Phi}{da} = 2a, \quad \frac{d\Phi}{db} = 2b, \quad \frac{dF}{da} = -\frac{x}{a^2}, \quad \frac{dF}{db} = -\frac{y}{b^2}.$$

Из III следује $b = \frac{ay}{a - x}$, а из V опет $b = a\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, које једно са другим упоређено даје

$$a = x^{\frac{1}{3}}\,(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}), \quad b = y^{\frac{1}{3}}\,(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}).$$

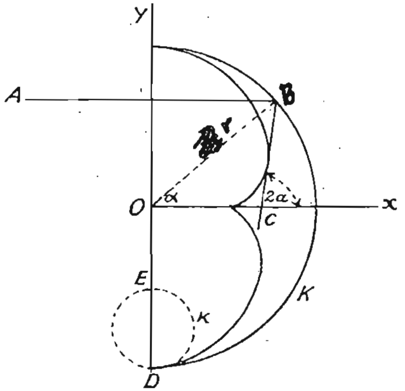
Заменом ових вредности у IV произилази једначина анвелопе, коју смо горе већ нашли.

2. *Пример.* Од најлепших примена теорије анвелопа имамо у Оптици. Замислимо ма какву криву линију на коју падају светлосни зраци, било да су они међусобом паралелни (да долазе из бесконачне даљине, као што је приближно случај код сунчаних зракова) или да дивергирају из једне светлеће тачке. Ми знамо, да се уопште у таквоме случају један део зракова одбија, а други део прелама. Закони, по којима једно и друго бива, познати су. Код рефлексије имамо, да је угао одбијања раван углу упадања, а код рефракције стоје синуси углова упадања и преламања у сталној размери, која једино зависи од сре-

дине из које зрак долази и средине у коју он улази. Како код одбивених, тако и код преломљених зракова имамо дакле један непрекидан низ правих линија, у коме поједине праве следују једном и истом закону. Линија, коју образују тачке, у којима се поступно две и две од тих правих секу, зове се *жижна линија* (Caustica). Према реченом следује, да жижне линије постају на два начина: услед одбијања (Catacausticae) и услед преламања (Diacausticae). Са геометриског гледишта жижне линије нису ништа друго до анвелопа одбијених односно преломљених зракова.

Први, који је обратио пажњу на ову врсту линија, јесте холандски физичар Christian Huyghens (1629—1695). Он је расматрао случај, да светлосни зраци упадају на један полукруг. Тај рад Huyghens-ов, који датира већ од год. 1678., штампан је у његовом делу Traité de la Lumière год. 1690. Jakob Bernoulli, који се врло много бавио проучавањем ове врсте линија, дао им је имена Catacaustica и Diacaustica.

Нека је K један полукруг, на који у правцу AB падају светлосни зраци. Из Физике знамо, да се упадајући зрак AB одбија тако, да је $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ABO$, пошто је нормала у упадној тачци B полупречник r. Одредимо анвелопу одбивених зракова BC.



Сл. 38.

Узмимо почетак координата у средишту полукруга, x-осу у правцу упадајућих зракова.

Означимо са α упадни угао, са x_1, y_1, координате тачке B. Једначина одбивеног зрака BC гласи онда

$$y - y_1 = (x - x_1)\, tg\, 2\alpha$$

или

$$(y - y_1) \cos 2\alpha = (x - x_1) \sin 2\alpha.$$

Ако ставимо овде $x_1 = r \cos \alpha$, $y_1 = r \sin \alpha$ добићемо

$$x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha = r (\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha)$$

или простије

I) $$x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha = r \sin \alpha.$$

Ово је, дакле, општа једначина свију одбивених зракова. Њихову анвелопу добићемо, кад елиминујемо (променљиви) угао α из I и једначине $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, а т. ј.

II) $$x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha = \frac{r}{2} \cos \alpha.$$

Помножимо I са $\sin 2\alpha$, а II са $\cos 2\alpha$ и саберимо, па ћемо добити

$$x = r\left(\sin\alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha\right) = r\left(2\sin^2\alpha\cos\alpha + {}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha\right) = \frac{r}{2}(4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha$$

или краће

$$x = \frac{r}{2}\cos\alpha\,(1 + 2\sin^2\alpha).$$

Помножимо сада I са $-\cos 2\alpha$, а II са $\sin 2\alpha$ и саберимо те добивене једначине. Ресултат је

$$y = r\left(\frac{1}{2}\cos\alpha\sin 2\alpha - \sin\alpha\cos 2\alpha\right) =$$

$$r(\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos 2\alpha) = r\sin\alpha\,[\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]$$

$$y = r \sin^3 \alpha.$$

Одавде следује $\sin^2\alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{2}{3}}$, дакле $\cos\alpha = \frac{\sqrt{r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}{r^{\frac{1}{3}}}$, које кад ставимо у израз за x налазимо

$$x = \frac{r}{2}\,\frac{\sqrt{r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}{r^{\frac{1}{3}}}\left[1 + 2\left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{2}{3}}\right],\ \text{одакле}$$

$$2x = \sqrt{r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}\left[r^{\frac{2}{3}} + 2y^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$4x^2 = \left(r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)\left(r^{\frac{4}{3}} + 4r^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{4}{3}}\right)\ \text{или најзад}$$

$$[4(x^2 + y^2) - r^2]^3 = 27 r^4 y^2$$

као једначина анвелопе рефлектованих зракова.

Из једначине анвелопе могли бисмо уверити се да је, у овоме случају, жижна линија епициклоида, која постаје, кад пустимо, да се котрља круг k са полупречником $\frac{r}{4}$ по унутрашњој страни задатога круга K.

Као други пример једне жижне линије поменимо кардиоиду. Она постаје, кад замислимо светлосне зраке да полазе из једне тачке истога круга, који их одбија. Пречник a круга AA_1O (в сл. 30 чл. 107.), који служи за конструкцију кардиоиде он је у овоме случају $= \frac{1}{3}$ пречника круга K, који одбија зраке.

Трећи интересан пример даје нам случај, кад зраци упадају на издубљену (конкавну) страну једне просте циклоиде и то паралелно са y-осом (в. сл. 27). Жижна линија је такође проста циклоида. Њу добијамо, кад пустимо, да се дуж x-осе, а почев од тачке O, котрља круг са полупречником $\frac{a}{2}$. Основица жижне линије је дакле $\frac{1}{2}$ основице задате циклоиде, т. ј. $= OD$.

4. Пројекционе линије.

115. Једначина пројекционе линије. — Геометриско место пројекција једне сталне тачке на све могуће тангенте једне задате линије назваћемо *пројекционом линијом* оне задате линије.

Нека је

$$F(x,\ y) = 0 \qquad \text{(I}$$

једначина задате линије $P_1 P_2 P_3 \ldots$ Координате сталне тачке A означимо са a и b.

Једначина дирке у тачци $P_1(x_1, y_1)$ на задату линију I јесте

II) $$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1),$$

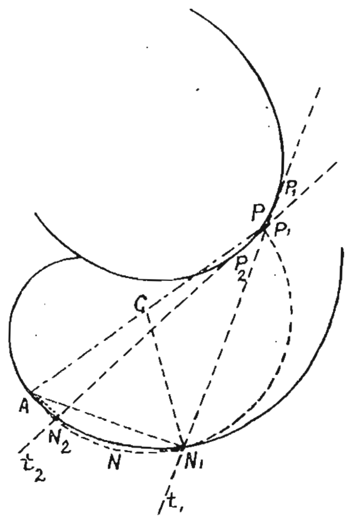
а једначина нормале из тачке A на тангенту

III) $$y - b = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - a).$$

Једначину пројекционе линије добићемо, кад елиминујемо x_1 и y_1 из једначина I, II и III, пошто у првој заменимо текуће координате x, y координатама x_1, y_1 додирне тачке, дакле из једначина

$$F(x_1, y_1) = 0,\quad y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1),\quad y - b = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - a).$$

Нека су t_1 и t_2 дирке у тачкама P_1 и P_2 на задату линију, N_1 и N_2 пројекције сталне тачке A на t_1 и t_2. Означимо са P тачку пресека тангената t_1 и t_2 опишимо из средине од AP са полупречником $\frac{AP'}{2}$ круг. Тај круг пролазиће и кроз тачке N_1 и N_2. У колико се буду тачке P_1 и P_2, односно дирке t_1 и t_2, приближавале једна другој у толико ће и пресечна тачка P' више приближавати се извесној тачци P на задатој линији, а исто тако и сечица $N_1 N_2$ пројекционе линије тежити све више положају дирке у извесној тачци N пројекционе линије. Одавде закључујемо, да је тангента пројекционе линије у тачци N у исто време и тангента круга, што пролази кроз сталну тачку A, тачку N и овој одговарајућу тачку P на задатој линији.



Сл. 39.

Није тешко увидети на који начин ово последње може да нам послужи да конструишемо тангенту или нормалу пројекционе линије, кад нам је позната конструкција тангенте или нормале код задате линије.

Последњи ресултат могли би и овако да формулишемо: нормала пројекционе линије у извесној тачци N пролази кроз средиште C круга, што је описан над дужи, која спаја сталну тачку A са (тачци N одговарајућом) тачком P.

116. Примери.

1. Пример. Пројекциона линија круга $x^2 + y^2 = r^2$.

Замислимо, да стална тачка A лежи на x-оси у одстојању $OA = a$ од средишта круга.

Једначине из којих треба да елиминујемо x_1 и y_1 јесу

једначина круга за $x = x_1$, $y = y_1$:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \qquad \text{(I}$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$x x_1 + y y_1 = r^2 \qquad \text{(II}$$

и једначина нормале из A на дирку:

$$y = \frac{y_1}{x_1}(x - a). \qquad \text{(III}$$

Из III следује $y_1 = \frac{y x_1}{x - a}$, које кад ставимо у II, даје $\left(x + \frac{y^2}{x - a}\right) x_1 = r^2$, одакле

$$x_1 = \frac{(x - a) r^2}{x^2 + y^2 - ax}$$

и према томе, а на основу III),

$$y_1 = \frac{y r^2}{x^2 + y^2 - ax}.$$

Ако заменимо ове вредности за x_1 и y_1 у једн. I добићемо

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = [(x - a)^2 + y^2]\, r^2.$$

Ово је једначина Паскалове линије. У случају, да тачка A лежи на периферији задатог круга пројекциона линија је кардиоида. (Види сл. 30 у чл. 107.)

2. Пример. Пројекциона линија елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, узев сталну тачку A у средишту елипсе.

Једначине гласе у овоме случају: једначина елипсе за $x = x_1$, $y = y_1$:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(I}$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1, \qquad \text{(II}$$

једначина нормале из средишта на дирку:

$$y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x. \qquad \text{(III}$$

Из III) налазимо $y_1 = \frac{b^2 y}{a^2 x} x_1$, а из II) $y_1 = \frac{b^2}{y} - \frac{b^2 x}{a^2 y} x_1$, које, једно са другим упоређено, даје

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2},\quad y_1 = \frac{b^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Ако ставимо ове вредности у једн. I. добићемо

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

У поларним координатама ($x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$) имамо $\varrho^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$ или, ако ставимо $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, простије

$$\varrho^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi).$$

На основу једначине, коју смо нашли за пројекциону линију, није тешко извести закључке о изгледу ове линије.

Ако узмемо сталну тачку A у једној од елипсиних жижа добићемо за пројекциону линију круг описан из средишта елипсе полупречником a (великом полуосом).

3. Пример. Пројекциона линија хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, узев сталну тачку A у средишту хиперболе. Једначине јесу у овоме случају

једначине хиперболе за $x = x_1$, $y = y_1$:

I) $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

II) $$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1,$$

једначина нормале из средишта на дирку:

III) $$y = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x.$$

Из III следује $y_1 = -\frac{b^2 y}{a^2 x} x_1$, а из II $y_1 = \frac{b^2 x}{a^2 y} x_1 - \frac{b^2}{y}$, одакле, кад упоредимо те две вредности,

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = -\frac{b^2 y}{x^2 + y^2},$$

које, опет, кад ставимо у I, даје једначину пројекционе линије

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

или у поларним координатама ($x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$)

$$\varrho^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi),$$

где је

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$

Код равностране хиперболе (т. ј. за $a = b$) пројекциона линија је лемниската:

$$a^2 (x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2 \quad \text{или} \quad \varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

(в. 7. пример чл. 107.).

Ако узмемо тачку A у једној од жижа хиперболе пројекциона линија претвара се у круг описан из средишта хиперболе полуосом a.

4. Пример. Пројекциона линија параболе $y^2 = 2px$, узев тачку A у темену параболе. Овде су једначине, из којих налазимо једначину пројекционе линије (в чл. 115.)

једначина параболе за $x = x_1$, $y = y_1$:

I) $$y_1^2 = 2 p x_1,$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

II) $$y y_1 = p (x + x_1),$$

једначина нормале из темена на дирку:

III) $$y = -\frac{y_1}{p} x.$$

Из III следује

$$y_1 = -\frac{py}{x},$$

које, стављено у I, даје

$$x_1 = \frac{py^2}{2x^2}.$$

Ако заменимо ове вредности за x_1 и y_1 у једн. II добићемо једначину пројекционе линије

$$py^2 = -2x(x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad -x^3 = y^2\left(\frac{p}{2} + x\right).$$

У поларним координатама ($x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$) имамо

$$\varrho = -\frac{p \sin^2 \varphi}{2 \cos \varphi}.$$

Лако је уверити се, да је пројекциона линија цисоида. Овде је положан правац x-осе противан ономе у сл. 35 чл. 110. Према томе, а и на основу саме једначине, коју смо нашли, лако је уверити се, да је директриса параболе асимптота пројекционе линије (цисоиде).

Узмимо тачку A у пресеку директрисе и x-осе. Координате тачке A јесу онда $x = -\frac{p}{2}$, $y = 0$, а једначине, из којих добијамо једначину пројекционе линије (в. чл. 115.) јесу:

$$y_1^2 = 2px_1, \; yy_1 = p(x + x_1), \; y = -\frac{y_1}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Из последње једначине следује

$$y_1 = -\frac{py}{x + \frac{p}{2}},$$

које, кад ставимо у прву, даје

$$x_1 = \frac{py^2}{2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

и заменимо обе те вредности у другу једначину налазимо

$$x + \frac{y^2}{x + \frac{p}{2}} + \frac{py^2}{2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = 0.$$

Овој једначини даћемо знатно простији вид, кад ставимо почетак координата у тачку A, т. ј. ставимо $x = X - \frac{p}{2}$, $y = Y$.

Једначина пројекционе линије гласи сада

$$X(X^2 + Y^2) - \frac{p}{2}(X^2 - Y^2) = 0,$$

а ово је једначина праве строфоиде.

Положај ове строфоиде (као пројекционе линије) наспрам параболе можемо замислити помоћу сл. 34. чл. 110.), кад узмемо, да је x-оса главна оса, y-оса директриса, а тачка A теме параболе (дакле $a = OA = \frac{p}{2}$).

Ако узмемо тачку, коју пројектујемо у жижи параболе, онда је пројекциона линија тангента параболе у њеном темену.

5. Тангенциалне координате.

117. Начело дуалности. — Линије, и сасвим опште ма какве геометриске фигуре у равни, можемо замислити као геометриско место положаја, које извесан покретан облик поступно заузима. Најпростији облици у равни то су тачка и права линија. Према томе можемо постанак једне геометриске фиѓуре у равни сматрати као ресултат кретања тачке или праве. На овоме двојаком начину стварања фигура основано је начело *дуалности* или *реципрочности* у Геометрији. Две фигуре, које постају на једнак начин, али услед кретања разних елемената, т. ј. две фигуре, од којих једна произилази кретањем тачке, а друга кретањем праве, зовемо дуалним или реципрочним. Свакој теореми и свакоме својству једне фигуре одговара слична теорема и слично својство реципрочне фигуре, тако да из својстава једне можемо извести својства дуалне фигуре, кад само променимо речи „тачка“ и „права“ узајамно. Н. пр.

Две *тачке* одређују једну *праву* линију или:	Две *праве* одређују једну *тачку* или:
Кроз две *тачке* пролази само једна *права.*	Две *праве* секу се само у једној *тачци.*
Три *тачке* одређују три *праве* или:	Три *праве* одређују три *тачке* или:
Кроз три *тачке* пролазе три *праве.*	Три *праве* секу се у три *тачке.*
Фигуру, коју образују три *тачке* зовемо *троуглом.*	Фигуру, коју образују три *праве* зовемо *тространом.*

Ако у једној фигури леже три тачке на једној истој правој, онда у дуалној фигури пролазе оне три праве, што одговарају овим тачкама, кроз једну исту тачку и то ону што одговара правој на којој се налазе поменуте три тачке у првој фиѓури.

Итд. итд.[1])

118. Тангенциалне координате. — Према горе изреченоме начелу дуалности о постајању фиѓура можемо криве линије сматрати или као путање једне покретне тачке или, пак, као анвелопе једне праве, која поступно мења положај.

Из овог двојаког начина схватања произилазе и две врсте координата.

Узев тачку за основан облик, из којега замишљамо остале да постају, долазимо природно до оних координата са којима смо се до сада

[1]) Најбољи пример дуалности имамо у теорији пола и поларе и код реципрочно поларних фигура.

искључиво бавили и које се опште зову *координате тачке.* Но, ако узмемо праву за елеменат, добиђемо нову врсту координата, такозване *координате праве.*

Општу једначину једне праве линије можемо написати

$$x\xi + y\eta = 1. \qquad \text{(I}$$

Овде су x и y текуће координате тачке, а ξ и η извесне количине (параметри), које одређују положај праве. Њихов значај нам је познат: то су реципрочне вредности одсечака, које права чини на координатним осама. Пошто свакоме спрегу вредности параметара ξ и η одговара једна извесна права, а и обрнуто свакој правој извесан спрег вредности ξ и η, то је појмљиво, да нам ове количине могу послужити као координате праве линије. Количине ξ, η зовемо *тангенциалним координатама* праве.

Узмимо ма какву једначину

$$\Phi(\eta, \xi) = 0 \quad \text{или} \quad \eta = \varphi(\xi) \qquad \text{(II}$$

на основу које свакој вредности координате ξ припада једна или више одређених вредности координате η. У тој једначини је, дакле, формулисан закон, по коме се једна права креће. Једначина II, као аналитички израз за све положаје, које једна на извесан начин покретна права може заузети, представља анвелопу покретне праве. Другим речима једначина II опредељује извесну криву линију помоћу њених тангената, представља је, дакле, у тангенциалним координатама.[1])

Једначину II можемо назвати *тангентном једначином* извесне криве линије. Једначина I јесте једначина једне од њених тангената у обичним координатама и то једначина тангенте, чије су тангенциалне координате ξ и η.

Из сличности овога расматрања с оним у чл. 113. лако је закључити како се има да поступи при претварању тангентне једначине $\Phi(\xi, \eta) = 0$ у обичне координате x, y.

Имајући на уму, да су параметри a и b (у чл. 113.) овде означени са ξ и η (тангенциалне координате), да

једначину $F(x, y, a, b) = 0$	заступа једначина $x\xi + y\eta = 1$,
једначину $\Phi(a, b) = 0$	заступа једначина $\Phi(\xi, \eta) = 0$

[1]) Тако у првоме примеру чл. 114. расматрали смо праву $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, која мења положај под условом, да је $a^2 + b^2 = c^2$. Пошто је у овоме случају $\xi = \frac{1}{a}, \eta = \frac{1}{b}$, то је, дакле, једначина анвелопе (покретне праве) у тангенциалним координатама $\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} = c^2$.

Општа једначина праве, која пролази кроз једну задату тачку x_1, y_1, гласи

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Константа m је произвољна и услед тога има оваквих правих безбројно много.

Једначина праве, која пролази кроз две задате тачке x_1, y_1 и x_2, y_2, гласи

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Као што видимо права је потпуно одређена.

Одстојање тачке x_1, y_1 од праве $Ax + By + C = 0$ јесте

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказ. Декартове координате задатих тачака јесу $x_1 = -\frac{a_1}{c_1}$, $y_1 = -\frac{b_1}{c_1}$ и $x_2 = -\frac{a_2}{c_2}$, $y_2 = -\frac{b_2}{c_2}$, одакле, на основу обрасца на левој страни, налазимо вредност за d у тангенциалним координатама.

Општа једначина тачке, која лежи на једној задатој правој ξ_1, η_1, гласи

$$\eta - \eta_1 = \mu(\xi - \xi_1).$$

Услед тога што је константа μ произвољна има оваквих тачака безбројно много.

Једначина тачке, у којој се две задате праве ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 секу, гласи

$$\eta - \eta_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}(\xi - \xi_1).$$

Као што видимо тачка је потпуно одређена.

Одстојање праве ξ_1, η_1 од тачке $a\xi + b\eta + c = 0$ јесте

$$d = \frac{\frac{a}{c}\xi_1 + \frac{b}{c}\eta_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = \frac{a\xi_1 + b\eta_1 + c}{c\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}.$$

Доказ. У Декартовим координатама јесте једначина задате праве $\xi_1 x + \eta_1 y - 1 = 0$ (дакле $A = \xi_1$, $B = \eta_1$, $C = -1$), а координате задате тачке $x_1 = -\frac{a}{c}$, $y = -\frac{b}{c}$, које кад ставимо у образац на левој страни налазимо горњу вредност за d у тангенциалним координатама.

Једначина круга са полупречником r и средиштем у тачци a, b гласи

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

До ове једначине долазимо узев круг као геометриско место за све тачке x, y, које леже у сталноме одстојању r од извесне сталне тачке a, b.

На основу ове дефиниције круга добијамо његову једначину непосредно из горњег обрасца за растојање двеју тачака, кад замислимо, да је једна од њих стална, а друга покретна и ставимо њихово растојање $= r$ (константно).

Једначина сечице, која пролази кроз две тачке x_1, y_1 и x_2, y_2 једне извесне криве линије гласи

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

При бесконачном приближавању пресечних тачака сечица прелази у положај тангенте у тачци x_1, y_1 и њена једначина добија (услед тога што је

$\lim\limits_{x_1 = x_2} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{dy_1}{dx_1}$) овај вид

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$$

или

$$(x - x_1)\frac{dF}{dx_1} + (y - y_1)\frac{dF}{dy_1} = 0$$

према томе, да ли је једначина криве линије

$$y = f(x) \text{ или } F(x, y) = 0.$$

Једначина круга са полупречником r и средиштем у тачци $\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c} = 0$ гласи

$$\frac{(\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c})^2}{\mathfrak{c}^2(\xi^2 + \eta^2)} = r^2,$$

које се простије може написати и овако

$$(\mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C})^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Ову једначину добијамо, кад узмемо круг као анвелопу правих ξ, η, које леже у подједнаком одстојању r од извесне сталне тачке $\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c} = 0$.

Према оваквој дефиницији круга његова једначина следује непосредно из претходећег задатка, кад предпоставимо, да је права покретна и да њено одстојање од сталне тачке остаје константно ($= r$).

Једначина пресечне тачке двеју тангената ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 једне извесне криве линије гласи

$$\eta - \eta_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}(\xi - \xi_1).$$

При бесконачном приближавању тангената њихова тачка пресека пада на додирну тачку дирке ξ_1, η_1 и њена (т. ј. додирне тачке) једначина добија (услед тога што је

$\lim\limits_{\xi_1 = \xi_2} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{d\eta_1}{d\xi_1}$) овај вид

$$\eta - \eta_1 = \frac{d\eta_1}{d\xi_1}(\xi - \xi_1)$$

или

$$(\xi - \xi_1)\frac{d\Phi}{d\xi_1} + (\eta - \eta_1)\frac{d\Phi}{d\eta_1} = 0$$

према томе, да ли је једначина криве линије

$$\eta = \varphi(\xi) \text{ или } \Phi(\xi, \eta) = 0.$$

Две једначине

$$F_1(x,\ y) = 0 \text{ и } F_2(x,\ y) = 0$$

узете заједно дају координате заједничких (пресечних) тачака линија $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

У случају, да су задате једначине првога степена (да представљају, дакле, две праве линије) њихов заједнички координатни спрег представља тачку пресека тих правих.

Општа једначина линије, која пролази кроз све заједничке тачке двеју задатих линија

$$F_1(x,\ y) = 0 \text{ и } F_2(x,\ y = 0$$

јесте

$$F_1(x,\ y) \pm \lambda F_2(x,\ y) = 0.$$

Две једначине

$$\Phi_1(\xi,\ \eta) = 0 \text{ и } \Phi_2(\xi,\ \eta) = 0$$

узете заједно дају координате заједничких тангената линија $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$.

У случају, да су задате једначине првога степена (да представљају, дакле, две тачке) њихов заједнички координатни спрег представља праву, која спаја те две тачке.

Општа једначина линије, која има исте тангенте, које су заједничке двема задатим линијама

$$\Phi_1(\xi,\ \eta) = 0 \text{ и } \Phi_2(\xi,\ \eta) = 0$$

јесте

$$\Phi_1(\xi,\ \eta) \pm \lambda\ \Phi_2(\xi,\ \eta) = 0$$

Из тога што је константа λ потпуно произвољна видимо, да оваквих линија има безбројно много.

У случају, да су задате једначине првога степена оне представљају праве, а трећа једначина представља праве које пролазе кроз пресек првих двеју.

Да бисмо испитали, да ли извесна тачка $x_1,\ y_1$ лежи на линији $F(x,\ y) = 0$ ми ћемо испитати, да ли је

$$F(x_1,\ y_1) = 0.$$

У случају, да су задате једначине првога степена, оне представљају тачке, а трећа једначина представља тачку на правој која спаја прве две.

Да бисмо испитали, да ли извесна права $\xi_1,\ \eta_1$ додирује линију $\Phi(\xi, \eta) = 0$ ми ћемо испитати, да ли је

$$\Phi(\xi_1,\ \eta_1) = 0.$$

6. Конвексност и конкавност линија.

120. Метода испитивања. — Између координата $x_1,\ y_1$ ма које тачке P_1 једне задате линије постоји једначина те линије

$$y_1 = f(x_1),$$

а исто тако и између координата $x_1 + \Delta x_1,\ y_1 + \Delta y_1$, друге које тачка P_2

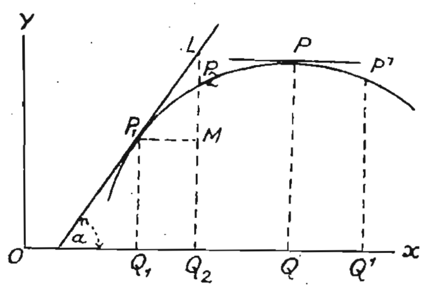
$$y_1 + \Delta y_1 = f(x_1 + \Delta x_1).$$

Ово последње, развијено по Taylor-овој формули, даје

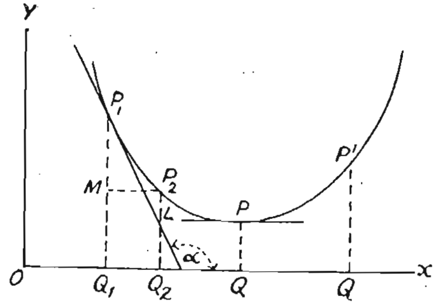
$$y_1 + \Delta y_1 = f(x_1) + f'(x_1)\,\Delta x_1 + f''(x_1)\frac{\Delta x_1^{\,2}}{1\,.\,2} + \dots$$

или

$$y_1 + \Delta y_1 = P_2 Q_2 = y_1 + \frac{dy_1}{dx_1}\Delta x_1 + \frac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}}\frac{\Delta x_1^{\,2}}{1\,.\,2} + \dots$$



Сл. 40.



Сл. 41.

Ако у једначини тангенте у тачци P_1, а то је $y - y_1 = \dfrac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$, ставимо $x = x_1 + \Delta x_1$ добићемо за ординату тачке L

$$LQ_2 = y_1 + \frac{dy_1}{dx_1}\Delta x_1.$$

На основу ове и горње вредности за $P_2 Q_2$ налазимо

$$P_2 Q_2 - LQ_2 = P_2 L = \frac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}}\frac{\Delta x_1^{\,2}}{1\,.\,2} + \dots$$

Ако узмемо, да је промена $\Delta x_1 = Q_1 Q_2$ довољно мала, онда сваки члан у Taylor-овом реду превазилази, по својој величини, збир свију следећих чланова. Из тога закључујемо, да је у изразу за $P_2 Q_2 - LQ_2$ или $P_2 L$ једино први члан на десној страни или управо (пошто је $\dfrac{\Delta x_1^{\,2}}{1\,.\,2}$ битно положна количина) само $\dfrac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}}$ меродавно по знак леве стране. Ако је дакле $\dfrac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} > 0$, онда је $P_2 Q_2 > LQ_2$. То значи да су у близини тачке P_1 ординате криве линије веће од (истим апсцисама) одговарајућих ордината тангенте линије у тачци P_1. У томе случају тангента линије лежи вазда између линије и x-осе; ми кажемо, да је линија *конвексна* или *испупчена* наспрам x-осе (в. сл. 41.). Напротив, ако је $\dfrac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} < 0$, одакле $P_2 Q_2 < LQ_2$, т. ј. ако су ординате у близини тачке P_1 мање од (истим апсцисама) одговарајућих ордината тангенте линије у тачци P_1 линија лежи између њене тангенте и x-осе. Ми кажемо, у томе случају, да је линија *конкавна* или *издубљена* према x-оси (в. сл. 40.).

Ми смо претпоставили, да су ординате положне. У противноме случају горња карактеристика гласи овако: линија показује x-оси конвексну или конкавну страну према томе, да ли је $\dfrac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} \lessgtr 0$.

Према томе можемо да формулишемо наш ресултат сасвим опште на овај начин: линија је конвексна или конкавна наспрам x-осе, према томе, да ли ордината и друга изводна имају једнак или противан знак.

Међутим треба имати на уму, да овај знак за конвексност и конкавност претпоставља, да је координатни угао оштар. У случају, да је координатни угао туп имали би само да променимо правац једне од координатних оса и на тај начин да претворимо тупоуглу систему у оштроуглу.

Даље ми смо предпоставили, да је, како пре, тако и после посматране тачке P_1, $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ истога знака. Ако се, пак, деси да је пре тачке P_1 друга изводна $\gtrless 0$, а после ње $\lessgtr 0$, онда је у самој тачци P_1 $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=0$. Пролазећи кроз тачку P_1 линија прелази, у таквом случају, из конвексности у конкавност или обрнуто из конкавности у конвексност. Таква тачка P_1, у којој линија мења смисао извијености, зове се *тачка прегиба.* Тачке прегиба једне криве линије налазимо дакле, кад определимо оне вредности x-а и y-а, које чине $\frac{dy^2}{dx^2}=0$ или $=\infty$ и чине да та друга изводна, пролазећи кроз тачку P_1 у исто време знак мења.

Сасвим опште, ако је у изразу

$$P_2L=\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\,\frac{\Delta x_1^2}{1\,.\,2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\,\frac{\Delta x_1^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\dots+\frac{d^ny_1}{dx_1^n}\,\frac{\Delta x_1^n}{1\,.\,2\,.\,3\dots n}+R$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\frac{d^3y_1}{dx_1^3}=\dots=\frac{d^{n-1}y_1}{dx_1^{n-1}}=0,$$

дакле

$$P_2L=\frac{d^ny_1}{dx_1^n}\,\frac{\Delta x_1^n}{1\,.\,2\,.\,3\dots n}+R,$$

онда имамо, да разликујемо ова два случаја.

1) Нека је n парно. Знак од P_2L независан је од знака прираштаја Δx_1. То значи, да су у близини (лево и десно од) тачке P_1 ординате линије или веће или мање од одговарајућих ордината тангенте у тачци P_1. Линија је, дакле, конвексна или конкавна (наспрам x-осе) према томе, да ли је $\frac{d^ny_1}{dx_1^n}\gtrless 0$.

2) Ако је n непарно. Знак од P_2L зависи од знака прираштаја Δx_1. То значи, да, ако су пре (лево од) тачке P_1, ординате линије веће од одговарајућих ордината тангенте у тачци P_1, после (десно од) те тачке оне морају бити мање од ових последњих или обрнуто. У таквоме случају тангента у тачци P_1 сече линију у тој тачци. P_1 је тачка прегиба.

121. Примери. —

1. Пример. Синусна линија

$$y=\sin x.$$

На основу периодности синусне функције закључујемо, да се ова линија састоји из бесконачно много конгруентних делова, као што су $J''P''J'P'O$, $OP_1J_1P_2J_2$ итд.

Све вредности, које ордината може имати, крећу се у границама -1 и $+1$. Највећа вредност ординате је $+1$ и то у тачкама P'', P_1, $P_3\dots$, а најмања -1 у тачкама P', $P_2,\dots$ Тако н. пр. почев од $x=0$, па до $x=\frac{\pi}{2}$ видимо, да је $\frac{dy}{dx}=\cos x>0$, а то значи, да у томе размаку функција (ордината) y расте и пошто је за $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx}=0$, а $\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$ одречно $(=-1)$ следује, да је у тачци P_1 $\left(\text{т. ј. за } x=\frac{\pi}{2}\right)$ ордината у Max. $(=+1)$. Напротив почев од $x=\frac{2\pi}{2}$, па до $x=\frac{3\pi}{2}$ закључујемо из тога што је $\frac{dy}{dx}<0$, да функција опада и пошто је за

$$x=\frac{3\pi}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}>0\left(-\sin\frac{3\pi}{2}=+1\right),$$

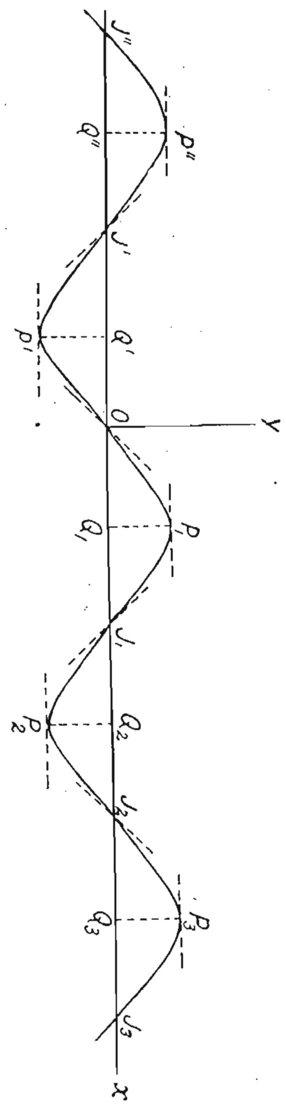
то значи, да је у тачци P_2

$$\left(\text{т. ј. за } x=\frac{3\pi}{2}\right)\; y \text{ Min. } (=-1).$$

Из тога што је $\frac{dy}{dx}=\cos x=tg\,\alpha$ (ако означимо са α угао, који дирка чини са x-осом) читамо, да је у тачкама P'', P', P_1, P_2, $P_3,\dots$ т. ј. за $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (где је n ма какав цео број) тангента паралелна са x-осом, док међутим у тачкама J'', J', O, J_1, $J_2,\dots$, т. ј. за $x=2n\,.\frac{\pi}{2}$ она чини са x-осом наизменце угле од 45^0 и 90^0+45^0.

На основу тога, што су $y=\sin x$ и друга изводна $\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$ вазда противног знака, закључујемо да је синусна линија свуда конкавна наспрам x-осе.

Најзад видимо, да су пресечне тачке линије са x-осом $(J'', J', O, J_1, J_2, J_3,\dots)$ тачке прегиба, пошто је у тима тачкама друга изводна $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, а у исто време и мења знак.



Сл. 42.

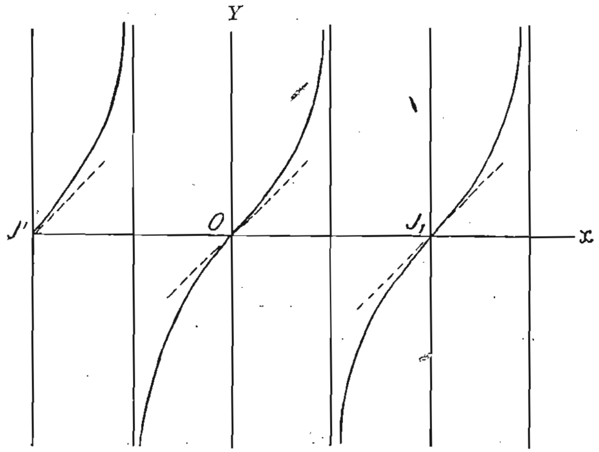
2. Пример. Тангентна линија

$$y=tg\,x.$$

Периодност функције tangens показује нам, да се ова линија састоји из безбројно много конгруентних грана. Ордината може имати све могуће вредности од $-\infty$, па до $+\infty$. Свака грана простире се између двеју паралелних према y-оси, као н. пр. што су праве $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$. Ове праве додирују асимптотно (у бесконачности) поједине гране тангентне линије и то свака права додирује две гране: једну у положноме, а другу у одречноме правцу y-осе. О овоме ћемо се уверити, кад ставимо у

$$y = tg\left(\frac{\pi}{2} - \Delta x\right) = cotg\,\Delta x \quad \text{и} \quad y = tg\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) = -\,cotg\,\Delta x$$

$\Delta x = 0$. Добићемо за $x = \frac{\pi}{2}$ две вредности ординате $y = \pm\infty$. И тако исто за сваку вредност $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.



Сл. 43.

Из прве изводне $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 x}$ закључујемо, да све гране (или управо њихове тангенте) у пресечној тачци са x-осом праве са x-осом угао од 45°, зато што је за $x = 2n\frac{\pi}{2}$ (дакле $y = 0$) $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = 1$.

На основу тога што су $y = tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\,sin\,x}{cos^3 x}$ једног истог знака за ма какву вредност x-а следује, да је линија свуда конвексна према x-оси.

Даље видимо, да је друга изводна $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ за све оне вредности x-а, за које је $sin\,x = 0$, а то су вредности $x = 2n\frac{\pi}{2}$. И пошто $\frac{d^2y}{dx^2}$ пролазећи кроз нулу мења знак, следује, да су тачке J', O, $J_1, \ldots$, у којима линија сече x-осу, тачке прегиба.

7. Додиривање кривих линија.

122. Појам додиривања. — Нека су

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = \varphi(x)$$

једначине двеју задатих линија L_1 и L_2.

Претпоставимо, да те две линије имају заједничку тачку $P_0\,(x_0,\, y_0)$.

Ако придамо апсциси $x_0 = OQ_0$ прираштај $\Delta x_0 = Q_0 Q_1$, добићемо за $x_0 + \Delta x_0 = OQ_1$ две друге тачке: једну P_1 на линији L_1 и другу P_2 на линији L_2.

Одговарајуће ординате јесу

$$P_1 Q_1 = y_1 = f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x_0 + f''(x_0)\,\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

$$P_2 Q_1 = y_2 = \varphi(x_0 + \Delta x_0) = \varphi(x_0) + \varphi'(x)\,\Delta x_0 + \varphi''(x_0)\,\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

одакле (с обзиром да је $f(x_0) = \varphi(x_0) = P_0 Q_0$)

$$P_1 P_2 = [f'(x_0) - \varphi'(x_0)]\,\Delta x_0 + [f''(x_0) - \varphi''(x_0)]\,\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

У случају, да линије L_1 и L_2 имају у тачци P_0 и заједничку тангенту, т. ј. ако је поред

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \text{ још и } f'(x_0) = \varphi'(x_0),$$

онда је

$$P_1 P_2 = [f''(x_0) - \varphi''(x_0)]\,\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

У оваквоме случају кажемо, да између линија L_1 и L_2 постоји *додиривање првога реда или степена.*

Ако је у тачци P_0 двеју кривих линија поред $f(x_0) = \varphi(x_0)$ још и $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$, тако дакле, да је

$$P_1 P_2 = [f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)]\,\frac{\Delta x_0^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

онда кажемо, да се линије у тачци P_0 *додирују у другоме реду.*

Сасвим опште, ако је у заједничкој тачци P_0, т. ј. за исту апсцису x_0 и једнаке ординате

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \text{ још и } f'(x_0) = \varphi'(x_0), f''(x_0) = \varphi''(x_0), \ldots f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

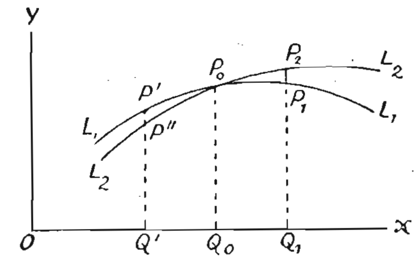
дакле

$$P_1 P_2 = [f^{(n+1)}(x_0) - \varphi^{(n+1)}(x_0)]\,\frac{\Delta x_0^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} + \ldots$$

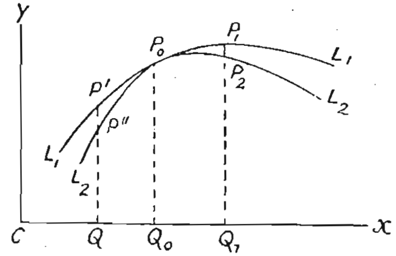
линије L_1 и L_2 *додирују се у n-томе реду.*

Из овога последњег обрасца за $P_1 P_2$ закључујемо:

1) ако је n (ред додиривања) непаран број (1, 3, 5, ...), да знак од $P_1 P_2$, а то је разлика $P_1 Q_1 - P_2 Q_1$ не зависи од знака промене Δx_0, пошто је тада $n+1$ парно и према томе Δx_0^{n+1} вазда положно. То значи, ако су десно од заједничке тачке P_0 (т. ј. за положно Δx_0) орди-



Сл. 45.



Сл. 44.

нате линије L_1 веће или мање од одговарајућих ордината линије L_2, онда су исто тако и лево од тачке P_0 (т. ј. за одречно Δx_0) ординате од L_1 веће или мање од одговарајућих ордината линије L_2. У близини тачке P_0 обухвата једна линија (н. пр. L_1) ону другу линију (L_2). Види сл. 44.

2) Ако је n парно (2, 4, 6 ...), онда знак од $P_1 P_2$ зависи од знака промене Δx_0, пошто је у томе случају $n+1$ непарно и према томе знак од Δx_0^{n+1} зависан од тога, да ли је Δx_0 положно или одречно. Ако су, дакле, десно од тачке P_0 (т. ј. за $\Delta x_0 > 0$) ординате линије L_1 мање или веће од одговарајућих ордината линије L_2, онда су лево од тачке P_0 (дакле за $\Delta x_0 < 0$) ординате од L_1 веће или мање од ордината линије L_2. Линије L_1 и L_2 укрштају се у тачци P_0. Види сл. 45.

Закључак: две у непарноме реду додирујуће се криве линије обухватају једна другу, а две у парноме реду додирујуће се линије укрштају се у заједничкој тачци.

I. Теорема. Између две у n-томе реду додирујуће се линије није могуће провући какву трећу линију, која би се са првима додиривала у нижем реду од n. Или: свака крива линија, која пролази између две у n-томе реду додирујуће се линије, мора додиривати ове најмање у истоме реду n или у вишем реду од n.

Закључак. У колико је ред додиривања двеју линија већи, у толико се и оне присније зближавају у додирној тачци.

II. Теорема. Ред додиривања двеју линија не зависи од избора координатне системе.

123. Оскулаторне линије. — Нека је

I) $$y = f(x)$$

једначина једне задате (сталне) криве линије,

II) $$y = \varphi\,(x, a, b, c, \dots k)$$

општа једначина једнога низа кривих линија, тако, да свакој линији тога низа одговарају одређене вредности констаната $a, b, c, \dots k$ и обрнуто.

Ако претпоставимо, да констаната $a, b, c, \dots k$ има $n+1$, онда их можемо определити тако, да линија II, којој те вредности припадају, додирује задату линију I у n-томе реду. Услов, да се линије I и II додирују у n-томе реду јесте, као што знамо,

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= \varphi\ \ (x_0, a, b, c, \dots k)\\ f'(x_0) &= \varphi'\ (x_0, a, b, c, \dots k)\\ f''(x_0) &= \varphi''\ (x_0, a, b, c, \dots k)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ f^{(n)}(x_0) &= \varphi^{(n)}(x_0, a, b, c, \dots k). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III}$$

Пошто оваквих условних једначина има $n+1$, а толико и произвољних констаната у једначини II, то можемо, на основу једначина III, да определимо сталне количине $a, b, c, \dots k$ и да учинимо, на тај начин, да извесна линија из низа II додирује задату линију I у n-томе реду.

Као што видимо ред додиривања једне линије II са каквом задатом линијом I зависи од броја произвољних констаната, које се налазе у једначини прве линије, тако да је ред додиривања за 1 мањи од броја тих констаната.

Линија, која према броју констаната, које садржи њена једначина, додирује једну задату линију у највишем степену зове се *оскулаторна линија* ове последње.

124. Примери. —

1. Пример. Нека је

$$y = f(x) \qquad \text{(I}$$

једначина једне задате криве линије,

$$y = mx + b \qquad \text{(II}$$

општа једначина праве линије.

На основу тога, што једначина праве садржи само две константе m и b, закључујемо да права може једну криву линију додиривати највише у првоме реду. Једначину праве, која задату линију додирује у првоме реду, добићемо, кад определимо константе m и b на основу једначина

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= m x_0 + b,\\ f'(x_0) &= \frac{d}{d x_0}(m x_0 + b) = m. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III}$$

Одавде следује

$$m = f'(x_0), \quad b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

и према томе једначина оскулаторне праве

$$y = x f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \quad \text{или} \quad y - f(x_0) = f'(x_0) \,.\, (x - x_0),$$

а то је једначина тангенте $y - y_0 = \dfrac{d y_0}{d x_0}(x - x_0)$ у тачци x_0, y_0.

Пошто тангента додирује криву линију уопште у првоме, дакле непарноме реду, то следује, да линија лежи сасвим (бар у близини додирне тачке) на једној и истој страни дирке (в. чл. 122.). У изузетним случајима може права да додирује криву линију у вишем реду и онда, ако је ред додиривања паран, тангента сече линију у њиховој заједничкој тачци. У таквоме је случају додирна тачка тангенте у исто доба и тачка прегиба задате линије.

2. Пример. Узмимо поред једначине криве линије

I) $$y = f(x)$$

општу једначину круга у правоуглој системи

II) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Као што видимо у једначини круга има три константе α, β (координате средишта) и r (полупречник). Према томе можемо да удесимо да круг II додирује задату линију I највише у другоме реду.

Определимо, претходно, круг, који се са линијом I додирује само у првоме реду. Константе α, β и r таквог круга имамо да одредимо на основу једначина

$$f(x_0) = \beta \pm \sqrt{r^2 - (x_0-\alpha)^2},$$

$$f'(x_0) = -\frac{x_0-\alpha}{\sqrt{r^2-(x_0-\alpha)^2}}.$$

Пошто имамо само две једначине, а три непознате, то видимо, да оваквих кругова, који додирују једну криву линију у првоме реду, има бесконачно много. Из последње једначине, коју можемо написати

$$f(x_0) - \beta = -\frac{1}{f'(x_0)}(x_0-\alpha) \quad \text{или} \quad y_0 - \beta = -\frac{d\,x_0}{d\,y_0}(x_0-\alpha)$$

и у којој су x_0, y_0 координате извесне одређене тачке P_0, α и β пак координате средишта круга, дакле координате тачке, која (у овоме случају) није одређена, читамо да средишта (тачке α, β) тих кругова леже на нормали задате линије I у тачци x_0, y_0. Једначина $y_0 - \beta = -\frac{d\,x_0}{d\,y_0}(x_0-\alpha)$, у којој су x_0, y_0 координате једне сталне тачке, α и β пак текуће координате, представља нормалу линије I у тачци x_0, y_0 (види једн. у чл. 101.).

Између ових безбројно много кругова, који задату линију додирују у првоме реду, има један, који ту линију додирује присније, но сви остали кругови, а то је онај што је додирује у другоме реду. Тај круг зовемо *оскулаторним кругом* или *кругом кривине*. Средиште и полупречник тога круга зову се *средиште* и *полупречник кривине*.

Координате средишта и полупречник кривине налазимо из једначина

III) $$\left\{\begin{aligned} f(x_0) &= \beta \pm \sqrt{r^2-(x_0-\alpha)^2}, \\ f'(x_0) &= -\frac{x_0-\alpha}{\pm\sqrt{r^2-(x_0-\alpha)^2}}, \\ f''(x_0) &= -\frac{r^2}{[r^2-(x_0-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Одавде следује, сасвим опште за ма коју тачку x, y,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{[1+f'(x)^2]\,f'(x)}{f''(x)} = x - \frac{\left[1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]\frac{d\,y}{d\,x}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}, \\ \beta &= f(x) + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)} = y + \frac{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}, \\ r &= \pm\frac{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV}$$

Односно двојакога знака у изразу за полупречник r имамо да приметимо следеће. Из једначине

$$\beta = y + \frac{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}} \quad \text{или} \quad \beta - y = \frac{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$ видимо, да $\beta - y$ и $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$

имају један исти знак, пошто $1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2$, као положна количина, не утиче на знак. Са погледом на значај друге изводне $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ по конвексност односно конкавност криве линије (в. чл. 120.) и имајући на уму, да је β ордината средишта кривине, y ордината додирне тачке, закључујемо из тога што су $\beta - y$ и $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ једног и истог знака, да средиште кривине лежи увек на конкавној страни линије.

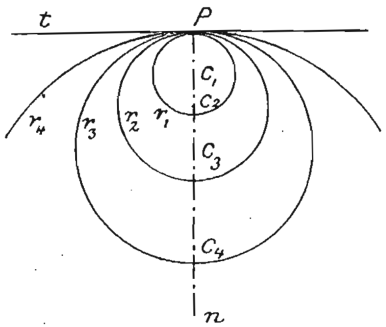
Отуда што оскулаторни круг додирује задату линију у другоме, дакле парноме реду, видимо, да се линија и њен оскулаторни круг укрштају у додирној тачци (в. чл. 122.). У изузетним случајима, кад је додиривање између линије и круга вишега и то непарнога реда, леже линија и њен оскулаторни круг на једној истој страни тангенте у додирној тачци. Тачке, у којима оскулаторни круг додирује задату линију у трећем или још вишем реду, зову се *темена* линије.

На основу вредности, коју смо нашли за нормалу у тачци x, y, а то је $n = y\sqrt{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$ (в. чл. 102.) можемо полупречник кривине да изразимо и на овај начин

$$r = \pm\frac{n^3}{y^3\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}. \quad \text{(V}$$

8. Кривина линија.

125. Кривина круга. — Кривина једнога круга у толико је већа у колико је његов полупречник мањи и обрнуто: кривина круга је у толико мања у колико је његов полупречник већи. Да бисмо ово још боље објаснили упоредимо разне кругове са правом линијом и замислимо ради бољег сравнења, да средишта свију кругова леже на нормали n њихове заједничке тангенти t у тачци P. Тако нам постаје потпуно јасно, да се круг у толико више приближује правој t, т. ј. да је кривина круга у толико мања у колико је његов полупречник r већи. Према овоме је појмљиво, да је кривина круга $=\frac{1}{r}$. Као јединица кривине има се, дакле, сматрати кривина круга са полупречником 1.



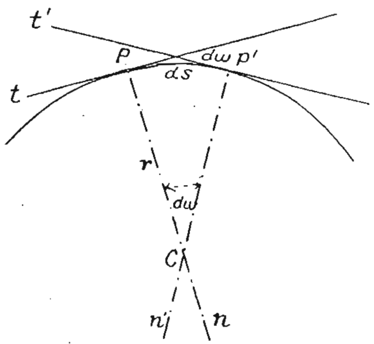
Сл. 46.

Означимо са ω средишни угао за лук s. Онда је $r\omega = s$, дакле кривина круга

I) $$\frac{1}{r} = \frac{\omega}{s}.$$

Средишни угао ω, то је у исто време и угао, које дирке у крајњим тачкама лука s чине међусобом.

126. Општа дефиниција кривине. — Ми смо показали (у 2. прим. чл. 124.) да се од свију кругова, који са задатом линијом имају једну тачку заједнички, најприсније приближује тој линији њен оскулаторни круг. Према томе је сасвим природно, ако дефинишемо кривину једне линије у извесној тачци као кривину њенога оскулаторног круга у тој тачци. Ми се можемо лако уверити, да се ова дефиниција кривине слаже са горе у чл. 125. под I датом дефиницијом кривине круга. Аналогно дефиницији под I разумемо под кривином ма какве линије у њеној тачци P количник из бесконачно малога угла $d\omega$, које тангенте t и t' у крајњим тачкама бесконачно малог лука $PP' = ds$ међусобом захватају и тога бесконачно малога лука ds. Имамо дакле
$$\frac{1}{r} = \frac{d\omega}{ds} \text{ или } r = \frac{ds}{d\omega}.$$



Сл. 47.

Угао $d\omega$, који две бесконачно приближне тангенте t и t' или што је једно исто угао, које две бесконачно приближне нормале n и n' заклапају, зове се *контигентни угао*. Средиште C кривине можемо сматрати као пресечну тачку нормала n и n' у двема бесконачно приближним тачкама P и P' криве линије.

Ако означимо са ω угао, који тангента линије у тачци P чини са x-осом, са ω' угао, који тангента у тачци P' чини са x-осом, онда је $\omega' - \omega = d\omega$ и пошто је $tg\ \omega = \frac{dy}{dx}$, дакле $\omega = arc\ tg \frac{dy}{dx}$, то је контигентни угао

$$d\omega = d\ arc\ tg \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Доцније доказаћемо, да је

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

На основу ових вредности за $d\omega$ и ds, а према горњој једначини следује за полупречник кривине

$$r = \frac{ds}{d\omega} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

дакле исти израз, који смо већ нашли за полупречник оскулаторног круга (в. једн. у чл. 124.). Овим смо доказали, да је круг кривине идентичан са оскулаторним кругом.

Примедба. Из обрасца за r видимо, да је у тачкама прегиба, у којима је, као што знамо $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, полупречник кривине $r = \infty$, а кривина дакле $\frac{1}{r} = 0$. Ово се потпуно слаже са нашим схватањем, да у тачкама прегиба тангента има најмање три (бесконачно приближне) тачке заједнички са кривом линијом (в. на крају 1. примера у чл. 124.). Оскулаторни круг, који има такође само три (бесконачно приближне) тачке заједнички са кривом линијом, претвара се, дакле у тачци прегиба у праву линију (тангенту).

127. Продужење. — Ако заменимо променљиву x другом каквом променљивом t, онда имамо по правилима Диференцијалног Рачуна да ставимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

и једначине IV) у чл. 124. добијају, према томе, овај општији вид

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= x - \frac{(d x^2 + d y^2)\, d y}{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x},\\ \beta &= y + \frac{(d x^2 + d y^2)\, d x}{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x},\\ r &= \pm \frac{[d x^2 + d y^2]^{\frac{3}{2}}}{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x}.\end{aligned}\right\}$$

Тако н. пр. добићемо полупречник кривине за косоугле координате, кад ставимо

$$x = X + Y \cos \vartheta, \qquad y = Y \sin \vartheta$$

(за случај да обе системе имају исти почетак и заједничку x-осу), дакле

$$d x = d X + d Y \cos \vartheta, \qquad d y = d Y \sin \vartheta,$$
$$d^2 x = d^2 X + d^2 Y \cos \vartheta, \qquad d^2 y = d^2 Y \sin \vartheta,$$

које, код субституишемо у општи образац за r и узмемо X за прапроменљиву (ставимо дакле $d^2 X = 0$), даје овај израз

$$r = + \frac{[d X^2 + d Y^2 + 2\, d X\, d Y \cos \vartheta]^{\frac{3}{2}}}{d X\, d^2 Y \sin \vartheta}$$

$$= \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{d Y}{d X}\right)^2 + 2 \frac{d Y}{d X} \cos \vartheta\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 Y}{d X^2} \sin \vartheta}.$$

Да би добили полупречник кривине за поларне координате ставимо

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \sin \varphi$$

и узмимо φ за прапроменљиву. Из

$$d x = \cos \varphi\, d \varrho - \varrho \sin \varphi\, d \varphi, \qquad d y = \sin \varphi\, d \varrho + \varrho \cos \varphi\, d \varphi$$
$$d^2 x = \cos \varphi\, d^2 \varrho - 2 \sin \varphi\, d \varrho\, d \varphi - \varrho \cos \varphi\, d \varphi^2,$$
$$d^2 y = \sin \varphi\, d^2 \varrho + 2 \cos \varphi\, d \varrho\, d \varphi - \varrho \sin \varphi\, d \varphi^2$$

и на основу горњег општег обрасца за r налазимо

$$r = \pm \frac{[d \varrho^2 + \varrho^2 d \varphi^2]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 d \varphi^3 + 2\, d \varrho^2\, d \varphi - \varrho\, d^2 \varrho\, d \varphi} = \pm \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d \varrho}{d \varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2 \left(\frac{d \varrho}{d \varphi}\right)^2 - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d \varphi^2}}.$$

Одавде следује, да у тачкама прегиба мора бити

$$\varrho^2 + 2 \left(\frac{d \varrho}{d \varphi}\right)^2 - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d \varphi^2} = 0.$$

128. Примери. —

1. Пример. Општа једначина линија другога степена:

$$y^2 = 2 p x - (1 - \varepsilon^2) x^2.$$

Овде је

$$\frac{d y}{d x} = \frac{p - (1 - \varepsilon^2) x}{y}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-(1 - \varepsilon^2) y - [p - (1 - \varepsilon^2) x] \frac{d y}{d x}}{y^2}$$

$$= \frac{-(1 - \varepsilon^2) y^2 - [p - (1 - \varepsilon^2) x]^2}{y^3}$$

$$= \frac{-(1 - \varepsilon^2) y^2 - p^2 - (1 - \varepsilon)^2 x^2 + 2 p (1 - \varepsilon^2) x}{y^3}$$

$$= \frac{-p^2 - (1 - \varepsilon^2) [y^2 - 2 p x + (1 - \varepsilon^2) x^2]}{y^3} = - \frac{p^2}{y^3}$$

и према томе полупречник кривине

$$r = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{p - (1 - \varepsilon^2) x}{4}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \pm \frac{(p^2 + \varepsilon^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

или на основу обрасца V' чл. 124. простије

$$r = \pm \frac{n^3}{p^2}.$$

2. Пример. Елипса и хипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Имамо

$$\frac{d y}{d x} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{y - x \frac{d y}{d x}}{y^2} = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{y \pm \frac{b^2 x^2}{a^2 y}}{y^2}$$

$$= - \frac{b^2 (b^2 x^2 \pm a^2 y^2)}{a^4 y^3} = - \frac{a^2 b^4}{a^4 y^3} = - \frac{b^4}{a^2 y^3}$$

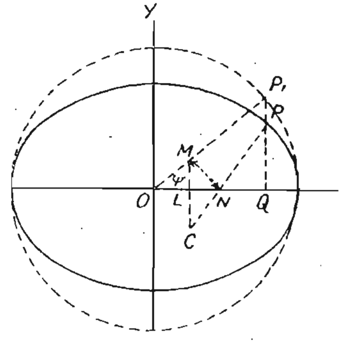
и према томе за координате средишта и полупречник кривине

$$\alpha = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad \beta = - \frac{c^2 y^3}{b^4}, \qquad r = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4},$$

где је за елипсу $c^2 = a^2 - b^2$, а за хиперболу $c^2 = a^2 + b^2$.

Помоћу вредности за α врло је лако конструкцијом определити средиште, па дакле и полупречник кривине. Покажимо за елипсу.

Из једначине нормале у тачци $P(x, y)$, а то је $Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x)$ налазимо, кад ставимо $Y = 0$ апсцису пресечне тачке N нормале и x-осе, дакле $ON = \frac{c^2 x}{a^2}$. На тај начин можемо да напишемо $\alpha = ON \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2$ или $\alpha = ON \cos^2 \psi$, ако означимо за ψ екцентричну аномалију $\sphericalangle P'OQ$ за тачку P. Спустимо из N управну NM но OP' и из M управну ML на x-осу. Из слике читамо, да је $OM = ON \cdot \cos\psi$, $OL = OM \cdot \cos\psi = ON \cdot \cos^2\psi$, дакле $\alpha = OL$. Према томе је дакле тачка C у којој ML сече нормалу PN елипсе средиште, а PC полупречник кривине за тачку P.



Сл. 48.

3. Пример. Парабола:

$$y^2 = 2px.$$

Из

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}$$

(в. 1. пример за $\varepsilon = 1$) и на основу једн. IV чл. 124. добијамо

$$\alpha = 3x + p, \quad \beta = -\frac{y^3}{p^2}, \quad r = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{n^3}{p^2}.$$

Помоћу ових вредности врло је лако конструисати средиште и полупречник кривине.

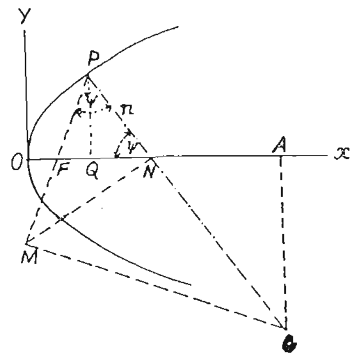
Вредност за α показује на први поглед, да је средиште C кривине пресек управне према x-оси у тачци A, која се налази у одстојању $OA = 3 \cdot OQ + p$ и нормале у задатој тачци P.

До истога ресултата долазимо, кад узмемо вредност

$$r = n\left(\frac{n}{p}\right)^2 = \frac{n}{\cos^2\psi},$$

ако означимо са ψ угао, који нормала чини са x-осом, а то је по познатоме својству параболе у исто време и угао, који жижни зрак PF чини са нормалом у тачци P и пошто подигнемо у N управну NM на PN, а у M управну MC на PF добијамо средиште кривине у тачци C. Из слике видимо, да је $PM = \frac{n}{\cos\psi}$,

$$PC = \frac{PM}{\cos\psi} = \frac{n}{\cos^2\psi} = r.$$



Сл. 49.

4. Пример. Верижница:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Из $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = y$ следују ове вредности

$$\alpha = x - \frac{e^x - e^{-x}}{2} y, \quad \beta = 2y, \quad r = y^2 = n.$$

Полупречник кривине је дакле раван нормали. Помоћу последњег ресултата и то, кад га напишемо у виду поступне сразмере $1 : y = y : n$ није тешко конструисати нормалу, па дакле и средиште кривине (имајући при томе на уму, да ово последње лежи на конкавној страни линије).

5. Пример. Проста циклоида:

$$x = a(\omega - \sin\omega), \qquad y = a(1 - \cos\omega)$$

(в. чл. 107. пример 6.).

Из

$$\frac{dx}{d\omega} = a(1 - \cos\omega), \qquad \frac{dy}{d\omega} = a \sin\omega,$$

$$\frac{d^2 x}{d\omega^2} = a \sin\omega, \qquad \frac{d^2 y}{d\omega^2} = a \cos\omega$$

следује

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 = 2a^2(1 - \cos\omega), \quad \frac{dx}{d\omega}\frac{d^2 y}{d\omega^2} - \frac{dy}{d\omega}\frac{d^2 x}{d\omega^2} = -a^2(1 - \cos\omega)$$

и на основу општих образаца у чл. 127.

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2}, \quad \beta = -y, \quad r = 2\sqrt{2ay} = 2n.$$

Ова последња два ресултата могу да нам послуже, да врло лако определимо конструкцијом средиште и полупречник кривине.

6. Пример. Кардиоида:

$$\varrho = a(\cos\varphi \pm 1)$$

(в. сл. 30.).

Из

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -a \sin\varphi, \qquad \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = -a\cos\varphi$$

а на основу обрасца у чл. 127. налазимо

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{2a}\,\sqrt{a(\cos\varphi \pm 1)} = \frac{2}{3}\sqrt{2a\varrho}$$

или кад сравнимо са дужином поларне нормале (чл. 106.)

$$n = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{2a}\sqrt{a(\cos\varphi \pm 1)} = \sqrt{2a\varrho}$$

добићемо, да је

$$r = \frac{2}{3} n.$$

7. *Пример. Лемниската:*

$$\varrho^2 = 2\,a^2 \cos 2\,\varphi$$

(в. чл. 107. пример 7.).

Из
$$\varrho\,\frac{d\,\varrho}{d\varphi} = -\,2\,a^2 \sin 2\,\varphi,$$

$$\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = -\,\frac{2a^2 \sin 2\,\varphi}{\varrho}, \qquad \varrho\,\frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} + \left(\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi}\right)^2 = -\,4\,a^2 \cos 2\,\varphi,$$

одакле
$$\varrho\,\frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} = -\,4\,a^2 \cos 2\,\varphi - \frac{4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2}$$
следује

$$r = \frac{\left[2\,a^2 \cos\,2\,\varphi + \dfrac{4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{2\,a^2 \cos 2\,\varphi + \dfrac{8\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2} + \dfrac{4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2} + 4\,a^2 \cos 2\,\varphi}$$

$$= \frac{[4\,a^4 \cos^2 2\,\varphi + 4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^3\left[6\,a^2 \cos\,2\,\varphi + 12\,\dfrac{a^4 \sin^2\,2\,\varphi}{\varrho^2}\right]} = \frac{4\,a^4}{3\,\varrho^3\left[\cos\,2\,\varphi + 2\,\dfrac{a^2 \sin^2\,2\,\varphi}{\varrho^2}\right]}$$

$$= \frac{2\,a^2}{3\,\varrho}.$$

8. *Пример. Логаритамска спирала:*

$$\varrho = b^{\varphi}$$

(в. чл. 107. пример 11.).

Овде је
$$\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = b^{\varphi}\,l\,b = \varrho\,l\,b, \qquad \frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} = b^{\varphi}\,(l\,b)^2 = \varrho\,(l\,b)^2$$

и према томе полупречник кривине

$$r = \varrho\,\sqrt{1 + (l\,b)^2}.$$

Исту вредност има и поларна нормала $n = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi}\right)^2}$. На основу тога и познате конструкције тангенте, па дакле и нормале, можемо лако наћи средиште кривине.

9. Еволута и еволвента.

129. Дефиниција. — Средишта кривине једне линије образују линију, која се зове *еволута* оне прве, а ова опет њена *еволвента.*

Једначину еволуте једне задате линије добићемо, кад помоћу једначина III другог примера у чл. 124. елиминујемо x и y. Услед тога, што су вредности за $\frac{d\,y}{d\,x}$ и $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ једне исте узели их из једначине задате линије или из једначине њенога оскулаторног круга у додирној тачци, можемо поменуте једначине III, које су нам служиле за опредељавање координата α и β, да заменимо овима

$$\left.\begin{aligned} &y = f\,(x),\\ &(x - \alpha) + (y - \beta)\,\frac{d\,y}{d\,x} = 0\\ &1 + (y - \beta)\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Елиминовањем текућих координата x и y помоћу ових једначина налазимо једначину геометриског места средишта кривине за све тачке задате линије $y = f\,(x)$, а то је једначина њене еволуте у координатама α и β.

130. Закључци. — Из последње две једначине чл. 129. налазимо координате средишта кривине

$$\alpha = x - \frac{1 + \left(\dfrac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\dfrac{d^2\,y}{d\,x^2}}\,\frac{d\,y}{d\,x}, \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\dfrac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\dfrac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$

(в. чл. 124.), које на основу тога што је

$$r = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2\,y}{d\,x^2}}, \quad tg\;\omega = \frac{d\,y}{d\,x},$$

где је r полупречник кривине, а ω угао, који дирка у тачци x, y чини са x-осом, можемо написати простије

$$\alpha = x - r\,\sin\,\omega, \qquad \beta = y + r\,\cos\,\omega.$$

Пошто су све ове количине зависне од x, то добијамо диференциалењем

$$d\,\alpha = d\,x - r\,\cos\,\omega\,d\,\omega - \sin\,\omega\,d\,r, \qquad d\,\beta = d\,y - r\,\sin\,\omega\,d\,\omega + \cos\,\omega\,d\,r.$$

На основу тога што је

$$d\,x = d\,s\,\cos\,\omega, \qquad d\,y = d\,s\,\sin\,\omega,$$

ако означимо са $d\,s = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}$ диференциал лука можемо написати последње обрасце

$$d\,\alpha = \cos\,\omega\,[d\,s - r\,d\,\omega] - \sin\,\omega\,d\,r, \quad d\,\beta = \sin\,\omega\,[d\,s - r\,d\,\omega] + \cos\,\omega\,d\,r,$$

које се опет услед једначина у чл. 126. скраћује на

$$d\,\alpha = -\,\sin\,\omega\,d\,r, \quad d\,\beta = \cos\,\omega\,d\,r.$$

Одавде следује

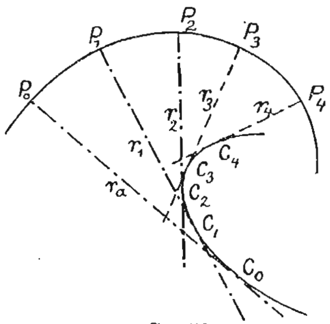
$$\frac{d\,\beta}{d\,\alpha} = -\,cotg\,\omega \text{ или } \frac{d\,\beta}{d\,\alpha} = -\,\frac{1}{\dfrac{d\,y}{d\,x}} = -\,\frac{d\,x}{d\,y}$$

$$d\,\alpha^2 + d\,\beta^2 = d\,r^2, \text{ дакле } d\,r = \sqrt{d\,\alpha^2 + d\,\beta^2}.$$

Имајући на уму, да је $-\frac{dx}{dy}$ угловни сачинитељ нормале задате линије у тачци x, y, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ угловни сачинитељ тангенте њене еволуте у тачци α, β (средишту кривине за тачку x, y) закључујемо, да је нормала задате линије у исто време тангента еволуте и обрнуто тангента задате линије нормала еволуте. Према томе можемо еволуту једне линије сматрати као анвелопу нормала те линије и полазећи са тога гледишта наћи на познати начин једначину еволуте. За ту цињ треба узети једначипу нормале задате линије и представити је као функцију једног или два параметра и поступити према упутствима чл. 111.—113.

Из последњег израза читамо, да је диференциал полупречника кривине задате линије раван диференциалу лука њене еволуте. Означимо са $d\sigma$ диференциал лука еволуте, т. ј. ставимо $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$, па ћемо добити, на основу тога што је $d\sigma = dr$, једначину $\sigma = r + Const.$ Пошто ова једначина важи за ма какве две одговарајуће вредности лука и полупречника кривине, н. пр. $\sigma_0 = r_0 + Const.$ следује, кад такве две једначине одузмемо једну од друге $\sigma - \sigma_0 = r - r_0$. Ако будемо мерили дужину лукова почев од извесне тачке C_0 (од средишта кривине за које је полупречник $= r_0$), тако да је $\sigma_0 = 0$ имаћемо

$$\sigma = r - r_0.$$



Сл. 50.

Лук еволуте раван је разлици из полупречника кривине њене еволвенте у тачкама, које одговарају крајњим тачкама тога лука. Или: дужина извеснога лука (н. пр. $C_0 C_3$) еволуте, који лежи између два полупречника кривине ($P_0 C_0 = r_0$ и $P_3 C_3 = r_3$) њене еволвенте равна је разлици из дужина тих полупречника (т. ј. лук $C_0 C_3 = r_3 - r_0$).

Замислимо у ма којој тачци еволуте једне задате линије, н. пр. у тачци C_3 један конац дужине r_3 утврђен и замислимо, да се тај конац намотава по еволути тако, да вазда остаје затегнут, онда ће његов крај, који је у почетку био у тачци P_3, описивати задату линију, т. ј. еволвенту линије $C_0 C_1 C_2 C_3 \ldots$ Није тешко увидети, да и ако једној задатој линији одговара увек само једна еволута обрнуто једна линија има бесконачно много еволвената, јер све линије, које имају то својство, да њихове тангенте секу нормале задате линије под правим углом јесу еволвенте те линије. Но ово, да свака линија има бесконачно много еволвената, већ је и по томе јасно, што је дужина конца $P_3 C_3 = r_3$, који обмотавањем по задатој линији $C_0 C_1 C_2 C_3 \ldots$ производи еволвенту $P_0 P_1 P_2 P_3 \ldots$, потпуно произвољна. Продужењом или скраћивањем тога конца добијамо безбројно много еволвената за једну исту линију. Све су те еволвенте међусобом паралелне.

131. Примери. —

1. *Пример.* За *елипсу* и *хиперболу* нашли смо за координате средишта кривине

$$\alpha = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad \beta = -\frac{c^2 y^3}{b^4}$$

(в. 2. пример чл. 128.). Одавде следује

$$x^2 = \left(\frac{a^4 \alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad y^2 = \left(\frac{b^4 \beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

које кад ставимо у једначину задате линије $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ даје једначину еволуте

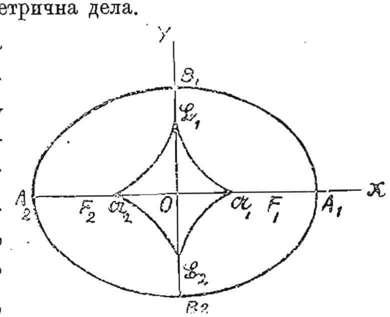
$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

или, ако означимо $\frac{c^2}{a} = p$, $\frac{c^2}{b} = q$ можемо је написати

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{\beta}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

За елипсу једначина еволуте гласи дакле $\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. Из ове једначине закључујемо, да се линија састоји из четири конгруентна и наспрам координатних оса симетрична дела.

На основу тога што је за $\beta = 0$, $\alpha = \frac{c^2}{a}$, дакле $\alpha < c$ следује, да ова линија сече x-осу у тачкама $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, које леже између средишта и жижа елипсе. Даље видимо, да је за $\alpha = 0, \beta = \frac{c^2}{b}$. Пошто ово може, према случају, да буде $\gtreqless b$ и то $\beta = \frac{c^2}{b} \gtreqless b$ према томе, да ли је $c^2 = a^2 - b^2 \gtreqless b^2$, т. ј. према томе, да ли је $a \gtreqless b\sqrt{2}$

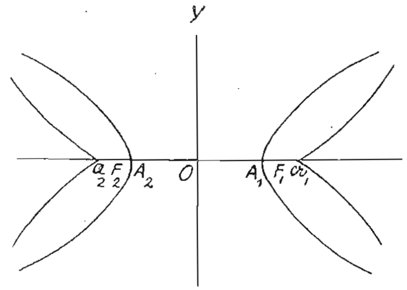


Сл. 51.

то значи, да еволута може лежати једним делом изван или сасвим у елипси. За $a = b\sqrt{2}$ крајње тачке $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ еволуте на y-оси падају на темена B_1 и B_2 мале осе. — Линија је свуда конвексна наспрам x-осе.

За хиперболу имамо једначину еволуте

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$



Сл. 52.

Као и код елипсе, тако и овде састоји се линија из четири конгруентна и наспрам координатних оса симетрична дела. Еволута се састоји из две у бесконачност простируће се гране, конвексне наспрам x-осе. Тачке $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, у којима линија сече x-осу, леже у одстојању $\frac{c^2}{a}$ од средишта хиперболе, дакле даље од жижа F_1 и F_2.

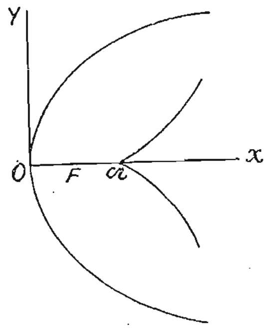
2. *Пример.* За *параболу* нашли смо

$$\alpha = 3x + p, \qquad \beta = -\frac{y^3}{p^2}$$

(в. 3. пример чл. 128.), одакле

$$x = \frac{\alpha - p}{3}, \qquad y^2 = (p^2\beta)^{\frac{2}{3}},$$

које кад ставимо у једначину параболе $y^2 = 2px$ налазимо једначину еволуте



Сл. 53.

$$(p^2\beta)^{\frac{2}{3}} = 2p\,\frac{\alpha - p}{3} \quad \text{или} \quad \beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Линија се састоји из два бесконачна наспрам x-осе конвексна и симетрична дела. Ако узмемо тачку $\mathfrak{A}$, у којој еволута сече x-осу и која лежи у одстојању p од темена параболе, за нов почетак координата, т. ј. ако заменимо $\alpha - p$ са α, једначина еволуте добија овај простији вид

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}\alpha^3.$$

Ми знамо, да је ово једначина Најлове параболе (в. 5. пример у чл. 107.).

3. *Пример.* Код *просте циклоиде* имамо

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2}, \qquad \beta = -y$$

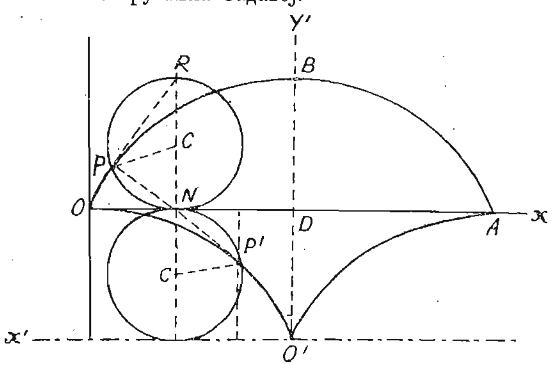
(в. 5. пример чл. 128.), одакле

$$x = \alpha - 2\sqrt{-2\alpha\beta - \beta^2}, \qquad y = -\beta$$

и кад ставимо те вредности у једначину циклоиде $x = a\,.\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$ добићемо једначину еволуте

$$\alpha = a\,.\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{a+\beta}{a} + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Није тешко доказати, да је еволута циклоиде такође циклоида и шта више конгруентна задатој.



Сл. 54.

Да бисмо једначину еволуте довели на исти вид, у коме је једначина задате циклоиде, узмимо испод x-осе у одстојању $2a$ нову x'-осу, DB за y'-осу, а тачку O' дакле за координатни почетак. Услед тога што је $OD = a\pi$ имамо следеће трансформационе једначине

$$\alpha = a\pi - x',$$
$$\beta = y' - 2a$$

и према томе једначину

еволуте у новој системи

$$a\pi - x' = a\,.\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{y'-a}{a} + \sqrt{2a(2a - y') - (y' - 2a)^2},$$

одакле

$$x' = a\left[\pi - \mathrm{arc\,cos}\,\frac{y'-a}{a}\right] - \sqrt{2ay' - y'^2}$$

или најзад

$$x' = a\,.\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{a-y'}{a} - \sqrt{2ay' - y'^2}.$$

Кад сравнимо ову једначину са једначином задате циклоиде OBA уверићемо се, да су те две линије идентичне и да се само у положају наспрам координатних оса x, y разликују.

Исти резултат, да је еволута просте циклоиде једна и то првој конгруентна циклоида, показало би нам чисто геометриско расматрање узев у обзир, да је полупречник кривине задате циклоиде, н. пр. у тачци P, $r = 2\,.\,PN = PP'$ (в. 5. пример чл. 128.).

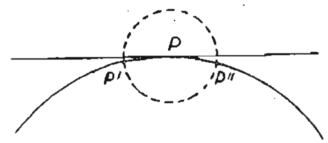
На слични начин могли би доказати, да је еволута епициклоиде такође епициклоида, која са задатом стоји у односу, да је $a_1 : b_1 = a : b$, где a_1 и b_1 имају за еволуту исти значај, који a и b за задату линију.

Из ове последње примедбе следује онда по себи, да је и еволута кардиоиде такође кардиоида, пошто се ова линија можа сматрати као један особени облик епициклоиде.

4. *Пример.* Код *логаритамске спирале* нашли смо, да је полупречник кривине = нормали. Из тога није тешко закључити, да је еволута логаритамске спирале таква иста линија.

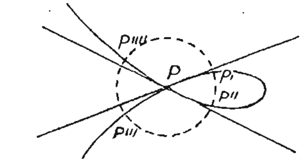
10. Особене тачке кривих линија.

132. Појам. — Замислимо око тачке P извесне криве линије описан круг са бесконачно малим полупречником. Тај круг сећиће задату линију уопште у двема тачкама P' и P'' и то тако, да је $\sphericalangle P'PP''$ бесконачно мало различан од 180^0. Оне тачке криве линије, које имају то својство, да из њих са бесконачно малим полупречником описани круг не сече линију у двема тачкама или ако је сече, а оно не тако, да је $\lim \sphericalangle P'PP'' = 180^0$, зовемо *особеним тачкама.*

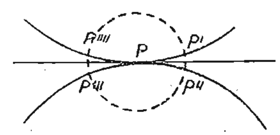


Сл. 55.

133. Многоструке тачке. — Под *многоструким тачкама* разумемо такве тачке око којих са бесконачно малим полупречником описани круг



Сл. 56.



Сл. 57.

сече линију у више од две тачке. Многоструке тачке постају услед укрштања или додиривања више разних грана криве линије. У таквим тачкама линија има више тангената, које се пак, у извесним случајима, могу и поклапати. Према броју могућих тангената каже се, да је тачка двострука, трострука, … n-струка.

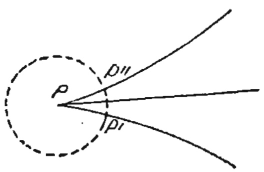
Примери.

1. Код строфоиде (в. сл. 33. и 34. у чл. 110.) је почетак координата двострука тачка. У тој тачци линија има две тангенте. Код праве строфоиде јесте у почетку координата $\frac{dy}{dx} = \pm 1$. Тангенте чине са x-осом угле од 45^0 и $90^0 + 45^0$ и стоје, дакле, управно једна према другој.
2. Декартов лист (в. сл. 32. у чл. 110.) има у почетку координата двоструку тачку. Тангенте линије су x- и y-оса.
3. Линија $y = \pm (x - b) \sqrt{A (x - a)}$ има двоструку тачку $x = b$, $y = 0$ на x-оси. У тој тачци је $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{A (b - a)}$.
4. Паскалова линија за случај, да је $a > b$ има у почетку координата двоструку тачку са двема тангентама.
5. Лемниската (в. сл. 28. у чл. 107.) има у почетку координата двоструку тачку у којој тангенте стоје управно једна према другој: $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.
6. Кад конхоиде за коју је $a < b$ имамо у тачци $x = 0$, $y = -a$ две тангенте линије, па дакле двоструку тачку.
7. Код линије шестога степена $[x^2 + y^2 + \frac{b}{\sqrt{2}}(x + y)]^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2 y^2$ тачка A са координатама $x = \frac{b}{\sqrt{2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ јесте четворострука. Линија има у тој тачци четири разне тангенте. Осим тога постаје код ове линије две двоструке тачке $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ у којима линија има по две тангенте.

За случај, да је $b = 0$ почетак координата је четворострука тачка, али само са две тангенте.

134. Повратне тачке. — Ако круг, који је из тачке P описан са бесконачно малим полупречником, сече линију у двема тачкама P' и P'', али тако, да се $\sphericalangle P'PP''$ само за бесконачно мало разликује од нуле, онда кажемо, да је P *повратна тачка.*

У повратној тачци једне криве линије граниче и додирује се две гране, тако дакле, да у тој тачци обе гране линије имају једну исту тангенту.

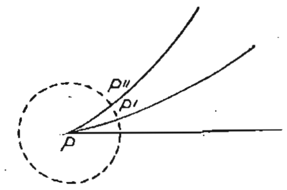


Сл. 58.

Повратне тачке делимо на *повратне тачке прве врсте* и *повратне тачке друге врсте.* Код првих леже гране на разним странама њихове заједничке тангенте (в. сл. 58.), а код других на једној истој страни дирке (в. сл. 59.).

Ако је $P\ (a, b)$ повратна тачка, онда за $x = a - h$, где је h бесконачно мала количина, добијамо или две стварне или две уображене вредности ординате, док

за $x = a + h$ оне постају на против или уображене или стварне. За $x = a$ имамо две стварне и једнаке вредности како за y тако и за $\frac{dy}{dx}$. Да ли је P повратна тачка прве илу друге врсте можемо оценити помоћу знака, који $\frac{d^2y}{dx^2}$ има у близини тачке P, т. ј. на основу конвексности или конкавности линије у близини повратне тачке.



Сл. 59.

Примери.

Повратне тачке прве врсте и то у почетку координата имају 1. цисоида, 2. Најлова парабола, 3. Кардиоида. Код тих линија је x-оса тангента у повратној тачци. 4. Конхоида, за коју је $a = b$, има такође једну повратну тачку прве врсте, а то у тачци $A\ (x = 0,\ y = -a)$. Овде је y-оса тангента линије у повратној тачци.

Као пример за повратне тачке друге врсте узмимо 5. линију $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$.

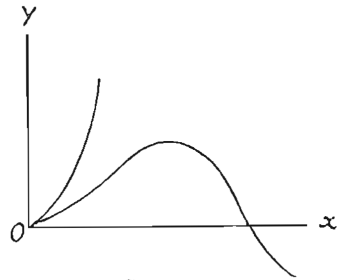
Дискусија ове једначине показује, да линија има изглед у сл. 60. Почетак координата је повратна тачка друге врсте. x-оса је тангента линије у тој тачци.

Да је 0 заиста повратна тачка видимо из тога што за $x = + h\, y$ има две стварне, за $x = 0$ две једнаке ($= 0$) вредности, док за $x = - h\, y$ постаје имагинарно.

На основу тога, што је

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x} \quad \text{за } x = 0 \text{ положно } \left(\frac{d^2y}{dx^2} = 2\right)$$

закључујемо, да су у тачци O обе гране линије конвексне према x-оси, да је, дакле, O повратна тачка друге врсте.



Сл. 60.

135. Одвојене тачке. — Под *одвојеном тачком* једне криве линије разумемо такву тачку, која (и ако координате њене задовољују једначину линије) не стоји у вези са осталим тачкама те линије. Тачка $P\,(a, b)$ је одвојена, кад су ординате, како за $x = a + h$, тако и за $x = a - h$, т. ј. за сваку од a бесконачно мало различну апсцису, имагинарне. Круг са бесконачно малим полупречником описан из одвојене тачке не сече линију никако.

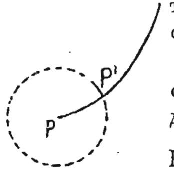
Пример. Линија $y = \pm (x - a) \sqrt{A (x - c)}$, где је $a < c$ има одвојену тачку $x = a$, $y = 0$. За свако друго од a бесконачно мало различно x ордината y је имагинарна. То је доказ, да тачка $x = a$, $y = 0$ не стоји у вези ни са којом тачком линије.

136. Крајне тачке. За једну тачку P кажемо, да је *крајна,* кад око ње описани круг са бесконачно малим полупречником сече линију само у једној тачци P'. У таквој тачци свршава се једна грана линије.

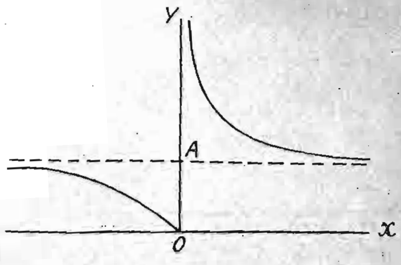
Пример: $y = e^{\frac{1}{x}}$

Одавде читамо, да је за $x = 0$, $y = \infty$ и да у колико x расте y опада, тако, да за $x = \infty$ постоје $y = 1$.

За одречне апсцисе, почев од $x = -0$, па до $x = -\infty$ ординате расту од $y = e^{-\frac{1}{0}} = 0$, па до $y = 1$.



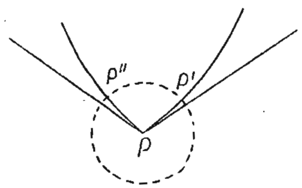
Сл. 61.



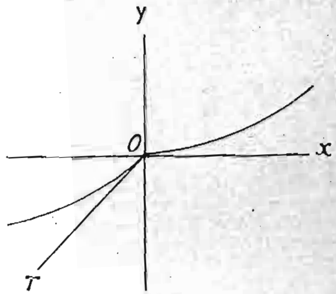
Сл. 62.

Из овога видимо, да је почетак координата крајња тачка у којој се ова друга грана линије свршава. Даље закључујемо, да је права паралелна са x-осом у одстојању $OA = 1$ асимптота за обе гране.

137. Тачке преламања. — Тачке, око којих са бесконачно малим полупречником описани круг сече линију у двема тачкама, али тако, да је $0 < \sphericalangle P'PP'' < 180^0$ зову се *тачке преламања.* У таквим тачкама свршавају се две гране линије и свака грана има своју тангенту.



Сл. 63.



Сл. 64.

Пример.

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

На основу тога, што је за $x = 0$ и $y = 0$, закључујемо да линија пролази кроз почетак координата. Да бисмо добили тангенту линије у тој тачци треба узети $\frac{dy}{dx}$ или што је једно исто $\frac{y}{x}$ за $x = 0$ и $y = 0$. Из једначине следује

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Пошто овај израз има две вредности и то за

$$x = +h, \ \lim_{h=0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 0 \quad \text{и за } x = -h, \ \lim_{h=0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{h}}},$$

то видимо, да линија има две тангенте у почетку координата: x-оса је једна, а права OT, што полови координатни угао у трећем квадранту, друга тангента линије. Првој одговара угловни сачинитељ $\frac{dy}{dx} = 0$, а другој $\frac{dy}{dx} = 1$. Тачка O је дакле тачка преламања.