ПРВИ ДЕО

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

САДРЖАЈ.

IV.

Примена Диференциалног Рачуна у Геометрији.

ОСНОВИ
ИНФИНИТЕЗИМАЛНОГА
РАЧУНА

САСТАВИО

Dr. Димитрије Данић
професор Војне Академије

Други део
ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

са 68 слика у тексту

БЕОГРАД
Издавачка књижара
Бранислав Церовић - Ајхштет
Кнез Михаилова улица број 30.
1922

ДРУГИ ДЕО

ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

Предговор

С обзиром на циљ ове књиге, окарактерисана њеним насловом ови Инфинитезималнога Рачуна, износим само најпотребније знање еорије интегралења. Уверен да велика већина оних, који ће се слу- ı овим делом уче Математику поглавито ради њене примене, као да су примене најбоље срество да ученика заинтересује за изуча- Математике, определило ме је да унесем сразмерно велики део их примена Интегралнога Рачуна у Геометрији и Механици. Исти ог ме је руководио да и Теорији Диференциалних једначина усту- већи простор. Најзад нашао сам за потребно да у краткоме обиму эм нешто о елиптичним интегралима и елиптичним функцијама.

Београд, Маја 1922.

Dr. Димитрије Данић.

САДРЖАЈ.

Диференциалне једначине

Подела.

А. Обичне диференциалне једначине.

I.

Диференциалне једначине првога реда.

1. Одвајање променљивих.

2. Интегралење потпуних диференциала.

3. Диференциалне једначине првога реда.

II.

Диференциалне једначине вишега реда.

1. Општа посматрања.

2. Диференциалне једначине другога реда.

3. Диференциалне једначине вишега реда.

4. Линеарне једначине вишега реда.

ИСПРАВКЕ:

На страни 47. у 14. врсти одозго место изводно читај изводна.

На страни 49. у 16. врсти одозго после знака $=$ још и знак $-$.

На страни 107. у четвртој врсти одозго треба после $A_1 = \frac{\varphi_1(a)}{f_1(a)}$ знак $=$ место знака $+$.

На страни 136. на сл. 38. крајњу тачку полупречника r обележити са B.

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

ПОЈМОВИ ИЗ АЛГЕБАРСКЕ АНАЛИЗЕ

I.

Општи појмови и дефиниције

1. О функцијама уопште.

1. Промењиве и сталне количине. — Количине, које у току не проблеме своју вредност мењају, зову се *промењиве количине.* Ко- чине, пак, које не зависе од промењивих и које за време целог ра- а задржавају једну исту вредност зовемо *сталним количинама* или *стантама.*

Промењиве количине означавамо, обично, последњим писменима уке: са u, v, w, x, y, z, сталне количине првим писменима: са a, b, c…

2. Функције. — Кад две количине зависе једна од друге тако, мењање једне од њих повлачи собом мењање оне друге, онда се каже су те количине *функције* једна од друге.

Тако н. пр. периферија круга јесте функција полупречника и обратно.

На исти начин кажемо и за више промењивих количина да су нкције једна од друге, кад се вредност сваке од њих управља према едностима оних осталих. Ми знамо да висина, основица и површина нога троугла зависе једно од друго, тако да задатим вредностима еју од тих количина одговора увек једна одређена вредност оне еће. То значи, да је свака од тих трију количина функција осталих еју. И. т. д.

3. Независно промењиве и зависно промењиве. — Кад се кон, по коме две или више количина зависе једна од друге, преведе језик Алгебре, добија се једначина, као аналитички израз за везу, ја постоји између тих количина. Ако у таквој једначини има само е промењиве количине, онда можемо једној од њих да дајемо про- вољне вредности, а вредности оне друге промењиве управљаће се ема овима. Количина, које се мења независно, зове се *прапромењива;* ону другу кажемо да је њена функција.

Ако у једначини има више од две промењиве количине, онда су е, осим једне, независне, а она једна је функција њихова, дакле функ- ја од више прапромењивих.

Напомена. Са чисто теориског гледишта потпуно је свеједно коју ћемо од променљивих сматрати за независно, а коју за зависно променљиву. У многим приликама, а нарочито у применама, тај нам се избор по себе намеће; некада још у самоме почетку, а некада у току расматрања. Ево један пример. Нека је $2\,x^3 y + 3\,y - x^5 + 8 = 0$ задата функција за проучавање. Као што видимо ова је једначина у погледу y-а првога, а у погледу x-а петога степена. Према томе је далеко лакше израчунавати y-е из појединих вредности x-а, но обратно. Значи да треба узети x за прапроменљиву. Дотична једначина може да представља извесну линију у Декарт-овим координатама или може да је једначина каквога кретања. — За математичко клатно имамо познати образац $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Овде су променљиве t (време) и l (дужина клатна); константе су $\pi = 3{,}1415\ldots$ и $g = 9{,}805\ldots$ Проучавајући ову појаву лакше је мењати l и рачуном изналазити t, но обратно: из врло разумљивог разлога. Тако је исто појмљиво зашто је код једначине $y = \pi x^2$, која показује однос између полупречника x и кружне површине y, природније и за проучавање лакше да се узме полупречник x за независно променљиву, но површина y. — Код проучавања неких трансцендентних линија (циклоида), као и при проучавању многих питања о кретању препоручује се да се обе променљиве x и y сматрају као функције нове променљиве t. У Механици је то t обично време. И. т. д.

4. Откривене и скривене функције. — Кад је једначина, која изражава везу између двеју или више променљивих количина, решена по зависно променљивој, тако да је она сама на левој, а све остало на десној страни једначине, функција се зове *откривена* (explicite). У противном случају, т. ј. кад једначина није решена по зависно променљивој количини, ми кажемо да је функција у *скривеној* (implicite) форми.

5. Функциони знаци. — Да бисмо означили да је једна количина, н. пр. z функција једне или више прапроменљивих $x, y \ldots$, а нећемо да карактеришемо ближе на који су начин оне међусобом везане, ми се служимо писменима $f, F, \varphi, \Phi \ldots$, такозваним *функционим знацима;* стављамо

$$z = f(x),\ z = \varphi(x,\ y), \ldots$$

и читамо: z је функција x-а или z је функција x-а и y-а. И. т. д.

Овде је z представљено у откривеној форми. У скривеној форми ми бисмо написали овако:

$$F(x,\ z) = 0,\ \ \Phi(x,\ y,\ z) = 0, \ldots$$

6. Посредне функције и сложене функције. — Ако је $z = f(y)$, а $y = \varphi(x)$, онда се каже да је z *посредна функција* или *функција функције.* z је посредна функција променљиве y, а непосредна функција променљиве x, јер је $z = f\,[\varphi(x)]$.

Нека је $z = F(x, y)$, а претпоставимо да је $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$. Тада се z зове *сложена функција;* $z = F[f(u),\ \varphi(u)]$.

7. Алгебарске и трансцендентне функције. — Ми делимо све функције на алгебарске и на трансцендентне. Функција је *алгебарска* кад су радње, које се са променљивим количинама има да изврше, алгебарске, а то су сабирање, одузимање, множење, дељење, подизање на степен и кореновање са познатим изложитељем. Све остале функције, које нису алгебарске, зову се *трансцендентне.* То су изложитељне, логаритамске, тригонометриске и циклометриске функције.

Најпростије (основне) алгебарске функције јесу ове: $a + x$, $a - x$, $a\,x$, $\frac{a}{x}$, x^a, $\sqrt[a]{x}$, а најпростије трансцендентне функције гласе: a^x, $log\,x$, $sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$, $cotg\,x$, $arc\,sin\,x$, $arc\,cos\,x$, $arc\,tg\,x$, $arc\,cotg\,x$.

8. Рационалне и ирационалне функције. — Алгебарска функција је *ирационална* или *рационална* према томе да ли се у њеноме изразу, пошто се овај по могућству сведе, ма једна од променљивих количина налази испод кореног знака или не. Другим речима: функција је рационална, ако су сви изложитељи променљивих количина цели бројеви; функција је ирационална, ако се ма и на једноме месту налази променљива количина са разломљеним изложитељем.

9. Целе и разломљене функције. — За једну алгебарску функцију кажемо да је *цела,* кад се ниједна од променљивих, од којих функција зависи, не јавља у именитељу или, што је једно исто, кад су изложитељи променљивих количина положни. У противноме случају функција се зове *разломљена* или *деловна.*

Према овоме и ономе што смо казали у прошломе члану постављамо дефиницију: под целом и рационалном функцијом разумемо један полином у коме се прапроменљива јавља само са целим и положним изложитељима. Општи тип такве функције то је полином једне алгебарске једначине, дакле

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где је n цело и положно, $a_1, a_2, \ldots a_n$ произвољне константе, од којих по неке могу бити $= 0$. Највиши степен прапроменљиве одређује димензију или степен функције.

Количник из две целе и рационалне функције, а то је израз вида

$$\frac{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

зовемо *рационално разломљеном функцијом.*

За такву рационално разломљену функцију кажемо да је *чисто* или *нечисто разломљена,* према томе да ли је степен дељеника мањи или већи од степена делитеља, т. ј. да ли је $n \lesseqgtr m$.

На случај да је степен дељеника већи од степена делитеља ($n > m$), да је функција, дакле, нечисто разломљена, она може да се разложи на једну целу и једну чисто разломљену функцију. То се разлагање врши обичним дељењем. Н. пр.

$$\frac{5x^3 - 2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 3x + 2} = 5x + 13 + \frac{32x - 22}{x^2 - 3x + 2}.$$

2. Бесконачно велике и бесконачно мале количине.

10. Дефиниција. — Количина, која непрекидним растењем добија све веће бројне вредности и постаје најзад већа но ма како велики број, зове се *бесконачно велика количина.*

Количина, која непрекидним опадањем постаје мања од сваке ма како мале количине, зове се *бесконачно мала количина.*

Из ових дефиниција следује, да се бесконачно велике и бесконачно мале количине не смеју сматрати као одређене количине; оне су променљиве. Нарочито треба правити разлику између бесконачно мале количине и нуле. Нула није количина; она је негација количине.

11. Правила. — Ако означимо са ∞ бесконачно велике количине, онда је $\frac{1}{\infty}$ бесконачно мала количина. За њих вреде следећа правила.

Сабирање и одузимање.

1. $\infty + \infty + \ldots + \infty = \infty.$
2. $\infty - \infty$ може, према прилици, да буде бесконачно велико, коначно или бесконачно мало. Такав се израз зове *неодређен облик.*
3. $\infty \pm a = \infty$, где a означава какву било коначну количину.
4. $\infty \pm \frac{1}{\infty} = \infty.$
5. $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty} \pm \ldots \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}.$ Ово, пак, вреди само онда кад је број сабирака коначан. У противноме случају, т. ј. ако је број сабирака бесконачно велики, ресултат може па буде коначан, бесконачно мали, па и бесконачно велики. Тако н. пр. ако једну количину (тело, дуж, и. т. д.) растворимо на бесконачно мале делове, збир свију тих делова остаје раван дотичној количини и он је коначан, бесконачно мали или бесконачно велики, према томе каква је количина, коју смо узели у расматрање.

Множење.

6. $\infty \cdot \infty = \infty.$
7. $\infty \cdot a = \infty.$
8. $\infty \cdot \frac{1}{\infty}$ јесте неодређено, јер се своди на случај једнога збира бесконачно много бесконачно малих количина.

9. $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}.$
10. $\frac{1}{\infty} \cdot a = \frac{1}{\infty}.$

Дељење.

11. $\frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \frac{1}{\infty}$, дакле неодређено (види под 8).
12. $\frac{\infty}{a} = \infty.$
13. $\infty : \frac{1}{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty.$
14. $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ и према томе неодређено.
15. $\frac{1}{\infty} : a = \frac{1}{\infty}.$
16. $\frac{1}{\infty} : \infty = \frac{1}{\infty}.$
17. $a : \infty = \frac{1}{\infty}.$
18. $a : \frac{1}{\infty} = \infty.$

Степеновање и кореновање.

19. $\infty^\infty = \infty.$
20. $\infty^a = \infty$, ако је $a > o$, т. ј. положно, иначе $\infty^a = \frac{1}{\infty}$, ако је $a < o$, т. ј. одречно.
21. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ јесте неодређено, јер кад логаритмујемо добијамо $\log \infty^{\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\infty} \log \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty$, а то је неодређена вредност.
22. $\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}}$ такође је неодређено, као што се види кад логаритмујемо: $\log \left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\infty} \log \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty.$
23. $\left(\frac{1}{\infty}\right)^a = \frac{1}{\infty}$, ако је $a > o$, напротив $\left(\frac{1}{\infty}\right)^a = \infty$, ако је $a < o.$
24. $\left(\frac{1}{\infty}\right)^\infty = \frac{1}{\infty}.$
25. $a^\infty = \infty$, ако је $a > 1$, међутим
    $a^\infty = \frac{1}{\infty}$, ако је $a < 1$.

На случај да је $a = 1$ имамо 1^∞, које је неодређено, као што се види из тога што је $\log 1^\infty = \infty \log 1 = \infty \cdot \frac{1}{\infty}.$

26. $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

Ако, ради краћег бележења, означимо бесконачно мале количине са 0, онда можемо изразе, за који смо казали да имају неодређени вид, да напишемо $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, ∞^0, 0^0, 1^∞.

Ми смо видили да се сви они могу да сведу на једну форму. Опште методе за изналажење правих вредности таквих израза даје Диференцијални Рачун.

3. Границе функција.

12. Појам границе. — Кад непрестаним растењем или опадањем прапроменљиве количине и приближавањем исте извесној вредности, н. пр. вредности $x = a$, функција тежи некој сталној вредности, н. пр. $f(x) = b$, тако да разлика између те вредности b и ма које друге функционе вредности постаје све мања у колико је x приближније a: онда се каже да дотична функција тежи *граници (limes)* b. То се знацима бележи

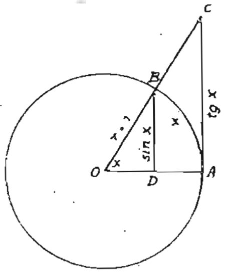
$$\lim_{x=a} f(x) = b,$$

а чита се: граница, којој тежи $f(x)$ за $x = a$ јесте равна b.

1. *Пример.* Функција $f(x) = \frac{4+3}{x}$ има за свако коначно x своју тачно одређену вредност. За $x = \infty$ јавља се $f(x)$ у неодређеној форми $\frac{\infty}{\infty}$. Међутим кад напишемо $\frac{4+3x}{x} = \frac{4}{x} + 3$ добијамо непосредно

$$\lim_{x=\infty} \frac{4+3x}{x} = \lim_{x=\infty} \left(\frac{4}{x} + 3\right) = 3.$$

2. *Пример.* Кад у $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ставимо непосредно $x = 0$ добијамо неодређени вид $\frac{0}{0}$. При свему томе функција има и тада своју тачно одређену вредност и ми је налазимо на следећи начин.



Сл. 1.

Из слике видимо да је

$$\sin x < x < tg\, x,^{1)}$$

одакле, кад поделимо све три стране неједначине са $\sin x$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

и узмемо изврнуте вредности

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

---

[1] Слика нам показује да је површина кружнога исечка OAB већа од $\triangle OAB$, а мања од $\triangle OAC$, т. ј. да је $\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} OA \cdot AC$ или $\frac{1}{2} r^2 \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 tg\, x$ или најзад, кад скратимо све три стране неједначине са $\frac{1}{2} r^2$,

$\sin x < x < tg\, x$ q. c. d.

Ми видимо, одавде, да је задата функција $\frac{\sin x}{x}$ навек мања од 1, а већа од $\cos x$. Но у колико се лук x буде више смањивао у толико ће и $\cos x$ бити приближнији 1 и најзад за $x = 0$ лева и десна страна горње неједначине постају једнаке и тако налазимо да је

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

На исти начин изводимо из неједначине $\sin x < x < tg\, x$ да је

$$\lim_{x=0} \frac{tg\, x}{x} = 1.$$

Речима: у колико је лук мањи у толико је разлика између синуса и тангенте и самога лука незнатнија, тако да за врло мале лукове можемо синус и тангенту да заменимо самим луком. Тако н. пр. јесте $\sin 10'' = arc\, 10''$ тачно на тринаест десетних места. На овоме се оснива један подесан начин израчунавања тригонометриских функција[1]).

3. *Пример.* Да бисмо нашли границу, којој тежи збир бесконачне геометриске постепености

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

ставимо

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n},$$

дакле

$$2 s_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

и одузмимо ове две једначине једну од друге, па ћемо добити

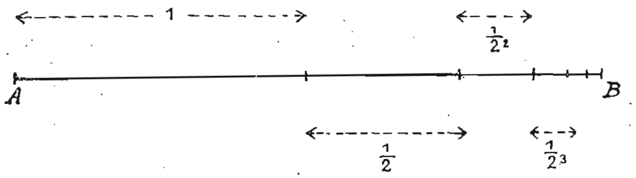
$$s_n = 2 - \frac{1}{2^n},$$

одакле следује

$$\lim_{n=\infty} s_n = 2.$$

Збир горње геометриске постепености са бесконачно много чланова раван је 2.

О томе се можемо уверити на још један, врло очигледан, начин кад узмемо дуж $AB = 2$ и преполовимо је, то исто учинамо и са другом половином итд.



Сл. 2.

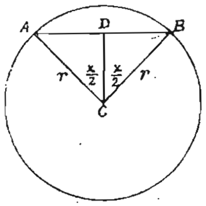
Дужи, до којих тако долазимо, представљају графички поједине чланове горње постепености и очигледно је да у колико више будемо вршили ово половљење и сабирање добивених делова, све ћемо се више приближавати тачци B, која је од тачке A удаљена за 2 јединице.

---

[1] Види Предавања из Тригонометрије чл. 32. и 33.

13. Начело методе граница. — Од врло велике је важности у питањима о граници, такозвано *начело методе граница*, које гласи: кад две променљиве количине остају вазда једна другој равне и кад једна од њих тежи извесној граници, онда и она друга мора тежити истој граници.

1. Пример. На основу дефиниције, по којој се под периферијом круга има да разуме граничнавредност, којој тежи периметар (збир страна) једнога правилног у кругуписаног или описаног полигона при бесконачном растењу броја полигонских страна, добијамо следећи израз за кружну периферију.



Сл. 3.

Нека је $AB = s$ страна једнога у круг уписаног правилног полигона са n страна. Спустимо из средишта C управну $CD = \varrho$ на страну AB и означимо $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = \frac{x}{2}$. Из слике читамо да је AD или $\frac{s}{2} = r \sin \frac{x}{2}$, дакле $s = 2 r \sin \frac{x}{2}$, а цео периметар

$$p = 2 n r \sin \frac{x}{2}.$$

Овде имамо две количине, које су вазда (за све n и x) једна другој равне: увек је периметар p раван $2 n r \sin \frac{x}{2}$. Једна од њих, а то је p, тежи извесној граници (периферији круга), дакле мора и она друга тежити истој граници. То значи да је кружна периферија

$$P = \lim_{n=\infty} p = \lim_{n=\infty} 2 n r \sin \frac{x}{2}.$$

Пошто са растењем n-а у бесконачност средишњи угао x опада у бесконачност, то видимо, да израз за кружну периферију добија неодређену форму $\infty . 0$. Међутим врло је лако наћи његову истинску вредност. С обзиром на то, да се за бесконачно мали лук синус лука може да замени луком имамо

$$P = \lim_{n=\infty} 2 n r \frac{x}{2} = \lim_{n=\infty} r n x = r \lim_{n=\infty} n x.$$

Слика нам показује да је, за макакво n и x, производ $n x = 360^0 =$ или 2π и према томе $P = 2 r \pi.$

2. Пример. На исти начин можемо да нађемо површину круга као границу којој тежи површина једнога у круг уписаног или око круга описаног правилног полигона, чији број страна у бесконачност расте.

Из горње слике видимо да је површина троугла $ABC = \frac{s \varrho}{2}$ и према томе површина полигона

$$q = \frac{n s \varrho}{2} = \frac{p \varrho}{2},$$

где p, као и горе, означава полигонски периметар.

На основу начела о методи граница површина круга је

$$Q = \lim_{n=\infty} \frac{p \varrho}{2}.$$

При бесконачноме растењу n-а количина p тежи граници $2 r \pi$, а ϱ тежи полупречнику r:

$$\lim_{n=\infty} p = 2 r \pi, \quad \lim_{n=\infty} \varrho = r,$$

дакле

$$Q = \pi r^2.$$

14. Теорема. — Свака стална количина сама себи је граница:

$$\lim C = C.$$

Ово је само по себи јасно. Стална количина има навек једну исту вредност и неможе, према томе, тежити никаквој другој вредности.

15. Теорема. — Граница алгебарског збира двеју (или више) функција једнака је алгебарскоме збиру граница којима теже поједине функције:

$$\lim [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x).$$

Доказ. Нека је

$$\lim \varphi(x) = a, \qquad \lim \psi(x) = b$$

и ставимо

$$\varphi(x) = a + \alpha, \qquad \psi(x) = b + \beta,$$

где су α и β извесне функције x-а које се у бесконачност умањавају, кад се x приближава оној вредности за коју $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ постају равне a односно b. Тако у 1. примеру чл. 12. $f(x) = \frac{4 + 3x}{x} = 3 + \frac{4}{x}$ нашли смо, да је за извесно x (за $x = \infty$) $\lim f(x) = 3$, док је за свако друго x функциона вредност $3 + \frac{4}{x}$. Овде је дакле $\alpha = \frac{4}{x}$ она количина која, зависна од x, има то својство да се у бесконачност смањује приближавањем x-а оној вредности за коју постаје $f(x) = 3$.

Према датом појму о количинама α и β следује из

$$\varphi(x) \pm \psi(x) = a \pm b + \alpha \pm \beta$$

непосредно

$$\lim [\varphi(x) \pm \psi(x)] = a \pm b = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x).$$

Примедба. Ова теорема престаје важити кад је број сабирака бесконачно велики зато што у таквоме случају алгебарски збир $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots$ бесконачно много бесконачно малих количина не мора да буде $= 0$ (в. чл. 11. под 5).

Специалан случај ове теореме јесте:

$$\lim [\varphi(x) \pm C] = \lim \varphi(x) \pm C.$$

16. Теорема. — Граница производа двеју (или више) функција равна је производу граница, којима теже поједини чинитељи:

$$\lim [\varphi(x) . \psi(x)] = \lim \varphi(x) . \lim \psi(x).$$

Доказ. Ставимо као и горе у чл. 15.

$$\lim \varphi(x) = a, \qquad \lim \psi(x) = b,$$
$$\varphi(x) = a + \alpha, \qquad \psi(x) = b + \beta,$$

дакле

$$\varphi(x) . \psi(x) = a b + a\beta + b\alpha + \alpha\beta$$
$$\lim [\varphi(x) . \psi(x)] = a b + \lim [a\beta + b\alpha + \alpha\beta],$$

а пошто је

$$\lim [a\beta + b\alpha + \alpha\beta] = 0,$$

то је

$$\lim [\varphi(x) . \psi(x)] = a b = \lim \varphi(x) . \lim \psi(x).$$

Као специалан случај наведимо:

$$\lim [C . \varphi(x)] = C . \lim \varphi(x).$$

17. Теорема. — Граница количника равна је количнику из границе дељеника и границе делитеља:

$$lim\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{lim\,\varphi(x)}{lim\,\psi(x)}$$

Доказ. Из

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}$$

следује

$$lim\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a}{b}=\frac{lim\,\varphi(x)}{lim\,\psi(x)},$$

пошто је

$$lim\,\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}=0.$$

Специално:

$$lim\,\frac{\varphi(x)}{C}=\frac{lim\,\varphi(x)}{C},$$

$$lim\,\frac{C}{\psi(x)}=\frac{C}{lim\,\psi(x)}.$$

18. Теорема. — Сасвим опште је:

$$lim\,[\varphi(x)^{\psi(x)}]=[lim\,\varphi(x)]^{lim\,\psi(x)}.$$

Доказ. Употребом горњих знакова имамо:

$$\varphi(x)^{\psi(x)}=(a+\alpha)^{b+\beta}=(a+\alpha)^{b}\,(a+\alpha)^{\beta},$$

одакле, с обзиром на $lim\,(a+\alpha)^{\beta}=1$, следује $lim\,[\varphi(x)^{\psi(x)}]=lim\,(a+\alpha)^{b}=a^{b}=[lim\,\varphi(x)]^{lim\,\psi(x)}$.

Особени случајеви ове опште теореме јесу:

1. кад ставимо $\psi(x)=C$

$$lim\,[\varphi(x)^{C}]=[lim\,\varphi(x)]^{C}.$$

То значи да је граница C-тог степена (или корена) једне функције равна C-томе степену (односно корену) границе дотичне функције.

2. кад ставимо $\varphi(x)=C$ добијамо теорему за изложитељне функције

$$lim\,[C^{\psi(x)}]=C^{lim\,\psi(x)}.$$

19. Теорема. — Граница логаритма једне функције једнака је логаритму границе којој функција тежи:

$$lim\,[log\,\varphi(x)]=log\,[lim\,\varphi(x)].$$

Нека је $\varphi(x)=a+\alpha$, дакле

$$log\,\varphi(x)=log\,(a+\alpha)=log\,[a(1+\frac{\alpha}{a})]=log\,a+log\,(1+\frac{\alpha}{a})$$

и пошто је

$$lim\,(1+\frac{\alpha}{a})=1,\quad log\,lim\,(1+\frac{\alpha}{a})=0$$

следује теорема:

$$lim\,[log\,\varphi(x)]=lim\,log\,a=log\,a=log\,[lim\,\varphi(x)].$$

---

20. Прва основна теорема Више Математике. — Граница размере у бесконачно малих количина не мења своју вредност кад те количине нимо другима, које им нису равне, али такве да граница размере рам првих количина тежи јединици.

Нека зу α и β две бесконачно мале количине, α' и β' друге две, ђе бесконачно мале количине и то такве да је

$$lim\,\frac{\alpha}{\alpha'}=1,\qquad lim\,\frac{\beta}{\beta'}=1.$$

сснову теореме мора да је

$$lim\,\frac{\alpha}{\beta}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

1. Доказ. Из идентичне једначине

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha'}$$

ује

$$lim\,\frac{\alpha}{\beta}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta}\,.\,lim\,\frac{\alpha}{\alpha'}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta}.$$

логно из

$$\frac{\alpha'}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}$$

зимо

$$lim\,\frac{\alpha'}{\beta}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta'}\,.\,lim\,\frac{\beta'}{\beta'}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta'},$$

е

$$lim\,\frac{\alpha}{\beta}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta'}\qquad q.\ e.\ d.$$

2. Доказ. Ставимо

$$\alpha'=\alpha+\delta,\qquad \text{дакле}\ \frac{\alpha'}{\alpha}=1+\frac{\delta}{\alpha},$$

$$\beta'=\beta+\varepsilon,\qquad \text{„}\ \frac{\beta'}{\beta}=1+\frac{\varepsilon}{\beta},$$

су δ и ε две наспрам α и β (па, разуме се, и наспрам α' и β') бесчно мале количине. Тада је

$$\frac{\alpha'}{\alpha}:\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1+\frac{\delta}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\beta}},$$

$$lim\,\frac{\alpha'}{\beta'}\,.\,lim\,\frac{\beta}{\alpha}=\frac{lim\,(1+\frac{\delta}{\alpha})}{lim\,(1+\frac{\varepsilon}{\beta})}=1,$$

е

$$lim\,\frac{\alpha}{\beta}=lim\,\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

ма овоме начину доказивања можемо да искажемо горњу теорему:

Граница размере двеју бесконачно малих количина једнака је ици размере других двеју бесконачно малих количина, које се од х разликују за количине које су бесконачно мале наспрам њих.

Тако н. пр. услед тога што је

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x=0} \frac{tg\, x}{x} = 1$$

јесте

$$\lim_{x=0} \frac{3\,x}{tg\, x} = \lim_{x=0} \frac{3\,x}{x} = 3.$$

$$\lim_{x=0} \frac{x\, tg\, x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x=0} \frac{x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 4.$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin 5\,x}{6\, tg\, x} = \lim_{x=0} \frac{5\,x}{6\,x} = \frac{5}{6}.$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin^2 x}{\sin^3 \frac{x}{2}} = \lim_{x=0} \frac{x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^3} = \infty.$$

21. Друга основна теорема Више Математике. — Граница, којој тежи збир од бесконачно много бесконачно малих количина, не мења се, кад место датих количина, узмемо друге бесконачно мале количине, чија граница размере наспрам првих тежи јединици. Или

Граница збира од бесконачно много бесконачно малих количина не мења се, ако задате количине заменимо другима, које се од њих разликују за вредности бесконачно мале наспрам њих.

Доказ. Нека је

$$s = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \quad \text{у беск.}$$

коначан збир од бесконачно много бесконачно малих количина $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, које по извесноме закону теку и претпоставимо да је

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\beta''}{\alpha''} = 1, \; \ldots$$

или што је исто

$$\beta = \alpha + \alpha\varepsilon, \quad \beta' = \alpha' + \alpha'\varepsilon', \quad \beta'' = \alpha'' + \alpha''\varepsilon'', \ldots,$$

где су $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ такође бесконачно мале количине и према томе производи $\alpha\varepsilon, \alpha'\varepsilon', \alpha''\varepsilon'', \ldots$ бесконачно мали наспрам количина $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$

Према горњем је

$$\beta + \beta' + \beta'' + \ldots = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots \; + \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots$$
$$= s + \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots$$

Узмимо да је η по апсолутној вредности највећа од свију количина ε, онда је, апсолутно узев

$$\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots < \eta\,(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots)$$
$$< \eta\, s.$$

Пошто је η једна бесконачно мала количина, s коначно, то је ηs такође бесконачно мало и $\lim \eta s = 0$, а у толико пре

$$\lim\,(\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots) = 0$$

Услед тога је

$$\lim\,(\beta + \beta' + \beta'' + \ldots) = \lim\,(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots) = s \quad q.\ e.\ d.$$

Ресултат да је

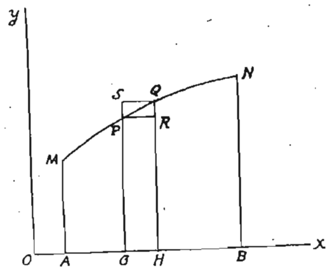
$$\lim\,(\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots) = 0.$$

исказан речима гласи: кад сваки члан једнога коначног збира од бесконачно много бесконачно малих количина ($\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$) помножимо једном бесконачно малом количином ($\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$), онда је тако добивени збир производа раван нули.

Она прва теорема у чл. 20. основ је Диференциалном, ова друга основ Интегралном Рачуну.

Покажимо на једноме примеру значај друге теореме у Интегралноме Рачуну.

При израчунавању једне криволиниске површине у равни, н. пр. фигуре $MABN$, која је ограничена с једне стране комадом AB апсцисне осе, с друге две стране ординатама AM и BN и са четврте стране луком MN ма какве криве линије, ми је замишљамо раздељену на бесконачно много бесконачно узане трапезе, као што је н. пр. $PGHQ$. На тај начин је фигура $MABN$ представљена као један коначан збир од бесконачно много бесконачно малих сабирака. Место трапеза $PGHQ$ можемо да узмемо уписани или описани правоугаоник, $PGHR$ или $SGHQ$, јер је разлика исмеђу њих и трапеза бесконачно мала наспрам истих. Разлика између описаног и уписаног правоугаоника представљена је правоугаоником $PQRS$, који је раван производу из две бесконачно мале количине (апсцисног елемента GH и ординатног елемента QR), дакле бесконачно мали наспрам уписаног или описаног правоугаоника, чија је површина равна производу из једне коначне дужи (ординате PG односно QH) и једне бесконачно мале количине (апсцисног елемента GH). Означимо са $\alpha, \alpha' \alpha'', \ldots$ поједине апсцисне елементе (од којих је и GH такав један), са $\varepsilon, \varepsilon' \varepsilon'', \ldots$ ординатне елементе (разлике између две и две бесконачно блиске ординате). Збир $\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots.$ изражава разлику између површине свију описаних и површине свију уписаних правоугаоника. Но пошто је $\lim\,(\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots) = 0$[1]), то следује да се при израчунавању криволиниске површине $MABN$ трапези $PGHQ$ могу да замене било уписаним, било описаним правоугаоницима.



Сл. 4.

22. Бесконачно мале количине разног реда. — При расматрању више бесконачно малих количина, које зависе једна од друге, узима се једна од њих као *главна бесконачно мала количина*, са којом се остале упоређују. За другу коју бесконачно малу количину каже се да је *бесконачно мала првога реда (ступња)*, ако размера исте наспрам главне бесконачно мале количине тежи, као граници својој, једној коначној

---

[1]) Претпоставимо да сви правоугаоници, односно трапези, на које замишљамо раздељену криволиниску фигуру, имају једнаку ширину, т. ј. узмимо да је $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots$, онда је збир бесконачно малих правоугаоника $PQRS$, означимо га са $\Sigma\, PQRS = \alpha\,(\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots) = \alpha\,(NB - MA)$, дакле раван производу из једне бесконачно мале количине α и једног коначног броја $NB - MA$. Отуда одмах следује да је $\lim \Sigma\, PQRS = 0$.

вредности. Нека је α главна бесконачно мала количина, p један коначан, а ε један бесконачно мали број. Бесконачно малу количину првога реда можемо да представимо, онда, у виду

$$\beta = \alpha\,(p + \varepsilon),$$

јер је

$$lim\,\frac{\beta}{\alpha} = lim\,(p + \varepsilon) = p.$$

Једна бесконачно мала количина је *бесконачно мала другог реда*, ако је њена размера наспрам главне бесконачно мале количине бесконачно мала количина првога реда. Бесконачно мала количина другог реда је

$$\gamma = \alpha^2 (p + \varepsilon),$$

јер је $\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha\,(p + \varepsilon)$ бесконачно мало првога реда.

Сасвим опште кажемо за једну количину да је *бесконачно мала n-тога реда*, ако је њена размера наспрам главне бесконачно мале количине бесконачно мала n-1-вога реда. Бесконачно мала количина n-тога реда има вид

$$\nu = \alpha^n (p + \varepsilon).$$

Тако на пр., ако узмемо да је лук x бесконачно мала количина првога реда, онда је и $sin\,x$ бесконачно мала количина првога реда, јер је $\lim\limits_{x=0} \frac{sin\,x}{x} = 1$. Међутим $1 - cos\,x$ је бесконачно мало другог реда, јер је $1 - cos\,x = 2\,sin^2 \frac{x}{2}$.

Правоугаоник $PQRS$, конструисан из бесконачно малих координатни елемената PR и QR (в. сл. 4.) јесте бесконачно мали према правоугаоницима $PGHR$, $SGHQ$ и трапезу $PGHQ$. Ако ове последње узмемо за бесконачно мале првога реда, онда је правоугаоник $PQRS$ бесконачно мала количина најмање (т. ј. извесним случајима још и вишег но) другог реда.

Користећи се овим појмовима о бесконачно малим количинама разнога реда можемо горње две теореме (у чл. 20. и чл. 21.) да искажемо на следећи начин.

Граница размере двеју количина, које се састоје из бесконачно малих количина разнога реда, не мења се, кад је код једне и друге задрже само бесконачно мале количине најнижег реда.

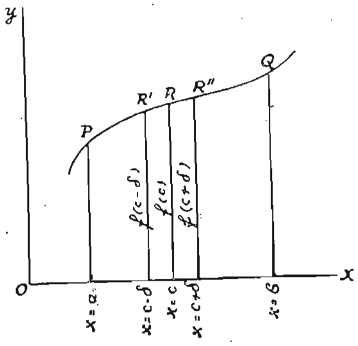
Н. пр.

$$\lim_{x=0} \frac{sin\,x + 8\,sin^3 x}{x + 5\,x^2 - x^4} = \lim_{x=0} \frac{sin\,x}{x} = 1.$$

Тако исто кад се тражи граница збира бесконачно малих количина разног реда довољно је, и без утицаја на тачност резултата, ако се узму у рачун само бесконачно мале количине најнижег реда.

---

3. Непрекидност функција. — За једнозначну функцију[1]) прапроменљиве x кажемо да је *непрекидна* или *континуирна* у извесним гра-, н. пр. од $x = a$ па до $x = b$, кад она за сваку вредност $x = c$, жи између a и b, добија само једну и то стварну и коначну вредност. начај непрекидности функције постаје очигледан, кад функцију авимо геометриски, као криву линију у равни двеју координатних роменљиве x и y представљају координате појединих тачака. , која је аналитички дефинисана једначином $y = f\,(x)$. Ако је епрекидна функција у границама од $x = a$ па до $x = b$, онда је и линија $y = f\,(x)$ непрекидна између P и Q, којима одговарају апсцисе и $x = b$. За сваку апсцисну вред- $= c$ (где је $a < c < b$) добићемо, воме случају, једну и то одређену ату (вредност функције), па дакле и извесну тачку на кривој линији. : ако је функција $f\,(x)$ непрекидна узмемо две тачке R' и R'', које одго- апсцисама $c - \delta$ и $c + \delta$, онда е ординате $f\,(c - \delta)$ и $f\,(c + \delta)$ мори бесконачном умањавању апсцисне ке δ, тежити једној и истој стварној ачној вредности: ординати $f\,(c)$.



Сл. 5.

Према овоме можемо аналитички да формулишемо непрекидност иције. Функција $f\,(x)$ непрекидна је од $x = a$ па до $x = b$, кад је какво $x = c$, које се налази између a и b,

$$\lim_{\delta=0} f\,(c - \delta) = \lim_{\delta=0} f\,(c + \delta) = f\,(c).$$

м смо у стању да испитамо непрекидност односно прекидност функција.

Тако н. пр. отуда што је

$$\begin{aligned} \lim_{\delta=0} sin\,(c \pm \delta) &= \lim_{\delta=0} [sin\,c\,cos\,\delta \pm cos\,c\,sin\,\delta] \\ &= sin\,c \lim_{\delta=0} cos\,\delta \pm cos\,c \lim_{\delta=0} sin\,\delta \\ &= sin\,c, \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta=0} e^{c \pm \delta} = \lim_{\delta=0} [e^c e^{\pm\delta}] = e^c \lim_{\delta=0} e^{\pm\delta}] = e^c$$

је да су функције $y = sin\,x$ и $y = e^x$ непрекидне за све вредности x-а, од $-\infty$ па до $x = +\infty$, јер оне за свако $x = c$ имају свега једну и то стварну ачну вредност.

---

[1]) Функције се зову *једнозначне*, кад оне за сваку особену вредност прапроменљиве једну јединцату вредност. На против оне се зову *многозначне* (двозначне, трозначне кад свакој особеној вредности прапроменљиве одговарају више (две, три итд.) функх вредности. Једнозначне функције јесу

$$y = ax + b, \qquad z = px + qy + r,$$

розначне су $y = \sqrt{ax + b} + cx^2$ (двозначна), $y = \sqrt[3]{x} + ax$ (трозначна).

У свакоме другом случају, где функција не испуњава један од наведених услова за непрекидност, функција је *прекидна* или *дисконтинуирна*. Функција је, дакле, прекидна, ако за коју вредност $x = c$ она добија две или више вредности или ако је функциона вредност имагинарна или најзад бесконачно велика.

Ево неколико случајева прекидности:

1. $f(x) = a\dfrac{e^{\frac{1}{x-c}} - 1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1}$ има за $x = c$ две различне вредности: $f(c) = \pm a$.

$$f(c+\delta) = a\frac{e^{\frac{1}{c+\delta-c}} - 1}{e^{\frac{1}{c+\delta-c}} + 1} = a\frac{e^{\frac{1}{\delta}} - 1}{e^{\frac{1}{\delta}} + 1} = a\frac{1 - \frac{1}{e^{-\delta}}}{1 + \frac{1}{e^{-\delta}}},$$

$$\lim_{\delta = 0} f(c+\delta) = a,$$

$$f(c-\delta) = a\frac{e^{\frac{1}{c-\delta-c}} - 1}{e^{\frac{1}{c-\delta-c}} + 1} = a\frac{e^{\frac{1}{-\delta}} - 1}{e^{\frac{1}{-\delta}} + 1} = a\frac{\frac{1}{e^{\delta}} - 1}{\frac{1}{e^{\delta}} + 1},$$

$$\lim_{\delta = 0} f(c-\delta) = -a.$$

2. $f(x) = tg\, x$ има за $x = \frac{\pi}{2}$ бесконачну велику вредност и функција је, дакле, за $x = \frac{\pi}{2}$ прекидна.

Исти је случај код $f(x) = \frac{1}{(x-c)^2}$ за $x = c$, јер је

$$f(c) = \lim_{\delta = 0} f(c-\delta) = \lim_{\delta = 0} f(c+\delta) = \lim_{\delta = 0}\frac{1}{\delta^2} = \infty\,.$$

Слично код $f(x) = \frac{1}{x-c}$ за $x = c$. Овде је

$$\lim_{\delta = 0} f(c+\delta) = \lim_{\delta = 0}\frac{1}{\delta} = \infty,\ \lim_{\delta = 0} f(c-\delta) = \lim_{\delta = 0}\frac{1}{-\delta} = -\infty\,.$$

Другачије код функције $f(x) = e^{\frac{1}{x-c}}$. Њена је прекидност таква да она за $x = c$ добија две вредности, од којих је једна коначна и то $= 0$, а друга бесконачно велика. Потврђује се тиме што је

$$\lim_{\delta = 0} f(c-\delta) = \lim_{\delta = 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{\delta}}} = 0,\ \lim_{\delta = 0} f(c+\delta) = \lim_{\delta = 0} e^{\frac{1}{\delta}} = \infty\,.$$

3. $f(x) = sin\,\frac{a}{x}$ јесте за $x = 0$ прекидна функција, јер је њена вредност тада неодређена.

4. $f(x) = \sqrt{(x-3)(x-8)}$ јесте прекидна функција за све вредности x-а, које леже између 3 и 8, пошто је за $3 < x < 8$ вредност $\sqrt{(x-3)(x-8)}$ имагинарна.

1. *Напомена.* Код *многозначних функција* ваља испитати сваку њену грану, т. ј. сваки низ вредности, које су међусобом везане законом непрекидности, по наособ. Тако н. пр. код функције $f(x) = \sqrt{x}$ једну грану образују вредности $+\sqrt{x}$, а другу грану $-\sqrt{x}$. Ако су све гране непрекидне, онда се каже и за целу функцију да је непрекидна.

2. *Напомена.* За непрекидност функција, које зависе од више прапромењљивих количина, важи сасвим слична дефиниција као и за функције које зависе само од једне прапромењљиве. Тако н. пр. једнозначна функција $f(x, y)$ непрекидна је функција у границима од $x = a$ па до $x = b$ и од $y = \alpha$ па до $y = \beta$, кад за сваки спрег вредности њених прапромењљивих x и y, н. пр. за $x = c$ и $y = \gamma$ (где c лежи између a и b, а γ између α и β) она добија само једну и то стварну и коначну вредност.

Непрекидност функција, које зависе од две прапромењљиве, може да се протумачи геометриски употребом Аналитичке Геометрије у простору, док за функције, које зависе од три и више прапромењљивих, геометриско тумачење постаје немогућно.

II.

Бесконачни редови.

1. О бесконачним редовима уопште.

24. Појмови. — Под *редом* разумемо један низ количина, који је образован по извесном закону. Количине, из којих се ред састоји, зову се *чланови* реда.

Ако, од лева па на десно, чланови бивају већи, онда *ред расте*. У противноме случају *ред опада*.

Ред се зове *коначан* или *бесконачан*, према томе да ли је број његових чланова коначан или бесконачно велики.

Број, који показује на коме се месту налази исвесан члан реда, зове се казаљка места тога члана или просто *казаљка* члана.

Чланове једнога реда бележићемо са u_1, u_2, u_3, . . . Члан u_n зове се n-ти или *општи члан*.

25. Закон реда. — Ред се може сматрати да је познат, ако је познат закон по коме теку његови чланови. Тај закон може, поглавито, бити изражен на ова два начина:

1-во сваки члан реда u_1, u_2, u_3, . . . u_n . . . може бити дат као функција његове казаљке: $u_n = f(n)$, у коме се случају закон реда зове *независан*.

2-го закон реда може да изражава ма који члан као функцију, претходећих чланова: $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots)$. Закон реда зове се тада *повратан*.

Тако н. пр. код геометриске постепености $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots aq^{n-1},\ aq^n,\ aq^{n+1}, \ldots$ јесте $u_n = aq^{n-1}$, $u_{n+1} = aq^n$, $u_{n+2} = aq^{n+1}, \ldots$ и тиме је закон реда исказан у независној форми, пошто сваки члан израчунавамо непосредно из његове казаљке места. Узевши да је $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$, дакле $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ добијамо закон реда у повратној форми. Да бисмо израчунали извесан члан потребна су нам два претходећа члана.

26. Збирни образац. — Аналитички израз збира првих n чланова једнога реда зове се *збирни образац*. Ставићемо

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Кад је познат аналитички израз збира, онда смо у стању да определимо не само збир од ма колико чланова, него и цео ред за који тај образац важи. Ма који члан реда добијамо као разлику из два збира

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Нека нам је дат н. пр. овај збирни образац

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}. \text{ Онда је } s_{n-1} = \frac{a(1-q^{n-1})}{1-q}, \text{ дакле}$$

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{a}{1-q}(q^{n-1} - q^n) = a\,q^{n-1}.$$

За $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ налазимо чланове

$$u_1 = a,\ u_2 = aq,\ u_3 = aq^2,\ u_4 = aq^3, \ldots$$

То значи да се горњи збирни образац односи на геометриску постепеност.

27. Збир бесконачнога реда. — По себи је јасно шта ваља разумети под збиром једног коначног реда, пошто се збир таквога реда добија непосредним сабирањем. Други је случај код сабирања бесконачних редова, које се неможе непосредно да изврши. Под *збиром једног бесконачног реда* разумемо границу којој тежи збир првих n чланова, кад пустимо n да расте у бесконачност. Дакле, ако означимо са s збир бесконачног реда, онда је према дефиницији

$$s = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Збир бесконачног реда може да буде

1-во коначан и одређен, у коме се случају ред зове *збирљив* или *конвергентан*. Збир $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ у беск. раван је извесноме коначном броју s.

2-го збир је бесконачно велики: $\lim_{n=\infty} s = \infty$. Такав се ред зове *незбирљив* или *дивергентан*.

3-ће збир има више разних вредности: није одређен и зато се и ред зове *неодређен* или *осцилирајући*.

Узмимо као пример бесконачну геометриску постепеност

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots \text{ у беск.}$$

ПРВИ ДЕО

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

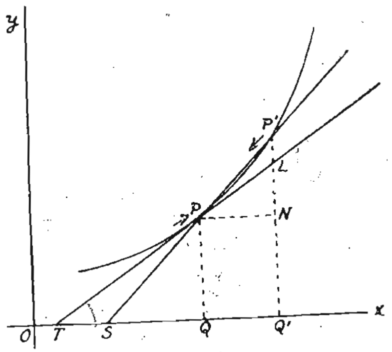
I.

Диференциалење функција једне прапромењиве.

36. Како је пронађен Диференциални Рачун. — Покушаји да се нађе општа метода за повлачење тангенте на криве линије у равни, замишљајући линије дате њиховом једначином, дали су повод за проналазак Диференциалног Рачуна.

Узмимо да се хоће тангента у тачци $P(x, y)$ једне линије чија је једначина у правоуглим координатама $y = f(x)$.

Под тангентом разумемо крајни положај, којем тежи сечица при бесконачном приближавању њених пресечних тачака једна другој. Према томе се тангента у тачци P има сматрати као крајни положај TL којем сечица SP' тежи кад замислимо да се тачка P' до у бесконачност приближава тачци P.



Сл. 6.

Означимо са x и y координате тачке P, са $x + h$ и $y + k$ координате тачке P'. Пошто се тачке P и P' налазе на задатој кривој линији, то важе једначине

$$y + k = f(x + h)$$
$$y = f(x),$$

одакле

$$k = f(x + h) - f(x).$$

Количине h и k зову се *координатне промене*. Одредити тангенту у тачци P значи управо наћи њен правац, јер је додирна тачка P већ дата њеним координатама x, y. Правац се одређује (аналитички) угловним сачинитељем, а то је tangens угла који дотична права (овде дирка) заклапа са положним правцем x-осе.

Повуцимо $PN \parallel x$-оси. Из $\Delta PP'N$ видимо да је угловни сачинитељ сечице

$$tg\ P'PN = \frac{P'N}{PN} = \frac{P'Q' - PQ}{OQ' - OQ} = \frac{(y+k) - y}{(x+h) - x} = \frac{k}{h},$$

дакле раван промени ординате подељеној са променом апсцисе.

На основу горње дефиниције за дирку закључујемо да је угловни ачинитељ тангенте

$$tg\ LPN = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} tg\ P'PN = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} \frac{k}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

ашли смо да је угловни сачинитељ дирке на линију $y=f(x)$ у тачци (x, y) изражен границом којој тежи количник из бесконачно малих промена динате и апсцисе, које су међусобом везане једначином $y+k=f(x+h)$.

Напомена. Инфинитезимални Рачун (рачун са бесконачно малим бесконачно великим количинама) дели се на: *Диференциални, Интеални и Вариациони Рачун и Теорију Диференциалних Једначина.*

Први, за кога се са сигурношћу може казати да је употребљавао нфинитезималне количине, то је славни грчки математичар старога века *рхимед* (Сиракуза 287 — Сиракуза 212 пре Хр.) доказивши да је површина круга једнака са површином троугла, чија је основа једнака перириjи, а висина једнака полупречнику круга. После долазе, као најавнији, *Галилеј* (Galileo Galilei, Пиза 1564 — Арцетри 1642), *Каваери,* (Bonaventura Cavalieri, Болоња 1598 — Болоња 1647), *Кеплер* ohannes Kepler, Magstatt 1571 — Регенсбург 1630), *Њутн* (Isaak ewton, Whoolstorpe 1642 — Лондон 1726), *Лајбниц* (Gottfried Wilhelm ibnitz, Лајпциг 1646 — Ханове 1716).

Распра око приоритета за проналазак Инфинитезималног Рачуна, а и данас још постоји, беспредметна је, јер Галилеови partes non antae, Кавалиериово indivisibile, Баровљев (Isaak Barrow, Лондон 1630 Лондон 1677) triangulum characteristicum, Њутнови моменти и флуке и Лајбницови диференциали све су то само разни изрази за једну гу замисао. Та замисао је код Њутна најјасније концептована, а рачунска ана најсавршеније изведена код Лајбница.

Осим горе наведених твораца, и са напоменом да је Лајбниц у своме описи од год. 1675 први употребио интегрални знак $\int$, вредно је оменути имена оних, који су поглавито радили на усавршавању Интелног Рачуна. То су браћа *Јаков и Јован Бернули* (Jakob Bernoulli, зел 1654 — Базел 1705, Johann Bernoulli, Базел 1667 — Базел 1748), *iер* (Leonhard Euler, Базел 1707 — Петроград 1783) *Даламбер* (Jean-Rond d'Alembert, Париз 1717 — Париз 1783), *Лагранж* (Joseph-uis Lagrange, Турин 1736 — Париз 1813), *Лежандр* (Adrien-Marie gendre, Париз 1752 — Париз 1833).

Вариациони Рачун почиње са год. 1696. када је Јован Бернули шио *проблем брахистохроне.*¹)

Кратко време после тога решио је Јаков Бернули *изопериметиски проблем.*²) Први уџбеник за Вариациони Рачун издао је Ајлер . 1774. под насловом Methodus inveniendi curvas maximi minimive prietate gaudentes, у коме је показао начин за решавање општих атака ове врсте. Најзад год. 1762 публиковао је Лагранж своју методу, којој се и данас у главноме решавају проблеми из Вариационог Рачуна.

---

¹) Линије, по којој једна тешка тачка под утицајем теже пада како би у најкраћем ену из једног положаја стигла у други положај који се налази ниже од првога.

²) Изопериметриски проблеми: наћи линију одређене дужине која с извесним пра- у истој равни даје највећу површину тако ограничене фигуре. — Наћи линију, која ањем око једне осе даје тело одређене запремине, а најмање површине. — Од свих ериметриских линија (линија једнаке дужине) наћи ону, која обртањем око једне осе зује обртно тело са најмањом запремином. Итд.

Док се у Диференциалноме Рачуну у Теорији Максима и Минима спитује за коју вредност прапромењиве или које вредности прапроенљивих *задата функција* добија своје највеће односно најмање вредости, — у Вариационом Рачуну се обрнуто *тражи функција*, која има а испуни извесне услове у погледу максимума или минимума.

37. Изводна функција. — Граница, којој тежи количник из проене функције и промене прапромењиве за бесконачно малу промену рапромењиве количине, зове се *изводна функција.*

Задаћа је Диференциалноме Рачуну да за сваку функцију нађе ену изводну функцију.

Према горњем тумачењу изводне функције јасно је да је и она звесна функција прапромењиве и да ни у колико не зависи од проене ове последње.

Ако је $y=f(x)$ задата функција, онда се њена изводна бележи y' или са $f'(x)$.

Пример. Једначина круга, са средиштем у почетку правоуглих координата, асн

$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

ко апсцису (прапромењљиву) x променимо за h ордината (функција) y промеће се за k. Промена k одређена је једначином

$$y+k=\sqrt{r^2-(x+h)^2},$$

кле

$$k=\sqrt{r^2-(x+h)^2}-\sqrt{r^2-x^2}.$$

з

$$\frac{k}{h}=\frac{\sqrt{r^2-(x+h)^2}-\sqrt{r^2-x^2}}{h}=$$

$$=\frac{\left[\sqrt{r^2-(x+h)^2}-\sqrt{r^2-x^2}\right]\left[\sqrt{r^2-(x+h)^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right]}{h\left[\sqrt{r^2-(x+h)^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right]}$$

$$=\frac{-2x-h}{\sqrt{r^2-(x+h)^2}+\sqrt{r^2-x^2}}$$

бијамо, кад пређемо граници, т. ј. претпоставимо да промена h (па разуме се промена k) постаје бесконачно мала или геометриски: да се тачка $P'(x+h, + k)$ бесконачно приближи тачци $P(x, y)$, у коме случају сечица PP' прелази положај дирке на круг у тачци P,

$$\lim_{h=0}\frac{k}{h}=\frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y}.$$

о је, дакле, угловни сачинитељ тангенте круга $y=\sqrt{r^2-x^2}$ у тачци x, y или водна функција:

$$y'=f'(x)=-\frac{x}{y}.$$

38. Диференциал. — Придајмо прапромењивој x промену h. Нека k одговарајућа промена функције $y=f(x)$. Тада је

$$y+k=f(x+h)$$

пошто је

$$\lim_{h=0}\frac{k}{h}=y',$$

можемо за ма какво h (које није бесконачно мало) да напишем

$$\frac{k}{h} = y' + \alpha,$$

где се под α има да разуме једна количина која зависи од x и
стаје бесконачно мала у исто време са променом h.

Из последње једначине, пошто је напишемо

$$k = y'h + \alpha h,$$

видимо да се промена k функције састоји из два дела. Први
производ $y'h$ из изводне функције y' и промене h прапромењиве
чине. Тај се део зове *диференциал* функције и бележи се са dy, так

$$dy = y'h \text{ или } dy = f'(x)\ h.$$

Други део фукционе промене k то је производ αh из промене h
количине α, која изчезава заједно са h. Ако је промена h беско
мала, онда овај други део, као бесконачно мала количина вишега ст
може да се занемари према првоме делу (диференциалу функције).
на крају чл. 22.). До истог закључка долазимо и на овај начин.

$$k = (y' + \alpha)\ h$$

$$dy = y'h$$

следује

$$\frac{k}{dy} = \frac{y' + \alpha}{y'} = 1 + \frac{\alpha}{y'},$$

и с претпоставком да y' није $= 0$

$$lim\ \frac{k}{dy} = 1.$$

Значи да се промена функције може заменути њеним диференциа
и обратно. (Види чл. 20.)

Пример. Нека је

$$y = \pi x^2$$

задата функција, дакле

$$y + k = \pi(x + h)^2 = \pi x^2 + 2\ \pi x h + \pi h^2$$

$$k = 2\ \pi x h + \pi h^2$$

$$\frac{k}{h} = 2\ \pi x + \pi h$$

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = 2\ \pi x.$$

Овде је $y' = 2\ \pi x$, $\alpha = \pi h$.

39. Диференциал прапромењиве. — Диференциал прапромењи
x није ништа друго до сама промена h, јер кад ставимо

$$y = x,$$

дакле

$$y + k = x + h$$

$$k = h$$

$$y' = \lim_{h=0} \frac{k}{h} = 1$$

видимо да је изводна функција овде $= 1$ и према томе

$$dy = dx = 1 \,.\, h = h,$$

а то је што смо хтели доказати:

$$h = dx.$$

На тај начин може горњи израз $dy = y'h$ и овако да се напише

$$dy = y'dx,$$

одакле

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Дошли смо до ресултата да је изводна функција равна количнику из диференциала функције и диференциала прапромењиве. С тога се разлога изводна функција зове и *диференциални количник.*

40. Геометриско тумачење промене и диференциала. — На сл. 6 примећујемо да је

$$QQ' = PN = h = dx,$$

$$P'N = k,$$

$$tg\ LPN = \lim_{h=0} \frac{k}{h} = y',$$

дакле

$$LN = PN \,.\, tg\ LPN$$

или

$$LN = hy' = dy.$$

Из овога видимо да дуж LN представља диференциал функције y, док је, међутим, њена промена $k = P'N$. То можемо да искажемо на овај начин: диференциали dx и dy јесу бескрајно мале промене координата x и y, када се од неке тачке P на кривој линији пређе тачци L, која је на тангенти линије повученој у тачци P, док је k промена ординате коју добијамо кад одемо тачци P', која је, као и тачка P, на самој линији и којој, као и тачци L, одговара апсцисна промена $h = dx$.

41. Једно опште својство изводне функције. — Отуда што је $k = y'h + \alpha h$ (в. чл. 38.), где је α таква количина која у исто време са h постаје бесконачно мала, закључујемо да, узевши h довољно мало, алгебарски знак промене k зависи од знака првога члана $y'h$, а ни у колико од знака другога члана αh, који је, у таквоме случају, незнатан према првоме члану. Ако, при томе, будемо још претпоставили да су промене h положне (а то је дозвољено, јер је h промена независно промењиве количине), онда следује да функциона промена k и изводна функција y' морају имати један исти алгебарски знак, т. j. према томе да ли је $y' \gtrless 0$ биће и $k \gtrless 0$. То значи: ако је изводна y' положна, онда задата функција расте (јер је њена промена положна), а ако је изводна y' одречна, онда задата функција опада (јер је њена промена одречна). Или: функција расте или опада, почевши од извесне вредности њене прапромењиве x, према томе да ли је њена изводна y' за дотичну вредност x-а положна или одречна.

Ако, дакле, изводна једне функције остаје положна за све вредности прапромењиве x, почевши н. пр. од $x = a$ па до $x = b$, онда у целоме том интервалу функција расте. Напротив функција опада за све време док је њена изводна одречна.

И обратно: изводна једне функције, која у извесноме интервалу њене прапромењиве (н. пр. од $x = a$ па до $x = b$) непрестано расте може бити само положна и местимице равна нули, а никако одречна, као што, опет, изводна такве функције, која у извесноме размаку њене прапромењиве непрекидно опада, мора бити одречна или местимице равна нули, али никако неможе бити положна.

Ови се ресултати могу и геометриски врло лако да протумаче с обзиром на геометриски значај изводне функције. (В. чл. 36. и 37.)

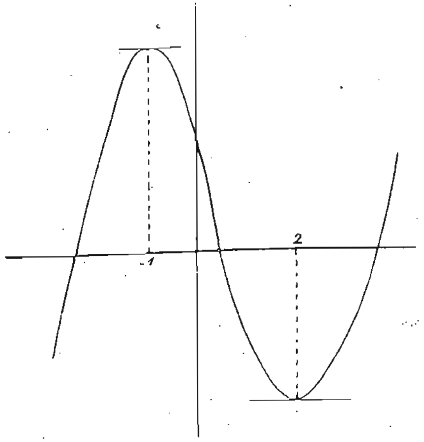
Пошто је $y' = tg\,\alpha$ видимо да је

за $y' > 0$, угао $\alpha < 90^0$, одакле изводимо, да y расте, а напротив

за $y' < 0$, угао $\alpha > 90^0$, а то значи да y опада.

Као даљи закључак изводимо: ако је изводна функција у извесноме интервалу, н. пр. између $x = a$ и $x = b$, равна нули (т. ј. није ни положна ни одречна), онда задата функција у томе интервалу нити расте нити опада, она, дакле, има константну вредност.

У тачкама, у којима је $y' = 0$, дирка на линију $y = f(x)$ паралелна је са x-осом, јер је тада и угао $\alpha = 0$.



Сл. 7.

Пример. Узмимо функцију

$$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 2.$$

Њена је изводна

$$y' = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x + 1)(x - 2).$$

Одавде видимо да је

за $-\infty < x < -1$ изводна $y' > 0$, а то значи да у томе интервалу задата функција расте.

За $-1 < x < 2$ изводна је $y' < 0$ и према томе функција од $x = -1$ па до $x = 2$ опада.

Најзад за $2 < x < +\infty$ постаје $y' > 0$, а то је знак да функција од $x = 2$, па на даље расте.

Отуда што је за $x = -1$ и за $x = 2$ изводна $y' = 0$ закључујемо да је на тим местима дирка повучена на линију, коју нам горња функција представља, паралелна са x-осом.

42. Напомена. — Ми смо у претходећем промене x-а и y-а означавали са h и k. Но пошто ћемо, у скоро, имати посла са већим бројем промењивих количина упутно је да, у будуће, употребимо такве знаке из којих ће се моћи, одмах, да позна на које се количине односе поједине промене. Ми ћемо, за ту циљ, изабрати знак Δ и употребићемо га тако да промене промењивих количина $x, y, z, u, v, \ldots$ означимо са $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta u, \Delta v, \ldots$

43. Теорема. — Две функције које се разликују само у једној сталној количини имају једнаке изводне, па, дакле, и једнаке диференциале.

Нека су u и v две функције прапромењиве x и нека је

$$u = v + c,$$

где c обележава једну константу. Замислимо да је се x променуло за Δx, тада ће се и функције u и v променути за извесне вредности: функција u за Δu, функција v за Δv. Заменувши x са $x + \Delta x$, горња се једначина претвара у

$$u + \Delta u = v + \Delta v + c.$$

Одузимањем горње једначине од ове последње налазимо

$$\Delta u = \Delta v,$$

па дакле и

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

На основу начела у чл. 13. следује

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

а то је

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$

а тако исто

$$du = dv$$

Обратно: ако су изводне или диференциали двеју функција прапромењиве x једнаки у извесноме интервалу x-а, онда се такве функције у дотичноме интервалу њихове прапромењиве разликују само за једну сталну вредност.

Нека је $$u - v = y$$

и претпоставимо да је, у некоме интервалу прапромењиве x,

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$

Отуда што је

$$y = u - v$$

изводимо даље

$$y + \Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v$$

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и на осиову чл. 13.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

Према претпоставци је десна страна последње једначине равна нули, дакле

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

а то показује да је у посматраноме интервалу x-а функција y или $u - v$ константна. (В. чл. 41.)

44. Изводне посредних функција. — Нека је

$$u = \varphi'(y)$$
$$y = f(x),$$

дакле u посредна функција y-а или функција функције од x.

Да бисмо нашли изводну функције u по x-у ми бисмо могли променљиву y да заменимо са $f(x)$, да напишемо

$$u = \varphi\,[f(x)]$$

и онда да поступимо са u као са непосредном функцијом прапроменљиве x.

До истога ресултата доћићемо и на овај начин. Из идентичне једначине

$$\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle y}\frac{\triangle y}{\triangle x},$$

где је $\triangle x$ произвољна промена прапроменљиве x, а $\triangle y$ и $\triangle u$ одговарајуће промене променљивих количина y и u, следује, на основу познатога начела (чл. 13.), да је и

$$\lim_{\triangle x=0}\frac{\triangle u}{\triangle x} = \lim_{\substack{\triangle x=0\\ \triangle y=0}}\frac{\triangle u}{\triangle y}\lim_{\triangle x=0}\frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Овде је $\lim\limits_{\triangle x=0}\dfrac{\triangle u}{\triangle x} = \dfrac{du}{dx}$ изводна функције u узета по x-у;

$\lim\limits_{\triangle y=0}\dfrac{\triangle u}{\triangle y} = \dfrac{du}{dy} = \varphi'(y)$ изводна функције $u = \varphi(y)$ узета по y-у, сматравши y као прапроменљиву (независно од везе која постоји између y и x); и најзад $\lim\limits_{\triangle x=0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ то је изводна функције $y = f(x)$ узета по x-у. Овим смо нашли да је

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y)\,.\,f'(x)$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Речима: изводна функције једне функције равна је производу изводних посматраних функција.

Ову последњу једначину нетреба ни пошто сматрати као идентичну једначину, гледајући на то што се на њеној десној страни dy јавља у исто време у именитељу и у бројитељу. dy у именитељу првога количника и dy у бројитељу другога количника имају разна значења и нису, према томе, једно другом равни. dy у именитељу јесте бесконачно мала промена y-а, сматравши ту количину као независно променљиву, док оно dy у бројитељу представља бесконачно малу промену y-а, где се y сматра као функција прапроменљиве x.

Горњу једначину можемо и овако да напишемо

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y)\,.\,\frac{dy}{dx},$$

одакле

$$du = \varphi'(y)\,.\,dy.$$

Ово нам показује да диференциал функције $u = \varphi(y)$, где је $y = f(x)$ (т. ј. y зависно од x) има исти вид као и онда када је y независно променљива количина. Разлика је у томе, што у овоме случају, где је $y = f(x)$, треба ставити $dy = f'(x)\,dx$.

Пример. Нека је

$$u = y^3$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

дакле

$$u = \sqrt{r^2 - x^2}^{\,3} = (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Из

$$u = y^3$$

следује

$$u + \triangle u = (y + \triangle y)^3 = y^3 + 3\,y^2\triangle y + 3\,y\,(\triangle y)^2 + (\triangle y)^3$$
$$\triangle u = 3\,y^2\triangle y + 3\,y\,(\triangle y)^2 + (\triangle y)^3$$
$$\frac{\triangle u}{\triangle y} = 3\,y^2 + 3\,y\,\triangle y + (\triangle y)^2$$
$$\lim_{\triangle y=0}\frac{\triangle u}{\triangle y} = \frac{du}{dy} = 3\,y^2.$$

У примеру чл. 37. нашли смо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

На основу правила $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ добијамо

$$\frac{du}{dx} = 3\,y^2\,.\,\frac{-x}{y} = -3\,x\,y = -3\,x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Примедба. Појмљиво је да правило за диференциалење посредних функција важи сасвим уопште: ма колики био број функција, које су међусобом везане. Тако н. пр. ако је

$$v = \psi(u), \qquad u = \varphi(y), \qquad y = f(x)$$

јесте

$$dv = \psi'(u)\,du, \qquad du = \varphi'(y)\,dy, \qquad dy = f'(x)\,dx,$$
$$\frac{dv}{dx} = \psi'(u)\,\varphi'(y)\,f'(x) = \frac{dv}{du}\,\frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$

Правила за диференциалење алгебарских функција.

45. Диференциал збира и разлике. — Нека је

$$y = u + v - w,$$

где су u, v, w ма какве функције прапроменљиве x. Мењањем x-а у $x + \triangle x$ произилази једначина

$$y + \triangle y = u + \triangle u + v + \triangle v - w - \triangle w,$$

одакле

$$\triangle y = \triangle u + \triangle v - \triangle w$$
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x} - \frac{\triangle w}{\triangle x}$$

и кад пређемо граници, т. ј. узмемо да је промена $\triangle x$ бесконачно мала,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

или

$$dy = d\,(u + v - w) = du + dv - dw.$$

Овим смо доказали да је диференциал збира и разлике из разних функција раван збиру и разлици диференциала појединих функција.

Примедба. Ако је један од сабирака константан, онда при диференциалењу он нестаје:

$$d\,(u + C) = d\,u$$

(в. чл. 43.).

46. Диференциал производа. — Из

$$y = uv,$$

променом x-а за $\triangle x$, произилази

$$y + \triangle y = (u + \triangle u)\,(v + \triangle v) = uv + v\,\triangle u + u\,\triangle v + \triangle u\,\triangle v,$$

дакле

$$\triangle y = v\,\triangle u + u\,\triangle v + \triangle u\,\triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = v\,\frac{\triangle u}{\triangle x} + u\,\frac{\triangle v}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x}\triangle v,$$

које, прешав граници (т. ј. за $lim\,\triangle x = 0$), пошто је

$$lim\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}, lim\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{du}{dx}, lim\frac{\triangle v}{\triangle x} = \frac{dv}{dx}, lim\,(\frac{\triangle u}{\triangle x}\triangle v) = \frac{du}{dx}, lim\,\triangle v = 0$$

своди се на

$$\frac{dy}{dx} = v\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{dv}{dx}$$

или

$$dy = d\,(uv) = v\;du + u\;dv.$$

Речима: диференциал производа двеју функција добијамо кад сваку функцију помножимо диференциалом оне друге функције и та два производа саберемо.

1. *Примедба.* Правило за диференциалење производа лако је проширити и на већи број чинитеља. Тако н. пр. ако је

$$y = \underline{uvw}$$

имаћемо

$$d\,(uvw) = v\,w\;du + u\;d\,(v\,w) = v\,w\;du + u\,(w\;dv + v\;dw),$$

дакле

$$d\,(uvw) = v\,w\;du + u\,w\;dv + u\,v\;dw.$$

То значи: диференциал производа из ма колико функција раван је збиру производа, које добијамо кад помножимо диференциал сваке од тих функција са свима осталим функцијама.

2. *Примедба.* На случај да је један чинитељ константан диференциал производа је раван производу из те константе и диференциала промењљивог чинитеља:

$$d\,(Cu) = C\;du.$$

47. Диференциал количника. — Нека је

$$y = \frac{u}{v},$$

дакле

$$u = yv.$$

и на основу горњег правила

$$du = v\;dy + y\;dv = v\;d\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{u}{v}\;dv,$$

одакле

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\;du - u\;dv}{v^2}.$$

Диференциал количника добијамо кад диференциал дељеника помножимо делитељем, од тога одузмемо производ из диференциала делитеља и дељеника и цело поделимо квадратом делитеља.

1. *Примедба.* До истог ресултата долазимо и на овој начин:

$$y = \frac{u}{v},$$

$$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v},$$

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{v\triangle u - u\triangle v}{v\,(v + \triangle v)},$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\,\dfrac{\triangle u}{\triangle x} - u\,\dfrac{\triangle v}{\triangle x}}{v\,(v + \triangle v)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2},$$

$$dy = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\;du - u\;dv}{v^2}.$$

2. *Примедба.* Ако је дељеник константан

$$y = \frac{C}{v}$$

имамо

$$d\left(\frac{C}{v}\right) = -\frac{C\;dv}{v^2}.$$

48. Диференциал степена. — Ставимо

$$y = u^m$$

и претпоставимо да је изложитељ m цео и положан број. У таквоме случају u^m није ништа друго до производ из m чинитеља, који су сви $= u$ и на основу правила за диференциалење производа следује непосредно образац

$$du^m = mu^{m-1}\;du.$$

Да ово важи сасвим опште, ма какав био изложитељ m: цео или разломљен, положан или одречан, увериђемо се врло лако.

Узмимо прво да је изложитељ m разломљен: $m = \frac{p}{q}$ где су p и q цели и положни бројеви. Из

$$y = u^{\frac{p}{q}}$$

или

$$y^q = u^p,$$

кад диференциалимо обе стране, следује

$$q\,y^{q-1}\;dy = p\,u^{p-1}\;du,$$

одакле, пошто помножимо лево и десно са y и имамо у виду да је $y^q = u^p$,

$$q\,u^p\;dy = p\,y\,u^{p-1}\;du,$$

дакле

$$dy = \frac{p}{q}\,y\,\frac{du}{u}.$$

Најзад, пошто заменимо y са $u^{\frac{p}{q}}$, добијамо

$$du^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\ u^{\frac{p}{q}-1}\,du.$$

Видимо да је ово онај исти образац као и горњи, где смо претпоставили да је изложитељ m цео број.

Узмимо сада да је изложитељ m одречан: $m = -n$, дакле

$$y = u^{-n} = \frac{1}{u^n}.$$

Пошто је овде n положно, то је, на основу доказатих правила за диференциалење количника и степена са положним изложитељем

$$dy = -\frac{du^n}{u^{2n}} = -\frac{nu^{n-1}\,du}{u^{2n}} = -nu^{-n-1}\ du,$$

а то је идентично с обрасцем $du^m = mu^{m-1}\,du$.

Примедба. Ово опште правило за диференциалење степена показује нам и диференциалење корених количина, јер кад ставим $m = \frac{1}{n}$ добијамо

$$d\sqrt[n]{u} = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

Од нарочите је важности образац

$$d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

49. Примери. — Помоћу добивених правила за диференциалење алгебарских функција

1) $$\begin{cases} d(u + v - w) = du + dv - dw \\ d(u + C) = du \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} d(uv) = udv + vdu \\ d(Cu) = Cdu \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} \\ d\left(\dfrac{C}{v}\right) = -\dfrac{Cdv}{v^2} \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} du^m = mu^{m-1}\,du \\ d\sqrt{u} = \dfrac{du}{2\sqrt{u}} \end{cases}$$

у стању смо да за сваку алгебарску функцију у откривеној форми нађемо њен диференциал и њену изводну.

1. Пример.

$$y = \frac{a + x}{a - x}$$

$$dy = \frac{(a - x)\,d(a + x) - (a + x)\,d(a - x)}{(a - x)^2}$$

$$= \frac{(a - x)\,dx + (a + x)\,dx}{(a - x)^2}$$

$$= \frac{2a}{(a - x)^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } y' = \frac{2a}{(a - x)^2}.$$

2. Пример.

$$y = 5 + 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{x\sqrt[4]{x}}$$

или

$$y = 5 + 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{5}{4}}\,dx$$

$$dy = 3\,.\,\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\,dx - 6\,.\,\frac{5}{4}x^{-\frac{9}{4}}$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{15}{2x^2\sqrt[4]{x}}\right]dx$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{15}{2x^2\sqrt[4]{x}}.$$

3. Пример.

$$y = (3 + 4x^2)^5$$

или

$$y = u^5, \text{ где је } u = 3 + 4x^2.$$

На основу правила за диференциалење посредних функција: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, а с обзиром на то да је овде

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(3 + 4x^2)^4,\quad \frac{du}{dx} = 8x,$$

имамо

$$\frac{dy}{dx} = 40x(3 + 4x^2)^4$$

$$dy = 40x\ (3 + 4x^2)^4\,dx.$$

4. Пример.

$$y = \frac{a}{x}f\left(\frac{a}{x}\right).$$

Ставимо

$$u = \frac{a}{x},$$

дакле

$$du = -\frac{a\,dx}{x^2}.$$

Задата функција добија вид

$$y = uf(u),$$

одакле

$$dy = f(u)\,du + uf'(u)\,du = [f(u) + uf'(u)]\,du$$

$$= \left[f\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x}f'\left(\frac{a}{x}\right)\right]\frac{-a}{x^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\left[f\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x}f'\left(\frac{a}{x}\right)\right]\frac{a}{x^2}.$$

5. Пример.

$$y = (x^2 + 3x - 5)\ (2x^2 - x - 1)$$

$$dy = (2x^2 - x - 1)\,d(x^2 + 3x - 5) + (x^2 + 3x - 5)\,d(2x^2 - x - 1)$$

$$= [(2x^2 - x - 1)(2x + 3) + (x^2 + 3x - 5)(4x - 1)]\,dx$$

$$= (8x^3 + 15x^2 - 28x + 2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 8x^3 + 15x^2 - 28x + 2.$$

50. Диференциал комплексних количина. — Узмимо да је задата функција у виду комплексне количине

$$y = u + iv,$$

где је $i = \sqrt{-1}$, u и v ма какве функције x-а. Мењањем прапроменљиве x за $\triangle x$ произилази једначина

$$y + \triangle y = u + \triangle u + i(v + \triangle v),$$

дакле

$$\Delta y = \Delta u + i\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

а прешав граници

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}$$

и према томе

$$dy \text{ или } d(u + iv) = du + i\,dv.$$

То значи да се диференциал комплексне количине добија као и диференциал збира сматравши имагинарну јединицу i као сталну количину.

51. Диференциал сложених функција. — Узмимо да је

$$y = f(u, v),$$

где су u и v функције прапромењиве x. Ми кажемо да је y сложена функција; овде сложена из двеју функција: u и v.

Ако променимо x за Δx промениће се u за Δu, v за Δv, а y за Δy. Међутим, место да у једанпут заменимо u са $u + \Delta u$ и v са $v + \Delta v$ у изразу $f(u, v)$, ми можемо да извршимо ту замену и поступно.

Замислимо да се прво мења u, а v да задржава ону вредност коју већ има; функција y добиће промену

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v)$$

која, кад је поделимо са Δu и пређемо граници, даје

$$lim \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \frac{d\,f(u, v)}{du} = \varphi(u, v).$$

Ако, напротив, пустимо v да се мења, а количину u задржимо као сталну, добићемо

$$lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = \frac{d\,f(u, v)}{dv} = \psi(u, v).$$

Означимо са α извесну количину, која заједно са Δu постаје бесконачно мала и то за сваку вредност v-а; са β другу количину, која изчезава заједно са Δv, па ма какво било u, онда, према ранијем посматрању (чл. 38.), можемо да ставимо

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [\varphi(u, v) + \alpha]\,\Delta u$$

$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = [\psi(u, v) + \beta]\,\Delta v.$$

Ако сада у овој другој једначини пустимо да се u промени за Δu добићемо

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) = [\psi(u + \Delta u, v) + \beta']\,\Delta v$$

подразумевајући под β' количину у коју се претвара β кад у њој заменимо u са $u + \Delta u$. Јасно је да β', исто као и β, постаје бесконачно мало заједно са променом Δv.

Саберимо последњу једначину са горњом првом и поделимо цело са Δx, па ћемо добити

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x} = [\varphi(u, v) + \alpha]\frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u + \Delta u, v) + \beta]\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

одакле, кад пређемо граници, следује

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v)\frac{du}{dx} + \psi(u, v)\frac{dv}{dx}$$

$$dy = \varphi(u, v)\,du + \psi(u, v)\,dv$$

или

$$dy = \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dv}\,dv.$$

Код ове једначине ваља да имамо на уму да се у диференциалним количницима $\frac{dy}{du}$ и $\frac{dy}{dv}$ количине u и v имају сматрати као прапромењиве од којих зависи y, док, међутим, у чинитељима du и dv, са којима су поменути количници помножени, u и v треба сматрати као функције x-а.

Примедба. Није тешко увидити да ово, што смо доказали за функцију y, која је сложена из две функције u и v, важи уопште и онда кад је y сложено из ма колико функција x-а. Тако н. пр. ако је

$$y = f(u, v, w)$$

јесте

$$dy = \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dv}\,dv + \frac{dy}{dw}\,dw.$$

Постоји, дакле, правило да се диференциал једне сложене функције добија кад се поступно узме диференциал те функције у однос на сваку од функција из којих је она сложена, сматравши, при томе, функцију, у однос на коју се узима диференциал, као прапромењиву и једино промењиву, и по томе се сви тако добивени диференциали саберу.

Лако је увидити да ово правило обухвата сва правила за диференциалење алгебарских функција.

Правила за диференциалење трансцендентних функција.

52. Диференциал логаритма. — Ставимо

$$y = log\,x.$$

Логаритам нека је за ма какву основу.

Имамо

$$y + \Delta y = log(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = log(x + \Delta x) - log\,x$$

$$= log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

или, ако ставимо

$$\Delta x = \frac{x}{m},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{x}\,log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x}\,log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Имавши на уму да при бесконачноме опадању промене Δx број m у бесконачност расте, да је за $lim\,\Delta x = 0$, $lim\,m = \infty$, изводимо из

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{m = \infty} log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{x}\,log \lim_{m = \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

а с обзиром на то да је $\lim_{m=\infty} (1 + \frac{1}{m})^m = e,$

ресултат
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e,$$

дакле
$$d \log x = \frac{dx}{x} \log e.$$

На случај да је логаритам узет у Непер-овој системи (природан логаритам: са основом e), образац гласи
$$d\, l\, x = \frac{dx}{x}.$$

Диференциал природног логаритма једне количине раван је, дакле, диференциалу те количине подељено истом количином. Због тога се количник из диференциала једне функције и исте функције зове *логаритамски диференциал.*

Примедба Правило за диференциалење логаритма може да се, у многим приликама, примени на диференциалење других функција. Тако н. пр. из
$$y = u^m,$$
где је u ма каква функција прапроменљиве x, а m произвољна константа, следује
$$l y = m\, l u$$
$$\frac{dy}{y} = m \frac{du}{u}$$
$$dy = m y \frac{du}{u} = m u^{m-1} du,$$
дакле
$$d u^m = m u^{m-1} du \qquad \text{(в. чл. 46.)}$$

Или ако узмемо
$$y = uvw$$
добијамо логаритмовањем
$$l y = l u + l v + l w,$$
а одавде диференциалењем
$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

Речима: логаритамски диференциал производа раван је збиру логаритамских диференциала његових чинитеља.

Из последње једначине, кад помножимо њену леву и десну страну са y или са uvw, произлази познато правило
$$d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw.$$

Логаритамским диференциалењем долазимо до правила:
$$d(uv) = uv \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right)$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right).$$

Опште:
$$d\left(\frac{uvw\ldots}{rst\ldots}\right) = \frac{uvw\ldots}{rst\ldots}\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s} - \frac{dt}{t}\ldots\right).$$

53. Диференциал изложитељне функције. — Узмимо
$$y = a^x.$$
Логаритмовањем у Непер-овој системи следује
$$l y = x\, l a,$$
одакле диференциалењем
$$\frac{dy}{y} = l a\, dx$$
$$dy \text{ или } d a^x = a^x\, l a\, dx.$$

Ако ставимо $a = e$ добићемо простије
$$d e^x = e^x\, dx.$$

Видимо да је
$$\frac{de^x}{dx} = e^x,$$
а то значи да је изводна изложитељне функције e^x равна истој функцији.

Примедба. Интересно је констатовати да је изложитељна функција једина, која ужива то својство да је њена изводно њој равна.

Доказ. Из
$$\frac{dy}{dx} = y$$
или
$$\frac{dy}{y} = dx$$
следује
$$d l y = dx.$$

Ми знамо да се две функције, овде $l y$ и x, које имају једнаке диференциале могу разликовати једна од друге само за константну вредност (в. чл. 43.) и на основу тога закључујемо да је
$$l y = x + c$$
$$y = e^{x+c} = e^c e^x$$
или простије
$$y = Ce^x.$$

То значи да је Ce^x заиста једина функција која горе изречено својство ужива.

54. Диференциал тригонометриских функција. —

a) Синус:
$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x,$$
$$\Delta y = \sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x$$
$$= -2 \sin x \sin^2 \frac{\Delta x}{2} + \cos x \sin \Delta x,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \sin x \sin \frac{\Delta x}{2} \cancel{\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

0 1 $= \cos x$

Ако пређемо граници и узмемо у обзир да је $\lim_{\Delta x = 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$ (чл. 12. пример 2.) добићемо
$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$
дакле
$$dy, \quad \text{т. ј. } d \sin x = \cos x\, dx.$$

b) Косинус: $$y = \cos x$$

или ако напишемо $$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

следује на основу горњег правила

$$dy = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x\, dx,$$

т. ј. $$d \cos x = -\sin x\, dx.$$

c) Тангента: $$y = tg\, x$$

или $$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

и према горњем

$$dy = \frac{\cos x\, d \sin x - \sin x\, d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x\, dx + \sin^2 x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

дакле $$d\, tg\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

d) Котангента: $$y = cotg\, x$$

или $$y = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

дакле $$dy = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d\, cotg\, x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

55. Диференциал циклометриских функција. —

a) Arcus sinus: $$y = arc \sin x,$$

дакле $$x = \sin y,$$
$$dx = \cos y\, dy,$$
$$dy = \frac{dx}{\cos y}$$

и кад заменимо dy са $d\, arc \sin x$, $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$

$$d\, arc \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Arcus cosinus: $$y = arc \cos x,$$

дакле $$x = \cos y,$$
$$dx = -\sin y\, dy,$$
$$dy = -\frac{dx}{\sin y},$$

које, кад заменимо $dy = d\, arc \cos x$, $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$, даје

$$d\, arc \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

c) Arcus tangens: $$y = arc\, tg\, x,$$

дакле $$x = tg\, y,$$
$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y},$$
$$dy = \cos^2 y\, dx$$

или кад заменимо $dy = d\, arc\, tg\, x$, $\cos^2 y = \dfrac{1}{1 + tg^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$$d\, arc\, tg\, x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

d) Arcus cotangens: $$y = arc\, cotg\, x.$$

Одавде $$x = cotg\, y,$$
$$dx = -\frac{dy}{\sin^2 y},$$
$$dy = -\sin^2 y\, dx,$$

а пошто је $dy = d\, arc\, cotg\, x$, $\sin^2 y = \dfrac{1}{1 + cotg^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$, следује

$$d\, arc\, cotg\, x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

56. Примери. — Добивеним правилима за диференциалење алгебарских функција (в. чл. 49.) и правилима за диференциалење трансцендентних функција

$$\left.\begin{aligned} d \log x &= \frac{dx}{x} \log e \\ d\, l\, x &= \frac{dx}{x} \end{aligned}\right\} (1$$

$$\left.\begin{aligned} d\, a^x &= a^x\, l\, a\, dx \\ d\, e^x &= e^x\, dx \end{aligned}\right\} (2$$

$$\left.\begin{aligned} d \sin x &= \cos x\, dx \\ d \cos x &= -\sin x\, dx \end{aligned}\right\} (3$$

$$\left.\begin{aligned} d\, tg\, x &= \frac{dx}{\cos^2 x} \\ d\, cotg\, x &= -\frac{dx}{\sin^2 x} \end{aligned}\right\} (4$$

$$\left.\begin{aligned} d\, arc \sin x &= \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ d\, arc \cos x &= -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}\right\} (5$$

$$\left.\begin{aligned} d\, arc\, tg\, x &= \frac{dx}{1 + x^2} \\ d\, arc\, cotg x &= -\frac{dx}{1 + x^2}, \end{aligned}\right\} (6$$

где x може да је или прапроменљива количина или ма каква функција прапроменљиве, постављени смо у могућност да диференциалимо сваку експлицитну функцију.

1. Пример.

$$y = v^u,$$

где су u и v ма какве функције x-а. Из

$$l\,y = u\,l\,v$$

следује

$$\frac{dy}{y} = l\,v\,du + u\,\frac{dv}{v},$$

$$dy = y\,l\,v\,du + y\,u\,\frac{dv}{v},$$

дакле

$$d\,v^u = v^u\,l\,v\,du + v^{u-1}\,u\,dv.$$

До истога ресултата долазимо применом правила за диференциалење сложених функција (в. чл. 51.), пошто је $y = f(u, v)$. Имамо

$$d\,v^u = \frac{d\,v^u}{du}\,du + \frac{d\,v^u}{dv}\,dv.$$

У првоме члану $\frac{d\,v^u}{du}\,du$ задата функција v^u има да се сматра као изложитељна функција (пошто се само u узима као променљива количина) и да се као таква диференциали (в. чл. 53.), у другоме члану $\frac{d\,v^u}{d\,v}\;d\,v$ функцију v^u треба сматрати као степену количину, јер се ту узима v као променљива и, према томе, треба применути правило у чл. 48.

2. Пример.

$$y = l\,(\sin x),$$

$$dy = \frac{d\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \operatorname{cotg} x\,dx,\ y' = \operatorname{cotg} x.$$

3. Пример.

$$y = \sin\,(lx),$$

$$dy = \cos\,(lx)\,dlx = \cos\ lx\,\frac{dx}{x},\ y' = \frac{\cos lx}{x}.$$

4. Пример.

$$y = l\ lx,$$

$$dy = \frac{dlx}{lx} = \frac{dx}{x\,lx},\ y' = \frac{1}{x\,lx}.$$

5. Пример.

$$y = l\,(x\,tg\,x),$$

$$dy = \frac{d\,(x\,tg\,x)}{x\,tg\,x} = \frac{tg\,x\,dx + x\,d\,tg\,x}{x\,tg\,x} = \frac{tg\,x + \frac{x}{\cos^2 x}}{x\,tg\,x}\,dx$$

$$= \frac{\sin x\cos x + x}{x\sin x\cos x}\,dx = \frac{\sin 2\,x + 2\,x}{x\sin 2\,x}\,dx,\ y' = \frac{\sin 2\,x + 2\,x}{x\sin 2\,x}.$$

6. Пример.

$$y = e^{tg\,x}$$

$$dy = e^{tg\,x}\ d\ tg\,x = e^{tg\,x}\,\frac{dx}{\cos^2 x},\ y' = \frac{e^{tg\,x}}{\cos^2 x}.$$

7. Пример.

$$y = \operatorname{arc}\,tg\,(n\,tg\,x),$$

$$\frac{d\,(n\,tg\,x)}{1 + n^2\,tg^2\,x} = \frac{n\,dx}{[1 + n^2\,tg^2\,x]\cos^2 x} = \frac{n\,dx}{\cos^2 x + n^2\sin^2 x},\ y' = \frac{n}{\cos^2 x + n^2\sin^2 x}.$$

8. Пример.

$$y = \operatorname{arc}\sin\frac{x-a}{x+a},$$

$$dy = \frac{d\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2}} = \frac{(x+a)\,d\,(x-a) - (x-a)\,d\,(x+a)}{(x+a)^2\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2}}$$

$$dy = \frac{[(x+a)-(x-a)]\,dx}{(x+a)\sqrt{(x+a)^2-(x-a)^2}} = \frac{\sqrt{a}\ dx}{(x+a)\sqrt{x}},\ y' = \frac{\sqrt{a}}{(x+a)\sqrt{x}}.$$

9. Пример.

$$y = e^{\operatorname{arc}\sin\,(lx)}$$

$$dy = e^{\operatorname{arc}\sin\,(lx)}\ d\operatorname{arc}\sin\,(lx) = e^{\operatorname{arc}\sin\,(lx)}\ \frac{dlx}{\sqrt{1-(lx)^2}}$$

$$= \frac{e^{\operatorname{arc}\sin\,(lx)}\,dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}},\ y' = \frac{e^{\operatorname{arc}\sin\,(lx)}}{x\sqrt{1-(lx)^2}}.$$

10. Пример.

$$y = \cos\,(x\,tg\,x),$$

$$dy = -\sin\,(x\,tg\,x)\,d\,(x\,tg\,x) = -\sin\,(x\,tg\,x)\,(tg\,x\,dx + x\,d\,tg\,x)$$

$$= -\sin\,(x\,tg\,x)\left(tg\,x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)dx,\ y' = -\sin\,(x\,tg\,x)\left(tg\,x + \frac{x}{\cos^2 x}\right).$$

57. Диференциалење скривених функција. — Узмимо да је функција дата у скривеној форми

$$F(x,\ y) = 0.$$

Тражи са изводна функција y', а да се једначина не решава по y-у.

С погледом на то, што се полином на левој страни једначине може сматрати као једна сложена функција зависна од променљивих x и y и имавши на уму да та сложена функција има константну вредност $= 0$, то онда, на основу посматрања у чл. 41. и на основу правила за диференциалење сложених функција (чл. 51.) добијамо

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Изводна имплицитне функције равна је одречноме количнику из изводне по x-у и изводне по y-у, обе изводне узете од леве стране на нулу сведене једначине.

1. Пример.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{2\,x\ dx}{a^2} + \frac{2\,y\,dy}{b^2} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

2. Пример.

$$x \sin y + y \cos x = 0,$$

$$(\sin y - y \sin x)\, dx + (x \cos y + \cos x)\, dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}.$$

58. Диференциалење двеју и више скривених функција једне исте прапроменљиве. — Узмимо да су нам дате две функције y и z прапроменљиве x и да је веза између тих количина изражена у скривеној форми овим двема једначинама

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Траже се изводне $y' = \frac{dy}{dx}$ и $z' = \frac{dz}{dx}$, а да се задате једначине не решавају по y и z.

Пошто се леве стране горњих једначина могу сматрати као функције које су сложене из три променљиве x, y и z, које све три зависе од променљиве x, и пошто су вредности тих функција (леве стране задатих једначина) константне (равне нули), то, на основу чл. 41 и чл. 51., следује диференциалењем непосредно

$$\frac{dF}{dx}\, dx + \frac{dF}{dy}\, dy + \frac{dF}{dz}\, dz = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dx}\, dx + \frac{d\Phi}{dy}\, dy + \frac{d\Phi}{dz}\, dz = 0.$$

Кад поделимо обе једначине са dx добијамо две једначине првога степена са двема непознатама $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Пошто их решимо налазимо изводне

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dz} - \frac{dF}{dz}\frac{d\Phi}{dx}}{\frac{dF}{dz}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dz}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx} - \frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy}}{\frac{dF}{dz}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dz}}.$$

Тако исто треба поступити и онда, кад је број функција, које зависе од једне исте прапроменљиве, ма колики. Нпр. ако имамо n једначина између $n + 1$ променљиве количине, онда је само једна од њих независно променљива, а све су остале зависне (функције) од ње. Диференциалењем задатих једначина добијамо нових n једначина у којима улазе диференциали променљивих ($dx, dy, dz, dt, \ldots$) у првоме степену и помоћу којих n једначина, врло лако, израчунавамо n изводних $\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dt}{dx}, \ldots\right)$.

Пример.

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Диференциалењем добијамо

$$x\, dx + y\, dy + z\, dz = 0$$

$$A\, dx + B\, dy + C\, dz = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx - Az}{Bz - Cy}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Ay - Bx}{Bz - Cy}.$$

59. Изводне функције и диференциали разног ступња. — Нека је

$$y = f(x),$$

а изводна њена је

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ или } f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Пошто је y' такође зависно од прапроменљиве x, то можемо и за y' да тражимо изводну. Ова изводна од изводне y' зове се *друга изводна* задате функције y или *изводна (диференциални количник) другога ступња* и бележи се са y'' или са $f''(x)$.

На исти начин добијамо из друге изводне *трећу изводну* y''' или $f'''(x)$, из ове опет *четврту изводну* итд.

Из прве изводне

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

следује друга изводна

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

и пошто се dx, као бесконачно мала промена независно променљиве количине, може сматрати као стална, имамо да је

$$y'' = \frac{d(dy)}{dx^2}.$$

$d(dy)$, а то је диференциал диференциала (бесконачно мала промена једне бесконачно мале промене), бележи се краће са d^2y и зове се *диференциал другог ступња* или *други диференциал*. Дакле

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Трећу изводну добијамо из друге изводне онако исто као другу из прве, односно као прву изводну из задате функције. Према томе је

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d(d^2y)}{dx^3},$$

које, кад означимо $d(d^2y)$ са d^3y (диференциал трећег ступња), гласи

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Сасвим опште n-та изводна или n-ти диференциални количник јесте

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

1. *Примедба.* Поступни диференциални количници или изводне неке функције $y = f(x)$ бележе се по *Лајбницу* са

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

или са $$\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \ldots \frac{d^nf(x)}{dx^n},$$

а по *Лагранжу* са $$y', y'', y''', \ldots y^{(n)}$$

или са $$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x).$$

2. *Примедба.* Растављајући време на бесконачно мале интервале, ми замишљамо да је свако кретање тачке, ма како компликованоме закону следовало, сложено из бесконачно много равномерних (т. ј. најпростијих) кретања.[1] Према дефиницији за равномерно кретање јесте

$$\text{брзина} = \frac{\text{дужина путање}}{\text{утрошено време}}.$$

Узмимо какво било кретање. Нека је закон кретања представљен једначином $y = f(x)$, где y означава путању, x време. На основу горе реченога је

$$\text{брзина кретања} = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Изводна функција или диференциални количник показује брзину, којом се функција мења или у механичкому смислу (када функција представља путању, прапроменљива време) брзину кретања.

Пошто се изводна другога реда добија из прве изводне онако исто као и изводна првога реда из задате функције, јасно је да изводна другога реда, као изводна изводне првога реда, даје брзину, којом се брзина мења. У Механици се то зове убрзање или акцелерација. Дакле:

$$\text{убрзање кретања} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

У Механици се утврђује да је сила пропорционална акцелерацији и маси m, којој саопштава дотично убрзање. То значи:

$$\text{сила} = m\frac{d^2y}{dx^2}.$$

60. Примери. —

1. *Пример.*

$$y = x^m.$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

---

[1] Аналогно схватању да се свака крива линија може сматрати да је сложена из бесконачно много бесконачно малих праволиниских елемената, на чему се, између осталога, оснива израчунавање кривих линија (дужине лукова), теорија тангенте итд.

Ако је изложитељ m цео и положан број, онда је

$$\frac{d^my}{dx^m} = m(m-1)(m-2)\ldots 3 . 2 . 1,$$

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} = \frac{d^{m+3}y}{dx^{m+3}} = \ldots = 0.$$

2. *Пример.*

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x la$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^x(la)^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^x(la)^3$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^x(la)^n.$$

За $y = e^x$ јесте $$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots = \frac{d^ny}{dx^n} = y.$$

3. *Пример.*

$$y = lx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 . x^{-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1 . 2 . x^{-3}$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1} . 1 . 2 . 3 \ldots (n-1)x^{-n}.$$

4. *Пример.*

$$y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) = y$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

На исти начин изводимо за

$$y = \cos x$$

општи образац

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Za [illegible]

61. Изводне вишега ступња скривених функција. — Замишљамо да је функција дата у скривеној форми

$$F(x, y) = 0.$$

Према правилу у чл. 57. имамо:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

одакле налазимо прву изводну

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Диференциалећи поново горњу једначину и имавши, при томе, на уму, да су $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ и $\frac{dy}{dx}$ функције x-а и y-а следује, на основу правила за диференциалење сложених функција,

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2F}{dx\,dy} + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

или краће

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

одакле

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dF}{dy}}.$$

До истог ресултата долазимо пошав од израза

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

диференциалећи десну страну као количник у коме су дељеник и делитељ сложене функције (зависни од x и од y). На тај начин налазимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{dF}{dy}\left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dF}{dx}\left(\frac{d^2F}{dx\,dy} + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2}$$

које, с обзиром на горњи израз за прву изводну, даје исту вредност за $\frac{d^2y}{dx^2}$, коју смо већ нашли.

На сличан начин нашли бисмо из друге изводне трећу изводну, итд.

Пример.

$$x \sin y + y \cos x = 0.$$

Овде је (в. 2. пример у чл. 57.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x},$$

одакле налазимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$\frac{(x \cos y + \cos x)\left[y \cos x + (\sin x - \cos y)\frac{dy}{dx}\right] - (y \sin x - \sin y)\left[\cos y - \sin x - x \sin y \frac{dy}{dx}\right]}{(x \cos y + \cos x)^2}$$

62. Мењање прапромењливе.[1]) Нека је

$$y = f(x).$$

еба заменути прапромењливу x новом прапромењливом t на основу га што је

$$x = \varphi(t).$$

датак је: да се изразе изводне односно диференциали од y, сматравши t о прапромењливу, помоћу изводних од y, узимајући y као функцију x-а, кле помоћу $f'(x)$, $f''(x)$, . . . и помоћу изводних и диференциала од x о функције прапромењливе t. Треба, дакле, да се изразе поступне водне и диференциали од y, као функције прапромењливе t, а да не врши замена прапромењливе x новом прапромењливом t.

Пошто су x и y функције од t, то онда, на основу правила за ференциалење посредних функција (чл. 44.) или на основу правила за ференциалење сложених функција (чл. 51.), следује

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt} = f'(x)\,\varphi'(t).$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + f'(x)\frac{d^2x}{dt^2} = f''(x)\,\varphi'(t)^2 + f'(x)\,\varphi''(t)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = f'''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 3f''(x)\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + f'(x)\frac{d^3x}{dt^3} = f'''(x)\,\varphi'(t)^3$$
$$+ 3f''(x)\,\varphi'(t)\,\varphi''(t) + f'(x)\,\varphi'''(t)$$

тд. Обратно: познавајући изводне или диференциале од y и x као ункције прапромењливе t добијамо из горњих једначина диференциале изводне од y као функције прапромењливе x:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

$$f'''(x) = \frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}\right) - 3\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5} \quad \text{итд.}$$

---

[1] Види напомену у чл. 3.

До истога ресултата долазимо кад диференциалимо

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

по прапромењивој t. Добијамо

$$f''(x)\,dx = d\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}, \quad f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{d^3x} \text{ и т. д.}$$

Примећујемо да је прва изводна $f'(x)$ у свакоме случају представљена са $\frac{dy}{dx}$, било да је количина x прапромењива или не, док, међутим израз за изводне вишега ступња $f''(x)$, $f'''(x)$, ... зависи од тога да ли је x прапромењива или функција друге које количине.

1. *Пример.* Заменимо у једначини

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

прапромењиву x новом прапромењивом t узевши

$$x = \cos t.$$

С погледом на то што је

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2} - \cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t}$$

и према томе задата једначина гласи сада

$$(1-\cos^2 t)\frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2} - \cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t} + \frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt} + n^2y = 0,$$

које се своди на

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

2. *Пример.* Дата је једначина

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

У њој да се изврши замена

$$t = l\,(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Услед тога што је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{d\,(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

задата једначина добија овој простији вид

$$\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

63. Односи између изводних инверзних функција.[1]) — Као један особени случај нашег расматрања у прошломе члану узмимо да се од задате функције

$$y = f(x)$$

прелази инверзној функцији

$$x = F(y)$$

код које је x зависно промењива, а y прапромењива. У овоме је случају

$$y = t, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^3y}{dt^3} = \ldots = 0$$

и на основу образаца у прошломе члану добијамо ове једначине

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{F'(y)}$$

$$f''(x) = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = -\frac{F''(y)}{F'(y)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-dx\,dy\,d^3x + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^5} = \frac{-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

$$= \frac{3\,F''(y)^2 - F'(y)\,F'''(y)}{F'(y)^5}$$

итд.

II.

Диференциалење функција које зависе од више прапромењивих.

64. Делимични и потпуни диференциали функције, која зависи од више прапромењивих. — Замислимо да се у функцији

$$u = f(x,\ y,\ z),$$

која зависи од више прапромењивих, само једна од ових мења, н. пр. само x и ми узмемо изводну од функције u по тој промењивој x, онда се тако добивена изводна зове *делимична* или *парциална изводна.* У овоме случају делимична изводна узета је по прапромењивој x и она се бележи са $\frac{\partial u}{\partial x}$ или са $\frac{\partial f(x,\ y,\ z)}{\partial x}$. Према оваквоме појмању јесте

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Парциалну изводну функције u узету по x-у треба, дакле, разумети као диференциални количник сматравши функцију u као једино зависну од промењиве x.

---

[1]) Види Напомену у чл. 3.

Производ из делимичне изводне и промене дотичне прапромењиве, н. пр. $\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right.$ или $\frac{\partial f\,(x, y, z)}{\partial x} dx$, зове се *дилимични* или *парциални диференциал* од u по x-у.

Обележимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi\,(x, y, z),\ \frac{\partial u}{\partial y} = \psi\,(x, y, z),\ \frac{\partial u}{\partial z} = \chi\,(x, y, z),$$

Збир свију делимичних диференциала, а то је у овоме случају

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \varphi\,(x, y, z)\,dx + \psi\,(x, y, z)\,dy + \chi\,(x, y, z)\,dz,$$

зове се *потпуни* или *тотални диференциал* од u бележи се, као и до сада, са du.

Да бисмо показали, да овакав појам за потпуни диференциал једне функције, која зависи од *више* прапромењливих, одговара раније утврђеном појму за диференциал функције, која зависи само од *једне* прапромењливе, поступићемо слично као при извођењу правила за диференциалење сложених функција (чл. 51.). Као тамо, тако и овде ставићемо

$$\begin{aligned} f\,(x + \Delta x, y, z) - f\,(x, y, z) &= [\varphi\,(x, y, z) + \alpha]\,\Delta x \\ f\,(x, y + \Delta y, z) - f\,(x, y, z) &= [\psi\,(x, y, z) + \beta]\,\Delta y \\ f\,(x, y, z + \Delta z) - f\,(x, y, z) &= [\chi\,(x, y, z) + \gamma]\,\Delta z \end{aligned}$$

разумевајући и сада под α, β, γ извесне количине које ишчезавају заједно са дотичним променама Δx, Δy и Δz.

Ако пустимо у другој једначини да се промени x, а у трећој једначини да се промени x и y, добићемо ове изразе

$$f\,(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - f\,(x + \Delta x, y, z) = [\psi\,(x + \Delta x, y, z) + \beta']\,\Delta y$$
$$f\,(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f\,(x + \Delta x, y + \Delta y, z) = \\ = [\chi\,(x + \Delta x, y + \Delta y, z) + \gamma']\,\Delta z,$$

где β' означава количину, која ишчезава заједно са променама Δx и Δy, а γ' количину, која ишчезава са Δx, Δy и Δz.

Ако саберемо прву, четврту и пету једначину и означимо са β'' и γ'' извесне количине које упоредно са променама прапромењливих теже нуле, онда се тај ресултат, с погледом на то што се на левој страни налази $f\,(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f\,(x, y, z)$, а то је промена Δu функције u, може да напише

$$\Delta u = [\varphi\,(x, y, z)\,\Delta x + \psi\,(x, y, z)\,\Delta y + \chi\,(x, y, z)\,\Delta z] + \\ + [\alpha\,\Delta x + \beta''\,\Delta y + \gamma''\,\Delta z].$$

Одавде видимо да се промена функције састоји, у главноме, из ова два дела: први је део збир производа из појединих делимичних изводних и промене дотичне прапромењиве, а други је део збир производа из промена појединих прапромењливих и извесних количина, које упоредно са променама теже нули. Овај други део, као бесконачно мали према првоме, смемо да занемаримо на основу прве и друге основне теореме Више Математике (чл. 20., 21. и 22). Према томе, у претпоставци да су промене бесконачно мале, јесте

$$du = \varphi\,(x, y, z)\;dx + \psi\,(x, y, z)\;dy + \chi\,(x, y, z)\;dz$$

или

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Пример.

$$u = x^p\ y^q$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p\,x^{p-1}\ y^q,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = q\,x^p\,.\,y^{q-1},$$

$$du = p\,x^{p-1}\ y^q\ dx + q\,x^p\ y^{q-1}\ dy = x^{p-1}\ y^{q-1}\ (py\,dx + qx\,dy).$$

65. Диференциалење сложених функција, које зависе од више прапромењивих.

— Нека је

$$t = f\,(u, v),$$

а

$$u = \varphi\,(x, y, z),\quad v = \psi\,(x, y, z),$$

дакле t сложена функција из двеју функција u и v, које зависе од променљивих x, y, z.

Делимичним диференциалењем функције t по x, y и z добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{\partial t}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial z} &= \frac{\partial t}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ако ове делимичне изводне $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}$ помножимо са dx, dy и dz и тако добивене делимичне диференциале $\frac{\partial t}{\partial x} dx$, $\frac{\partial t}{\partial y} dy$, $\frac{\partial t}{\partial z} dz$ саберемо добићемо потпуни диференциал

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ dx + \frac{\partial u}{\partial y}\ dy + \frac{\partial u}{\partial z}\ dz\right) + \\ + \frac{\partial t}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\ dx + \frac{\partial v}{\partial y}\ dy + \frac{\partial v}{\partial z}\ dz\right),$$

које с обзиром на то што је

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ dx + \frac{\partial u}{\partial y}\ dy + \frac{\partial u}{\partial z}\ dz = du$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\ dx + \frac{\partial v}{\partial y}\ dy + \frac{\partial v}{\partial z}\ dz = dv,$$

може да се напише

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u}\ du + \frac{\partial t}{\partial v}\ dv.$$

Овим је доказано да правило за диференциалење сложених функција (в. чл. 51.) важи сасвим уопште и за случај више прапромењивих.

66. Диференциал скривених функција, које зависе од више прапроменљивих. — Замислимо да су нам дате две функције u и v, кој зависе од прапроменљивих x, y, z, једначинама

$$F(x,\ y,\ z,\ u,\ v)=0$$
$$\Phi(x,\ y,\ z,\ u,\ v)=0,$$

дакле у скривеној форми.

Диференциалењем задатих једначина по горњем правилу за диференциалење сложених функција следује

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial \Phi}{\partial u}du+\frac{\partial \Phi}{\partial v}dv=0,$$

одакле добијамо диференциале du и dv.

67. Делимичне изводне и делимични диференциали разнога ступња функција, које зависе од више прапроменљивих. — Узмимо

$$u=f(x,\ y,\ z).$$

На основу сличних посматрања каква смо чинили приликом изналажењ изводних и диференциала разнога ступња за функције које зависе сам од једне прапроменљиве (чл. 59.) налазимо у овоме случају поступн делимичне изводне. Пошто су делимичне изводне $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ такођ функције, које зависе од променљивих x, y, z, то је јасно да сваку о њих можемо поново да диференциалимо и од сваке да тражимо изводн по ма којој од прапроменљивих. Тако н. пр. од парциалне изводне $\frac{\partial}{\partial}$ можемо да узмемо поново изводну по x. по y или по z и налазимо

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}.$$

Тако исто од парциалне изводне $\frac{\partial u}{\partial y}$ добијамо

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}.$$

Најзад из парциалне изводне $\frac{\partial u}{\partial z}$ следује

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z},\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Од ових изводних можемо поново да тражимо изводне по x, y z итд. Тако н. пр. $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z}$ јесте парциална изводна четвртог ступњ добивена парциалним диференциалењем један пут по x-у, два пута п y-у и један пут по z-у.

Теорема. При делимичноме диференциалењу по разним прапроменљивима потпуно је свеједно којем ћемо редом вршити диференциалење.

Довољно је да докажемо да је

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}\quad\text{или}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Узимајући делимичне изводне функције u по x и по y, ми можемо функцију u сматрати да зависи само од тих променљивих, а о осталима променљивима не морамо ни водити рачуна. Ставимо дакле

$$u=f(x,\ y)$$

и означимо са $\Delta_x u$ и $\Delta_y u$ промене од u које та функција добија променом x-а за h односно променом y-а за k. Према томе је

$$\Delta_x u=f(x+h,\ y)-f(x,\ y)$$
$$\Delta_y u=f(x,\ y+k)-f(x,\ y).$$

Означимо са $\Delta_y\Delta_x u$ и $\Delta_x\Delta_y u$ промене од $\Delta_x u$ $\Delta_y u$ које те количине добијају пошто заменимо у првој y са $y+k$, а у другој x са $x+h$. На основу горње две једначине следује

$$\Delta_y\Delta_x u=[f\,x+h,\ y+k)-f(x,\ y+k)]-[f(x+h,\ y)-f(x,\ y)]$$
$$\Delta_x\Delta_y u=[f\,x+h,\ y+k)-f(x+h,\ y)]-[f(x,\ y+k)-f(x,\ y)],$$

које, кад сравнимо, видимо да је

$$\Delta_y\Delta_x u=\Delta_x\Delta_y u,$$

па, дакле, и

$$\frac{\Delta_y\Delta_x u}{k\,.\,h}=\frac{\Delta_x\Delta_y u}{h\,.\,k},$$

$$\lim_{\substack{h=0\\k=0}}\frac{\Delta_y\Delta_x u}{k\,.\,h}=\lim_{\substack{h=0\\k=0}}\frac{\Delta_x\Delta_y u}{h\,.\,k},$$

т. ј.

$$\frac{\partial_y\,\partial_x u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial_x\,\partial_y u}{\partial x\,\partial y}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\ \text{q. e. d.}$$

Врло је појмљиво да се ова теорема може да примени и на ма колики број поступног диференциалења. Тако н. пр. јесте

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x\,\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial z\,\partial x\,\partial z\,\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^6 u}{\partial z^2\,\partial y\,\partial x^3}.$$

1. Пример. $u=x^p\ y^q$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p x^{p-1}\ y^q,\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=p q x^{p-1}\ y^{q-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=q x^p\ \ y^{q-1},\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=p q x^{p-1}\ y^{q-1},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\ \partial x}\right)=p(p-1)q\,x^{p-2}\ y^{q-1},\ \text{итд.}$$

2. *Пример.*

$$u = arc\,tg\,\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

68. Тотални диференциали функције више прапроменљивих.

— Задатак је да нађемо тоталне диференциале разног ступња једне функције, која зависи од више прапроменљивих, н. пр. функције

$$u = f\,(x,\ y,\ z).$$

Први тотални диференциал је

$$d\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\,d\,z.$$

Други тотални диференциал (или тотални диференциал другога ступња) добићемо кад од свакога члана на десној страни у изразу за $d\,u$ узмемо тотални диференциал. Тиме налазимо

$$d^2 u = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,d\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,d\,z\right] d\,x +$$
$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,d\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,d\,z\right] d\,y +$$
$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,d\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,d\,y + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,d\,z\right] d\,z$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,d\,x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,d\,y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,d\,z^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,d\,x\,d\,y +$$
$$2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,d\,y\,d\,z + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\,d\,z\,d\,x.$$

Из овога обрасца видимо да се други тотални диференциал $d^2 u$ добија из првог диференциала $d\,u$ кад се вредност првог тоталног диференциала, а то је овде трином $\frac{\partial u}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\,d\,z$, подигне на квадрат па у тако добивеноме ресултату замени $d\,u^2$ са $d^2 u$. Са таквом погодбом можемо да напишемо символну формулу

$$d^2 u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\,d\,z\right]^{(2)}.$$

Сасвим опште важи образац

$$d^{(n)} u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\,d\,z\right]^{(n)},$$

чија се десна страна има разумети као ресултат, до којег се долази, кад се трином $\frac{\partial u}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial u}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial u}{\partial z}\,d\,z$, који нам представља први тотални диференциал, подигне на n-ти степен и онда свуда $d\,u^n$ замени са $d^n u$.

69. Делимичне изводне скривених функција.

— Узмимо да нам је дата једначина са три[1]) променљиве x, y, z у скривеној форми

$$F\,(x,\ y,\ z) = 0.$$

Свака од ових трију количина може се сматрати као функција осталих двеју. Нека су x и y прапроменљиве, а z функција њихова. Траже се делимичне изводне функције z.

Диференциалењем задате једначине парциално по x-у следује

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

одакле парциална изводна z-а по x-у

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

диференциалењем парциално по y-у добијамо

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

одакле парциална изводна функције z по y-у

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Парциалним диференциалењем задате једначине два пута по x-у или два пута по y-у или најзад један пут по x-у и један пут по y-у (у ма коме реду), долазимо до ресултата

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$$

из којих добијамо парциалне изводне другог ступња $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. Итд.

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$

Парциалним диференциалењем 1) по x-у; 2) по y-у; 3) два пута по x-у; 4) два пута по y-у; 5) један пут по x-у и један пут по y-у налазимо

$$x + z\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\qquad y + z\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,\quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + z\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

одакле добијамо парциалне изводне првог и другог ступња

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2+z^3}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{x\,y}{z^3}.$$

---

[1]) Ако задата једначина садржи само две променљиве, онда је скривена функција зависна само од једне прапроменљиве и ми, за такав случај, имамо у чл. 61. упутство за изналажење поступних изводних.

III.

Примене Диференцијалног Рачуна у Анализи.

1. Развијање функција у редове.[1]

70. Taylor-ов ред. — Означимо са m најмању, са M највећу вредност од $f^{(n+1)}(x)$, т. ј. $n+1$ве изводне функције $f(x)$, у извесноме интервалу прапромењљиве, н. пр. од $x = x_1$ до $x = x_2$. Онда је, очевидно, за $x_1 < x + h < x_2$

$$a^1) \qquad f^{(n+1)}(x+h) - m > 0.$$

Пошто је лева страна ове неравности, сматрана као изводна узета по h од

$$a) \qquad f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) - m\,h,$$

положна и пошто је функција под $a)$ за $h = 0$ такође $= 0$, то, на основу нашег расматрања у чл. 41., следује да речена функција под $a)$ расте упоредно са h и да, према томе за $h > 0$ мора и она бити > 0. т. ј.

$$b^1) \qquad f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) - m\,h > 0.$$

Лева страна ове неравности под $b^1)$ може се сматрати као изводна узета по h од

$$b) \qquad f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) - h\,f^{(n)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}\,m.$$

С погледом на то што је изводна ове функције положна и што је за $h = 0$ и сама функција $= 0$, закључујемо (на основу чл. 41.) да је за $h > 0$ и

$$c^1) \qquad f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) - h\,f^{(n)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}\,m > 0,$$

одакле, на исти начин, изводимо неравности

$$f^{(n-2)}(x+h) - f^{(n-2)}(x) - h\,f^{(n-1)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}f^{(n)}(x) - \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,m > 0,$$

$$f^{(n-3)}(x+h) - f^{(n-3)}(x) - h\,f^{(n-2)}(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}f^{(n-1)}(x) - \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f^{(n)}(x) - \frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,m > 0$$

итд. и на послетку

$$f(x+h) - f(x) - h\,f'(x) - \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) - \ldots - \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) - \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}\,m > 0$$

или

$$A) \qquad f(x+h) > f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}\,m.$$

---

[1] Види Примедбу у чл. 27.

Полазећи од неравности

$$f^{(n+1)}(x+h) - M < 0$$

долазимо, сличним умовањем, до ресултата да је

$$f(x+h) < f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}\,M. \qquad (B$$

На основу неравности $A)$ и $B)$ постављамо једначину

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}\,м, \qquad (C$$

где је $м$ извесна количина чија вредност лежи између m и M, дакле $m < м < M$.

Имавши на уму да је m најмања, M највећа вредност изводне $f^{(n+1)}(x)$ за све x од $x = x_1$, па до $x = x_2$ и с погледом на то да су овде (т. ј. у неравностима A и B) те крајне вредности x-а (т. ј. x_1 и x_2) ове: x и $x + h$; даље под претпоставком да је $f^{(n+1)}(x)$ непрекидна за све вредности x-а у означеноме интервалу, у коме случају $f^{(n+1)}(x)$ мора поступно да пређе све вредности од најмање m, па до највеће M, па, дакле, и вредност броја $м$ (који је између m и M), — јасно је да се тај број $м$ може представити као вредност изводне $f^{(n+1)}(x)$ за неко x које лежи у посматраноме интервалу између x и $x + h$. Ако то x, за које $n + 1$ ва изводна $f^{(n+1)}(x)$ постаје $= м$, изразимо са $x + \Theta\,h$, разумевајући под Θ разломак мањи од 1, ставимо, дакле, $м = f^{(n+1)}(x + \Theta\,h)$ добијамо, према једначини под C), ову такозвану *Taylor*[1]*-ову формулу*

$$f(x+h) = f(x) + h'f(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}\,f^{(n+1)}(x + \Theta\,h).$$

Ми смо, у нашем извођењу, претпоставили да је промена $h > 0$. На случај да је $h < 0$ имали бисмо само да променимо знак неједнакости у неравностима под A) и B) и све друго остаје како је. То значи да Taylor-ова формула важи како за положне тако и за одречне промене h.

1. Напомена. Код Taylor-ове формуле претпоставља се да је $n + 1$ ва изводна задате функције непрекидна у извесноме интервалу од x па до $x + h$. За идуће изводне ($n + 2$гу, $n + 3$ћу, ...) не одређује се ништа: оне могу бити непрекидне или прекидне. То значи да развијање једне функције помоћу Taylor-ове формуле може бити правилно, ако се,

---

[1] Brook Taylor (* Edmonton 1685, † London 1731) показао је ту формулу у једноме свом дѣлу године 1715.

при развијању, будемо зауставили код извесног члана, а постати погрешним, ако развијање будемо и даље продужили. Такав је случај н. пр. са функцијом

$$f(x) = \sin x + (x - a)^{6\frac{1}{2}}\, e^x.$$

Пошто су, овде, функције $\sin x$ и e^x непрекидне за све вредности x-а, а тако исто и све њихове изводне, међутим изводне од $(x - a)^{6\frac{1}{2}}$ за $x = a$ непрекидне само до шесте закључно, а све изводне вишег ступња (седма, осма, ...) прекидне за $x = a$, јер постају ∞, то видимо да се са развијањем задате функције $f(x)$ у ред, помоћу Taylor-ове формуле, може ићи само до члана са $f^{(6)}(x + \Theta h)$.

2. *Напомена.* При извођењу Taylor-овог обрасца претпоставили смо да је $n+1$ ва изводна $f^{(n+1)}(x)$, функције коју развијамо, непрекидна у интервалу од x па до $x + h$ и тиме смо добили као закључни члан (остатак) реда ово

$$R = \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x + \Theta h).$$

Међутим, ако је констатована непрекидност само за n-ту изводну $f^{(n)}(x)$ у интервалу од x па до $x + h$, али непрекидност није утврђена за $n + 1$ву изводну, Taylor-ова се формула може тада да напише

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^{(n)}(x + \Theta h).$$

Када овде на десној страни додамо и одузмемо $\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^{(n)}(x)$ Taylor-ов образац добија нову форму

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,[f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)]$$

из које се види да је закључни члан (остатак), који треба додати $n + 1$ члану бесконачног реда $f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \ldots$ да би се добила тачна вредност за $f(x+h)$, ово

$$R = \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,[f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)].$$

Разуме се да количина Θ у овоме изразу за R није она иста која у горњој формули за R, али је у свакоме случају $\Theta < 1$.

3. *Напомена.* Ако Taylor-ов ред прекинемо код извесног члана, прекинемо н. пр. са чланом $\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^{(n)}(x)$ и претпоставимо да тај члан није $= 0$, онда се h може увек узети тако мало да поменути члан буде по апсолутној вредности већи од остатка који треба додати збиру

$$f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^{(n)}(x)$$

да би се добила тачна вредност за $f(x+h)$.

Да би речени услов, да је

$$\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^{(n)}(x) > \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,[f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)]$$

(према оној форми остатка R у 2. Напомени) или краће

$$f^{(n)}(x) > f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n'}(x),$$

био испуњен стоји нам на расположењу да узмемо h у толикој мери мало како ће разлика на десној страни неравности по апсолутној вредности постати мања од сваке количине, па, дакле, мања и од $f^{(n)}(x)$, са претпоставком да је на левој страни $f^{(n)}(x) \gtrless 0$ и претпоставком да $f^{(n)}(x)$ остаје коначно и непрекидно у интервалу од x до $x + h$. Шта више за бесконачно мало h јесте

$$\lim_{h=0} \frac{f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{h=0} \frac{R}{\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^{(n)}(x)} = 0.$$

71. Примена Taylor-ове формуле при решавању бројних једначина. — Нека су α и β две вредности x-а за које $y = f(x)$ добија супротне знаке, н. пр.

за $x = \alpha$ полином $f(\alpha) > 0$, а
за $x = \beta$ полином $f(\beta) < 0$

и означимо са γ (где је γ између α и β) извесну приближну корену вредност једначине $f(x) = 0$. Обележимо са h грешку приближне вредности, т. ј. одступање броја γ од праве корене вредности, дакле

$$x = \gamma + h.$$

На основу Taylor-овог обрасца имамо

$$f(\gamma + h) = f(\gamma) + hf'(\gamma) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(\gamma) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(\gamma) + \ldots = 0.$$

Ову једначину треба разрешити по h и тиме добити тачну корену вредност $x = \gamma + h$. Међутим та једначина је у погледу h истога степена којега је и задата једначина у погледу x-а, али задовољавајући се приближном вредношћу (ипак тачнијом од оне већ познате вредности γ) можемо чланове у којима су виши степени од h да занемаримо узев, место горње једначине за h, ову краћу

$$f(\gamma) + hf'(\gamma) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(\gamma) = 0,$$

одакле

$$h = -\frac{f'(\gamma)}{f''(\gamma)} \pm \frac{1}{f''(\gamma)} \sqrt{f'(\gamma)^2 - f(\gamma)\, f''(\gamma)}.$$

У примени може да се, врло често, занемари и члан са h^2 и да са h определи из једначине првог степена

$$f(\gamma) + hf'(\gamma) = 0,$$

дакле

$$h = -\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}.$$

С овим се добија од γ тачнија корена вредност

$$\gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)};$$

помоћу које се, истим начином (понављањем горње методе), може да нађе нова, још тачнија корена вредност. Итд.

Ово је онај, нама познати Њутн-ов начин израчунавања корена приближавањем.

Пример. Дата је једначина

$$x^5 - 9\,x^2 + x + 4 = 0.$$

Овде је

$$f(x) = x^5 - 9\,x^2 + x + 4$$
$$f'(x) = 5\,x^4 - 18\,x + 1.$$

Приближна корена вредност задате једначине јесте

$$\gamma = 1{,}9107$$

и према томе

$$f(\gamma) = 1{,}9107^5 - 9\,.\,1{,}9107^2 + 1{,}9107 + 4 = -1{,}4802$$
$$f'(\gamma) = 5\,.\,1{,}9107^4 - 18\,.\,1{,}9107 + 1 = 33{,}2484$$
$$h = -\frac{-1{,}4802}{33{,}2484} = 0{,}0445,$$

а с овим, као тачнија корена вредност, следује

$$\gamma + h = 1{,}9107 + 0{,}0445 = 1{,}9552.$$

Понављањем овакот поступка добили бисмо још приближнију корену вредност.

72. Maclaurin-ов ред. — Кад у Taylor-овој формули заменимо x са 0, h са x добијамо *Maclaurin*[1]*-ову формулу*, која гласи

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(0) +$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\Theta\,x).$$

Развијање функције у ред по Maclaurin-овој формули постаје немогуће, ако је та функција или једна од њених изводних прекидна за $x = 0$. У таквоме случају ми ћемо задату функцију развити по растућим степенима од $x - a$ пошто у Taylor-овој формули ставимо $x = a$, $h = x - a$. За тако добивене ред

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}[a + \Theta\,(x - a)]$$

постоји, односно вредности броја a, услов да $n+1$ ва изводна задате функције мора бити неприкидна за све вредности прапроменљиве почев од a (т. ј. x) па до x (т. ј. $x + h$).

---

[1] Colin Maclaurin (* Kilmoddan 1698, † Jork 1746) саопштио је тај ред у своме делу године 1742.

1. *Напомена.* Према оној другој форми за остатак R у Taylor-овоме реду (види 2. Напомену у чл. 70.) Maclaurin-ова формула гласи

$$f(x) = f(0) + x f'(0) \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} [f^{(n)}((\Theta x) - f^{(n)}(0)].$$

2. *Напомена.* Треба приметити да бесконачни ред у Maclaurin-овој формули, па ма он био конвергентан, не мора имати за збир функцију $f(x)$, која је на левој страни обрасца. Узмимо н. пр. функцију $e^{-\frac{1}{x^2}}$, која са свима њеним изводнама за $x = 0$ постаје $= 0$. То значи да су сви чланови у Maclaurin-овој формули, примењеној на ову функцију, равни нули, док сама функција $e^{-\frac{1}{x^2}}$ није равна нули. Претпоставимо сада да је $\varphi(x)$ функција која може да се развије помоћу Maclaurin-овог обрасца и ставимо

$$f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ако развијемо $f(x)$ помоћу Maclaurin-ове формуле добићемо један бесконачан ред, чији збир, и ако је ред конвергентан, није раван развијеној функцији $f(x)$, него $= \varphi(x)$.

Да би збир конвергентнога реда, до којег долазимо употребом Maclaurin-ове формуле, изражавао вредност развијене функције $f(x)$ мора да буде испуњен овај услов: остатак реда, који треба додати извесноме броју првих чланова, па да би се добила вредност задате функције, мора, при бесконачном растењу броја узетих чланова, бивати све мањи и постати најзад бесконачно мали.

Иста напомена важи и за Taylor-ов ред.

73. Теорема. — Maclaurin-ова формула је једини начин да се једна функција развије у ред по растућим степенима њене прапроменљиве.

Претпоставимо да је, осим по Maclaurin-овој формули

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\Theta\,x), \qquad (1$$

функција $f(x)$ развијена још на један начин по растућим степенима њене прапроменљиве

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \qquad (2$$

Одузимањем прве једначине од ове друге следује

$$[A - f(0)] + [B - f'(0)]\,x + \left[C - \frac{f''(0)}{1\,.\,2}\right] x^2 +$$
$$+ \left[D - \frac{f'''(0)}{1\,.\,2\,.\,3}\right] x^3 + \ldots = 0, \qquad (\alpha$$

одакле, кад ставимо $x = 0$, закључујемо да је

$$A = f(0).$$

На основу овога и пошто поделимо једн. α) са x та се једначина своди на

$$\beta)\quad [B - f'(0)] + \left[C - \frac{f''(0)}{1\,.\,2}\right] x + \left[D - \frac{f'''(0)}{1\,.\,2\,.\,3}\right] x^2 + \ldots = 0,$$

одакле, опет, кад ставимо $x = 0$, следује

$$B = f'(0).$$

Према томе и пошто једн. β) скратимо са x, она постаје

$$\gamma)\qquad \left[C - \frac{f''(0)}{1\,.\,2}\right] + \left[D - \frac{f'''(0)}{1\,.\,2\,.\,3}\right] x + \ldots = 0,$$

одакле, кад ставимо $x = 0$, излази да је

$$C = \frac{f''(0)}{1\,.\,2}.$$

На исти начин доказујемо да је

$$D = \frac{f'''(0)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

итд. То значи да су одговарајући сачинитељи у горња два реда 1) и 2) једнаки, а тиме је доказато да су редови 1) и 2) идентични или другим речима да осим Maclaurin-ове формуле нема другог начина да се једна функција развије у ред по растућим степенима њена прапромењиве.

Тако је Taylor-ова формула једини начин за развијање у ред функције $f(x + h)$ по растућим степенима промене h.

74. Примери. —

1. Пример.

$$f(x) = (1 + x)^m,$$

дакле

$$f(0) = 1,$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= m\,(1 + x)^{m-1}, & f'(0) &= m,\\
f''(x) &= m\,(m-1)\,(1 + x)^{m-2}, & f''(0) &= m\,(m-1),\\
f'''(x) &= m\,(m-1)\,(m-2)\,(1 + x)^{m-3}. & f'''(0) &= m\,(m-1)\,(m-2),\\
&\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x) &= m\,(m-1)\ldots & f^{(n)}(0) &= m\,(m-1)\ldots(m-n+1),\\
&\quad\ldots(m-n+1)\,(1 + x)^{m-n}, & &\\
f^{(n+1)}(x) &= m\,(m-1)\ldots & f^{(n+1)}(\theta x) &= m\,(m-1)\ldots\\
&\quad\ldots(m-n)\,(1 + x)^{m-n-1}, & &\quad\ldots(m-n)\,(1 + \theta x)^{m-n-1}.
\end{aligned}$$

Према овоме, а на основу Maclaurin-ове формуле, имамо

$$(1+x)^m = 1 + m\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\ldots\ldots\,n}\,x^n + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots\ldots(n+1)}\,(1 + \theta x)^{m-n-1}.$$

У чл. 32. (3. пример) доказали смо да је овај ред на десној страни збирљив за свако m кад је $-1 < x < +1$ и да је, дакле, у томе случају

$$\lim_{n=\infty} R_n = \lim_{n=\infty} \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots\ldots\ldots(n+1)}\,(1 + \theta x)^{m-n-1} = 0.$$

На основу тога можемо да ставимо

$$(1 + x)^m = 1 + m\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \ldots \text{ у беск.}$$

и развијање функције $(1 + x)^m$ у ред можемо да продужимо докле хоћемо.

2. Пример.

$$f(x) = a^x,$$

дакле

$$f(0) = 1,$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a^x(la), & f'(0) &= la,\\
f''(x) &= a^x(la)^2, & f''(0) &= (la)^2,\\
f'''(x) &= a^x(la)^3, & f'''(0) &= (la)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x) &= a^x(la)^n, & f^{(n)}(0) &= (la)^n,\\
f^{(n+1)}(x) &= a^x(la)^{n+1}, & f^{(n+1)}(\theta x) &= a^{\theta x}(la)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Према овоме даје Maclaurin-ова формула

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x\,la)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{(x\,la)^n}{1\,.\,2\ldots n} + \frac{(x\,la)^{n+1}}{1\,.\,2\ldots(n+1)}\,a^{\theta x}.$$

Овај ред на десној страни збирљив је за све вредности x-а (види чл. 30. 1. пример) и можемо да ставимо

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1\,.\,2} = \frac{(x\,la)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \quad \text{у беск.}$$

Значи да развијање функције a^x у ред можемо да продужимо докле хоћемо.

Кад у овоме општем изложитељном реду ставимо $a = e$ добијамо специјални изложитељни ред

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \quad \text{у беск.},$$

одакле, опет, за $x = 1$ следује ред за израчунавање броја e (основе природних логаритама)

$$e = 2 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots \quad \text{у беск.}$$

3. Пример.

$$f(x) = \sin x,$$

дакле

$$f(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0,\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1,\\
f''''(x) &= \sin x, & f''''(0) &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \text{ и ако је } n \text{ парно } f^{(n)}(0) = 0,$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left[x + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right], \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = \mp \cos\theta x.$$

Према овоме даје Maclaurin-ова формула

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{x^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} \mp \frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\ldots(n+1)}\cos\theta x.$$

Пошто је ред на десној страни збирљив за све могуће вредности x-а (2. пример у чл. 32.), то можемо развијање функције $sin\ x$ да продужимо произвољно и да ставимо

$$sin\ x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - + \ldots \text{ у беск.}$$

На исти начин изводимо тригонометриски ред

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - + \ldots \text{ у беск.}$$

4. Пример.

$$f(x) = l\,(1+x),$$

дакле

$$f(0) = 0,$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1}; \qquad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -1\,.\,(1+x)^{-2}, \qquad f''(0) = -1,$$
$$f'''(x) = 1\,.\,2\,.\,(1+x)^{-3}, \qquad f'''(0) = 1\,.\,2,$$
$$f''''(x) = -1\,.\,2\,.\,3\,.\,(1+x)^{-4}, \qquad f''''(0) = -1\,.\,2\,.\,3,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots \ldots (n-1(\,(1+x)^{-n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots \ldots (n-1)$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots \ldots n\,(1+x)^{-n-1}; \qquad f^{(n+1)}(\Theta x) = (-1)^n\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots \ldots n\,(1+\Theta\,x)^{-n-1}.$$

С овим и помоћу Maclaurin-ове формуле добијамо

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Ми знамо (4. пример у чл. 32.) да је овај ред конвергентан и то за $-1 < x < +1$. То значи да је

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \text{ у беск.}$$

Напомена. Помоћу добивеног реда израчунавамо природне логаритме бројева од 0 до 2.

Ако за x узмемо границе 0 и 1, претпоставимо да је $0 < x < 1$, онда место горњег реда можемо да напишемо одвојено ова два реда

1) $$l\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

2) $$l\,(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

одакле, одузимањем, нови ред произилази

3) $$l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right]$$

или ако ставимо $\frac{1+x}{1-x} = u$, дакле $x = \frac{u-1}{u+1}$

4) $$l\,u = 2\left[\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

С обзиром на то, да је $0 < x < 1$, дакле је $1 < u < \infty$, видимо да се ред 4) може да употреби на израчунавање природних логаритама бројева од 1 па до ∞. Тај ред, у неку руку, допуњује ред 2) којим израчунавају природни логаритми бројева од 0 до 1.

Ставимо у једн. 1) $x = \frac{h}{N}$, дакле $l\,(1+x) = l\,(N+h) - l\,N$, добићемо нови ред

$$l\,(N+h) - l\,N = \frac{h}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{N}\right)^4 + - \ldots \qquad (5$$

И најзад заменом у једн. 3) $x = \frac{h}{2N+h}$, дакле $\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N}$ налазимо ред

$$l\,(N+h) - l\,N = 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots\right]. \qquad (6$$

Помоћу ова последња два обрасца 5) и 6), чији су редови нагло конвергентни, само ако је број N поле велики према количини h, израчунавамо природан логаритам броја $N+h$ кад нам је познат логаритам броја N. За $h = 1$ претварају се једн. 5) и 6) у

$$l\,(N+1) - l\,N = \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + - \ldots \qquad (7$$

$$l\,(N+1) - l\,N = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right]. \qquad (8$$

Разуме се да сви ови редови могу да послуже и за израчунавање Бриг-ових логаритама. Означимо са log десетне логаритме, са $M = \frac{1}{l\,10}$ њихов модуо[1]). Једначине 5), 6), 7) и 8) гласе

$$log\,(N+h) - log\,N = M\left[\frac{h}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{N}\right)^4 + - \ldots\right]$$

$$log\,(N+h) - log\,N = 2\,M\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots\right]$$

$$log\,(N+1) - log\,N = M\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + - \ldots\right]$$

$$log\,(N+1) - log\,N = 2\,M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right].$$

За израчунавање модуа M добијамо врло подесан ред на следећи начин. Заменом $N = 1$ у једн. 8) добијамо

$$l\,2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \frac{1}{7\,.\,3^7} + \ldots\right],$$

а заменом $N = 8$, $h = 2$ у једн. 6) следује

$$l\,10 = 3\,l\,2 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,9^5} + \frac{1}{7\,.\,9^7} + \ldots\right].$$

Ако овде на десној страни за $l\,2$ уметнемо из претпоследне формуле његову вредност добићемо овај врло употребљив образац

$$l\,10 = \frac{1}{M} = 6\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \frac{1}{7\,.\,3^7} + \ldots\right] +$$
$$2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,9^5} + \frac{1}{7\,.\,9^7} + \ldots\right].$$

Опширније о теорији и примени логаритама, а нарочито о израчунавању њиховом елементарним методама види Предавања из Тригонометрије чл. 34. — 57.

---

[1]) Види Предавања из Тригонометрије чл. 40.

75. Taylor-ова формула за функције, које зависе од више прапроменљивих. — Нека је задата функција

1) $$u = f(x, y).$$

Да бисмо развили $f(x+h, y+k)$ по растућим степенима од h и k замењућемо у задатој функцији 1) x и y са $x + ht$ и $y + kt$, развићемо је, по Maclaurin-овоме обрасцу, по растућим степенима од t и ставићемо, најзад, у ресултату $t = 1$.

Означимо

2) $$x + ht = p, \qquad y + kt = q,$$

3) $$f(x+ht, y+kt) = \varphi(t) = U = f(p, q).$$

На основу Maclaurin-ове формуле имамо

4) $$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \dots + \frac{t^n}{1.2\dots n}\varphi^{(n)}(0) + R,$$

где је

5) $$R = \frac{t^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\Theta t) = \frac{t^n}{1.2\dots n}[\varphi^{(n)}(\Theta t) - \varphi^{(n)}(0)].$$

Из онога под 3), а на основу правила за диференциалење сложених функција (чл. 51.), налазимо

$$\varphi'(t)\,dt = \frac{dU}{dp}dp + \frac{dU}{dq}dq = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)dt,$$

јер је, према ономе под 2),

$$dp = h\,dt, \qquad dq = k\,dt.$$

Дакле

$$\varphi'(t) = \frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k,$$

а одавде

$$\varphi''(t) = \frac{d^2U}{dp^2}h^2 + 2\frac{d^2U}{dp\,dq}hk + \frac{d^2U}{dq^2}k^2 + \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(2)}.$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(n)},$$

Ако ставимо $t = 0$, онда се, према ономе под 2) и 3), претвара p у x, q у y, а U у u и дакле

$$\varphi(0) = f(x, y) = u,$$

$$\varphi'(0) = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k,$$

$$\varphi''(0) = \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}\right)k,^{(2)}$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)}.$$

С овим, када заменимо $t = 1$ у образац 4), а с обзиром да је $\varphi(1) = f(x+h, y+k)$, добијамо формулу

$$f(x+h, y+k) =$$

$$u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{1}{1.2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(2)} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1.2\dots n}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)} + R, \qquad (6$$

где је, према обрасцу 5),

$$R = \frac{1}{1.2\dots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\Theta) = \frac{1}{1.2\dots n}[\varphi^{(n)}(\Theta) - \varphi^{(n)}(0)]. \qquad (7$$

Пошто су h и k произвољне промене прапроменљивих x и y, то их можемо да заменимо диференциалима dx и dy и на тај начин момемо формулу 6) да напишемо

$$f(x+h, y+k) = u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \dots + \frac{d^nu}{1.2\dots n} + R. \qquad (8$$

Ову Taylor-ову формулу можемо да проширимо и на функције које зависе од ма колико прапроменљивих. Тако н. пр. за

$$u = f(x, y, z, \dots)$$

имамо

$$f(x+h, y+k, z+l, \dots) =$$

$$u + \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \dots\right) +$$

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \dots\right)^{(2)} +$$

. . . .

$$\frac{1}{1.2\dots n}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \dots\right)^{(n)} + R \qquad (9$$

или краће

$$f(x+h.\ y+k, z+l, \dots) = u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \dots$$

$$\frac{d^nu}{1.2\dots n} + R. \qquad (10$$

Овде је

$$R = \frac{1}{1.2\dots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k + \frac{dU}{dr}l + \dots\right)^{(n)} - \right.$$

$$\left.\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \dots\right)^{(n)}\right],$$

$$U = f(p, q, r, \dots),$$

$$p = x + \Theta h,\ q = y + \Theta k,\ r = z + \Theta l, \dots$$

$$\Theta < 1.$$

Ако са растењем броја чланова остатак бива све мањи и постаје $\underset{n=\infty}{lim} R = 0$ ред на десној страни једн. 10) конвергентан је и његов је збир $= f(x+h,\ y+k,\ z+l, \dots)$ и ми имамо Taylor-ову формулу примењену на функције које зависе од ма колико прапроменљивих.

Напомена. Као за функције једне прапроменљиве, тако се и овде доказује, да ма који члан у Taylor-овоме реду, ако тај члан није $= 0$, може по апсолутној вредности да надмаши цео остатак реда, када се промене $h, k, l, \dots$ узму довољно мале.

76. Maclaurin-ова формула за функције, које зависе од више прапроменљивих. — Ставимо у општој Taylor-овој формули 9) прошлог члана $x = 0,\ y = 0,\ z = 0, \dots$ и заменимо онда слова $h, k, l, \dots$ словима $x, y, z, \dots$, па ћемо добити

$$f(x, y, z, \dots) =$$

$$u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \dots$$

$$\frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \dots\right]^{(2)} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{1.2\dots n}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \dots\right]^{(n)} + R.$$

Овде означава $u_0, \left(\frac{du}{dx}\right)_0, \left(\frac{du}{dy}\right)_0, \left(\frac{du}{dz}\right)_0, \dots$ ресултат замене $x = 0$, $y = 0,\ z = 0, \dots$ у изразима $u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$ Остатак је

$$R = \frac{1}{1.2\dots n}\left[\left(\frac{dU}{dp} h + \frac{dU}{dq} k + \frac{dU}{dr} l + \dots\right)^{(n)} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \dots\right)^{(n)}\right],$$

где треба ставити $x = 0,\ y = 0,\ z = 0, \dots$, заменути $h, k, l, \dots$ са x, $y, z, \dots$; $p, q, r, \dots$ са $\Theta x, \Theta y, \Theta z, \dots$ Ако са растењем n-а остатак R бива све мањи и најзад за $n = \infty$ постаје $\underset{n=\infty}{lim} R = 0$, ред на десној страни горње једначине конвергентан је и његов је збир $= f(x, y, z, \dots)$. Једначина представља Maclaurin-ову формулу примењену на функције које зависе од више прапроменљивих.

2. Израчунавање неодређених израза.[1]

77. Неодређена форма $\frac{0}{0}$. — Узмимо да количник $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ за извесну вредност прапроменљиве, н. пр. за $x = a$, услед тога што обе функције $\varphi(x)$ и $f(x)$ за ту вредност x-а постају равне нули, добија неодређени вид $\frac{0}{0}$. У колико се x више приближује броју a у толико више функције $\varphi(x)$ и $f(x)$ теже нули. Под правом или истинском вредношћу израза $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ за $x = a$ треба разумети $\underset{x=a}{lim} \frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Пошто је, према претпоставци, $\varphi(a) = 0$ и $f(a) = 0$, дозвољено је ставити

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}},$$

одакле (на основу начела у чл. 13.) закључујемо

$$\underset{x=a}{lim} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \underset{x=a}{lim} \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \underset{x=a}{lim} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}.$$

Права вредност израза $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, који се за $x = a$ јавља у неодређеној форми $\frac{0}{0}$, добија се, дакле, кад се образује количник из изводних дељиника и делитеља и у тим изводнама замени $x = a$.

До истог ресултата долазимо и момоћу Taylor-ове формуле:

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \dots$$
$$\dots + \frac{h^n}{1.2\dots n}\varphi^{(n)}(d) + \frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(a + \Theta h)$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \dots$$
$$\dots + \frac{h^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}f^{(n+1)}(a + \Theta h),$$

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\varphi'(a) + \dfrac{h}{1.2}\varphi''(a) + \dots + \dfrac{h^n}{1.2\dots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(a + \Theta h)}{f'(a) + \dfrac{h}{1.2}f''(a) + \dots + \dfrac{h^n}{1.2\dots(n+1)}f^{(n+1)}(a + \Theta h)}.$$

---

[1] Види на крају чл. 11.

Ставимо овде $h = 0$, па ћемо добити

$$\frac{\varphi\,(a)}{f\,(a)} = \frac{\varphi'\,(a)}{f'\,(a)}$$

или

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'\,(x)}{f'\,(x)} \quad q.\ e.\ d.$$

На случај да је $\varphi'\,(a) = 0$ и $f'\,(a) = 0$ тако да се и количник из првих изводних за ону вредност $x = a$ јавља у неодређеном виду, т. ј. да је и $\frac{\varphi'\,(a)}{f'\,(a)} = \frac{0}{0}$, Taylor-ова формула даје

$$\varphi\,(a+h) = \frac{h^2}{1\,.\,2}\,\varphi''\,(a) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\varphi'''\,(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2 \ldots n}\,\varphi^{(n)}\,(a) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,.\,(n+1)}\,\varphi^{(n+1)}\,(a + \Theta\,h),$$

$$f\,(a+h) = \frac{h^2}{1\,.\,2}\,f''\,(a) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,f'''\,(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1\,.\,2 \ldots n}\,f^{(n)}\,(a) + \frac{h^{n+1}}{1\,.\,2 \ldots (n+1)}\,f^{(n+1)}\,(a + \Theta\,h),$$

$$\frac{\varphi\,(a+h)}{f\,(a+h)} = \frac{\varphi''\,(a) + \frac{h}{3}\,\varphi'''\,(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{3\,.\,4 \ldots (n+1)}\,\varphi^{(n+1)}\,(a + \Theta\,h)}{f''\,(a) + \frac{h}{3}\,f'''\,(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{3\,.\,4 \ldots (n+1)}\,f^{(n+1)}\,(a + \Theta\,h)},$$

које, кад ставимо $h = 0$, даје ресултат

$$\frac{\varphi\,(a)}{f\,(a)} = \frac{\varphi''\,(a)}{f''\,(a)}$$

или

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi''\,(x)}{f''\,(x)}.$$

У овоме случају праву вредност неодређеног израза даје нам количник из изводних другог ступња у коме се за x ставља она вредност која проузрокује неодређеност. Ако, пак, и тај количник $\frac{\varphi''\,(x)}{f''\,(x)}$ за $x = a$ добија неодређену форму $\frac{0}{0}$ (услед тога што је $\varphi''\,(a)$ и $f''\,(a)$ равно нули), онда, очевидно, ваља узети количник из трећих изводних и тада је

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'''\,(x)}{f'''\,(x)} = \frac{\varphi'''\,(a)}{f'''\,(a)}.$$

Према овоме изводимо опште правило: да бисмо нашли праву вредност једнога количника, који за извесно $x = a$ добија неодређени вид $\frac{0}{0}$, треба тражити изводне од дељеника и од делитеља све дотле док се не дође до изводних које за $x = a$ не постају у исто време равне нули. Количник из тих изводних, у којима стављамо $x = a$, даје нам праву вредност израза за $x = a$.

1. Пример.

$$\frac{\varphi\,(x)}{f(x)} = \frac{x^5 - 2^5}{x - 2} \text{ за } x = 2 \text{ постаје неодређено } \frac{0}{0}.$$

Овде је $\varphi'(x) = 5\,x^4$, $f'(x) = 1$, $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 5\,x^4$

и према томе

$$\lim_{x=2} \frac{x^5 - 2^5}{x - 2} = \lim_{x=2} 5\,x^4 = 80.$$

2. Пример.

$$\frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \frac{l\,(1+x)}{x} \text{ постаје за } x = 0 \text{ неодређено } \frac{0}{0}.$$

Имамо

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x},\ f'(x) = 1,\ \frac{\varphi'\,(x)}{f'(x)} = \frac{1}{1+x},$$

дакле

$$\lim_{x=0} \frac{l\,(1+x)}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

3. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f\,(x)} = \frac{x^x - 1}{l\,x} \text{ добија за } x = 1 \text{ вид } \frac{0}{0}.$$

Овде је $\varphi'(x) = x^x(1 + l\,x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{\varphi'(x)}{f'\,(x)} = x^{x+1}\,(1 + l\,x)$,

дакле

$$\lim_{x=1} \frac{x^x - 1}{l\,x} = \lim_{x=1} x^{x+1}\,(1 + l\,x) = 1.$$

4. Пример.

$$\frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \frac{e^x - e^{-x} - 2\,x}{x - \sin x} \text{ за } x = 0 \text{ јавља се у форми } \frac{0}{0}.$$

Узимамо $\varphi'(x) = e^x + e^{-x} - 2$, $f'(x) = 1 - \cos x$, $\frac{\varphi'\,(x)}{f'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$, које за $x = 0$ опет даје неодређеност $\frac{0}{0}$.

Продужујемо: $\varphi''(x) = e^x - e^{-x}$, $f''(x) = \sin\ x$, $\frac{\varphi''(x)}{f''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ и пошто и тај количник за $x = 0$ показује неодређену форму $\frac{0}{0}$ идемо даље и узимамо

$$\varphi'''(x) = e^x + e^{-x},\ \ f'''(x) = \cos\ x,\ \ \frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos\ x}$$

и налазимо

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\,x}{x - \sin x} = \lim_{x=0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos\ x} = 2.$$

78. Неодређена форма $\frac{\infty}{\infty}$. — Предпоставимо да количник $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ за $x = a$, услед тога што је $\varphi(a) = \infty$ и $f(a) = \infty$, показује неодређену форму $\frac{\infty}{\infty}$.

Ако напишемо $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ и узмемо у обзир да је $\frac{1}{\varphi(a)} = 0$ и $\frac{1}{f(a)} = 0$ увидићемо да се израчунавање неодређеног израза $\frac{\infty}{\infty}$ своди на исти поступак као и код вида $\frac{0}{0}$ и да, према томе, и овде важи исто правило. Отуда што је

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a}\frac{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}} = \lim_{x=a}\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)^2\right] =$$
$$= \lim_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\left[\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]^2$$

изводимо ресултат

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$$

и сасвим опште

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)},$$

где су $\varphi^{(n)}(x)$ и $f^{(n)}(x)$ изводне најнижег ступња које за $x = a$ нису у исто време равне нули или ∞.

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{l(x-a)}{e^{\frac{1}{x-a}}} \text{ постаје за } x = a \text{ неодређено } \frac{\infty}{\infty}.$$

Из тога што је $\varphi'(x) = \frac{1}{x-a}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}e^{\frac{1}{x-a}}$, дакле $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{a-x}{e^{\frac{1}{x-a}}}$,

следује

$$\lim_{x=a}\frac{l(x-a)}{e^{\frac{1}{x-a}}} = \lim_{x=a}\frac{a-x}{e^{\frac{1}{x-a}}} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

79. Неодређена форма 0 . ∞. — Узмимо да у изразу $\varphi(x)\,f(x)$ за $x = a$ постаје $\varphi(a) = 0$, а $f(a) = \infty$ и сам израз тиме добија неодређени вид $0 . \infty$. Тај неодређени вид може, врло лако, да се доведе на један од она прошла два: било на вид $\frac{0}{0}$ или на $\frac{\infty}{\infty}$. Јер, ако напишемо $\varphi(x)\,f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ или $\varphi(x)\,f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ и обележимо $\frac{1}{f(x)} = F(x)$, а $\frac{1}{\varphi(x)} = \phi(x)$, имамо у првоме случају израз $\varphi(x)\,f(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)}$, који за $x = a$ постаје $\frac{0}{0}$, а у другоме случају израз $\varphi(x)\,f(x) = \frac{f(x)}{\phi(x)}$, који опет за $x = a$ добија неодређени вид $\frac{\infty}{\infty}$. Праву вредност налазимо

дакле

$$\lim_{x=a}\,[\varphi(x)\,f(x)] = \lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{F'(x)}$$

или

$$\lim_{x=a}\,[\varphi(x)\,f(x)] = \lim_{x=a}\frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x=a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

1. Пример.

$\varphi(x)\,f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) tg\,x$ за $x = \frac{\pi}{2}$ постаје неодређено $0 . \infty$. Напишимо

$\varphi(x)\,f(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{cotg\,x}$ (које за $x = \frac{\pi}{2}$ постаје $\frac{0}{0}$). Отуда, што је

$\varphi'(x) = -1$, $F'(x) = -\frac{1}{sin^2 x}$, $\frac{\varphi'(x)}{F'(x)} = sin^2 x$, добијамо

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) tg\,x\right] = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} sin^2 x = 1.$$

2. Пример.

$\varphi(x)\,f(x) = sin\,(a-x)\,tg\,\frac{\pi x}{2a}$ за $x = a$ показује неодређеност $0 . \infty$. Ставимо

$sin\,(a-x)\,tg\,\frac{\pi x}{2a} = \frac{sin\,(a-x)}{cotg\,\frac{\pi x}{2a}} = \frac{\varphi(x)}{F(x)}$. Из $\varphi'(x) = -cos\,(a-x)$,

$F'(x) = -\frac{\pi}{2a}\frac{1}{sin^2\frac{\pi x}{2a}}$, дакле $\frac{\varphi'(x)}{F'(x)} = \frac{2a}{\pi} cos\,(a-x)\,sin^2\frac{\pi x}{2a}$ налазимо

$$\lim_{x=a}\left[sin\,(a-x)\,tg\,\frac{\pi x}{2a}\right] = \lim_{x=a}\left[\frac{2a}{\pi}\,cos\,(a-x)\,sin^2\frac{\pi x}{2a}\right] = \frac{2a}{\pi}.$$

80. Напомена. — Није ретко да количник образован из изводних задатих функција $\varphi(x)$ и $f(x)$, па узели те изводне ма којег ступња, показује, за извесно $x = a$, навек неодређен вид, тако да горња метода за изналажење праве вредности израза $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ постаје неупотребљива. За такве случајеве нисмо у стању да дамо опште важеће одредбе. У таквој прилици ми смо упућени да удешавамо средства према случају, који посматрамо. Нека нам за то послуже следећи примери.

1. Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \text{ за } x = a \text{ добија вид } \frac{0}{0}.$$

$$\text{Овде је } \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}},\quad \lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{\infty}{\infty},$$

дакле опет неодређено. Тако је и са осталим количницима из изводних вишег ступња и ми нисмо у стању да, помоћу обичне методе, дођемо до ресултата.

Међутим, ако у задатоме изразу ставимо $x = a + h$, узмемо дакле да је

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\ \sqrt{2a+h}}$$

помножимо бројитељ и именитељ са $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\sqrt{h} + \sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{2a+h}\ (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

и ставимо $h = 0$ добићемо

$$\frac{\varphi(a)}{f(a)}, \text{ а то је } \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

2. *Пример.*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{colg\,(x-a)}{e^{\frac{1}{x-a}}} \text{ за } x = a \text{ постаје } \frac{\infty}{\infty}.$$

Овде је $\varphi'(x) = -\frac{1}{sin^2(x-a)}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}\ e^{\frac{1}{x-a}}$

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{(x-a)^2}{sin^2(x-a)\ e^{\frac{1}{x-a}}},$$

које за $x = a$ показује неодређену форму $\frac{0}{0\,.\,\infty}$. Тако је и са количницима $\frac{\varphi''(x)}{f''(x)}$, $\frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)}, \ldots$

Међутим ми можемо да дођемо до праве вредности задате функције за $x = a$ врло лако из количника $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ на следећи начин

$$\lim_{x=a} \frac{(x-a)^2}{sin^2(x-a)\ e^{\frac{1}{x-a}}} = \lim_{z=0} \left[\left(\frac{z}{sin\,z}\right)^2 \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}}\right] = \left[\lim_{z=0} \frac{z}{sin\,z}\right]^2 \lim_{z=0} \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}} = 0.$$

3. *Пример.*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{l\,(x-a)}{colg\,(x-a)} \text{ за } x = a \text{ добија вид } \frac{\infty}{\infty}.$$

Из $\varphi'(x) = \frac{1}{x-a}$, $f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x-a)}$, дакле $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = -\frac{sin^2(x-a)}{x-a}$ налазимо

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = -\lim_{x=a} \frac{sin\,(x-a)}{x-a} \lim_{x=a} sin\,(x-a) = -\lim_{z=0} \frac{sin\,z}{z} \lim_{z=0} sin\,z = 0.$$

81. Неодређене форме 0^0, ∞^0 и 1^∞. — Да бисмо добили праву вредност једнога израза $f(x)^{\varphi(x)}$, који за извесно $x = a$ показује један од неодређених видова $0^0, \infty^0$, 1^∞, треба тражити праву вредност његова логаритма, зато што се логаритам таквог израза, а то је $l f(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\, l f(x)$, јавља у неодређеној форми $0\,.\infty$, чију праву вредност изналазимо на познати начин.

1. *Пример.*

$$f(x)^{\varphi(x)} = \left(\frac{1}{1-e^x}\right)^{\frac{1}{x}} \text{ постаје за } x = \infty \text{ неодређено } 0^0.$$

Узећемо $\varphi(x)\, l f(x) = \frac{1}{x}\, l\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -\frac{l\,(1-e^x)}{x}$, које за $x = \infty$ постаје $\frac{\infty}{\infty}$. Ставимо $\psi(x) = l\,(1-e^x), \chi(x) = x$, дакле $\psi'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$, $\chi'(x) = 1$, $\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $\lim_{x=\infty} \frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = 1$ и према томе $\lim_{x=\infty} [\varphi(x)\, l f(x)] = -1$, $\lim_{x=\infty} f(x)^{\varphi(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2. *Пример.*

$$f(x)^{\varphi(x)} = \left(\frac{1}{x}\right)^x \text{ добија за } x = 0 \text{ вид } \infty^0.$$

Овде је $\varphi(x)\, l f(x) = x\, l\left(\frac{1}{x}\right) = -x\, l\,x = -\frac{l\,x}{\left(\frac{1}{x}\right)}$, а ово за $x = 0$ постаје $\frac{\infty}{\infty}$. Означимо $\psi(x) = l\,x$, $\chi(x) = \frac{1}{x}$. Онда је $\psi'(x) = \frac{1}{x}$ $\chi'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = -x$ и на основу тога $\lim_{x=0} \frac{\psi(x)}{\chi(x)} = -\lim_{x=0} x = 0$, дакле $\lim_{x=0} [\varphi(x)\, l f(x)] = 0$, $\lim_{x=0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim [\varphi(x)\, l f(x)]} = e^0 = 1$.

3. *Пример.*

$$f(x)^{\varphi(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ за } x = \infty \text{ јавља се у форми } 1^\infty.$$

Узмимо логаритам

$$l f(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\, l f(x) = x\, l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{l\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)},$$

који за $x = \infty$ узима неодређени вид $\frac{0}{0}$. Ставимо $\psi(x) = l\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\chi(x) = \frac{1}{x}$, дакле $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$, $\chi'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ и према томе

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{\chi(x)} = \lim_{x=\infty} [\varphi(x)\, l f(x)] = \lim_{x=\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x=\infty} f(x)^{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

82. Неодређена форма $\infty - \infty$. — Претпоставимо да израз $\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\Phi(x)}{F(x)}$ добија за $x = a$ неодређени вид $\infty - \infty$ и то услед тога што су именитељи $f(a) = 0$ и $F(a) = 0$, док бројитељи $\varphi(a)$ и $\Phi(a)$ остају, међутим, коначни и различни од нуле. Ако напишимо

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)\,F(x) - f(x)\,\Phi(x)}{f(x)\,F(x)}$$

видићемо да се изналажење праве вредности неодређене форме $\infty - \infty$ на прост начин може да сведе на определљавање неодређеног вида $\frac{0}{0}$.

1. Пример.

$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ показује за $x = 0$ неодређеност $\infty - \infty$.

Напишимо $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$ и ставимо

$$\psi(x) = x \cos x - \sin x, \quad \chi(x) = x \sin x.$$

Задата функција $\frac{\psi(x)}{\chi(x)}$ добија сада за $x = 0$ неодређену форму $\frac{0}{0}$, чију ћемо вредност наћи кад узмемо

$$\psi'(x) = -x \sin x, \quad \chi'(x) = \sin x + x \cos x,$$

$$\frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = -\frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = -\frac{1}{\frac{1}{x} + \operatorname{cotg} x},$$

дакле

$$\lim_{x=0} \frac{\psi(x)}{\chi(x)} = \lim_{x=0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x=0} \frac{-1}{\frac{1}{x} + \operatorname{cotg} x} = 0.$$

2. Пример.

$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ за $x = 0$ добија неодређени вид $\infty - \infty$.

Напишимо $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$, које за $x = 0$ показује неодређеност $\frac{0}{0}$.

Ставимо $\psi(x) = e^x - 1 - x, \quad \chi(x) = x(e^x - 1)$, дакле

$$\psi'(x) = e^x - 1, \quad \chi'(x) = e^x(1 + x) - 1, \quad \frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \frac{e^x - 1}{e^x(1 + x) - 1}.$$

Но пошто је $\lim_{x=0} \frac{\psi'(x)}{\chi'(x)} = \frac{0}{0}$, дакле неодређено, треба узети $\psi''(x) = e^x$ $\chi''(x) = e^x(2 + x)$, $\frac{\psi''(x)}{\chi''(x)} = \frac{1}{2 + x}$ и онда следује

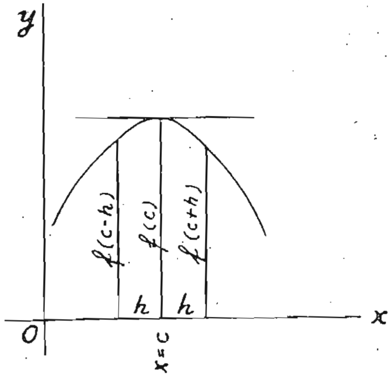
$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x=0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

---

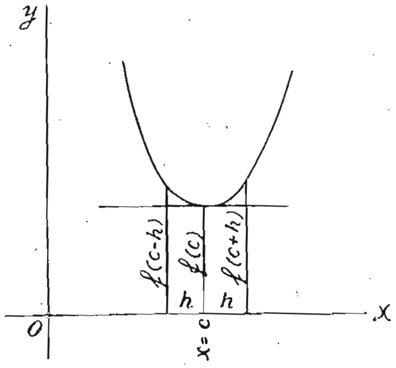
3. Највеће и најмање вредности функција једне прапромењљиве.

83. Појам. — Ако је за неку вредност прапромењљиве, н. пр. за $x = c$, (стварна) вредност функције $f(x)$, дакле $f(c)$, већа како од свију непосредно претходећих, тако и од свију непосредно следећих вредности, а то су $f(c - h)$ и $f(c + h)$, онда се каже да функција $f(x)$ има за $x = c$ највећу вредност или да је она у своме *максимуму* (maximum). Обратно, ако је функциона вредност $f(c)$ мања од свију непосредно ближњих (следећих и претходећих) вредности $f(c + h)$ и $f(c - h)$, онда је то најмања вредност или *минимум* (minimum) функције.

Ако узмемо да промена h довољно мала (положна или одречна), онда је у случају максимума разлика $f(c + h) - f(c) < 0$ (одречна), а у случају минимума је та разлика $f(c + h) - f(c) > 0$ (положна).



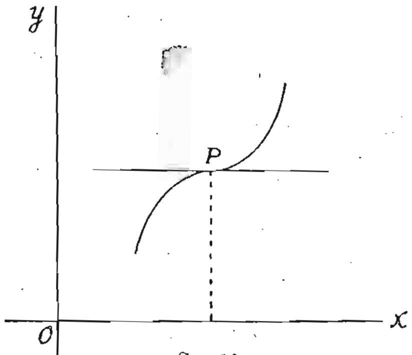
Сл. 8.



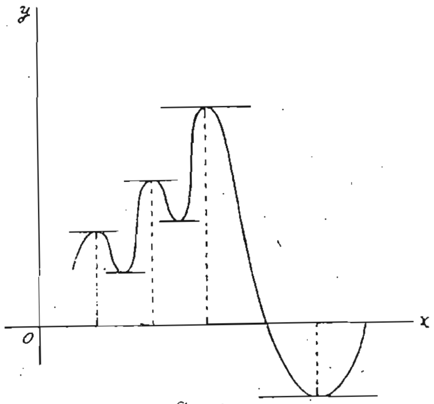
Сл. 9.

Кад задату функцију $y = f(x)$ представимо, на начин Аннлитичне Геометрије, као линију, одмах ће нам бити јасно да су тангенте у тачкама линије, које репрезентују максималне и минималне вредности функције (ординате), паралелне са x-осом. Види сл. 8 и 9. Међутим тангента линије може у извесној тачци бити паралелна са x-осом, па ипак да тој тачци не одговара ни максимум ни минимум функције (ординате).

Такве се тачке зову *тачке прегиба* или *инфлексионе тачке*. Види тачку P у сл. 10.



Сл. 10.



Сл. 11.

Једна функција може имати више максимума и више минимума. Један од тих максимума може да је мањи од каквог минимума. Лако је, пак, увидити да максималне и минималне вредности мора да *наизменце* следују једна другој.

Одречан максимум постаје минимум, као апстрахујемо од знака, ако што и одречан минимум добија карактер максимума кад узмемо његову апсолутну вредност.

84. Закључци. — Ми знамо да функција $f(x)$ расте или опада у извесноме интервалу прапроменљиве x (претпостављајући да x расте), према томе да ли је изводна функција положна или одречна у томе интервалу (в чл. 41.) Из тога закључујемо да функција не постаје ни максимумом ни минимумом у размаку x-а у коме изводна $f'(x)$ задржава исти знак. Ако је н. пр. од $x = a$ па до $x = b$ непрестано $f'(x) > 0$, онда је $f(a)$ најмања, а $f(b)$ највећа од свих функционих вредности у посматраном интервалу; ако је, пак, од $x = a$ па до $x = b$ вазда $f'(x) < 0$, онда је $f(a)$ највећа, а $f(b)$ најмања функциона вредност у томе размаку.

Према томе функција $f(x)$ може само тада имати максималне или минималне вредности у некоме интервалу њене прапроменљиве, ако њена изводна $f'(x)$ у томе интервалу мења знак, т. ј. ако од положних вредности прелази у одречне или обратно. Једна функција (па дакле и $f'(x)$) може само тако променути знак, ако за неку вредност прапроменљиве она постаје или $= 0$ или прекидна. Први је начин најобичнији, т. ј. да функција мења знак што за извесно $x = c$ она постаје $= 0$, због чега ћемо овакве случајеве искључиво посматрати. Оне друге случајеве, у којима функција мења знак услед прекидности, треба нарочито и по наособ проучавати.

Из свега овога изводимо закључак: функција $f(x)$ је за $x = c$, дакле $f(c)$, максимум или минимум 1) ако је $f'(x)$ за $x = c$, т. ј. $f'(c) = 0$ (или прекидно), 2) ако су за довољно мало h знаци од $f'(c - h)$ и $f'(c + h)$ различни и то: $f(c)$ је максимум, ако је $f'(c - h) > 0$, а $f'(c + h) < 0$, т. ј. ако изводна $f'(x)$ у близини $x = c$ из положних вредности прелази у одречне; $f(c)$ је минимум, ако је $f'(c - h) < 0$, а $f'(c + h) > 0$, дакле у близини $x = c$ изводна $f'(x)$ из одречних вредности прелази у положне.

85. Метода. — На основу Taylor-овог реда јесте

$$f(c + h) - f(c) = hf'(c) + R_1.$$

Ако $f'(c)$ није $= 0$, онда знак разлике $f(c + h) - f(c)$ зависи од знака количине $hf'(c)$, пошто h можемо да узмемо тако мало да знак од $hf'(c) + R_1$ једино од првог члана зависи.[1] Ако је, дакле, $f'(c) \gtrless 0$, онда знак разлике $f(c + h) - f(c)$ зависи од $hf'(c)$, па дакле и од промене h. Из тога, што су тада $f(c + h) - f(c)$ и $f(c - h) - f(c)$ различног знака, следује да оближње вредности нису све веће или све мање од $f(c)$: напротив, ако су претходеће мање од $f(c)$, т. ј. ако је $f(c - h) - f(c) < 0$, следеће су од ње веће, т. ј, онда је $f(c + h) - f(c) > 0$ или обратно. То значи да у таквоме случају (кад $f'(c)$ није $= 0$) $f(c)$ не представља ни максимум ни минимум функције $f(x)$.

Али, ако је $f'(c) = 0$, а $f''(c) \gtrless 0$, дакле

$$f(c + h) - f(c) = \frac{h^2}{1 . 2} f''(c) + R_2$$

видимо да разлика $f(c + h) - f(c)$ има са $f''(c)$ исти знак, било да је промена h положна било да је одречна. И онда, према томе да ли је $f''(c) \lessgtr 0$ јесте $f(c) \begin{matrix}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{matrix}$

У случају да је и $f''(c) = 0$, а $f'''(c) \gtrless 0$ имамо

$$f(c + h) - f(c) = \frac{h^3}{1 . 2 . 3} f'''(c) + R_3$$

и пошто знак од $f(c + h) - f(c)$ зависи од знака промене h (јер је h у непарноме степену: h^3), јасно је да $f(c)$ неможе бити ни максимум ни минимум.

Но, ако је, осим $f'(c) = 0$ и $f''(c) = 0$, још и $f'''(c) = 0$, а тек $f''''(c) \lessgtr 0$, тако да је

$$f(c + h) - f(c) = \frac{h^4}{1 . 2 . 3 . 4} f''''(c) + R_4,$$

дакле $f(c + h) - f(c)$ независно од знака промене h (јер се h јавља у парноме степену: h^4), онда закључујемо да је $f(c) \begin{matrix}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{matrix}$ према томе да ли је $f''''(c) \lessgtr 0$. Итд.

Сасвим уопште: $f(c)$ је максимум или минимум функције $f(x)$, ако је њена изводна најнижег ступња, која за $x = c$ није $= 0$, парног реда и то одречна или положна. Ако је, пак, изводна најнижег ступња, која за $x = c$ није $= 0$, непарног реда, онда $f(c)$ нити је максимум нити је минимум.

---

[1] Види 3. Напомену у чл. 70.

Напомена. На случај да је функција, чији Max. или Min. тражимо, дата у скривеној форми

$$F(x,\ y) = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

а ми знамо да мора, како за Max. тако и за Min., да буде $\frac{dy}{dx} = 0$, постоји сада, као условна једначина једна од ових двеју

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dF}{dy} = \infty.$$

Помоћу једне од тих једначина и оне задате једначине налазимо вредности x-а за које функција y постаје Max. или Min. Знак друге изводне $\frac{d^2y}{dx^2}$ показује да ли је функција y за добивене вредности x-а у максимуму или је у минимуму.

86. Примери. —

1. *Пример.*

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 11.$$

Из

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 2x - 15) = 0$$

добијамо за x ове две вредности

$$x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 5.$$

Пошто је

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x - 1)$$

за $x = -3$ одречно, а за $x = 5$ положно, закључујемо да је за $x = -3$, $y = 92$ највећа вредност функције, а за $x = 5$, $y = -164$ најмања вредност функције.

2. *Пример.*

$$y = x^4 - 2x^3 + 7.$$

Једначина

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2(2x - 3) = 0$$

даје корене

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}.$$

Корена вредност $x = \frac{3}{2}$ чини да је друга изводна

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x(x - 1)$$

положна и према томе је за $x = \frac{3}{2}$ функција y у своме минимуму $= \frac{85}{16}$.

За она два једнака корена x_1 и x_2 друга изводна постаје $= 0$ (није, дакле, ни положна ни одречна). То значи да испитивање треба продужити. Али пошто је трећа (као непарна) изводна

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 12(12x - 1)$$

за $x = 0$ различна од нуле, то видимо да за ову вредност x-а функција није ни Max. ни Min. Функција има, дакле, свега један минимум и то за $x = \frac{3}{2}$.

3. *Пример.*

Разложити број (или дуж) a на два дела тако да производ (површина правоугаоника) из та два дела буде Max.

Нека су x и z та два дела, дакле

$$x + z = a \quad \text{или} \quad z = a - x$$

и према томе функција за коју се тражи Max.

$$y = x(a - x) = ax - x^2.$$

Из

$$y' = a - 2x = 0$$

добијамо

$$x = \frac{a}{2},$$

а пошто је

$$y'' = -2 < 0$$

видимо да је функција у своме максимуму.

Број (или дуж) треба, дакле, преполовити. То значи, да од свију правоугаоника са једнаким збиром страна квадрат има највећу површину.

4. *Пример.*

Да се из две стране a и b конструише троугао са највећом површином. Као трећи (непознати) елеменат троугла узмимо захваћени угао x. Тада је функција, чији се максимум жели, ово

$$y = \frac{1}{2}ab\sin x.$$

Из

$$y' = \frac{1}{2}ab\cos x = 0$$

следује $\cos x = 0$, дакле

$$x = 90^0.$$

Тиме, што је друга изводна

$$y'' = -\frac{1}{2}ab\sin x$$

за $x = 90^0$ одречна, утврђујемо да ова вредност x-а одговара захтеву. То значи, да од свих троуглова, који се могу конструисати из две задате дужи, највећу површину има правоугли троугао, чије су катете једнаке тим дужима.

5. *Пример.*

У троугао ABC уписати највећи правоугаоник $EFGH$, чија се једна страна HE поклапа са једном страном задатога троугла; н. пр. са страном AC. Спустимо на страну $AC = b$ висину $BD = h$ и означимо правоугаоникове стране $GH = x$; $HE = z$. Функција, чији се максимум тражи, јесте

$$y = xz.$$

Из сразмере

$$AC : BD = GF : BJ$$

или

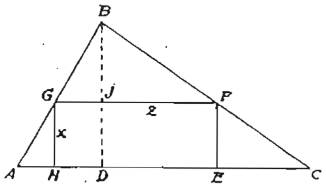
$$b : h = z : h - x$$

следује

$$z = \frac{b}{h}(h - x),$$

дакле

$$y = x\frac{b}{h}(h - x) = \frac{b}{h}(hx - x^2).$$



сл. 12.

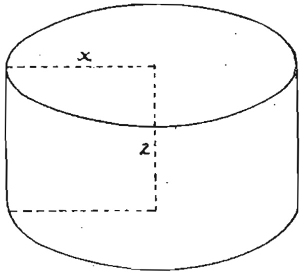
Једначина
$$y' = \frac{b}{h}(h - 2x) = 0$$
даје
$$x = \frac{h}{2} \text{ и према томе } z = \frac{b}{2}.$$
Отуда што је
$$y'' = -\frac{2b}{h} < 0$$
видимо да добивено решење одговара највећој вредности функције. То значи да је $y = xz$ за $x = \frac{h}{2}$, $z = \frac{b}{2}$ у своме Max. $= \frac{bh}{4}$, дакле $EFGH = \frac{1}{2} ABC$.

6. Пример.

Да се начини на горњој страни отворен цилиндричан суд (дакле као чаша) задате запремине V са најмањом површином. (Са најмањом површином иде упоредно минимум утрошеног материала.)

Нека је x полупречник, z висина ваљка. Површина основе је $= \pi x^2$, површина омотача $= 2\pi x z$ и према томе површина целога суда, а то је функција, чији се минимум хоће,
$$y = \pi x^2 + 2\pi x z.$$

Висину z можемо да изразимо полупречником x, јер је $V = \pi x^2 z$, дакле $z = \frac{V}{\pi x^2}$ и на тај начин
$$y = \pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$



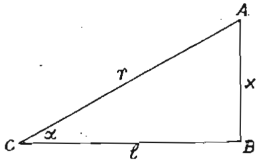
Сл. 13.

Из
$$y' = 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$$
добијамо
$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$
а с овим
$$z = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$
дакле
$$x = z.$$

Да ово решење даје Min. показује друга изводна
$$y'' = 2\pi + \frac{4V}{x^3},$$
која је за $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ положна.

7. Пример.

На коју висину $AB = x$ над хоризонталом BC треба поставити светлећу тачку A како би у тачци C имали најинтензивније осветлење?



Сл. 14.

Из Оптике је познато да је интензивност осветлења сразмерна синусу угла α, под којим зраци упадају, а обрнуто сразмерна квадрату одстојања r.

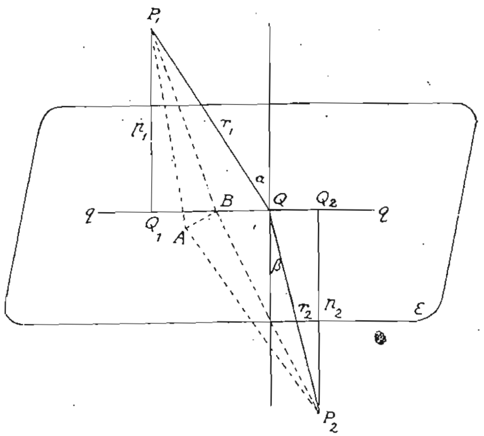
Ако означимо за a интензивност светлеће тачке A, онда се питање своди на то да се одреди вредност x-а која ће учинити да функција
$$y = a\frac{\sin\alpha}{r^2}$$
достигне свој максимум. Из слике видимо да је
$$\sin\alpha = \frac{x}{r}, \qquad r = \sqrt{l^2 + x^2}$$
и онда је
$$y = \frac{ax}{(l^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
Из
$$y' = a\frac{l^2 - 2x^2}{(l^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$
налазимо
$$x = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Није потребно нарочито утврђивати да ово решење одговара максимуму, а не минимуму.

8. Пример.

Из тачке P_1 у извесној оптичкој средини (н. пр. у ваздуху) полази светлосни зрак и долази у тачку P_2, која је у другом неком медиуму (н. пр. у води). Ове оптичке средине раздвојене су равном ε. Означимо са c_1 брзину, којом се светлост простире у првој, са c_2 брзину, којом се она простире у другој средини. Пита се каквом закону мора следовати светлосни зрак па да би из тачке P_1 стигао у тачку P_2 за најкраће време.

Пре свега је по себи разумљиво да ће се светлосни зрак простирати по правој линији у једноме и у другоме медиуму. Путања ће, дакле, бити разломљена линија: састављена из двеју дужи. Тако је исто лако увидити да путања мора лежати у равни која пролази кроз тачке P_1 и P_2, а стоји управно на равни ε. Та је раван одређена нормалама P_1Q_1 и P_2Q_2. Јер, ако путања не би лежала у тој равни; ако би светлосни зрак продирао раван ε у тачци A (а не у једној тачци пресека q равни ε и према њој управној равни $P_1Q_1Q_2P_2$), т. ј. ако би путања светлости била $P_1A + AP_2$, онда би, пошто из A повучемо $AB \perp Q_1Q_2$, следовало из правоуглих троуглова P_1AB и P_2AB да је $P_1A > P_1B$, $AP_2 > BP_2$, па дакле и путања $P_1A + AP_2 >$ од путање $P_1B + BP_2$, која се налази у равни $P_1Q_1Q_2P_2$.



Сл. 15.

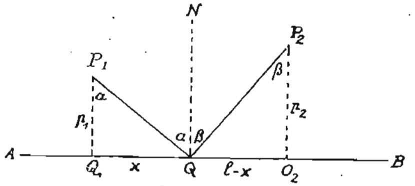
Обележимо: $P_1Q_1 = p_1$, $P_2Q_2 = p_2$, $P_1Q = r_1$, $P_2Q = r_2$, $Q_1Q = x$, $Q_1Q_2 = l$.

Време y, које потребно светлосном зраку да из тачке P_1 стигне у тачку P_2, а то је функција, чији се минимум тражи, јесте
$$y = \frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_3} = \frac{\sqrt{p_1^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{p_2^2 + (l - x)^2}}{c_2}.$$

Из
$$y' = \frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{p_1{}^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2}\frac{l-x}{\sqrt{p_2{}^2 + (l-x)^2}} = 0$$
следује
$$\frac{1}{c_1}\frac{x}{r_1} = \frac{1}{c_2}\frac{l-x}{r_2},$$
које, с обзиром на то што је $\frac{x}{r_1} = sin\ Q\,P_1\,Q_1 = sin\,\alpha,\ \frac{l-x}{r_2} = sin\ Q\,P_2\,Q_2 = sin\,\beta$, где је α угао упадања, а β угао преламања, може да се напише у форми познатог закона о преламању светлости
$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

9. Пример.

Дата је права AB и две тачке P_1 и P_2 на истој страни те праве. Да се одреди тачка Q на правој AB да буде $P_1Q + P_2Q = \text{Min}$. Из сл. 16. видимо да је функција, чији минимум тражимо, ово
$$y = \sqrt{p_1{}^2 + x^2} + \sqrt{p_2{}^2 + (l-x)^2}.$$
Из
$$y' = \frac{x}{\sqrt{p_1{}^2 + x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{p_2{}^2 + (l-x)^2}} = 0$$
следује
$$\frac{x}{\sqrt{p_1{}^2 + x^2}} = \frac{l-x}{\sqrt{p_2{}^2 + (l-x)^2}}$$



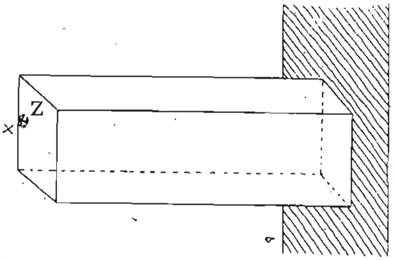
Сл. 16.

или $sin\,\alpha = sin\,\beta$, дакле $\alpha = \beta$,
а то је познати закон о одбијању светлости: угао упадања = углу одбијања.

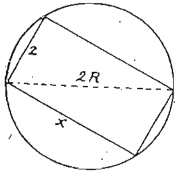
10. Пример.

Имамо једно цилиндрично стабло (дрво) са полупречником R. Из тога стабла да истешемо греду (облика паралелепипеда), која, утврђена једним крајем, даје највећи отпор теретима који висе о другом крају.

Ми знамо из Механике да је чврстина према ломљењу сразмерна првоме степену хоризонталне димензије z пресека, а трећему степену вертикалне димензије x. Функција, чији максимум тражимо, јесте
$$y = x^3\,z = x^3\sqrt{4\,R^2 - x^2}.$$



Сл. 17.



Из једначине
$$y' = 3\,x^2\sqrt{4\,R^2 - x^2} - \frac{x^4}{\sqrt{4\,R^2 - x^2}} = 0$$
следује
$$3\,x^3\,(4\,R^2 - x^2) = x^4,$$
одакле
$$x = R\sqrt{3},\ \text{а с тиме}\ z = R.$$

Да ово решење одговара максимуму, а не минимуму, по себи је јасно и није потребно нарочито утврђивати помоћу друге изводне.

4. Највеће и најмање вредности функција, које зависе од више прапромењљивих.

87. Опште одредбе. — За функцију $u = f(x, y, z, \ldots)$ кажемо да је у максимуму или у минимуму за извесне специалне вредности њених прапромењљивих, н. пр. за $x = a,\ y = b,\ z = c, \ldots$, ако функција за вредности прапромењљивих, које се од оних $a,\ b,\ c, \ldots$ разликују за врло мале количине $h,\ k,\ l, \ldots$, добија увек мању или увек већу вредност од $f(a.\ b,\ c, \ldots)$. Код максимума је функциона вредност већа, код минимума мања од свију непосредно обилжњих вредности.

Код максимума је $f(x + h,\ y + k,\ z + l, \ldots) - f(x,\ y,\ z, \ldots) < 0$, а код минимума је $f\ (x + h,\ y + k,\ z + l, \ldots) - f(x,\ y,\ z, \ldots) > 0$ за довољно мале промене $h,\ k,\ l, \ldots$ ма којег знака биле ове промене.

Узмимо за све прапромењљиве, изузев једне, н. пр. x, сталне вредности; ставимо $y = b,\ z = c, \ldots$ функција се тада мења једино променом x-а. Она ће, према горњему, постати Max. или Min. када x постане $= a$ и на основу теорије највећих и најмањих вредности функције једне прапромењљиве закључујемо да је и овде услов како за Max. тако и за Min. да мора (за $x = a,\ y = b,\ z = c, \ldots$) да буде $\frac{\partial u}{\partial x}$ равно нули, бесконачно или прекидно. Аналогно закључујемо да (за $x = a,\ y = b,\ z = c, \ldots$) мора да буде $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots$ равно нули, бесконачно или прекидно.

Ограничавајући ово наше проучавање на случај, где су парциалне изводне првога реда функције u непрекидне, утврђујемо ресултат: вредности прапромењљивих $x,\ y,\ z, \ldots$, које чине да функција u постаје Max. или Min., треба тражити из условних једначина.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots$$

88. Метода. — Узмимо функцију
$$u = f(x,\ y),$$
која зависи од двеју прапромењљивих $x\ y$.

По Taylor-овој формули је функциона промена $\Delta u =$
$$f(x + h,\ y + k) - f(x,\ y) =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right) + \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1\,.\,2\ldots n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)} + R.$$

h и k можемо узети увек у таквој мери мале да прекидањем реда на десној страни са којим било чланом $\frac{1}{1\,.\,2\ldots n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)}$ апсолутна вредност тога члана постане већа од остатка R (в. Напомену на крају чл. 75.). Дакле, ако прекинемо ред са чланом $\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k$, онда тај члан опредељује знак промене Δu или разлике $f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)$, а да би тај знак од Δu био независан од знакова промена h и k (које мора да буде, ако је функција u у своме Max. или Min.) треба да је

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Тада је Δu или

$$f(x+h,\ y+k)-f(x.\ y)=\frac{1}{1\,,2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)}+R.$$

Знак промене Δu је сада (за довољно мало h и k) опредељен чланом

$$\frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}=\frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2+2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}k^2\right).$$

Обележимо краће

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=B,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C,$$

подразумевајући вредности ових диференциалних количника за $x=a$, $y=b$. Знак функционе промене Δu зависи, дакле, од знака који има израз

$$A\,h^2+2\,B\,h\,k+C\,k^2.$$

Ако је знак овога тринома независан од знакова количина h и k, онда је исти случај и са изразом

$$A\,(A\,h^2+2\,B\,h\,k+C\,k^2)=(A\,h+B\,k)^2+(A\,C-B^2)\,k^2.$$

Овај израз не мења свој знак, ако је $A\,C-B^2\geqq 0$, јер је тада $A\,(A\,h^2+2\,B\,h\,k+C\,k^2)>0$. То значи да су $A\,h^2+2\,B\,h\,k+C\,k^2$ и A истога знака. Пошто $A\,C-B^2$ може само тако да буде положно, ако су A и C истога знака, следује да количине $A\,h^2+2\,B\,h\,k+C\,k^2$, A и C имају све три један исти знак. Ако су $A<0$ и $C<0$, онда је и $A\,h^2+2\,B\,h\,k+C\,k^2$, па дакле и промена $\Delta u<0$. Напротив, ако су $A>0$ и $C>0$, тада је и $A\,h^2+2\,B\,h\,k+C\,k^2>0$, па и $\Delta u>0$.

Према свему изводимо ресултат: ако специалне вредности $x=a$ и $y=b$. које добијамо из једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

испуњавају услов да је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0,$$

онда дотичне вредности $x=a$ и $y=b$, према томе да ли су диференциални количници $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ једновремено одречни или положни, т. ј. према томе да ли је за $x=a$, $y=b$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0,$$

чине да функција $u=f(x,\ y)$ постаје Max. или Min.

Ако је и други члан у Taylor-овом реду, члан $\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}$ раван нули, онда је знак промене $\Delta u=\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(3)}+R_3$ зависан од члана

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(3)}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}h^3+3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}h^2k+3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}k^3.$$

Но пошто мењање знака количина h и k мења и знак овога члана, па дакле и знак целе промене Δu, следује да диференциални количници трећег реда за $x=a$ и $y=b$ мора да буду идентично $=0$, па да би функција u за $x=a$, $y=b$ могла имати Max. или Min. и онда је

$$f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)=\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(4)}+R_4, \text{ где}$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(4)}$ не сме да мења знак. Према томе да ли вредности $x=a$, $y=b$, добивене из једначина $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, за које је

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}=0 \text{ и } \left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(3)}=0,$$

чине да је $\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(4)}\lesseqgtr 0$ добијамо за $x=a$ и $y=b$ Max. или Min. функције u.

У већини случајева можемо, према природи постављеног задатка, на ово питање да одговоримо, а да не улазимо у дискусију меродавног члана.

Аналогно се испитују највеће и најмање вредности функција, које зависе од три или више прапроменљивих. Изузев случајеве када су парциалне изводне посматране функције прекидне, Taylor-ов ред даје за одређивање специалних вредности $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$ за које функција $f\,(x, y, z, \ldots)$ постаје Max. или Min., условне једначине

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots$$

Чине ли овако добивене вредности прапроменљивих задату функцију максимумом или минимумом, то се, обично, и без нарочите дискусије, може да позна по природи самога задатка.

89. Примери. —

1. *Пример.*

Да се одреде највеће и најмање вредности функције

$$u = 2\,x^2 + 3\,y^2 - xy - 7\,x + 5\,y + 9.$$

Из условних једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\,x - y - 7 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 6\,y + 5 = 0$$

налазимо

$$x = \frac{37}{23},\quad y = -\frac{13}{23}.$$

Отуда што је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -1,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6,$$

дакле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 23 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0,$$

и према томе $\Delta u > 0$ закључујемо да функција u за $x = \frac{37}{23}, y = -\frac{13}{23}$ постаје минимум и то $= \frac{45}{23}$.

2. *Пример.*

Да се одреде x и y који ће учинити да функција

$$u = (a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 + \ldots$$

постане Min.

Из једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Sigma\,2\,(ax + by + c)\,a = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \Sigma\,2\,(ax + by + c)\,b = 0,$$

које можемо да напишемо

$$x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + \Sigma ac = 0,$$
$$x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + \Sigma bc = 0,$$

добијамо

$$x = \frac{\Sigma ab\,\Sigma bc - \Sigma b^2\,\Sigma ac}{\Sigma a^2\,\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2},\quad y = \frac{\Sigma ab\,\Sigma ac - \Sigma a^2\,\Sigma bc}{\Sigma a^2\,\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2}.$$

Да ово решење одговара минимуму, а не максимуму функције видимо из тога што је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\,\Sigma a^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2\,\Sigma ab,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,\Sigma b^2,$$

дакле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \Sigma a^2\,\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2 > 0,^{1)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0.$$

3. *Пример.*

Број (дуж) a раставити на три дела да производ из њих постане Max.

$$a = x + y + z.$$

Функција, за коју се тражи Max., јесте

$$u = xyz \quad \text{или} \quad u = xy\,(a - x - y).$$

Из условних једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\,(a - 2x - y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\,(a - 2y - x) = 0$$

добијамо решења

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,$$

$$x_2 = \frac{a}{3},\ y_2 = \frac{a}{3}.$$

Прво решење $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ очевидно не одговара постављеноме задатку.

За друго решење $x_2 = \frac{a}{3}$, $y_2 = \frac{a}{3}$ имамо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\,y = -\frac{2\,a}{3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = a - 2x - 2y = a - \frac{2a}{3} - \frac{2a}{3} = -\frac{a}{3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x = -\frac{2a}{3}.$$

Према томе је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{4\,a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Значи да $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$, $z = \frac{a}{3}$ чине да је

$$u = \frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3} = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \text{Max.}$$

90. Релативан максимум и минимум. — Задатак, да се за прапроменљиве нађу такве вредности које ће учинити да функција постане Max. или Min. са тиме да дотичне вредности прапроменљивих испуњују извесне услове (једначине), води нас *релативноме максимуму* и *рела-*

---

1) $\Sigma a^2\,\Sigma b^3 - (\Sigma ab)^2 = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots)\,(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + \ldots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots)^2$
$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_4 - a_4 b_3) + \ldots$
из чега се јасно види да је то > 0.

тивноме минимуму. Разуме се да број условних једначина мора да је мањи од броја променљивих количина, јер би иначе променљиве самим тим једначинама биле већ потпуно одређене.

На случај да нам је дата функција

$$u = f(x,\ y,\ z)$$

са условном једначином

$$\Phi(x,\ y,\ z) = 0,$$

ми бисмо, заменом z-а из друге једначине: $z = \varphi(x,\ y)$ у прву једначину, свели функцију на $u = f(x,\ y,\ \varphi(x,\ y))$, где она зависи само још од две прапроменљиве x и y и тиме задатак свели на случај, који смо посматрали у чл. 88.

Ако узмемо да су нам, осим функције

$$u = f(x,\ y,\ z)$$

дате две условне једначине

$$\Phi(x,\ y,\ z) = 0 \text{ и } \Psi(x,\ y,\ z) = 0,$$

из којих следује $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ и ово заменимо у задату једначину, онда добијамо функцију $u = f(x,\ \varphi(x),\ \psi(x))$, која зависи само од једне прапроменљиве и задатак је онда сведен на најпростији случај, који је проучен у чл. 85.

Због тешкоћа, које се, често, јављају приликом замена, о којима је горе била реч, изнећемо нарочиту методу за решење задатка да се одреди Max. или Min. функције

$$1) \qquad u = f(x,\ y,\ z)$$

под условом да x, y, z задовољавају једначине

$$2) \qquad \Phi(x,\ y,\ z) = 0 \text{ и } \Psi(x,\ y,\ z) = 0.$$

Пошто су (према овим последњим једначинама) y и z функције од x, то за Max. и Min. функције u постоји услов $\dfrac{du}{dx} = 0$ или

$$3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dz}{dx} = 0.$$

Диференциалне количнике $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{dz}{dx}$ добијамо кад диференциалимо једначине 2), дакле из

$$4) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$5) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\frac{dz}{dx} = 0.$$

Да бисмо из једначине 3) елиминовали $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{dz}{dx}$ помножићемо једн. 3), 4) и 5) редом са 1, λ, μ и сабраћамо их, што даје

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\,\frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = 0.$$

Факторе λ и μ определићемо из

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\,\frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,\\ \text{услед чега је и}\quad &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6$$

Решење задатка довело нас је једначинама 6) до којих бисмо дошли да смо узели да одредимо Max. и Min. за функцију $v = f + \lambda\phi + \mu\Psi$ у којој су λ и μ константе, а x, y, z прапроменљиве.

Аналогно постављамо опште правило: да бисмо учинили да функција

$$u = f(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_n),$$

која зависи од n променљивих x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$, постане Max. или Min., кад између ових променљивих постоје m условних једначина

$$f_1(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_n) = 0,$$
$$f_2(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n) = 0,$$

помножићемо ове последње једначине константним факторима k_1, $k_2 \ldots k_m$, сабраћемо их са задатом функцијом и парциалне диференциалне количнике, узете по x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$, добивенога израза

$$v = f + k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_m f_m$$

ставићемо $= 0$. Тако добијамо n једначина

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0, \ldots \frac{\partial v}{\partial x_n} = 0,$$

које у друштву с оних m условних једначина

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots f_m = 0$$

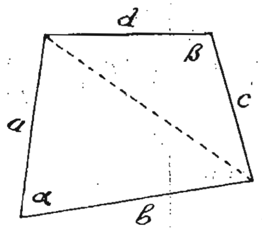
дају средство за определење m констананата k_1, $k_2, \ldots k_m$ и n непознатих x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$.

91. Примери.

1. Пример.

Из четири стране a, b, c, d да се конструише четвороугао са највећом површином.

Означимо са α угао који заклапају стране a и b, са β угао између страна c и d. Функција, чији се Max. тражи, јесте $\frac{1}{2}\,ab\sin\alpha + \frac{1}{2}\,cd\sin\beta$ или



Сл. 18.

простије

$$u = ab \sin \alpha + cd \sin \beta.$$

Између α и β постоји веза (в. сл. 18.)

$$a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2\,cd \cos \beta$$

или, ако означимо $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} = h$, условна једначина за α и β гласи

$$ab \cos \alpha - cd \cos \beta - h = 0.$$

Према овоме треба, дакле, да се максимумом учини овај израз

$$v = ab \sin \alpha + cd \sin \beta + k\,(ab \cos \alpha - cd \cos \beta - h).$$

Из једначина

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = ab \cos \alpha - k\,ab \sin \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = cd \cos \beta + k\,cd \sin \beta = 0$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{k}, \quad tg\,\beta = -\frac{1}{k}, \text{ дакле } tg\,\alpha = -tg\,\beta,$$

$$\alpha + \beta = 180^0.$$

То значи да од сви четвороуглова са задатим странама највећу површину има кружни четвороугао. Да ово решење одговара Max., а не Min., види се из самог задатка.

2. Пример.

У круг са полупречником r да се упише полигон са n страна, а највећом површином.

Нека су $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ средишни углови супротни странама $a, b, c, \ldots$ Функција, чији се Max. тражи, јесте $\frac{r^2}{2} \sin \alpha + \frac{r^2}{2} \sin \beta + \frac{r^2}{2} \sin \gamma + \ldots$ или, ако изоставимо константан фактор $\frac{r^2}{2}$, простије

$$u = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \ldots$$

Између $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ постоји условна једначина

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots - 2\pi = 0.$$

Према томе имамо да учинимо максимумом овај израз

$$v = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \ldots + k\,(\alpha + \beta + \gamma + \ldots - 2\pi).$$

Из једначина

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \cos \alpha + k = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \cos \beta + k = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \gamma} = \cos \gamma + k = 0,$$

следује

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots$$

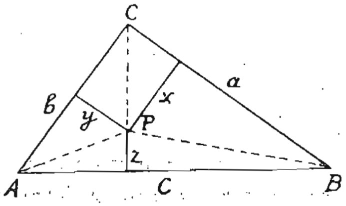
То значи да од свију уписаних полигона правилан полигон има највећу површину.

Да ово решење заиста одговара максимуму потврђује што је тотални диференцијал $d^2 v < 0$.

3. Пример.

У троуглу ABC определити тачку P за коју је производ њених одстојања од троуглових страна максимум, дакле

$$u = xyz = \text{Max}.$$



Сл. 19.

Из слике видимо да за нормале x, y, z постоји условна једначина

$$ax + by + cz - 2\,\Delta = 0,$$

где Δ означава површину троугла ABC. Имамо, дакле, да одредимо Max. функције

$$v = xyz + k\,(ax + by + cz - 2\,\Delta).$$

Из једначина

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yz + ka = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xz + kb = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = xy + kc = 0,$$

а с обзиром на условну једначину $ax + by + cz = 2\,\Delta$, налазимо

$$x = \frac{2\,\Delta}{3\,a}, \quad y = \frac{2\,\Delta}{3\,b}, \quad z = \frac{2\,\Delta}{3\,c}.$$

Из самог задатка видимо да добивено решење одговара Maximum-у.

5. Растављање рационално разломљених функција на просте разломке.

92. Теорема. — Пошто се рационално разломљене функције могу увек да сведу на чисто разломљене (в. чл. 9.), то ћемо овде искључиво ове последње узети у расматрање. Нека је $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ таква чисто разломљена рационална функција.

Теорема гласи: ако је a α-струки корен једначине $f(x) = 0$, дакле

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} f_1(x), \qquad (1$$

где је $f_1(x)$ цео и рационалан полином који није дељив са $x - a$, онда се чисто разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ може да растави на два дела

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha - 1} f_1(x)}, \qquad (2$$

где означава A једну константу, а $\varphi_1(x)$ извесан цео полином.

Доказ. Имамо идентичну једначину

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{(x-a)^{\alpha} f_1(x)}.$$

Да би именитељ у другоме члану на десној страни садржао $x-a$ само у $\alpha-1$ воме степену, потребно је да бројитељ тога члана буде дељив са $x-a$ или, дакле, да је a корен једначине $\varphi(x)-Af_1(x)=0$, т. ј. да је

$$\varphi(a)-Af_1(a)=0,$$

одакле

$$A=\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}. \tag{3)}$$

Да је оваква вредност константе A коначна и различна од нуле следује отуда што су $\varphi(a)$ и $f_1(a)$ различни од нуле. Можемо, дакле, да ставимо

$$\varphi(x)-Af_1(x)=(x-a)\varphi_1(x) \tag{4)}$$

и онда је

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}.$$

93. Проширење горње теореме.

— Узмимо да је

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda, \tag{1)}$$

дакле $a, b, \ldots l$ корени једначине $f(x)=0$, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ цели и положни бројеви, који показују колико се пута сваки корен јавља. Тада се чисто разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ може да разложи на следећи начин

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=&\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\&+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{L}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.\end{aligned}\right\} \tag{2)}$$

Овде су $A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}$, $B, B_1, \ldots B_{\beta-1}$, $\ldots L, L_1, \ldots L_{\lambda-1}$ одређене константе.

С обзиром што је

$$f(x)=(x-a)^\alpha f_1(x)$$

и на основу горње теореме можемо да ставимо

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)},$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}f_1(x)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\varphi_{\alpha-1}(x)}{(x-a)f_1(x)}=\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)},$$

које кад саберемо

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^a f_1(x)}=$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}. \tag{3}$$

Ставимо

$$f_1(x)=(x-b)^\beta f_2(x)$$

и поступимо са $\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$ на исти начин као и са $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, па ћемо добити

$$\frac{\varphi_\alpha(x)}{(x-b)^\beta f_2(x)}=$$

$$\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}=\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)},$$

које, кад заменимо у формулу 3), даје

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=&\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\&+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)}.\end{aligned}$$

Овде су $B, B_1, \ldots B_{\beta-1}$ одређене константе, а $\varphi_{\alpha+\beta}(x)$ једна цела и рационална функција. Продужујући овако с остатком $\frac{\varphi_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)}$ долазимо најзад до формуле 2).

Напомена. Ако једначина $f(x)=0$ има све само просте корене, дакле

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l) \tag{4}$$

формула 2) постаје тиме

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l} \tag{5}$$

94. Метода разлагања за случај многоструких корена.

— Узмимо да је a α-струки корен једначине $f(x)=0$, дакле

$$f(x)=(x-a)^\alpha f_1(x) \tag{1}$$

Разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ раставља се

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}. \tag{2}$$

Одавде, кад помножимо лево и десно са $(x-a)^\alpha$,

$$\frac{\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}}{(x-a)^\alpha}=\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}=A+\frac{(x-a)\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

и ставимо $x = a$,

$$3) \qquad A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}.$$

Према формули 4) у чл. 92. јесте

$$4) \qquad \varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{x-a} = \frac{\varphi(x) - \dfrac{\varphi(a)}{f_1(a)} f_1(x)}{x-a}.$$

Ми смо добили овим први прост разломак $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$ на које се раставља $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$. Остале просте разломке добићемо на исти начин примењујући исту методу на други члан $\dfrac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$ на десној страни једначине 2).

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{3x^4 - 6x^2 + 5x - 7}{x^7 - \frac{1}{2}x^6 - 14x^5 + \frac{37}{2}x^4 + 41x^3 - \frac{215}{2}x^2 + 84x - \frac{45}{2}}.$$

Овде је

$$\varphi(x) = 3x^4 - 6x^2 + 5x - 7$$

$$f(x) = x^7 - \frac{1}{2}x^6 - 14x^5 + \frac{37}{2}x^4 + 41x^3 - \frac{215}{2}x^2 + 84x - \frac{45}{2}$$

$$= (x-1)^4 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Ставимо

$$f(x) = (x-1)^4 f_1(x),$$

где је

$$f_1(x) = (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}.$$

Према формулама 2), 3) и 4) имамо

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A}{(x-1)^4} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-1)^3 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)},$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} = \frac{3 - 6 + 5 - 7}{(1+3)^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right)} = \frac{5}{24},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{x-a} = \frac{3x^4 - 6x^2 + 5x - 7 - \frac{5}{24}\left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)}{x-1}$$

$$= 3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16},$$

дакле

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16}}{(x-1)^3 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

По истој методи растављамо остатак

$$\frac{3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16}}{(x-1)^3 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-1)^2 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Овде је

$$A_1 = \frac{\varphi_1(a)}{f_1(a)} + \frac{3 + \frac{134}{48} - \frac{63}{16} + \frac{37}{16}}{(1+3)^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right)} = -\frac{25}{144},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\varphi_1(x) - A_1 f_1(x)}{x-a} = \frac{3x^3 + \frac{134}{48}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{37}{16} + \frac{25}{144}\left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459).$$

С овим постаје

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{\frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459)}{(x-1)^2 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Аналогно продужујемо

$$\frac{\frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459)}{(x-1)^2 (x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{\varphi_3(x)}{(x-1)(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)},$$

$$A_2 = \frac{\varphi_2(a)}{f_1(a)} = \frac{\frac{1}{288}(914 + 1893 + 459)}{(1+3)^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right)} = -\frac{1633}{3456},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\varphi_2(x) - A_2 f_1(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{\frac{1}{288}(914x^2 + 1893x + 459) + \frac{1633}{3456}\left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{576}(3266x^2 + 36633x + 62469)$$

и тако добијамо

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{-\frac{1633}{3456}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{576}(3266x^2 + 36633x + 62469)}{(x-1)(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Најзад растављамо

$$\frac{\frac{1}{576}(3266x^2 + 36633x + 62469)}{(x-1)(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A_3}{x-1} + \frac{\varphi_4(x)}{(x+3)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Овде је

$$A_3 = \frac{\varphi_3(a)}{f_1(a)} = \frac{\frac{1}{576}(3266 + 36633 + 62469)}{(1+3)^2\left(1 - \frac{5}{2}\right)} = -\frac{3199}{432},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{\varphi_3(x) - A_3 f_1(x)}{x - a} =$$

$$= \frac{\frac{1}{576}(3266\,x^2 + 36633\,x + 62469) + \frac{3199}{432}\left(x^3 + \frac{7}{2}\,x - 6\,x - \frac{45}{2}\right)}{x - 1}$$

$$= \frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503)$$

и према томе

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{-\frac{1633}{3456}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{3199}{432}}{x-1} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503)}{(x+3)^2\left(x - \frac{5}{2}\right)}.$$

Сада имамо да раставимо последњи члан на десној страни по другоме (двоструком) корену $b = -3$. Ставимо

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503)}{x^3 + \frac{7}{2}\,x^2 - 6\,x - \frac{45}{2}},$$

где је

$$\psi(x) = \frac{1}{1728}(12796\,x^2 + 67380\,x + 100503),$$

$$f_1(x) = x^3 + \frac{7}{2}\,x^2 - 6\,x - \frac{45}{2} = (x+3)^2 f_2(x),$$

$$f_2(x) = x - \frac{5}{2}.$$

Прво имамо

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{\psi_1(x)}{(x-b)^{\beta-1} f_2(x)} = \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{\psi_1(x)}{(x+3)\left(x - \frac{5}{2}\right)},$$

$$B = \frac{\psi(b)}{f_2(b)} = \frac{\frac{1}{1728}[12796\,.\,(-3)^2 + 67380\,.\,(-3) + 100503]}{-3 - \frac{5}{2}} = -\frac{501}{352},$$

$$\psi_1(x) = \frac{\psi(x) - B f_2(x)}{x - b} = \frac{\frac{1}{1728}[12796\,x^2 + 67380\,x + 100503] + \frac{501}{352}\left(x - \frac{5}{2}\right)}{x+3}$$

$$= \frac{1}{9504}(70378\,x + 172983),$$

дакле

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{-\frac{501}{352}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{1}{9504}(70378\,x + 172983)}{(x+3)\left(x - \frac{5}{2}\right)};$$

затим долази остатак

$$\frac{\frac{1}{9504}(70378\,x + 172983)}{(x+3)\left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{B_1}{x+3} + \frac{\psi_2(x)}{x - \frac{5}{2}},$$

где је

$$B_1 = \frac{\psi_1(b)}{f_2(b)} = \frac{\frac{1}{9504}[70378\,.\,(-3) + 172983]}{-3 - \frac{5}{2}} = \frac{1413}{1936},$$

$$\psi_2(x) = \frac{\psi_1(x) - B_1 f_1(x)}{x - b} = \frac{\frac{1}{9504}(70378\,x + 172983) - \frac{1413}{1936}\left(x - \frac{5}{2}\right)}{x+3} = \frac{21808}{3267}$$

и на тај начин следује

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{-\frac{501}{352}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{1413}{1936}}{x+3} + \frac{\frac{21808}{3267}}{x - \frac{5}{2}},$$

а сатиме добијамо овај крајни ресултат

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^1} + \frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3} + \frac{-\frac{1633}{3456}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{3199}{432}}{x-1} + \frac{-\frac{501}{352}}{(x+3)^2} + \frac{\frac{1413}{1936}}{x+3} + \frac{\frac{21808}{3267}}{x - \frac{5}{2}}.$$

95. Метода разлагања за случај простих корена.

— Ако једначина $f(x) = 0$ има само просте корене, онда се чисто разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ разлаже према формули 5) у чл. 93., а разлагање може да се модификује на следећи начин.

Помножимо ле́ву и десну страну једначине 5) у чл. 93. са $x - a$, па ћемо добити

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{f(x)}{x-a}} = A + (x - a)\left[\frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}\right],$$

које за $x = a$ даје

$$\frac{\varphi(a)}{\left[\frac{f(x)}{x-a}\right]_{x=a}} = A.$$

Пошто је $f(x)$ дељиво са $x - a$ можемо да ставимо

$$f(x) = (x - a) f_1(x),$$

које, кад диференциалимо

$$f'(x) = (x - a) f'_1(x) + f_1(x)$$

и ставимо $x = a$, даје

$$f'(a) = f_1(a),\ \text{а то је}\ \left[\frac{f(x)}{x-a}\right]_{x=a}.$$

Дакле

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} & & A &= \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \\ & \text{Исто тако} & B &= \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \\ & & & \cdots\cdots\cdots \\ & & L &= \frac{\varphi(l)}{f'(l)}. \end{aligned}\right.$$

Формула 5) у чл. 93. може да се напише овако

$$2)\qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{\varphi(b)}{f'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{\varphi(l)}{f'(l)(x-l)}.$$

1. *Примвр.*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{15\,x^2 - 18\,x + 28}{6\,x^4 + 11\,x^3 - 43\,x^2 + 34\,x - 8}.$$

Овде је

$$\varphi(x) = 15\,x^2 - 18\,x + 28,$$

$$f(x) = 6\,x^4 + 11\,x^3 - 43\,x^2 + 34\,x - 8 = 6\,(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1),$$

$$a = -4,\ b = \frac{1}{2},\ \ c = \frac{2}{3},\ \ d = 1,$$

$$f'(x) = 24\,x^3 + 33\,x^2 - 86\,x + 34,$$

$$\varphi(a) = 340, \qquad f'(a) = -630, \qquad A = \frac{340}{-630} = -\frac{34}{63},$$

$$\varphi(b) = \frac{91}{4}, \qquad f'(b) = \frac{9}{4}, \qquad B = \frac{\frac{91}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{91}{9},$$

$$\varphi(c) = \frac{68}{3}, \qquad f'(c) = -\frac{14}{3}, \qquad C = \frac{\frac{68}{3}}{-\frac{14}{3}} = -\frac{34}{7},$$

$$\varphi(d) = 25, \qquad f'(d) = 5, \qquad D = \frac{25}{5} = 5.$$

Према томе је

$$\frac{15\,x^2 - 18\,x + 28}{6\,x^4 + 11\,x^3 - 43\,x^2 + 34\,x - 8} = \frac{-\frac{34}{63}}{x+4} + \frac{\frac{91}{9}}{x - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{34}{7}}{x - \frac{2}{3}} + \frac{5}{x-1}.$$

2. *Пример.*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{p - q\,x^2},$$

дакле

$$\varphi(x) = 1,$$

$$f(x) = p - qx^2 = -q\left(x + \sqrt{\frac{p}{q}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

$$a = -\sqrt{\frac{p}{q}}, \quad b = +\sqrt{\frac{p}{q}},$$

$$f'(x) = -2\,q\,x,$$

$$\varphi(a) = 1,\ f'(a) = 2\,q\sqrt{\frac{p}{q}} = 2\sqrt{pq}, \qquad A = \frac{1}{2\sqrt{pq}},$$

$$\varphi(b) = 1,\ f'(b) = -2\,q\sqrt{\frac{p}{q}} = -2\sqrt{pq},\ B = -\frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

и према томе

$$\frac{1}{p - qx^2} = \frac{1}{2\sqrt{pq}\left(x + \sqrt{\frac{p}{q}}\right)} + \frac{1}{-2\sqrt{pq}\left(x - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)}.$$

96. Други начин разлагања за случај многоструких корена. — Кад у формули 3) чл. 93.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$$

заменимо x са $a+h$, дакле $x-a$ са h и помножимо обе стране једначине са h^α, а узмемо на ум да је $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = f_1(x)$, добијамо

$$\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_{\alpha-1}\,h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha\,\varphi_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)}. \qquad (1$$

На десној страни имамо полином $A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_{\alpha-1}\,h^{\alpha-1}$, у коме се налазе бројитељи $A,\ A_1,\ A_2, \ldots A_{\alpha-1}$ оних простих разломака који се односе на α струки корен a. Ако, дакле, обичним дељењем или помоћу Maclaurin-овог реда развијемо и леву страну $\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}$ по растућим степенима количине h, онда, упоређујући члан по члан лево и десно, налазимо константе $A,\ A_1, \ldots A_{\alpha-1}$.

Овај начин растављања могли бисмо, независно једно од друго, да применимо на сваки многоструки корен једначине $f(x) = 0$. Простије је, пак, да ову методу употребимо на остатак $\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$ горње формуле. Тиме добијамо просте разломке, који се односе на други корен b и опет један остатак на који бисмо применули исту методу у погледу трећег корена c итд.

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x+2}{x^4 - 5\,x^3 + 9\,x^2 - 7\,x + 2}.$$

Овде је

$$\varphi(x) = x + 2$$

$$f(x) = x^4 - 5\,x^3 + 9\,x^2 - 7\,x + 2 = (x-1)^3\,(x-2),$$

$$f_1(x) = x - 2.$$

Задата разломљена функција разлаже се на ове просте разломке

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Према горњој формули 1), пошто у њој ставимо $a+h=1+h, \alpha-1=2$, јесте

$$\frac{\varphi(1+h)}{f_1(1+h)}=\frac{3+h}{-1+h}=A+A_1h+A_2h^2+R,$$

а када обичним дељењем развијемо

$$\frac{3+h}{-1+h}=-3-4h-4h^2+R$$

и упоредимо поједине чланове ова два реда следује

$$A=-3, \quad A_1=-4, \quad A_2=-4.$$

Константу B, која се односи на прост корен $b=2$, добијамо по обрасцу прошлога члана 95.

$$B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)}=\left[\frac{x+2}{4x^3-15x^2+18x-7}\right]_{x=2}=4.$$

С овим налазимо

$$\frac{x+2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}=\frac{-3}{(x-1)^3}+\frac{-4}{(x-1)^2}+\frac{-4}{x-1}+\frac{4}{x-2}.$$

97. Продужење прошлог члана. — Метода, са којом смо се упознали у прошломе члану, има то преимућство што нам показује алгебарски израз бројитеља простих разломака на које растављамо разломљену функцију.

Да бисмо одредили константе $A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}$, које се односе на α-струки корен a једначине $f(x)=0$, треба да се $\dfrac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}$ развије по растућим степенима количине h. Пошто се то може да изврши само на један начин (било простим дељењем, било употребом Maclaurin-ове формуле), то ћемо, ако ставимо

$$\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}=\psi(x),$$

добити применом Maclaurin-овог обрасца

$$\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}=\psi(a+h)=\psi(a)+h\psi'(a)+h^2\frac{\psi''(a)}{1.2}+\ldots$$
$$\ldots h^{\alpha-1}\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)}+h^\alpha R_1$$

означивши са $h^\alpha R_1$ остатак реда. Упоређењем овога с оним под 1) у чл. 96. следује

$$A=\psi(a),\ A_1=\psi'(a),\ A_2=\frac{\psi''(a)}{1.2}, \ldots A_{\alpha-1}=\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)}.$$

На основу овога изводимо овај општи образац. Ако ради скраћеног бележења ставимо

$$\psi(x)=(x-a)^\alpha\frac{\varphi(x)}{f(x)},\quad \chi(x)=(x-b)^\beta\frac{\varphi(x)}{f(x)}, \ldots \pi(x)=(x-l)^\lambda\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

чисто разломљена функција

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}$$

раставља се овако на просте разломке:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\psi(a)}{(x-a)^\alpha}+\frac{\psi'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{\psi''(a)}{1.2(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-a)}$$
$$+\frac{\chi(b)}{(x-b)^\beta}+\frac{\chi'(b)}{(x-b)^{\beta-1}}+\frac{\chi''(b)}{1.2(x-b)^{\beta-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\chi^{(\beta-1)}(b)}{1.2\ldots(\beta-1)(x-b)}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\pi(l)}{(x-l)^\lambda}+\frac{\pi'(l)}{(x-l)^{\lambda-1}}+\frac{\pi''(l)}{1.2(x-l)^{\lambda-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\pi^{(\lambda-1)}(l)}{1.2\ldots(\lambda-1)(x-l)}.$$

98. Случај имагинарних корена. — На случај да једначина $f(x)=0$ има имагинарних корена имаћемо да учинимо малу модификацију при растварању разломљене функције $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ на просте разломке. Пре свега знамо да се имагинарни корени јављају увек у спреговима. То значи: ако је $\alpha+i\beta$ корен једначине $f(x)=0$, онда је и $\alpha-i\beta$ њен корен. Полином $f(x)$ је, дакле, дељив са $(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)$, дакле дељив једним триномом x^2+px+q.

Узмимо да су имагинарни корени $\alpha+i\beta$ и $\alpha-i\beta$, многоструки н. пр. n-струки, тако да је

$$f(x)=(x^2+px+q)^n f_1(x). \tag{1}$$

Разломљена функција раствара се на

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}, \tag{2}$$

где су P и Q стварне константе, а $\varphi_1(x)$ један цео полином.

Доказ. На основу идентичне једначине

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^nf_1(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi(x)-(Px+Q)f_1(x)}{(x^2+px+q)^nf_1(x)}$$

у стању смо да опделимо P и Q тако да бројитељ другога члана на десној страни, а то је $\varphi(x)-(Px+Q)f_1(x)$ буде дељив са x^2+px+q, дакле да постане $=0$ кад у њему заменимо x коренима једначине $x^2+px+q=0$, т. ј. кад ставимо $x=\alpha+i\beta$ и $x=\alpha-i\beta$.

Ставимо

$$\varphi(\alpha \pm i\beta) + [P(\alpha \pm i\beta) + Q] f_1(\alpha \pm i\beta) = 0,$$

одакле

3) $$P(\alpha \pm i\beta) + Q = \frac{\varphi(\alpha \pm i\beta)}{f_1(\alpha \pm i\beta)} = M \pm i N,$$

где су M и N стварни и одређени бројеви пошто $f_1(x)$ није дељиво са $x^2 + p\,x + q$. Последња једначина раствара се на ове две

$$P\alpha + Q = M \quad \text{и} \quad P\beta = N,$$

из којих

4) $$P = \frac{N}{\beta}, \quad Q = \frac{M\beta - N\alpha}{\beta}.$$

Пошто смо овако одредили константе P и Q можемо да ставимо

5) $$\frac{\varphi(x) - (P\,x + Q) f_1(x)}{x^2 + p\,x + q} = \varphi_1(x),$$

где је $\varphi_1(x)$ стваран и цео полином и долазимо тако до једначине

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2 + p\,x + q)^n f_1(x)} = \frac{P\,x + Q}{(x^2 + p\,x + q)^n} + \frac{\varphi_1(x)}{(x^2 + p\,x + q)^{n-1} f_1(x)} \qquad q.\ e.\ d.$$

Примењујући ову формулу на члан $\dfrac{\varphi_1(x)}{(x^2 + p\,x + q)^{n-1} f_1(x)}$ и продужујући тако даље долазимо до обрасца

6) $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{P\,x + Q}{(x^2 + p\,x + q)^n} + \frac{P_1\,x + Q_1}{(x^2 + p\,x + q)^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{P_{n-1}\,x + Q_{n-1}}{x^2 + p\,x + q} + \frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)},$$

где су P, Q, P_1, Q_1, ... P_{n-1}, Q_{n-1} стварне константе, а $\varphi_n(x)$ један стваран и цео полином.

99. Општи образац за растварање на просте разломке. — Комбинујући формулу 6) у прошлом члану са формулом 2) у чл. 93. добијамо општи образац.

У случају да је

1) $$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - l)^\lambda (x^2 + p\,x + q)^n \dots (x^2 + r\,x + s)^m$$

рационална и чисто разломљена функција $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ разлаже се на просте разломке

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\
& + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} \\
& + \frac{P\,x+Q}{(x^2+p\,x+q)^n} + \frac{P_1\,x+Q_1}{(x^2+p\,x+q)^{n-1}} + \dots \\
& \qquad\qquad \dots + \frac{P_{n-1}\,x+Q_{n-1}}{x^2+p\,x+q} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{R\,x+S}{(x^2+r\,x+s)^m} + \frac{R_1\,x+S_1}{(x^2+r\,x+s)^{m-1}} + \dots \\
& \qquad\qquad \dots + \frac{R_{m-1}\,x+S_{m-1}}{x^2+r\,x+s}.
\end{aligned}\right\} \quad (2$$

Овде су A, A_1, ... $A_{\alpha-1}$, B, B_1, ... $B_{\beta-1}$, ... L, L_1, ... $L_{\lambda-1}$, P, Q, P_1, Q_1, ... P_{n-1}, Q_{n-1}, ... R, S, R_1, S_1, ... R_{m-1}, S_{m-1} стварне константе.

Да бисмо чисто разломљену функцију $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ разложили на просте разломке према општем обрасцу 2) определићемо прво разломке, који се односе на стварне корене (чинитеље првога степена) на начин, који смо показали у чл. 94.— 97. Разломке, који се односе на имагинарне корене (т. ј. на чинитеље другога степена), добићемо методом, која је изложена у чл. 98.

Напомена. У случају да једначина $f(x) = 0$ има простих имагинарних корена у изразу за $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ јављају се оваква два разломка

$$\frac{\varphi(\alpha + i\beta)}{f'(\alpha + i\beta)} \, \frac{1}{x - \alpha - i\beta} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(\alpha - i\beta)}{f'(\alpha - i\beta)} \, \frac{1}{x - \alpha + i\beta}$$

(в. једн. 2) у чл. 95.), чији се збир доводи на форму

$$\frac{A + iB}{x - \alpha - i\beta} + \frac{A - iB}{x - \alpha + i\beta} = \frac{P\,x + Q}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

где су P и Q стварне константе: $P = 2A$, $Q = -2(A\alpha + B\beta)$.

Пример.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15},$$

дакле

$$\varphi(x) = 2x^2 - 7x + 5,$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = [x - (1 + 2i)]\,[x - (1 - 2i)]\,(x - 3),$$

$$a = \alpha + i\beta = 1 + 2i, \quad b = \alpha - i\beta = 1 - 2i, \quad c = 3,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 11,$$

$$\frac{\varphi(\alpha+i\beta)}{f'(\alpha+i\beta)}=\frac{4+3i}{4+4i}=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}i,$$

$$\frac{\varphi(\alpha-i\beta)}{f'(\alpha-i\beta)}=\frac{4-3i}{4-4i}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}i,$$

$$\frac{\varphi(c)}{f'(c)}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{\varphi(\alpha+i\beta)}{f'(\alpha+i\beta)}\,\frac{1}{x-\alpha-i\beta}+\frac{\varphi(\alpha-i\beta)}{f'(\alpha-i\beta)}\,\frac{1}{x-\alpha+i\beta}=\frac{\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}}{(x-1)^2+4}$$

и према томе

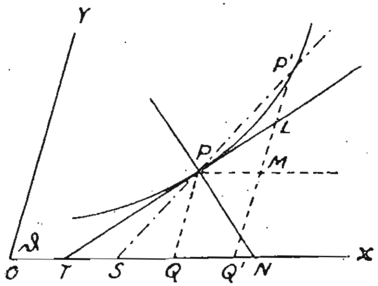
$$\frac{2x^2-7x+5}{x^3-5x^2+11x-15}=\frac{\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}}{(x-1)^2+4}+\frac{\frac{1}{4}}{x-3}.$$

IV.

Примена Диференциалног Рачуна у Геометрији.[1]

1. Тангенте.

100. Једначина тангенте.[2] — Под *тангентом* или *дирком* једне криве линије разумемо крајни положај сечице коме ова тежи при бесконачном приближавању њених пресечних тачака.



Сл. 20.

Ако означимо са x, y координате тачке P на задатој линији, са $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ координате друге једне тачке P', дакле са $\Delta x = QQ'$, $\Delta y = MP'$, координатне промене и означимо са m' угловни сачинитељ сечице PP', а с погледом на то што је угловни сачинитељ = размери синуса углова које права чини са координатним осама, добићемо, на основу синусне теореме за $\triangle PP'M$, $m'=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и према томе угловни сачинитељ тангенте $m=\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

или $$m=\frac{dy}{dx}.$$

Угловни сачинитељ тангенте изражен је, дакле, диференциалним количником $\frac{dy}{dx}$ или првом изводном y' функције, која представља линију на коју замишљамо дирку.

За правоугле координате је $m = tg\,\alpha$ разумевајући под α угао који дирка линије заклапа са x-осом.

---

[1] Докази образаца, који су узети из Аналитичне Геометрије, као и детаљно проучавање кривих линија, које су овде наведене као примери, налази се у моме предмету Аналитична Геометрија у равни.

[2] Садржину овога члана даје у главноме чл. 36.

Угловни сачинитељ дирке у извесној задатој тачци x_1, y_1 јесте $m=\frac{dy_1}{dx_1}$, ако означимо са $\frac{dy_1}{dx_1}$ вредност, коју добија диференциални количник, кад заменимо у њему текуће координате x, y координатама x_1, y_1 *додирне тачке.*

Према томе да ли је једначина криве линије дата у форми открivеној $y=f(x)$ или скривеној $F(x,y)=0$ имамо

$$m=\frac{dy_1}{dx_1}=f'(x_1)\ \text{односно}\ m=\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dy_1}},$$

а једначина тангенте у тачци x_1, y_1 гласи

$$y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1)\ \text{односно}\ (x-x_1)\frac{dF}{dx_1}+(y-y_1)\frac{dF}{dy_1}=0.$$

Овде су $\frac{dF}{dx_1}$ и $\frac{dF}{dy_1}$ вредности делимичних изводних функције $F(x,y)$ по x и по y, кад заменимо текуће координате x, y координатама x_1, y_1 додирне тачке.

101. Једначина нормале. — *Нормала* то је управна на тангенти у додирној тачци. Према ресултатима Аналитичне Геометрије њен угловни сачинитељ је $m_n=-\frac{1+m\cos\vartheta}{m+\cos\vartheta}$, означивши са m угловни сачинитељ дирке, а са ϑ координатни угао. Према томе је

$$m_n=-\frac{dx_1+dy_1\cos\vartheta}{dy_1+dx_1\cos\vartheta}$$

или, ако је једначина линије у скривеној форми,

$$m_n=\frac{\frac{dF}{dy_1}-\frac{dF}{dx_1}\cos\vartheta}{\frac{dF}{dx_1}-\frac{dF}{dy_1}\cos\vartheta}.$$

За правоугле координате ($\vartheta=90^0$) имамо простије

$$m_n=-\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{dF}{dx_1}}.$$

Једначина нормале је

$$y-y_1=-\frac{dx_1}{dy_1}(x-x_1)\quad\text{или}\quad x-x_1=\frac{dy_1}{dx_1}(y-y_1)$$

односно

$$(x-x_1)\frac{dF}{dy_1}-(y-y_1)\frac{dF}{dx_1}=0\quad\text{или}\quad\frac{x-x_1}{\frac{dF}{dx_1}}=\frac{y-y_1}{\frac{dF}{dy_1}}.$$

102. Дужина тангенте, нормале, подтангенте и поднормале. — Предпоставићемо правоугле координате. У томе је случају

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha, \text{ дакле } sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}, \quad cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},\ ^{1)}$$

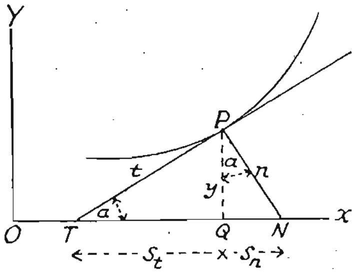
где је α угао који дирка линије у тачци $P(x, y)$ чини са x-осом.

Из правоуглих троуглова PTQ и PNQ читамо да је дужина

$$\textit{тангенте } PT = t = \frac{y}{sin\,\alpha}, \qquad \textit{нормале } PN = n = \frac{y}{cos\,\alpha}$$

$$\textit{подтангенте } TQ = s_t = y\,cotg\,\alpha, \qquad \textit{поднормале } QN = s_n = y\,tg\,\alpha,$$

које може да се напише:



Сл. 21.

$$t = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$n = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$s_t = y\,\frac{dx}{dy},$$

$$s_n = y\,\frac{dy}{dx}.$$

103. Задатак. — Да се из тачке X, Y повуку тангенте на линију. Задатак ће бити решен кад нађемо координате x_1, y_1 додирних тачака. Њих ћемо добити када узмемо на ум да оне мора да задовоље једначину задате линије, а тако исто и једначину тангенте, у којој, на основу тога што дирка пролази кроз тачку X, Y, треба заменути текуће координате координатама X, Y задате тачке. Координате x_1, y_1 добићемо, дакле, из ове две једначине

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{и} \quad Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(X - x_1)$$

односно из

$$F(x_1, y_1) = 0 \qquad \text{и} \qquad (X - x_1)\frac{dF}{dx_1} + (Y - y_1)\frac{dF}{dy_1} = 0.$$

1. *Примедба.* Једначина тангенте је у однос на координате додирне тачке за јединицу нижега степена од једначине криве линије и ако предпоставимо ову последну k-тога степена, дакле једначину тангенте $k-1$-вога степена, следује да горњи задатак има уопште $k\,(k-1)$ решење.

---

[1] На основу познатих образаца

$$sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\,\alpha}}, \quad cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,\alpha}}.$$

Највећи број тангената, које се из једне задате тачке могу да повуку на какву криву линију одређује *класу* те линије. Ми смо овде показали да су линије k-тога степена уопште $k\,(k-1)$ класе. Права линија, као линија 1-вога степена, јесте линија 0-те класе. Линије другога степема $(k = 2)$ јесу $2.\,(2-1) =$ 2-ге класе, линије трећега степена $3.\,(3-1) =$ 6-те класе итд.

2. *Примедба.* Ако у једначини $Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(X - x_1)$ односно у једначини $(X - x_1)\frac{dF}{dx_1} + (Y - y_1)\frac{dF}{dy_1} = 0$ замислимо X, Y као текуће координате, а x_1, y_1 као координате додирних тачака, онда је то једначина геометриског места за додирне тачке свију тангената, које се могу да повуку из задате тачке. Ми смо већ приметили да је ова једначина $k-1$-вога степена. За $k = 2$, т. ј. код линија другога степена она је линеарна и представља полару тачке X, Y. Тако исто и код линија k-тога степена, зовемо линију, коју представља она једначина $k-1$-вога степена, *поларом* тачке X, Y у однос на задату линију k-тога степена.

104. Задатак. — Из тачке X, Y да се повуче нормала на задату линију.

Нормала је опредељена кад је позната тачка у којој она сече линију. Координате x_1, y_1 те тачке добијамо из једначине задате линије, пошто заменимо x, y са x_1, y_1, и једначине нормале, у којој место текућих координата x, y ваља узети координате X, Y тачке из које повлачимо нормалу. За израчунавање координата x_1, y_1 имамо, дакле, ове две једначине

$$F(x_1, y_1) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{X - x_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{Y - y_1}{\frac{dF}{dy_1}}.$$

Примедба. Отуда, што су обе једначине: једначина линије и једначина нормале истога степена, н. пр. k-тога степена, закључујемо да овај задатак има уопште k^2 решења.

105. Задатак. — У правцу m да се повуку тангенте на задату линију.

Координате x_1, y_1 додирних тачака налазимо из

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{и} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = m$$

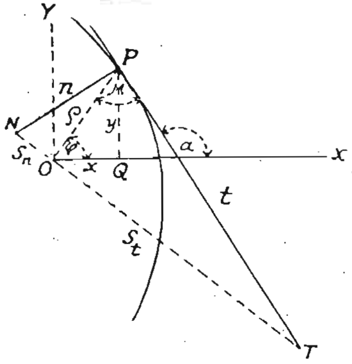
односно из

$$F(x_1, y_1) = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dy_1}} = m.$$

Примедба. Ако је једначина линије k-тога степена, друга је једначина $k-1$-вога степена и задатак има, као и онај у чл. 103., уопште $k\,(k-1)$ решење.

106. Обрасци за поларне координате. — Узмимо да је једначина криве линије дата у поларним координатама.

Правац тангенте у тачци $P(\varrho, \varphi)$ утврдићемо углом, који дирка чини са потегом тачке P. Нека је $\sphericalangle OPT = \mu$. Из слике видимо да је $\mu = \alpha - \varphi$, дакле $tg\,\mu = \frac{tg\,\alpha - tg\,\varphi}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\varphi}$. Ако узмемо управну у тачци O према x-оси за y-осу правоугле координатне системе, онда је



Сл. 22.

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x},\ tg\,\alpha = \frac{dy}{dx}$$

и према томе

$$tg\,\mu = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy},$$

које се, опет, на основу тога што је

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi,$$
$$dx = \cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi,$$

може да напише

$$tg\,\mu = \frac{\varrho\cos\varphi\,(\sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi) - \varrho\sin\varphi\,(\cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi)}{\varrho\cos\varphi\,(\cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi) + \varrho\sin\varphi\,(\sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi)}$$

или простије

$$tg\,\mu = \frac{\varrho\, d\varphi}{d\varrho}.$$

Ако кроз пол O повучемо праву NT управно на потегу OP, онда је (из правоуглих троуглова PTO и PNO)

поларна тангента $PT = t = \frac{\varrho}{\cos\mu}$, *поларна нормала* $PN = n = \frac{\varrho}{\sin\mu}$,

поларна подтангента *поларна поднормала*

$$OT = s_t = \varrho\, tg\,\mu, \qquad ON = s_n = \varrho\, cotg\,\mu,$$

или на основу горње вредности за $tg\,\mu$

$$t = \varrho\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho\, d\varphi}{d\varrho}\right)^2}, \quad n = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}, \quad s_t = \frac{\varrho^2\, d\varphi}{d\varrho}, \quad s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Примедба. Треба имати у виду, да су овде, као и у обрасцима у чл. 102., за t, n, s_t и s_n узете апсолутне вредности.

107. Примери. —

1. Пример. Средишна једначина *круга:*

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Према томе једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \text{ или простије } x\,x_1 + y\,y_1 = r^2.$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \text{ или } \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}.$$

За конструкцију служи закључак, да нормала пролази кроз средиште, а тангента је управна на пречнику у додирној тачци.

Даље налазимо:

$$t = y\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}\,r, \qquad n = y\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = r,$$
$$s_t = y \cdot \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}, \qquad s_n = y \cdot \frac{x}{y} = x.$$

2. Пример. Средишна једначина *елипсе:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \text{ или краће } \frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1.$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Најзад

$$t = y\sqrt{1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}} = \frac{a\,y}{b\,x}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}, \quad n = y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2};$$
$$s_t = \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{a^2 - x^2}{x}, \qquad s_n = \frac{b^2 x}{a^2},$$

где је

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

3. Пример. Средишна једначина *хиперболе:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Одавде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

и на основу тога једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \text{ или краће } \frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} = 1.$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Даље имамо:

$$t = y\sqrt{1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}} = \frac{a y}{b x}\sqrt{\varepsilon^2 x^2 - a^2}, \quad n = y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\varepsilon^2 x^2 - a^2};$$

$$s_t = y\frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{x^2 - a^2}{x}, \qquad s_n = \frac{b^2 x}{a^2}.$$

Овде је

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$

4. *Пример.* Темена једначина *параболе:*

$$y^2 = 2 p x.$$

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \text{ или простије } y y_1 = p(x + x_1).$$

Једначина нормале:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Најзад налазимо:

$$t = y\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = y\sqrt{1 + \frac{2x}{p}}, n = y\sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{p^2 + y^2} = \sqrt{p(p + 2x)},$$

$$s_t = y\frac{y}{p} = 2x, \qquad s_n = y\frac{p}{y} = p.$$

Ово последње може да се употреби на конструкцију дирке и нормале, јер је подтангента равна два пута апсциси додирне тачке, а поднормала константно равна параметру.

5. *Пример. Најлова парабола:*

$$y^2 = Ax^3.$$

Угловни сачинитељ дирке:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3A}{2}\frac{x^2}{y} = \frac{3}{2}\frac{y}{x}.$$

Једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

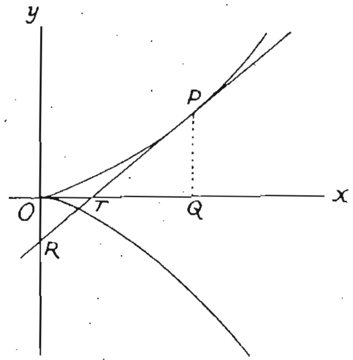
$$y - y_1 = \frac{3}{2}\frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{x}{\frac{x_1}{3}} + \frac{y}{\frac{-y_1}{2}} = 1.$$

Помоћу одсечака $\frac{x_1}{3}$ и $\frac{-y_1}{2}$ лако је конструисати дирку. Види сл. 23., где је за тангенту у тачци $P(x_1, y_1)$ узето

$$OT = \frac{OQ}{3}, \quad OR = -\frac{PQ}{2}.$$



Сл. 23.

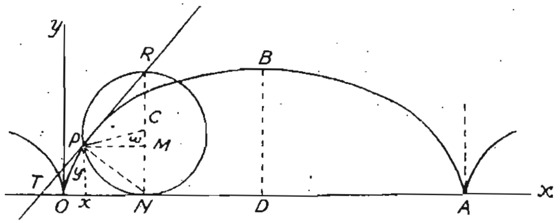
6. *Пример. Проста циклоида:*

$$x = a(\omega - \sin\omega),$$
$$y = a(1 - \cos\omega).$$

Из $dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega$, $dy = a\sin\omega\,d\omega$ следује

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega} = \frac{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}}{2\sin^3\frac{\omega}{2}} = \cot g\frac{\omega}{2} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right),$$

дакле $tg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)$ или $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, ако, као и до сада, са α означимо угао, који дирка чини са x-осом. На томе оснивамо следећу конструкцију тангенте. Продужимо NC до пресека R и спојимо P са R, па добијамо дирку у тачци P. Ово се потврђује тиме што је $\sphericalangle PRN = \frac{1}{2}\omega$ (периферијски угао $= \frac{1}{2}$ средишног угла), а $\sphericalangle RTN = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, дакле $= \alpha$ и услед тога права RT тангента циклоиде у тачци P, а PN нормала.

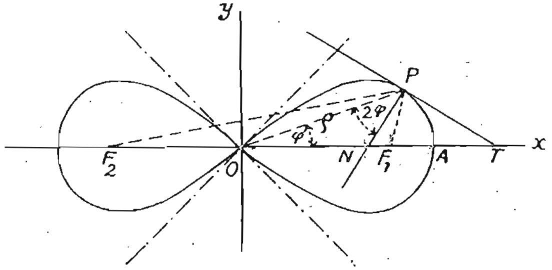


Сл. 24.

Примедба. Ово последње, да нормала циклоиде пролази кроз додирну тачку круга и линије дуж које се он котрља, важи сасвим опште за све циклоиде. Тај став може да послужи да на врло прост начин конструишемо нормалу и тангенту на циклоиду у којој било тачци.

7. *Пример. Лемниската:*

$$\varrho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$



Сл. 25.

Отуда што је

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{2a^2\sin 2\varphi}$$

налазимо

$$tg\,\mu = \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho} = -\frac{\varrho^2}{2a^2\sin 2\varphi}$$

$$= -\,cotg\,2\varphi = tg\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi\right),$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} + 2\varphi,$$

одакле закључујемо да нормала PN чини угао 2φ са потегом у тачци P, ресултат који можемо да употребимо за конструкцију нормале и тангенте.

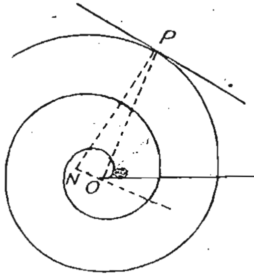
8. *Пример. Архимедова спирала:*

$$\varrho = a\,\varphi.$$

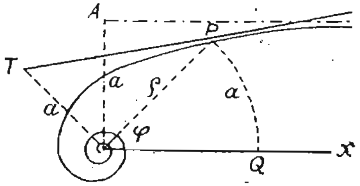
Овде је поларна поднормала

$$s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi} = a,$$

дакле константна и конструкција дирке је, према томе, врло проста. Види сл. 26.



Сл. 26.



Сл. 27.

9. *Пример. Хиперболична спирала:*

$$\varrho\,\varphi = a.$$

Конструкцију тангенте оснивамо на томе што је поларна подтангента константна:

$$s_t = \frac{\varrho^2\,d\varphi}{d\varrho} = a.$$

Види сл. 27.

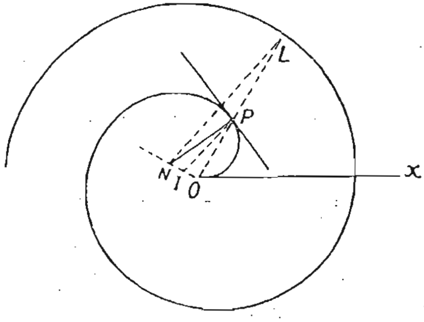
10. *Пример. Параболична спирало:*

$$\varrho^2 = 2\,p\,\varphi.$$

За конструкцију тангенте може да се употреби поларна поднормала

$$s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{p}{\varrho}$$

и то на овај начин: да бисмо повукли дирку у тачци P направићемо $OL = p$. На управној према OP у полу одредићемо $OJ = 1$. Затим ћемо повући $LN \,//\, PJ$. Тада је PN нормала, а управна на њу у тачци P дирка спирале у задатој тачци.



Сл. 28.

Из сличности троуглова OLN и OPJ следује $OL : ON = OP : OJ$ или $p : ON = \varrho : 1$, одакле $ON = \frac{p}{\varrho}$ а то је s_n.

11. *Пример. Логаритамска спирала:*

$$\varrho = a^{\varphi}.$$

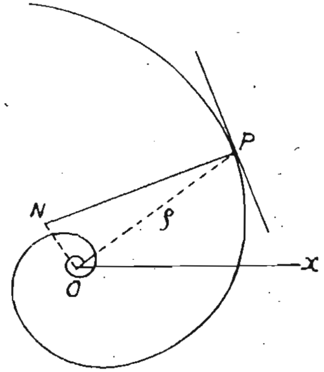
Овде је

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho\,ln\,a},$$

дакле

$$tg\,\mu = \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{1}{ln\,a}$$

константно, па и угао μ константан. Ова спирала има то значајно својство, да сече све потеге под истим углом. Због тога својства ова се линија зове још *Loxodromica plana.* Она је стереографска пројекција на екватор од локсодроме на лопти, т. ј. линије, која сече све меридијане под истим углом. Познато је, да се по тој линији управљају бродови на мору.



Сл. 29.

Тангенту можемо да конструишемо помоћу поларне подтангенте

$$s_t = \frac{\varrho^2\,d\varphi}{d\varrho} = \frac{\varrho}{ln\,a}$$

или помоћу поларне поднормале

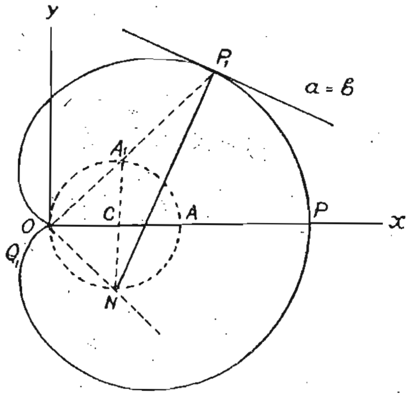
$$s_n = \frac{d\varrho}{d\varphi} = \varrho\,ln\,a.$$

У случају да је $a = e$ имамо простије $s_t = s_n = \varrho$.

2. *Пример. Конхоиде:* то су линије, које добијамо, кад све потеге једне задате линије продужимо или скратимо за извесну сталну количину c. За ма који поларни угао φ постоји дакле између потеге ϱ_1 задате линије и потеге ϱ њене конхоиде једначина $\varrho = \varrho_1 \pm c$. Одавде следује

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{d\varrho_1}{d\varphi},$$

а то значи, да су поларне поднормале за један исти угао φ једнаке за све конхоиде са заједничком основицом. Из овога закључујемо, да се, ако нам је позната конструкција нормале или тангенте једне линије, врло лако може конструисати и нормала односно тангента њене конхоиде.



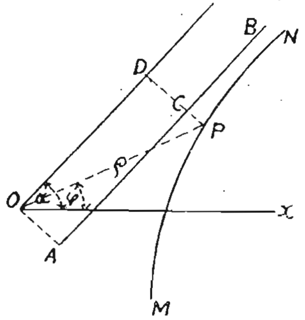
Сл. 30.

Тако н. пр. код Паскалове линије, која такође није ништа до конхоида са кружном основом, налазимо тангенту у тачци P_1 (в. сл. 30.), кад повучемо у тачци A_1 нормалу круга, дакле спојимо A_1 са средиштем C и определимо поларну нормалу ON. Пошто је ово у исто време и поднормала конхоиде за тачку P_1, то следује, да је P_1N нормала, а управна на њу у тачци P_1 тангента Паскалове линије у тој тачци.

2. Асимптоте.

108. Асимптоте у паралелној системи. — Под *асимптотом* једне криве линије разумемо такву праву, која линију у бесконачној даљини додирује.

Права AB је асимптота линије MN, ако одстојање PC између праве и линије опада са растењем удаљења тачке P од почетка координата, тако, да је најзад $lim\ PC = 0$ за $x = \infty$, или $y = \infty$, или за $x = \infty$ и $y = \infty$. Узмимо, да је $y = m\,x + b$ једначина асимптоте AB, x_1 и y_1 координате тачке P, дакле одстојање те тачке од асимптоте



Сл. 31.

$$PC = \frac{y_1 - m\,x_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

На основу горе реченога мора да је

$$lim\,\frac{y_1 - m\,x_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}} = 0$$

или у претпоставци, да је m коначно (да није $m = \infty$, т. ј. права AB није // са y-осом[1]) $lim\,(y_1 - m x_1 - b) = 0$, одакле $lim\,(y_1 - m\,x_1) = b$. На основу овога можемо опет да ставимо $y_1 - m\,x_1 - b = \varepsilon$ или $\frac{y_1}{x_1} = m + \frac{b + \varepsilon}{x_1}$ где је ε таква количина која ишчезава растењем x_1 и y_1 у бесконачност. Из последњег следује $lim\,\frac{y_1}{x_1} = m$, но пошто је овај количник на левој страни за $x_1 = \infty$ и $y_1 = \infty$ неодређен $= \frac{\infty}{\infty}$, то је

$$lim\,\frac{y_1}{x_1} = \frac{\frac{d\,(y_1)}{d\,x_1}}{\frac{d\,(x_1)}{d\,x_1}} = lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1},$$

дакле угловни сачинитељ асимптоте $m = lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}$ и према томе одсечак

$$b = lim\left(y_1 - x_1\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right).$$

Једначина дирке у тачци x_1, y_1 гласи

$$y - y_1 = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad y = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}\,x + y_1 - \frac{d\,y_1}{d\,x_1}\,x_1.$$

---

[1] У случају, да је $m = \infty$, т. ј. асимптота // са y-осом, горње излагање престаје важити. Међутим сва се измена своди на то, што у овоме случају треба решити једначину тангенте, место по ординати y, по апсциси x, а иначе поступити као и горе. Случај да је асимптота линије // са y-осом карактерисан је тиме што је за извесну вредност x-а ордината $y = \infty$. Исто тако, кад је асимптота // са x-осом, онда је за извесну вредност y-а апсциса $x = \infty$.

За бесконачно удаљену тачку додира, т. ј. за $x_1 = \infty$ претвара се једначина тангенте у ову

$$y = x\,lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1} + lim\,\left(y_1 - x_1\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right),$$

а то је једначина асимптоте $y = m\,x + b$ у претпоставци, дакле, да

$$lim\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1} \text{ и } lim\left(y_1 - x_1\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}\right)$$

теже (при бесконачном растењу од x_1 и y_1) извесним одређеним вредностима m и b.

Одавде изводимо следећу методу за опредељавање асимптота кривих линија.

У једначини тангенте $y - y_1 = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}(x - x_1)$ треба, на основу једначине задате линије $y = f(x)$, ставити за y_1 његову вредност $y_1 = f(x_1)$ и написати дакле једначину дирке: $y - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$

или
$$y = x\,f'(x_1) + f\,(x_1) - x_1\,f'\,(x_1).$$

Ако претпоставимо затим, да је $x_1 = \infty$ и нађемо, да се при томе $f'(x_1)$ и $f(x_1) - x_1 f'(x_1)$ приближавају извесним одређеним вредностима, н. пр.

$$\lim_{x_1 = \infty} f'(x_1) = m, \quad \lim_{x_1 = \infty}\,[f(x_1) - x_1\,f'(x_1)] = b$$

добићемо једначину асимптоте:

$$y = x\,\lim_{x_1 = \infty} f'(x_1) + \lim_{x_1 = \infty} [f\,(x_1) - x_1\,f'(x_1)] \quad \text{или} \quad y = m\,x + b.$$

109. Асимптоте у поларној системи. — Узмимо поларне координате. Нека је права AB асимптота линије MN (в. сл. 31). У колико се тачка P буде више удаљавала од пола O, у толико ће потега $\varrho = OP$ бивати, дакле све већа, и све више тежити извесноме правцу OD, па дакле и поларни угао φ све више приближавати се извесној одређеној вредности α. Кад се тачка P буде удалила у бесконачност, потега $\varrho = \infty$ добиће положај $OD // AC$, а поларни угао вредност $\varphi = \alpha$. То значи, ако линија има асимптоту и ако је за извесан поларни угао $\varphi = \alpha$ потега $\varrho = \infty$, асимптота мора бити у правцу α. Из правоуглог троугла OPD читамо $DP = \varrho\,sin\,(\alpha - \varphi)$. Одстојање асимптоте од почетка координате јесте дакле $OA = lim\,DP = lim\,[\varrho\,sin\,(\alpha - \varphi)]$. Производ на десној страни ове једначине јавља се у неодређеноме виду $\infty \,.\, 0$. По познатој методи за изналажење правих вредности неодређених израза имамо

$$OA = \lim_{\varrho=\infty} [\varrho \sin(\alpha - \varphi)] = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\frac{1}{\varrho}}$$

$$= \lim_{\varrho=\infty} \frac{\frac{d}{d\varphi}[\sin(\alpha-\varphi)]}{\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\varrho}\right)} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\frac{d\varrho}{\varrho^2 d\varphi}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\varphi=\alpha} \cos(\alpha-\varphi)}{\lim\limits_{\varphi=\alpha} \frac{d\varrho}{\varrho^2 d\varphi}} = \frac{1}{\lim\limits_{\varrho=\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^2 d\varphi}} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\varrho^2 d\varphi}{d\varrho}.$$

С погледом на то, да ова последња количина на десној страни иза знака *lim* није ништа до поларна подтангента асимптоте, можемо казати: ако подтангента линије [или производ $\varrho \sin(\alpha - \varphi)$]' тежи извесној одређеној и коначној вредности OA, кад ставимо $\varphi = \alpha$, за који угао је $\varrho = \infty$, онда задата линија има асимптоту и то у правцу α и одстојању OA од пола.

110. Примери. —

1. Пример. Хипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Овде је $y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}$, $\frac{dy_1}{dx_1}$ или $f'(x_1) = \pm \frac{b x_1}{a \sqrt{x_1^2 - a^2}}$ и према томе угловни сачинитељ асимптоте (в. чл. 108)

$$m = \pm \frac{b}{a} \lim_{x_1=\infty} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} = \pm \frac{b}{a} \lim_{x_1=\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x_1^2}}} = \pm \frac{b}{a}.$$

За угловни сачинитељ добијамо, дакле, две вредности

$$m = + \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad m = - \frac{b}{a}.$$

Одсечак, који асимптота чини на y-оси, налазимо из $f(x_1) - x_1 f'(x_1)$, кад ставимо $x_1 = \infty$. У нашем примеру је

$$f(x_1) - x_1 f'(x_1) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2} - x_1 \frac{\pm b x_1}{a \sqrt{x_1^2 - a^2}} =$$

$$= \pm \frac{b}{a} \left[\sqrt{x_1^2 - a^2} - \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^3 - a^2}} \right] = \mp \frac{ab}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}$$

и према томе одсечак на y-оси $= \mp ab \lim\limits_{x_1=\infty} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} = 0.$

Асимптоте (има их две услед двојаке вредности за m) пролазе, дакле, кроз почетак координата. Њихове су једначине (в. чл. 108.)

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{и} \quad y = - \frac{b}{a} x.$$

2. Пример. Декартов лист:

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

или у поларним координатама ($x = \varrho \cos\varphi$; $y = \varrho \sin\varphi$)

$$\varrho = \frac{a \sin\varphi \cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi},$$

одакле

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = a \frac{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 3 \sin^3\varphi \cos^2\varphi (\cos\varphi - \sin\varphi)}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}$$

а на основу тога

$$\varrho^2 \frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{a \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 3 \sin^2\varphi \cos^2\varphi (\cos\varphi - \sin\varphi)}.$$

Да бисмо определили асимптоту треба (на основу чл. 109.) узети $\lim\limits_{\varrho=\infty} \varrho^2 \frac{d\varphi}{d\varrho}$. Но пре тога ваља, опет наћи за коју вредност α поларног угла φ постаје $\varrho = \infty$. За ово нам служи једначина задате линије. Из ње видимо, да ϱ може само тако постати ∞, кад је именитељ $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi = 0$, дакле $\cos\varphi = - \sin\varphi$, а то је за $\varphi = 90^0 + 45^0$ у коме је случају $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\cos\varphi = - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Правац асимптоте је дакле одређен углом,

$$\alpha = 90^0 + 45^0.$$

Одстојање OA асимптоте од пола налазимо (помоћу једн. у чл. 109.)

$$\lim_{\varrho=\infty} \varrho^2 \frac{d\varphi}{d\varrho} = \lim \frac{a \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 3 \sin^2\varphi \cos^2\varphi (\cos\varphi - \sin\varphi)}$$

(за $\sin\varphi = - \cos\varphi$) или

$$\lim_{\varrho=\infty} \varrho^2 \frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{a}{3} \lim_{\varrho=135^0} \frac{1}{\cos\varphi - \sin\varphi} = - \frac{a}{3\sqrt{2}}.$$

Пошто смо нашли одстојање асимптоте од пола и њен правац можемо је лако конструисати. На основу сл. 32, где је

$$OD = \frac{-a}{3\sqrt{2}},$$

$$\measuredangle xOD = 90^0 + 45^0$$

добијамо координатне одсечке

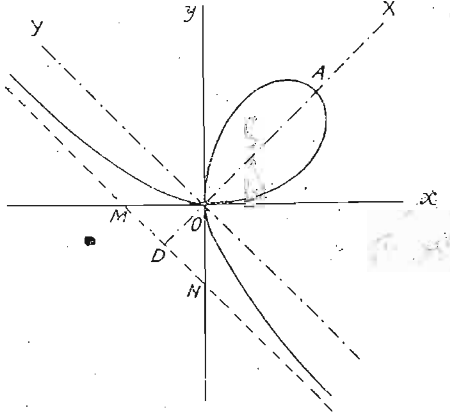
$$OM = ON = \frac{OD}{\cos 45^0} = - \frac{a}{3}.$$

Према томе је једначина асимптоте у правоуглој системи

$$\frac{x}{-\frac{a}{3}} + \frac{y}{-\frac{a}{3}}$$

или

$$x + y + \frac{a}{3} = 0.$$



Сл. 32.

3. *Пример. Строфоиди:*

$$x^3 + xy\,(y + 2\,x\,cos\,\vartheta) - a\,(x^2 - y^2) = 0.$$

Преведимо једначину у поларне координате са полом у координатном почетку и осом у правцу x-осе. Ставимо дакле

$$x = \varrho\,\frac{sin\,(\vartheta - \varphi)}{sin\,\vartheta}, \qquad y = \varrho\,\frac{sin\,\varphi}{sin\,\vartheta},$$

па ћемо добити (пошто скратимо целу једначину са $\frac{\varrho^2}{sin^2\,\vartheta}$ и решимо је по ϱ)

$$\varrho = \frac{a\,sin\,\vartheta\,[sin^2\,(\vartheta - \varphi) - sin^2\,\varphi]}{sin\,(\vartheta - \varphi)\,[sin^2\,(\vartheta - \varphi) + sin^2\,\varphi + 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta]}.$$

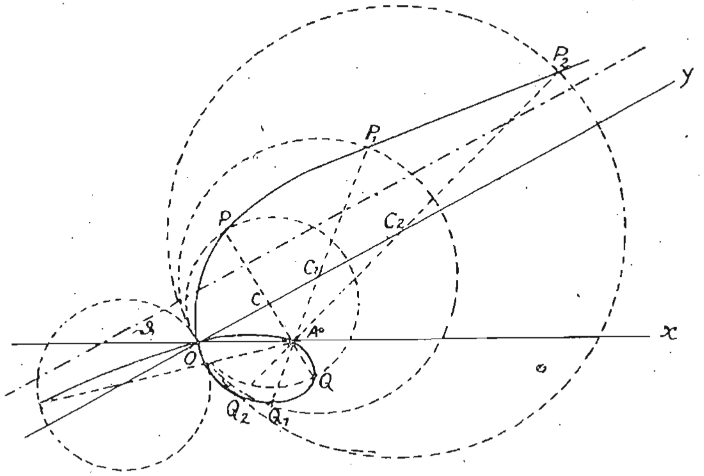
Да бисмо определили правац асимптоте треба да нађемо вредност угла φ, за коју је $\varrho = \infty$. Ово последње је случај, кад је именитељ у изразу за ϱ раван нули. Тај именитељ представља се у виду производа и, као такав, он је раван нули, кад је један од чинитеља раван нули. Потега ϱ је бесконачно велика или кад је $sin\,(\vartheta - \varphi) = 0$ или ако је $sin^2\,(\vartheta - \varphi) + sin^2\,\varphi + 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta = 0$. Први услов даје за φ вредност

$$\varphi = \vartheta.$$

Други услов не води ничему стварному, јер из

$$\begin{aligned}0 &= sin^2\,(\vartheta - \varphi) + sin^2\,\varphi + 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta\\ &= sin\,(\vartheta - \varphi)\,[sin\,(\vartheta - \varphi) + 2\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta] + sin^2\,\varphi\\ &= (sin\,\vartheta\,cos\,\varphi - cos\,\vartheta\,sin\,\varphi)\,(sin\,\vartheta\,cos\,\varphi + cos\,\vartheta\,sin\,\varphi) + sin^2\,\varphi\\ &= sin^2\,\vartheta\,cos^2\,\varphi - cos^2\,\vartheta\,sin^2\,\varphi + sin^2\,\varphi\\ &= sin^2\,\vartheta\,cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi\,sin^2\,\vartheta = sin^2\,\vartheta\end{aligned}$$

следује, да би координатни угао ϑ морао бити $= 0$.



Сл. 33.

Једини случај, у коме је $\varrho = \infty$, то је дакле за $\varphi = \vartheta$. Пошто смо нашли правац асимптоте добићемо њено одстојање од пола, кад узмемо

$$\begin{aligned}\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = a\,sin\,\vartheta\,\{&sin\,(\vartheta - \varphi)\,[sin^2\,(\vartheta - \varphi) + sin^2\,\varphi\\ &+ 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta]_2\,[-sin\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,(\vartheta - \varphi)\\ &- sin\,\varphi\,cos\,\varphi] - [sin^2\,(\vartheta - \varphi) - sin^2\,\varphi]\,[-3\,sin^2\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,(\vartheta - \varphi)\\ &+ 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi - cos\,(\vartheta - \varphi)\,sin^2\,\varphi\\ &+ 2\,sin^2\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,\varphi\,cos\,\vartheta - 4\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta]\}\\ &: sin^2\,(\vartheta - \varphi)\,[sin^2\,(\vartheta - \varphi) + sin^2\,\varphi + 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta]^2,\end{aligned}$$

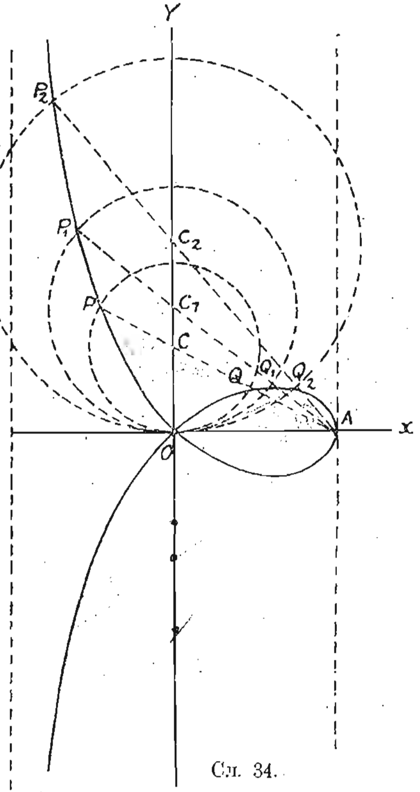
дакле

$$\begin{aligned}\varrho^2\,\frac{d\,\varphi}{d\,\varrho} = a\,sin\,\vartheta\,&[sin^2\,(\vartheta - \varphi) - sin^2\,\varphi]^2 :\\ \{&-2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,[sin^2\,(\vartheta - \varphi) + sin^2\,\varphi + 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta]\\ &\times [sin\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,(\vartheta - \varphi) + sin\,\varphi\,cos\,\varphi] - [sin^2\,(\vartheta - \varphi) - sin^2\,\varphi]\\ &\times [-3\,sin^2\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,(\vartheta - \varphi) + 2\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\\ &+ 2\,sin^2\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,\varphi\,cos\,\vartheta - 4\,sin\,(\vartheta - \varphi)\,cos\,(\vartheta - \varphi)\,sin\,\varphi\,cos\,\vartheta -\\ &\qquad cos\,(\vartheta - \varphi)\,sin^2\,\varphi]\}\end{aligned}$$

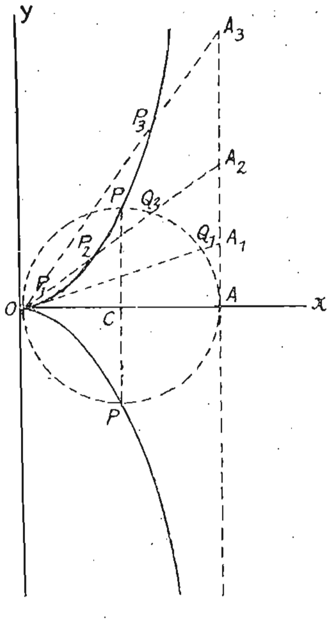
и пређимо граници, т. ј. ставимо $\varphi = \vartheta$ (за коју је вредност $\varrho = \infty$)

$$\lim_{\varrho = \infty} \varrho^2\,\frac{d\,\varphi}{d\,\varrho} = -a\,sin\,\vartheta.$$

За $\vartheta = 90^\circ$, т. ј. код праве строфоиде је $\varphi = 90^\circ$, $lim\,\varrho^2\,\frac{d\,\varphi}{d\,\varrho} = a$. Асимптота је, дакле, код косе и код праве строфоиде паралелна са y-осом. Види слике 33 и 34.



Сл. 34.



Сл. 35.

4. *Пример. Цисоида:*

$$\varrho = 2\,r \frac{sin^2\,\varphi}{cos\,\varphi}.$$

Као што видимо потега је $\varrho = \infty$ за $\varphi = 90^0$. Правац асимптоте је дакле // са y-осом

$$\alpha = 90^0.$$

Даље налазимо из једначине цисоиде

$$\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = 2\,r \cdot \frac{2\,sin\,\varphi\,cos^2\,\varphi + sin^3\,\varphi}{cos^2\,\varphi} = \frac{2\,r\,sin\,\varphi}{cos^2\,\varphi}(2\,cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi) = \frac{2\,r\,sin\,\varphi\,(1 + cos^2\,\varphi)}{cos^3\,\varphi},$$

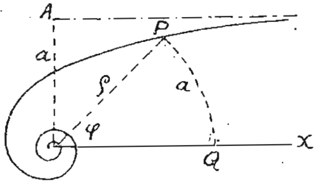
дакле $\varrho^2 \dfrac{d\,\varphi}{d\,\varrho} = \dfrac{2\,r\,sin^3\,\varphi}{1 + cos^2\,\varphi}$ и према томе одстојање OA асимптоте од пола односно почетка координата

$$\lim_{\varrho = \infty} \varrho^2 \frac{d\,\varphi}{d\,\varrho} = \lim_{\varphi = 90^0} \frac{2\,r\,sin^3\,\varphi}{1 + cos^2\,\varphi} = 2\,r.$$

Види сл. 35.

5. *Пример. Хиперболична спирала:*

$$\varrho\,\varphi = a.$$



Сл. 36.

Из тога што је $\varrho = \dfrac{a}{\varphi}$ видимо, да је $\varrho = \infty$ за $\varphi = 0$. Правац асимптоте је дакле // са поларном осом

$$\alpha = 0.$$

Одстојање OA од пола добијамо из поларне подтангенте $s_t = \varrho^2 \dfrac{d\,\varphi}{d\,\varrho}$, која је у овоме случају константна и то $= a$ (в. пример 9. чл. 107.) Види сл. 36.

6. *Пример. Логаритамска линија:*

$$y = b^x.$$

Овде је $\dfrac{d\,y_1}{d\,x_1}$ или $f'(x_1) = b^{x_1}\,l\,b$, $\;f(x_1) - x_1 f'(x_1) = b^{x_1}(1 - x_1\,l\,b)$.

Кад бисмо, по упутству чл. 108., ставили овде $x_1 = \infty$ нашли би, како за угловни сачинитељ, тако и за одсечак, који линија чини на y-оси, бесконачно велику вредност. Оваква асимптота не постоји. Али, ако ставимо $x_1 = -\infty$ добићемо

$$\lim_{x_1 = -\infty} f'(x_1) = l\,b \cdot \lim_{x_1 = -\infty} b^{x_1} = 0,$$

$$\lim_{x = -\infty} [f(x_1) - x_1 f'(x_1)] = \lim_{x = -\infty} b^{x_1}(1 - x_1\,l\,b) = 0.$$

На основу првога ресултата закључујемо, да је асимптота // са x-осом, а на основу другога, да пролази кроз почетак координата. То значи, да је сама x-оса асимптота ове линије.

3. Анвелопе.

111. Једначина анвелопе. — Нека је

$$F(x,\ y,\ a) = 0$$

општа једначина за целу једну врсту линија. Под a разумемо произвољну константу, која опредељује ближе поједине линије у задатој групи линија. Једној задатој вредности од a одговара дакле једна извесна линија те групе и обрнуто: разним вредностима количине (параметра) a одговарају разне линије. Тако н. пр. параметрима a и $a + \Delta a$ одговарају линије

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } F(x,\ y,\ a + \Delta a) = 0.$$

Координате њихове пресечне тачке P задовољавају обе једначине у исто време, па и сваку другу једначину, која путем сабирања, одузимања, множења или делења из њих произилази. Координате пресечне тачке P задоволиће, дакле, и ове две једначине

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } \frac{F(x,\ y,\ a + \Delta a) - F(x,\ y,\ a)}{\Delta a} = 0.$$

Ако предпоставимо, да је Δa бесконачно мало, т. ј. ако предпоставимо, да су линије, којима припадају параметарне вредности a и $a + \Delta a$, бесконачно приближне једна другој, координате тачке пресека ових задовољиће једначине

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } \lim_{\Delta a = 0} \frac{F(x,\ y,\ a + \Delta a) - F(x,\ y,\ a)}{\Delta a} = 0$$

или простије

$$F(x,\ y,\ a) = 0 \text{ и } \frac{d\,F(x,\ y,\ a)}{d\,a} = 0. \qquad (I$$

Геометриско место тачака, у којима се секу две и две бесконачно приближне линије извесне групе $F(x,\ y,\ a) = 0$, зове се *анвелопа* (Umhüllungskurve, enveloppe) тих линија (које се опет у однос на ову зову die Eingehüllten, enveloppées).

112. Продужење. — Једначину анвелопе једнога низа линија $F(x,\ y,\ a) = 0$ налазимо, кад елиминујемо из горњих једначина I. параметар a. На тај начин добијамо једначину, која важи за све вредности од a, т. ј. једначину, која важи за тачке пресека свију поступних линија у задатој групи.

Није тешко доказати, да анвелопа једнога низа линија додирује све те линије или да анвелопа и поједине линије, које она обухвата, имају у заједничким тачкама и заједничке тангенте.

Замислимо другу једн. I. решену по a и да следује н. пр. $a = \varphi(x, y)$. Ако ставимо по томе ту вредност у прву једначину т. ј. у општу једначину задатих линија добићемо $F[x, y, \varphi(x, y)] = 0$ као једначину њихове анвелопе.

Узмимо из задате групе једну извесну линију, којој одговара параметар a_1. Онда је у заједничкој тачци те линије и анвелопе и за ову последњу $\varphi(x, y) = a_1$. Једначина $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$, из које налазимо угловни сачинитељ дирке, једна је иста, како за линију са параметром a_1, тако и за анвелопу. То значи, да линија и анвелопа имају у заједничкој тачци једну исту тангенту.

113. Други случај. — У случају, да у општој једначини једнога низа линија улазе две произвољне константе a и b, н. пр.

$$F(x, y, a, b) = 0$$

и да између тих параметара постоји веза

$$\Phi(a, b) = 0$$

другу једначину под I. треба заменити са $\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0$

или пошто је [из $\Phi(a, b) = 0$] $\frac{db}{da} = -\frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{d\Phi}{db}}$ овом $\frac{dF}{da} - \frac{dF}{db}\frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{d\Phi}{db}} = 0$,

које опет можемо написати $\frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{dF}{da}} = \frac{\frac{d\Phi}{db}}{\frac{dF}{db}}$.

Једначину анвелопе добићемо, кад елиминујемо параметре a и b из једначина

II) $$F(x, y, a, b) = 0,\ \Phi(a, b) = 0 \text{ и } \frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{dF}{da}} = \frac{\frac{d\Phi}{db}}{\frac{dF}{db}}.$$

114. Примери.

1. *Пример.* Једна права константне дужине $AB = c$ креће се њеним крајњим тачкама дуж координатних оса једне правоугле системе. Да се одреди анвелопа за све положаје, које та покретна права заузима.

Као општу једначину праве AB, за ма који њен положај, можемо узети

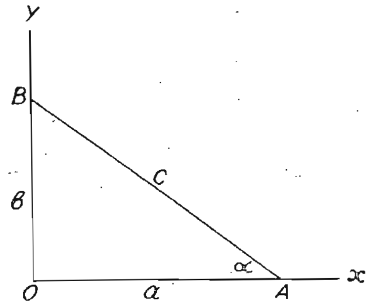
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

или пошто је

$$a = c \,.\, \cos\alpha,\ b = c \,.\, \sin\alpha$$

у виду $\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = c$.

Према овоме можемо овај задатак да решимо на два начина.



Сл. 37.

Први начин. Узмимо једначину праве у виду

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = c. \qquad \text{(I}$$

Параметар, који опредељује поједине положаје покретне праве то је угао α. Једначину анвелопе добићемо, кад елиминујемо угао α из опште једначине I. линија, чију анвелопу тражимо и једначине $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, а то је

$$\frac{x \sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{y \cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \text{ или } x^{\frac{1}{3}} \sin\alpha = y^{\frac{1}{3}} \cos\alpha. \qquad \text{(II}$$

Из ове последње једн. II налазимо $x^{\frac{2}{3}} \sin^2\alpha = y^{\frac{2}{3}}(1 - \sin^2\alpha)$, одакле

$$\sin^2\alpha = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}},\ \cos^2\alpha = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}},$$

које, кад ставимо у једн. I., даје једначину анвелопе

$$\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Други начин. Нека је

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{(III}$$

општа једначина покретне праве AB. Између параметара a и b постоји веза

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad \text{(IV}$$

Једначину анвелопе налазимо, кад додамо овим двема једначинама још и трећу (в. једн. II у чл. 113.)

$$\frac{2a}{-\frac{x}{a^2}} = \frac{2b}{-\frac{y}{b^2}} \text{ или } \frac{a^3}{x} = \frac{b^3}{y}, \qquad \text{(V}$$

коју добијамо на основу тога, што је овде

$$\frac{d\Phi}{da} = 2a,\ \frac{d\Phi}{db} = 2b,\ \frac{dF}{da} = -\frac{x}{a^2},\ \frac{dF}{db} = -\frac{y}{b^2}.$$

Из III следује $b = \frac{ay}{a - x}$, а из V опет $b = a\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, које једно са другим упоређено даје

$$a = x^{\frac{1}{3}}\ (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}),\ b = y^{\frac{1}{3}}\ (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}).$$

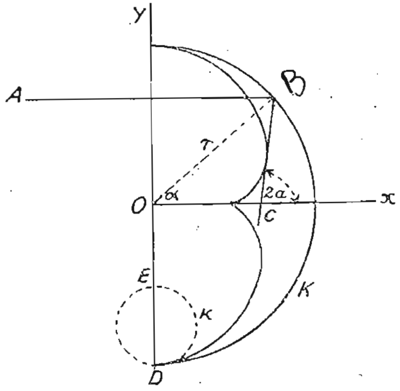
Заменом ових вредности у IV произилази једначина анвелопе, коју смо горе већ нашли.

2. *Пример.* Од најлепших примена теорије анвелопа имамо у Оптици. Замислимо ма какву криву линију на коју падају светлосни зраци, било да су они међусобом паралелни (да долазе из бесконачне даљине, као што је приближно случај код сунчаних зракова) или да дивергирају из једне светлеће тачке. Ми знамо, да се уопште у таквоме случају један део зракова одбија, а други део прелама. Закони, по којима једно и друго бива, познати су. Код рефлексије имамо, да је угао одбијања раван углу упадања, а код рефракције стоје синуси углова упадања и преламања у сталној размери, која једино зависи од сре-

дине из које зрак долази и средине у коју он улази. Како код одбивених, тако и код преломљених зракова имамо дакле један непрекидан низ правих линија, у коме поједине праве следују једном и истом закону. Линија, коју образују тачке, у којима се поступно две и две од тих правих секу, зове се *жижна линија* (Caustica). Према реченом следује, да жижне линије постају на два начина: услед одбијања (Catacausticae) и услед преламања (Diacausticae). Са геометриског гледишта жижне линије нису ништа друго до анвелопа одбијених односно преломљених зракова.

Први, који је обратио пажњу на ову врсту линија, јесте холандски физичар Christian Huyghens (1629—1695). Он је расматрао случај, да светлосни зраци упадају на један полукруг. Тај рад Huyghens-ов, који датира већ од год. 1678., штампан је у његовом делу Traité de la Lumière год. 1690. Jakob Bernoulli, који се врло много бавио проучавањем ове врсте линија, дао им је имена Catacaustica и Diacaustica.

Нека је K један полукруг, на који у правцу AB падају светлосни зраци. Из Физике знамо, да се упадајући зрак AB одбија тако, да је $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ABO$, пошто је нормала у упадној тачци B полупречник r. Определимо анвелопу одбивених зракова BC.



Сл. 38.

Узмимо почетак координата у средишту полукруга, x-осу у правцу упадајућих зракова.

Означимо са α упадни угао, са x_1, y_1, координате тачке B. Једначина одбивеног зрака BC гласи онда

$$y - y_1 = (x - x_1)\, tg\, 2\, a$$

или

$$(y - y_1) \cos 2\, a = (x - x_1) \sin 2\, \alpha.$$

Ако ставимо овде $x_1 = r \cos \alpha$, $y_1 = r \sin \alpha$ добићемо

$$x \sin 2\, \alpha - y \cos 2\, \alpha = r\, (\sin 2\, \alpha \cos \alpha - \cos 2\, \alpha \sin \alpha)$$

или простије

I) $$x \sin 2\, \alpha - y \cos 2\, \alpha = r \sin \alpha.$$

Ово је, дакле, општа једначина свију одбивених зракова. Њихову анвелопу добићемо, кад елиминујемо (промењиви) угао α из I и једначине $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, а т. ј.

II) $$x \cos 2\, \alpha + y \sin 2\, \alpha = \frac{r}{2} \cos \alpha.$$

Помножимо I са $\sin 2\, \alpha$, а II са $\cos 2\, \alpha$ и саберимо, па ћемо добити

$$x = r\, (\sin \alpha \sin 2\, \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \cos 2\, \alpha) = r\, (2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \cos 2\, \alpha) = \frac{r}{2} (4 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha$$

или краће

$$x = \frac{r}{2} \cos \alpha\, (1 + 2 \sin^2 \alpha).$$

Помножимо сада I са $-\cos 2\, \alpha$, а II са $\sin 2\, \alpha$ и саберимо те добивене једначине. Ресултат је

$$y = r \left(\frac{1}{2} \cos \alpha \sin 2\, \alpha - \sin \alpha \cos 2\, \alpha \right) =$$

$$r\, (\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos 2\, \alpha) = r \sin \alpha\, [\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]$$

$$y = r \sin^3 \alpha.$$

Одавде следује $\sin^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{2}{3}}$, дакле $\cos \alpha = \frac{\sqrt{r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}{r^{\frac{1}{3}}}$, које кад ставимо у израз за x налазимо

$$x = \frac{r}{2} \frac{\sqrt{r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}{r^{\frac{1}{3}}} \left[1 + 2 \left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{2}{3}}\right], \text{ одакле}$$

$$2\, x = \sqrt{r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}} \left[r^{\frac{2}{3}} + 2\, y^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$4\, x^2 = \left(r^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right) \left(r^{\frac{4}{3}} + 4\, r^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + 4\, y^{\frac{4}{3}}\right) \text{ или најзад}$$

$$[4\, (x^2 + y^2) - r^2]^3 = 27\, r^4 y^2$$

као једначина анвелопе рефлектованих зракава.

Из једначине анвелопе могли бисмо уверити се да је, у овоме случају, жижна линија епициклоида, која постаје, кад пустимо, да се котрља круг k са полупречником $\frac{r}{4}$ по унутрашњој страни задатога круга K.

Као други пример једне жижне линије поменимо кардиоиду. Она постаје, кад замислимо светлосне зраке да полазе из једне тачке истога круга, који их одбија. Пречник a круга AA_1O (в сл. 30 чл. 107.), који служи за конструкцију кардиоиде он је у овоме случају $= \frac{1}{3}$ пречника круга K, који одбија зраке.

Трећи интересан пример даје нам случај, кад зраци упадају на издубљену (конкавну) страну једне просте циклоиде и то паралелно са y-осом (в. сл. 27). Жижна линија је такође проста циклоида. Њу добијамо, кад пустимо, да се дуж x-осе, а почев од тачке O, котрља круг са полупречником $\frac{a}{2}$. Основица жижне линије је дакле $\frac{1}{2}$ основице задате циклоиде, т. ј. $= OD$.

4: Пројекционе линије.

115. Једначина пројекционе линије. — Геометриско место пројекција једне сталне тачке на све могуће тангенте једне задате линије назваћемо *пројекционом линијом* оне задате линије.

Нека је

$$F(x,\ y) = 0 \qquad (I$$

једначина задате линије $P_1 P_2 P_3 \ldots$ Координате сталне тачке A означимо са a и b.

Једначина дирке у тачци $P_1(x_1, y_1)$ на задату линију I јесте

$$\text{II)} \qquad y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1),$$

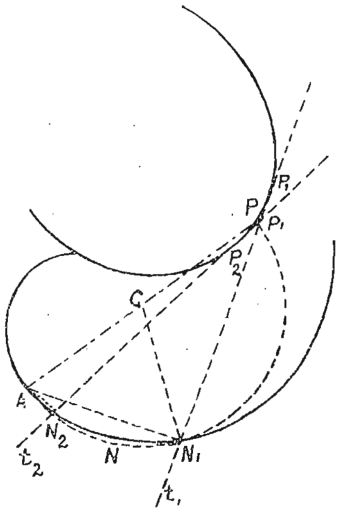
а једначина нормале из тачке A на тангенту

$$\text{III)} \qquad y - b = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - a).$$

Једначину пројекционе линије добићемо, кад елиминујемо x_1 и y_1 из једначина I, II и III, пошто у првој заменимо текуће координате x, y координатама x_1, y_1 додирне тачке, дакле из једначина

$$F(x_1, y_1) = 0,\ y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1),\ y - b = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - a).$$

Нека су t_1 и t_2 дирке у тачкама P_1 и P_2 на задату линију, N_1 и N_2 пројекције сталне тачке A на t_1 и t_2. Означимо са P тачку пресека тангената t_1 и t_2 опишимо из средине од AP са полупречником $\frac{AP'}{2}$ круг. Тај круг пролазиће и кроз тачке N_1 и N_2. У колико се буду тачке P_1 и P_2, односно дирке t_1 и t_2, приближавале једна другој у толико ће и пресечна тачка P' више приближавати се извесној тачци P на задатој линији, а исто тако и сечица $N_1 N_2$ пројекционе линије тежити све више положају дирке у извесној тачци N пројекционе линије. Одавде закључујемо, да је тангента пројекционе линије у тачци N у исто време и тангента круга, што пролази кроз сталну тачку A, тачку N и овој одговарајућу тачку P на задатој линији.



Сл. 39.

Није тешко увидети на који начин ово последње може да нам послужи да конструишемо тангенту или нормалу пројекционе линје, кад нам је позната конструкција тангенте или нормале код задате линије.

Последњи ресултат могли би и овако да формулишемо: нормала пројекционе линије у извесној тачци N пролази кроз средиште C круга, што је описан над дужи, која спаја сталну тачку A са (тачци N одговарајућом) тачком P.

116. Примери.

1. Пример. Пројекциона линија круга $x^2 + y^2 = r^2$.

Замислимо, да стална тачка A лежи на x-оси у одстојању $OA = a$ од средишта круга.

Једначине из којих треба да елиминујемо x_1 и y_1 јесу

једначина круга за $x = x_1$, $y = y_1$:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \qquad \text{(I}$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$x x_1 + y y_1 = r^2 \qquad \text{(II}$$

и једначина нормале из A на дирку:

$$y = \frac{y_1}{x_1}(x - a). \qquad \text{(III}$$

Из III следује $y_1 = \frac{y x_1}{x - a}$, које кад ставимо у II, даје $\left(x + \frac{y^2}{x - a}\right) x_1 = r^2$, одакле

$$x_1 = \frac{(x - a) r^2}{x^2 + y^2 - ax}$$

и према томе, а на основу III),

$$y_1 = \frac{y r^2}{x^2 + y^2 - ax}.$$

Ако заменимо ове вредности за x_1 и y_1 у једн. I добићемо

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = [(x - a)^2 + y^2] r^2.$$

Ово је једначина Паскалове линије. У случају, да тачка A лежи на периферији задатог круга пројекциона линија је кардиоида. (Види сл. 30 у чл. 107.)

2. *Пример.* Пројекциона линија елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, узев сталну тачку A у средишту елипсе.

Једначине гласе у овоме случају: једначина елипсе за $x = x_1$, $y = y_1$:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(I}$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1, \qquad \text{(II}$$

једначина нормале из средишта на дирку:

$$y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x. \qquad \text{(III}$$

Из III) налазимо $y_1 = \frac{b^2 y}{a^2 x} x_1$, а из II) $y_1 = \frac{b^2}{y} - \frac{b^2 x}{a^2 y} x_1$, које, једно са другим упоређено, даје

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2},\ y_1 = \frac{b^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Ако ставимо ове вредности у једн. I. добићемо

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

У поларним координатама ($x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$) имамо $\varrho^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$ или, ако ставимо $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, простије

$$\varrho^2 = a^2(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi).$$

На основу једначине, коју смо нашли за пројекциону линију, није тешко извести закључке о изгледу ове линије.

Ако узмемо сталну тачку A у једној од елипсиних жижа добићемо за пројекциону линију круг описан из средишта елипсе полупречником a (великом полуосом).

3. *Пример.* Пројекциона линија хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, узев сталну тачку A у средишту хиперболе. Једначине јесу у овоме случају

једначине хиперболе за $x = x_1$, $y = y_1$:

I) $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

II) $$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1,$$

једначина нормале из средишта на дирку:

III) $$y = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1} x.$$

Из III следује $y_1 = -\frac{b^2 y}{a^2 x} x_1$, а из II $y_1 = \frac{b^2 x}{a^2 y} x_1 - \frac{b^2}{y}$, одакле, кад упоредимо те две вредности,

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = -\frac{b^2 y}{x^2 + y^2},$$

које, опет, кад ставимо у I, даје једначину пројекционе линије

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

или у поларним координатама ($x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$)

$$\varrho^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi),$$

где је

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$

Код равностране хиперболе (т. ј. за $a = b$) пројекциона линија је лемниската:

$$a^2 (x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2 \quad \text{или} \quad \varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

(в. 7. пример чл. 107.).

Ако узмемо тачку A у једној од жижа хиперболе пројекциона линија претвара се у круг описан из средишта хиперболе полуосом a.

4. *Пример.* Пројекциона линија параболе $y^2 = 2px$, узев тачку A у темену параболе. Овде су једначине, из којих налазимо једначину пројекционе линије (в чл. 115.)

једначина параболе за $x = x_1$, $y = y_1$:

I) $$y_1^2 = 2 p x_1,$$

једначина тангенте у тачци x_1, y_1:

II) $$y y_1 = p (x + x_1),$$

једначина нормале из темена на дирку:

III) $$y = -\frac{y_1}{p} x.$$

Из III следује $$y_1 = -\frac{py}{x},$$

које, стављено у 1, даје $$x_1 = \frac{py^2}{2x^2}.$$

Ако заменимо ове вредности за x_1 и y_1 у једн. II добићемо једначину пројекционе линије

$$py^2 = -2x(x^2 + y^2) \text{ или } -x^3 = y^2 \left(\frac{p}{2} + x\right).$$

У поларним координатама ($x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$) имамо

$$\varrho = -\frac{p \sin^2 \varphi}{2 \cos \varphi}.$$

Лако је уверити се, да је пројекциона линија цисоида. Овде је положан правац x-осе противан ономе у сл. 35 чл. 110. Према томе, а и на основу саме једначине, коју смо нашли, лако је уверити се, да је директриса параболе асимптота пројекционе линије (цисоиде).

Узмимо тачку A у пресеку директрисе и x-осе. Координате тачке A јесу онда $x = -\frac{p}{2}$, $y = 0$, а једначине, из којих добијамо једначину пројекционе линије (в. чл. 115.) јесу:

$$y_1^2 = 2px_1, \; yy_1 = p(x + x_1), \; y = -\frac{y_1}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Из последње једначине следује

$$y_1 = -\frac{py}{x + \frac{p}{2}},$$

које, кад ставимо у прву, даје

$$x_1 = \frac{py^2}{2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

и заменимо обе те вредности у другу једначину налазимо

$$x + \frac{y^2}{x + \frac{p}{2}} + \frac{py^2}{2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = 0.$$

Овој једначини даћемо знатно простији вид, кад ставимо почетак координата у тачку A, т. ј. ставимо $x = X - \frac{p}{2}$, $y = Y$.

Једначина пројекционе линије гласи сада

$$X(X^2 + Y^2) - \frac{p}{2}(X^2 - Y^2) = 0,$$

а ово је једначина праве строфоиде.

Положај ове строфоиде (као пројекционе линије) наспрам параболе можемо замислити помоћу сл. 34. чл. 110.), кад узмемо, да је x-оса главна оса, y-оса директриса, а тачка A теме параболе (дакле $a = OA = \frac{p}{2}$).

Ако узмемо тачку, коју пројектујемо у жижи параболе, онда је пројекциона линија тангента параболе у њеном темену.

5. Тангенциалне координате.

117. Начело дуалности. — Линије, и сасвим опште ма какве геометриске фигуре у равни, можемо замислити као геометриско место положаја, које извесан покретан облик поступно заузима. Најпростији облици у равни то су тачка и права линија. Према томе можемо постанак једне геометриске фигуре у равни сматрати као ресултат кретања тачке или праве. На овоме двојаком начину стварања фигура основано је начело *дуалности* или *реципрочности* у Геометрији. Две фигуре, које постају на једнак начин, али услед кретања разних елемената, т. ј. две фигуре, од којих једна произилази кретањем тачке, а друга кретањем праве, зовемо дуалним или реципрочним. Свакој теореми и свакоме својству једне фигуре одговара слична теорема и слично својство реципрочне фигуре, тако да из својстава једне можемо извести својства дуалне фигуре, кад само променимо речи „тачка“ и „права“ узајамно. Н. пр.

Две *тачке* одређују једну *праву* линију или:	Две *праве* одређују једну *тачку* или:
Кроз две *тачке* пролази само једна *права.*	Две *праве* секу се само у једној *тачци.*
Три *тачке* одређују три *праве* или:	Три *праве* одређују три *тачке* или:
Кроз три *тачке* пролазе три *праве.*	Три *праве* секу се у три *тачке.*
Фигуру, коју образују три *тачке* зовемо *троуглом.*	Фигуру, коју образују три *праве* зовемо *тространом.*

Ако у једној фигури леже три тачке на једној истој правој, онда у дуалној фигури пролазе оне три праве, што одговарају овим тачкама, кроз једну исту тачку и то ону што одговара правој на којој се налазе поменуте три тачке у првој фигури.

Итд. итд.[1])

118. Тангенциалне координате. — Према горе изреченоме начелу дуалности о постајању фигура можемо криве линије сматрати или као путање једне покретне тачке или, пак, као анвелопе једне праве, која поступно мења положај.

Из овог двојаког начина схватања произилазе и две врсте координата.

Узев тачку за основан облик, из којега замишљамо остале да постају, долазимо природно до оних координата са којима смо се до сада

---

[1]) Најбољи пример дуалности имамо у теорији пола и поларе и код реципрочно поларних фигура.

искључиво бавили и које се опште зову *координате тачке.* Но, ако узмемо праву за елеменат, добићемо нову врсту координата, такозване *координате праве.*

Општу једначину једне праве линије можемо написати

$$x\xi + y\eta = 1. \qquad \text{(I}$$

Овде су x и y текуће координате тачке, а ξ и η извесне количине (параметри), које одређују положај праве. Њихов значај нам је познат: то су реципрочне вредности одсечака, које права чини на координатним осама. Пошто свакоме спрегу вредности параметара ξ и η одговара једна извесна права, а и обрнуто свакој правој извесан спрег вредности ξ и η, то је појмљиво, да нам ове количине могу послужити као координате праве линије. Количине ξ, η зовемо *тангенциалним координатама* праве.

Узмимо ма какву једначину

$$\Phi(\eta, \xi) = 0 \quad \text{или} \quad \eta = \varphi(\xi) \qquad \text{(II}$$

на основу које свакој вредности координате ξ припада једна или више одређених вредности координате η. У тој једначини је, дакле, формулисан закон, по коме се једна права креће. Једначина II, као аналитички израз за све положаје, које једна на извесан начин покретна права може заузети, представља анвелопу покретне праве. Другим речима једначина II опредељује извесну криву линију помоћу њених тангената, представља је, дакле, у тангенциалним координатама.[1])

Једначину II можемо назвати *тангентном једначином* извесне криве линије. Једначина I јесте једначина једне од њених тангената у обичним координатама и то једначина тангенте, чије су тангенциалне координате ξ и η.

Из сличности овога расматрања с оним у чл. 113. лако је закључити како се има да поступи при претварању тангентне једначине $\Phi(\xi, \eta) = 0$ у обичне координате x, y.

Имајући на уму, да су параметри a и b (у чл. 113.) овде означени са ξ и η (тангенциалне координате), да

једначину $F(x, y, a, b) = 0$ заступа једначина $x\xi + y\eta = 1$,
једначину $\Phi(a, b) = 0$ заступа једначина $\Phi(\xi, \eta) = 0$

---

[1]) Тако у првоме примеру чл. 114. расматрали смо праву $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, која мења положај под условом, да је $a^2 + b^2 = c^2$. Пошто је у овоме случају $\xi = \frac{1}{a}, \eta = \frac{1}{b}$ то је, дакле, једначина анвелопе (покретне праве) у тангенциалним координатама $\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} = c^2$.

и према томе дакле једначину

$$\frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{dF}{da}}=\frac{\frac{d\Phi}{db}}{\frac{dF}{db}} \text{ ова } \frac{\frac{d\Phi}{d\xi}}{x}=\frac{\frac{d\Phi}{d\eta}}{y},$$

имамо место оних једн. у чл. 113, које су нам служиле, да определимо анвелопу једне задате линије, сада ове једначине

$$x\xi+y\eta=1, \quad \Phi(\xi,\ \eta)=0 \text{ и } \frac{\frac{d\Phi}{d\xi}}{x}=\frac{\frac{d\Phi}{d\eta}}{y}$$

помоћу којих, кад елиминујемо ξ и η, добијамо једначину линије II у обичним (Декартовим) координатама x, y.

119. Дуалне теореме за обичне и тангенциалне координате. —

Степен једначине

$$F(x,\ y)=0$$

одређује *степен* линије, а то је највећи број тачака, у којима једна права може сећи ту линију.

Доказ. Нека је

$$Ax+By+C=0$$

једначина праве. Сваки спрег координата x, y, који задовољава обе једначине

$$Ax+By+C=0$$
$$F(x,\ y)=0$$

даје једну тачку пресека праве и задате линије. Број оваквих спрегова (па дакле и пресечних тачака) раван је степену једначине задате линије.

Степен једначине

$$\Phi(\xi,\ \eta)=0$$

одређује *класу* линије, а то је највећи број тангената, које се из једне тачке могу повући на ту линију.

Доказ. Нека су

$$a \text{ и } b$$

обичне координате једне тачке. Сваки спрег координата ξ, η, који задовољава обе једначине

$$a\xi+b\eta=1$$
$$\Phi(\xi,\ \eta)=0$$

даје једну тангенту што пролази кроз тачку a, b. Број оваквих спрегова (па дакле и тангената) раван је степену једначине задате линије.

На основу тога што је линија k-тога степена $k(k-1)$ класе (в. чл. 103. 1. Примедбу) следује, да је за линију k-тога степена њена тангенциална једначина $k(k-1)$ степена. Према томе је тангенциална једначина линије другога степена ($k=2$) такође другога степена. И обрнуто: тангенциална једначина другог степена представља линију другог степена.

Тангенциална једначина првога степена, н. пр.

$$A\xi+B\eta+C=0$$

представља једну тачку. Ако доведемо ову једначину на вид једначине I у чл. 118., т. ј. напишемо је $-\frac{A}{C}\xi-\frac{B}{C}\eta=1$ наћићемо, да је $x=-\frac{A}{C}$, $y=-\frac{B}{C}$, а то су координате једне тачке. Ову тачку $x=-\frac{A}{C}$, $y=-\frac{B}{C}$ можемо сматрати као анвелопу свију правих линија што пролази кроз њу.

И обрнуто: тангенциалну једначину једне тачке, чије су обичне координате $x=a$ и $y=b$, добићемо, кад изразимо да права $x\xi+y\eta=1$ пролази кроз њу. Једначина те тачке гласи дакле $a\xi+b\eta=1$.

Права, чије су координатне ξ и 0, једначина

$$x\xi=1 \text{ или } x=\frac{1}{\xi},$$

јесте // са y-осом.

Права, чије су координате 0 и η, једначина

$$y\eta=1 \text{ или } y=\frac{1}{\eta},$$

јесте // са x-осом.

Права, чије су координате 0 и 0, једначина

$$0.x+0.y=1 \text{ или } 0=Const.$$

лежи у бесконачној даљини. То следује из тога што су координатни одсечци $\frac{1}{\xi}=\infty$ и $\frac{1}{\eta}=\infty$.

Растојање двеју тачака x_1, y_1 и x_2, y_2 јесте

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Тачка, чија је једначина $a\xi=1$, дакле координате

$$x=a,\ y=0,$$

лежи на x-оси.

Тачка, чија је једначина $b\eta=1$, дакле координате

$$x=0,\ y=b,$$

лежи на y-оси.

Тачка, чија је једначина $0=Const.$ или $0.\xi+0.\eta=1$, дакле координате

$$x=0,\ y=0,$$

лежи у почетку координата.

Растојање двеју тачака

$$a_1\xi+b_1\eta+c_1=0 \text{ и}$$
$$a_2\xi+b_2\eta+c_2=0$$

јесте

$$d=\sqrt{\left(\frac{a_1}{c_1}-\frac{a_2}{c_2}\right)^2+\left(\frac{b_1}{c_1}-\frac{b_2}{c_2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2}}{c_1c_2}.$$

Општа једначина праве, која пролази кроз једну задату тачку x_1, y_1, гласи

$$y - y_1 = m\,(x - x_1).$$

Константа m је произвољна и услед тога има оваквих правих безбројно много.

Једначина праве, која пролази кроз две задате тачке x_1, y_1 и x_2, y_2, гласи

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

Као што видимо права је потпуно одређена.

Одстојање тачке x_1, y_1 од праве $Ax + By + C = 0$ јесте

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказ. Декартове координате задатих тачака јесу $x_1 = -\frac{a_1}{c_1}$, $y_1 = -\frac{b_1}{c_1}$ и $x_2 = -\frac{a_2}{c_2}$, $y_2 = -\frac{b_2}{c_2}$, одакле, на основу обрасца на левој страни, налазимо вредност за d у тангенциалним координатама.

Општа једначина тачке, која лежи на једној задатој правој ξ_1, η_1, гласи

$$\eta - \eta_1 = \mu\,(\xi - \xi_1).$$

Услед тога што је константа μ произвољна има оваквих тачака безбројно много.

Једначина тачке, у којој се две задате праве ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 секу, гласи

$$\eta - \eta_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}\,(\xi - \xi_1).$$

Као што видимо тачка је потпуно одређена.

Одстојање праве ξ_1, η_1 од тачке $a\xi + b\eta + c = 0$ јесте

$$d = \frac{\frac{a}{c}\,\xi_1 + \frac{b}{c}\,\eta_1 + 1}{\sqrt{\xi_1{}^2 + \eta_1{}^2}}$$

$$= \frac{a\xi_1 + b\eta_1 + c}{c\,\sqrt{\xi_1{}^2 + \eta_1{}^2}}.$$

Доказ. У Декартовим координатама јесте једначина задате праве $\xi_1 x + \eta_1 y - 1 = 0$ (дакле $A = \xi_1$, $B = \eta_1$, $C = -1$), а координате задате тачке $x_1 = -\frac{a}{c}$, $y = -\frac{b}{c}$, које кад ставимо у образац на левој страни налазимо горњу вредност за d у тангенциалним координатама.

Једначина круга са полупречником r и средиштем у тачци a, b гласи

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

До ове једначине долазимо узев круг као геометриско место за све тачке x, y, које леже у сталноме одстојању r од извесне сталне тачке a, b.

На основу ове дефиниције круга добијамо његову једначину непосредно из горњег обрасца за растојање двеју тачака, кад замислимо, да је једна од њих стална, а друга покретна и ставимо њихово растојање $= r$ (константно).

Једначина сечице, која пролази кроз две тачке x_1, y_1 и x_2, y_2 једне извесне криве линије гласи

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

При бесконачном приближавању пресечних тачака сечица прелази у положај тангенте у тачци x_1, y_1 и њена једначина добија (услед тога што је

$\lim\limits_{x_1 = x_2} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{dy_1}{dx_1}$) овај вид

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}\,(x - x_1)$$

или

$$(x - x_1)\,\frac{dF}{dx_1} + (y - y_1)\,\frac{dF}{dy_1} = 0$$

према томе, да ли је једначина криве линије

$$y = f(x) \text{ или } F(x,\ y) = 0.$$

Једначина круга са полупречником r и средиштем у тачци $\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c} = 0$ гласи

$$\frac{(\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c})^2}{\mathfrak{c}^2\,(\xi^2 + \eta^2)} = r^2,$$

које се простије може написати и овако

$$(\mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C})^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Ову једначину добијамо, кад узмемо круг као анвелопу правих ξ, η, које леже у подједнаком одстојању r од извесне сталне тачке $\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c} = 0$.

Према оваквој дефиницији круга његова једначина следује непосредно из претходећег задатка, кад предпоставимо, да је права покретна и да њено одстојање од сталне тачке остаје константно ($= r$).

Једначина пресечне тачке двеју тангената ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 једне извесне криве линије гласи

$$\eta - \eta_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1}\,(\xi - \xi_1).$$

При бесконачном приближавању тангената њихова тачка пресека пада на додирну тачку дирке ξ_1, η_1 и њена (т. ј. додирне тачке) једначина добија (услед тога што је

$\lim\limits_{\xi_1 = \xi_2} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{d\eta_1}{d\xi_1}$) овај вид

$$\eta - \eta_1 = \frac{d\eta_1}{d\xi_1}\,(\xi - \xi_1)$$

или

$$(\xi - \xi_1)\,\frac{d\Phi}{d\xi_1} + (\eta - \eta_1)\,\frac{d\Phi}{d\eta_1} = 0$$

према томе, да ли је једначина криве линије

$$\eta = \varphi\,(\xi) \text{ или } \Phi\,(\xi,\ \eta) = 0.$$

Две једначине
$F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$
узете заједно дају координате заједничких (пресечних) тачака линија $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

У случају, да су задате једначине првога степена (да представљају, дакле, две праве линије) њихов заједнички координатни спрег представља тачку пресека тих правих.

Општа једначина линије, која пролази кроз све заједничке тачке двеју задатих линија

$$F_1(x, y) = 0 \text{ и } F_2(x, y = 0$$

јесте

$$F_1(x, y) \pm \lambda F_2(x, y) = 0.$$

Две једначине
$\Phi_1(\xi, \eta) = 0$ и $\Phi_2(\xi, \eta) = 0$
узете заједно дају координате заједничких тангената линија $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$.

У случају, да су задате једначине првога степена (да представљају, дакле, две тачке) њихов заједнички координатни спрег представља праву, која спаја те две тачке.

Општа једначина линије, која има исте тангенте, које су заједничке двема задатим линијама

$$\Phi_1(\xi, \eta) = 0 \text{ и } \Phi_2(\xi, \eta) = 0$$

јесте

$$\Phi_1(\xi, \eta) \pm \lambda \Phi_2(\xi, \eta) = 0$$

Из тога што је константа λ потпуно произвољна видимо, да оваквих линија има безбројно много.

У случају, да су задате једначине првога степена оне представљају праве, а трећа једначина представља праве које пролазе кроз пресек првих двеју.

Да бисмо испитали, да ли извесна тачка x_1, y_1 лежи на линији $F(x, y) = 0$ ми ћемо испитати, да ли је

$$F(x_1, y_1) = 0.$$

У случају, да су задате једначине првога степена, оне представљају тачке, а трећа једначина представља тачку на правој која спаја прве две.

Да бисмо испитали, да ли извесна права ξ_1, η_1 додирује линију $\Phi(\xi, \eta) = 0$ ми ћемо испитати, да ли је

$$\Phi(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

6. Конвексност и конкавност линија.

120. Метода испитивања. — Између координата x_1, y_1 ма које тачке P_1 једне задате линије постоји једначина те линије

$$y_1 = f(x_1),$$

а исто тако и између координата $x_1 + \Delta x_1$, $y_1 + \Delta y_1$, друге које тачка P_2

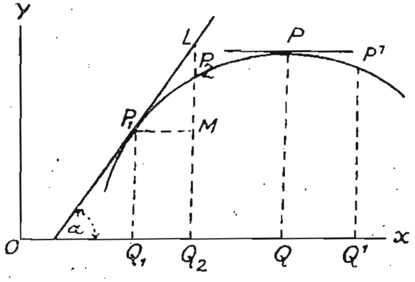
$$y_1 + \Delta y_1 = f(x_1 + \Delta x_1).$$

Ово последње, развијено по Taylor-овој формули, даје

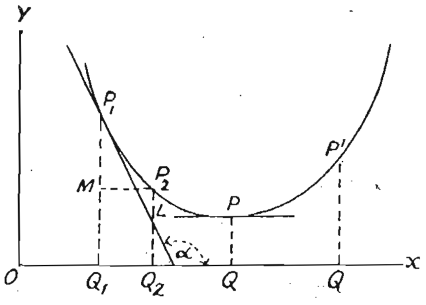
$$y_1 + \Delta y_1 = f(x_1) + f'(x_1)\Delta x_1 + f''(x_1)\frac{\Delta x_1^2}{1.2} + \dots$$

или

$$y_1 + \Delta y_1 = P_2 Q_2 = y_1 + \frac{dy_1}{dx_1}\Delta x_1 + \frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\frac{\Delta x_1^2}{1.2} + \dots$$



Сл. 40.



Сл. 41.

Ако у једначини тангенте у тачци P_1, а то је $y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$, ставимо $x = x_1 + \Delta x_1$ добићемо за ординату тачке L

$$LQ_2 = y_1 + \frac{dy_1}{dx_1}\Delta x_1.$$

На основу ове и горње вредности за $P_2 Q_2$ налазимо

$$P_2 Q_2 - LQ_2 = P_2 L = \frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\frac{\Delta x_1^2}{1.2} + \dots$$

Ако узмемо, да је промена $\Delta x_1 = Q_1 Q_2$ довољно мала, онда сваки члан у Taylor-овом реду превазилази, по својој величини, збир свију следећих чланова. Из тога закључујемо, да је у изразу за $P_2 Q_2 - LQ_2$ или $P_2 L$ једино први члан на десној страни или управо (пошто је $\frac{\Delta x_1^2}{1.2}$ битно положна количина) само $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}$ меродавно по знак леве стране. Ако је дакле $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} > 0$, онда је $P_2 Q_2 > LQ_2$. То значи да су у близини тачке P_1 ординате криве линије веће од (истим апсцисама) одговарајућих ордината тангенте линије у тачци P_1. У томе случају тангента линије лежи вазда између линије и x-осе; ми кажемо, да је линија *конвексна* или *испупчена* наспрам x-осе (в. сл. 41.). Напротив, ако је $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} < 0$, одакле $P_2 Q_2 < LQ_2$, т. ј. ако су ординате у близини тачке P_1 мање од (истим апсцисама) одговарајућих ордината тангенте линије у тачци P_1 линија лежи између њене тангенте и x-осе. Ми кажемо, у томе случају, да је линија *конкавна* или *издубљена* према x-оси (в. сл. 40.).

Ми смо претпоставили, да су ординате положне. У противноме случају горња карактеристика гласи овако: линија показује x-оси конвексну или конкавну страну према томе, да ли је $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} \lessgtr 0$.

Према томе можемо да формулишемо наш ресултат сасвим опште на овај начин: линија је конвексна или конкавна наспрам x-осе, према томе, да ли ордината и друга изводна имају једнак или противан знак.

Међутим треба имати на уму, да овај знак за конвексност и конкавност претпоставља, да је координатни угао оштар. У случају, да је координатни угао туп имали би само да променимо правац једне од координатних оса и на тај начин да претворимо тупоуглу систему у оштроуглу.

Даље ми смо предпоставили, да је, како пре, тако и после посматране тачке P_1, $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ истога знака. Ако се, пак, деси да је пре тачке P_1 друга изводна $\gtrless 0$, а после ње $\lessgtr 0$, онда је у самој тачци P_1 $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=0$. Пролазећи кроз тачку P_1 линија прелази, у таквом случају, из конвексности у конкавност или обрнуто из конкавности у конвексност. Таква тачка P_1, у којој линија мења смисао извијености, зове се *тачка прегиба*. Тачке прегиба једне криве линије налазимо дакле, кад определимо оне вредности x-а и y-а, које чине $\frac{dy^2}{dx^2}=0$ или $=\infty$ и чине да та друга изводна, пролазећи кроз тачку P_1 у исто време знак мења.

Сасвим опште, ако је у изразу

$$P_2L=\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\,\frac{\Delta x_1^{\,2}}{1\,.\,2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\,\frac{\Delta x_1^{\,3}}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{d^ny_1}{dx_1^n}\,\frac{\Delta x_1^{\,n}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}+R$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\frac{d^3y_1}{dx_1^3}=\ldots=\frac{d^{n-1}y_1}{dx_1^{n-1}}=0,$$

дакле

$$P_2L=\frac{d^ny_1}{dx_1^n}\,\frac{\Delta x_1^{\,n}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}+R,$$

онда имамо, да разликујемо ова два случаја.

1) Нека је n парно. Знак од P_2L независан је од знака прираштаја Δx_1. То значи, да су у близини (лево и десно од) тачке P_1 ординате линије или веће или мање од одговарајућих ордината тангенте у тачци P_1. Линија је, дакле, конвексна или конкавна (наспрам x-осе) према томе, да ли је $\frac{d^ny_1}{dx_1^n}\gtrless 0$.

2) Ако је n непарно. Знак од P_2L зависи од знака прираштаја Δx_1. То значи, да, ако су пре (лево од) тачке P_1, ординате линије веће од одговарајућих ордината тангенте у тачци P_1, после (десно од) те тачке оне морају бити мање од ових последњих или обрнуто. У таквоме случају тангента у тачци P_1 сече линију у тој тачци. P_1 је тачка прегиба.

121. Примери. —

1. Пример. Синусна линија

$$y=\sin x.$$

На основу периодности синусне функције закључујемо, да се ова линија састоји из бесконачно много конгруентних делова, као што су $J''P''J'P'O$, $OP_1J_1P_2J_2$ итд.

Све вредности, које ордината може имати, крећу се у границама -1 и $+1$. Највећа вредност ординате је $+1$ и то у тачкама P'', $P_1, P_3\ldots$, а најмања -1 у тачкама $P', P_2,\ldots$ Тако н. пр. почев од $x=0$, па до $x=\frac{\pi}{2}$ видимо, да је $\frac{dy}{dx}=\cos x>0$, а то значи, да у томе размаку функција (ордината) y расте и пошто је за $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx}=0$, а $\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$ одречно ($=-1$) следује, да је у тачци P_1 $\left(\text{т. j. за } x=\frac{\pi}{2}\right)$ ордината у Max. ($=+1$). Напротив почев од $x=\frac{2\pi}{2}$, па до $x=\frac{3\pi}{2}$ закључујемо из тога што је $\frac{dy}{dx}<0$, да функција опада и пошто је за

$$x=\frac{3\pi}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}>0\left(-\sin\frac{3\pi}{2}=+1\right),$$

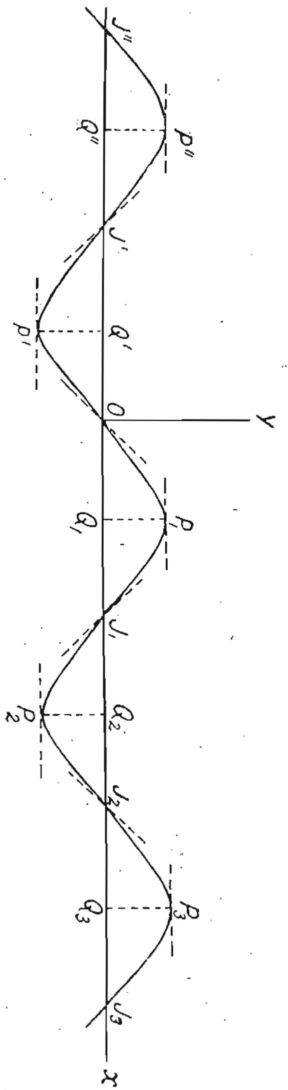
то значи, да је у тачци P_2

$$\left(\text{т. j. за } x=\frac{3\pi}{2}\right)\ y\ \text{Min.}\ (=-1).$$

Из тога што је $\frac{dy}{dx}=\cos x=tg\,\alpha$ (ако означимо са α угао, који дирка чини са x-осом) читамо, да је у тачкама P'', P', P_1, P_2, $P_3,\ldots$ т. j. за $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (где је n ма какав цео број) тангента паралелна са x-осом, док међутим у тачкама J'', J', O, J_1, $J_2,\ldots$, т. j. за $x=2n\,.\,\frac{\pi}{2}$ она чини са x-осом наизменце угле од 45° и 90°+45°.

На основу тога, што су $y=\sin x$ и друга изводна $\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$ вазда противног знака, закључујемо да је синусна линија свуда конкавна наспрам x-осе.

Најзад видимо, да су пресечне тачке линије са x-осом (J'', J', O, J_1, J_2, $J_3,\ldots$) тачке прегиба, пошто је у тима тачкама друга изводна $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, а у исто време и мења знак.



Сл. 42.

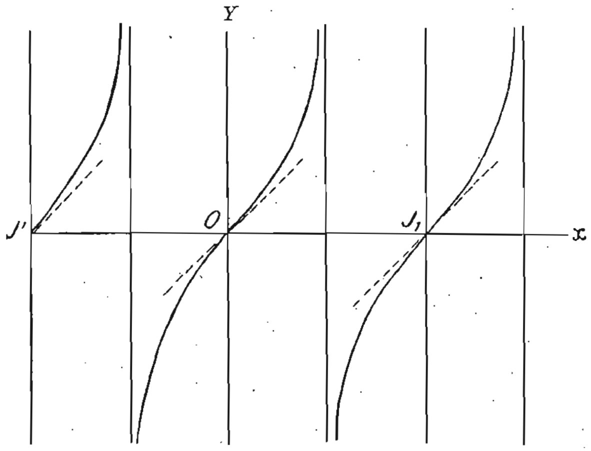
2. Пример. Тангентна линија

$$y=tg\,x.$$

Периодност функције tangens показује нам, да се ова линија састоји из безбројно много конгруентних грана. Ордината може имати све могуће вредности од $-\infty$, па до $+\infty$. Свака грана простире се између двеју паралелних према y-оси, као н. пр. што су праве $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$. Ове праве додирују асимптотно (у бесконачности) поједине гране тангентне линије и то свака права додирује две гране: једну у положноме, а другу у одречноме правцу y-осе. О овоме ћемо се уверити, кад ставимо у

$$y = tg\left(\frac{\pi}{2} - \Delta x\right) = colg\,\Delta x \quad \text{и} \quad y = tg\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) = -\,colg\,\Delta x$$

$\Delta x = 0$. Добићемо за $x = \frac{\pi}{2}$ две вредности ординате $y = \pm\infty$. И тако исто за сваку вредност $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.



Сл. 43.

Из прве изводне $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 x}$ закључујемо, да све гране (или управо њихове тангенте) у пресечној тачци са x-осом праве са x-осом угао од 45°, зато што је за $x = 2n\frac{\pi}{2}$ (дакле $y = 0$) $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = 1$.

На основу тога што су $y = tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\,sin\,x}{cos^3 x}$ једног истог знака за ма какву вредност x-а следује, да је линија свуда конвексна према x-оси.

Даље видимо, да је друга изводна $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ за све оне вредности x-а, за које је $sin\,x = 0$, а то су вредности $x = 2n\frac{\pi}{2}$. И пошто $\frac{d^2y}{dx^2}$ пролазећи кроз нулу мења знак, следује, да су тачке J', O, $J_1, \ldots$, у којима линија сече x-осу, тачке прегиба.

---

7. Додиривање кривих линија.

122. Појам додиривања. — Нека су

$$y = f(x) \text{ и } y = \varphi(x)$$

једначине двеју задатих линија L_1 и L_2.

Претпоставимо, да те две линије имају заједничку тачку $P_0\,(x_0, y_0)$.

Ако придамо апсциси $x_0 = OQ_0$ прираштај $\Delta x_0 = Q_0 Q_1$, добићемо за $x_0 + \Delta x_0 = OQ_1$ две друге тачке: једну P_1 на линији L_1 и другу P_2 на линији L_2.

Одговарајуће ординате јесу

$$P_1 Q_1 = y_1 = f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x_0 + f''(x_0)\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

$$P_2 Q_1 = y_2 = \varphi(x_0 + \Delta x_0) = \varphi(x_0) + \varphi'(x)\,\Delta x_0 + \varphi''(x_0)\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

одакле (с обзиром да је $f(x_0) = \varphi(x_0) = P_0 Q_0$)

$$P_1 P_2 = [f'(x_0) - \varphi'(x_0)]\,\Delta x_0 + [f''(x_0) - \varphi''(x_0)]\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

У случају, да линије L_1 и L_2 имају у тачци P_0 и заједничку тангенту, т. ј. ако је поред

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \text{ још и } f'(x_0) = \varphi'(x_0),$$

онда је

$$P_1 P_2 = [f''(x_0) - \varphi''(x_0)]\frac{\Delta x_0^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

У оваквоме случају кажемо, да између линија L_1 и L_2 постоји *додиривање првога реда* или *степена.*

Ако је у тачци P_0 двеју кривих линија поред $f(x_0) = \varphi(x_0)$ још и $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$, тако дакле, да је

$$P_1 P_2 = [f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)]\frac{\Delta x_0^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

онда кажемо, да се линије у тачци P_0 *додирују у другоме реду.*

Сасвим опште, ако је у заједничкој тачци P_0, т. ј. за исту апсцису x_0 и једнаке ординате

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \text{ још и } f'(x_0) = \varphi'(x_\theta), f''(x_0) = \varphi''(x_0), \ldots f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

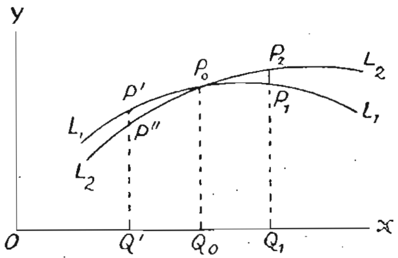
дакле

$$P_1 P_2 = [f^{(n+1)}(x_0) - \varphi^{(n+1)}(x_0)]\frac{\Delta x_0^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n+1)} + \ldots$$

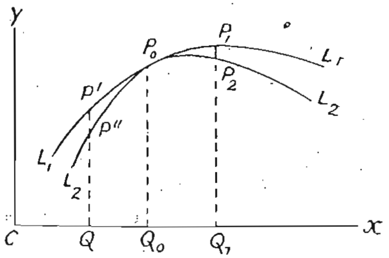
линије L_1 и L_2 *додирују се у n-томе реду.*

Из овога последњег обрасца за $P_1 P_2$ закључујемо:

1) ако је n (ред додиривања) непаран број (1, 3, 5, . . .), да знак од $P_1 P_2$, а то је разлика $P_1 Q_1 - P_2 Q_1$ не зависи од знака промене Δx_0, пошто је тада $n+1$ парно и према томе Δx_0^{n+1} вазда положно. То значи, ако су десно од заједничке тачке P_0 (т. ј. за положно Δx_0) орди-



Сл. 44.



Сл. 45.

нате линије L_1 веће или мање од одговарајућих ордината линије L_2, онда су исто тако и лево од тачке P_0 (т. ј. за одречно Δx_0) ординате од L_1 веће или мање од одговарајућих ордината линије L_2. У близини тачке P_0 обухвата једна линија (н. пр. L_1) ону другу линију (L_2). Види сл. 44.

2) Ако је n парно (2, 4, 6 ...), онда знак од $P_1 P_2$ зависи од знака промене Δx_0, пошто је у томе случају $n+1$ непарно и према томе знак од $\Delta x_0{}^{n+1}$ зависан од тога, да ли је Δx_0 положно или одречно. Ако су, дакле, десно од тачке P_0 (т. ј. за $\Delta x_0 > 0$) ординате линије L_1 мање или веће од одговарајућих ордината линије L_2, онда су лево од тачке P_0 (дакле за $\Delta x_0 < 0$) ординате од L_1 веће или мање од ордината линије L_2. Линије L_1 и L_2 укрштају се у тачци P_0. Види сл. 45.

Закључак: две у непарноме реду додирујуће се криве линије обухватају једна другу, а две у парноме реду додирујуће се линије укрштају се у заједничкој тачци.

I. Теорема. Између две у n-томе реду додирујуће се линије није могуће провући какву трећу линију, која би се са првима додиривала у нижем реду од n. Или: свака крива линија, која пролази између две у n-томе реду додирујуће се линије, мора додиривате ове најмање у истоме реду n или у вишем реду од n.

Закључак. У колико је ред додиривања двеју линија већи, у толико се и оне присније зближавају у додирној тачци.

II. Теорема. Ред додиривања двеју линија не зависи од избора координатне системе.

123. Оскулаторне линије. — Нека је

I) $$y = f(x)$$

једначина једне задате (сталне) криве линије,

II) $$y = \varphi(x, a, b, c, \ldots k)$$

општа једначина једнога низа кривих линија, тако, да свакој линији тога низа одговарају одређене вредности констаната $a, b, c, \ldots k$ и обрнуто.

Ако претпоставимо, да константа $a, b, c, \ldots k$ има $n+1$, онда их можемо определити тако, да линија II, којој те вредности припадају, додирује задату линију I у n-томе реду. Услов, да се линије I и II додирују у n-томе реду јесте, као што знамо,

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = \varphi\ \ (x_0, a, b, c, \ldots k) \\ f'(x_0) = \varphi'\ (x_0, a, b, c, \ldots k) \\ f''(x_0) = \varphi''\ (x_0, a, b, c, \ldots k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0, a, b, c, \ldots k). \end{array}\right\} \qquad \text{(III}$$

Пошто оваквих условних једначина има $n+1$, а толико и произвољних констаната у једначини II, то можемо, на основу једначина III, да определимо сталне количине $a, b, c, \ldots k$ и да учинимо, на тај начин, да извесна линија из низа II додирује задату линију I у n-томе реду.

Као што видимо ред додиривања једне линије II са каквом задатом линијом I зависи од броја произвољних констаната, које се налазе у једначини прве линије, тако да је ред додиривања за 1 мањи од броја тих констаната.

Линија, која према броју констаната, које садржи њена једначина, додирује једну задату линију у највишем степену зове се *оскулаторна линија* ове последње.

124. Примери. —

1. Пример. Нека је

$$y = f(x) \qquad \text{(I}$$

једначина једне задате криве линије,

$$y = m x + b \qquad \text{(II}$$

општа једначина праве линије.

На основу тога, што једначина праве садржи само две константо m и b, закључујемо да права може једну криву линију додиривати највише у првоме реду. Једначину праве, која задату линију додирује у првоме реду, добићемо, кад определимо константе m и b на основу једначина

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = m x_0 + b, \\ f'(x_0) = \dfrac{d}{d x_0}(m x_0 + b) = m. \end{array}\right\} \qquad \text{(III}$$

Одавде следује

$$m = f'(x_0), \quad b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

и према томе једначина оскулаторне праве

$$y = x f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \quad \text{или} \quad y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

а то је једначина тангенте $y - y_0 = \dfrac{d y_0}{d x_0}(x - x_0)$ у тачци x_0, y_0.

Пошто тангента додирује криву линију уопште у првоме, дакле непарноме реду, то следује, да линија лежи сасвим (бар у близини додирне тачке) на једној и истој страни дирке (в. чл. 122.). У изузетним случајима може права да додирује криву линију у вишем реду и онда, ако је ред додиривања паран, тангента сече линију у њиховој заједничкој тачци. У таквоме је случају додирна тачка тангенте у исто доба и тачка прегиба задате линије.

2. *Пример.* Узмимо поред једначине криве линије

I)
$$y = f(x)$$

општу једначину круга у правоуглој системи

II)
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Као што видимо у једначини круга има три константе α, β (координате средишта) и r (полупречник). Према томе можемо да удесимо да круг II додирује задату линију I највише у другоме реду.

Определимо, претходно, круг, који се са линијом I додирује само у првоме реду. Константе α, β и r таквог круга имамо да одредимо на основу једначина

$$f(x_0) = \beta \pm \sqrt{r^2 - (x_0-\alpha)^2},$$

$$f'(x_0) = -\frac{x_0-\alpha}{\sqrt{r^2-(x_0-\alpha)^2}}.$$

Пошто имамо само две једначине, а три непознате, то видимо, да оваквих кругова, који додирују једну криву линију у првоме реду, има бесконачно много. Из последње једначине, коју можемо написати

$$f(x_0) - \beta = -\frac{1}{f'(x_0)}(x_0-\alpha) \quad \text{или} \quad y_0 - \beta = -\frac{d\,x_0}{d\,y_0}(x_0-\alpha)$$

и у којој су x_0, y_0 координате извесне одређене тачке P_0, α и β пак координате средишта круга, дакле координате тачке, која (у овоме случају) није одређена, читамо да средишта (тачке α, β) тих кругова леже на нормали задате линије I у тачци x_0, y_0. Једначина $y_0 - \beta = -\frac{d\,x_0}{d\,y_0}(x_0-\alpha)$, у којој су x_0, y_0 координате једне сталне тачке, α и β пак текуће координате, представља нормалу линије I у тачци x_0, y_0 (види једн. у чл. 101.).

Између ових безбројно много кругова, који задату линију додирују у првоме реду, има један, који ту линију додирује присније, но сви остали кругови, а то је онај што је додирује у другоме реду. Тај круг зовемо *оскулаторним кругом* или *кругом кривине*. Средиште и полупречник тога круга зову се *средиште* и *полупречник кривине*.

Координате средишта и полупречник кривине налазимо из једначина

III)
$$\left\{\begin{aligned} f(x_0) &= \beta \pm \sqrt{r^2-(x_0-\alpha)^2}, \\ f'(x_0) &= -\frac{x_0-\alpha}{\pm\sqrt{r^2-(x_0-\alpha)^2}}, \\ f''(x_0) &= -\frac{r^2}{[r^2-(x_0-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Одавде следује, сасвим опште за ма коју тачку x, y,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{[1+f'(x)^2]\,f'(x)}{f''(x)} = x - \frac{\left[1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]\frac{d\,y}{d\,x}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}, \\ \beta &= f(x) + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)} = y + \frac{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}, \\ r &= \pm\frac{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV}$$

Односно двојакога знака у изразу за полупречник r имамо да приметимо следеће. Из једначине

$$\beta = y + \frac{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}} \quad \text{или} \quad \beta - y = \frac{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$ видимо, да $\beta - y$ и $\frac{d^3\,y}{d\,x^2}$ имају један исти знак, пошто $1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2$, као положна количина, не утиче на знак. Са погледом на значај друге изводне $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ по конвексност односно конкавност криве линије (в. чл. 120.) и имајући на уму, да је β ордината средишта кривине, y ордината додирне тачке, закључујемо из тога што су $\beta - y$ и $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ једног и истог знака, да средиште кривине лежи увек на конкавној страни линије.

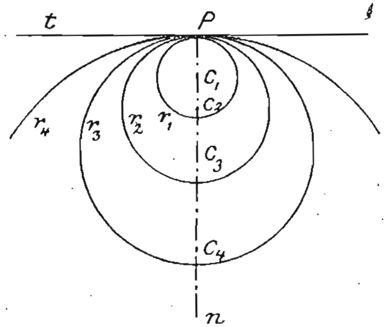
Отуда што оскулаторни круг додирује задату линију у другоме, дакле парноме реду, видимо, да се линија и њен оскулаторни круг укрштају у додирној тачци (в. чл. 122.). У изузетним случајима, кад је додиривање између линије и круга вишега и то непарнога реда, леже линија и њен оскулаторни круг на једној истој страни тангенте у додирној тачци. Тачке, у којима оскулаторни круг додирује задату линију у трећем или још вишем реду, зову се *темена* линије.

На основу вредности, коју смо нашли за нормалу у тачци x, y, а то је $n = y\sqrt{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$ (в. чл. 102.) можемо полупречник кривине да изразимо и на овај начин

$$r = \pm\frac{n^3}{y^3\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}. \quad \text{(V}$$

8. Кривина линија.

125. Кривина круга. — Кривина једнога круга у толико је већа у колико је његов полупречник мањи и обрнуто: кривина круга је у толико мања у колико је његов полупречник већи. Да бисмо ово још боље објаснили упоредимо разне кругове са правом линијом и замислимо ради бољег сравнења, да средишта свију кругова леже на нормали n њихове заједничке тангенти t у тачци P. Тако нам постаје потпуно јасно, да се круг у толико више приближује правој t, т. ј. да је кривина круга у толико мања у колико је његов полупречник r већи. Према овоме је појмљиво, да је кривина круга $=\frac{1}{r}$. Као јединица кривине има се, дакле, сматрати кривина круга са полупречником 1.



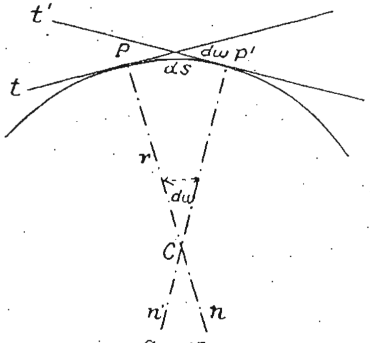
Сл. 46.

Означимо са ω средишни угао за лук s. Онда је $r\omega=s$, дакле кривина круга

I)
$$\frac{1}{r}=\frac{\omega}{s}.$$

Средишни угао ω, то је у исто време и угао, које дирке у крајњим тачкама лука s чине међусобом.

126. Општа дефиниција кривине. — Ми смо показали (у 2. прим. чл. 124.) да се од свију кругова, који са задатом линијом имају једну тачку заједнички, најприсније приближује тој линији њен оскулаторни круг. Према томе је сасвим природно, ако дефинишемо кривину једне линије у извесној тачци као кривину њенога оскулаторног круга у тој тачци. Ми се можемо лако уверити, да се ова дефиниција кривине слаже са горе у чл. 125. под I датом дефиницијом кривине круга. Аналогно дефиницији под I разумемо под кривином ма какве линије у њеној тачци P количник из бесконачно малога угла $d\omega$, које тангенте t и t' у крајњим тачкама бесконачно малог лука $PP'=ds$ међусобом захватају и тога бесконачно малога лука ds. Имамо дакле
$$\frac{1}{r}=\frac{d\omega}{ds} \text{ или } r=\frac{ds}{d\omega}.$$



Сл. 47.

Угао $d\omega$, који две бесконачно приближне тангенте t и t' или што је једно исто угао, које две бесконачно приближне нормале n и n' заклапају, зове се *контигентни угао*. Средиште C кривине можемо сматрати као пресечну тачку нормала n и n' у двема бесконачно приближним тачкама P и P' криве линије.

Ако означимо са ω угао, који тангента линије у тачци P чини са x-осом, са ω' угао, који тангента у тачци P' чини са x-осом, онда је $\omega'-\omega=d\omega$ и пошто је $tg\ \omega=\frac{dy}{dx}$, дакле $\omega=arc\ tg\frac{dy}{dx}$, то је контигентни угао
$$d\omega=d\ arc\ tg\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Доцније доказаћемо, да је
$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

На основу ових вредности за $d\omega$ и ds, а према горњој једначини следује за полупречник кривине
$$r=\frac{ds}{d\omega}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$
дакле исти израз, који смо већ нашли за полупречник оскулаторног круга (в. једн. у чл. 124.). Овим смо доказали, да је круг кривине идентичан са оскулаторним кругом.

Примедба. Из обрасца за r видимо, да је у тачкама прегиба, у којима је, као што знамо $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, полупречник кривине $r=\infty$, а кривина дакле $\frac{1}{r}=0$. Ово се потпуно слаже са нашим схватањем, да у тачкама прегиба тангента има најмање три (бесконачно приближне) тачке заједнички са кривом линијом (в. на крају 1. примера у чл. 124.). Оскулаторни круг, који има такође само три (бесконачно приближне) тачке заједнички са кривом линијом, претвара се, дакле у тачци прегиба у праву линију (тангенту).

127. Продужење. — Ако заменимо промењљиву x другом каквом промењљивом t, онда имамо по правилима Диференциалног Рачуна да ставимо
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}$$

и једначине IV) у чл. 124. добијају, према томе, овај општији вид

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= x - \frac{(d x^2 + d y^2)\, d y}{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x},\\ \beta &= y + \frac{(d x^2 + d y^2)\, d x}{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x},\\ r &= \pm \frac{[d x^2 + d y^2]^{\frac{3}{2}}}{d x\, d^2 y - d y\, d^2 x}.\end{aligned}\right\}$$

Тако н. пр. добићемо полупречник кривине за косоугле координате, кад ставимо

$$x = X + Y \cos \vartheta, \qquad\qquad y = Y \sin \vartheta$$

(за случај да обе системе имају исти почетак и заједничку x-осу), дакле

$$d x = d X + d Y \cos \vartheta, \qquad\qquad d y = d Y \sin \vartheta,$$
$$d^2 x = d^2 X + d^2 Y \cos \vartheta, \qquad\qquad d^2 y = d^2 Y \sin \vartheta,$$

које, код субституишемо у општи образац за r и узмемо X за прапромењливу (ставимо дакле $d^2 X = 0$), даје овај израз

$$r = + \frac{[d X^2 + d Y^2 + 2\, d X\, d Y \cos \vartheta]^{\frac{3}{2}}}{d X\, d^2 Y \sin \vartheta}$$

$$= \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{d Y}{d X}\right)^2 + 2 \frac{d Y}{d X} \cos \vartheta\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 Y}{d X^2} \sin \vartheta}.$$

Да би добили полупречник кривине за поларне координате ставимо

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad\qquad y = \varrho \sin \varphi$$

и узмимо φ за прапромењливу. Из

$$d x = \cos \varphi\, d \varrho - \varrho \sin \varphi\, d \varphi, \qquad d y = \sin \varphi\, d \varrho + \varrho \cos \varphi\, d \varphi$$
$$d^2 x = \cos \varphi\, d^2 \varrho - 2 \sin \varphi\, d \varrho\, d \varphi - \varrho \cos \varphi\, d \varphi^2,$$
$$d^2 y = \sin \varphi\, d^2 \varrho + 2 \cos \varphi\, d \varrho\, d \varphi - r \sin \varphi\, d \varphi^2$$

и на основу горњег општег образца за r налазимо

$$r = \pm \frac{[d \varrho^2 + \varrho^2\, d \varphi^2]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2\, d \varphi^3 + 2\, d \varrho^2\, d \varphi - \varrho\, d^2 \varrho\, d \varphi} = \pm \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d \varrho}{d \varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2 \left(\frac{d \varrho}{d \varphi}\right)^2 - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d \varphi^2}}.$$

Одавде следује, да у тачкама прегиба мора бити

$$\varrho^2 + 2 \left(\frac{d \varrho}{d \varphi}\right)^2 - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d \varphi^2} = 0.$$

128. Примери. —

1. *Пример.* Општа једначина линија другога степена:

$$y^2 = 2 p x - (1 - \varepsilon^2) x^2.$$

Овде је

$$\frac{d y}{d x} = \frac{p - (1 - \varepsilon^2) x}{y}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-(1 - \varepsilon^2) y - [p - (1 - \varepsilon^2) x] \frac{d y}{d x}}{y^2}$$

$$= \frac{-(1 - \varepsilon^2) y^2 - [p - (1 - \varepsilon^2) x]^2}{y^3}$$

$$= \frac{-(1 - \varepsilon^2) y^2 - p^2 - (1 - \varepsilon)^2 x^2 + 2 p (1 - \varepsilon^2) x}{y^3}$$

$$= \frac{-p^2 - (1 - \varepsilon^2) [y^2 - 2 p x + (1 - \varepsilon^2) x^2]}{y^3} = -\frac{p^2}{y^3}$$

и према томе полупречник кривине

$$r = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{p - (1 - \varepsilon^2) x}{4}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \pm \frac{(p^2 + \varepsilon^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

или на основу обрасца V чл. 124. простије

$$r = \pm \frac{n^3}{p^2}.$$

2. *Пример. Елипса и хипербола:*

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Имамо

$$\frac{d y}{d x} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$y^2 = \mp \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} = \mp \frac{b^2}{b^2} \overline{a^2 - x^2}.$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{y - x \frac{d y}{d x}}{y^2} = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{y \pm \frac{b^2 x^2}{a^2 y}}{y^2}$$

$$= -\frac{b^2 (b^2 x^2 \pm a^2 y^2)}{a^4 y^3} = -\frac{a^2 b^4}{a^4 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

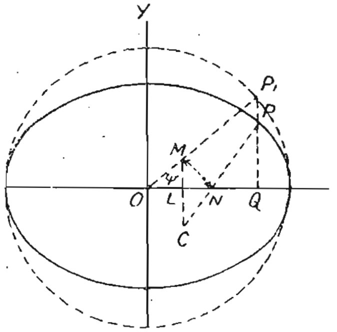
и према томе за координате средишта и полупречник кривине

$$\alpha = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad \beta = -\frac{c^2 y^3}{b^4}, \qquad r = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4},$$

где је за елипсу $c^2 = a^2 - b^2$, а за хиперболу $c^2 = a^2 + b^2$.

Помоћу вредности за α врло је лако конструкцијом определити средиште, па дакле и полупречник кривине. Покажимо за елипсу.

Из једначине нормале у тачци $P(x, y)$, а то је $Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x)$ налазимо, кад ставимо $Y = 0$ апсцису пресечне тачке N нормале и x-осе, дакле $ON = \frac{c^2 x}{a^2}$. На тај начин можемо да напишемо $\alpha = ON \,.\, \left(\frac{x}{a}\right)^2$ или $\alpha = ON \; \cos^2 \psi$, ако означимо за ψ екцентричну аномалију $\sphericalangle P'OQ$ за тачку P. Спустимо из N управну NM по OP' и из M управну ML на x-осу. Из слике читамо, да је $OM = ON \,.\, \cos\psi$, $OL = OM \,.\, \cos\psi = ON \,.\, \cos^2\psi$, дакле $\alpha = OL$. Према томе је дакле тачка C у којој ML сече нормалу PN елипсе средиште, а PC полупречник кривине за тачку P.



Сл. 48.

3. Пример. Парабола:

$$y^2 = 2\,p\,x.$$

Из

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{p}{y}, \qquad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\,\frac{p^2}{y^3}$$

(в. 1. пример за $\varepsilon = 1$) и на основу једн. IV чл. 124. добијамо

$$\alpha = 3\,x + p, \quad \beta = -\,\frac{y^3}{p^2}, \quad r = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{n^3}{p^2}.$$

Помоћу ових вредности врло је лако конструисати средиште и полупречник кривине.

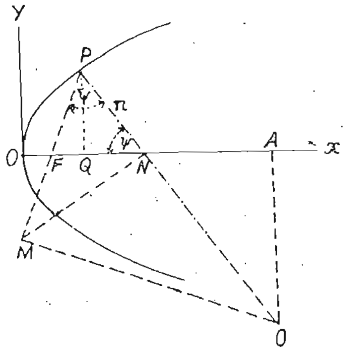
Вредност за α показује на први поглед, да је средиште C кривине пресек управне према x-оси у тачци A, која се налази у одстојању $OA = 3\,.\,OQ + p$ и нормале у задатој тачци P.

До истога ресултата долазимо, кад узмемо вредност

$$r = n\left(\frac{n}{p}\right)^2 = \frac{n}{\cos^2\psi},$$

ако означимо са ψ угао, који нормала чини са x-осом, а то је по познатоме својству параболе у исто време и угао, који жижни зрак PF чини са нормалом у тачци P и пошто подигнемо у N управну NM на PN, а у M управну MC на PF добијамо средиште кривине у тачци C. Из слике видимо, да је $PM = \frac{n}{\cos\psi}$,

$$PC = \frac{PM}{\cos\psi} = \frac{n}{\cos^2\psi} = r.$$



Сл. 49.

4. Пример. Верижница:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Из $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = y$ следују ове вредности

$$\alpha = x - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,y, \quad \beta = 2\,y, \quad r = y^2 = n.$$

Полупречник кривине је дакле раван нормали. Помоћу последњег ресултата и то, кад га напишемо у виду поступне сразмере $1 : y = y : n$ није тешко конструисати нормалу, па дакле и средиште кривине (имајући при томе на уму, да ово последње лежи на конкавној страни линије).

5. Пример. Проста циклоида:

$$x = a\;(\omega - \sin\omega), \qquad y = a\,(1 - \cos\omega)$$

(в. чл. 107. пример 6.).

Из

$$\frac{d\,x}{d\,\omega} = a\,(1 - \cos\omega), \qquad \frac{d\,y}{d\,\omega} = a\,\sin\omega,$$

$$\frac{d^2\,x}{d\,\omega^2} = a\,\sin\omega, \qquad \frac{d^2\,y}{d\,\omega^2} = a\,\cos\omega$$

следује

$$\left(\frac{d\,x}{d\,\omega}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,\omega}\right)^2 = 2\,a^2\,(1 - \cos\omega), \quad \frac{d\,x}{d\,\omega}\,\frac{d^2\,y}{d\,\omega^2} - \frac{d\,y}{d\,\omega}\,\frac{d^2\,x}{d\,\omega^2} = -\,a^2\,(1 - \cos\omega)$$

и на основу општих образаца у чл. 127.

$$\alpha = x + 2\sqrt{2\,a\,y - y^2}, \quad \beta = -\,y, \quad r = 2\sqrt{2\,a\,y} = 2\,n.$$

Ова последња два ресултата могу да нам послуже, да врло лако определимо конструкцијом средиште и полупречник кривине.

6. Пример. Кардиоида:

$$\varrho = a\;(\cos\varphi \pm 1)$$

(в. сл. 30.).

Из

$$\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = -\,a\,\sin\varphi, \qquad \frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} = -\,a\,\cos\varphi$$

а на основу обрасца у чл. 127. налазимо

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{2\,a}\;\sqrt{a\,(\cos\varphi \pm 1)} = \frac{2}{3}\,\sqrt{2\,a\,\varrho}\,.$$

или кад сравнимо са дужином поларне нормале (чл. 106.)

$$n = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi}\right)^2} = \sqrt{2\,a}\,\sqrt{a\,(\cos\varphi \pm 1)} = \sqrt{2\,a\,\varrho}$$

добићемо, да је

$$r = \frac{2}{3}\,n.$$

7. *Пример. Лемниската:*

$$\varrho^2 = 2\,a^2 \cos 2\,\varphi$$

(в. чл. 107. пример 7.).

Из
$$\varrho \frac{d\,\varrho}{d\varphi} = -2\,a^2 \sin 2\,\varphi,$$

$$\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = -\frac{2\,a^2 \sin 2\,\varphi}{\varrho}, \qquad \varrho\,\frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} + \left(\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi}\right)^2 = -4\,a^2 \cos 2\,\varphi,$$

одакле
$$\varrho\,\frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} = -4\,a^2 \cos 2\,\varphi - \frac{4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2}$$
следује

$$r = \frac{\left[2\,a^2 \cos\,2\,\varphi + \frac{4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{2\,a^2 \cos 2\,\varphi + \frac{8\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2} + \frac{4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2} + 4\,a^2 \cos 2\,\varphi}$$

$$= \frac{[4\,a^4 \cos^2 2\,\varphi + 4\,a^4 \sin^2 2\,\varphi]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^3\left[6\,a^2 \cos\,2\,\varphi + 12\,\frac{a^4 \sin^2 2\,\varphi}{\varrho^2}\right]} = \frac{4\,a^4}{3\,\varrho^3\left[\cos\,2\,\varphi + 2\,\frac{a^2 \sin^2\,2\,\varphi}{\varrho^2}\right]}$$

$$= \frac{2\,a^2}{3\,\varrho}.$$

8. *Пример. Логаритамска спирала:*

$$\varrho = b^{\varphi}$$

(в. чл. 107. пример 11.).

Овде је
$$\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = b^{\varphi}\,l\,b = \varrho\,l\,b, \qquad \frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} = b^{\varphi}\,(l\,b)^2 = \varrho\,(l\,b)^2$$

и према томе полупречник кривине

$$r = \varrho\,\sqrt{1 + (l\,b)^2}.$$

Исту вредност има и поларна нормала $n = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi}\right)^2}$. На основу тога и познате конструкције тангенте, па дакле и нормале, можемо лако наћи средиште кривине.

9. Еволута и еволвента.

129. Дефиниција. — Средишта кривине једне линије образују линију, која се зове *еволута* оне прве, а ова опет њена *еволвента.*

Једначину еволуте једне задате линије добићемо, кад помоћу једначина III другог примера у чл. 124. елиминујемо x и y. Услед тога, што су вредности за $\frac{d\,y}{d\,x}$ и $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ једне исте узели их из једначине задате линије или из једначине њенога оскулаторног круга у додирној тачци, можемо поменуте једначине III, које су нам служиле за опредељавање координата α и β, да заменимо овима

$$\left.\begin{aligned} y &= f\,(x), \\ (x-\alpha) + (y-\beta)\,\frac{d\,y}{d\,x} &= 0 \\ 1 + (y-\beta)\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Елиминовањем текућих координата x и y помоћу ових једначина налазимо једначину геометрискога места средишта кривине за све тачке задате линије $y = f\,(x)$, а то је једначина њене еволуте у координатама α и β.

130. Закључци. — Из последње две једначине чл. 129. налазимо координате средишта кривине

$$\alpha = x - \frac{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}\,\frac{d\,y}{d\,x}, \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$

(в. чл. 124.), које на основу тога што је

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}, \; tg\,\omega = \frac{d\,y}{d\,x},$$

где је r полупречник кривине, а ω угао, који дирка у тачци x, y чини са x-осом, можемо написати простије

$$\alpha = x - r \sin\omega, \qquad \beta = y + r \cos\omega.$$

Пошто су све ове количине зависне од x, то добијамо диференциалењем

$$d\alpha = dx - r\cos\omega\,d\omega - \sin\omega\,dr, \qquad d\beta = dy - r\sin\omega\,d\omega + \cos\omega\,dr.$$

На основу тога што је

$$dx = ds\,\cos\omega, \qquad dy = ds\,\sin\omega,$$

ако означимо са $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ диференциал лука можемо написати последње обрасце

$$d\alpha = \cos\omega\,[ds - r\,d\omega] - \sin\omega\,dr, \quad d\beta = \sin\omega\,[ds - r\,d\omega] + \cos\omega\,dr,$$

које се опет услед једначина у чл. 126. скраћује на

$$d\alpha = -\sin\omega\,dr, \quad d\beta = \cos\omega\,dr.$$

Одавде следује

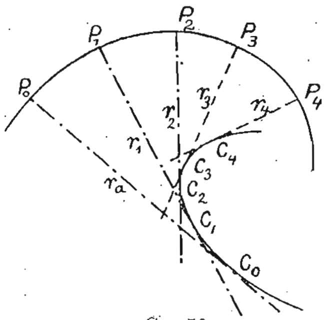
$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\,cotg\,\omega \text{ или } \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{d\,y}{d\,x}} = -\frac{d\,x}{d\,y}$$

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = dr^2, \text{ дакле } dr = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}.$$

Имајући на уму, да је $-\frac{dx}{dy}$ угловни сачинитељ нормале задате линије у тачци x, y, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ угловни сачинитељ тангенте њене еволуте у тачци α, β (средишту кривине за тачку x, y) закључујемо, да је нормала задате линије у исто време тангента еволуте и обрнуто тангента задате линије нормала еволуте. Према томе можемо еволуту једне линије сматрати као анвелопу нормала те линије и полазећи са тога гледишта наћи на познати начин једначину еволуте. За ту циљ треба узети једначину нормале задате линије и представити је као функцију једног или два параметра и поступити према упутствима чл. 111. — 113.

Из последњег израза читамо, да је диференциал полупречника кривине задате линије раван диференциалу лука њене еволуте. Означимо са $d\sigma$ диференциал лука еволуте, т. ј. ставимо $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$, па ћемо добити, на основу тога што је $d\sigma = dr$, једначину $\sigma = r + Const.$ Пошто ова једначина важи за ма какве две одговарајуће вредности лука и полупречника кривине, н. пр. $\sigma_0 = r_0 + Const.$ следује, кад такве две једначине одузмемо једну од друге $\sigma - \sigma_0 = r - r_0$. Ако будемо мерили дужину лукова почев од извесне тачке C_0 (од средишта кривине за које је полупречник $= r_0$), тако да је $\sigma_0 = 0$ имаћемо

$$\sigma = r - r_0.$$



Сл. 50.

Лук еволуте раван је разлици из полупречника кривине њене еволвенте у тачкама, које одговарају крајњим тачкама тога лука. Или: дужина извеснога лука (н. пр. $C_0\,C_3$) еволуте, који лежи између два полупречника кривине ($P_0\,C_0 = r_0$ и $P_3\,C_3 = r_3$) њене еволвенте равна је разлици из дужина тих полупречника (т. ј. лук $C_0\,C_3 = r_3 - r_0$).

Замислимо у ма којој тачци еволуте једне задате линије, н. пр. у тачци C_3 један конац дужине r_3 утврђен и замислимо, да се тај конац намотава по еволути тако, да вазда остаје затегнут, онда ће његов крај, који је у почетку био у тачци P_3, описивати задату линију, т. ј. еволвенту линије $C_0\,C_1\,C_2\,C_3\ldots$ Није тешко увидети, да и ако једној задатој линији одговара увек само једна еволута обрнуто једна линија има бесконачно много еволвената, јер све линије, које имају то својство, да њихове тангенте секу нормале задате линије под правим углом јесу еволвенте те линије. Но ово, да свака линија има бесконачно много еволвената, већ је и по томе јасно, што је дужина конца $P_3\,C_3 = r_3$, који обмотавањем по задатој линији $C_0\,C_1\,C_2\,C_3\ldots$ производи еволвенту $P_0\,P_1\,P_2\,P_3\ldots$, потпуно произвољна. Продужењом или скраћивањем тога конца добијамо безбројно много еволвената за једну исту линију. Све су те еволвенте међусобом паралелне.

131. Примери. —

1. *Пример.* За *елипсу* и *хиперболу* нашли смо за координате средишта кривине

$$\alpha = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad \beta = -\frac{c^2 y^3}{b^4}$$

(в. 2. пример чл. 128.). Одавде следује

$$x^2 = \left(\frac{a^4\,\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad y^2 = \left(\frac{b^4\,\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

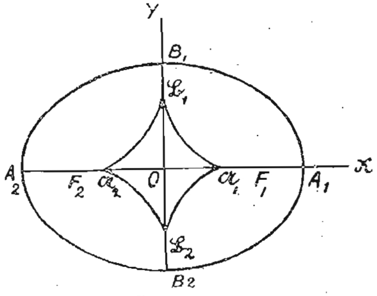
које кад ставимо у једначину задате линије $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ даје једначину еволуте

$$\left(\frac{a\,\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{b\,\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

или, ако означимо $\frac{c^2}{a} = p$, $\frac{c^2}{b} = q$ можемо је написати

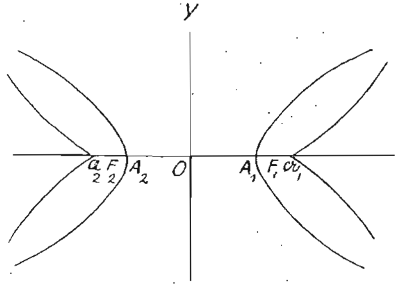
$$\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{\beta}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

За елипсу једначина еволуте гласи дакле $\left(\frac{a\,\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\,\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. Из ове једначине закључујемо, да се линија састоји из четири конгруентна и наспрам координатних оса симетрична дела.



Сл. 51.

На основу тога што је за $\beta = 0$, $\alpha = \frac{c^2}{a}$, дакле $\alpha < c$ следује, да ова линија сече x-осу у тачкама $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, које леже између средишта и жижа елипсе. Даље видимо, да је за $\alpha = 0, \beta = \frac{c^2}{b}$. Пошто ово може, према случају, да буде $\gtreqless b$ и то $\beta = \frac{c^2}{b} \gtreqless b$ према томе, да ли је $c^2 = a^2 - b^2 \gtreqless b^2$, т. ј. према томе, да ли је $a \gtreqless b\sqrt{2}$ то значи, да еволута може лежати једним делом изван или сасвим у елипси. За $a = b\sqrt{2}$ крајње такке $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ еволуте на y-оси падају на темена B_1 и B_2 мале осе. — Линија је свуда конвексна наспрам x-осе.



Сл. 52.

За хиперболу имамо једначину еволуте

$$\left(\frac{a\,\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\,\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Као и код елипсе, тако и овде састоји се линија из четири конгруентна и наспрам координатних оса симетрична дела. Еволута се састоји из две у бесконачност простируће се гране, конвексне наспрам x-осе. Тачке $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, у којима линија сече x-осу, леже у одстојању $\frac{c^2}{a}$ од средишта хиперболе, дакле даље од жижа F_1 и F_2.

2. *Пример.* За *параболу* нашли смо

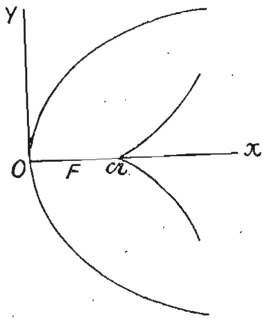
$$\alpha = 3\,x + p, \qquad \beta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

(в. 3. пример чл. 128.), одакле

$$x = \frac{\alpha - p}{3}, \qquad y^2 = (p^2\,\beta)^{\frac{2}{3}},$$

које кад ставимо у једначину параболе $y^2 = 2\,p\,x$ налазимо једначину еволуте

$$(p^2\,\beta)^{\frac{2}{3}} = 2\,p\,\frac{\alpha - p}{3} \text{ или } \beta^2 = \frac{8}{27\,p}(\alpha - p)^3.$$



Сл. 53.

Линија се састоји из два бесконачна наспрам x-осе конвексна и симетрична дела. Ако узмемо тачку 𝔄, у којој еволута сече x-осу и која лежи у одстојању p од темена параболе, за нов почетак координата, т. ј. ако заменимо $\alpha - p$ са α, једначина еволуте добија овај простији вид

$$\beta^2 = \frac{8}{27\,p}\,\alpha^3.$$

Ми знамо, да је ово једначина Најлове параболе (в. 5. пример у чл. 107.).

3. *Пример.* Код *просте циклоиде* имамо

$$\alpha = x + 2\sqrt{2\,a\,y - y^2}, \qquad \beta = -y$$

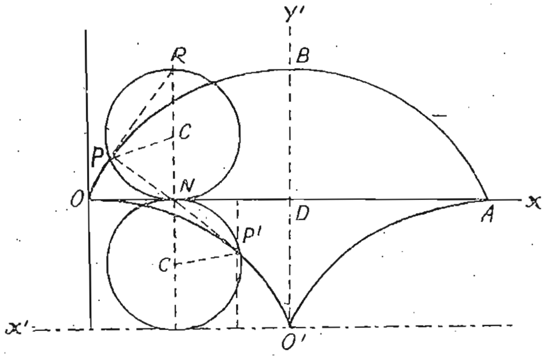
(в. 5. пример чл. 128.), одакле

$$x = \alpha - 2\sqrt{-2\,\alpha\,\beta - \beta^2}, \qquad y = -\beta$$

и кад ставимо те вредности у једначину циклоиде $x = a\,.\,arc\,cos\,\frac{a - y}{a} - \sqrt{2\,a\,y - y^2}$ добићемо једначину еволуте

$$\alpha = a\,.\,arc\,cos\,\frac{a + \beta}{a} + \sqrt{-2\,a\,\beta - \beta^2}.$$

Није тешко доказати, да је еволута циклоиде такође циклоида и шта више конгруентна задатој.



Сл. 54.

Да бисмо једначину еволуте довели на исти вид, у коме је једначина задате циклоиде, узмимо испод x-осе у одстојању $2\,a$ нову x'-осу, DB за y'-осу, а тачку O' дакле за координатни почетак. Услед тога што је $OD = a\,\pi$ имамо следеће трансформационе једначине

$$\alpha = a\,\pi - x',$$
$$\beta = y' - 2\,a$$

и према томе једначину

еволуте у новој системи

$$a\,\pi - x' = a\,.\,arc\,cos\,\frac{y' - a}{a} + \sqrt{2\,a\,(2\,a - y') - (y' - 2\,a)^2},$$

одакле

$$x' = a\left[\pi - arc\ cos\ \frac{y' - a}{a}\right] - \sqrt{2\,a\,y' - y'^2}$$

или најзад

$$x' = a\,.\,arc\,cos\,\frac{a - y'}{a} - \sqrt{2\,a\,y' - y'^2}.$$

Кад сравнимо ову једначину са једначином задате циклоиде OBA уверићемо се, да су те две линије идентичне [и да се само у положају наспрам координатних оса x, y разликују.

Исти ресултат, да је еволута просте циклоиде једна и то првој конгруентна циклоида, показало би нам чисто геометриско расматрање узев у обзир, да је полупречник кривине задате циклоиде, н. пр. у тачци P, $r = 2\,.\,PN = PP'$ (в. 5. пример чл. 128.).

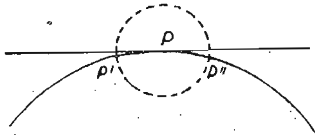
На слични начин могли би доказати, да је еволута епициклоиде такође епициклоида, која са задатом стоји у односу, да је $a_1 : b_1 = a : b$, где a_1 и b_1 имају за еволуту исти значај, који a и b за задату линију.

Из ове последње примедбе следује онда по себи, да је и еволута кардиоиде такође кардиоида, пошто се ова линија можа сматрати као један особени облик епициклоиде.

4. *Пример.* Код *логаритамске спирале* нашли смо, да је полупречник кривине = нормали. Из тога није тешко закључити, да је еволута логаритамске спирале таква иста линија.

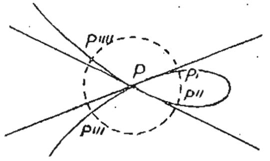
10. Особене тачке кривих линија.

132. Појам. — Замислимо око тачке P извесне криве линије описан круг са бесконачно малим полупречником. Тај круг сећиће задату линију уопште у двема тачкама P' и P'' и то тако, да је $\sphericalangle P'PP''$ бесконачно мало различан од 180^0. Оне тачке криве линије, које имају то својство, да из њих са бесконачно малим полупречником описани круг не сече линију у двема тачкама или ако је сече, а оно не тако, да је $lim \sphericalangle P'PP'' = 180^0$, зовемо *особеним тачкама.*

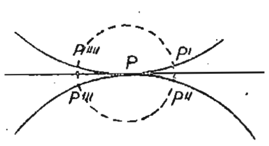


Сл. 55.

133. Многоструке тачке. — Под *многоструким тачкама* разумемо такве тачке око којих са бесконачно малим полупречником описани круг сече линију у више од две тачке. Многоструке тачке постају услед укрштања или додиривања више разних грана криве линије. У таквим



Сл. 56.



Сл. 57.

тачкама линија има више тангената, које се пак, у извесним случајима, могу и поклапати. Према броју могућих тангената каже се, да је тачка двострука, трострука, ... n-струка.

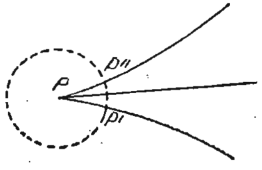
Примери.

1. Код строфоиде (в. сл. 33. и 34. у чл. 110.) је почетак координата двострука тачка. У тој тачци линија има две тангенте. Код праве строфоиде јесте у почетку координата $\frac{dy}{dx} = \pm 1$. Тангенте чине са x-осом угле од 45^0 и $90^0 + 45^0$ и стоје, дакле, управно једна према другој.
2. Декартов лист (в. сл. 32. у чл. 110.) има у почетку координата двоструку тачку. Тангенте линије су x- и y-оса.
3. Линија $y = \pm (x - b) \sqrt{A(x-a)}$ има двоструку тачку $x = b$, $y = 0$ на x-оси. У тој тачци је $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{A(b-a)}$.
4. Паскалова линија за случај, да је $a > b$ има у почетку координата двоструку тачку са двема тангентама.
5. Лемниската (в. сл. 28. у чл. 107.) има у почетку координата двоструку тачку у којој тангенте стоје управно једна према другој: $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.
6. Кад конхоиде за коју је $a < b$ имамо у тачци $x = 0$, $y = -a$ две тангенте линије, па дакле двоструку тачку.
7. Код линије шестога степена $[x^2 + y^2 + \frac{b}{\sqrt{2}}(x+y)]^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2 y^2$ тачка A са координатама $x = \frac{b}{\sqrt{2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ јесте четворострука. Линија има у тој тачци четири разне тангенте. Осим тога постаје код ове линије две двоструке тачке $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ у којима линија има по две тангенте.

За случај, да је $b = 0$ почетак координата је четворострука тачка, али само са две тангенте.

134. Повратне тачке. — Ако круг, који је из тачке P описан са бесконачно малим полупречником, сече линију у двема тачкама P' и P'', али тако, да се $\sphericalangle P'PP''$ само за бесконачно мало разликује од нуле, онда кажемо, да је P *повратна тачка*.

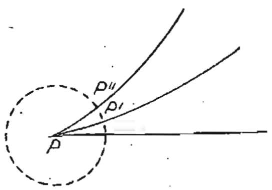
У повратној тачци једне криве линије граниче и додирује се две гране, тако дакле, да у тој тачци обе гране линије имају једну исту тангенту.



Сл. 58.

Повратне тачке делимо на *повратне тачке прве врсте* и *повратне тачке друге врсте*. Код првих леже гране на разним странама њихове заједничке тангенте (в. сл. 58.), а код других на једној истој страни дирке (в. сл. 59.).

Ако је P (a, b) повратна тачка, онда за $x = a - h$, где је h бесконачно мала количина, добијамо или две стварне или две уображене вредности ординате, док за $x = a + h$ оне постају на против или уображене или стварне. За $x = a$ имамо две стварне и једнаке вредности како за y тако и за $\frac{dy}{dx}$. Да ли је P повратна тачка прве или друге врсте можемо оценити помоћу знака, који $\frac{d^2 y}{dx^2}$ има у близини тачке P, т. ј. на основу конвексности или конкавности линије у близини повратне тачке.



Сл. 59.

Примери.

Повратне тачке прве врсте и то у почетку координата имају 1. цисоида, 2. Најлова парабола, 3. Кардиоида. Код тих линија је x-оса тангента у повратној тачци. 4. Конхоида, за коју је $a = b$, има такође једну повратну тачку прве врсте, а то у тачци A ($x = 0$, $y = -a$). Овде је y-оса тангента линије у повратној тачци.

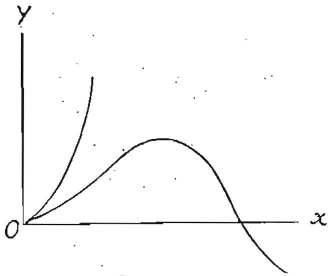
Као пример за повратне тачке друге врсте узмимо 5. линију $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$. Дискусија ове једначине показује, да линија има изглед у сл. 60. Почетак координата је повратна тачка друге врсте. x-оса је тангента линије у тој тачци.

Да је 0 заиста повратна тачка видимо из тога што за $x = +h$ y има две стварне, за $x = 0$ две једнаке ($= 0$) вредности, док за $x = -h$ y постаје имагинарно.

На основу тога, што је

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4} \sqrt{x} \quad \text{за } x = 0 \text{ положно } \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 2\right)$$

закључујемо, да су у тачци O обе гране линије конвексне према x-оси, да је, дакле, O повратна тачка друге врсте.



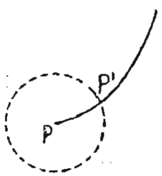
Сл. 60.

135. Одвојене тачке. — Под *одвојеном тачком* једне криве линије разумемо такву тачку, која (и ако координате њене задовољују једначину линије) не стоји у вези са осталим тачкама те линије. Тачка $P(a, b)$ је одвојена, кад су ординате, како за $x = a + h$, тако и за $x = a - h$, т. ј. за сваку од a бесконачно мало различну апсцису, имагинарне. Круг са бесконачно малим полупречником описан из одвојене тачке не сече линију никако.

Пример. Линија $y = \pm (x - a) \sqrt{A(x-c)}$, где је $a < c$ има одвојену тачку $x = a$, $y = 0$. За свако друго од a бесконачно мало различно x ордината y је имагинарна. То је доказ, да тачка $x = a$, $y = 0$ не стоји у вези ни са којом тачком линије.

136. Крајне тачке. За једну тачку P кажемо, да је *крајна*, кад око ње описани круг са бесконачно малим полупречником сече линију само у једној тачци P'. У таквој тачци свршава се једна грана линије.

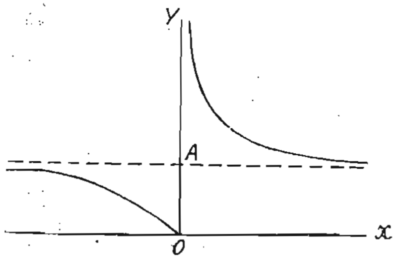
Пример: $y = e^{\frac{1}{x}}$



Сл. 61.

Одавде читамо, да је за $x = 0$, $y = \infty$ и да у колико x расте y опада, тако, да за $x = \infty$ постоје $y = 1$.

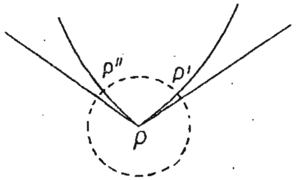
За одречне апсцисе, почев од $x = -0$, па до $x = -\infty$ ординате расту од $y = e^{-\frac{1}{0}} = 0$, па до $y = 1$.



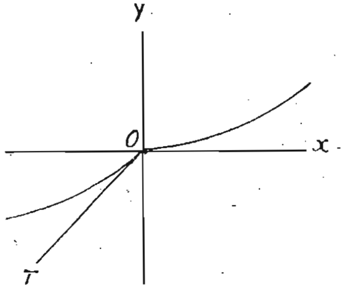
Сл. 62.

Из овога видимо, да је почетак координата крајна тачка у којој се ова друга грана линије свршава. Даље закључујемо, да је права паралелна са x-осом у одстојању $OA = 1$ асимптота за обе гране.

137. Тачке преламања. — Тачке, око којих са бесконачно малим полупречником описани круг сече линију у двема тачкама, али тако, да је $0 < \measuredangle P'PP'' < 180^0$ зову се *тачке преламања*. У таквим тачкама свршавају се две гране линије и свака грана има своју тангенту.



Сл. 63.



Сл. 64.

Пример.

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

На основу тога, што је за $x = 0$ и $y = 0$, закључујемо да линија пролази кроз почетак координата. Да бисмо добили тангенту линије у тој тачци треба узети $\frac{dy}{dx}$ или што је једно исто $\frac{y}{x}$ за $x = 0$ и $y = 0$. Из једначине следује

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Пошто овај израз има две вредности и то за

$$x = +h, \lim_{h=0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 0 \quad \text{и за } x = -h, \lim_{h=0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{h}}},$$

то видимо, да линија има две тангенте у почетку координата: x-оса је једна, а права OT, што полови координатни угао у трећем квадранту, друга тангента линије. Првој одговара угловни сачинитељ $\frac{dy}{dx} = 0$, а другој $\frac{dy}{dx} = 1$. Тачка O је дакле тачка преламања.

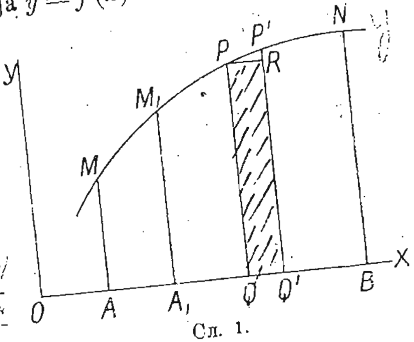
ДРУГИ ДЕО

НТЕГРАЛНИ РАЧУН

Методе интеграљења.

1. Дефиниције и општа правила.

1. **Дефиниције.** — Диференциални Рачун учи нас како се за
нкције изналазе њихове изводне. Интегрални Рачун има, обратно,
а покаже како се помоћу изводне добија првобитна функција.
Видели смо да свака функција једне прапроменљиве има своју
изводну. месно је да се упитамо а да ли се и обратно свака
функција ал дне прапроменљиве може сматрати као изводна једне
познат м функције. Показаћемо да је, узели ма какву функцију
(x), у могуће означити другу функцију $F(x)$, чија је изводна $=$
(x), та страна да је $\frac{dF(x)}{dx.} = f(x)$ или $dF(x) = fx \, . \, dx$. Да бисмо
објас $-\int dv$ замислимо да је линија $y = f(x)$ конструисана у пра-
кој с ми координата. Пре
вoб да је површина кри-
нст уре $MNAB$, која је
ч начи да а једне стране ко-
е о ва алгебар дисче осе, са друге
C к нпр. динатама AM и BN,
са $[f(x) + \varphi($ ране луком MN криве
$f(x)$, функција x-а.
е функције представ-
4. Интегра ским елементом (тра-
Дф. Р. видели о, који можемо да за-
им правоугаоником
Оавде добијамо $dx = f(x) \, . \, dx$ [1]). Из тога видимо да је израз за по-
$MNAB$ некаква функција $F(x)$ чији је диференциал
је изводна, дакле, равна задатој функцији $f(x)$.



Сл. 1.

) задчл. 21.

ШКОГА РАЧУНА.

Функција $F(x)$, чији је диференциал $= f(x) \,.\, dx$, $f(x)$, за коју је дакле

$$dF(x) = f(x)\,.\,dx, \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

зове се *интеграл* диференциала $f(x)\,dx$ и бележи се

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Радњу, којом из задате функције добијамо изводну фун звали смо *диференциалењем*, а радњу, помоћу које из диферен носно изводне) једне функције налазимо првобитну функц *интегралењем*.

Према реченом јасно је да су радње диференциалења и лења једна другој супротне и да се узајамно поништавају, ка то случај и код супротних алгебарских операција: сабирањ мања, множења и дељења итд. Знаци d и $\int$ поништавају је

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int dF(x) = F(x).$$

2. Неодређени и одређени интеграли. — Док свакој и непрекидној функцији $F(x)$ одговара увек само једна која је такође једнозначна, одговарају, међутим, једној и $f(x)$ безбројно много првобитних функција $F(x)$ које се, друге разликују само у једној произвољној константи C.

У Диф. Р. (чл. 43.) доказали смо да две функциј ликују само у једној сталној количини, имају једнаке из се, и једнаке диференциале. Из тога следује, обратно, изводној, односно диференциалу, одговарају безбројно м функција, које се, међутим, разликују једна од друге са вредност. Ако, дакле, обележимо са $F(x)$ једну од ф диференциал $= f(x)\,dx$ или чија је изводна $= f(x)$, о функције, које имају исту изводну, обухваћене у изра ако је $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, очевидно је и $\frac{d[F(x)+C]}{dx} =$ треба да ставимо

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathrm{Const.}$$

Због ове произвољне константе овакви се интегр *интеграли*.

Значај ове произвољне константе лако је обја Показали смо да је површина фигуре $MABN$ изр где је $y = f(x)$ једначина линије MN. Но исти и Ди

и за површину фигуре M_1A_1BN, која се од оне прве разликује за део MAA_1M_1. Отуда видимо да она константа, која се појављује код $\int f(x)\,dx$, зависи од почетне ординате или управо (пошто је ордината функција апсцисе) од почетне вредности x-а.

Произвољну константу C, која се јавља код свакот неодређеног интеграла, можемо да определимо ако нам је позната вредност интеграла за ма какво x. Обично се узима она вредност x-а, за коју је интеграл $= 0$. Предпоставимо да је за $x = a$, $\int f(x)\,dx = 0$, дакле $F(a) + C = 0$, $C = -F(a)$ и према томе вредност интеграла за ма које x ово $F(x) - F(a)$. То се бележи овако

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

З неку одређену вредност x-а, нпр. за $x = b$ имамо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Овакав интеграл зове се *одређен интеграл*. Број a је *доња*, број b *горња границ* интеграла.

Интеграл збира. — У чл. 45. Диф. Р. показали смо да је

$$d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

Интегралењем следује

$$\int d(u + v - w) = \int (du + dv - dw).$$

Левастрана ове једначине је (према чл. 1.) $= u + v - w$, а ово је $= \int du + \int dv - \int dw$. Дакле

$$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

То начи да је интеграл алгебарског збира из више диференциала раван алгебарском збиру из интеграла појединих диференциала. Тако нпр.

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx.$$

4. Интеграл константом помноженог диференциала. — У чл. 46. Диф. Р. видели смо да је

$$d(Cu) = C\,du.$$

Одавде добијамо интегралењем

$$\int d(Cu) = \int C\,du.$$

а пошто је лева страна једначине $= Cu = C\int du$, значи да је

$$\int C\,du = C\int du$$

или

$$\int C f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

Константне чинитеље можемо, дакле, да ставимо пред интегрални знак.

5. Основни интеграли. — Из познатих диференцијалних формула изводимо, на врло прост начин, одговарајуће интегралне обрасце, такозване основне интеграле.

$$d\,x^{n+1} = (n+1)\,x^n\,dx, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \qquad (1$$

$$d\,a^x = a^x\,l\,a\,dx \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a} + C$$

$$d\,e^x = e^x\,dx \qquad \int e^x\,dx = e^x + C \qquad (2$$

$$d\,l\,x = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{x} = l\,x + C \qquad (3$$

$$d\,sin\,x = cos\,x\,dx, \qquad \int cos\,x\,dx = sin\,x + C \qquad (4$$

$$d\,cos\,x = -\,sin\,x\,dx, \qquad \int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + C \qquad (5$$

$$d\,tg\,x = \frac{dx}{cos^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C \qquad (6$$

$$d\,cotg\,x = -\frac{dx}{sin^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{sin^2 x} = -\,cotg\,x + C \qquad (7$$

$$d\,arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x + C$$

$$d\,arc\,cos\,x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\,arc\,cos\,x + C \qquad (8$$

$$d\,arc\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C$$

$$d\,arc\,cotg\,x = -\frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\,arc\,cotg\,x + C \qquad (9$$

Напомена. У свима горњим обрасцима x може бити прапромењлива или, пак, ма каква функција прапромењиве. Тако нпр. ако узмемо да је $x = \varphi(t)$ јесте

$$\int [\varphi(t)]^n\,d\,\varphi(t) = \frac{[\varphi(t)]^{n+1}}{n+1} + C; \qquad \int a^{\varphi(t)}\,d\,\varphi(t) = \frac{a^{\varphi(t)}}{l\,a} + C;$$

$$\int \frac{d\,\varphi(t)}{\varphi(t)} = l\,\varphi(t) + C; \qquad \int cos\,\varphi(t)\,d\,\varphi(t) = sin\,\varphi(t) + C;$$

итд. итд.

6. Примери. — Следећи примери има да покажу како се, у многим случајим, интеграли, који, на први поглед, и не личе на оне основне интеграле, могу, простим операцијама, да доведу на вид једног или више таквих основних интеграла и да се, на тај начин, нађе њихова вредност.

1. Пример.

$$\int \frac{6x^4 + 8x^{3/2} - 5x + 2}{x}\,dx = 6\int x^3\,dx + 8\int x^{1/2}dx - 5\int dx + 2\int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{6\,x^4}{4} + \frac{8\,.\,2}{3}\,x^{3/2} - 5\,x + 2\,l\,x + C$$

$$= \frac{3}{2}\,x^4 + \frac{16}{4}\,x^{3/2} - 5\,x + 2\,l\,x + C.$$

2 Пример.

$$\int tg\,x\,dx = \int \frac{sin\,x\,dx}{cos\,x} = -\int \frac{d\,cos\,x}{cos\,x} = -\,cos\,x + C;$$

$$\int cotg\,x\,dx = \int \frac{cos\,x\,dx}{sin\,x} = \int \frac{d\,sin\,x}{sin\,x} = l\,sin\,x + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{sin\,x} = \int \frac{dx}{2\,sin\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\dfrac{d\,\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{sin\,\frac{x}{2}}{cos\,\frac{x}{2}}} = \int \frac{d\,tg\,\frac{x}{2}}{tg\,\frac{x}{2}} = l\,tg\,\frac{x}{2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{cos\,x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = l\,tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$sin\,x = \frac{a}{c}$

$cos\,x = $ [illegible]

4. Пример.

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc\,tg\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+C=-\frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc\;cotg\left(\sqrt{\frac{}{}}x\right)+C.$$

5. Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\,sin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+C=-\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\,cos\left(\sqrt{\frac{b}{d}}x\right)+C.$$

6. Пример.

$$\int\frac{lx+5}{x\sqrt{1-(lx)^2}}\,dx=\int\frac{lx\,dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}}+5\int\frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}}$$

$$=\int\frac{lx\,d\,lx}{\sqrt{1-(lx)^2}}+5\int\frac{d\,lx}{\sqrt{1-(lx)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\,[1-(lx)^2]}{\sqrt{1-(lx)^2}}+5\,arc\,sin\,(lx)$$

$$=-\sqrt{1-(lx)^2}+5\,arc\,sin\,(lx)+C.$$

7. Пример.

$$\int\frac{a+bx}{dx}=\frac{1}{b}\int\frac{d\,(a+bx)}{a+bx}=\frac{1}{b}\,l\,(a+bx)+C.$$

8. Пример.

$$\int x^2\,(x^3+4)^5\,dx=\frac{1}{3}\int(x^3+4)^5\,d\,(x^3+4)=\frac{(x^8+4)^6}{18}+C.$$

9. Пример.

$$\int\frac{cos\,x+tg\,x+a}{sin^2\,x}\,dx=\int\frac{d\,sin\,x}{sin^2\,x}+\int\frac{dx}{sin\,x\,cos\,x}+a\int\frac{dx}{sin^2\,x}$$

$$=-\frac{1}{sin\,x}+\int\frac{d\,(2x)}{sin\,2x}-a\,cotg\,x$$

$$=-\frac{1}{sin\,x}+l\,tg\,x-a\,cotg\,x+C.$$

10. Пример.

$$\int\frac{sin^3\,x+a}{tg\,x}\,dx=\int sin^2\,x\,cos\,x\,dx+a\int\frac{dx}{tg\,x}=\int sin^2\,x\,d\,sin\,x+a\int\frac{d\,sin\,x}{sin\,x}$$

$$=\frac{sin^3\,x}{3}+l\,sin\,x+C.$$

[illegible] Универзит Беогр

7. Метода делимичног интегралења. — До једне, у многим случајима, врло употребљиве методе да се изнађе задати интеграл, сводећи га на један од оних основних интеграла, долазимо на овај начин. У чл. 46. Диф. Р. доказали смо да је

$$d\,(uv)=v\,du+u\,dv,$$

где u и v означавају ма какве функције x-а. Интегралењем ове једначина налазимо

$$uv=\int v\,du+\int u\,dv,$$

одакле

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Помоћу овога обрасца ми сводимо, дакле, задати $\int u\,dv$ на други један $\int v\,du$. Метода, која се оснива на томе обрасцу, позната је под именом *методе делимичног интегралења* или *методе интегралења помоћу делова.*

1. Пример.

$$\int lx\,dx=?$$

Ставимо овде

$$u=lx,\qquad dv=dx,$$

дакле

$$du=\frac{dx}{x},\qquad v=x,$$

па ћемо добити

$$\int lx\,dx=x\,lx-\int dx=x\,(lx-1)+C.$$

2. Пример.

$$\int x^n\,e^x\,dx=?$$

Ставимо

$$u=x^n,\qquad dv=e^x\,dx,$$

дакле

$$du=n\,x^{n-1}\,dx,\quad v=e^x$$

и према томе

$$\int x^n\,e^x\,dx=e^x\,x^n-n\int x^{n-1}\,e^x\,dx.$$

Овим смо $\int x^n\,e^x\,dx$ свели на $\int x^{n-1}\,e^x\,dx$, који се, тако исто, да свести на $\int x^{n-2}\,e^x\,dx$ итд. Ако је n цео и положан број, задати интеграл се своди најзад на $\int e^x\,dx$, који је, као што знамо, $=e^x+C$.

Тако нпр. за $n=3$ имамо

$$\int x^3\,e^x\,dx=e^x\,.\,x^3-3\int x^2\,e^x\,dx=e^x\,.\,x^3-3\,[e^x\,.\,x^2-2\int xe^x\,dx]$$

$$=e^x\,(x^3-3x^2)+6\int x\,e^x\,dx=e^x(x^3-3x^2)+6\,[e^x\,.\,x-\int e^x\,dx]$$

$$=e^x\,(x^3-3x^2+6x-6)+C.$$

3. Пример.

$$\int x^2 \sin x \, d x = ?$$

Узмимо да је

$$u = x^2, \qquad d v = \sin x \, d x,$$

дакле

$$d u = 2 x \, . \, d x, \qquad v = - \cos x$$

и према томе

$$\int x^2 \sin x \, . \, d x = - x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, . \, d x.$$

Слично добијамо

$$\int x \cos x \, . \, d x = \int x \, . \, d \sin x = x \sin x - \int \sin x \, . \, d x$$
$$= x \sin x + \cos x + C,$$

а са тиме следује

$$\int x^2 \sin x \, . \, d x = - x^2 \cos x + 2 x \sin x + 2 \cos x + C.$$

4. Пример.

$$\int arc \, tg \, x \, . \, d x = ?$$

Ставимо

$$u = arc \, tg \, x, \qquad d v = d x,$$

дакле

$$d u = \frac{d x}{1 + x^2}, \qquad v = x,$$

па ћемо добити

$$\int arc \, tg \, x \, . \, d x = x \, arc \, tg \, x - \int \frac{x \, . \, d x}{1 + x^2} = x \, arc \, tg \, x - \frac{1}{2} \int \frac{d (1 + x^2)}{1 + x^2}$$
$$= x \, arc \, tg \, x - \frac{1}{2} \, l \, (1 + x^2) + C.$$

8. Интегралење заменом. — Често, кад се задати интеграл неможе да доведе на један од познатих видова, па ни делимичним интегралењем, долазимо до циља замењујући променљиву, по којој се интеграли, новом променљивом. Та метода зове се *интегралење заменом.* Она се састоји, дакле, у томе да се у задатоме интегралу $\int f(x) \, . \, d x$ изврши подесна супституција

$$x = \varphi(t), \quad d x = \varphi'(t) \, . \, d \, t,$$

која учини да нови интеграл $\int f \, [\varphi(t)] \, . \, \varphi'(t) \, . \, d \, t$ добије један од познатих видова.

1. Пример.

$$\int \frac{d x}{1 - x^2} = ?$$

1. случај: $x < 1$. Стављамо

$$x = \frac{t - 1}{t + 1}, \text{ дакле } d x = \frac{2 \, d t}{(t + 1)^2}, \quad 1 - x^2 = \frac{4 \, t}{(t + 1)^2}, \quad t = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

$$\int \frac{d x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d t}{t} = \frac{1}{2} \, l \, t + C = \frac{1}{2} \, l \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) + C.$$

Из ресултата видимо да би задати интеграл за $x > 1$ добио имагинарну вредност.

---

2. случај: $x > 1$. Стављамо

$$x = \frac{t + 1}{t - 1}, \text{ дакле } d x = \frac{- 2 \, d t}{(t + 1)^2}, \quad 1 - x^2 = \frac{- 4 \, t}{(t + 1)^2}, \quad t = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

$$\int \frac{d x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d t}{t} = \frac{1}{2} \, l \, t + C = \frac{1}{2} \, l \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right) + C.$$

2. Пример.

$$\int \sqrt{\frac{a - x}{x}} \, . \, d x = ?$$

Заменимо

$$\sqrt{\frac{a - x}{x}} = t, \quad \text{дакле } x = \frac{a}{1 + t^2}, \quad d x = - \frac{2 \, a \, t \, . \, d t}{(1 + t^2)^2},$$

96

па ћемо добити

$$\int \sqrt{\frac{a - x}{x}} \, . \, d x = - 2 \, a \int \frac{t^2 \, . \, d t}{(1 + t^2)^2}.$$

Последни интеграл, на који смо свели наш задати интеграл, наћићемо из основног интеграла

$$\int \frac{d t}{1 + t^2} = arc \, tg \, t$$

а применом делимичног интегралења, кад у њему ставимо

$$u = \frac{1}{1 + t^2}, \qquad d v = d t,$$

$$d u = - \frac{2 t \, . \, d t}{(1 + t^2)^2}, \qquad v = t,$$

јер је онда

$$\int \frac{d t}{1 + t^2} = arc \, tg \, t = \frac{t}{1 + t^2} + 2 \int \frac{t^2 \, . \, d t}{(1 + t^2)^2},$$

одакле

$$\int \frac{t^2 \, d t}{(1 + t^2)^2} = \frac{1}{2} \, arc \, tg \, t - \frac{t}{2 \, (1 + t^2)} + C$$

и према томе задати интеграл

$$\int \sqrt{\frac{a - x}{x}} \, . \, d x = - 2 \, a \int \frac{t^2 \, . \, d t}{(1 + t^2)^2} = - a \, . \, arc \, tg \, t + \frac{a \, t}{1 + t^2} + C$$
$$= - a \, . \, arc \, tg \sqrt{\frac{a - x}{x}} + \sqrt{x} \sqrt{a - x} + C.$$

3. Пример.

$$\int \frac{d x}{e^x + 1} = ?$$

Ставићемо

$$e^x = t, \quad \text{дакле } x = l \, t, \quad d x = \frac{d t}{t}$$

и добијамо тиме

$$\int \frac{d\,x}{e^x+1} = \int \frac{d\,t}{t\,(t+1)} = \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right] . \, d\,t = \int \frac{d\,t}{t} - \int \frac{d\,t}{t+1}$$

$$= l\,t - l\,(t+1) + C = l\left(\frac{t}{t+1}\right) + C = l\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C.$$

4. *Пример.*

$$\int x \sqrt{1+x^2} \, . \, d\,x = ?$$

Заменом

$$x = tg\,\varphi, \quad d\,x = \frac{d\,\varphi}{cos^2\,\varphi}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{cos\,\varphi}$$

налазимо

$$\int x \sqrt{1+x^2} \, . \, d\,x = \int \frac{sin\,\varphi \, . \, d\,\varphi}{cos^4\,\varphi} = - \int cos^{-4}\,\varphi \, . \, d\,cos\,\varphi = \frac{1}{5\,cos^5\,\varphi} + C$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}^{\,5}}{5} + C.$$

2. Интегралење рационално разломљених функција.

9. Напомена. — Под целом и рационалном функцијом разумемо један полином у коме се променљива количина јавља само са целим и позитивним изложитељима. Количник из такве две целе и рационалне функције зовемо рационално разломљеном функцијом.

Нека су $F(x)$ и $f(x)$ две целе и рационалне функције. За количник $\frac{F(x)}{f(x)}$ кажемо да је чисто или нечисто разломљен, према томе да ли је степен функције $F(x)$ мањи или већи од степена функције $f(x)$.

На случај да је степен од $F(x)$ већи од степена $f(x)$, нечисто разломљена функција $\frac{F(x)}{f(x)}$ може да се претвори у једну целу и једну чисто разломљену функцију:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \psi(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

и онда је

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} \, d\,x = \int \psi(x) \, . \, d\,x + \int \frac{\varphi(x)}{f(x)} \, d\,x.$$

Пошто се интегралење целе и рационалне функције

$$\psi(x) = a\,x^n + b\,x^{n-1} + \ldots + p\,x^2 + q\,x + r$$

може непосредно да изврши

$$\int \psi(x) \, . \, dx = \frac{a\,x^{n+1}}{n+1} + \frac{b\,x^n}{n} + \ldots + \frac{p\,x^3}{3} + \frac{q\,x^2}{2} + r\,x + C,$$

јасно је да се проучавање разломљених функција уопште може да ограничи на чисто разломљене функције.

Пример.

$$\frac{5\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 4}{x^2 - 3\,x + 2} = 5\,x + 13 + \frac{32\,x - 22}{x^2 - 3\,x + 2},$$

$$\int \frac{5\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 4}{x^2 - 3\,x + 2} \, d\,x = \int (5\,x + 13) \, . \, d\,x + \int \frac{32\,x - 22}{x^2 - 3\,x + 2} \, d\,x$$

$$= \frac{5\,x^2}{2} + 13\,x + \int \frac{32\,x - 22}{x^2 - 3\,x + 2} \, d\,x.$$

10. Интегралење чисто разломљених функција. — Нека је $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ једна чисто разломљена функција. Метода интегралења основана је на разлагању разломљене функције на просте разломке. То разлагање, па са тиме и ресултат интегралења, управља се према томе какви су корени једначине $f(x) = 0$. У томе погледу имамо ове главне случајеве: корени су сви стварни и различни (прости) или корени су стварни, али их има и једнаких (многоструких) или најзад једначина има имагинарних корена. Пошто су методе за разлагање чисто разломљених функција на просте разломке већ у Диференцијалноме Рачуну (чл. 92. — 99.) изложене у довољној опширности, није потребно враћати се поново томе питању. Овде ћемо сада само да применемо тамо добивене ресултате.

Први случај: једначина $f(x) = 0$ има све стварне и различне (просте) корене:

$$f(x) = (x - a)\,(x - b) \ldots (x - l),$$

где су a, b … l стварни и различни корени. Чисто разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ разлаже се тада на просте разломке

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(a)}{f'(a) \, . \, (x - a)} + \frac{\varphi(b)}{f'(b) \, . \, (x - b)} + \ldots + \frac{\varphi(l)}{f'(l) \, . \, (x - l)}$$

(формула 2 у чл. 95. Диф. Р.). Према томе је

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} \, d\,x = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} \int \frac{d\,x}{x - a} + \frac{\varphi(b)}{f'(b)} \int \frac{d\,x}{x - b} + \ldots + \frac{\varphi(l)}{f'(l)} \int \frac{d\,x}{x - l}$$

$$= \frac{\varphi(a)}{f'(a)} \, l\,(x - a) + \frac{\varphi(b)}{f'(b)} \, l\,(x - b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varphi(l)}{f'(l)} \, l\,(x - l) + C.$$

1. Пример. (Диф. Р. чл. 95.) Отуда што је

$$\frac{15x^2-18x+28}{6x^4+11x^3-43x^2+34x-8}=\frac{-\frac{34}{63}}{x+4}+\frac{\frac{91}{9}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{34}{7}}{x-\frac{2}{3}}+\frac{5}{x-1}$$

следује

$$\int\frac{(15x^2-18x+28)\,.\,dx}{6x^4+11x^3-43x^2+34x-8}=$$

$$=-\frac{34}{63}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{91}{9}\int\frac{dx}{x-\frac{1}{2}}-\frac{34}{7}\int\frac{dx}{x-\frac{2}{3}}+5\int\frac{dx}{x-1}$$

$$=-\frac{34}{63}\,l\,(x+4)+\frac{91}{9}\,l\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{34}{7}\,l\left(x-\frac{2}{3}\right)+5\,l\,(x-1)+C.$$

2. Пример. (Диф. Р. чл. 95.) На основу тога што је

$$\frac{1}{p-qx^2}=\frac{1}{2\sqrt{pq}\left(x+\sqrt{\frac{p}{q}}\right)}+\frac{1}{-2\sqrt{pq}\left(x-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)}$$

налазимо

$$\int\frac{dx}{p-qx^2}=\frac{1}{2\sqrt{pq}}\int\frac{dx}{x+\sqrt{\frac{p}{q}}}-\frac{1}{2\sqrt{pq}}\int\frac{dx}{x-\sqrt{\frac{p}{q}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{pq}}\,l\left(x+\sqrt{\frac{p}{q}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{pq}}\,l\left(x-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{pq}}\,l\left(\frac{x+\sqrt{\frac{p}{q}}}{x-\sqrt{\frac{p}{q}}}\right)+C.$$

Други случај: једначина $f(x)=0$ има све стварне, али и једнаке (многоструке) корене:

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda.$$

Разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ разлаже се у овоме случају

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=&\ \frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\ &+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{L}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}\end{aligned}$$

(формула 2 чл. 93. Диф. Р.) тако да је

$$\begin{aligned}\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=&\ A\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha}+A_1\int\frac{dx}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+A_{\alpha-1}\int\frac{dx}{x-a}\\ &+B\int\frac{dx}{(x-b)^\beta}+B_1\int\frac{dx}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+B_{\beta-1}\int\frac{dx}{x-b}\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+L\int\frac{dx}{(x-l)^\lambda}+L_1\int\frac{dx}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+L_{\lambda-1}\int\frac{dx}{x-l}\end{aligned}$$

Сви ови интеграли своде се на ова два основна интеграла

$$\int\frac{du}{u^n}=\int u^{-n}\,.\,du=\frac{u^{1-n}}{1-n}\quad\text{и}\quad\int\frac{du}{u}=l\,u.$$

1. Пример. (Диф. Р. чл. 94.) Пошто је

$$\frac{3x^4-6x^2+5x-7}{x^7-\frac{1}{2}x^6-14x^5+\frac{37}{2}x^4+41x^3-\frac{215}{2}x^2+84x-\frac{45}{2}}=$$

$$\frac{\frac{5}{24}}{(x-1)^4}+\frac{-\frac{25}{144}}{(x-1)^3}+\frac{-\frac{1633}{3456}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{3199}{432}}{x-1}+\frac{-\frac{501}{352}}{(x+3)^2}+\frac{\frac{1413}{1936}}{x+3}+\frac{\frac{21808}{3267}}{x-\frac{5}{2}}$$

следује

$$\int\frac{(3x^4-6x^2+5x-7)\,.\,dx}{x^7-\frac{1}{2}x^6-14x^5+\frac{37}{2}x^4+41x^3-\frac{215}{2}x^2+84x-\frac{45}{2}}=$$

$$\frac{5}{24}\int\frac{dx}{(x-1)^4}-\frac{25}{144}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{1633}{3456}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{3199}{432}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$-\frac{501}{352}\int\frac{dx}{(x+3)^2}+\frac{1413}{1936}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{21808}{3267}\int\frac{dx}{x-\frac{5}{2}}$$

$$=-\frac{5}{72}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{25}{288}\,\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1633}{3456}\,\frac{1}{x-1}-\frac{3199}{432}\,l\,(x-1)$$

$$+\frac{501}{352}\,\frac{1}{x+3}+\frac{1413}{1936}\,l\,(x+3)+\frac{21808}{3267}\,l\left(x-\frac{5}{2}\right)+C.$$

2. Пример. (Диф. Р. чл. 96.) На основу тога што је

$$\frac{(x+2)}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}=\frac{-3}{(x-1)^3}+\frac{-4}{(x-1)^2}+\frac{-4}{x-1}+\frac{4}{x-2}$$

имамо

$$\int\frac{(x+2)\,.\,dx}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}=$$

$$=-3\int\frac{dx}{(x-1)^3}-4\int\frac{dx}{(x-1)^2}-4\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-4\,l\,(x-1)+4\,l\,(x-2)+C$$

$$=\frac{8x-5}{2\,(x-1)^2}+4\,l\left(\frac{x-2}{x-1}\right)+C.$$

Трећи случај: једначина $f(x) = 0$ има имагинарних корена, нпр. $f(x) = [x - (\alpha + i\beta)]^n [x - (\alpha - i\beta)]^n \cdot f_1(x) = (x^2 + px + q) \cdot f_1(x)$.

Разломљена функција $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ раствара се

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{P_{n-1} x + Q_{n-1}}{x^2 + px + q} + \frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}$$

(формула 6 у чл. 98. Диф. Р.), где је $\frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}$ опет једна чисто разломљена функција, која се на познати начин даље разлаже на просте разломке.

Пример. (В. чл. 99. и Напомену у чл. 98. Диф. Р.) Имамо

$$\frac{2x^2 - 7x + 5}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15} = \frac{\frac{7}{4}x + \frac{1}{2}}{(x-1)^2 + 4} + \frac{\frac{1}{4}}{x - 3},$$

$$\int \frac{(2x^2 - 7x + 5)\,dx}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15} = \frac{7}{4}\int \frac{x \,.\, dx}{(x-1)^2 + 4} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x - 3}$$

$$= \frac{7}{8}\int \frac{d\,[(x-1)^2 + 4]}{(x-1)^2 + 4} + \frac{1}{4}\int \frac{d\left(\frac{x-1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}, + \frac{1}{4}\int \frac{d\,(x-3)}{x - 3}$$

$$= \frac{7}{8}\, l\,[(x-1)^2 + 4] + \frac{1}{4}\, arc\, tg\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{4}\, l\,(x-3) + C.$$

3. Интегралење ирационалних функција.

11. Подкорена количина је линеарна. — Ако је функција састављена из разних корена, у којима је радиканд један исти и то линеаран, онда простом заменом претварамо такву ирационалну функцију у рационалну функцију. Доводимо све корене на заједнички корени изложитељ и означавамо тај корен из оног линеарног радиканда новим знаком. Ако је нпр. задата функција састављена из $\sqrt[a]{(px + q)^\alpha}$, $\sqrt[b]{(px + q)^\beta}$, ... а n је заједнички корени изложитељ за све корене експоненте $a, b, \dots$ ми онда стављамо $\sqrt[n]{px + q} = y$, дакле $x = \frac{y^n - q}{p}$, $dx = \frac{n\,y^{n-1}\,dy}{p}$ и тиме претварамо све корене количине у рационалне функције. Тако нпр. ако бисмо имали $\int \frac{x^2 \sqrt[3]{(px + q)^2} - a}{x^3 + x\sqrt{(px + q)^3}} \,.\, dx$ заменули би $\sqrt[6]{px + q} = y$, дакле $x = \frac{y^6 - q}{p}$, $dx = \frac{6\,y^5 \,.\, dy}{p}$ и тиме добили

$$\frac{x^2 \sqrt[3]{(px + q)^2} - a}{x^3 + x\sqrt{(px + q)^3}}\, dx = \frac{\left(\frac{y^6 - q}{p}\right)^2 y^4 - a}{\left(\frac{y^6 - q}{p}\right)^3 + \frac{y^6 - q}{p}\, y^9}\, \frac{6\,y^5}{p}\, dy$$
$$= \frac{(y^6 - q)^2\, y^4 - a\,p^2}{(y^6 - q)^3 + p^2\,(y^6 - q)\, y^9}\, 6\,y^5\, dy,$$

дакле рационалну функцију.

12. Интеграли ирационалних функција са квадратним кореном. — Најопштији вид једне ирационалне функције са квадратним кореном и истим радикандом представљен је изразом:

$$\frac{A + B\sqrt{X} + C\sqrt{X^2} + D\sqrt{X^3} + E\sqrt{X^4} + \dots}{a + b\sqrt{X} + c\sqrt{X^2} + d\sqrt{X^3} + e\sqrt{X^4} + \dots},$$

где је X ма каква рационална функција променљиве x, а $A, B, C, \dots$ $a, b, c, \dots$ константе или рационалне функције x-а.

Овај општи израз може да се доведе на знатно простију форму на следећи начин

$$\frac{A + B\sqrt{X} + C\sqrt{X^2} + D\sqrt{X^3} + E\sqrt{X^4} + \dots}{a + b\sqrt{X} + c\sqrt{X^2} + d\sqrt{X^3} + e\sqrt{X^4} + \dots} =$$
$$\frac{(A + CX + EX^2 + \dots) + (B + DX + \dots)\sqrt{X}}{(a + cX + eX^2 + \dots) + (b + dX + \dots)\sqrt{X}} = \frac{P + Q\sqrt{X}}{p + q\sqrt{X}},$$

где су P, Q, p, q рационалне функције:

$$P = A + CX + EX^2 + \dots, \qquad Q = B + DX + \dots$$
$$p = a + cX + eX^2 + \dots, \qquad q = b + dX + \dots$$

Последњи израз можемо још и даље да упростимо

$$\frac{P + Q\sqrt{X}}{p + q\sqrt{X}} = \frac{(P + Q\sqrt{X})(p - q\sqrt{X})}{(p + q\sqrt{X})(p - q\sqrt{X})} = \frac{(Pp - QqX) + (pQ - qP\sqrt{X}}{p^2 - q^2 X}$$
$$= \frac{U}{W} + \frac{U}{W}\sqrt{X},$$

где су U, V, W такође рационалне функције. Тако постаје

$$\int \frac{A + B\sqrt{X} + C\sqrt{X^2} + D\sqrt{X^3} + E\sqrt{X^4} + \dots}{a + b\sqrt{X} + c\sqrt{X^2} + d\sqrt{X^3} + e\sqrt{X^4} + \dots}\, dx =$$
$$\int \frac{U}{W}\, dx + \int \frac{V\sqrt{X}}{W}\, dx.$$

На левој страни имамо општи вид интеграла једне ирационалне функције са квадратним коренима, а истим радикандом и ми видимо да се такав интеграл своди на два интеграла од којих онај први можемо да сматрамо као познат пошто се он односи на једну рационалну функцију. Остаје да расматрамо онај други интеграл који може да се напише и овако

$$\int \frac{V\sqrt{X}}{W}\, d\,x = \int \frac{V\,X}{W\sqrt{X}}\, d\,x = \int \frac{T\,.\,d\,x}{W\,\sqrt{X}}.$$

Овде је T опет једна рационална функција.

Из свега овога видимо да се интеграл једне ирационалне функције, која је склопљена из квадратних корена са једнаким радикандима, може да доведе на најпростији заједнички облик $\int \frac{T\,.\,d\,x}{W\sqrt{X}}$, где T, W и X означавају ма какве рационалне функције променљиве x. Интеграли, који су обухваћени овим општим типом деле се на

интеграле прве врсте: $\int \frac{d\,x}{\sqrt{X}}$, код којих је $\frac{T}{W} = \text{Const.}$,

интеграле друге врсте: $\int \frac{\varphi(x)\,d\,x}{\sqrt{X}}$, код којих је $\frac{T}{W} = \varphi(x)$ цела и рационална функција и

интеграле треће врсте: $\int \frac{F(x)\,d\,x}{f(x)\sqrt{X}}$, код којих је $\frac{T}{W} = \frac{F(x)}{f(x)}$ рационално разломљена функција.

13. Функција под квадратним кореном је другог степена. —

Ми ћемо да се ограничимо на расматрање случаја кад је у $\int \frac{T\,.\,d\,x}{W\sqrt{X}}$ подкорена количина X другог степена[1]), дакле вида $a\,x^2 + b\,x + c$. Предпоставићемо да је овај трином ослобођен првог сачинитеља и ставићемо $X = x^2 + p\,x + q$. Означимо $\frac{T}{W} = \phi(x)$ и онда имамо као општи тип интеграла, које узимамо за проучавање

$$\int \frac{\phi(x)\,.\,d\,x}{\sqrt{x^2 + p\,x + q}}.$$

---

[1]) Интеграли, у којима се јавља квадратни корен из полинома трећег или четвртог степена, зову се по *Јакоби*-у (Karl Gustav Jacobi, 1804—1851) *елиптички интеграли*. То су име добили што је интеграл за елипсин лук такав интеграл. Ако је подкорена количина вишег од четвртог степена (петог итд.), интеграл се зове *хипереліптичан* ил *Абел*-ов интеграл по норвешкоме математичару Niels Henrik Abel (1802—1829).

Овде имамо да разликујемо два случаја: према знаку првога члана подкорене количине: да ли је позитиван или је негативан.

Први случај: нека је први члан тринома положан.

Показаћемо две методе за интегралење.

Прва метода. — Ставићемо

$$\sqrt{x^2 + px + q} = t + x \text{ или } t - x.$$

Нека је

$$\sqrt{x^2 + px + q} = t - x,$$

дакле

$$x = \frac{t^2 - q}{2\,t + p},$$

$$dx = \frac{2\,(t^2 + pt + q)}{(2\,t + p)^2}\, dt,$$

$$\sqrt{x^2 + px + q} = \frac{t^2 + pt + q}{2\,t + p},$$

$$\int \frac{\phi\,(x)\,dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = 2 \int \frac{\phi\left(\frac{t^2 - q}{2\,t + p}\right)}{2\,t + p}\, dt = \int F\,(t)\,dt.$$

Ми смо, овим, задати интеграл ирационалне функције свели на интеграл једне рационалне функције за који знамо како се изналази.

Друга метода. — Овај начин може да се примени кад су корени квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ стварни, а то је свакојако случај ако је $q < 0$.[1]) Означимо са α и β дотичне корене. Онда је $x^2 + px + q = (x - \alpha)\,(x - \beta)$. Ставићемо

$$\sqrt{x^2 + px + q} = (x - \alpha)\,t \text{ или } (x - \alpha)\,(x - \beta) = (x - \alpha)^2\,t^2,$$

$$x - \beta = (x - \alpha)\,t^2,$$

дакле

$$x = \frac{\beta - \alpha\,t^2}{1 - t^2},$$

$$dx = \frac{2\,(\beta - \alpha)\,t\,dt}{(1 - t^2)^2},$$

$$\sqrt{x^2 + px + q} = \frac{(\beta - \alpha)\,t}{1 - t^2},$$

$$\int \frac{\phi\,(x)\,dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = 2 \int \frac{\phi\left(\frac{\beta - \alpha\,t^2}{1 - t^2}\right)}{1 - t^2}\, dt = \int F\,(t)\;dt.$$

Овим смо, опет, интеграл ирационалне функције претворили у интеграл једне рационалне функције.

---

[1]) То се види из решења $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

1. Пример.

Код интеграла прве врсте

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

јесте $\varphi(x) = 1$ и по првој методи интегралења имамо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = 2\int \frac{dt}{2t+p} = \int \frac{dt}{\frac{p}{2}+t} = l\left(\frac{p}{2}+t\right)+C$$

или кад заменимо $t = x + \sqrt{x^2+px+q}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = l\left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+C.$$

Ако овде ставимо $p = 0$ добићемо један интеграл који се често јавља, а то је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+q}} = l\left[x+\sqrt{x^2+q}\right]+C.$$

До истога ћемо ресултата доћи, ако применимо другу методу интегралења. Тада је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = l\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+C,^{1)}$$

где је

$$t = \sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}},$$

дакле

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}}{1-\sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}} = \frac{\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}}{\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{x-\beta}} = \frac{(\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta})^2}{(x-\alpha)-(x-\beta)} =$$

$$= \frac{-(\alpha+\beta)+2x+2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}{\beta-\alpha} = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Из теорије квадратних једначина знамо да је

$$-\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{p}{2}, \quad \frac{\beta-\alpha}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\;^{2)}$$

и према томе је

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}}{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$$

$$l\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = l\left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right] - l\left[\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = l\left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+C.$$

2. Пример.

Узмимо интеграл друге врсте

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{x^2+px+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx.$$

Овде је $\varphi(x) = x^2+px+q$. По првој методи је

$$\varphi(x) = \left(\frac{t^2+pt+q}{2t+p}\right)^2$$

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\;dx = 2\int \frac{\left(\frac{t^2+pt+q}{2t+p}\right)^2}{2t+p}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+pt+q)^2\,dt}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\left\{\left(t+\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]\right\}^2}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{p}{2}\right)dt + \frac{1}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]\int\frac{dt}{t+\frac{p}{2}} + \frac{\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]^2}{4}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{8}\left(t+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right] l\left(t+\frac{p}{2}\right) - \frac{1}{8}\,\frac{\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]^2}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^2}+C$$

и кад заменимо

$$t+\frac{p}{2} = \frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}$$

$$\frac{q-\frac{p^2}{4}}{t+\frac{p}{2}} = \frac{q-\frac{p^2}{4}}{\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\left(\frac{p}{2}+x-\sqrt{x^2+px+q}\right)}{\left(\frac{p}{2}+x\right)^2-(x^2+px+q)}$$

$$= \frac{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\left(\frac{p}{2}+x-\sqrt{x^2+px+q}\right)}{\frac{p^2}{4}-q} = -\left[\frac{p}{2}+x-\sqrt{x^2+px+q}\right]$$

---

1) Види чл. 8. Пример 1.

2) Корени квадратне једначине $x^2+px+q=0$ јесу

$$\alpha = -\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}, \quad \beta = -\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

одакле

$$-\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{p}{2}, \quad \frac{\beta-\alpha}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Ово последње је стварно само онда кад су корени α и β стварни.

добићемо овакав ресултат

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\ dx = \frac{1}{8}\left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]^2$$

$$+\frac{1}{2}\left[q-\frac{p^2}{4}\right]\ l\ \left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{p}{2}+x-\sqrt{x^2+px+q}\right]^2+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+x\right)\sqrt{x^2+px+q}+\frac{1}{2}\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\ l\ \left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+C.$$

Задати интеграл можемо да решимо и помоћу методе делимичног интеграљења, јер кад ставимо

$$\sqrt{x^2+px+q}=u, \quad dx=dv,$$

дакле

$$du=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}, \quad v=x,$$

добићемо

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\ dx = x\ \sqrt{x^2+px+q}-\int \frac{x^2+\frac{p}{2}\,x}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx,$$

које, кад саберемо с идентичном једначином

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\ dx = \int \frac{x^2+px+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

и поделимо обе стране са 2, даје

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\ dx = \frac{1}{2}\ x\sqrt{x^2+px+q}+\frac{1}{2}\int \frac{\frac{p}{2}\,x+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx.$$

Последњи интеграл може да се разложи на два интеграла

$$\frac{1}{2}\int \frac{\frac{p}{2}\,x+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

$$=\frac{q-\frac{p^2}{4}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}+\frac{p}{4}\int \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

$$=\frac{q-\frac{p^2}{4}}{2}\,l\left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+\frac{p}{8}\int \frac{d\,(x^2+px+q)}{\sqrt{x^2+px+q}}\,{}^{1)}$$

$$=\frac{q-\frac{p^2}{4}}{2}\,l\left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+\frac{p}{4}\sqrt{x^2+px+q}+C.$$

---

1) Први интеграл је исти, који смо већ расматрали у првоме примеру овога члана, а други је један од основних интеграла, јер има вид

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}}=2\sqrt{y}+C.$$

С овим добијамо, као и горе, да је задати интеграл

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\ dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{x^2+px+q}$$

$$+\frac{1}{2}\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\ l\ \left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+C.$$

3. *Пример.*

Интеграл друге врсте

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{x^2+px+q}},$$

који се врло често јавља, можемо да нађемо на основу претходећег примера.

Кад разложимо

$$\frac{a+bx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\left(a-\frac{pb}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}+b\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

добијамо

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

$$=\left(a-\frac{pb}{2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}+\frac{b}{2}\int \frac{d\,(x^2+px+q)}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

$$=\left(a-\frac{pb}{2}\right)\ l\ \left[\frac{p}{2}+x+\sqrt{x^2+px+q}\right]+b\sqrt{x^2+px+q}+C.$$

14. Продужење прошлог члана. — Узмимо сада на расматрање други случај: да је знак првог члана подкорене количине одречан.

Показаћемо и овде две методе интеграљења.

Прва метода. — Претпоставимо да је $q>0$ и ставимо

$$\sqrt{-x^2+px+q}=\sqrt{q}+tx,$$

одакле

$$x=\frac{p-2\,t\sqrt{q}}{1+t^2},$$

$$dx=-2\,\frac{\sqrt{q}+pt-t^2\sqrt{q}}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{-x^2+px+q}=\frac{\sqrt{q}+pt-t^2\sqrt{q}}{1+t^2}$$

и према томе

$$\int \frac{\phi(x)\,dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}=-2\int \frac{\phi\left(\frac{p-2\,t\sqrt{q}}{1+t^2}\right)}{1+t^2}\,dt=\int F(t)\,dt,$$

где је $F(t)$ рационална функција.

Напомена. Овај начин интеграљења може да се примени и на први случај: на случај кад је први члан тринома x^2+px+q положан, али с предпоставком да је $q>0$.

Друга метода. — Важи кад је $q < 1$. Означимо са $\bar{q}$ апсолутну вредност дотичне константе. Пошто су у овоме случају корени квадратне једначине $-x^2 + px - \bar{q} = 0$ стварни, можемо да применимо ону другу методу у прошлом члану. Означимо, као и раније, са α и β корене и претпоставимо да је $\beta > \alpha$. Ставимо

$$\sqrt{-x^2 + px - \bar{q}} = \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} = (x - a)\, t,$$

дакле

$$x = \frac{\beta + \alpha t^2}{1 + t^2},$$

$$dx = -\frac{2(\beta - \alpha)\, t\, dt}{(1 + t^2)^2},$$

$$\sqrt{-x^2 + px - \bar{q}} = \frac{(\beta - \alpha)\, t}{1 + t^2},$$

па ћемо добити

$$\int \frac{\phi(x)\, dx}{\sqrt{-x^2 + px - \bar{q}}} = -2 \int \frac{\phi\left(\frac{\beta + \alpha t^2}{1 + t^2}\right)}{1 + t^2}\, dt = \int F(t)\, dt.$$

1. Пример.

Место да интеграл прве врсте

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}}$$

решавамо по горе изложеној методи, показаћемо како се може доћи до ресултата сводећи задати интеграл на познати нам основни интеграл

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = arc\ sin\, u + C.$$

На основу тога што је

$$\sqrt{-x^2 + px + q} = \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}\right) - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}\ \sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}}\right)^2}$$

следује

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}} = \int \frac{d\left[\frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}}\right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}}\right)^2}} = arc\ sin\, \frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}} + C.$$

2. Пример.

Интеграл друге врсте

$$\int \frac{(a + bx)\, dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}}$$

своди се на претходећи интеграл прве врсте, јер је

$$\int \frac{(a + bx)\, dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}} = \left(a + \frac{pb}{2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}} - \frac{b}{2} \int \frac{d(-x^2 + px + q)}{\sqrt{-x^2 + px + q}}$$

$$= \left(a + \frac{pb}{2}\right) arc\ sin\, \frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}} - b\sqrt{-x^2 + px + q} + C.$$

4. Интегралење тригонометриских функција.

15. Интегралење функција које су сложене из тригонометриских бројева једног истог лука. — Ако имамо да интегралимо један диференциал, који зависи од синуса, косинуса, тангенте или од ма које још друге тригонометриске функције једног и истог угла x, завешћемо нову прапроменљиву t на начин

$$t = tg\, \frac{x}{2},$$

дакле

$$x = 2\, arc\ tg\, t,$$

$$dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}.$$

На основу ове замене је

$$tg\, x = \frac{2\, tg\, \frac{x}{2}}{1 - tg^2\, \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2},$$

$$cotg\, x = \frac{1}{tg\, x} = \frac{1 - t^2}{2t},$$

$$sin\, x = \frac{tg\, x}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$cos\, x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

и тада се задати интеграл претвара у интеграл једне алгебарске функције, јер је

$$\int f(sin\, x,\ cos\, x,\ tg\, x, \ldots)\, dx = 2 \int f\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 - t^2}, \ldots\right) \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Ако се, пак, у задатоме интегралу, осим тригонометриских функција лука x, јавља још и сам лук x, тј. ако је функција, коју ваља интегралити, вида $f(x, \sin x, \cos x, \ldots)$, горња метода постаје неупотребљива.

1. Пример.

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = ?$$

Пошто учинимо горе означену замену $tg \frac{x}{2} = t$, задати интеграл претвара се у алгебарски интеграл

$$\int \frac{d\,x}{a + b \cos x} = 2 \int \frac{d\,t}{(1 + t^2)\left(a + b\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)} = 2 \int \frac{d\,t}{a + b + (a - b)\,t^2}.$$

Овде имамо да разликујемо два случаја: према томе да ли је сачинитељ од t^2 положан или одречан.

1) $a - b > 0$. У овом случају је интеграл исти који смо расматрали у примеру 4. чл. 6. и тада је

$$\int \frac{d\,x}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\,tg \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\, t + C =$$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\,tg \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\, tg\, \frac{x}{2}\right) + C.$$

2) $a - b < 0$. Интеграл се јавља у виду интеграла који смо расматрали у примеру 1. чл. 8. Овде је

$$\int \frac{d\,x}{a + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b - a}\; t + \sqrt{a + b}}{\sqrt{b - a}\; t - \sqrt{a + b}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b - a}\;\, tg\, \frac{x}{2} + \sqrt{a + b}}{\sqrt{b - a}\;\, tg\, \frac{x}{2} - \sqrt{a + b}}\right) + C.$$

2. Пример.

$$\int \frac{A + B \cos x}{a + b \cos x}\, d\,x = ?$$

Разложимо

$$\frac{A + B \cos x}{a + b \cos x} = \frac{B}{b} + \frac{A - \frac{a\,B}{b}}{a + b \cos x},$$

па ћемо добити

$$\int \frac{A + B \cos x}{a + b \cos x}\, d\,x = \frac{B}{b} \int d\,x + \left(A - \frac{a\,B}{b}\right) \int \frac{d\,x}{a + b \cos x}$$

$$= \frac{B}{b}\, x + \left(A - \frac{a\,B}{b}\right) \int \frac{d\,x}{a + b \cos x},$$

где последњи интеграл има, према случају, једну од оне две у прошлом примеру означене вредности.

3. Пример.

$$\int \frac{A + B \cos x + C \sin x}{a + b \cos x}\, d\,x = ?$$

Разлагањем налазимо

$$\int \frac{A + B \cos x + C \sin x}{a + b \cos x}\, d\,x = \int \frac{A + B \cos x}{a + b \cos x}\, d\,x + C \int \frac{\sin x\, d\,x}{a + b \cos x}$$

$$= \int \frac{A + B \cos x}{a + b \cos x}\, d\,x - \frac{C}{b} \int \frac{d\,(a + b \cos x)}{a + b \cos x}$$

$$= \int \frac{A + B \cos x}{a + b \cos x}\, d\,x - \frac{C}{b}\, l\,(a + b \cos x).$$

Овим смо свели задати интеграл на прошли случај.

4. Пример.

$$\int \frac{d\,x}{\cos^2 x + a \cos x + b} = ?$$

Функцију $\frac{1}{\cos^2 x + a \cos x + b}$ треба разложити на просте разломке онако исто како се ради са рационално разломљеним функцијама. Изразићемо дакле

$$\frac{1}{\cos^2 x + a \cos x + b} = \frac{A}{\cos x - \alpha} + \frac{B}{\cos x - \beta},$$

где су α и β корени квадратне једначине $\cos^2 x + a \cos x + b = 0$; A и B константе, које се на познати начин налазе.

16. Интегралење диференциала у којима се јавља степен синуса или косинуса. — Интеграле вида $\int \cos^n x\, dx$ и $\int \sin^n x\, d\,x$ извршујемо кад $\cos^n x$ односно $\sin^n x$ развијемо у ред, који тече по косинусу односно синусу умножених лукова nx, $(n - 2)\,x$, $(n - 4)\,x, \ldots$, такозвани Fourier-ов ред.

Из Алгебарске Анализе знамо да је

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix},$$

одакле

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}.$$

По биномном правилу следује

$$\cos^n x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left\{ \begin{array}{l} e^{inx} + \binom{n}{1} e^{i(n-2)x} + \binom{n}{2} e^{i(n-4)x} + \ldots \\ + e^{-inx} + \binom{n}{1} e^{-i(n-2)x} + \binom{n}{2} e^{-i(n-4)x} + \ldots \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2^n} \left\{ 2 \cos n x + 2 \binom{n}{1} \cos (n - 2)\, x + 2 \binom{n}{2} \cos (n - 4)\, x + \ldots \right\}.$$

Ако је n парно, онда имамо

$$cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ cos\, n x + \binom{n}{1} cos\,(n-2)\, x + \binom{n}{2} cos\,(n-4)\, x + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \right\},$$

а ако је n непарно

$$cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ cos\, n x + \binom{n}{1} cos\,(n-2)\, x + \binom{n}{2} cos\,(n-4)\, x + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} cos\, x \right\}.$$

На сличан начин добијамо из

$$sin^n x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^n}{(2\, i)^n}$$
$$= \frac{1}{(2\, i)^n} \left| \begin{array}{l} e^{inx} - \binom{n}{1} e^{i(n-2)x} + \binom{n}{2} e^{i(n-4)x} - \ldots \\ \pm e^{-inx} \mp \binom{n}{1} e^{-i(n-2)x} \pm \binom{n}{2} e^{-i(n-4)x} \mp \ldots \end{array} \right|$$

за парно n

$$sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left\{ cos\, n x - \binom{n}{1} cos\,(n-2)\, x + \binom{n}{2} cos\,(n-4)\, x - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \right\},$$

а за непарно n

$$sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \left\{ sin\, n\, x - \binom{n}{1} sin\,(n-2)\, x + \binom{n}{2} sin(n-4)\, x - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} sin\, x \right\}.$$

1. Пример.

$$cos^8 x = \frac{1}{2^7} \left\{ cos\, 8\, x + 8\, cos\, 6\, x + 28\, cos\, 4\, x + 56\, cos\, 2\, x + 70 \right\}$$

$$\int cos^8 x\, d\, x = \frac{1}{2^7} \int cos\, 8\, x\, d\, x + \frac{1}{2^4} \int cos\, 6\, x\, d\, x + \frac{7}{2^5} \int cos\, 4\, x\, d\, x + \frac{7}{2^4} \int cos\, 2\, x\, d\, x$$
$$+ \frac{35}{2^6} \int d\, x =$$
$$= \frac{1}{2^{10}} \int cos\, 8\, x\, d\, 8\, x + \frac{1}{3\,.\,2^5} \int cos\, 6\, x\, d\, 6\, x + \frac{7}{2^7} \int cos\, 4\, x\, d\, 4\, x$$
$$+ \frac{7}{2^5} \int cos\, 2\, x\, d\, 2\, x + \frac{35}{2^6}\, x =$$
$$= \frac{1}{2^{10}} sin\, 8\, x + \frac{1}{3\,.\,2^5} sin\, 6\, x + \frac{7}{2^7} sin\, 4\, x + \frac{7}{2^5} sin\, 2\, x + \frac{35}{2^6}\, x + C.$$

2. Пример.

$$cos^5 x = \frac{1}{2^4} \left\{ cos\, 5\, x + 5\, cos\, 3\, x + 10\, cos\, x \right\}$$

$$\int cos^5 x\, d\, x = \frac{1}{2^4} \int cos\, 5\, x\, d\, x + \frac{5}{2^4} \int cos\, 3\, x\, d\, x + \frac{5}{2^3} \int cos\, x\, d\, x$$
$$= \frac{1}{80} \int cos\, 5\, x\, d\, 5\, x + \frac{5}{48} \int cos\, 3\, x\, d\, 3\, x + \frac{5}{8} \int cos\, x\, d\, x$$
$$= \frac{1}{80} sin\, 5\, x + \frac{5}{48} sin\, 3\, x + \frac{5}{8} sin\, x + C.$$

3. Пример

$$sin^6 x = \frac{(-1)^3}{2^5} \left\{ cos\, 6\, x - 6\, cos\, 4\, x + 15\, cos\, 2\, x - 20 \right\}$$

$$\int sin^6 x\, d\, x = -\frac{1}{2^5} \int cos\, 6\, x\, d\, x + \frac{3}{2^4} \int cos\, 4\, x\, d\, x - \frac{15}{2^5} \int cos\, 2\, x\, d\, x + \frac{5}{2^3} \int d\, x$$
$$= -\frac{1}{3\,.\,2^6} \int cos\, 6\, x\, d\, 6\, x + \frac{3}{2^6} \int cos\, 4\, x\, d\, 4\, x - \frac{15}{2^6} \int cos\, 2\, x\, d\, 2\, x + \frac{5}{2^3} \int d\, x$$
$$= -\frac{1}{3\,.\,2^6} sin\, 6\, x + \frac{3}{2^6} sin\, 4\, x - \frac{15}{2^6} sin\, 2\, x + \frac{5}{2^3}\, x + C.$$

4. Пример.

$$sin^3 x = \frac{-1}{2^2} \left\{ sin\, 3\, x - 3\, sin\, x \right\}$$

$$\int sin^3 x\, d\, x = -\frac{1}{4} \int sin\, 3\, x\, d\, x + \frac{3}{4} \int sin\, x\, d\, x = -\frac{1}{12} \int sin\, 3\, x\, d\, 3\, x + \frac{3}{4} \int sin\, x\, d\, x$$
$$= \frac{1}{12} cos\, 3\, x - \frac{3}{4} cos\, x + C.$$

17. Интегралење диференциала који имају вид производа из степена синуса и косинуса. — Отуда што је

$$d\,(sin^{n-1} x\,.\, cos^{p+1} x) = [(n-1)\, sin^{n-2} x\,.\, cos^{p+2} x - (p+1)\, sin^n x\,.\, cos^p x]\, d\, x$$

или, кад заменимо на десној страни $cos^{p+2} x = cos^p x\, (1 - sin^2 x)$,

$$d\,(sin^{n-1} x\,.\, cos^{p+1} x) = (n-1)\, sin^{n-2} x\,.\, cos^p x\,.\, d\, x - (n+p)\, sin^n x\,.\, cos^p x\,.\, d\, x$$

добијамо интегралењем

$$sin^{n-1} x\,.\, cos^{p+1} x =$$
$$(n-1) \int sin^{n-2} x\,.\, cos^p x\,.\, d\, x - (n+p) \int sin^n x\,.\, cos^p x\,.\, d\, x,$$

одакле

$$1)\quad \int sin^n x \,.\, cos^p x \,.\, dx = -\frac{sin^{n-1} x \,.\, cos^{p+1} x}{n+p} + \frac{n-1}{n+p}\int sin^{n-2} x \,.\, cos^p x \,.\, dx.$$

Из ове формуле видимо како зе задати интеграл вида $\int sin^n x \,.\, cos^p x \,.\, dx$ може да сведе на други интеграл, који има исти вид, али је ипак простији од задатог у толико што је један од изложитеља (у овоме случају изложитељ n) смањен. Ту операцију треба продужити и даље све док дотични изложитељ не смањимо до 1 или до 0.

1. *Пример.*

$$\int sin^2 x \,.\, cos^p x \,.\, d\,x = -\frac{sin\, x \,.\, cos^{p+1} x}{p+2} + \frac{1}{p+2}\int cos^p x \,.\, d x.$$

2. *Пример.*

$$\int sin^3 x\, cos^p x \,.\, d\,x$$

$$= -\frac{sin^2 x \,.\, cos^{p+1} x}{p+3} + \frac{2}{p+3}\int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, d\,x$$

$$= -\frac{sin^2 x \,.\, cos^{p+1} x}{p+3} - \frac{2}{p+3}\int cos^p x \,.\, d\, cos\, x$$

$$= -\frac{sin^2 x \,.\, cos^{p+1} x}{p+3} - \frac{2\, cos^{p+1} x}{(p+3)\,.\,(p+1)} + C.$$

Напомена. Кад у формули 1) место x ставимо $\frac{\pi}{2} - x$, променимо n и p узајамно, добијамо образац

$$2)\quad \int sin^n x \,.\, cos^p x \,.\, dx = \frac{sin^{n+1} x \,.\, cos^{p-1} x}{n+p} + \frac{p-1}{n+p}\int sin^n x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, dx,$$

којим се смањује изложитељ косинуса.

1. *Пример.*

$$\int sin^n x \,.\, cos^2 x \,.\, dx = \frac{sin^{n+1} x \,.\, cos\, x}{n+2} + \frac{1}{n+2}\int sin^n x \,.\, dx.$$

2. *Пример.*

$$\int sin^n x \,.\, cos^3 x \,.\, dx =$$

$$= \frac{sin^{n+1} x \,.\, cos^2 x}{n+3} + \frac{2}{n+3}\int sin^n x \,.\, cos\, x \,.\, dx$$

$$= \frac{sin^{n+1} x \,.\, cos^2 x}{n+3} + \frac{2}{n+3}\int sin^n x \,.\, d\, sin\, x$$

$$= \frac{sin^{n+1} x \,.\, cos^2 x}{n+3} + \frac{2\, sin^{n+1} x}{(n+3)\,(n+1)} + C.$$

18. Други начин интеграљења диференциала који имају вид степена синуса или косинуса. — Ставимо у формули 1) прошлога члана $p = 0$, па ћемо добити овај образац

$$\int sin^n x \,.\, dx = -\frac{sin^{n-1} x \,.\, cos\, x}{n} + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2} x \,.\, dx. \qquad (1$$

Тако исто, кад у формули 2) предходећег члана заменимо $n = 0$, налазимо аналогни образац

$$\int cos^p x \,.\, dx = \frac{sin\, x \,.\, cos^{p-1} x}{p} + \frac{p-1}{p}\int cos^{p-2} x \,.\, dx. \qquad (2$$

Примери за образац 1)

$$\int sin^2 x \,.\, dx = -\frac{sin\, x \,.\, cos\, x}{2} + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{sin\; 2\, x}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

$$\int sin^3 x \,.\, dx = -\frac{sin^2 x \,.\, cos\, x}{3} + \frac{2}{3}\int sin\, x \,.\, dx = -\frac{sin^2 x \,.\, cos\, x}{3} - \frac{2}{3} cos\, x + C.$$

$$\int sin^4 x \,.\, dx = -\frac{sin^3 x \,.\, cos\, x}{4} + \frac{3}{4}\int sin^2 x \,.\, dx$$

$$= -\frac{sin^3 x \,.\, cos\, x}{4} - \frac{3\, sin\, 2\, x}{16} + \frac{3\, x}{8} + C.$$

Примери за образац 2

$$\int cos^2 x \,.\, dx = \frac{sin\, x \,.\, cos\, x}{2} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{sin\; 2\, x}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

$$\int cos^3 x \,.\, dx = \frac{sin\, x \,.\, cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int cos\, x \,.\, dx = \frac{sin\, x \,.\, cos^2 x}{3} + \frac{2}{3} sin\, x + C.$$

$$\int cos^4 x \,.\, dx = \frac{sin\, x \,.\, cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int cos^2 x \,.\, dx = \frac{sin\, x \,.\, cos^3 x}{4} + \frac{3\, sin\, 2\, x}{16} + \frac{3\, x}{8} + C.$$

19. Продужење члана 17. — На случај да је у задатоме интегралу $\int sin^n x \,.\, cos^p x \,.\, dx$ један од изложитеља одречан формуле 1) и 2) у чл. 17., кад у њима заменимо p са $-p$ односно n са $-n$, гласе

$$\int \frac{sin^n x}{cos^p x} dx = -\frac{sin^{n-1} x}{(n-p)\, cos^{p-1} x} + \frac{n-1}{n-p}\int \frac{sin^{n-2} x}{cos^p x} dx \qquad (1$$

$$\int \frac{cos^p x}{sin^n x} dx = \frac{cos^{p-1} x}{(p-n)\, sin^{n-1} x} + \frac{p-1}{p-n}\int \frac{cos^{p-2} x}{sin^n x} dx. \qquad (2$$

Помоћу истих формула 1) и 2) у чл. 17., кад у првој заменимо n са $-n$, у другој p са $-p$, добијамо, на врло прост начин, ове обрасце

$$3)\qquad \int\frac{cos^p\,x}{sin^n\,x}\,dx = -\frac{cos^{p+1}\,x}{(n-1)\,sin^{n-1}\,x} - \frac{p-n+2}{n-1}\int\frac{cos^p\,x}{sin^{n-2}\,x}\,dx$$

$$4)\qquad \int\frac{sin^n\,x}{cos^p\,x}\,dx = \frac{sin^{n+1}\,x}{(p-1)\,cos^{p-1}\,x} - \frac{n-p+2}{p-1}\int\frac{sin^n\,x}{cos^{p-2}\,x}\,dx.$$

20. Продужење члана 18. — За израчунавање интеграла, какве смо посматрали у чл. 18. на случај да је изложитељ синуса односно косинуса негативан, добијамо подесне обрасце, кад у формулама 3) и 4) у чл. 19. ставимо $p = 0$ односно $n = 0$. Налазимо ове обрасце.

$$1)\qquad \int\frac{dx}{sin^n\,x} = -\frac{cos\,x}{(n-1)\,sin^{n-1}\,x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{sin^{n-2}\,x}$$

$$2)\qquad \int\frac{dx}{cos^p\,x} = \frac{sin\,x}{(p-1)\,cos^{p-1}\,x} + \frac{p-2}{p-1}\int\frac{dx}{cos^{p-2}\,x}.$$

21. Интегралење диференциала који имају вид степена тангенте или котангенте. — Заменом $n = p$ у формули 4) чл. 19. добијамо образац

$$\int tg^n\,x\,.\,dx = \frac{sin^{n+1}\,x}{(n-1)\,cos^{n-1}\,x} - \frac{2}{n-1}\int\frac{sin^n\,x}{cos^{n-2}\,x}\,dx.$$

Други и подеснији начин за израчунавање интеграла вида $\int tg^n\,x\,.\,dx$ изводимо из диференциалне формуле

$$d\,tg^{n-1} = x\,(n-1)\,tg^{n-2}\,x\,\frac{dx}{cos^2\,x} = (n-1)\,tg^{n-2}\,(1 + tg^2\,x)\,dx =$$

$$= (n-1)\,tg^{n-2}\,x\,.\,dx + (n-1)\,tg^n\,x\,.\,dx,$$

одакле интегралењем

$$tg^{n-1}\,x = (n-1)\int tg^{n-2}\,x\,.\,dx + (n-1)\int tg^n\,x\,.\,dx$$

или

$$1)\qquad \int tg^n\,x\,.\,dx = \frac{tg^{n-1}\,x}{n-1} - \int tg^{n-2}\,x\,.\,dx.$$

Кад овде место x узмемо $\frac{\pi}{2} - x$ добијамо аналогни образац

$$2)\qquad \int cotg^n\,x\,.\,dx = -\frac{cotg^{n-1}\,x}{n-1} - \int cotg^{n-2}\,x\,.\,dx.$$

Примери.

$$\int tg^2\,x\,.\,dx = tg\,x - \int dx = tg\,x - x + C.$$

$$\int tg^3\,x\,.\,dx = \frac{tg^2\,x}{2} - \int tg\,x\,.\,dx = \frac{tg^2\,x}{2} + l\,cos\,x + C.$$

$$\int tg^4\,x\,.\,dx = \frac{tg^3\,x}{3} - \int tg^2\,x\,.\,dx = \frac{tg^3\,x}{3} - tg\,x + x + C.$$

$$\int tg^5\,x\,.\,dx = \frac{tg^4\,x}{4} - \int tg^3\,x\,.\,dx = \frac{tg^4\,x}{4} - \frac{tg^2\,x}{2} - l\,cos\,x + C.$$

22. Интегралење диференциала који имају вид производа из степена лука и синуса или косинуса истог лука. — Интеграле вида

$$\int x^n\,sin\,x\,.\,dx \quad \text{и} \quad \int x^n\,cos\,x\,.\,dx,$$

где је n цео и положан број, изналазимо помоћу методе делимичног интегралења.[1])

Ставимо у $\int x^n\,sin\,x\,.\,dx$,

$$u = x^n,\ dv = sin\,x\,.\,dx,$$

дакле

$$du = nx^{n-1}\,.\,dx,\ v = -\,cos\,x,$$

па ћемо добити образац

$$\int x^n\,sin\,x\,.\,dx = -\,x^n\,cos\,n + n\int x^{n-1}\,cos\,x\,.\,dx, \qquad (1$$

којим задати интеграл сводимо на други сличан, али ипак простији интеграл у толико што је изложитељ лука смањен за јединицу. Продужујући овако и даље долазимо, најзад, до једног од основних интеграла 4) или 5) у чл. 5.

На исти начин (помоћу методе делимичног интегралења) изводимо формулу

$$\int x^n\,cos\,x\,.\,dx = x^n\,sin\,x - n\int x^{n-1}\,sin\,x\,.\,dx. \qquad (2$$

---

[1]) Види Пример 3. чл. 7.

Ако је изложитељ лука негативан (али цео), добићемо потребне обрасце, кад у формулама 1) и 2) заменимо n са $-n$, разрешимо дотичне једначине по интегралу на десној страни и ставимо $n+1=m$ односно $n=m-1$. Обрасци гласи

$$3)\qquad \int \frac{\cos x \,.\, dx}{x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{\sin x \,.\, dx}{x^{m-1}}$$

$$4)\qquad \int \frac{\sin x \,.\, dx}{x^m} = -\frac{\sin x}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{\cos x \,.\, dx}{x^{m-1}}.$$

Ове формуле 3) и 4), које, иначе, важе за свако цело и положно m (па и за $m=0$), чине изузетак за $m=1$. Према томе се интеграли вида

$$\int \frac{\cos x \,.\, dx}{x^m} \text{ и } \int \frac{\sin x \,.\, dx}{x^m}$$

своде сви на ова два

$$\int \frac{\sin x \,.\, dx}{x} \text{ и } \int \frac{\cos x \,.\, dx}{x}.$$

Први се зове *интегралсинус* и бележи са Six, а други *интегралкосинус* Cix. Њихова вредност се израчунава помоћу бесконачних редова.

Приметимо, најзад, да се на интеграле вида 1) и 2) доводе интеграли облика

$$\int (arc \cos x)^n \,.\, dx \text{ и } \int (arc \sin x)^n \,.\, dx.$$

Заменом

$$arc \sin x = y, \text{ дакле } x = \sin y,\ dx = \cos y \,.\, dy$$

следује

$$\int (acs \sin x)^n \,.\, dx = \int y^n \cos y \cdot dy.$$

Аналогно кад ставимо

$$arc \cos x = y, \text{ дакле } x = \cos y,\ dx = -\sin y \,.\, dy$$

следује

$$\int (arc \cos x)^n \,.\, dx = -\int y^n \sin y \,.\, dy.$$

5. Интегралење експоненциалних и логаритамских функција.

23. Једна врста експоненциалних интеграла. — Врло важни интеграли из ове групе јесу ови

$$\int x^n e^{px} \,.\, dx.$$

Ако је n цело и положно (број p може бити ма какав) задати интеграл изналазимо помоћу методе делимичног интегралења.[1] Ставимо

$$u = x^n,\ dv = e^{px} \,.\, dx,$$

дакле

$$du = nx^{n-1} \,.\, dx,\ v = \frac{1}{p}\, e^{px},$$

па ћемо добити

$$\int x^n e^{px} \,.\, dx = \frac{x^n e^{px}}{p} - \frac{n}{p}\int x^{n-1} e^{px} \,.\, dx. \qquad (1$$

Продужујући ово делимично интегралење долазимо најзад до основног интеграла

$$\int e^{px} \,.\, dx = \frac{1}{p}\, e^{px}.$$

Враћајући се натраг и поступном заменом добијамо формулу

$$\int x^n e^{pz} \,.\, dx =$$

$$e^{px} \,.\, \left\{ \frac{x^n}{p} - \frac{nx^{n-1}}{p^2} + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{p^3} - \frac{n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}}{p^4} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2 \,.\, 1}{p^{n+1}} \right\} + C. \qquad (2$$

Примери.

$$\int xe^{px} \,.\, dx = e^{px} \,.\, \left\{ \frac{x}{p} - \frac{1}{p^2} \right\} + C.$$

$$\int x^2 e^{px} \,.\, dx = e^{px} \,.\, \left\{ \frac{x^2}{p} - \frac{2\,x}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right\} + C.$$

$$\int x^3 e^{pz} \,.\, dx = e^{px} \,.\, \left\{ \frac{x^3}{p} - \frac{3\,x^2}{p^2} + \frac{6\,x}{p^3} - \frac{6}{p^4} \right\} + C.$$

Ако је изложитељ n одречан, али цео, заменићемо у формули 1) n са $-n$, решићемо је по интегралу на десној страни (јер је у њему

---

[1] Види Пример 2. чл. 7.

изложитељ од x већи) и обележићемо $n+1=m$, дакле $n=m-1$. Тако добивени образац гласи

$$3)\qquad \int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x^m}=-\frac{e^{px}}{(m-1)\,x^{m-1}}+\frac{p}{m-1}\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x^{m-1}}.$$

Ова формула важи за свако цело и положно m (број p може бити ма какав) изузев за $m=1$. Према томе видимо да се израчунавање интеграла вида

$$\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x^m}$$

своди на крају на најпростији интеграл те врсте, а то је

$$\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x}.$$

Како се овај последњи изналази видићемо код методе интеграљења помоћу бесконачних редова.

Примери:

$$\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x^2}=-\frac{e^{px}}{x}+p\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x}$$

$$\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x^3}=-\frac{e^{px}}{2\,x^2}+\frac{p}{2}\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x^2}=-\frac{e^{px}}{2\,x}\left(\frac{1}{x}+p\right)+\frac{p^2}{2}\int\frac{e^{px}\,.\,dx}{x}.$$

24. Логаритамски интеграли. — На интеграле, које смо посматрали у прошлом члану, своде се логаритамски интеграли, који имају овакав вид

$$\int(lx)^n\,x^q\,.\,dx\quad\text{или}\quad\int\frac{x^q\,.\,dx}{(lx)^m},$$

јер ако ставимо

$$lx=y,\ \text{дакле}\ x=e^y,\ dx=e^y\,.\,dy$$

и означимо $q+1=p$, први се интеграл јавља у форми под 1), а други у форми под 3) чл. 23.

Најпростији интеграл из групе

$$\int\frac{x^q\,.\,dx}{(lx)^m}\quad\text{то је}\quad\int\frac{dx}{lx},$$

такозвани *интегрални логаритам* и бележи се са lix. Његова вредност се добија интеграљењем помоћу бесконачних редова.

25. Интеграљење диференциала који има вид производа из једне експоненциалне и једне тригонометриске функције. — Делимичним интеграљењем следује

$$\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx.$$

Из ових двеју једначина налазимо

$$\int e^{ax}\cos bx\,.\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C. \qquad (1$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,.\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C. \qquad (2$$

До истог бисмо ресултата дошли да пођемо од

$$\int e^{(a+ib)x}\,.\,dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib},$$

дакле

$$\int e^{ax}(\cos x+i\sin bx)\,dx=\frac{e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)}{a+ib}$$

$$=\frac{(a-ib)\,e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)}{a^2+b^2}$$

и одвојимо лево и десно стварни део од имагинарног.

6. Одређени интеграли.

26. О одређеним интегралима уопште. — У чл. 2. објаснили смо појам одређеног интеграла и геометриски га протумачили. Значај одређеног интеграла

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx$$

можемо, према ономе што смо на поменутом месту већ казали, да представимо као границу којој тежи збир бесконачно много бесконачно малих сабирака, као какви се имају сматрати поједине вредности диференциала $f(x)\,dx$, кад предпоставимо да се x поступно мења од a до b. а функција $f(x)$, при томе, остаје за све време непрекидна.

Отуда што је

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

следује правило:

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Из тога што је

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad \int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)$$

изводимо ово друго правило:

2) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Оба ова правила је лако разумети кад се узме у обзир геометрисчо тумачење интеграла.

На исти начин бисмо могли да разложимо задати интеграл и на већи број сличних интеграла узевши код првог и последњег интеграла за доњу односно горњу границу, доњу односно горњу границу задатог интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^e f(x)\,dx + \int_e^g f(x)\,dx + \ldots + \int_k^b f(x)\,dx.$$

Напомена. Ми смо горе претпоставили да су границе интеграла (тј. a и b) коначне, а функција $f(x)$ да је у целом интервалу од a до b непрекидна. Узмимо да је једна граница нпр. b бесконачна, онда дотични интеграл може да буде, према случају, коначан, бесконачан или неодређен, као што се можемо уверити из следећих примера.

1. Пример.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}.\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_{x=0}^{x=\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = 1.$$

2. Пример.

$$\int_a^{\infty} e^{x}.\,dx = \Big[\,e^{x}\Big]_{x=a}^{x=\infty} = e^{\infty} - e^{a} = \infty.$$

3. Пример.

$$\int_0^{\infty} \cos x\,.\,dx = \Big[\sin x\Big]_{x=0}^{x=\infty} = \sin\infty - \sin 0 = \sin\infty = ?$$

тј. неодређено.

27. Дефиниције. — Ако функција $f(x)$ за $x = b$ постаје бесконачна, онда се под $\int_a^b f(x)\,dx$ има да разуме граница којој тежи $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ кад замислимо да ε опада у бесконачност. Тако исто треба под $\int_a^b f(x)\,dx$, на случај да је $f(a) = \infty$, разумети границу $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ при бесконачном опадању $\varepsilon - a$. Најзад ако $f(x)$ постаје бесконачно за извесно $x = c$ између a и b, онда треба узети овако:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta=0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx.$$

На исти начин треба ствар разумети ако функција $f(x)$ и више пута између a и b постаје прекидна.

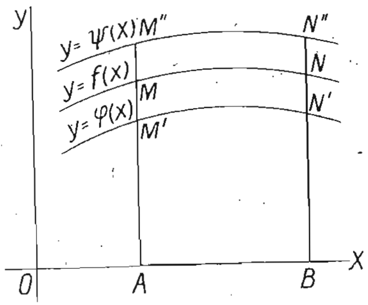
28. Приближне вредности одређеног интеграла. — У многим случајевима, кад нисмо у стању да интегралимо диференциал $f(x)\,dx$, ми можемо да одредимо две вредности између којих лежи вредност дотичног интеграла.

Узмимо да је за све вредности x-а између a и b

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x),$$

онда је очевидно и

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$



Сл. 2.

Овај закључак је по себи јасан, а постаје потпуно очигледан кад се узме у обзир геометриски значај интеграла. Види сл. 2.

Пример.

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Овде је

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

дакле

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dx < \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} < \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}} < arc\ sin\ \frac{1}{2} - arc\ sin\ \frac{1}{4}$$

$$0{,}25 < \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 0{,}2709.$$

29. Примери. —

1. Пример.

$$\int_0^1 x^n\,.\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

2. Пример.

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\,lx\,\right]_a^b = l\left(\frac{b}{a}\right).$$

3. Пример.

$$\int_0^1 e^x\,.\,dx = \left[\,e^x\,\right]_0^1 = e - 1.$$

4. Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ x\ .\ dx = \left[\,sin\,x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

5. Пример.

Ми знамо да је $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x + C.$ Но пошто је функција $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$ за $x = 1$, то онда (на основу чл. 27.) да бисмо нашли $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ треба да ставимо

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon = 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon = 0} \left[\,arc\ sin\ (1-\varepsilon) - arc\ sin\ 0\,\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Исти нам ресултат даје, у овоме случају, и непосредна замена

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\,arc\ sin\ x\,\right]^1 = \frac{\pi}{2}.$$

6. Пример.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\,arctg\,x\,\right]_0 = \frac{\pi}{4}.$$

7. Пример.

$$\int_0^2 e^{ax}\ cos\ bx\ .\ dx = \left[\frac{e^{ax}\,(a\,cos\,bx + b\,sin\,bx)}{a^2+b^2}\right]_0^{2\pi}$$

(в једн. 1 у чл. 25.), које, ако предпоставимо да је b цео број,

$$= \frac{a}{a^2+b^2}(\,e^{2\,a\pi} - 1).$$

8. Пример.

На основу формуле 1) у чл. 18. изводимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,.\,dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}\,x\,.\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-4}\,x\,.\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,\frac{n-5}{n-4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-6}\,x\,.\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,\frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{n-2m+1}{n-2m+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2m}\,x\ .\ dx$$

Ставимо $n = 2\,m$, па ћемо добити

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2m} x\,.\,dx = \frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\,\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\,.\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\,\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2}.$$

Ако је изложитељ n непаран: $n = 2\,m + 1$, онда имамо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2m+1}\,x\,.\,dx = \frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\,\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\,\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\,.\,dx$$

$$= \frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\,\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\,.\,\frac{2}{3}.$$

9. Пример.

Ако у формули 2) чл. 23. ставимо $p = -1$ и узмемо интеграл између граница 0 и x добићемо

$$\int_0^x x^n e^{-x}\,.\,dx = -\,e^{-x}\left\{x^n + nx^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2}\right.$$

$$\left. + \,n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} + \ldots + n!\right\} + n!$$

Ако као горњу границу интеграла узмемо $x = \infty$, онда је за ту вредност x-а

$$e^{-x}\left\{x^n + nx^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2} + \ldots + n!\right\}$$

$$= \frac{x^n + nx^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2} + \ldots + n!}{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots} = 0$$

и према томе

$$\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,.\,dx = n! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n.$$

Ово је један од *Ојлер*[1]) — ови интеграла. Он се зове још и *Гамафункција* и бележи се са $\Gamma\,(u+1)$.

---

[1]) Leonhard Euler (1707—1783).

7. Интегралење помоћу бесконачних редова.

30. Метода. — Да бисмо интегралили један диференциал $f(x)\,d\,(x)$, принуђени смо, често пута, да употребимо методу интегралења помоћу бесконачних редова. Метода се састоји у овоме: задату функцију $f(x)$ развијамо у конвергентан ред и пошто помножимо сваки члан са $d\,x$ интегралимо члан по члан у означеним границама. На тај начин добијамо ресултат (интеграл) у форми бесконачног реда.

Нека је

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + R_n. \tag{1}$$

Множећи лево и десно са dx и интегралећи члан по члан између граница a и b добијамо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

$$= U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \int_a^b R_n\,dx \tag{2}$$

Ако је *диференциални ред* 1) збирљив за $x = a$ и $x = b$ и за све вредности x-а између a и b, онда, очевидно, можемо n да замислимо у толикој мери велико да постане остатак $R_n < \varepsilon$, где је ε једна произвољно мала количина. Тада је у *интегралноме реду* 2) члан

$$\int_a^b R_n\,dx < \int_a^b \varepsilon\,d\,x \quad \text{или} \quad \int_a^b R_n\,dx < \varepsilon\,(b-a).$$

То, што и у интегралном реду остатак, при бесконачном растењу n-а, у бесконачност опада, значи да је интегрални ред конвергентан и да је његов збир $= \int_a^b f(x)\,d\,x.$

Напомена. Овакав начин интегралења може да се примени и тада, ако диференциални ред, иначе збирљив за све x-е, мање од b, постаје незбирљив за $x = b$, под условом да интегрални ред остаје конвергентан. Јер отуда што је за ма како малу вредност од δ

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} u_1\,dx + \int_a^{b-\delta} u_2\,dx + \int_a^{b-\delta} u_3\,dx + \ldots,$$

а с обзиром на то што су обе стране ове једначине непрекидне функције од x и вазда једна другој равне, знамо (на основу познатог начела о границама из Алгебарске Анализе) да limes леве стране мора да буде раван limes-у десне стране, limes-и узети за $\delta = 0$. На тај начин добијамо опет образац 2).

31. Примери. —

1. Пример. Да бисмо нашли

$$\int \frac{dx}{1+x}$$

развићемо функцију $\frac{1}{1+x}$ у ред. Обичним дељењем добијамо

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}$$

Дакле

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int \frac{x^n\,dx}{1+x}.$$

Диференциални је ред збирљив за $-1 < x < 1$, па дакле и интегрални ред. Знајући да је

$$\int \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x) + C$$

закључујемо

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$$

Диференциални ред за $x = 1$ престаје бити конвергентан: $1 - 1 + 1 - 1 + - \dots$, а интегрални ред остаје и за $x = 1$ збирљив: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$ и представља $l\,2$. На основу Напомене у прошлом члану јесте

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

Даље изводимо

$$\int_1^x \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x) - l\,2 = l\left(\frac{1+x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$
$$\dots - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right).$$

2. Пример. Узмимо

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C.$$

Диференциални ред

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \dots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^{n+1}}{1+x^2}$$

збирљив је за $-1 < x < 1$, а тако исто и интегрални ред

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x^2}.$$

Одавде изводимо *Лајбниц*[1])-ов ред.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots$$

Диференциални ред за $x = 1$ није више конвергентан, а интегрални јесте и на основу Напомене у претходном члану постоји формула

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = art\,tg\,1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

3. Пример. Ми знамо да је

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x.$$

Развимо по биномном обрасцу функцију

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Добијамо диференциални ред

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \dots,$$

који је збирљив за $-1 < x < 1$. Интеграљењем налазимо да је

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^7}{7} + \dots$$

Пошто је интегрални ред конвергентан и за $x = 1$, постоји (в. Напомену у чл. 30.) формула

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7} + \dots$$

Врло употребљив ред за израчунавање броја π добијамо, кад узмемо за горњу границу интеграла $\pi = \frac{1}{2} = sin\,\frac{\pi}{6}$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3\,.\,3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{2^5\,.\,5} + \dots$$

---

[1]) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716).

4. Пример. Да бисмо одредили

$$\int \frac{e^{mx}}{x}\, d\,x$$

развићемо по познатом обрасцу

$$\frac{e^{mx}}{x} = \frac{1}{x}\left\{1 + \frac{m\,x}{1} + \frac{m^2\,x^2}{2!} + \frac{m^3\,x^3}{3!} + \frac{m^4\,x^4}{4!} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{m}{1} + \frac{m^2\,x}{2!} + \frac{m^3\,x^2}{3!} + \frac{m^4\,x^3}{4!} + \ldots$$

Овај је ред конвергентан за све вредности x-а изузев за $x = 0$.

Интеграљењем добијамо

$$\int \frac{e^{mx}\,d\,x}{x} = C + lx + m\,x + \frac{m^2\,x^2}{2!\,2} + \frac{m^3\,x^3}{3!\,3} + \frac{m^4\,x^4}{4!\,4} + \ldots$$

За $m = 1$ имамо *интегрални логаритам*

$$\int \frac{e^x\,d\,x}{x} = C + l\,x + x + \frac{x^2}{2!\,2} + \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^4}{4!\,4} + \ldots$$

или ако заменимо $x = ly$

$$\int \frac{d\,y}{l\,y} = C + l\,ly + ly + \frac{(l\,y)^2}{2!\,2} + \frac{(ly)^3}{3!\,3} + \frac{(ly)^4}{4!\,4} + \ldots$$

Ставимо у горњој формули $m = i$, па ћемо добити

$$\int \frac{e^{ix}d\,x}{x} = \int \frac{(\cos x + i \sin x)\; d\,x}{x} = \int \frac{\cos x\,.\,d\,x}{x} + i \int \frac{\sin x\,.\,dx}{x}$$

$$= l\,x - \frac{x^2}{2!\,2} + \frac{x^4}{4!\,4} - \frac{x^6}{6!\,6} + - \ldots + i\left\{x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - + \ldots\right\},$$

које се разлаже на *интегрални синус*

$$\int \frac{\sin x\,.\,d\,x}{x} = x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \frac{x^7}{7!\,7} + - \ldots$$

и *интегрални косинус.*

$$\int \frac{\cos x\,.\,d\,x}{x} = l\,x - \frac{x^2}{2!\,2} + \frac{x^4}{4!\,4} - \frac{x^5}{6!\,6} + - \ldots$$

5. Пример. Интеграле вида

$$\int x^n \cos x\,.\,dx \quad \text{и} \quad \int x^n \sin x\,.\,d\,x$$

(в. чл. 22.) изналазимо кад заменимо у њима

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}$$

и извршимо интеграљење помоћу формуле 2) у чл. 23. Ресултат је овај

$$\int x^n \cos x\,.\,dx = \frac{1}{2}\int x^n\,(e^{ix} + e^{-ix})\,.\,dx = \frac{1}{2}\int x^n\,e^{ix}\,.\,dx + \frac{1}{2}\int x^n\,e^{-ix}\,.\,d\,x$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{ix}\left\{\frac{x^n}{i} + n\,x^{n-1} - \frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{i} - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}\ldots\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\,e^{-ix}\left\{\frac{x^n}{-i} + n\,x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{i} - n\,(n-1)\,x^{n-3}\ldots\right\}$$

$$= x^n \sin x + n\,x^{n-1} \cos x - n\,(n-1)\,x^{n-2} \sin x - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} \cos x \ldots$$

$$= \left\{x^n - n\,(n-1)\,x^{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,x^{n-4} - + \ldots\right\} \sin x$$

$$+ \left\{n\,x^{n-1} - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,x^{n-5} - + \ldots\right\} \cos x$$

$$\int x^n \sin x\,.\,dx = \frac{1}{2\,i}\int x^n\,(e^{ix} - e^{-ix})\,.\,dx = \frac{1}{2\,i}\int x^n\,e^{ix}\,.\,d\,x - \frac{1}{2\,i}\int x^n\,e^{-ix}.\,dx$$

$$= \frac{e^{ix}}{2\,i}\left\{\frac{x^n}{i} + n\,x^{n-1} - \frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{i} - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}\ldots\right\}$$

$$- \frac{e^{-ix}}{2\,i}\left\{\frac{x}{-i} + n\,x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{i} - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}\ldots\right\}$$

$$= -x^n \cos x + n\,x^{n-1} \sin x + n\,(n-1)\,x^{n-2} \cos x - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} \sin x \ldots$$

$$= \Big\{n\,x^{n-1} - n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}$$

$$+ n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,x^{n-5} - + \ldots\Big\} \sin x$$

$$- \left\{x^n - n\,(n-1)\,x^{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,x^{n-4} - + \ldots\right\} \cos x.$$

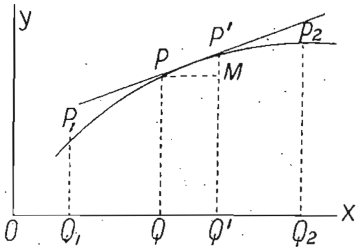
II.

Примена Интегралног Рачуна у Геометрији.

---

1. Линије у равни.

32. Ректификација линија у правоуглим координатама. — Под тангентом једне криве линије разумемо праву која пролази кроз (најмање) две бесконачно приближне тачке те линије. То значи да се крива линија и њена тангента поклапају у двема бесконачно приближним тачкама. Према томе можемо лук криве линије, који лежи између такве две тачке, да заменимо комадом дирке, тј. да га сматрамо као праволиниски елеменат. Из правоуглог $\triangle P P' M$, у коме је $PM = dx$, $P'M = dy$ добијамо, на тај начин, за диференцијал лука



Сл. 3.

1) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx,$$

а за дужину лука $P_1 P_2$

2) $$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$$

33. Ректификација линија у поларним координатама. — Заменом у горње обрасце

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad dx = \cos \varphi \, . \, d\varrho - \varrho \sin \varphi \, . \, d\varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi, \qquad dy = \sin \varphi \, . \, d\varrho + \varrho \cos \varphi \, . \, d\varphi,$$

добијамо за поларне координате

1) $$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2} = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} \, . \, d\varphi$$

2) $$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} \, . \, d\varphi.$$

---

34. Примери. —

1. Пример. Из једначине елипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

следује

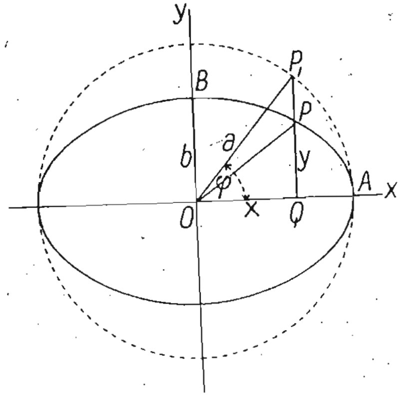
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{bx}{a \sqrt{a^2 - x^2}}$$

и према томе дужина лука BP

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} \, . \, dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} \, . \, dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} \, . \, dx,$$

где је $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, дакле e бројни екцентрицитет елипсе.



Сл. 4.

Овај интеграл за лук s припада категорији елиптичних интеграла, јер кад се доведе на форму $\int \frac{T \, . \, dx}{W \sqrt{X}}$, на коју смо свели интеграле ирационалних функција са квадратним коренима (в. чл. 12.), он добија вид

$$\int \frac{(a^2 - e^2 x^2) \, dx}{\sqrt{(a^2 - e^2 x^2)(a^2 - x^2)}}$$

и садржи, дакле, под кореним знаком полином четвртог степена

$$X = (a^2 - e^2 x^2)(a^2 - x^2).$$

(Види примедбу под 1) у чл. 13.)

Да бисмо извршили интеграл за s ми ћемо га прво претворити у тригонометриски вид, па онда применити интеграљење помоћу бесконачних редова (чл. 30.).

С обзиром што је код елипсе $x < a$, дакле $\frac{x}{a} < 1$, можемо да ставимо - $\cos\varphi$, $x = a \cos\varphi$[1]), $dx = -a \sin\varphi \, . \, d\varphi$ и пошто је за $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имамо

$$s = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2\varphi}{1 - \cos^2\varphi}} \sin\varphi \, . \, d\varphi = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2\varphi} \, . \, d\varphi$$

или, ако корену количину $\sqrt{1 - e^2 \cos^2\varphi}$ развијемо помоћу биномне формул

$$s = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left(1 - \frac{e^2 \cos^2\varphi}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^4 \cos^4\varphi}{4} - \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \frac{e^6 \cos^6\varphi}{6} - \ldots \right) d\varphi.$$

Поједине интеграле, на које се раствара интеграл на десној страни, извршиће по обрасцу 2) у чл. 18. На основу тога обрасца је

$$\int \cos^2\varphi \, . \, d\varphi = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} + C,$$

$$\int \cos^4\varphi \, . \, d\varphi = \frac{\sin\varphi \cos^3\varphi}{4} + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \varphi + C,$$

$$\int \cos^6\varphi \, . \, d\varphi = \frac{\sin\varphi \cos^5\varphi}{6} + \frac{1 \, . \, 5}{4 \, . \, 6} \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} \varphi +$$

итд., дакле

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos^4\varphi \, d\varphi = \frac{\sin\varphi \cos^3\varphi}{4} + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos^6\varphi \, d\varphi = \frac{\sin\varphi \cos^5\varphi}{6} + \frac{1 \, . \, 5}{2 \, . \, 4} \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

итд. Заменом ових вредности у горњи израз за s добијамо за дужину елиптичног лука BP формулу;

---

[1]) На овој замени $x = a \cos\varphi$, $y = b \sin\varphi$ оснива се позната конструкција елипсе помоћу елиптичног шестара. Угао φ зове се *екцентрична аномалија*.

$$s = a \left\{ \frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{e^2}{2}\left[\frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\frac{1}{2} \frac{e^4}{4} \left[\frac{\sin\varphi \cos^3\varphi}{4} + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] +$$

$$\frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} \frac{e^6}{6} \left[\frac{\sin\varphi \cos^5\varphi}{6} + \frac{1 \, . \, 5}{4 \, . \, 6} \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} \sin\varphi \cos\varphi \right.$$

$$\left. + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \ldots \Bigg\}.$$

Ако ставимо овде $\varphi = 0$, тј. ако интеграл за s узмемо између граница $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = 0$ (чему одговара $x = 0$ и $x = a$) добићемо четврт AB елипсе

$$\frac{S}{4} = \frac{a\pi}{2} \left\{1 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 8} e^4\right)^2 - \ldots\right\},$$

а за периферију целе елипсе

$$S = 2a\pi \left\{1 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 8} e^4\right)^2 - \ldots\right\}.$$

Ред на десној страни је конвергентан и његови чланови у толико јаче опадају у колико је екцентрицитет e мањи. За $e = 0$ добијамо познати образац за периферију круга.

Примедба. По немачкоме астроному *Бесел*-у (F. W. Bessel, 1784 — 1846) димензије Земље јесу:

полупречник екватора (велика полуоса) $a = 6\,377\,397{,}156 \; m$
половина обртне осе (мала полуоса) $b = 6\,356\,079{,}175 \; m$
спљоштеност земног сфероида $\frac{a - b}{a} = \frac{1}{293{,}5}$
екцентрицитет меридианске елипсе $e = 0{,}08169683$
периферија екватора (као круга) $= 40\,070\,368 \; m$
периферија меридиана (као елипсе) $= 40\,003\,423 \; m$.

Одавде следује да се дужина меридиана (елипсе) има према дужини екватора (круга) у округлој мери као 998 : 1000.

2. Пример. Из једначине хиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^3} = 1 \quad \text{или} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

следује

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}},$$

а са тиме дужина хиперболичног лука рачунавши га од темена ($x = a$), па до ма које тачке на хиперболи

$$s=\int_a^x\sqrt{1+\left(\frac{b\,x}{a\sqrt{x^2-a^2}}\right)^2}\,.\,d\,x=\int_a^x\sqrt{\frac{(a^2+b^2)\,x^2-a^4}{a^2\,(x^2-a^2)}}\,.\,d\,x=$$

$$=\int_a^x\sqrt{\frac{e^2\,x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,.\,d\,x,$$

где је $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$, дакле e бројни екцентрицитет хиперболе.

Добивени интеграл је елиптичан. Претворићемо га на тригонометриску форму заменом

$$x=\frac{a}{cos\;\varphi}$$

(на којој се оснива позната конструкција хиперболе)

$$dx=\frac{a\,sin\,\varphi\;d\,\varphi}{cos^2\,\varphi}.$$

С обзиром да је за $x=a$, $\varphi=0$ следује

$$s=a\,e\int_0^\varphi\sqrt{1-\frac{cos^2\,\varphi}{e^2}}\;\frac{d\,\varphi}{cos^2\,\varphi}.$$

Корену количину $\sqrt{1-\frac{cos^2\,\varphi}{e^2}}$ развићемо по биномноме правилу и добићемо

$$s=a\,e\int_0^\varphi\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{cos^2\,\varphi}{e^2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{cos^4\,\varphi}{e^4}-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-\frac{1\,.\,1\,.\,3\,\ldots\,(2\,n-3)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\;\;2\,n}\,\frac{cos^{2n}\,\varphi}{e^{2n}}\right)\,\frac{d\,\varphi}{cos^2\,\varphi}$$

$$=a\,e\,tg\,\varphi-\frac{1}{2}\,\frac{a}{e}\;\varphi-\frac{a}{e}\int_0^\varphi\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{cos^2\,\varphi}{e^2}+\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{cos^4\,\varphi}{e^4}+\ldots\right)\,d\,\varphi.$$

Последњи се интеграл раствара на тригонометриске интеграле који се добивају помоћу обрасца 2) у чл. 18.

3. Пример. Из једначине параболе

$$y^2=2\,p\,x$$

следује

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{p}{y},\quad\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2=\frac{p^2}{y^2}=\frac{p^2}{2\,p\,x}=\frac{p}{2\,x},$$

$$s=\int\sqrt{1+\frac{p}{2\,x}}\,.\,d\,x.$$

Да бисмо овај интеграл довели на рационалну форму ставићемо (в. чл. 11.)

$$\sqrt{1+\frac{p}{2x}}=t,\quad\text{дакле } x=\frac{p}{2\,(t^2-1)},\qquad dx=-\frac{p\,t\,d\,t}{(t^2-1)^2},$$

па ћемо добити

$$s=-p\int\frac{t^2\,d\,t}{(t^2-1)^2}=-\frac{p}{2}\int\frac{t\,d\,(t^2-1)}{(t^2-1)^2}=\frac{p}{2}\int t\,d\,(t^2-1)^{-1}.$$

Примењујући методу делимичног интеграљења налазимо

$$s=\frac{p}{2}\,t\,(t^2-1)^{-1}-\frac{p}{2}\int(t^2-1)^{-1}\,.\,d\,t=\frac{p\,t}{2\,(t^2-1)}+\frac{p}{2}\int\frac{d\,t}{1-t^2}$$

$$=\frac{p\,t}{2\,(t^2-1)}+\frac{p}{4}\,l\left(\frac{t+1}{t-1}\right)+C\;\;\text{(в. 1. пример у чл. 8.)}$$

и кад се вратимо промењивој x

$$s=x\sqrt{1+\frac{p}{2\,x}}+\frac{p}{4}\,l\left(\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2\,x}}+1}{\sqrt{1+\frac{p}{2\,x}}-1}\right)+C$$

$$=\sqrt{x\,\left(x+\frac{p}{2}\right)}+\frac{p}{4}\,l\left(\frac{p+4\,x+4\sqrt{x\,\left(x+\frac{p}{2}\right)}}{p}\right)+C.$$

Ако рачунамо лук од темена параболе, узмемо дакле за доњу границу нитеграла $x=0$, имаћемо за дужину параболичног лука формулу

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{p}{2\,x}}\,.\,d\,x=\sqrt{x\left(x+\frac{p}{2}\right)}+\frac{p}{4}\,l\left(\frac{p+4\,x+4\sqrt{x\left(x+\frac{p}{2}\right)}}{p}\right).$$

4. Пример. Узмимо просту циклоиду

$$x=a\,(\omega-sin\,\omega),\qquad y=a\,(1-cos\,\omega),$$ [1]

дакле

$$dx=a\,(1-cos\,\omega)\,d\,\omega,\qquad dy=a\,sin\,\omega\,d\,\omega.$$

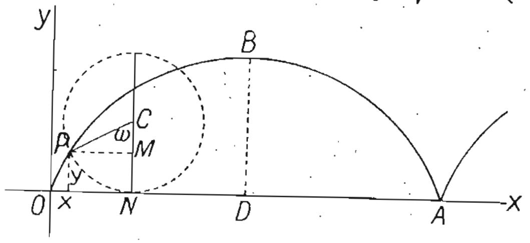
Пошто је у овоме случају лакше извршити интеграљење по y-у, него по x-у, то ћемо за s узети образац у форми

$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2}\,.\,d\,y.$$

---

[1] В. Д. Р. чл. 107. пример 6.

Овде је $\frac{dx}{dy} = \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}}$, $\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a - y}}$



Сл. 5.

и према томе

$$s = \sqrt{2a} \int \frac{dy}{\sqrt{2a - y}}$$

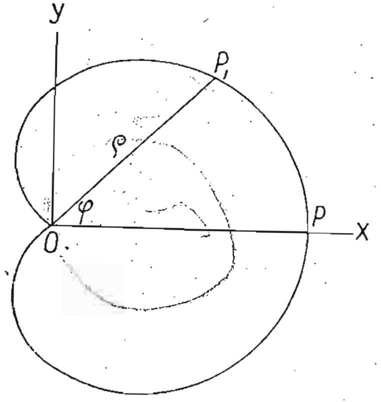
$$= -2\sqrt{2a}\sqrt{2a - y} + C.$$

Узмимо почетак лука у тачци O, дакле $y = 0$ као доњу границу интеграла, па ћемо добити за дужину лука OP

$$s = \sqrt{2a} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2a - y}} = -2\sqrt{2a} \left[\sqrt{2a - y}\right]_0^y = 4a - 2\sqrt{2a}\sqrt{2a - y}.$$

Одавде, кад ставимо $y = 2a = BD$ следује $\mathrm{arc}\, OB = 4a$, а цео лук $OBA = 8a$.

Напомена. До истих резултата долазимо геометриским посматрањем. Нашли смо да је полупречник кривине $r = 2\sqrt{2ay = 2n}$ [1], а пошто је еволута циклоиде такође циклоида и то конгруентна задатој циклоиди, а знамо да је лук еволуте $\sigma = r - r_0$ [2], то је с обзиром да је у тачци O (тј. за $y = 0$) $r = 0$, код циклоиде $OP'O'$ $\mathrm{arc}\, OP' = PP' = 2NP'$ [3]. Значи да је код задате циклоиде $\mathrm{arc}\, BP = 2PR = 2\sqrt{(2a)^2 - PN^2} = 2\sqrt{4a^2 - 2ay} = 2\sqrt{2a}\sqrt{2a - y}.$



Сл. 6.

5. Пример. Поларна једначина кардиоиде гласи

$$\varrho = a(1 + \cos \varphi)\,^{4)},$$

дакле

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -a \sin \varphi$$

и на основу формуле 2) у чл. 33.

$$s = \int \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi}\,.\, d\varphi$$

$$= a \int \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}\,.\, d\varphi$$

$$= 4a \int \cos \frac{\varphi}{2}\,.\, d\frac{\varphi}{2} = 4a \sin \frac{\varphi}{2} + C.$$

Ако будемо рачунали лук s од тачке P, за коју је $\varphi = 0$, имаћемо

$$s = 4a \int_0^{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} = 4a \left[\sin \frac{\varphi}{2}\right]_0^{\varphi} = 4a \sin \frac{\varphi}{2}.$$

---

[1] В. Д. Р. чл. 128. пример 5.
[2] В. Д. Р. чл. 130.
[3] В. Д. Р. сл. 54.
[4] В. Д. Р. чл. 128. пример 6.

Ако за горњу границу узмемо $\varphi = \pi$ добићемо $\mathrm{arc}\, OP_1P = 4a$, а за дужину целе кардиоиде $8a$.

Као код прошлог примера (циклоиде) тако бисмо и овде могли геометриским путем добити дужину лука.

6. Пример. Код логаритамске спирале

$$\varrho = b^{\varphi}\,^{1)}$$

имамо

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = b^{\varphi}\, l\, b,$$

дакле

$$s = \int \sqrt{b^{2\varphi} + b^{2\varphi}(l\, b)^2}\,.\, d\varphi = \sqrt{1 + (l\, b)^2} \int b^{\varphi}\,.\, d\varphi = \frac{\sqrt{1 + (l\, b)^2}}{l\, b}\, b^{\varphi} + C.$$

Ако лук рачунамо од $\varphi = 0$ јесте

$$s = \sqrt{1 + (l\, b)^2} \int_0^{\varphi} b^{\varphi}\,.\, d\varphi = \frac{\sqrt{1 + (l\, b)^2}}{l\, b}\,(b^{\varphi} - 1).$$

Иста посматрања, која смо учинили односно еволуте и полупречника кривине код циклоиде, могли бисмо да применимо и код ове линије и геометриски да нађемо дужину лука.

35. Квадратура слика у правоуглим координатама. — Тражи се површина слике, која је ограничена с једне стране линијом $y = f(x)$, са друге две стране ординатама P_1Q_1 и P_2Q_2, а са четврте стране комадом Q_1Q_2 апсцисне осе (в. сл. 3.). Ми замишљамо да је фигура $P_1P_2Q_1Q_2 = u$ раздељена на трапезе, као нпр. што је $PP'QQ' = \triangle u$, у коме је једна страна PP' лук криве линије. Нека су x, y координате тачке P, а $x + \triangle x$, $y + \triangle y$ координате тачке P', дакле $QQ' = \triangle x$, $P'M = \triangle y$. Из слике видимо да је $PP'QQ'$ или $\triangle u > y \triangle x$, а $< (y + \triangle y) \triangle x$ (или обратно), дакле $y < \frac{\triangle u}{\triangle x} < y + \triangle y$, које, кад пређемо граници (претпоставимо да су тачке P и P' бескрајно близу једна другој), даје $\lim\limits_{\triangle x = 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{du}{dx} = y$, одакле диференциал површине

$$du = y\, dx, \tag*{(1}$$

а површина $P_1P_2Q_1Q_2$

$$u = \int_{x_1}^{x_2} y\,.\, dx. \tag*{(2}$$

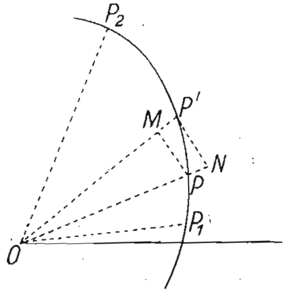
За косоуглу систему са координатним углом ϑ имамо

$$du = y \sin \vartheta\, dx, \quad u = \sin \vartheta \int_{x_1}^{x_2} y\,.\, dx. \tag*{(3}$$

---

[1] В. Д. Р. чл. 107. пример 11.

36. Квадратура слика у поларним координатама. — Ми замишљамо исечак OP_1P_2, чију површину хоћемо, да је раздељен на исечке, као што је нпр. исечак OPP'. Нека су ϱ и φ поларне координате тачке P, $\varrho + \Delta\varrho$ и $\varphi + \Delta\varphi$ поларне координате тачке P'. Дакле $\sphericalangle P'OP = \Delta\varphi$, $P'M = \Delta\varrho$. Опишимо из пола O два круга: један са полупречником $\varrho = OP$, други са полупречником $\varrho = \Delta\varrho = OP'$. Из слике видимо да је $OPM < OPP' < ONP'$ или ако означимо $OPP' = \Delta u$, а на основу познатих образаца за кружне исечке, као што су OPM и ONP',



Сл. 7.

$$\frac{1}{2}\varrho^2\Delta\varphi < \Delta u < \frac{1}{2}(\varrho + \Delta\varrho)^2\Delta\varphi,$$

одакле $\frac{1}{2}\varrho^2 < \frac{\Delta u}{\Delta\varphi} < \frac{1}{2}(\varrho + \Delta\varrho)^2$, које кад пређемо граници даје

$\lim\limits_{\Delta\varphi = 0}\frac{\Delta u}{\Delta\varphi} = \frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2}\varrho^2$. Према овоме следује за диференциал површине

1) $$du = \frac{1}{2}\varrho^2 . d\varphi,$$

а за површину исечка OP_1P_2

2) $$u = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2 . d\varphi.$$

Напомена. Означимо са x, y правоугле координате тачке P, са $x + dx$, $y + dy$ правоугле координате тачке P'. Из Аналитичне Геометрије знамо да је површина троугла

$$OPP' = \frac{1}{2}[(y + dy)x - y(x + dx)].$$

дакле

3) $$du = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

које, сравњено са горњим изразом за du, даје значајну формулу

4) $$\varrho^2 d\varphi = x\,dy - y\,dx.$$

37. Примери. —

1. Пример. Елипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

одакле

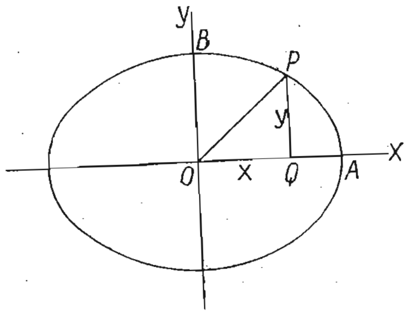
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

кад заменимо у образац 2) чл. 35. даје

$$u = \frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - b^2} . dx = \frac{b}{a}\int\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} . dx$$

$$= ab\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{b}{a}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= ab\, arc\, sin\,\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$



Сл. 8.

Ставимо у последњем интегралу по методи делимичног интеграљења

$$x = v, \quad \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\omega,$$

дакле $dx = dv$, $-\sqrt{a^2 - x^2} = \omega$,

и добићемо

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int\sqrt{a^2 - x^2} . dx,$$

па према томе

u или $\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2} . dx = ab\, arc\, sin\,\frac{x}{a} + \frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2} . dx,$

одакле

$2\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2} . dx$, а то је $2u = ab\, arc\, sin\,\frac{x}{a} + \frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2} + C,$

$$u = \frac{1}{2}\left(ab\, arc\, sin\,\frac{x}{a} + \frac{b}{a}\,x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

Ако површину будемо рачунали од $x = 0$, добићемо елиптичан сегмент

$$OBPQ = \frac{1}{2}\left(ab\, arc\, sin\,\frac{x}{a} + \frac{b}{a}\,x\sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

Заменом $x = a$ добијамо четврт елипсе

$$OAB = \frac{ab\pi}{4},$$

а за површину целе елипсе

$$E = ab\pi.$$

Горњу формулу за елиптичан сегмент $OBPQ$ можемо и овако да напишемо

$$OBPQ = \frac{1}{2}ab\, arc\, sin\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}xy,$$

а пошто је $\frac{1}{2}xy = \triangle OPQ$, следује за површину елиптичног сектора

$$OBP = \frac{1}{2}ab\, arc\, sin\,\frac{x}{a}.$$

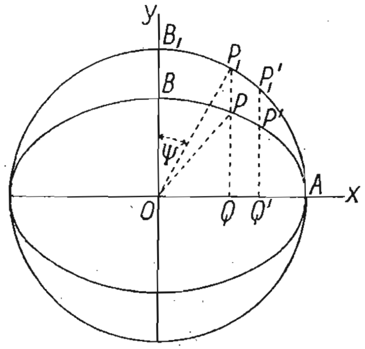
Напомена. Обрасце за површину елипсе и њених делова можемо да нађемо сматравши елипсу као пројекцију круга. Тако површина елиптичног исечка OBP, као пројекција кружног исечка $O\,B_1 P_1 = \frac{1}{2} a^2 \psi$, јесте $OB_1P_1 \cdot \frac{b}{a}$, где је $\frac{b}{a}$ = косинусу угла који раван круга чини са равни елипсе, дакле

$$OBP = \frac{1}{2}\, ab\psi.$$

За $\psi = \frac{\pi}{2}$ добијамо четврт елипсе $= \frac{ab\pi}{4}$. Површина целе елипсе $= ab\pi$.

Из сл. 9 видимо да је $\sin \psi = \frac{x}{a}$, дакле $\psi = \arc \sin \frac{x}{a}$ и према томе

$$OBP = \frac{1}{2}\, ab \arc \sin \frac{x}{a}.$$



Сл. 9.

С овим налазимо образац за елиптичан одсечак

$$OBPQ = OBP + OPQ = \frac{1}{2}\, ab \arc \sin \frac{x}{a} + \frac{1}{2}\, xy.$$

Најзад можемо до дођемо до ових ресултата и овако:

$$PP'QQ' = du_e = y_e \,.\, dx, \quad P_1 P'_1 QQ' = du_k = y_k \,.\, dx,$$

где се казаљка e односи на елипсу, казаљка k на круг са полупречником a. Пошто је за једну исту апсцису $y_e : y_k = b : a$, то је и за диференциале површине $du_e : du_k = b : a$, одакле $du_e = \frac{b}{a}\, du_k$, $\quad u_e = \frac{b}{a} \int du_k = \frac{b}{a}\, u_k$.

Ставимо $u_k = a^2 \pi$ и добијамо $E = a b \pi$.

2. *Пример.* Хипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Овде је

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$u = \frac{b}{a} \int \sqrt{x^2 - a^2} \,.\, dx = \frac{b}{2\,a} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right] + C$$

(в. 2. Пример у чл. 13. кад ставимо $p = 0$, $q = -a^2$).

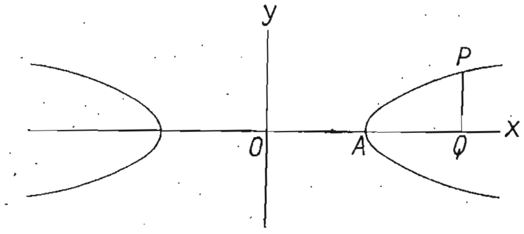
$$A\,P\,Q = \frac{b}{2a} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right]_{x = a}^{x}$$

$$= \frac{b}{2a} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right] - \frac{ab}{2}\, la$$

$$= \frac{b}{2a}\, x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\, l\, \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

или с обзиром да је $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

$$A\,P\,Q = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\, l \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$



Сл. 10.

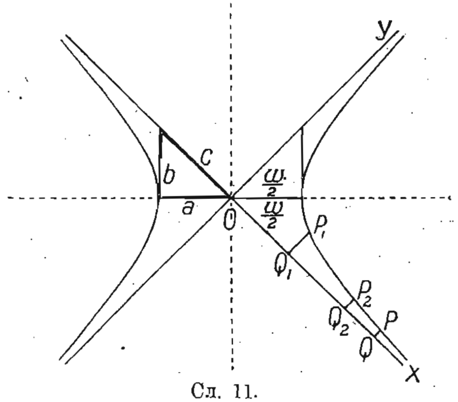
Напомена. Простију формулу за израчунавање хиперболичне површине добијамо узев једначину хиперболе у системи њених асимптота:

$$xy = \frac{c^2}{4},$$

где је $c^2 = a^2 + b^2$. Координатни угао је = асимптотноме углу ω, а знамо да је

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{b}{c}, \quad \cos \frac{\omega}{2} = \frac{a}{c}, \text{ дакле } \sin \omega = \frac{2\,a\,b}{c^2}$$

и према формули 3) у чл. 35. имамо



Сл. 11.

$$u = \frac{2\,ab}{c^2} \int \frac{c^2}{4}\, \frac{dx}{x} = \frac{ab}{2}\, lx + C.$$

Дакле

$$P_1 Q_1 P_2 Q_2 = \frac{ab}{2} \Big[lx \Big]_{x_1}^{x_2} = \frac{ab}{2}\, l \left(\frac{x_2}{x_1} \right).$$

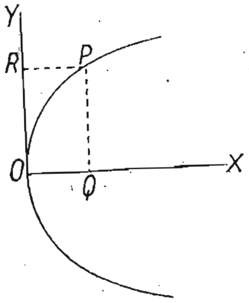
Ако узмемо 1 за почетну вреност апсцисе образац за хиперболичну површину $P_1 Q_1 P Q$ добија овај простији вид

$$P_1 Q_1 P Q = \frac{ab}{2}\, lx.$$

Узмемо ли да је $ab = 2$ хиперболична површина P_1Q_1PQ постаје непосредно равна природноме логаритму крајне апсцисе узев да је почетна апсциса $OQ_1 = 1$. Због тога се природни или Непер-ови логарими зову и хиперболични логаритми.

3. Пример. Парабола:

$$y^2 = 2px.$$



Сл. 12.

$$u = \sqrt{2p} \int \sqrt{x} \,.\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\; x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2px}\,.\,x + C = \frac{2}{3}xy + C.$$

Ако површину будемо рачунали од $x = 0$ (темена параболе), добићемо

$$OPQ = \frac{2}{3}\Big[\,xy\,\Big]_{x=0}^{x} = \frac{2}{3}\,xy = \frac{2}{3}\,.\,OPQR,$$

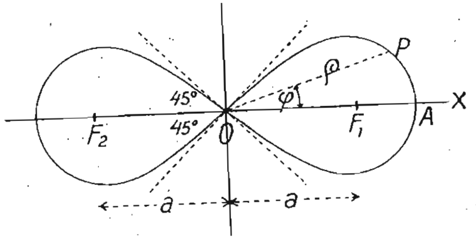
одакле изводимо да $OPQ : OPR = 2:1$.

4. Пример. Поларна једначина лемнискате гласи

$$\rho^2 = 2\,a^2 \cos 2\,\varphi$$

(в. Д. Р. 7. пример чл. 107.)

Према формули 2) чл. 36. јесте површина сектора



Сл. 13.

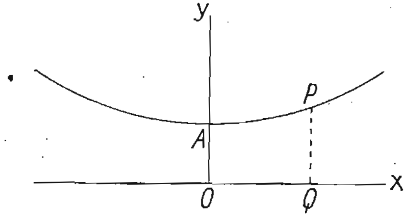
$$AOP = a^2 \int_0^{\varphi} \cos 2\,\varphi\,.\,d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin 2\,\varphi.$$

За $\varphi = \frac{\pi}{4}$ добијамо четврт $OAPO = \frac{a^2}{2}$ и према томе површина целе лемнискате $= 2\,a^2$.

5. Пример. Верижница или ланчаница:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Сл. 14.

Рачунавши површину од $x = 0$ (ординате OA) налазимо

$$OAPQ = \frac{1}{2}\int_0^x (\,e^x + e^{-x})\,.\,dx$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sqrt{y^2 - 1}.$$

Интересно да исти израз, који смо нашли за површину добијамо и за дужину лука AP. Из $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ следује према обрасцу 2) чл. 32. за лук

$$AP = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - c^{-x}}{2}\right)^2}\,.\,dx = \frac{1}{2}\int_0^x (\,e^x + e^{-x})\,.\,dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Примећујемо да се израз $\sqrt{y^2 - 1}$, који смо добили за површину $OAPQ$ и за лук AP, може врло лако да конструише.

2. Линије у простору.

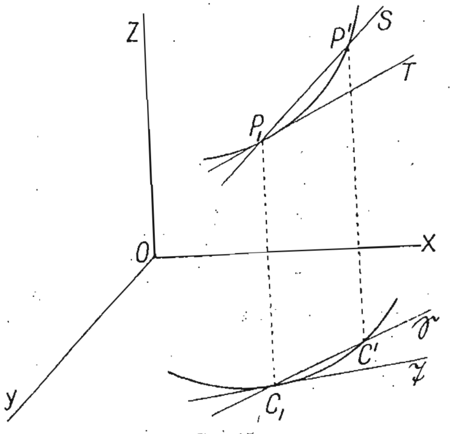
38. Општа напомена. — Свака линија у простору представљена је двема једначинама

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z) &= 0 \\ \Phi(x,\ y,\ z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

као пресек двеју површина $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$. Доводећи ове једначине (елиминовањем прво z-а, па y-а) на вид

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ z &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

ми линију посматрамо као пресек два (општа) ваљка, чије су осе паралелне једној од координатних оса. Једначина $y = f(x)$ даје пројекцију линије у xy-равни, а једначина $z = \varphi(x)$ пројекцију линије у xz-равни. Пројекцију линије у yz-равни добили бисмо елиминовањем x-а из горњих двеју једначина.



Сл. 15.

39. Тангента. — Нека су x_1, y_1, z_1 координате тачке P_1, $x_1 + \triangle x_1$, $y_1 + \triangle y_1$, $z_1 + \triangle z_1$ координате друге тачке P' на задатој линији у простору. Координатну систему замишљамо као ортогоналну. Јадначине сечице P_1S, која пролази кроз ове тачке P_1 и P' гласе

$$\frac{x - x_1}{(x_1 + \triangle x_1) - x_1} = \frac{y - y_1}{(y_1 + \triangle y_1) - y_1} = \frac{z - z_1}{(z_1 + \triangle z_1) - z_1}$$

или простије

$$\frac{x - x_1}{\triangle x_1} = \frac{y - y_1}{\triangle y_1} = \frac{z - z_1}{\triangle z_1}$$

или најзад

$$\text{I)} \qquad \left\{\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{\triangle y_1}{\triangle x_1}(x - x_1) \\ z - z_1 &= \frac{\triangle z_1}{\triangle x_1}(x - x_1). \end{aligned}\right.$$

Прва једначина даје пројекцију сечице у xy-равни, а друга њену пројекцију у zx-равни. Једначина пројекције сечице у yz-равни јесте $y - y_1 = \frac{\triangle y_1}{\triangle z_1}(z - z_1)$ и добијамо је кад поделимо горње две једначине једну с другом.

За углове α', β', γ', које сечица чини са координатним осама постоје пропорције

$$cos\,\alpha' : cos\,\beta' : cos\,\gamma' = \triangle x_1 : \triangle y_1 : \triangle z_1,$$

одакле познати обрасци

$$\left.\begin{aligned} cos\,\alpha' &= \frac{\triangle x_1}{\sqrt{\triangle x_1^{\,2} + \triangle y_1^{\,2} + \triangle z_1^{\,2}}} \\ cos\,\beta' &= \frac{\triangle y_1}{\sqrt{\triangle x_1^{\,2} + \triangle y_1^{\,2} + \triangle z_1^{\,2}}} \\ cos\,\gamma' &= \frac{\triangle z_1}{\sqrt{\triangle x_1^{\,2} + \triangle y_1^{\,2} + \triangle z_1^{\,2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II}$$

Ако замислимо сада да се тачка P' приближава тачци P_1, онда се и сечица P_1S све више приближава положају тангенте P_1T. Најзад, ако је тачка P' бесконачно близу тачци P_1, тј. ако узмемо $\triangle x_1$, $\triangle y_1$, $\triangle z_1$ бесконачно мало, сечица претвара се у тангенту, а од једначина сечице постају једначине тангенте

$$\left.\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{d\,y_1}{d\,x_1}(x - x_1) \\ z - z_1 &= \frac{d\,z_1}{d\,x_1}(x - x_1). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(1}$$

Прва једначина даје пројекцију тангенте у xy-равни, друга пројекцију тангенте у zx-равни. Из њих добијамо једначину пројекције тангенте у yz-равни: $y - y_1 = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}(z - z_1)$.

Из ових се једначина може да закључи да је пројекција тангенте у једној од координатних равни тангента пројекције линије у тој равни. Ствар постаје врло разумљива кад се узме у обзир да у колико се тачка P' буде све више приближавала тачци P то исто мора бити и са тачком C' (пројекцијом тачке P' у xy-равни) у односу према тачци C_1 (пројекцији тачке P_1 у xy-равни). На тај начин сечица $C_1\,C$ све више тежи положају тангенте $C_1\mathfrak{T}$.

У једн. 1) су x, y, z текуће координате, тј. координате ма које тачке на тангенти; x_1, y_1, z_1 означавају координате додирне тачке, а $\frac{d\,y_1}{d\,x_1}$ и $\frac{d\,z_1}{d\,x_1}$ то су диференциални количници од y по x и од z по x, у којима се текуће координате x, y, z замењују координатама x_1, y_1, z_1 додирне тачке.

Диференциалне количнике $\frac{d\,y}{d\,x}$ и $\frac{d\,z}{d\,x}$ налазимо из једначина задате линије, нпр. из једн. 1) чл. 38. кад их диференциалимо, дакле из

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dx} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\phi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dF}{dx}\frac{d\phi}{dz}-\frac{dF}{dz}\frac{d\phi}{dx}}{\frac{dF}{dz}\frac{d\phi}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{d\phi}{dz}},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\frac{dF}{dy}\frac{d\phi}{dx}-\frac{dF}{dx}\frac{d\phi}{dy}}{\frac{dF}{dz}\frac{d\phi}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{d\phi}{dz}}$$

(в. Д. Р. чл. 58.). Ако добивене вредности за $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, пошто у њима заменимо x, y, z са x_1, y_1, z_1, ставимо у једн. 1) добиће мо једначине тангенте у новоме виду

$$2)\qquad \begin{cases} \frac{dF}{dx_1}(x-x_1)+\frac{dF}{dy_1}(y-y_1)+\frac{dF}{dz_1}(z-z_1)=0 \\ \frac{d\phi}{dx_1}(x-x_1)+\frac{d\phi}{dy_1}(y-y_1)+\frac{d\phi}{dz_1}(z-z_1)=0. \end{cases}$$

За углове α, β, γ, које тангента заклапа са координатним осама, налазимо из образаца II) ове изразе

$$3)\qquad \begin{cases} \cos\alpha=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \\ \cos\beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \\ \cos\gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \end{cases}$$

који, опет, с обзиром да је $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, где ds означава диференциал лука (в. чл. 41.), могу да се напишу простије

$$3_a)\qquad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Пример. Једначине

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

од којих прва представља елипсоид, а друга лопту, дају нам пресек тих двеју површина. Овде је

$$\frac{dF}{dx}=\frac{2x}{a^2},\qquad \frac{dF}{dy}=\frac{2y}{b^2},\qquad \frac{dF}{dz}=\frac{2z}{c^2},$$

$$\frac{d\phi}{dx}=2x,\qquad \frac{d\phi}{dy}=2y,\qquad \frac{d\phi}{dz}=2z$$

и према томе, а на основу једн. 2), пошто заменимо x, y, z са x_1, y_1, z_1, и скратимо са 2, једначине тангенте пресечне линије елипсоида и лопте

$$\frac{x_1}{a^2}(x-x_1)+\frac{y_1}{b^2}(y-y_1)+\frac{z_1}{c^2}(z-z_1)=0$$

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)=0$$

ли

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}$$

$$xx_1+yy_1+zz_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2,$$

оје се, пошто додирна тачка лежи на обема површинама и да је према томе

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1,\quad \text{а}\quad x_1^2+y_1^2+z_1^2=r^2,$$

води на ове простије једначине

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1$$

$$xx_1+yy_1+zz_1=r^2.$$

40. Нормална раван. — Раван, која стоји управно на тангенти није у додирној тачци, зове се *нормална раван*.

Једначина равни, која пролази кроз тачку x_1, y_1, z_1, гласи $A(x-x_1)$ $B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. Константе A, B, C пропорционалне су синусу углова, које нормала равни чини са координатним осама. рмала нормалне равни је тангента линије, а за тангенту је $\cos\alpha$: $s\,\beta:\cos\gamma=dx:dy:dz$ (једн. 3 у прошлом члану). Према томе једнана нормалне равни гласи

$$(x-x_1)\,dx_1+(y-y_1)\,dy_1+(z-z_1)\,dz_1=0. \qquad (1$$

Пример. Узмимо исту линију коју смо посматрали на крају последњег ана:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

ференциалењем налазимо

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}+\frac{z}{c^2}\frac{dz}{dx}=0$$

$$x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0,$$

кле

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2(c^2-a^2)x}{a^2(b^2-c^2)y},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{c^2(a^2-b^2)x}{a^2(b^2-c^2)z}.$$

стоји дакле пропорција

$$dx:dy:dz=\frac{a^2(b^2-c^2)}{x}:\frac{b^2(c^2-a^2)}{y}:\frac{c^2(a^2-b^2)}{z}.$$

ема томе, пошто заменимо текуће координате x, y, z координатама x_1, y_1, z_1 ке P_1, једначина 1) нормалне равни гласи

$$(x - x_1)\frac{a^2(b^2 - c^2)}{x_1} + (y - y_1)\frac{b^2(c^2 - a^2)}{y_1} + (z - z_1)\frac{c^2(a^2 - b^2)}{z_1} = 0$$

или упрошћено

$$\frac{a^2(b^2 - c^2)}{x_1}x + \frac{b^2(c^2 - a^2)}{y_1}y + \frac{c^2(a^2 - b^2)}{z_1}z = 0.$$

41. Дужина лука. — Као у равни тако и овде замишљамо да је крива линија растављена на праволиниске елементе. Означимо са x, y, z и $x + \triangle x$, $y + \triangle y$, $z + \triangle z$ правоугле координате крајних тачака таквог једног елемента. Његова је дужина, по познатом обрасцу из Аналитичне Геометрије,

$$= \sqrt{[(x + \triangle x) - x]^2 + [(y + \triangle y) - y]^2 + [(z + \triangle z) - z]^2}$$

или краће

$$= \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}.$$

Ако претпоставимо да је елеменат бесконачно мали, онда се $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ претварају у dx, dy, dz и праволиниски елеменат постаје диференциалом лука тако да је

1) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Узев x за прапромењљиву, y и z као функције (као што је учињено код једн. 2) у чл. 38.) образац 1) добија вид

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,.\,dx,$$

дакле дужина лука, рачунавши од апсцисе a па до апсцисе b

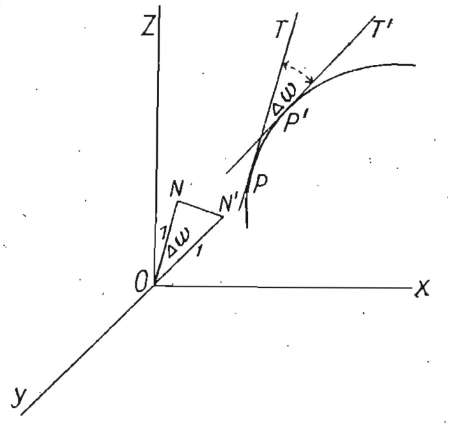
2) $$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,.\,dx.$$

42. Кривина линија. — Угао $\triangle\omega$, који тангенте T и T' у двема бесконачно приближним тачкама P и P' једне криве линије међусобом захватају, зове се *контигентни угао*. Означимо са $\triangle s$ лук PP'. Под *кривином* линије у тачци P разумемо $\frac{\triangle\omega}{\triangle s}$ кад пустимо да се $\triangle s$ у бесконачност умањава, дакле

$$\lim_{\triangle s = 0}\frac{\triangle\omega}{\triangle s} = \frac{d\omega}{ds}.$$

Реципрочна вредност кривине, а то је $\lim_{\triangle s = 0}\frac{\triangle s}{\triangle\omega} = \frac{ds}{d\omega}$ зове се *полупречник кривине*. Повуцимо из почетка координата $ON = 1$ и паралелно са PT, $ON' = 1$ и паралелно са $P'T'$. Нека су a, b, c косинуси

углова које ON (па дакле и PT) чини са координатним осама; a', b', c' косинуси углова које ON' (дакле и $P'T'$) чини са координатним осама.



Сл. 16.

Замислимо да је из O спуштена управна на NN' и тиме троугао ONN' раздељен на два подударна правоугла троугла увидићемо да је

$$NN' = 2\,.\,ON\,.\,sin\frac{\triangle\omega}{2}$$

$$= 2\,sin\frac{\triangle\omega}{2}.$$

Пошто је $ON = 1$ и $ON' = 1$ следује да су a, b, c једнаки са координатама тачке N, као што су исто тако a', b', c' једнаки са координатама тачке P'. На тај начин је

$$NN' = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}.$$

Сравнењем ових двеју вредности за NN' следује

$$2\,sin\frac{\triangle\omega}{2} = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$$

или, пошто се за врло мале лукове синус може да замене самим луком,

$$\triangle\omega = \sqrt{\triangle a^2 + \triangle b^2 + \triangle c^2},$$

дакле

$$\frac{\triangle\omega}{\triangle s} = \sqrt{\left(\frac{\triangle a}{\triangle s}\right)^2 + \left(\frac{\triangle b}{\triangle s}\right)^2 + \left(\frac{\triangle c}{\triangle s}\right)^2}.$$

Пређимо граници и означимо полупречник кривине са ϱ, па ћемо добити

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\omega}{ds} = \sqrt{\left(\frac{da}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc}{ds}\right)^2}$$

или кад заменимо $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$, $c = \frac{dz}{ds}$ (в. једн. 3_a) у чл. 39.)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\omega}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}. \qquad (1$$

Овај образац може да се доведе на још један врло прост вид, кад се под кореним знаком изврши диференциалење и онда ресултат среди на следећи начин

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\sqrt{(ds\,d^2x-dx\,d^2s)^2+(ds\,d^2y-dy\,d^2s)^2+(ds\,d^2z-dz\,d^2s)^2}}{ds^3}$$

$$=\frac{\sqrt{ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]+(d^2s)^2[dx^2+dy^2+dz^2]}}{ds^3}$$

$$\overline{\frac{-2\,ds\,d^2s\,(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)}{ds^3}}.$$

Имавши у виду да је

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,\ \text{дакле}\ ds\,d^2s=dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z$$

горњи образац се своди на

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\sqrt{ds^2\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]+(d^2s)^2\,ds^2-2\,(ds\,d^2s)^2}}{ds^3}$$

или још простије

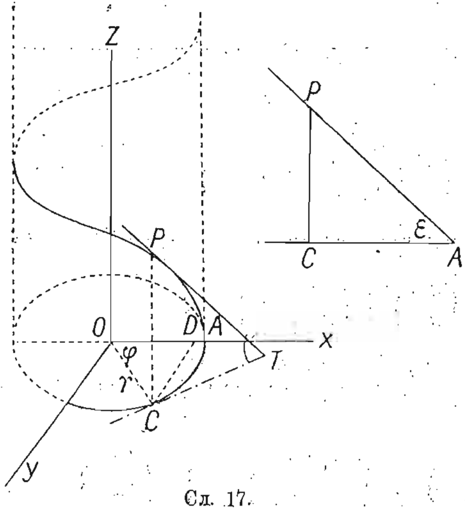
$$2)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{\varrho}=\dfrac{d\omega}{ds}=\dfrac{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}{ds^2}\\[2ex]\varrho=\dfrac{ds}{d\omega}=\dfrac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}.\end{cases}$$

43. Завојница. —

Замислимо да се угао $PAC=\varepsilon$ омотава око једног правог кружног ваљка тако да се крак AC обавија око периферије основице ваљка, онда други крак AP опнусје по површини ваљка линију, која се зове завојница. Узмимо раван основице ваљка за xy-раван, средиште основице за почетак, а осу ваљка за z-осу правоугле системе; x-оси ћемо дати правац, који пролази кроз тачку A, у којој угао ε почиње да се обавија око ваљка. Из слике читамо да су координате ма које тачке P на завојници

$$x=OD=r\cos\varphi$$
$$y=CD=r\sin\varphi$$
$$z=PC=AC\,.\,tg\,\varepsilon$$

или пошто је дуж $AC =$ луку AC, а овај $= r\varphi$, то је $z=r\varphi\,tg\,\varepsilon$ и према томе, ако означимо $tg\,\varepsilon=m$, координате тачке P



Сл. 17.

$$\text{I)}\quad\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\y=r\sin\varphi,\\z=r\,m\,\varphi,\end{cases}$$

где је, као што из слике видимо, r полупречник основице.

Једначине завојнице у правоуглим координатама добићемо кад из горња три израза I) елиминујемо промењљиви угао φ. Из трећег обрасца следује $\varphi=\frac{z}{rm}$, које уметнуто у прва два даје једначине завојнице

$$x=r\cos\frac{z}{rm},\qquad y=r\sin\frac{z}{rm}.$$

Ми бисмо угао φ могли и овако да елиминујемо. Квадрирањем и сабирањем прва два израза добијамо $x^2+y^2=r^2$ (једначину ваљка). Деләњем другог израза првим налазимо $\frac{y}{x}=tg\,\varphi$, $\varphi=arc\,tg\,\frac{y}{x}$, дакле $z=r\,m\,arc\,tg\,\frac{y}{x}$ и према томе као једначине завојнице

$$x^2+y^2=r^2,\quad z=r\,m\,arc\,tg\,\frac{y}{x}.$$

За решавање проблема, којима приступамо, боље је да задржимо једначине I) у којима су координате x, y, z изражене као функције помоћног угла φ.

Диференциалењем образаца I) добијамо

$$dx=-r\sin\varphi\,.\,d\varphi=-y\,.\,d\varphi$$
$$dy=r\cos\varphi\,.\,d\varphi=x\,.\,d\varphi$$
$$dz=r\,m\,.\,d\varphi,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{tg\,\varphi}=-\frac{x}{y},\qquad\frac{dz}{dx}=\frac{-m}{\sin\varphi}=-\frac{mr}{y},$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{x_1}{y_1},\qquad\frac{dz_1}{dx_1}=-\frac{mr}{y_1}$$

и према томе једначине тангенте на завојницу у тачци x_1, y_1, z_1 (једн. 1 у чл. 39.)

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),\qquad z-z_1=-\frac{mr}{y_1}(x-x_1),$$

које, кад се изврше означене радње и узмемо у обзир да је код прве једначине $x_1^2+y_1^2=r^2$, може простије да се напише

$$x x_1+y y_1=r^2$$
$$m\,r\,(x-x_1)+y_1\,(z-z_1)=0.$$

Прва од ових једначина даје пројекцију тангенте у xy-равни, а друга пројекцију тангенте у zx-равни. Она прва је једначина тангенте круга (основице ваљка) у пројекцији додирне тачке P у xy-равни, т. ј. у тачци C. Но пошто је кружна основица пројекција завојнице у xy-равни, то се овим потврђује у чл. 39. добивени ресултат, да је пројекција тангенте на линију у простору (на завојницу) у некој тачци P у исто време тангента пројекције просторне линије (овде тангента на круг) у пројекцији додирне тачке P, тј. у тачци C у xy-равни.

Из горе добивених вредности за dx, dy, dz и пошто заменимо у њима текуће координате координатама додирне тачке следује (према једн. 1.) у чл. 40.) једначина нормалне равни у тачци x_1, y_1, z_1

$$-(x-x_1)\,y_1+(y-y_1)\,x_1+(z-z_1)\,r\,m=0$$

или упрошћено

$$-y_1x+x_1y+r\,m\,z=r\,m\,z_1.$$

Отуда што је

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 \sin^2\varphi \,.\, d\varphi^2 + r^2 \cos^2\varphi \,.\, d\varphi^2 + r^2 m^2 \,.\, d\varphi^2$$
$$= r^2 (1 + m^2) \,.\, d\varphi^2,$$

дакле

$$ds = r\sqrt{1 + m^2} \,.\, d\varphi$$

добијамо дужину лука од тачке A до ма које друге тачке P

$$s = r\sqrt{1+m^2}\int\limits_0^{\varphi} d\varphi = r\sqrt{1+m^2} \,.\, \varphi = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} z = \frac{z}{\sin\varepsilon},$$

које је и иначе јасно зато што је у троуглу APC $AP = s$, $CP = z$.

За углове α, β, γ, које тангента завојнице односно њена нормална раван чини са координатним осама, имамо (в. једн. 3*a*) у чл. 39.)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2}} = -\frac{y}{r\sqrt{1+m^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{x}{r\sqrt{1+m^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \sin\varepsilon.$$

Из последњег обрасца видимо да је угао, који тангента завојнице чини са z-осом, константан $\gamma = 90^0 - \varepsilon$, дакле угао, који тангента чини са xy-равни стално $= \varepsilon$. Пошто је

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = -\frac{\cos\varphi}{r(1+m^2)}, \quad \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} = -\frac{\sin\varphi}{r(1+m^2)}, \quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = 0,$$

а на основу формуле 1) у чл. 42. видимо да су кривина и полупречник кривине

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r(1+m^2)}, \quad \varrho = r(1+m^2)$$

константни.

3. Површине.

44. Тангенциална раван. — Под *додирном* или *тангенциалном равни* једне површине у некој њеној тачци разумемо раван која садржи тангенте на све оне линије које на површини леже, а пролазе кроз ону тачку.

Сваку линију, која лежи на задатој површини

$$1) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

а пролази кроз неку њену тачку $P_1(x_1, y_1, z_1)$, можемо себи да представимо као пресек површине 1) и друге неке површине, нпр. површине

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

(в. чл. 38.). Онда су једначине тангенте на посматрану линију у тачци P_1

$$\frac{dF}{dx_1}(x - x_1) + \frac{dF}{dy_1}(y - y_1) + \frac{dF}{dz_1}(z - z_1) = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dx_1}(x - x_1) + \frac{d\Phi}{dy_1}(y - y_1) + \frac{d\Phi}{dz_1}(z - z_1) = 0$$

(једн. 2) у чл. 39.). Обе су једначине (у односу на променљиве координате x, y, z) првога степена и свака од њих представља једну раван, а обе заједно пресек тих равни, дакле једну праву линију. Та права је тангента пресечне линије површине 1) и површине $\Phi(x, y, z) = 0$. Ми видимо да тангента пресечне линије задате површине са ма којом другом површином лежи увек у равни

$$\frac{dF}{dx_1}(x - x_1) + \frac{dF}{dy_1}(y - y_1) + \frac{dF}{dz_1}(z - z_1) = 0. \qquad (2$$

То значи да у равни 2) леже тангенте свих линија које се по задатој површини могу повући кроз тачку P_1. Другим речима једначина 2) представља тангенциалну раван површине 1) у тачци $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

У примеру на крају чл. 39. добили смо

$$\frac{xx}{a^2} + \frac{yy}{b^2} + \frac{zz}{c^2} = 1$$

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = r^2$$

као једначине тангенте у тачци x_1, y_1, z_1 на пресечну линију елипсоида и лопте. Прва једначина представља тангенциалну раван елипсоида у тачци x_1, y_1, z_1, а друга једначина тангенциалну раван лопте у истој тачци x_1, y_1, z_1.

45. Нормала. — Под *нормалом* површине разумемо управну на тангенциалну раван у додирној тачци.

Једначине праве линије, која пролази кроз извесну тачку $P_1(x_1, y_1, z_1)$, а има правац одређен угловима α, β, γ, које она чини са координатним осама, гласе

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Овде су x_1, y_1, z_1 координате додирне тачке P_1, а правац линије, односно углови α, β, γ, одређени су тиме што је права (нормала) управна на додирној равни. Према томе је за нормалу

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz_1}\right)^2}} \\
\cos\beta &= \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz_1}\right)^2}} \\
\cos\gamma &= \frac{\frac{dF}{dz_1}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz_1}\right)^2}},
\end{aligned}\right\} \qquad (1$$

јер је $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{dF}{dx_1} : \frac{dF}{dy_1} : \frac{dF}{dz_1}$ (в. једн. 2) у чл. 44.) а знамо да је $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Једначине нормале у тачци x_1, y_1, z_1 на површини

$$F(x, y, z) = 0$$

јесу дакле

$$\frac{x - x_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{dF}{dy_1}} = \frac{z - z_1}{\frac{dF}{dz_1}}. \tag{2}$$

46. Продужење прошлога члана. — Узмимо да је једначина површине написана у форми

$$z = f(x, y).$$

Означимо са p и q делимичне изводне од z

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Ове делимичне изводне налазимо из скривене форме једначине

$$F(x, y, z) = 0$$

по познатој методи (в. Д. Р. чл. 69.)

$$p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Једначину додирне равни (једн. 2) чл. 44.), пошто је поделимо са $\frac{dF}{dz}$, можемо сада на напишемо

$$p(x - x_1) + q(y - y_1) - (z - z_1) = 0, \tag{1}$$

а једначине нормале (једн. 2) чл. 45.), пошто их претходно доведемо на вид

$$x - x_1 = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}(z - z_1), \quad y - y_1 = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}(z - z_1)$$

претварају се у ове

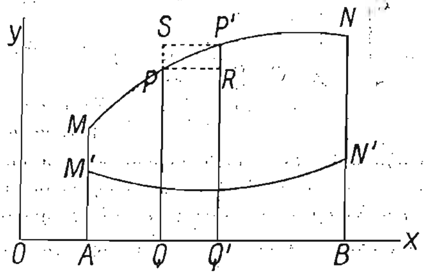
$$\left\{\begin{array}{l} x - x_1 + p(z - z_1) = 0 \\ y - y_1 + q(z - z_1) = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Најзад и обрасце 1) у чл. 45., кад у њима бројитељ и именитељ поделимо са $\frac{dF}{dz_1}$, доводимо на нови вид

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \\ \cos\beta = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

4. Кубатура тела.

47. Кубатура обртних тела. — Означимо са V запремину тела, које постаје обртањем равне фигуре $MNAB$ око x-осе. Замислимо фигуру $MNAB$ раздељену на трапезе као што је нпр. $PP'QQ'$. Запремина $\triangle V$, коју описује такав трапез обртањем око x-осе, очевидно је већа од запремине ваљка, који постаје обртањем уписаног правоугаоника $PRQQ'$, а мања од запремине ваљка, који постаје обртањем описаног правоугаоника $SP'QQ'$. Означимо QQ' са $\triangle x$ и имајмо у виду да је $PQ = y$ полупречник основице првога, $P'Q' = y + \triangle y$ полупречника основице оног другог ваљка између којих лежи $\triangle V$, онда је $\pi y^2 . \triangle x < \triangle V < \pi(y + \triangle y)^2 . \triangle x$ или $\pi y^2 < \frac{\triangle V}{\triangle x} < \pi(y + \triangle y)^2$ или обратно $\pi y^2 > \frac{\triangle V}{\triangle x} > \pi(y + \triangle y)^2$, према томе да ли од x до $x + \triangle x$ ордината расте или опада. У сваком случају ће се обе стране неравности све више једна другој приближавати у колико мање будемо узели $\triangle x$ и за бесконачно мало $\triangle x$ постаће $\lim\limits_{\triangle x = 0} \frac{\triangle V}{\triangle x} = \frac{dV}{dx} = \pi y^2$, дакле



Сл. 18.

$$dV = \pi y^2 . dx, \qquad V = \pi \int_a^b y^2 . dx, \tag{1}$$

где су $a = OA$, $b = OA$ границе интеграла одређене луком MN задате линије $y = f(x)$.

Хоћемо ли запремину, коју описује равна фигура $MNM'N'$, онда треба да узмемо разлику из запремине, коју описује фигура $MNAB$ и запремине, коју описује фигура $M'N'AB$. Нека је $y = f(x)$ једначина линије MN, $y' = \varphi(x)$ једначина линије $M'N'$. На основу обрасца 1), а према учињеној напомени, јесте запремина обртног тела, које описује фигура $MNM\text{`}N'$,

$$V = \pi \int_a^b y^2 \,.\, dx - \pi \int_a^b y'^{\,2} \,.\, dx \text{ или}$$

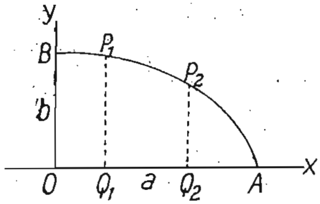
$$V = \pi \int_a^b (y^2 - y'^{\,2}) \,.\, dx \tag{2)}$$

48. Примери. —

1. Пример. Обртни елипсоид. Елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ обртањем око једне од својих оса, нпр. око x-осе описује обртни елипсоид. Заменом $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ из једначине елипсе у образац 1) прошлога члана налазимо формулу

$$V = \pi \int (b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2) \,.\, dx = \pi b^2 \int dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int x^2 \,.\, dx$$

$$= \pi b^2 x - \frac{\pi b^2}{a^2} \frac{x^3}{3} + C = \pi b^2 x \left(1 - \frac{x^2}{3a^2}\right) + C.$$



Сл. 19.

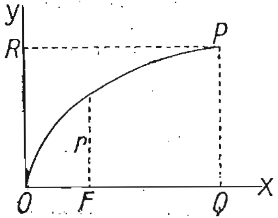
Узев као границе интеграљења две произвољне вредности x_1 и x_2 добили бисмо запремину елипсоидног слоја, који је описан елиптичним луком $P_1 P_2$; узев као границе $x = x_1$ и $x = a$ добили бисмо запремину елипсоидне калоте, која постаје обртањем лука $P_1 A$. Ако узмемо интеграл између граница $x = 0$ и $x = a$ добићемо запремину половине елипсоида: $\frac{2}{3} \pi a b^2$, па дакле као запремину целог елипсоида $\frac{4}{3} \pi a b^2$.

Ми смо претпоставили да се елипса обрће око њене веће осе a и добили смо тиме један *продужен обртни елипсоид.* Ако се, пак, елипса обрће око њене мање осе b, онда добијамо *спљоштен обртни елипсоид* или *сфероид.* Његова је запремина $\frac{4}{3} \pi a^2 b$. Запремина спљоштеног елипсоида већа је од запремине продуженог елипсоида и то у размери $a : b$.

За $a = b$ следује познати образац за запремину сфере $\frac{4}{3} \pi a^3$.

2. Пример. Обртни параболоид. Парабола $y^2 = 2px$ обртањем око x-осе описује обртни параболоид. Формула 1) у прошломе члану даје нам

$$V = \pi \int 2px \,.\, dx = \pi p x^2 + C.$$



Сл. 20.

Ако узмемо за границе $x = 0$ и ма коју вредност $x = OQ$ добићемо запремину тела, које описује параболична фигура OPQ

$$V = \pi p x^2.$$

Овај ресултат можемо да протумачимо овако. Пошто је $\pi x^2 =$ површини круга са полупречником $x = OQ$, а p је параметар параболе (ордината у жижи F), то израз за V даје запремину ваљка са полупречником = апсциси крајње тачке P, а висином = параметру p. Ако добивену формулу за V напишемо $V = \pi p x^2 = \frac{\pi}{2} 2px \,.\, x = \frac{1}{2} \pi y^2 x$, можемо и овако да искажемо ресултат: запремина обртног параболоида, рачунавши га од темена па до ма које апсцисе, једнака је половини запремине описаног ваљка (који има за основицу круг са површином πy^2, а висину x), тј. ваљка који обртањем око x-осе описује правоугаоник $OQPR$.

3. Пример. Једначине просте циклоиде гласе

$$x = a(\omega - \sin\omega), \qquad y = a(1 - \cos\omega),$$

одакле

$$dx = a(1 - \cos\omega) \,.\, d\omega = y \,.\, d\omega, \qquad dy = a \sin\omega \,.\, d\omega,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a \sin\omega} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}}, \qquad dx = \frac{y\, dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

(в. 4. Пример у чл. 34.). Обртањем циклоиде око x-осе постаје обртно тело вретенастог облика. На основу формуле 1) последњег члана добијамо запремину једног дела (калоте) таквог тела

$$V = \pi \int_0^x y^2 \,.\, dx = \pi \int_0^y \frac{y^3 \,.\, dy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Овде имамо да интегралимо једну ирационалну функцију са квадратним кореном. Да бисмо интеграл довели на рационалну форму ставићемо

$$\sqrt{2ay - y^2} = yt,$$

(в. чл. 14. Прва метода. Треба ставити $p = 2a$, $q = 0$), одакле

$$y = \frac{2a}{1 + t^2}, \qquad dy = \frac{-4at \,.\, dt}{(1 + t^2)^2}, \qquad \sqrt{2ay - y^2} = \frac{2at}{1 + t^2}.$$

С обзиром да је за $y = 0$, $t = \infty$, горњи интеграл добија вид

$$V = -16 \pi a^3 \int_\infty^t \frac{dt}{(1 + t^2)^4} = 16 \pi a^3 \int_t^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^4}.$$

Најбрже ћемо доћи до ресултата, ако овај последњи интеграл доведемо на тригонометриски облик. Пошто се променљива t креће до у бесконачно велике вредности ставићемо

$$t = tg\,\varphi, \text{ а тиме } dt = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad \frac{1}{(1 + t^2)^4} = \cos^8\varphi$$

и добијамо

$$V = 16 \pi a^3 \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi \,.\, d\varphi$$

узевши за горњу границу интеграла место $t = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. На овај интеграл примењујемо образац 2) у чл. 18. и налазимо

$$V = 16 \pi a^3 \left(\frac{5 \,.\, 3 \,.\, \pi}{6 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 2} - \frac{\cos^5\varphi \sin\varphi}{6} - \frac{5 \cos^3\varphi \sin\varphi}{6 \,.\, 4} - \frac{5 \,.\, 3 \cos\varphi \sin\varphi}{6 \,.\, 4 \,.\, 2} - \frac{5 \,.\, 3 \,.\, \varphi}{6 \,.\, 4 \,.\, 2}\right).$$

Пошто је на основу горњих замена

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{\frac{y}{2\,a}},\ \sin\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{\frac{2\,a-y}{2\,a}},$$

$$\varphi = arc\,tgt = arc\,tg\sqrt{\frac{2\,a-y}{y}}$$

јесте

$$V = 16\,\pi\,a^3\left[\frac{5\,.\,3\,.\,\pi}{6\,.\,4\,.\,2\,.\,2} - \sqrt{\frac{2\,a-y}{2\,a}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{y}{2\,a}}^5 + \frac{5}{6\,.\,4}\sqrt{\frac{y}{2\,a}}^3 + \frac{5\,.\,3}{6\,.\,4\,.\,2}\sqrt{\frac{y}{2\,a}}\right)\right.$$
$$\left.- \frac{5\,.\,3}{6\,.\,4\,.\,2}\,arc\,tg\sqrt{\frac{2\,a-y}{y}}\right]$$

$$= \frac{5\,\pi^2\,a^3}{2} - 8\,\pi\,a^2\sqrt{y(2\,a-y)}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{y}{2a}\right)^2 + \frac{5}{6\,.\,4}\,\frac{y}{2\,a} + \frac{5\,.\,3}{6\,.\,4\,.\,2}\right]$$
$$- 5\,\pi\,a^3\,arc\,tg\sqrt{\frac{2\,a-y}{y}}.$$

Запремину тела, које постаје обртањем фигуре OBD (в. сл. 5. чл. 34.), добијамо узев да је $y = 2\,a$

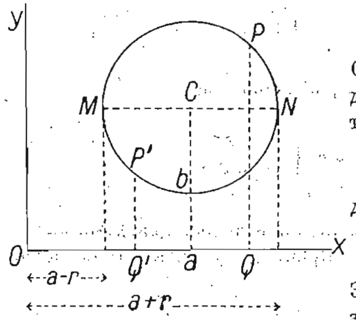
$$V = \frac{5\,\pi^2\,a^3}{2},$$

а запремину тела, које постаје обртањем целог лука OBA

$$V = 5\,\pi^2\,a^3.$$

4. Пример. Узмимо круг $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, који се обрће око x-осе и описује тиме једно прстенасто тело. Из једначине круга следује

$$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}.$$



Сл. 21.

Односно двојаког знака $+$ и $-$ примећујемо да је за тачке P на горњој половини круга, тј. за полукруг MNP

$$y = b + \sqrt{r^2-(x-a)^2},$$

док је за доњу половину, тј. за полукруг MNP'

$$y' = b - \sqrt{r^2-(x-a)^2}.$$

Запремину прстенастог тела добићемо кад од запремине, која постаје обртањем полукруга MNP, одузмемо запремину, коју описује полукруг MNP', дакле на основу обрасца 2) у чл. 47.

$$V = \pi\int\left[\left(b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}\right)^2 - \left(b-\sqrt{r^2-(x-a)^2}\right)^2\right]d\,x$$

$$= 4\,\pi\,b\int\sqrt{r^2-(x-a)^2}\,.\,d\,x = 4\,\pi\,b\,r\int\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{r}\right)^2}\,.\,dx$$

$$= 4\,\pi\,b\,r^2\int\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{r}\right)^2}\,.\,d\left(\frac{x-a}{r}\right).$$

Пошто је $\frac{x-a}{r} < 1$ ставићемо $\frac{x-a}{r} = \sin\varphi$ и наш интеграл добија тиме познати вид

$$V = 4\,\pi\,b\,r^2\int\cos\varphi\,.\,d\sin\varphi = 4\,\pi\,b\,r^2\int\cos^2\varphi\,.\,d\,\varphi = 4\,\pi\,b\,r^2\left(\frac{\sin 2\,\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + C$$
$$= \pi\,b\,r^2\,(\sin 2\,\varphi + 2\,\varphi) + C$$

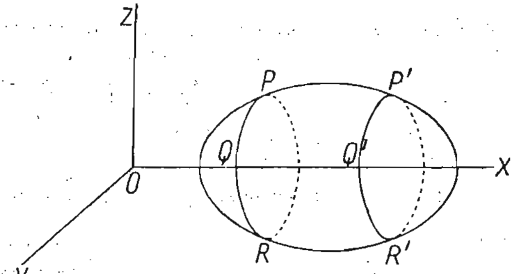
(в. чл. 18.). Интеграл треба узети између граница $x = a - r$ и $x = a + r$, а с обзиром на учињењу замену $\frac{x-a}{r} = \sin\varphi$, то значи за угао φ од $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, па до $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Према томе је запремина прстенастог тела

$$V = \pi\,b\,r^2\left[\sin 2\,\varphi + 2\,\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\,b\,r^2\left[(\sin\pi + \pi) - (\sin(-\pi) - \pi)\right]$$
$$= 2\,\pi^2\,b\,r^2.$$

Ако овај ресултат напишемо $V = 2\,\pi\,b\,.\,\pi\,r^2$ доћићемо до значајног закључка да је запремина овог обртног тела једнака производу из површине круга, који се обрће, и путање (периферије круга) коју средиште тога круга описује. (В. чл. 77.)

49. Један особени случај. — Претпоставимо да тело има својство да су површине у извесном правцу повучених паралелних пресека функције одстојања тих пресека.

Узмимо да је yz-раван паралелна са пресецима који имају поменуто својство, тј. да су пресеци (њихове површине) паралелни са yz-равни функције од x.



Сл. 22.

Означимо са u површину пресека PQR, са $u + \triangle u$ површину пресека $P'Q'R'$. Запремина $\triangle V$, коју та два пресека PQR и $P'Q'R'$ (// са yz-равни) исецају из задатог тела, лежи између запремина два ваљка, од којих један има за основицу површину u, а други површину $u + \triangle u$. Висина оба ваљка је једнака одстојању пресека PQR и $P'Q'R'$, а то је $\triangle x$. Из неравности $u\,.\,\triangle x < \triangle V < (u + \triangle u)\,.\,\triangle x$ или $u < \frac{\triangle V}{\triangle x} < u + \triangle u$, кад пређемо граници, тј. претпоставимо да је $\triangle x$, па дакле и $\triangle u$ бесконачно мало, следује $\frac{d\,V}{dx} = u$,

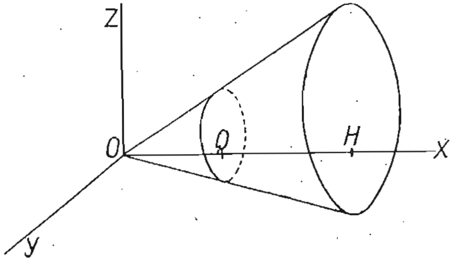
$$d\,V = u\,.\,dx, \quad V = \int u\,.\,dx. \tag*{(1}$$

На случај да x-оса није управна на равнинама пресека PQR, $P'Q'R'$,… имали бисмо за одстојање тих равни место $\triangle x$ да ставимо $\triangle x\,.\,\sin\lambda$ означивши са λ угао који x-оса чини са yz-равни. Обрасци 1) заменили бисмо обрасцима

$$d\,V = \sin\lambda\,.\,u\,.\,dx, \quad V = \sin\lambda\,.\int u\,.\,dx \tag*{(2}$$

50. Примери. —

1. Пример. Узмимо купу са ма каквом основом a. Управну $OH = h$ из темена O на основу узећемо за x-осу, теме за почетак правоуглих координата.



Сл. 23.

За ма који пресек u у одстојању $OQ = x$ постоји пропорција

$$u : a = x^2 : h^2,$$

одакле

$$u = \frac{a\,x^2}{h^2}$$

и према формули 1) у прошломе члану

$$V = \frac{a}{h^2}\int x^2 . \, d\,x.$$

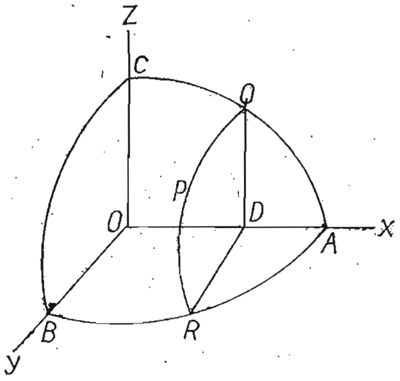
Одавде добијамо за запремину зарубљене купе између пресека Q и основице

$$V = \frac{a}{h^2}\int_x^h x^2 . \, d\,x = \frac{a}{3\,h^2}(h^3 - x^3).$$

За запремину целе купе од врха O па до основе имамо

$$V = \frac{a}{h^2}\int_0^h x^2 . \, d\,x = \frac{a}{h^2} . \frac{h^3}{3} = \frac{a\,h}{3}.$$

2. Пример. Елипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Сл. 24.

Једначина пресека QPR, који је паралелан са yz-равни у одстојању $OD = x$ гласи

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Полуосе овога пресека (елипсе) јесу

$$DR = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ и } DQ = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

дакле његова површина

$$u = \pi . DR . DQ = \pi\,b\,c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

и према томе запремина елипсоида

$$V = \pi\,b\,c\int_{-a}^{+a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) . \, d\,x = \pi\,b\,c\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=-a}^{x=+a} = \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c.$$

Узмимо једначину елипсоида у системи једног спрега коњугованих пречника: $\frac{x^2}{a_1{}^2} + \frac{y^2}{b_1{}^2} + \frac{z^2}{c_1{}^2} = 1$. Једначину пресека, који је паралелан са zy-равни, добијамо кад у једначини елипсоида ставимо за x извесну одређену вредност, нпр. $x = OD_1$. Једначина пресека $Q_1 P_1 R_1$ јесте

$$\frac{y^2}{b_1{}^2} + \frac{z^2}{c_1{}^2} = 1 - \frac{x^2}{a_1{}^2} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{\left(b_1\sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1{}^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c_1\sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1{}^2}}\right)^2} = 1.$$

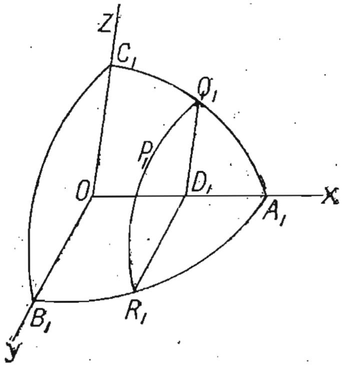
Коњуговани полупречници овога пресека (елипсе), који падају у правац y- и z-осе јесу

$$D_1 R_1 = b_1\sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1{}^2}} \text{ и } D_1 Q_1 = c_1\sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1{}^2}},$$

а површина пресека (по познатој Аполоније-вој теореми

$$u = \pi . D_1 R_1 . D_1 Q_1 . \sin\mu$$
$$= \pi\,b_1\,c_1\left(1 - \frac{x^2}{a_1{}^2}\right)\sin\mu,$$

где је μ коњугациони угао $Q_1 D_1 R_1$ у исто време и угао који y- и z-оса чине међусобом. Пошто је координатна система косоугла, то је према обрасцу 2) у чл. 49.



Сл. 25.

$$V = \pi\,b_1 c_1 \sin\lambda . \sin\mu\int_{-a_1}^{+a_1}\left(1 - \frac{x^2}{a_1{}^2}\right) . \, d\,x = \pi\,b_1 c_1 \sin\lambda\,\sin\mu\left[x - \frac{x^3}{3\,a_1{}^2}\right]_{x=-a_1}^{x=+a_1}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,a_1 b_1 c_1 \sin\lambda . \sin\mu.$$

Упоређењем ове вредности са горе добивеном следује једначина

$$a\,b\,c = a_1 b_1 c_1 \sin\lambda . \sin\mu$$

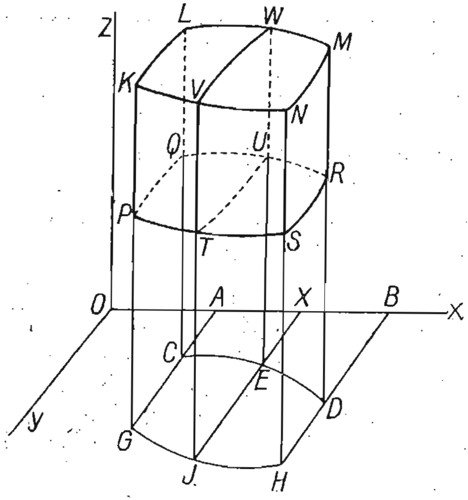
која исказује правило аналогно познатој Аполоније-вој теореми за елипсу. Правило казује да паралелопипеди конструисани из три коњугована полупречника a_1, b_1, c_1 и коњугационих углова λ и μ имају сви једнаку запремину равну запремини правоуглoвног паралелопипеда који је конструисан из главних полуоса a, b, c елипсоидових.

Ако последњу једначину напишемо

$$\pi\,a\,b\,c = \pi\,a_1\,b_1\,c_1 \sin\lambda . \sin\mu,$$

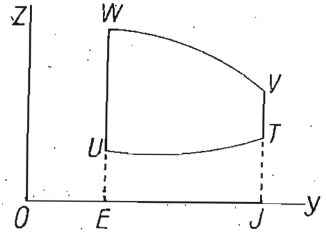
онда је речима можемо да протумачимо и на овај начин: ваљци, који су описани око елипсоида тако да су њихове основе паралелне са равни линије дуж које они елипсоид додирују, имају једнаке запремине.

51. Општи случај. — Нека је $F(x, y, z) = 0$ једначина ма какве површине $KLMN$, $\Phi(x, y, z) = 0$ једначина друге једне површине $PQRS$. Узмимо затим две са yz-равни паралелне равни $CGKL$ $(x = a)$ и $DHMN$ $(x = b)$, које задате површине секу по линијама KL, PQ, MN и RS. Најзад нека су дата још два ваљка $y = \varphi(x)$ и $y' = \psi(x)$ оба управна на xy-равни. Први ваљак, чија је основа линија CD у xy-равни, сече оне две површине по линијама LM и QR. Други ваљак, са основом GH, сече површине по линијама KN и PS. Ваљци $y = \varphi(x)$ и $y' = \psi(x)$ са површинама $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ и равнима $x = a$ и $y = b$ образују простор $KLMNPQRS$ чију запремину тражимо.



Сл. 26.

Замислимо раван $EIVW$ повучену паралелно са yz-равни и изразимо површину фигуре $VWTU$, по којој та раван сече простор $KLMNPQRS$. Фигура $VWTU$ ограничена је са две стране линијама VW и TU, а са друге две правама WE и VI, које су паралелне са z-осом. Једначине линија VW и UT добијамо кад у једначинама $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ ставимо $x = OX$. Нека су $z = f(X, y)$ и $z' = \pi(X, y)$ једначине линија VW и UT. Према формули 2) у чл. 35. јесте



Сл. 27.

$$\text{површина фигуре } WVEI = \int_y^{y'} z \,.\, dy$$

$$\text{површина фигуре } UTEI = \int_y^{y'} z' \,.\, dy,$$

дакле

$$\text{површина фигуре } VWTU = \int_y^{y'} z \,.\, dy - \int_y^{y'} z' \,.\, dy = \int_y^{y'} (z - z') \,.\, dy.$$

У овоме су интегралу z и z' функције од y, пошто је x константно $= OX$. Нека је

$$\int (z - z') \,.\, dy = \int [f(X, y) - \pi(X, y)] \,.\, dy = \chi(x, y) + C.$$

Као границе интеграла има се узети $y = \varphi(x)$ и $y' = \psi(x)$ тако да као ресултат

$$VWTU = \int_{y = \varphi(x)}^{y' = \psi(x)} (z - z') \,.\, dy = \chi[x, \psi(x)] - \chi[x, \varphi(x)]$$

добијамо извесну функцију која још једино зависи од x.

Запремину V налазимо кад површину $VWTU$ помножимо са dx и интегралимо од $x = a$ па до $x = b$. Добијамо тиме овај општи образац

$$V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z') \,.\, dy. \qquad (1$$

Ако место ваљака $y = \varphi(x)$ и $y' = \psi(x)$ узмемо две равни паралелне са xz-равни, ставимо $\varphi(x) = c$, $\psi(x) = e$, формула гласи

$$V = \int_a^b dx \int_c^e (z - z') \,.\, dy. \qquad (2$$

Заменимо ли доњу површину $\Phi(x, y, z) = 0$ самом xy-равни, ставимо дакле $z' = 0$ обрасци 1) и 2) претварају се у ове простије

$$V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z \,.\, dy \qquad (1a$$

$$V = \int_a^b dx \int_c^e z \,.\, dy. \qquad (2a$$

5. Многоструки интеграли.

52. Двоструки интеграли. — Изрази, у којима се интеграли по двема разним променљивама, као што смо их имали у последњем члану, зову се *двоструки интеграли*. Они, као и обични или прости интеграли, могу бити *одређени* или *неодређени*, према томе да ли су означене границе у којима се врши интегралење.

Двоструки интеграл $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z \,.\, dy$ је limes коме тежи збир чланова $z \,.\, \triangle x \,.\, \triangle y$ узев тај збир између означених граница.

Израз $\int\limits_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,dy$, дакле одређени интеграл диференциала z. (у коме се x сматра као стална количина, а z као функција само y-а) између граница $y=\varphi(x)$ и $y'=\psi(x)$, представља збир бесконачно много бесконачно малих количина $z\,.\,dy$. Према самом значају интеграла јесте

$$\int\limits_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,dy = \lim_{\Delta y=0} \sum_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,\Delta y.$$

Помножимо обе стране ове једначине са Δx и пустимо да се x мења од $x=a$ па до $x=b$ добићемо

$$\sum_{x=a}^{x=b} \Delta x \int\limits_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,dy = \sum_{x=a}^{x=b} \Delta x \lim_{\Delta y=0} \sum_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,\Delta y.$$

За бесконачно мало Δx имаћемо на левој страни ове једначине

$$\lim_{\Delta x=0} \sum_{x=a}^{x=b} (\Delta x \int\limits_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,dy) = \int\limits_{x=a}^{x=b} dx \int\limits_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,dy,$$

а на десној страни

$$\lim_{\Delta x=0} \sum_{x=a}^{x=b} [\Delta x \lim_{\Delta y=0} \sum_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,\Delta y] = \lim_{\Delta x=0} \sum_{x=a}^{x=b} [\lim_{\Delta y=0} \sum_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,\Delta y\,.\,\Delta x]$$

зато што се у $\Sigma z\,.\,\Delta y$ сматра Δx као стална количина. Ово последње може простије да се напише $\lim\limits_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0}} \sum\limits_{x=a}^{x=b} \sum\limits_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,\Delta y\,.\,\Delta x$. Тиме смо доказали да је

$$\int\limits_{x=a}^{x=b} dx \int\limits_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,dy = \lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0}} \sum_{x=a}^{x=b} \sum_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,.\,\Delta y\,.\,\Delta x.$$

53. Троструки и многоструки интеграли. — Нека је $u=F(x,y,z)$ функција која зависи од три прапроменљиве x, y, z. Интегралимо диференциал $u\,.\,dz$ по z-у сматравши, при томе, променљиве x и y као сталне количине, и узмимо интеграл између граница $z_1=f_1(x,y)$ и $z_2=f_2(x,y)$, па ћемо добити $\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} u\,.\,dz$, које је функција од x и y.

Помножимо тај интеграл са dy и интегралимо тако добивени диференциал $dy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} u\,.\,dz$ по y-у између граница $y_1=\varphi_1(x)$ и $y_2=\varphi_2(x)$, сматравши, при томе, x као константу, следује двоструки интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} u\,.\,dz$, који представља извесну функцију од x. Најзад, ако овај последњи интеграл помножимо са dx и интегралимо по x-у између $x=a$ и $x=b$, добијамо *троструки* интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} u\,.\,dz,$$

који се, не означивши границе, бележи краће

$$\iiint u\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz.$$

На сличан начин долазимо до четворострукuх интеграла итд.

Како за двоструке тако и за троструке интеграле доказује се да је

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} u\,.\,dz = \lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0\\ \Delta z=0}} \sum_{x=a}^{x=b} \sum_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} \sum_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} (u\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z).$$

54. Правило. — Код многоструких интеграла са константним границама ред интеграљења је произвољан. Тако је нпр.

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^e z\,.\,dy = \int\limits_c^e dy \int\limits_a^b z\,.\,dx$$

(в. формулу 2а) у чл. 51.).

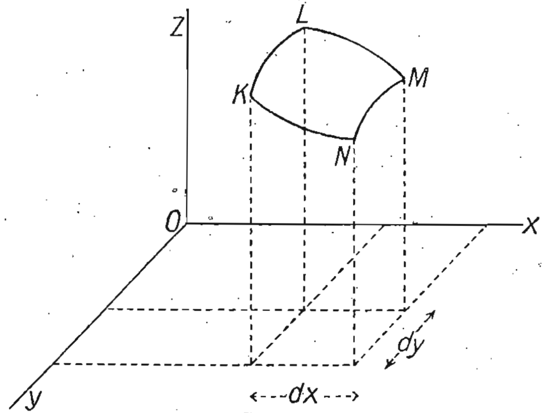
Ако границе интеграла нису константне, онда није свеједно којим ћемо редом вршити поједина интеграљења. Тако нпр. у формули 1а) чл. 51. небисмо смели ставити

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,.\,dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_a^b z\,.\,dx.$$

Доказ и тумачење овога налазимо у геометриском значају ових интеграла (в. чл. 51.).

6. Компланација површина.

55. Општи обрасци. — Под *површјем* једне криве површине разумемо границу, којој тежи површина једног полиедра чије стране (пљосни), смањујући се у бесконачност, све се више приближавају тангенциалним равнима на посматрану површину.



Сл. 28.

Нека је dS површје комада $KLMN$ у коме задату криву површину продире призма подигнута управно на xy-раван са основним ивицама dx и dy. Пошто замишљамо да је комад $KLMN$ бесконачно мали, можемо да га заменимо одговарајућим комадом тангенциалне равни у ма којој од тачака K, L, M или N. Површина пројекције комада $KLMN$ у xy-равни је $= dx\,.\,dy$, а на основу једног познатог нам правила знамо да је $dx\,.\,dy = dS\,.\,\cos\lambda$, одакле

$$dS = \frac{dx\,.\,dy}{\cos\lambda}, \quad S = \iint \frac{dx\,.\,dy}{\cos\lambda},$$

где λ означава угао, који тангенциална раван у тачци K чини са xy-равни или што је исто угао, који нормала површине у тачци K чини са z-осом. Према формулама 3) у чл. 46. јесте $\cos\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$ и на тај начин

$$S = \iint \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,.\,dx\,.\,dy.$$

Ако узмемо да је површина ограничена равнима $x = a$ и $x = b$, а са друге две стране ваљцима $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ имаћемо образац

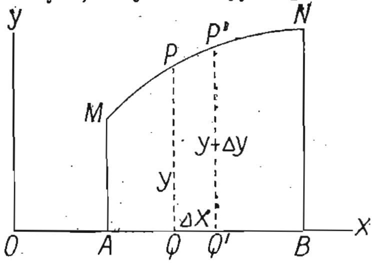
$$1) \qquad S = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,.\,dy.$$

Најзад, ако место ваљцима ограничимо површину двема са xz-равни паралелним равнима $y = c$ и $y = e$ формула за S добија вид

$$2) \qquad S = \int_a^b dx \int_c^e \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,.\,dy.$$

---

56. Компланација обртних површина. — Површје површине, коју описује линија MN обртањем око x-осе, јесте граница којој тежи збир површја омотача свих зарубљених купа, које постају обртањем праволиниских елемената PP' из којих замишљамо да је састављена линија MN. По познатој формули из Стереометрије омотач купе, која постаје обртањам елемента PP', јесте



Сл. 29.

$$\Delta S = \frac{1}{2} PP'\,.\,[2\pi y + 2\pi(y + \Delta y)]$$

$$= PP'\,.\,\pi(2y + \Delta y)$$

или, пошто је $PP' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,.\,\Delta x$,

$$\Delta S = \pi(2y + \Delta y)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,.\,\Delta x,$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \pi(2y + \Delta y)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

одакле кад пређемо граници $\dfrac{dS}{dx} = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$,

$$dS = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx, \quad S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx. \qquad (1$$

С обзиром да је $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx = ds$ можемо образац за S да напишемо простији

$$S = 2\pi\int y\,.\,ds. \qquad 1a)$$

57. Примери. —

1. Пример. Обртни елипсоид који постаје обртањем елипсе око x-осе.

Из једначине елипсе следује $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$ и према формули 1) у последњем члану

$$S = 2\pi\int y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}\,.\,dx = \frac{2\pi}{a^2}\int\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}\,.\,dx.$$

Заменимо, на основу једначине елипсе, под кореним знаком $a^4 y^2 = a^2 b^2 (a^2 - x^2)$ и ставимо $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, па ћемо добити

$$S = \frac{2\pi b}{a^2} \int \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}\, .\, dx = \frac{2\pi b}{a} \int \sqrt{a^2 - e^2 x^2}\, .\, dx$$

$$= 2\pi b \int \sqrt{1 - \left(\frac{e\,x}{a}\right)^2}\, .\, dx = \frac{2\pi a b}{e} \int \sqrt{1 - \left(\frac{e\,x}{a}\right)^2}\, .\, d\left(\frac{e\,x}{a}\right).$$

Пошто је код елипсе $\frac{e\,x}{a} < 1$ можемо да учинимо замену $\frac{e\,x}{a} = \sin\varphi$ и да претворимо интеграл у

$$S = \frac{2\pi a b}{e} \int \cos^2\varphi\, .\, d\varphi = \frac{\pi a b}{e} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi\right) + C\cdot$$

(в. чл. 18.). Ако интеграл узмемо између граница $x = 0$ и $x = a$, чему одговарају $\left(\text{на основу замене } \frac{e\,x}{a} = \sin\varphi,\ x = \frac{a \sin\varphi}{e}\right)$ вредности $\varphi = 0$ и $\varphi = arc \sin e$, које последње значи да је $\sin\varphi = e$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - e^2}$, $\sin 2\varphi = 2e\sqrt{1 - e^2}$, добићемо површје половине обртног елипсоида

$$S = \frac{\pi a b}{e} \left(e\sqrt{1 - e^2} + arc \sin e\right).$$

Површина целог обртног елипсоида је =

$$\frac{2\pi a b}{e} \left(e\sqrt{1 - e^2} + arc \sin e\right).$$

2. *Пример.* Обртни параболоид, који постаје обртањем параболе $y^2 = 2px$ око x-осе.

Из једначине параболе налазимо $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ и према формули 1) последњег члана

$$S = 2\pi \int y \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\, .\, dx = 2\pi \int \sqrt{y^2 + p^2}\, .\, dx = 2\pi \int \sqrt{2px + p^2}\, .\, dx$$

$$= \pi\sqrt{p} \int \sqrt{2x + p}\, .\, d(2x + p) = \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} (2x + p)^{3/2} + C,$$

које узето, између граница $x = 0$ и $x = x$, даје за површину образац

$$S = \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} \left[(2x + p)^{3/2} - p^{3/2}\right] = \frac{2}{3} \pi \left[\sqrt{p}\, \sqrt{(2x + p)^3} - p^2\right].$$

3. *Пример.* Прстенаста површина која постаје обртањем круга $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ око x-осе. (Види сл. 21. у чл. 48.)

Из једначине круга следује $y = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$. За тачке P на полукругу MPN јесте $y = b + \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$, а за тачке P' на полукругу $MP'N$ је $y' = b - \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$. Површина S прстенастог тела, које описује круг, састоји се из површине S_1, коју описује горња половина круга и површине S_2, коју описује доња половина круга. Површина прстенастог тела је дакле

$$S = S_1 + S_2$$

$$= 2\pi \int_{a-r}^{a+r} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, .\, dx + 2\pi \int_{a-r}^{a+r} y' \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}\, .\, dx,$$

где је $y = b + \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$, $\qquad y' = b - \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - a}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}}, \qquad \frac{dy'}{dx} = -\frac{x - a}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(x - a)^2}{r^2 - (x - a)^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}},$$

дакле

$$S = 2\pi \int_{a-r}^{a+r} (y + y') \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, .\, dx = 4\pi b r \int_{a-r}^{a+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}}$$

$$= 4\pi b r \int_{a-r}^{a+r} \frac{d\left(\frac{x - a}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - a}{r}\right)^2}} = 4\pi b r \left[arc \sin \frac{x - a}{r}\right]_{x = a - r}^{x = a + r}$$

$$= 4\pi b r\, [arc \sin 1 - arc \sin(-1)] = 4\pi^2 b r.$$

Добивени ресултат можемо да напишемо $S = 2\pi r\, .\, 2\pi b$ и према томе да га искажемо: површина прстенастог тела равна је производу из периферије круга, који се обрће и периферије круга, који описује његово средиште, које је у исто време и тежиште круга. (В. чл. 77.)

4. *Пример.* Тело које постаје обртањем просте циклоиде $x = a(\omega - \sin\omega)$, $y = a(1 - \cos\omega)$ око x-осе. (В. 4. пример чл. 34., сл. 5. и 3. пример чл. 48.)

Овде је $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}$, $\qquad ds = \sqrt{1 + \frac{2ay - y^2}{y^2}}\, dx = \frac{\sqrt{2ay}}{y}\, .\, dx$

и према томе површина обртног тела рачунавши од O па до тачке P (в. сл. 5.)

$$S = 2\pi \int_0^x y\, .\, ds = 2\pi \int_0^x \sqrt{2ay}\, .\, dx$$

или, с обзиром да је $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$ (в. 4. пример чл. 34.),

$$S = 2\pi\sqrt{2a} \int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{2a - y}}.$$

Заменом (в. чл. 11.) $\sqrt{2a-y}=t$, дакле $y=2a-t^2$, $dy=-2t.dt$ добијамо

$$S=4\pi\sqrt{2a}\int(t^2-2a)\,dt=4\pi\sqrt{2a}\left[\frac{t^3}{3}-2at\right]$$

$$=4\pi\sqrt{2a}\left[\frac{\sqrt{2a-y}^3}{3}-2a\sqrt{2a-y}\right]_0^y$$

$$=4\pi\sqrt{2a}\left[\frac{\sqrt{2a-y}^3}{3}-2a\sqrt{2a-y}-\frac{\sqrt{2a}^3}{3}+2a\sqrt{2a}\right]$$

$$=4\pi\sqrt{2a}\left[\frac{\sqrt{2a-y}^3}{3}-2a\sqrt{2a-y}+\frac{4a\sqrt{2a}}{3}\right]$$

$$=\frac{4\pi\sqrt{2a}\sqrt{2a-y}}{3}\left[2a-y-6a\right]+\frac{32\pi a^2}{3}$$

$$=\frac{32\pi a^2}{3}-\frac{4\pi\sqrt{2a}\sqrt{2a-y}}{3}(4a+y).$$

Ако ставимо $y=2a$ добићемо половину обртне површине (од тачке O до тачке B) $S=\frac{32\pi a^2}{3}$, а површина целог обртног тела $=\frac{64\pi a^2}{3}$.

III.

Примена Интегралног Рачуна у Механици, Физици, Геодезији итд.

I. Форономија тачке.

58. Појмови и обрасци. — Кретање је *равномерно* или *једнако* кад тачка у ма како малом и једнаком времену прелази једнаке путање.

Под *брзином* равномерног кретања разумемо дужину путање коју тачка прелази у јединици времена.

У *апсолутној системи мера*[1]) за дужну јединицу узима се 1 cm $=\frac{1}{100}$ m, а за времену јединицу секунда средњег сунчаног времена $=\frac{1}{86400}$ средњег сунчаног дана.

Ако тачка за t sec. прелази s m, онда је њена брзина

$$c=\frac{s}{t},$$

дакле

$$s=ct. \qquad (1$$

Код неједнаког кретања заводимо појам о *средњој брзини*. Узмимо да је тачка за t sec. прешла путању s, за t_1 sec. путању s_1, тада је у времену $t-t_1$ њена средња брзина

$$v=\frac{s-s_1}{t-t_1}.$$

Неједнако кретање постаје потпуно карактерисано појмом *тренутне брзине*, појмом који је завео *Галилеј*. Означимо са $t-t_1=\triangle t$ врло мали времени интервал, са $s-s_1=\triangle s$ путању, коју је тачка у томе интервалу прешла, тада је $v=\frac{\triangle s}{\triangle t}$ средња брзина, која ће се у толико више поклапати са тренутном брзином у почетку интервала $\triangle t$ у колико тај интервал будемо узели краћи. За бескрајно мали интервал $\triangle t$ количник $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ даје тренутну брзину. Дакле тренутна брзина је $v=\lim\limits_{\triangle t=0}\frac{\triangle s}{\triangle t}$ или

$$v=\frac{ds}{dt}. \qquad (2$$

---

[1]) Система: сантиметар — грам — секунда или *C-G-S*-система.

Кретање се зове *подједнако убрзано*, кад брзина расте сразмерно времену: $v = a\,t$. Промена брзине у јединици времена (секунди) зове се *убрзање* или *акцелерација*. Код оваквог кретања је убрзање стално у свакој секунди, јер је $\frac{v}{t} = a$.

Код неједнако убрзаног кретања јесте (аналогно ономе за брзину) *средње убрзање*

$$p = \frac{v - v_1}{t - t_1},$$

а *тренутно убрзање* $\qquad p = \lim_{\triangle t = 0} \frac{\triangle v}{\triangle t}$ или

3) $$p = \frac{d\,v}{d\,t}.$$

Овим смо добили ове опште формуле за кретање

2*) $$v = \frac{d\,s}{d\,t}, \qquad d\,s = v\,d\,t, \qquad s = \int v\,d\,t,$$

3*) $$p = \frac{d\,v}{d\,t} \qquad d\,v = p\,d\,t, \qquad v = \int p\,d\,t.$$

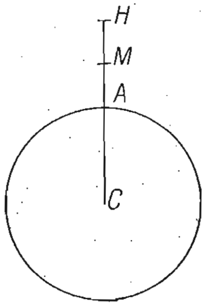
Комбиновањем образаца 2) и 3) налазимо

4) $$p = \frac{d^2\,s}{d\,t^2},$$

5) $$v\,d\,v = p\,d\,s.$$

59. Примери.

1. Пример. Слободан пад у празноме простору с обзиром на промењивост акцелерације.



Сл. 30.

Означимо са R полупречник земне лопте, са h висину са које тело почиње да пада рачунајући је од средишта земље. Ставимо дакле $CA = R$, $CH = h$. Нека је $x = HM$ пут који је у паду тело прешло после t сек. По закону гравитације за акцелерације g и g' у тачкама A и M (које су од средишта C у одстојањима R и $h - x$) постоји пропорција

$$g : g' = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{(h - x)^2},$$

одакле

$$g' = \frac{g\,R^2}{(h - x)^2}.$$

На основу обрасца 5) имамо $v\,d\,v = g'\,d\,x$, где кад за g' унесемо вредност

$$v\,d\,v = g\,R^2\,\frac{d\,x}{(h - x)^2},$$

које, кад интегралимо, а имамо при томе на уму да је за $t = 0$, $v = 0$ и $x = 0$, даје

$$\int_0^v v\,d\,v = g\,R^2 \int_0^x (h - x)^{-2}\,.\,d\,x.$$

Дакле

$$\frac{v^2}{2} = -\,g\,R^2 \int_0^x (h - x)^{-2}\,d\,(h - x) = -\,g\,R^2 \left|\frac{(h - x)^{-1}}{-\,1}\right|_0^x$$

$$= g\,R^2 \left|\frac{1}{h - x}\right|_0^x = g\,R^2 \left[\frac{1}{h - x} - \frac{1}{h}\right] = \frac{g\,R^2\,x}{h\,(h - x)}$$

и према томе

$$v = R\sqrt{\frac{2\,g\,x}{h\,(h - x)}}. \qquad \text{(I}$$

Да бисмо нашли образац за време ставићемо у формули $d\,t = \frac{d\,x}{v}$ за v добивену вредност под I. Имамо

$$d\,t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}}\sqrt{\frac{h - x}{x}}\,.\,d\,x$$

и кад интегралимо од $t = 0$

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}} \int_0^x \sqrt{\frac{h - x}{x}}\,.\,d\,x.$$

Овај бисмо интеграл могли, према упутству чл. 11., да претворимо у један рационалан интеграл и као таквог да га решимо. Брже долазимо до резултата кад напишемо

$$t = \frac{h}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}} \int_0^x \sqrt{\frac{1 - \frac{x}{h}}{\frac{x}{h}}}\,.\,d\,\frac{x}{h}$$

и пошто је $\frac{x}{h} < 1$ ставимо $\frac{x}{h} = \sin^2\varphi$, $\; d\,\frac{x}{h} = 2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\,.\,d\,\varphi$. Тиме добијамо

$$t = \frac{2\,h}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}} \int_0^\varphi \cos^2\varphi\,.\,d\varphi$$

и пошто је $\int_0^\varphi \cos^2\varphi\,.\,d\varphi = \frac{\sin 2\,\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ (в. пример на крају чл. 20.)

$$t = \frac{h}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}}\left(\frac{\sin 2\,\varphi}{2} + \varphi\right) = \frac{h}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}}\,(\sin\varphi\,\cos\varphi + \varphi)$$

$$= \frac{h}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}}\left(\sqrt{\frac{x}{h}}\sqrt{1 - \frac{x}{h}} + \arcsin\sqrt{\frac{x}{h}}\right)$$

или најзад

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{h}{2\,g}}\left(\sqrt{x\,(h - x)} + h\,.\,\arcsin\sqrt{\frac{x}{h}}\right). \qquad \text{(II}$$

Време T, које је потребно да тело из тачке H дође у тачку A, тј. да стигне на земну површину добићемо кад је у једн. II) ставимо $x = h - R$.

III) $$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{h}{2g}}\left(\sqrt{R(h-R)} + h \,.\, arc\,sin\sqrt{\frac{h-R}{h}}\right).$$

Брзину, којом тело стигне у тачку A налазимо из једн. I) кад у њој ставимо $x = h - R$. Она је

IV) $$V = \sqrt{\frac{2\,g\,R\,(h-R)}{h}}.$$

Примедба. Ако је x врло мало наспрам R, као што је то код кретања у близини земне површине, онда $h - x$ можемо да заменимо са h, а ово опет са R. Образац I) добија овај простији вид

$$v = \sqrt{2\,g\,x}.$$

Тако исто образац II), кад узмемо у обзир да се синус врло малог лука $\sqrt{\frac{x}{R}}$ може да замени самим луком, добија простији израз

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\sqrt{Rx} + R\sqrt{\frac{x}{R}}\right)$$

или скраћено

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}},$$

одакле познати образац

$$x = \frac{1}{2}\,g\,t^2.$$

2. Пример. Слободан пад тела под претпоставком да је отпор ваздуха сразмеран брзини.

Означимо са g константну акцелерацију, са v брзину падајућег тела после t сек., са x путању (дужину пада) у времену t и са k константу која показује за колико се убрзање смањује кад је $v = 1$. Према овоме, а на основу претпоставке, убрзање после t сек. јесте $g - k\,v$. На основу обрасца 3), по коме је $d\,t = \frac{d\,v}{p}$, имамо овде

$$dt = \frac{dv}{g - kv},$$

одакле, с обзиром да је за $t = 0$ и $v = 0$,

$$\int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{g-kv} = -\frac{1}{k}\int_0^v \frac{d\,(g-kv)}{g-kv},$$

$$t = \frac{1}{k}\,l\left(\frac{g}{g-kv}\right)$$

или кад једначину решимо по v

I) $$v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).$$

Одавде видимо да у колико је t веће (пад дуже траје) брзина v све се више приближује константној вредности $\frac{g}{k}$. За $t = \infty$ постаје $v = \frac{g}{k}$.

Једначину за путању добићемо кад у општој формули $dx = v\,dt$ ставимо за v добивену вредност из I). Једначина гласи

$$dx = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).\,dt.$$

Интегралењем, а водећи рачуна да је за $t = 0$ и $x = 0$, налазимо

$$x = \frac{g}{k}\int_0^t\left(1 - e^{-kt}\right).\,dt = \frac{g}{k}\int_0^t d\,t - \frac{g}{k}\int_0^t e^{-kt}\,.\,dt$$

$$= \frac{g}{k}\,t + \frac{g}{k^2}\int_0^t e^{-kt}\,.\,d\,(-kt) = \frac{g}{k}\,t + \frac{g}{k^2}\left|\,e^{-kt}\,\right|_0^t,$$

дакле

$$x = \frac{g}{k}\,t + \frac{g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right). \qquad \text{(II}$$

3. Пример. Вертикалан хитац у вис под претпоставком да је отпор ваздуха сразмеран брзини.

Нека је V брзина којом се тело баца у вис. Узев иста означења као и у прошломе задатку утврђујемо да је убрзање после t сек. једнако $-g-k\,v$, пошто сада акцелерација земна и отпор ваздуха дејствују обоје супротно кретању. Имамо, дакле, за кретање ову једначину

$$dv = (-g - k\,v)\,.\,dt$$

или

$$dt = -\frac{dv}{g+kv},$$

одакле, имајући на уму да је за $t = 0$, $v = V$,

$$\int_0^t dt = -\int_V^v \frac{dv}{g+kv} = -\frac{1}{k}\int_V^v \frac{d\,(g+kv)}{g+kv}$$

$$t = -\frac{1}{k}\left|\,l\,(g+kv)\right|_V^v = \frac{1}{k}\,l\left(\frac{g+kV}{g+kv}\right). \qquad \text{(I}$$

или решено по v

$$v = -\frac{g}{k} + \frac{1}{k}\,(g + k\,V)\,e^{-kt}. \qquad \text{(I}a$$

Ако ову вредност за v заменимо у општи образац $dx = v\,.\,dt$ добићемо

$$dx = -\frac{g}{k}\,.\,dt + \frac{1}{k}\,(g + k\,V)\,e^{-kt}\,.\,dt,$$

које интегралено, а с обзиром да је за $t = 0$ и $x = 0$, даје једначину за путању

$$x = \left|-\frac{g}{k}\,t - \frac{g+kV}{k^2}\,e^{-kt}\right|_0^t = -\frac{g}{k}\,t + \frac{g+kV}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right). \qquad \text{(II}$$

Ставимо у I) $v = 0$ па ћемо добити време T за које је тело стигло у највиши положај и из којег оно поново се враћа доле

$$T = \frac{1}{k}\,l\left(\frac{g+kV}{g}\right). \qquad \text{(III}$$

Најзад ако у II) ставимо $t = T$ добићемо висину X до које је тело дошло хитцем у вис.

$$X = -\frac{g}{k} \cdot \frac{1}{k}\, l\left(\frac{g + kV}{g}\right) + \frac{g + kV}{k^2}\left(1 - e^{-l\frac{g + kV}{g}}\right)$$

$$= -\frac{g}{k^2}\, l\left(\frac{g + kV}{g}\right) + \frac{g + k\dot{V}}{k^2}\left(1 - \frac{g}{g + kV}\right)$$

или простије

IV) $$X = -\frac{g}{k^2}\, l\left(\frac{g + kV}{g}\right) + \frac{V}{k}.$$

2. Динамика тачке.

60. Сила и маса. *Сила* је узрок притиску или вучи. Према томе за мерење сила постоји начело: две силе су једнаке, ако чине једнак притисак или једнаку вучу. Као *статична* јединица узима се тежина килограма, тј. притисак париског (под 45° сев. ширине) пракилограма на хоризонталну подлогу.

Кинетичка дефиниција силе гласи: узрок убрзања код кретања зове се сила. И на овој дефиницији оснива се кинетичко мерење сила: сила је пропорционална убрзању, које она проузрокује код кретања тела.

Искуство нас учи да једна иста сила разним телима придаје разна убрзања. Ту разлику ми приписујемо разлици у отпору, који тела дају или разлици у *маси*. Две су масе једнаке када им једнаке силе придају и једнака убрзања.

За *јединицу масе* узимамо масу 1 cm³ воде од + 4° C.

Да би кретање имало извесно убрзање сила мара да је пропорционална маси тела. Ако за јединицу силе узмемо силу, која јединици масе придаје јединицу убрзања, онда за кинетично мерење силе постоји формула

6) $$P = mp,$$

тј. сила = маси × убрзању, које, с обзиром на формулу 4), можемо да напишемо

6*) $$P = m\,\frac{d^2 s}{d\,t^2}.$$

У апсолутној системи мера (*C. G. S.*-системи) јединица силе је сила која маси 1 грама у 1 секунди придаје убрзање од 1 сантиметра. Та апсолутна јединица силе зове се *дин*.

Маса је пропорционална тежини тела:

7) $$G = mg,$$

тј. тежина тела = маси × убрзању слободног пада.

Материја, посматрана искључиво у погледу отпора, који она даје механичким силама, зове се маса. *Њутн* је дефинисао масу као квантитет материје.

61. Основна начела Науке о кретању. — *Њутн* у своме делу Philosophiae naturalis principia mathematica 1687. поставио је за кретање ова три основна закона:

1. свако тело остаје у миру или у равномерноме праволиниском кретању све док га силе не принуде да то стање промени.
2. промена у кретању сразмерна је дејствујућој сили и бива у правцу силе.
3. дејство и противдејство су једнаки. Или: дејства два тела једно на друго увек су једнака, али управљена у супротном правцу.

62. Слагање и разлагање сила. — Сила, која има исто дејство које имају две или више сила заједно, зове се њихова *резултанта*, а оне поједине силе *компоненте*.

Наћи резултанту за више сила називамо *слагање сила*.

Начело о паралелограму сила: резултанта двеју сила, које дејствују на исту тачку, одређена је по правцу и по величини дијагоналом паралелограма, чије стране по правцу и по величини представљају задате силе (компоненте),

Ако две силе дејствују у истоме правцу оне се сабирају; ако дејствују у супротноме правцу оне се одузимају.

За две силе P_1 и P_2, које у нападној тачци заклапају међусобом угао φ, јесте резултанта

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2\,P_1\,P_2\cos\varphi}. \qquad (8$$

Ако је $\varphi = 90^0$ онда је

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2}. \qquad (9$$

За $\varphi = 0$ јесте $R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2\,P_1\,P_2} = P_1 + P_2$, а
за $\varphi = 180^0$ јесте $R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 - 2\,P_1\,P_2} = P_1 - P_2$.

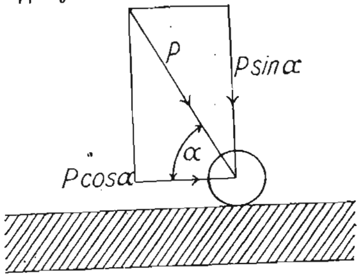
Слагање сила са заједничком нападном тачком врши се на исти начин (помоћу паралелограма) и онда када се силе не налазе све у истој равни.

Више сила стоје у *равнотежи* када је ма која од њих једнака, али супротно положена резултанти из осталих сила.

Силе, које стоје у равнотежи, неутралишу или компензују њихово дејство у погледу кретања, али остаје дејство вуче или притиска према томе да ли су силе управљене једна од друге или једна према другој.

Ако је тачка спречена да се креће у правцу дејствујуће силе, онда у правац могућег кретања дејствује само једна компонента силе, која се добија пројектовањем силе на тај правац.

Нека је α угао, који сила P заклапа са правцем могућег кретања, онда је компонента силе P, која дејствује на кретање, $= P \cos \alpha$. Ово се зове *косинусна теорема у Механици.*



Сл. 31.

Овакво разлагање сила имамо када је тело принуђено да се креће по извесној путањи (*принудно кретање*), а сила не дејствује у правцу путање. Компонента $P \sin \alpha$, која је нормална на путањи, има дејство вуче или притиска.

У случају да сила (односно резултанта свих дејствујући сила) стоји управно на путањи компонента кретањ је $= 0$.

63. Механички рад. Кад једна сила савлађује какав отпор (ка што је нпр. отпор ваздуха, трење или савлађује ма какву другу силу и при томе пренаша своју нападну тачку ми кажемо да та сила врш *механички рад*. Ако узмемо за јединицу механичног рада онај рад кој врши сила савлађујући отпор једнак јединици силе на путу равно јединици, онда је за савлађивање отпора P на путу s потребан рад

10) $$A = P s.$$

У апсолутној системи узима се *ерг* (од грчкога ἔργον = рад) з јединицу, а то је рад који врши сила савлађујући отпор од 1 дина н путу од 1 cm.

Као техничка или практична јединица за рад узима се и 1 кил грам-метар (Kgm), а то је рад када се тег од 1 Kg. подигне на висин 1 m. Пошто је 1 Kg = 981 000 дина, а 1 m = 100 cm, то је 1 Kgm = 98 100 000 ерга = 9,81 . 10^7 ерга.

Већа апсолутна јединица је 1 Џаул[1]) = 10^7 ерг. Према томе ј

$$1 \text{ Kgm} = 9{,}81 \text{ Џаул}, \ 1 \text{ Џаул} \sim \frac{1}{10} \text{Kgm}.$$

Ако сила дејствује путањом s, која је под углом α са супротни правцем отпора, који сила савлађује, онда је рад силе

11) $$A = P s \cos \alpha.$$

Одавде видимо да је рад исти као кад би сила P дејствовала путањ $s \cos \alpha$ супротно правцу отпора. Путања $s \cos \alpha$ то је пројекција путав s на супротан правац отпора.

---

[1]) по енглескоме физичару J. P. Joule (1818—1889).

Рад у јединици времена (1 sec.) зовемо *ефекат.* У апсолутној системи јединица је ефекта 1 ерг у секунди. Техничка је јединица 1 Ват = 1 Џаул за сек., а већа јединица 1 Киловат = 1000 Ват = 1000 Џаул за сек. Осим овога се употребљава као јединица ефекта 1 mkg у сек., а као већа јединица 1 коњска снага (HP) = 75 mkg у сек. = 75.9,81 . 10^7 ерга у сек. = 736 Ват.

Често се, нарочито у Електротехници, рад изражава Ватовим часовима (Wh), где је 1 Ватов час (Wattstunde) = 3600 Џаул = 3,6 . 10^{10} ерг $\sim$ 360 mkg, 1000 Ватових часова чине 1 Киловатчас (KWh).

64. Енергија кретања. Актуална и потенциална енергија. — Способност за вршење рада зове се *енергија.* Енергија, која се својствена каквој покретној маси услед њене брзине, зове се *енергија кретања, кинетична енергија* или *жива сила.*

Пошто енергија није ништа друго до способност за вршење рада, појмљиво је да сваку енергију меримо целим радом, који се том енергијом може да изврши. Узмимо да је тело масе m подигнуто на извесну висину, које падајући на доле добија брзину v. Тело тада добија енергију кретања

$$E = \frac{1}{2} m v^2. \qquad (12$$

Нека је $P = m g$ тежина тела, h висина на коју је тело подигнуто. Утрошени рад на дизање је $A = P . h$ (према формули 10), а пошто је код слободног пада $h = \frac{v^2}{2 g}$, то је

$$A = P h = m g \frac{v^2}{2 g} = \frac{1}{2} m v^2,$$

дакле, с обзиром на формулу 12),

$$A = E. \qquad (13$$

То значи да је утрошени рад раван добивеној енергији кретања.

Тег, подигнут на извесну висину, представља некакав квантум енергије, јер падајући доле у стању је да врши рад. Ова врста енергије зове се *енергија положаја.*

Енергија положаја само је специалан случај *потенциалне енергије,* као што је енергија кретања (кинетична енергија) особена врста актуалне енергије.

Примери:

а) за потенциалну енергију. Вода у воденичноме јазу. Подигнут тег код часовника са тегом. Навијена спирала џепнога часовника. Затегнут лук. Компримовани ваздух у ваздушној пушци. Водена пара под притиском у парноме котлу. Хемиска енергија барута, динамита и других експлозива. Електрична енергија у акумулатору. Магнетска енергија у магнетскоме пољу.

b) за актуалну енергију. Пушчано зрно у кретању. Топлота тела. Кретања звука и светлости. Електрична струја.

За обе врсте енергије важе начела:

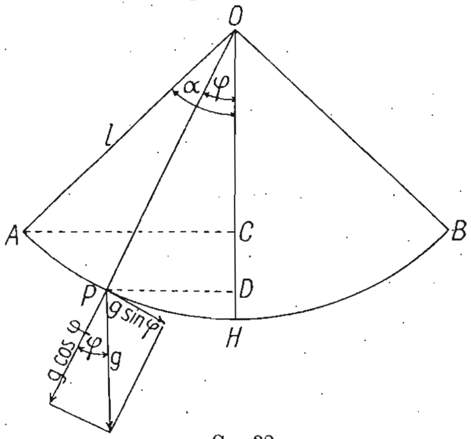
1. да се обе форме енергије могу да претворе једна у другу. Начело о *претварању енергије*.

2. да при свакоме претварању количина енергије остаје непромењена. Начело о *одржавању енергије*. *I. R. v. Mayer* (1814—1878, лекар у Хајлброну) први је изнео закон о одржавању енергије и то специално за еквивалентност топлоте и рада „Aequivalenz von Wärme und Arbeit“ (1842.) и указао је на узајамност разних видова енергије. Независно од њега је утврдио *H. v. Helmholtz* (1821—1894) у „Über die Erhaltung der Kraft“, 1847. овај закон за све врсте енергија и доказао га строго математички.

65. Примери. —

1. Пример. Кретање математичног клатна[1]) у безваздушноме простору.

Нека је дужина клатна $OA = l$. Кретање почиње из тачке A, $\sphericalangle AOH = \alpha$. После извесног времеиа t клатно је у положају OP, $\sphericalangle POH = \varphi$. Ми кажемо да је клатно (управо материална тачка клатна) прешло путању = луку $AP = s$.



Сл. 32.

Убрзање g разлажемо на компоненте $g \cos\varphi$ (у правцу клатна) и $g \sin\varphi$ (у правцу тангенте на путању у тачци P). Прва компонента дејствује као вуча и нема утицаја на кретање, док она друга, пошто је у правцу кретања, утиче сва на кретање.

Из слике видимо да је $s = l(\alpha - \varphi)$, дакле

$$\text{I)} \qquad ds = -l\,.\,d\varphi.$$

На основу формуле 5) у чл. 58., а с обзиром да је овде $p = g \sin\varphi$, $ds = -l\,.\,d\varphi$, имамо

$$v\,.\,dv = -l\,g \sin\varphi\,.\,d\varphi,$$

одакле, имавши на уму да је за $\varphi = \alpha$, $v = 0$,

$$\int_0^v v\,.\,dv = -l\,g \int_\alpha^\varphi \sin\varphi\,.\,d\varphi$$

$$\frac{v^2}{2} = l\,g(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

$$\text{II)} \qquad v = \sqrt{2\,l\,g(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

---

[1]) *Просто* или *математичко клатно* састоји се из једне тешке тачке која је обешена о концу без тежине.

Слика показује да је $l\cos\varphi = OD$, $l\cos\alpha = OC$, дакле $l(\cos\varphi - \cos\alpha) = CD$ и према томе

$$v = \sqrt{2\,g\,.\,CD}.$$

То значи да је брзина, којом клатно стиже у тачку P, прешав лук AP, једнака брзини, којом би у слободноме паду тело из тачке C дошло у тачку D.

За $\varphi = 0$ (у тачци H) брзина достиже своју највећу вредност:

$$v = \sqrt{2\,l\,g(1 - \cos\alpha)}.$$

Отуда што је, како за $\varphi = \alpha$, тако и за $\varphi = -\alpha$ брзина $v = 0$, закључујемо да је скретање клатна с обе стране равнотежног положаја OH подједнако.

Ставимо у општој формули $dt = \frac{ds}{v}$ за ds и v њихове вредности из I) и II), па ћемо добити једначину за време

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}, \qquad \text{(III}$$

одакле

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}. \qquad \text{(IV}$$

Прво приближно решење за t.

По познатој формули (Д. Р. чл. 74.) је

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + - \dots$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + - \dots$$

Ако за врло мале луке занемаримо њихове четврте и више степене и ставимо $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!}$, $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$, дакле $2(\cos\varphi - \cos\alpha) = \alpha^2 - \varphi^2$, добићемо

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\varphi}{\alpha}\right]_0^\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Према томе је време целе осцилације од тачке A до тачке B

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad \text{(V}$$

Из ове формуле изводимо закључке:

1) да за мале амплитуде α време осцилације не зависи од амплитуде. Клатно осцилује *изохроно*.
2) време клаћења независно је од тежине и материје тешке тачке која клати, јер се у формули V) не јавља ниједна од тих количина.
3) време клаћења је пропорциално квадратноме корену из дужине клатна.
4) време клаћења је обрнуто пропорционално квадратноме корену из убрзања теже.

Друго, тачније решење за t.

Узев код редова за $\cos\varphi$ и $\cos\alpha$ у рачун и чланове са четвртим степен лука добијамо тачније

$$2(\cos\varphi - \cos\alpha) = \alpha^2 - \varphi^2 - \frac{1}{12}(\alpha^4 - \varphi^4) = (\alpha^2 - \varphi^2)\left[1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right],$$

а са тиме место једн. III)

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}\sqrt{1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)}} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\left[1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right]^{-\frac{1}{2}} . d}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}$$

или, кад развијемо по биномноме правилу $\left[1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$ и при томе за занемаримо више степене лука, ставимо дакле

$$\left[1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{24}(\alpha^2 + \varphi^2),$$

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{1 + \frac{1}{24}\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\,d\varphi + \frac{1}{24}\,\frac{\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\right].$$

Интегралењем, а с обзиром да је за $t = 0$, $\varphi = \alpha$, а за $\frac{T}{2}$, $\varphi = 0$, налазимо

$$\text{VI)} \qquad \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\int_0^\alpha \frac{1 + \frac{1}{24}\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\,d\varphi + \frac{1}{24}\int_0^\alpha \frac{\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\right].$$

Овде је

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \int_0^\alpha \frac{d\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2}} = \left[arc\,sin\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)\right]_0^\alpha = arc\,sin\,1 - arc\,sin\,0 = \frac{\pi}{2},$$

а методом делимичног интегралења

$$\int \frac{\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\varphi\,d(\alpha^2 - \varphi^2)}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = -\int \varphi\,d\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}$$

$$= -\varphi\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \int \sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}\,.\,d\varphi = -\varphi\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \int \frac{\alpha^2 - \varphi^2}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\,d\varphi$$

$$= -\varphi\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \alpha^2\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} - \int \frac{\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}},$$

одакле

$$\int \frac{\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = -\frac{\varphi}{2}\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \frac{\alpha^2}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^3 - \varphi^2}}$$

$$= -\frac{\varphi}{2}\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \frac{\alpha^2}{2}\,arc\,sin\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)$$

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi^2\,.\,d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha^2\pi}{4}.$$

Заменом ових ресултата у једн. VI) добијамо

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{24}\right)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{24}\,\frac{\alpha^2\pi}{4}\right],$$

дакле

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right). \qquad \text{(VII}$$

Ова вредност за T већа је од оне, коју нам даје образац V) у размери $1 : 1 + \frac{\alpha^2}{16}$. Тако нпр. за $\alpha = 5^0$ или $\alpha = 0{,}087266$ јесте $1 + \frac{\alpha^2}{16} = 1{,}000476$. То значи да клатно са бесконачно малом амплитудом и клатно са амплитудом од 5^0 чине у истом времену осцилације 1000000 : 1000476.

Потпуно решење за t.

Ставимо у једн. III)

$$1 - \cos\varphi = z, \text{ дакле } \sin\varphi\,.\,d\varphi = dz,\ d\varphi = \frac{dz}{\sin\varphi} = \frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}}$$

и одузмимо од

$$1 - \cos\alpha = b$$
$$1 - \cos\varphi = z,$$

па ћемо добити

$$\cos\varphi - \cos\alpha = b - z$$

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}\sqrt{2(b - z)}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}\sqrt{1 - \frac{z}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{bz - z^2}}\,dz$$

или кад развијемо

$$\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{z}{2} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots.$$

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{z}{2} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots\right].$$

Интегралимо и имајмо на уму да је за $t = 0$, $\varphi = \alpha$, дакле $z = 1 - \cos\alpha = b$, за $t = \frac{T}{2}$, $\varphi = 0$, дакле $z = 1 - \cos 0 = 0$. На левој страни имамо $\int_0^{\frac{T}{2}} dt = \frac{T}{2}$ или ако лево и десно помножимо са 2

$$\text{VIII)} \qquad T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^b \frac{dz}{\sqrt{bz - z}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{z}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots\right].$$

Ако на десној страни растворимо интеграл збира на поједине интеграле, онда имамо као први интеграл

$$\int_0^b \frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \left[\arcsin\frac{2z - b}{b}\right]_0^b = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(в. чл. 14. 1. пример, кад ставимо у њему $p = b$, $q = 0$), а сви остали интеграли имају општи вид $\int \frac{z^n . dz}{\sqrt{bz - z^2}}$, на који ћемо да применимо методу делимичног интеграљења, пошто претходно напишемо

$$\frac{z^n\, dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \frac{z^{n-1}\, dz^2}{2\sqrt{bz - z^2}} = \frac{-z^{n-1} . d(bz - z^2) + bz^{n-1} . dz}{2\sqrt{bz - z^2}},$$

$$\int \frac{z^n\, dz}{\sqrt{bz - z^2}} = -\int \frac{z^{n-1} . d(bz - z^2)}{2\sqrt{bz - z^2}} + \frac{b}{2}\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}}$$

$$= -\int z^{n-1}\, d\sqrt{bz - z^2} + \frac{b}{2}\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}}$$

$$= -z^{n-1}\sqrt{bz - z^2} + (n - 1)\int z^{n-2}\sqrt{bz - z^2} . dz + \frac{b}{2}\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}}$$

$$= -z^{n-1}\sqrt{bz - z^2} + (n - 1)\int \frac{z^{n-2}(bz - z^2)}{\sqrt{bz - z^2}} . dz + \frac{b}{2}\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}}$$

$$\int \frac{z^n\, dz}{\sqrt{bz - z^2}} =$$

$$-z^{n-1}\sqrt{bz - z^2} + b(n - 1)\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}} - (n - 1)\int \frac{z^n . dz}{\sqrt{bz - z^2}} + \frac{b}{2}\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}},$$

одакле

$$n\int \frac{z^n . dz}{\sqrt{bz - z^2}} = -z^{n-1}\sqrt{bz - z^2} + \frac{(2n - 1)b}{2}\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}}$$

$$\int \frac{z^n . dz}{\sqrt{bz - z^2}} = -\frac{z^{n-1}}{n}\sqrt{bz - z^2} + \frac{(2n - 1)b}{2n}\int \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

$$\int_0^b \frac{z^n . dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \frac{(2n - 1)b}{2n}\int_0^b \frac{z^{n-1} . dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

Ово последње обележимо краће

$$I_n = \frac{(2n - 1)b}{2n} I_{n-1}.$$

Према горњем је $\quad I_0 = \pi$, $\quad$ дакле

за $n = 1$, $\quad I_1 = \frac{1}{2} b I_0 = \frac{1}{2}\pi b$,

„ $n = 2$, $\quad I_2 = \frac{3}{4} b I_1 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} b^2 \pi$,

„ $n = 3$, $\quad I_3 = \frac{5}{6} b I_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} b^3 \pi$, итд.

Заменом добивених ресултата у образац VIII) добијамо

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^3 + \ldots\right]. \quad \text{(IX}$$

Из слике видимо да је

$$CH = OH - OC = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha) = lb$$

или кад обележимо $\quad CH = h$, $h = lb$, $b = \frac{h}{l}$.

Тако се последњи образац може и овако да напише

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \ldots\right]. \quad \text{(IX}a$$

2. Пример. Продирање топовског или пушчаног зрна кроз земљу.

Означимо са G тежину зрна, q највећи пресек зрна, v_0 брзину, коју зрно има кад почиње да продире, v брзину зрна пошто је за дужину x продрло у земљу, t време, које је протекло док је зрно продирало за x.

Отпор, који зрно од пресека q и са брзином v има да савлада продирући кроз земљу, представљен је изразом

$$q(a + bv^2),$$

у коме су a и b константе, које зависе од кохезије земље и од трења између зрна и земље. Константе a и b зависе, дакле, од природе земљишта и од материала из којег је зрно направљено.

Замислимо да је зрно продрло још за dx. Отпор дуж пута dx можемо сматрати као константан и механички рад, који је зрно за то време извршило, јесте

$$q(a + bv^2) . dx.$$

За толико исто смањена је жива сила зрна (на основу начела 13 у чл. 7.). Енергија кретања зрна са брзином v јесте $\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2$ (једн. 12 у чл. 64.) и према томе њено смањивање (промена) $d\left(\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2\right) = \frac{G}{g}v . dv$. С обзиром на то да v опада са растењем x-а, а на основу начела 13), имамо једначину

$$\frac{G}{g}v . dv = -q(a + bv^2) . dx,$$

одакле

$$dx = -\frac{G}{gq}\frac{v . dv}{a + bv^2}$$

или кад интегралимо и имамо у виду да је за $x = 0$, $v = v_0$

$$\int_0^x dx = -\frac{G}{g\,q}\int_{v_0}^{v}\frac{v\,.\,dv}{a+b\,v^2}$$

$$x = -\frac{G}{2\,b\,g\,q}\int_{v_0}^{v}\frac{d\,(a+b\,v^2)}{a+b\,v^2} = -\frac{G}{2\,b\,g\,q}\Big[\,l\,(a+b\,v^2)\Big]_{v_0}^{v}$$

I) $$x = \frac{G}{2\,b\,g\,q}\;l\left(\frac{a+b\,v_0^2}{a+b\,v^2}\right).$$

Одавде, кад ставимо $v = 0$, следује целокупно продирање

II) $$X = \frac{G}{2\,b\,g\,q}\;l\;\left(1+\frac{b}{a}\,v_0^2\right).$$

Једначину за време добићемо помоћу општег обрасца $dt = \frac{dv}{p}$, кад убрзање p силе (отпора) $q\,(a+b\,v^2)$ определимо пропорцијом

$$p : g = q\,(a+b\,v^2) : G$$

$$p = \frac{g\,q}{G}\;(a+b\,v^2).$$

Имамо дакле

$$dt = -\frac{G}{g\,q}\,\frac{dv}{a+b\,v^2}.$$

На десној страни узели смо знак minus зато што v опада са растењем t-а: акцелерација је негативна. Имавши на уму да је за $t = 0$, $v = v_0$ следује

$$\int_0^t dt = -\frac{G}{g\,q}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{a+b\,v^2}$$

$$t = -\frac{G}{g\,q\sqrt{a\,b}}\int_{v_0}^{v}\frac{d\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,v\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,v\right)^2} = -\frac{G}{g\,q\sqrt{a\,b}}\left[arc\,tg\sqrt{\frac{b}{a}}\;v\right]_{v}^{v}$$

III) $$t = \frac{G}{g\,q\,\sqrt{a\,b}}\left[arc\,tg\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,v_0\right) - arc\,tg\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\;v\right)\right].$$

Време T, које је потребно зрну да продре кроз X добићемо кад у III) ставимо $v = 0$.

IV) $$T = \frac{G}{g\,q\,\sqrt{a\,b}}\;arc\,tg\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,v_0\right).$$

Примена. Код песковитог земљишта може се узети да је $a = 400000$ *kg.*, $b = 40$. Нека је за зрно $G = 5{,}8$ *kg.*, $q = 0{,}005\ m^2$, $v_0 = 480\ m.$ Најзад имамо $g = 9{,}81\ m.$

Према једн. II) јесте

$$X = \frac{5{,}8}{2\,.\,40\,.\,9{,}81\,.\;0{,}005}\;l\;\left(1+\frac{40}{400\,000}\,.\;480^2\right)$$

$$= \frac{5800}{3924}\;l\,24{,}04$$

или ако место природног логаритма узмемо Бриг-ов, помножимо дакле десно модуом 2,303

$$X = \frac{5800}{3924}\,.\;2{,}303\;.\;log\,24{,}04 = 4{,}70\;m.$$

Помоћу обрасца IV) добијамо

$$T = \frac{5{,}8}{9{,}81\;.\;0{,}005\,\sqrt{400\,000\,.\,40}}\;arc\;tg\left(\sqrt{\frac{40}{400\,000}\,.\;480}\right)$$

$$= \frac{58}{1962}\;arc\;tg\;4{,}8.$$

Угао, чија је тангента $= 4{,}8$ јесте $78^0\,14'$, а дужина лука (из пропорције $78^0\,14' : 180^0 = arc\,78^0\,14' : \pi$) $arc\,78^0\,14' = 1{,}366$ и према томе

$$T = \frac{58}{1962}\,.\;1{,}366^s = 0{,}04^s = \frac{1}{25}\text{ секунде.}$$

То значи да зрно продирући земљиште продире за 4,70 *m* у времену од $\frac{1}{25}$ секунде.

3. Пример. Рад при слободноме паду.

Узмимо иста означења као у 1. примеру чл. 59. Множећи једначину $g' = \frac{g\,R^2}{(h-x)^2}$ лево и десно масом m падајућег тела и означивши $m\,g = G$, $m\,g' = G'$ написаћемо је

$$G' = \frac{G\,R^2}{(h-x)^2},$$

где је G тежина тела на површини земље, а G' његова тежина пошто је тело у паду прешло путању x.

У току времена, у којем се x промене за dx, можемо G' сматрати као стално и рад силе G' за то време јесте

$$G'\,.\;dx = G\,R^2\,\frac{dx}{(h-x)^2},$$

а целокупан рад, које тело врши падом из тачке H до тачке A (в. сл. 30.), дакле падом дуж путање $h-R$, јесте

$$G\,R^2\int_0^{h-R}\frac{dx}{(h-x)^2} = -\,G\,R^2\int_0^{h-R}(h-x)^{-2}.\,d\,(h-x) = -\,G\,R^2\left[\frac{(h-x)^{-1}}{-1}\right]_0^{h-R}$$

$$= G\,R^2\left[\frac{1}{h-x}\right]_0^{h-R} = G\,R^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{h}\right) = \frac{G\,R}{h}\,(h-R).$$

Ако је висина $h-R$ над земљом, са које тело пада, врло мала према полупречнику R земље, тако да се може узети $\frac{R}{h} \backsim 1$ извршени рад је представљен са $G\,(h-R)$, дакле производом из тежине тела и висине (над земном површином) са које оно пада.

Ако је, међутим, R врло мало према h (као што је случај код метеорита који на земљу падају), тако да је $\frac{h-R}{h} \infty 1$, рад постаје $= GR$. То значи да падајућа маса, ма падала она са бесконачне висине ($h = \infty$), неможе дати већи рад од GR.

Не водећи рачуна о трењу у ваздуху (услед чега се један део рада апсорбује), метеор, при своме паду на земљу, предаје овој сударом рад GR. Узмимо да се цео овај рад претвара у топлоту и узмимо за механички еквивалент топлоте 427 *kgm.* (= 1 калорији топлоте), метеор производи $\frac{GR}{427}$ калорија топлоте. Ставимо $G = 1\,kg.$, $R = 6365000\,m$, онда излази да сваки килограм метеора, при судару са земљом, производи $6365000 : 427 \infty 14900$ калорија топлоте, а то је топлота која је довољна да се 182 *kg* леда истопе. Кад би сам метеорит примио сву ту топлоту, он би, с претпоставком да је средња специфична топлота камене масе $= 0{,}2$, имао температуру $14900 : 0{,}2 = 74500^0\,C$. Овим би се могла објаснити висока температура наше земље на основу хипотезе да је земља постала збијањем многих малих маса, које су у почетку биле раздвојене једна од друге у васиони.

4. Пример. Кретање зрна у пушчаној или топовској цеви.

Учинићемо неке претпоставке, које нису апсолутно тачне, но само више или мање приближне правоме стању ствари. То су:

1) да се сав барут, који је у фишеку, запаљује у истом тренутку када се и зрно почиње да креће;
2) да за време док је зрно још у цеви гасови не одишу, тако да сви гасови, које барут производи, дејствују на кретање зрна;
3) да између зрна и цеви нема трења;
4) да се гасови управљају по *Boyle-Mariotte*-овоме закону.

Кад се извесна количина гаса изложи разним притисцима, онда се запремина гаса мења и то, под претпоставком, да се температура гаса не мења, тако да је запремина обрнуто сразмерна притиску:

14) $$v_1 : v_2 = p_2 : p_1,$$

дакле

14 *a*) $$p\,v = \text{Const.}$$

Закон, по коме запремина гаса зависи од притиска, пронашао је *Robert Boyle* (1661.), а радови *Mariotte*-ови (1676.) учинили су да је тај закон постао опште познат. Пошто гас даје притиску отпор и код извесне густине отпор гаса стоји у равнотежи са притиском, а са смањивањем притиска запремина се повећава, гасу се приписује извесна особина, која је аналогна еластичности чврстих тела и која се особина зове *напон* или *експанзивна снага* гаса. Експанзивна снага гаса разликује се од еластичности чврстих тела у томе што она нема граница, док еластичност тела креће се у извесним границама. Искуство нас учи да гасови и при најмањем притиску теже да заузму што већи простор.

Код равнотеже је напон гаса или његова експанзивна снага једнака спољашнем притиску. Према томе можемо Boyle-Mariotte-ов закон да формулишемо: запремина и експанзивна снага гаса стоје у обрнутој сразмери:

15) $$v_1 : v_2 = e_2 : e_1,$$

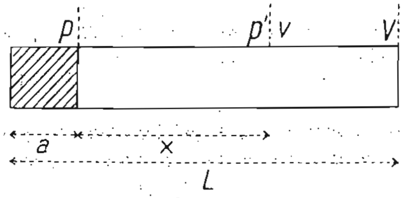
дакле

15 *a*) $$v\,e = \text{Const.}$$

Boyle-Mariotte-ов закон важи само онда кад температура и после притиска односно и после ширења гаса остаје непромењена. Осим тога примећујемо да прави гасови при ниским температурама и великим притисцима одступају од овога закона, тако да производ pv за велике притиске постаје осетно већи.

Из Науке о топлоти знамо да за свако тело (материју) постоји такозвана *критична температура* изнад које је немогућа кондензација па ма како појачавали притисак на тело.[1] Тело се зове *гас* на температури изнад критичне, а зове се *пара* на температури испод критичне па до тачке згушњавања (кондензације). Од те тачке па на ниже пара се претвара у течност и остаје као таква све до тачке очвршћавања после које прелази у чврсто стање.

Означимо са: L унутрашњу дужину цеви, a дужину чауре, x пут који је зрно прешло после t сек., p акцелерацију у почетку (у тренутку запаљења барута), p' акцелерацију после t сек., v брзину после t сек., V почетну брзину, тј. брзину којом зрно напушта цев.



Сл. 33.

Пошто је сила (експанзивна снага барутних гасова) сразмерна акцелерацији, а пресек цеви на свима местима један исти, имамо по *Мариот*-овом закону

$$p' : p = a : a + x,$$

дакле

$$p' = \frac{a\,p}{a+x},$$

које, кад заменимо у општи образац 5) у чл. 58., даје једначину

$$v\,.\,dv = ap\,\frac{dx}{a+x},$$

одакле, интеграљењем и с обзиром да је за $x = 0$ и $v = 0$,

$$\int_0^v v\,.\,dv = ap\int_0^x \frac{dx}{a+x}$$

$$v^2 = 2\,a\,p\,l\,\frac{a+x}{a}. \qquad \text{(I}$$

Ако овде ставимо $x = L - a$ добићемо почетну брзину V

$$V^2 = 2\,a\,p\,l\,\frac{L}{a}. \qquad \text{(II}$$

У случају да нам је познато V израчунавамо акцелерацију експанзивне снаге барутних гасова

$$p = \frac{V^2}{2\,a\,l\,\frac{L}{a}}. \qquad \text{(II}a$$

Примена. Ако узмемо $V = 480\,m$, $L = 1{,}8\,m$, $a = 0{,}25\,m$ добићемо

$$p = \frac{480^2}{2\,.\,0{,}25\,l\,\frac{1{,}8}{0{,}25}} = \frac{460\,800}{l\,7{,}5}$$

---

[1] Овај је проналазак учинио Andrews 1869. год.

или, пошто природан логаритам претворимо у Бриг-ов множећи га модуом 2,30

$$p = \frac{460800}{2{,}303 \,.\, log\, 7{,}5} = 233387\ m.$$

Силу или притисак, којим дејствују барутни гасови на зрно, налазимо помоћ образаца 6) и 7) у чл. 60.

$$P = mp = \frac{G}{g}\, p.$$

Узмимо да је тежина зрна $G = 5{,}8\ kg.$, а акцелерација земне теже $g = 9{,}81$ Тада је

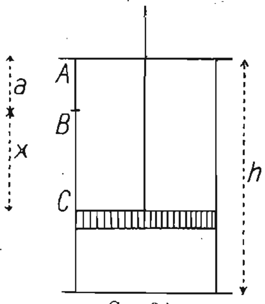
$$P = 138015\ kg.$$

Притисак на 1 cm^2 добијамо ако P поделимо пресеком q зрна. Нека је $q = 50\ cm$ онда следује за притисак на квадратни сантиметар

$$\frac{P}{q} = 2760\ kg \backsim 2672 \text{ атмосфере.}$$

5. *Пример.* Рад паре код експанзивних машина.

Код ових машина пара улази у цилиндар за време док се чеп креће з извесан део нпр. за $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ дужине h цилиндра. Пар престаје онда да улази у цилиндар и даље кретањ врши се експанзивном снагом паре која се у цилиндру налази.



Сл. 34.

Узмимо да пара улази у цилиндар за све врем кретања од A до B и нека је $AB = a$. Кретање је з то време под константним притиском F. После с кретање врши под променљивим притиском, који ширењем паре опада. Означимо са P' притисак пар после пређеног пута $BC = x$.

Односно опадања притиска ширењем паре учинићемо две претпоставке.

1) Опадање притиска бива по *Boyle-Mariotte*-ово закону. Претпоставља се да притисак паре бива бе промене у температури и то тако да притисак у истој мери опада у којој волумен асте. Дакле

$$\frac{P'}{P} = \frac{\text{волумен од } A \text{ до } B}{\text{волумен од } A \text{ до } C} = \frac{a}{a+x}$$

$$P' = P\,\frac{a}{a+x}.$$

Замислимо да је се чеп од C покрено за бескрајно малу путању dx, з које време можемо да претпоставимо да је притисак P' остао непромењен Рад силе P' дуж путање dx јесте

$$P' \,.\, dx = P\,a\,\frac{dx}{a+x},$$

а рад за време целе периоде ширења (експанзије)

$$Rm = P\,a \int_0^{h-a} \frac{dx}{a+x} = P\,a\,l\left(\frac{h}{a}\right).$$

Додавши овоме рад паре за време сталног притиска P (рад дуж пута a), који је $= Pa$, добијамо целокупан рад паре за време једног дизања, односно спуштања чепа дуж целога цилиндра

$$P\,a\left[1 + l\left(\frac{h}{a}\right)\right]$$

или ако узмемо Бриг-ов логаритам

$$P\,a\left[1 + 2{,}3026\, log\left(\frac{h}{a}\right)\right].$$

2) Опадање притиска бива по *Поасон*-овом (*Poisson, Siméon Denis,* 1781—1840) закону. При вршењу рада један део парне топлоте се претвара у рад. Тиме температура опада и извесан део паре се кондензује. Остала количина паре, пошто је чеп прешао путању x, има мањи притисак од онога који се добија *Мариот*-овим законом. Притисак P' добија се једначином

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{a}{a+x}\right)^n,$$

где по *Zeuner*-у треба узети за суву пару $n = 1{,}133$.

Према овоме је рад паре за путању dx

$$P' \,.\, dx = P\left(\frac{a}{a+x}\right)^n .\, dx = P\,a^n\,(a+x)^{-n} \,.\, dx,$$

а целокупан рад за све време експанзије

$$R_p = \int_0^{h-a} P' \,.\, dx = P\,a^n \int_0^{h-a} (a+x)^{-n} \,.\, d\,(a+x) = \frac{P\,a}{n-1}\left[1 - \left(\frac{a}{h}\right)^{n-1}\right].$$

За мале експанзије R_m и R_p мало се разликују једно од друго. За експанзију од 1 на 4, тј. за $a = \frac{h}{4}$, кад узмемо $n = 1{,}133$ јесте

$$R_m = P\,a \,.\, 2{,}3026\, log\, 4 = 1{,}386 \,.\, P\,a$$

$$R_p = \frac{P\,a}{0.133}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{0{,}133}\right] = 1{,}264 \,.\, P\,a.$$

66. Њутн-ов закон гравитације. — Из првог и другог *Кеплер*-овог закона *Њутн* је закључио да се планете крећу као да њих дејствује нека (привлачна или атракциона) сила, која је управљена ка сунцу. Из трећег *Кеплер*-овог закона *Њутн* је извео закључак да планете добивају убрзање управљено ка сунцу, које је обрнуто пропорционално квадрату одстојања планете од сунца. *Њутн* је тај ресултат (закон атракције) саопштио тек пошто га је потврдио са месецом доказивши да је привлачна сила наше земље (тежа) идентична са општом гравитацијом. — Закон гравитације гласи: небесно тело са масом M дејствује на небесно тело са масом m у одстојању r атракционом силом у правцу та два тел и величином, која је управно сразмерна масама, а обрнуто сразмерн кватрату њиховог одстојања:

$$P = \frac{k\,M\,m}{r^2}. \tag{16}$$

Гравитациона константа k јесте атракциона сила, којом тело од масе 1 дејствује на исто толико тело у одстојању 1.

Пошто оба тела придају једно другом убрзања $\frac{k\,M}{r^2}$ и $\frac{k\,m}{r^2}$, која су управљена једно према другоме, значи да је убрзање релативног кретања једног тела према другоме (сунца и планете)

$$\frac{k\,(M+m)}{r^2}.$$

Ови се ресултати оснивају на *Њутн*-овом математичком доказу да лоптаста (сферна) тела, која су у свима њиховим деловима исте густине или су састављена из концентричних слојева једнаких густина (хомогених концентричних слојева) дејствују на једну спољашну тачку као да је цела маса лопте концентрисана у њеном средишту.

На истој основи доказао је *Њутн*: привлачна снага једног хомогеног сферног слоја на тачке у унутрашности слоја равна је нули.

67. Једначине за кретање планета. — Пошто се проблем односи на сунчану систему узећемо за јединицу привлачне силе дејство сунца у јединици времена (средњи сунчани дан) у јединици одстојања (средње одстојање земље од сунца) и означићемо то, као битно позитивну количину са k^2. Посматраћемо свега два тела: сунце, чију масу стављамо $= 1$ и друго које тело сунчане системе чију ћемо масу (у јединици сунчане масе) означити са m. Према приликама, које постоје у сунчаној системи, m је увек врло мала количина.

Нека су x, y, z правоугле координате у системи са почетком у средишту сунца посматраног тела m, а r одстојање тела од сунца. Тада је

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

По закону гравитације привлачна сила, којом оба тела теже да се приближе, јесте

$$\frac{k^2}{r^2}\,(1+m) = \frac{\mu}{r^2},$$

бележећи $\mu = k^2\,(1+m)$.

Ако силу $\frac{\mu}{r^2}$ разложимо на три компоненте у правцу координатних оса и означимо са (x, r), (y, r), (z, r) углове, које потега заклапа са координатним осама и узмемо на ум да се дејством компонената координате смањују, јер се услед привлачне силе тело приближује сунцу (почетку координата), добићемо за компоненте ове изразе

$$X = -\frac{\mu}{r^2}\cos(x,\, r),\quad Y = -\frac{\mu}{r^2}\cos(y,\, r),\quad Z = -\frac{\mu}{r^2}\cos(z,\, r)$$

или, с обзиром што је

$$\cos(x,\, r) = \frac{x}{r},\quad \cos(y,\, r) = \frac{y}{r},\quad \cos(z,\, r) = \frac{z}{r},$$

$$X = -\mu\,\frac{x}{r^3},\quad Y = -\mu\,\frac{y}{r^3},\quad Z = -\mu\,\frac{z}{r^3}.$$

Најзад на основу формуле $p = \frac{d^2s}{dt^2}$, по којој је сила, односно акцелерација једнака другоме деференциалном количнику из путање по времену, следују за кретање тела ове три диференциалне једначине

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{x}{r^3}\,\mu = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{y}{r^3}\,\mu = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{z}{r^3}\,\mu = 0. \end{array}\right\} \qquad (I$$

С ове три диференциалне једначине уносе се шест произвољних констаната, које зависе од места и брзине небесног тела и које се, за сваки случај по на особ, посматрањем одређују. Две од тих интеграциони констаната могу врло лако да се одреде. Помножимо прву једначину са y, другу са x и одузмемо онда прву од друге, а слично поступимо са трећом и првом, другом и трећом једначином, па ћемо добити

$$x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$z\,\frac{d^2x}{dt^2} - x\,\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$y\,\frac{d^2z}{dt^2} - z\,\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Примећујемо да ове три једначине нису независне једна од друге; свака је последица других двеју. Тако нпр. добијамо трећу једначину кад прву помножимо са $\frac{z}{x}$, другу са $\frac{y}{x}$, па их саберемо.

Једначине могу да се напишу и овако

$$d\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0$$

$$d\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=0$$

$$d\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

одакле интегралењем

$$\text{II)}\quad\left\{\begin{aligned}&x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1\\&z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=c_2\\&y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=c_3.\end{aligned}\right.$$

Ако ове три једначине помножим редом са z, y, x, па их саберемо добићемо

$$\text{III)}\qquad c_1 z + c_2 y + c_3 x = 0.$$

а то је једначина једне равни која пролази кроз почетак координата. Значи да путање небесних тела наше сунчане системе леже увек у једној равни, која пролази кроз средиште сунца.

У једн. III) налазе се само две произвољне константе, које утврђују положај равни. Те константе зависе од чвора ☊ и нагиба i равни путање према једној утврђеној равни.

68. Кеплер-ови закони. — Пошто се кретање планете дешава у једној равни, природно је да ту раван узмемо за xy-раван. Тада је

$$z=\frac{dz}{dt}=0$$

и једначине II) своде се на ову једну

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c$$

или

$$\text{IV)}\qquad x\,.\,dy-y\,.\,dx=c\,.\,dt.$$

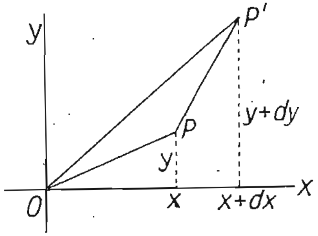
Лева страна ове једначине даје двоструки диференциал сектора (двоструку површину троугла OPP'), тако да је

$$\text{V)}\qquad 2\,d\,(\text{сектора})=c\,.\,dt,$$

одакле интегралењем

$$2\,.\,\text{сектор}=c\,t.$$

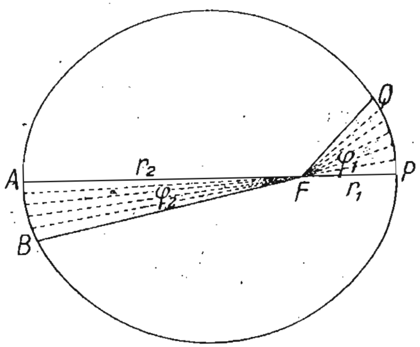
Интеграциона константа је очевидно $=0$. Једначина V) исказује други *Кеплер*-ов закон по коме су површине сектора, које потега описује, пропорционалне времену у којем га потега прелази.



Сл. 35.

Из овога се закона види промењивост угловне брзине кад елиптичног кретања. Специално за тачке перихела и афела P и A, ако означимо са φ_1 и φ_2 средишне углове елиптичних сектора PFQ и AFB, које планета описује у маломе времену, имамо

$$\frac{1}{2}\,r_1{}^2\varphi_1=\frac{1}{2}\,r_2{}^2\varphi_2;\ \text{одакле}\ \varphi_1:\varphi_2=r_2{}^2:r_1{}^2.$$



Сл. 36.

То значи да се угловне брзине имају обрнуто као квадрати потега.

Код земље је угловна брзина на дан ($=$ привидној угловној брзини сунца) у перихелу $\sim 61'$, у афелу $57'$. Одстојања r_1 и r_2 (која се добивају из привидне величине сунца у тачкама P и A, а то су $32'\,36''$ и $31'\,32''$) стоје у размери $29:30$. И заиста постоји пропорција $61:57=30^2:29^2$.

Служећи се посматрањима *Tycho-Brahe*-а (1546—1601) *Кеплер* је своја прва два закона пронашао 1609. год. и утврдио их је прво код путања наше Земље и Марса.

Да бисмо одредили остале четири интеграционе константе вратићемо се диференциалним једначинама I) узев раван путање за xy-раван. Имамо дакле ове две једначине

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{r^3}\,\mu=0\\&\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{y}{r^3}\,\mu=0.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(VI}$$

За даље проучавање нашег проблема завешћемо поларне координате, којом ћемо приликом извршити у исто време и једно интегралење. Помножимо прву једн. VI) са $2\,dx$, другу са $2\,dy$ и саберемо их онда, па ћемо добити

$$2\left(dx\frac{d^2x}{dt^2}+dy\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{2\mu}{r^3}(x\,dx+y\,dy)=0,$$

које с обзиром да је

$$2\left(dx\frac{d^2x}{dt^2}+dy\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{d\,(dx^2+dy^2)}{dt^2}$$

$$x\,dx+y\,dy=r\,dr,\ \text{јер је}\ x^2+y^2=r^2,$$

може да се напише

$$\frac{d\,(dx^2+dy^2)}{dt^2}+\frac{2\mu}{r^2}\,dr=0$$

или кад интегралима и означимо са h интеграциону константу

VII) $$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{r}+h=0.$$

Подизањем једн. IV) на квадрат

$$\frac{x^2\,dy^2+y^2\,dx^2}{dt^2}-\frac{2\,x\,y\,dx\,dy}{dt^2}=c^2$$

или

$$(x^2+y^2)\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{dt^2}=c^2$$

или најзад

$$r^2\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=c^2$$

и елиминовањем количине $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$ из ове последње једначине и оне под VII) налазимо

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2\mu}{r}-h-\frac{c^2}{r^2}$$

одакле

VIII) $$dt=\frac{r\,dr}{\sqrt{2\,\mu\,r-h\,r^2-c^2}}.$$

Овом диференциалном једначином довели смо у везу dr и dt (radius vector и време). Да бисмо нашли путању тела треба да образујемо диференциалну једначину између dr и $d\varphi$ (radius vector-а и хелиоцентричног угла).

Имали смо

$$2\,d\,(\text{сект.})=c\,.\,dt,$$

а знамо да је у поларним координатама

$$d\,(\text{сект.})=\frac{1}{2}\,r^2\,.\,d\varphi.^{1)}$$

Упоређењем ова последња два обрасца налазимо

$$dt=\frac{r^2}{c}\,d\varphi. \tag{IX}$$

Ово нам казује, што смо већ раније констатовали, да је код кретања небесног тела хелиоцентрично угловно кретање $d\varphi$ обрнуто сразмерно квадрату radius vector-а (његовог одстојања од сунца).

Сравнењем једн. VIII) и IX) добијамо диференциалну једначину путање

$$d\varphi=\frac{c\,dr}{r\sqrt{2\,\mu\,r-h\,r^2-c^2}}. \tag{X}$$

Заведимо нове константе и ставимо

$$\frac{\mu}{h}=a,\quad \frac{c^2}{h}=a^2\,(1-e^2),$$

дакле

$$h=\frac{\mu}{a},\quad c=\sqrt{\mu}\,\sqrt{a\,(1-e^2)}, \tag{XI}$$

после чега једн. X) добија вид

$$d\varphi=\frac{\sqrt{a\,(1-e^2)}\,.\,dr}{r\sqrt{2\,r-\frac{r^2}{a}-a\,(1-e^2)}}.$$

Израз на десној страни може да се доведе на $-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, одакле $\int-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\cos x+\omega$. Напишимо

$$d\varphi=\frac{\frac{a\,(1-e^2)}{e}\,dr}{r\sqrt{2\,r\frac{a\,(1-e^2)}{e^2}-\frac{r^2\,(1-e^2)}{e^2}-\frac{a^2\,(1-e^2)^2}{e^2}}}$$

$$=\frac{\frac{a\,(1-e^2)}{e\,r^2}\,dr}{\sqrt{1-\left[\frac{\frac{a\,(1-e^2)}{r}-1}{e}\right]^2}}.$$

---

[1] в. чл. 36.

дакле, ако ставимо

$$\frac{\frac{a\,(1-e^2)}{r}-1}{e}=x,\quad dx=-\frac{a\,(1-e^2)}{e\,r^2}\,dr,$$

$$\varphi=arc\ cos\left[\frac{\frac{a\,(1-e^2)}{r}-1}{e}\right]+\omega,$$

одакле

$$\text{XII)}\qquad r=\frac{a\,(1-e^2)}{1+e\ cos\,(\varphi-\omega)}.$$

Ако угао φ, *праву аномалију*, будемо бројали од тачке у којој је небесно тело најближе сунцу, од перихела, онда треба узети $\omega=0$.

Једн. XII) представља линију другог степена, чија се жижа налази у почетку координата; a је велика полуоса, e бројни екцентрицитет

Овим је потврђен први *Кеплер*-ов закон по коме планете описују елипсе у чијој се жижи налази сунце.

Помоћу једн. VII) добијамо формулу, која показује везу измеђ брзине кретања и одстајања тела од сунца, а из тога, опет, можем да изведемо закључак односно облика путање.

Означимо са v брзину и пошто је

$$v^2=\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$$

добијамо на основу једн. VII)

$$v=\sqrt{\frac{2\,\mu}{r}-h}.$$

Према горе под XI) заведеноме значењу констаната јесте $1-e^2=\frac{c^2}{a^2h}$ $h=\frac{\mu}{a}$, дакле $1-e^2=\frac{c^2}{a\mu}$. Пошто је за елипсу $e<1$, за парабол $e=1$, а за хиперболу $e>1$ и с обзиром да је $c^2>0$ и $\mu>0$ следуј

за елипсу $a>0$, дакле и $h>0$,
за параболу $a=\infty$, „ $h=0$,
за хиперболу $a<0$, „ „ $h<0$.

Према овоме, а на основу обрасца за v, закључујемо да је путања небесног тела

елипса, ако је $v<\sqrt{\frac{2\,\mu}{r}}$,
парабола, „ „ $v=\sqrt{\frac{2\,\mu}{r}}$,
хипербола, „ „ $v>\sqrt{\frac{2\,\mu}{r}}$.

Трећи *Кеплер*-ов закон добићемо интеграљењем једн. VIII)

$$dt=\frac{r\,.\,dr}{\sqrt{2\,\mu r-hr^2-c^2}}.$$

Отуда што је

$$d\,(2\,\mu r-hr^2-c^2)=2\,\mu\,.\,dr-2\,hr\,.\,dr,$$

дакле

$$r\,.\,dr=\frac{\mu}{h}\,dr-d\,(2\,\mu r-hr^2-c^2)$$

можемо да напишемо

$$dt=\frac{\mu}{h}\,\frac{dr}{\sqrt{2\,\mu r-hr^2-c^2}}-\frac{1}{h}\,\frac{d\,(2\,\mu r-hr^2-c^2)}{2\sqrt{2\,\mu r-hr^2-c^2}}$$

$$=\frac{\mu}{h}\,\frac{dr}{\sqrt{2\,\mu r-hr^2-c^2}}-d\sqrt{2\,\mu r-hr^2-c^2}$$

или, пошто заменимо $\frac{\mu}{h}=a$, $\frac{c^2}{h}=a^2(1-e^2)$, и интегралимо

$$t=\frac{a}{\sqrt{h}}\int\frac{dr}{\sqrt{2\,ar-r^2-a^2\,(1-e^2)}}-\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{2\,ar-r^2-a^2(1-e^2)}+C.$$

Интеграл на десној страни подводимо под познату формулу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}=arc\ cos\,\frac{p-2\,x}{\sqrt{4\,q+p^2}}+C$$

и добијамо

$$t=$$

$$\frac{a}{\sqrt{h}}\,arc\ cos\,\frac{2\,(a-r)}{\sqrt{-4\,a^2\,(1-e^2)+4\,a^2}}-\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{2\,ar-r^2-a^2(1-e^2)}+C$$

$$=\frac{a}{\sqrt{h}}\,arc\ cos\,\frac{a-r}{ae}-\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{2\,ar-r^2-a^2(1-e^2)}+C.$$

Рачунавши време од пролаза тела кроз перихел (тачка P у сл. 35.), границе интеграла утврђују се што је за $t = 0$, $r = r_1$, а за $t = \frac{T}{2}$, ако са T означимо време једног оптицаја , $r = r_2$.

Но пошто је $r_1 = a$ — линеарноме екцентрицитету,
$r_2 = a +$ линеарноме екцентрицитету,

а линеарни екцентрицитет (одстојање жижа од средишта елипсе) $= ae$, дакле $r_1 = a - ae$, $r_2 = a + ae$, то је

$$T = \frac{2\,a}{\sqrt{h}}\,[arc\;cos\,(-1) - arc\;cos\,1]$$

$$-\frac{2}{\sqrt{h}}\,[\sqrt{2\,a^2\,(1+e) - a^2\,(1+e)^2 - a^2\,(1-e^2)}$$
$$-\sqrt{2\,a^2\,(1+e) - a^2\,(1-e^2) - a^2\,(1-e^2)}] = \frac{2\,a\pi}{\sqrt{h}}$$

или ако заменимо $h = \frac{\mu}{a}$ (једн. XI)

$$T = 2\,a\pi\,\sqrt{\frac{a}{\mu}},\ \text{дакле}\ T^2 = \frac{4\,\pi^2}{\mu}\,a^3$$

или најзад, пошто је $\mu = k^2\,(1+m)$,

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{k^2\,(1+m)}\,a^3.$$

За две планете, чије су масе m_1 и m_2, време оптицаја T_1 и T_2, велике полуосе њихове елиптичне путање a_1 и a_2, постоји пропорција

$$T_1{}^2 : T_2{}^2 = \frac{a_1{}^3}{1+m_1} : \frac{a_2{}^3}{1+m_2}$$

или, ако масе, као врло мале количине, занемаримо, простије

$$T_1{}^2 : T_2{}^2 = a_1{}^3 : a_2{}^3.$$

То је приближна форма закона, у којој га је *Кеплер* изнео год. 1618 као свој трећи закон планетарног кретања. Квадрати времена оптицања пропорционални су кубовима средњих одстојања планета од сунца тј. кубовима великих полуоса елиптичних путања. То значи да је з све планете $\frac{a^3}{T^2}$ константно.

3. Механика чврстих система.

69. Чврсте системе. Транслација и ротација. — Под *чврстом системом* разумемо такву везу материјалних тачака чији се узајамни положај не мења, па ма какво кретање вршила та система као целина и ма какве силе дејствовале на њене тачке. Специално: две материјалне тачке чине чврсту везу (чврсту систему) кад две једнаке, а у супротном правцу дејствујуће силе растојање тачака не мењају.

Чврста система врши чисто транслаторно кретање када све њене тачке описују конгруентне путање. То се зове *чиста транслација*. Свака права у системи остаје, при таквом кретању, вазда себи паралелна, тј. не мења свој правац у простору.

Чврста система врши чисто обртно кретање када све њене тачке описују кругове, чије су равни међусобом паралелне и чија се средишта налазе на правој, која је управна на оним равнима. Ова се права зове *обртна оса*, а свака на њој нормална раван зове се *обртна раван* системе. Овако кретање се зове *чиста ротација*.

Свако кретање једне чврсте системе може да се разложи на горње две врсте кретања: на транслацију и на ротацију. Према томе је најопштија форма кретања кретање по завртањској линији.

За дејство сила на чврсте системе важе правила:

1. Силе, које имају заједничку нападну тачку на чврстој системи, слажу се у једну ресултанту по начелу о паралелограму.

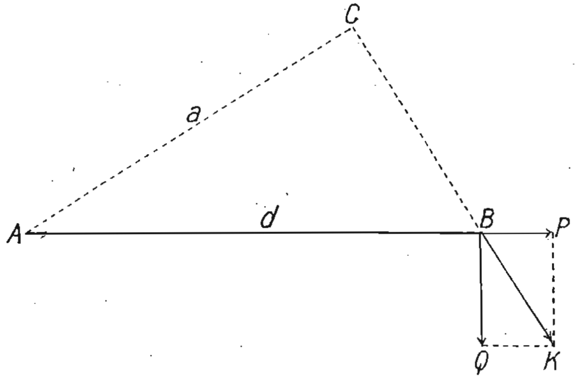
2. Две једнаке, а супротне силе, чије се нападне тачке не поклапају, само су тада у равнотежи, ако силе дејствују у правцу праве, која везује њихове нападне тачке.

3. Нападну тачку силе, која дејствује на чврсту систему, можемо да преместимо у правцу силе.

70. Обртање око сталне осе. Моменат силе. — За чврсту систему кажемо да је *слободна*, кад је њено кретање зависно једино од сила које на њу дејствују. Система *није слободна*, кад је њена покретљивост на ма какав било начин ограничена, нпр. тиме што је једна права или једна њена тачка учињена непокретљивом. У таквом случају система може да врши само обртно кретање око оне утврђене осе или оне утврђене тачке.

Ако на систему дејствује само једна сила, чији правац пролази кроз утврђену осу или тачку, онда се та сила неутралише чврстнном системе. Исти је случај кад дејствују више сила, чија ресултанта пролази кроз утврђену осу или тачку. Ми кажемо да су тада дејствујуће силе у *равнотежи* у односу према оној правој или тачци.

Нека је AB чврста система покретљива око тачке A. У тачци B дејствује сила K у равни (цртежа), која је управна на обртној оси, иначе у коме било правцу. Ова сила K еквивалентна је са силом Q, која дејствује у истој тачци B, али нормално на правој, која везује нападну тачку B са обртном осом у A, а чија је величина једнака пројекцији силе K на нормалу према правој AB.



Сл. 37.

Разлажући силу K на компоненте P у правцу AB и Q нормално на AB видимо да компонента P дејствује као вуча или притисак (према томе да ли сила K чини са правцем AB туп или оштар угао), док компонента Q дејствује искључиво на обртање системе. Из сличности троуглова ABC и BKQ следује

17) $K : Q = d : a$, одакле $Ka = Qd$.

Овде означава a одстојање силе K од обртне осе. Силу Q, која је у погледу дејства на обртање еквивалентна са силом K, зовемо *обртном силом.* Дужи a и d зовемо *крацима* сила K и Q.

Под *моментом силе* или *статичним моментом* разумемо производ из силе и одстојања њенога правца од обртне осе или: производ из силе и њенога крака у односу према оси. Узев обртање у једноме смислу као позитивно, а у противном као негативно, треба и моменте, према томе, рачунати позитивно или негативно.

За *јединицу момента* узимамо моменат силе 1 дина, која дејствује на краку од 1 *cm*.

Из горе реченог изводимо правила: кад на једно чврсто тело, које је покретљиво око једне осе, дејствују две силе, у којим било тачкама тела, а леже у истој према оси нормалној равни, онда такве силе могу да замене једна другу, ако су им моменти једнаки и смисао обртања исти. Ако је, пак, смисао обртања супротан, а силе имају једнаке моменте у односу према обртној оси,

онда силе стоје у *равнотежи.* Уопште: на случај равнотеже мора да је алгебарски збир момената свих сила у односу према оси $= 0$, дакле

$$\Sigma Ka = 0. \qquad (18$$

Као најважнији пример (и примена) овога правила поменимо озиб. *Архимед* (287—212 пре Хр.) је први покушао да докаже за разнокраки озиб правило $P : Q = q : p$ (где су P и Q силе, p и q њихови краци) сматравши да се код равнокраког озиба правило разуме само по себи.

71. Силе које дејствују на слободно покретну чврсту систему. — Напоменимо неколико главних правила.

1. Кад једно слободно покретљиво тело под утицајем сила остаје у миру, онда кажемо да су силе у *равнотежи.*

У таквоме случају равнотежа остаје и даље, ако ма који део чврсте системе учинимо непокретљивим, дакле покретљивост тела на ма који начин ограничимо.

2. Две у истој равни дејствујуће силе са различном нападном тачком и различним правцем могу да се замене једном резултантом. Правац и величину резултанте добијамо кад преместимо нападне тачке у пресек праваца дотичних сила, а помоћу паралелограма.

3. Две силе са различним нападним тачкама, а у истоме смислу паралелне имају резултанту равну збиру сила и у истоме правцу. Нападна тачка резултанте дели унутра дуж, која спаја нападне тачке задатих сила, обрнуто сразмерно силама.

4. Две силе са различним нападним тачкама, а у супротноме смислу паралелне имају резултанту равну разлици сила, а у правцу веће силе. Нападна тачка резултанте дели споља дуж, која спаја нападне тачке задатих сила, обрнуто сразмерно силама.

5. Две једнаке и паралелне, али у супротноме правцу дејствујуће силе образују један *спрег сила,* који не може да се замене једном силом. Према 4. правилу добили бисмо у оваком случају да је резултанта $= 0$, а њен крак $= \infty$.

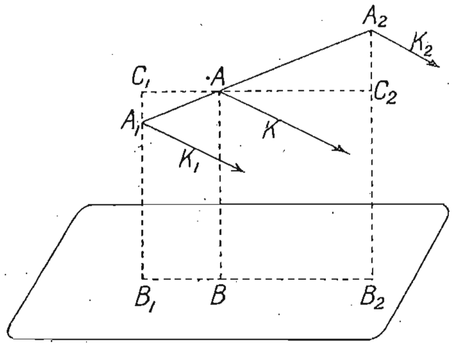
Спрег сила проузрокује увек само обртање око ма које тачке између нападних тачака A и B оних двеју сила. Статички моменат таквога спрега једнак је производу из једне од сила K и нормалноме растојању њиховом. Ма где узели обртну тачку моменат обртања је $= K \, . \, AB$. Дуж AB зове се *спрежни крак*, производ $K \, . \, AB$ *моменат спрега.*

За једнакост, као и за слагање спрегова сила, постоје правила слична онима за обртне моменте. Помоћу тих правила ми смо у стању, ма колико разних спрегова са различним моментима, па и у разним равнима, да сложимо у један спрег сила.

72. Тежиште маса. — Чврста система састављена из тешких тачака има резултанту сила, чија се нападна тачка *(средиште пара-*

ралелних сила) зове *тежиште* системе. Ова је тачка независна од положаја системе.

Разумевајући под *моментом силе у односу према једној равни* производ из силе и одстојања њене нападне тачке од равни, можемо да поставимо правило: моменат резултанте двеју паралелних сила, које у истоме смислу дејствују, у односу према каквој било равни једнак је збиру момената тих сила у односу према истој равни. Нека су K_1 и K_2 две паралелне силе, K њихова резултанта, A_1B_1, A_2B_2 и AB одстојања њихових нападних тачака од моментне равни. Повуцимо $C_1C_2 // B_1B_2$. Тада је



Сл. 38.

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{A_1A}{A_2A} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}, \text{ одакле } K_1 \,.\, A_1C_1 = K_2 \,.\, A_2C_2, \text{ или}$$

$$K_1 \,.\, (AB - A_1B_1) = K_2 \,.\, (A_2B_2 - AB) \text{ или најзад}$$

19) $$K \,.\, AB = K_1 \,.\, A_1B_1 + K_2 \,.\, A_2B_2.$$

Разуме се да ово правило важи и за ма колики број паралелних сила које дејствују у истоме смислу.

Нека су P_1, P_2, ... тежине тешких тачака из којих је састављена система; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... координате тих тачака. Означимо са x_0, y_0, z_0 координате нападне тачке резултанте

$$R = P_1 + P_2 + \ldots = \Sigma P.$$

Према горњем правилу је у односу према yz-равни

$$Rx_0 = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots = \Sigma Px,$$

а у односу према zx-равни

$$Ry_0 = P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots = \Sigma Py$$

и најзад у односу према xy-равни

$$Rz_0 = P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots = \Sigma Pz,$$

одакле координате тежишта

20) $$x_0 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad y_0 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad z_0 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Ако место системе састављене из одвојених (дискретних) тешких тачака замислимо једно континуирно тело образовано из бесконачно много бесконачно малих делова, онда место P_1, P_2, ... треба узети dP, а знак Σ заменути знаком $\int$. Тада имамо обрасце

$$x_0 = \frac{\int x\,dP}{\int dP}, \quad y_0 = \frac{\int y\,dP}{\int dP}, \quad z_0 = \frac{\int z\,dP}{\int dP}. \qquad (20a$$

Ако система, чије тежиште тражимо, представља једну хомогену линију, једну хомогену површину или једно хомогено тело, тежина P може да се замене дужином лука s, површјем S односно запремином V. На тај начин следују обрасци за одређивање тежишта

1. код хомогених линија

$$x_0 = \frac{\int x\,ds}{\int ds}, \quad y_0 = \frac{\int y\,ds}{\int ds}, \quad z_0 = \frac{\int z\,ds}{\int ds}, \qquad (20b$$

где је $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, $\quad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \,.\, dx$

(в. обрасце 1 и 2 у чл. 41.). За линије у равни је $z = 0$, $dz = 0$, $z_0 = 0$.

2. Код хомогених површина

$$x_0 = \frac{\int x\,dS}{\int dS}, \quad y_0 = \frac{\int y\,dS}{\int dS}, \quad z_0 = \frac{\int z\,dS}{\int dS}, \qquad (20c$$

где је $dS = \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \,.\, dx\,dy$, $\quad S = \int\int \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \,.\, dx\,dy$ (в. обрасце 1 и 2 у чл. 55.). Специално за обртне површине имали смо

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx,$$

$$S = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx = 2\pi \int y \,.\, ds.$$

(в. обрасце 1 и 1а у чл. 56.).

За равне фигуре, које су са једне стране ограничене комадом x-осе, са друге две стране ординатама, а са четврте стране луком линије $y = f(x)$, имали бисмо да употребимо познати образац

$$du = y\,dx, \quad u = \int y\,dx.$$

(В. образац 1 и 2 у чл. 35.)

3. Код хомогених тела

$$x_0 = \frac{\int x\,dV}{\int dV}, \quad y_0 = \frac{\int y\,dV}{\int dV}, \quad z_0 = \frac{\int z\,dV}{\int dV}, \qquad (20d$$

где је уопште $dV = z\,dx\,dy$, $V = \int\int z\,dx\,dy$ (в. формуле у чл. 51.). За обртна тела имамо

$$dV = \pi y^2\,dx,\quad V = \pi \int y^2\,dx$$

(в. формуле 1 у чл. 47.).

73. Обртање чврстих тела. — Означимо са v обртну брзину једне тачке на телу, које равномерно ротира, са r одстојање тачке од обртне осе, а са T време једнога обрта. Очевидно је

21) $$v = \frac{2\,r\pi}{T},\quad T = \frac{2\,r\pi}{v},$$

Брзина тачке у одстојању 1 од обртне осе зове се *угловна брзина*. За њу имамо да је

22) $$\omega = \frac{2\pi}{T},\ \text{дакле}\ \omega = \frac{v}{r}\ \text{или}\ v = r\omega.$$

Угловна брзина је за све тачке ротирајућег тела једнака.

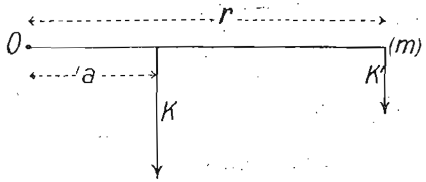
Угловна брзина ротирајућег тела остаје непромењена, ако на тело дејствују никакве силе.

Овај закон инерције за ротацију утврдио је *Галилеј* пре од закона инерције за праволиниско кретање.

74. Угловно убрзање. Моменат лењивости. — Означимо са β обртно убрзање неке тачке у одстојању r од обртне осе тела, које неједнаком брзином ротира. Тада је за све тачке тела *угловно убрзање*

23) $$\gamma = \frac{\beta}{r}.$$

На крају једне чврсте шипке (озиба) дужине r, која може да се обрће око осе у тачци 0 (коју осу замишљамо управно на равни цртежа) налази се чврсто везана материјална тачка са масом m. Нормално на краку (и на оси), а у одстојању a од осе дејствује сила K. Питамо се колико је угловно убрзање, које добија маса m услед силе K.



Сл. 39.

Замислимо силу K замењену силом K' у тачци m, која са силом K има исти моменат обртања. Ако са β означимо линеарно убрзање масе m, онда је

$$\gamma = \frac{\beta}{r}.$$

Ми знамо да је

$$\beta = \frac{K'}{m},$$

(формула 6 у чл. 60.), а по правилу за озиб (в. чл. 70.)

$$K' : K = a : r,\quad K' = \frac{Ka}{r}$$

и према томе

$$\gamma = \frac{Ka}{mr^2}. \tag{24}$$

Ставимо моменат обртања

$$Ka = D$$
$$mr^2 = J,$$

тако да је

$$\gamma = \frac{D}{J}. \tag{24a}$$

Примећујемо аналогију између ове формуле и основне формуле $p = \frac{P}{m}$ (формула 6 у чл. 60.). Сили P одговара моменат обртања D, маси m одговара

$$J = mr^2 \tag{25}$$

количина, која се зове *моменат лењивости.*

Christian Huyghens (1629—1695) решавајући проблем о физичком клатну завео је појам о моменту лењивости, а назив му је дао *Leonhard Euler* (1707—1783).

Моменат лењивости J масе m у одстојању r од обртне осе даје својом инерцијом исти отпор који даје маса mr^2 у одстојању 1 cm од обртне осе. То значи: маса mr^2 у одстојању 1 cm добија обртним моментом D исто угловно убрзање које добија маса m у одстојању r истим моментом D.

Ако је система састављена из више материалних тачака са масама $m_1, m_2, \ldots$, које су у одстојањима $r_1, r_1, \ldots$ од обртне осе, онда је моменат лењивости целе системе

$$J = \Sigma m r^2. \tag{26}$$

Горњи образац 24) за γ добија вид

$$\gamma = \frac{Ka}{\Sigma m r^2}. \tag{27}$$

Горњи израз 26) за моменат лењивости добија знатно простију форму, ако систему образује каква хомогена маса. Знак Σ претвара се у знак $\int$, ако се моменат лењивости тражи за какво хомогено тело, хомогену површину или хомогену линију, које се може сматрати састављено и бесконачно много бесконачно малих делова.

75. Енергија ротирајућег кретања. — Сабирањем енергије кретања појединих делова ротирајућег тела имамо (према формули 12 у чл. 64.) да је $E = \Sigma \frac{1}{2} m v^2$, које с обзиром на формулу 22) у чл. 73. може да се напише $E = \Sigma \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2$, дакле

$$28) \qquad E = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Енергија кретања ротирајућег тела са моментом лењивости J и угловном брзином ω представљена је изразом 28). Опажамо аналогију између енергије ротирајућег кретања $\frac{1}{2} J \omega^2$ и енергије транслаторног кретања $\frac{1}{2} m v^2$.

76. Напомене за Механику чврстих тела. — Дејство сила на чврсте системе у погледу кретања показује се у *транслацији* и *ротацији*.

Транслаторно кретање чврсте системе потпуно је одређено, ако знамо кретање средишта маса системе, а за проучавање овога довољни су закони Механике тачке.

Код обртног кретања долазе место брзине и убрзања појмови угловне брзине и угловног убрзања.

Код транслације је

брзина $c = \frac{s}{t}$ (формула 1 у чл. 58.)

убрзање $p = \frac{P}{m}$ (формула 6 у чл. 60.).

Код ротације је

угловна брзина $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$ (формула 22 у чл. 73.)

угловно убрзање $\gamma = \frac{\beta}{r} = \frac{D}{J}$ (формуле 23 и 24a чл. 73.).

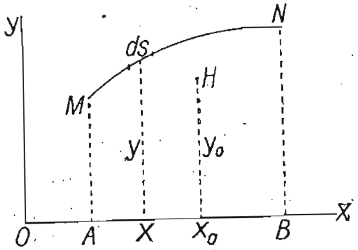
На основу закона о лењивости:

код транслације остаје непромењена брзина и правац кретања;
код ротације остаје непромењена угловна брзина и обртна раван.
Маси m одговара код ротације моменат лењивости $J = m r^2$ (формула 25 у чл. 74.);
сили K одговара обртни моменат $D = K a$ (чл. 74.);

једначини $P = m p$ (једн. 6 у чл. 60.) аналогна је једначина $D = J \gamma$ (једн. 24a у чл. 74.).

Најзад аналогно обрасцу за енергију код транслаторног кретања $E = \frac{1}{2} m v^2$ (формула 12 у чл. 64.) имамо образац за енергију код обртног кретања $E = \frac{1}{2} J \omega^2$ (формула 28 у чл. 75.).

77. Примене. — I. *Гулдин*-ово правило за површине. Узмимо какву било линију MN, која се обрће око x-осе. Нека је s њена дужина, тачка $H (x_0, y_0)$ њено тежиште. На основу правила да је статичан моменат целе масе раван збиру статичних момената појединих делова имамо, узев статичан моменат у однос на x-осу, једначину



Сл. 40.

$$s y_0 = \int y \, ds.$$

Кад сравнимо ово са обрасцем за површје обртне површине

$$S = 2\pi \int y \, ds$$

(в. формулу 1a у чл. 56.) налазимо да је

$$S = 2\pi y_0 . s \qquad (29$$

То значи да је површје једне обртне површине равно производу из дужине линије, која површину описује и периферије круга, који тежиште линије описује.

Ако линија MN не изврши цео обрт, него се обрне само за угао Θ и ако означимо са S_1 површје, које одговора углу Θ, онда из пропорције

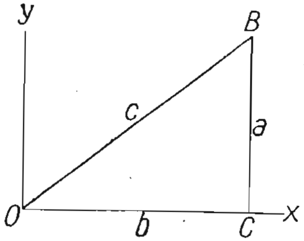
$$S : S_1 = 2\pi : \Theta$$

следује

$$S_1 = \frac{S}{2\pi} \Theta = \Theta y_0 . s. \qquad (30$$

Овде је Θy_0 лук који је тежиште H описало. Према томе образац 30) исказује правило да је површје, које постаје обртањем једне линије за извесан угао равно производу из дужине линије и дужине лука, који је тежиште линије при обртању описало.

Ово правило познато је под именом *Гулдин*-овог правила по Сан-Галенском језуити *Paul Guldin* (1577—1643), који га је пронашао не умевши дати строгог доказа за њега.



Сл. 41.

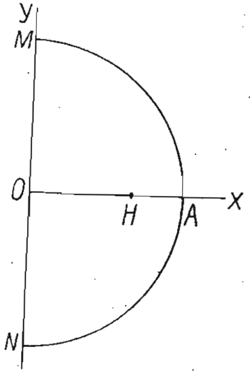
1. Пример. Дуж $BC = a \perp$ на x-оси обрће се око x-осе. Тежиште дужи удаљено је од x-осе за $\frac{a}{2}$. Дужина путање тежишта у пуном обрту је дакле $2\pi . \frac{a}{2} = \pi a$, а пошто је дужина обртне линије (генератрисе) $= a$, то је површина описаног круга $= \pi a . a = \pi a^2$.

2. Пример. Дуж $OB = c$ обрће се око x-осе. Тежиште дужи c удаљено је од обртне осе за $\frac{a}{2}$, ако означимо $BC = a$. За цео обрт је путања тежишта $= 2\pi . \frac{a}{2} = \pi a$. Дужина генератрисе је $= c$ и према томе површина описаног купиног омотача $\pi a c$.

3. Пример. Површину прстенастог тела, које постаје обртањем круга са полупречником r око x-осе, добијамо кад помножимо путању тежишта $2\pi b$ (ако са b означимо одстојање средишта круга од x-осе) са дужином генератрисе $2\pi r$. Површина тог обртног тела је дакле $=$

$$2\pi b . 2\pi r = 4\pi^2 b r.$$

(В. 3. пример у чл. 57. и сл. 21. у чл. 48.)

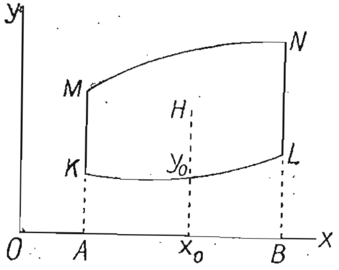


Сл. 42.

4. Пример. Полукруг MAN обрће се око пречника MN (y-осе). Тежиште H линије налази се из разумљивих разлога на пречнику OA. Означимо $OH = x_0$. Путања, коју описује тежиште је $= 2\pi x_0$, а дужина генератрисе (полукруга) πr. По *Гулдин*-овоме правилу је површина описане лопте $2\pi x_0 . \pi r$, а ово је, као што иначе знамо $= 4\pi r^2$, тако да из $2\pi x_0 . \pi r = 4\pi r^2$ налазимо положај тежишта H

$$x_0 = \frac{2}{\pi} r.$$

II. *Гулдин*-ово правило за тела.



Сл. 43.

Узмимо једну фигуру $KLMN$, која је ограничена са две стране ординатама AM и BN, а са остале две стране кривим линијама MN и KL, чије су једначине $y = f(x)$ и $y' = \varphi(x)$.

Означимо са x_0, y_0 координате тежишта H фигуре $KLMN$. Нека је

F површина фигуре $KLMN$,
F_1 површина фигуре $MNAB$,
F_2 површина фигуре $KLAB$.

Ми знамо да је $dF_1 = y\,dx$. Сматравши dF_1 као правоугаоник, његово је тежиште удаљено за $\frac{y}{2}$ од x-ове и према томе је статичан моменат тога бесконачно малога дела површине (у односу на x-осу) $= \frac{y}{2}\,dF_1 = \frac{1}{2} y^2\,dx$, дакле статичан моменат целе површине F_1 једнак $\frac{1}{2}\int y^2\,dx$. Исто тако је статичин моменат површине F_2 једнак $\frac{1}{2}\int y'^2\,dx$ и онда према томе статичан моменат површине $F = F_1 - F_2$ ово $\frac{1}{2}\int (y^2 - y'^2)\,dx$, које је, опет, по познатоме правилу за статичне моменте $= F y_0$. Из

$$F y_0 = \frac{1}{2}\int (y^2 - y^2)\,dx$$

и познатоме обрасцу за запремину обртних тела

$$V = \pi \int (y^2 - y'^2)\,dx$$

(в. формулу 2 у чл. 47.) следује

$$V = 2\pi y_0 . F. \qquad (31$$

Овим смо доказали друго *Гулдин*-ово правило, које казује да је запремина једног обртног тела, које постаје обртањем једне равне фигуре једнака производу из површине те фигуре и периферије круга (путање), који тежиште фигуре при обртању описује.

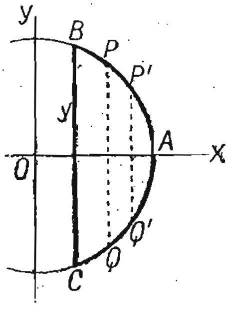
У случају да фигура не учини цео обрт, него се обрне само за угао Θ добивену запремину V_1 добијамо из пропорције

$$V : V_1 = 2\pi : \Theta,$$

дакле

$$V_1 = \frac{V}{2\pi}\,\Theta = \Theta y_0 . F. \qquad (32$$

То значи да је запремина обртног тела, које постаје обртањем једне равне фигуре за угао Θ једнака производу из површине фигуре и дужине лука (путање), који тежиште при обртању описује.



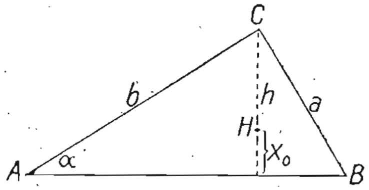
Сл. 44.

5. Пример. Кружни одсечак ABC обрће се око пречника, који је паралелан са тетивом BC и који узимамо за y-осу правоугле системе са почетком у средишту круга. Да нађемо запремину тела, које образује фигура ABC својим обртањем.

Површински елеменат $PP'QQ' = 2y\,dx$, чије тежиште описује путању $2\pi x$, образује, према *Гулдин*-овом правилу, запремински елеменат $dV = 2\pi x . 2y\,dx = 4\pi x y\,dx$. Из једначине круга $x^2 + y^2 = r^2$ следује $x\,dx = -y\,dy$, тако да је $dV = -4\pi y^2\,dy$,

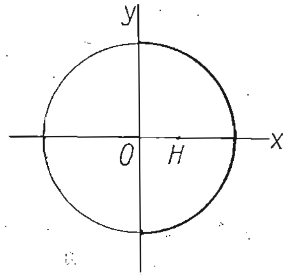
$$V = -4\pi \int_y^0 y^2\,dy = 4\pi \int_0^y y^2\,dy = \frac{4}{3}\pi y^3.$$

Запремина овог обртног тела једнака је, дакле, запремини лопте са полупречником y.

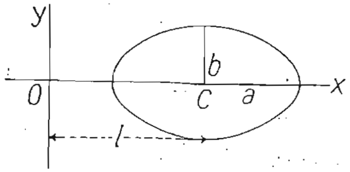


Сл. 45.

6. Пример. Правоугли троугао ABC обрће се око хипотенузе. Одстојање тежишта H троугловог од хипотенузе је $x_0 = \frac{h}{3} = \frac{b \sin \alpha}{3}$ (в. 2. пример у чл. 78.) и према томе путања тежишта $2\pi x_0 = \frac{2\pi b \sin \alpha}{3}$. Површина троугла је $\frac{ab}{2}$, дакле запремина обртног тела $V = \frac{ab}{2} \frac{2\pi b \sin \alpha}{3}$ или пошто је $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $V = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.



Сл. 46.



Сл. 47.

7. Пример. Полукруг се обрће око пречника (y-осе) и описује лопту, чија је запремина $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. На основу *Гулдин*-овог правила знамо да је запремина описаног тела (лопте) равна путањи тежишта помножено површином полукруга, тј. $V = 2\pi x_0 . \frac{r^2 \pi}{2}$
$= r^2 \pi^2 x_0$.

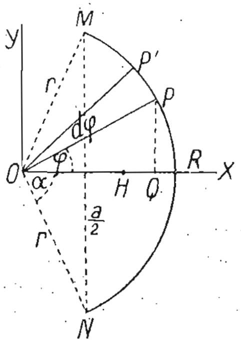
Из једначине $\frac{4}{3}\pi r^3 = r^2 \pi^2 x_0$ налазимо да је за полукруг

$$x_0 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}.$$

8. Пример. Елипса се обрће око једне праве (y-осе) изван ње, која је паралелна са једном од њених главних оса и описује једно елиптично прстенасто тело. Површина елипсе је $\pi a b$, путања тежишта $= 2\pi l$ и према томе запремина обртног тела $V = \pi a b . 2\pi l = 2\pi^2 a b l$. За случај круга ($a = b$) имамо $V = 2\pi^2 a^2 l$ (в. 4. пример у чл. 48.).

78. Примери за одређивање тежишта. —

1. Пример. Кружни лук. Пре свега је јасно да се тежиште кружног лука MRN налази на пречнику OR који тај лук полови. Тај пречник узећемо за x-осу, а почетак координата у средишту круга.



Сл. 48.

Лучни је елеменат PP' или $ds = r\,d\varphi$, а његов статичан моменат у односу на y-осу, као обртну осу, пошто му је одстојање од обртне осе $= r \cos \varphi$, ово

$$r\,d\varphi . r \cos \varphi = r^2 \cos \varphi\, d\varphi.$$

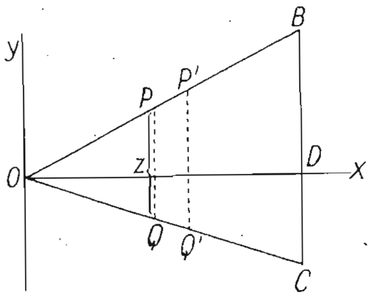
Према томе статичан моменат целог лука $MRN = b$ јесте

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos \varphi\, d\varphi = r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi\, d\varphi = 2 r^2 \sin \alpha$$

или пошто је $2 r \sin \alpha =$ тетиви $MN = a$, статичан моменат лука $= r a$.

Међутим статичан моменат лука MN једнак је производу из његове дужине b и одстојања x_0 његовог тежишта H од обртне осе, дакле $b x_0$ и тако из једначине $b x_0 = r a$ добијамо $x_0 = r \frac{a}{b}$.

Код полукруга је $a = 2r$, $b = \pi r$ и према томе $x_0 = \frac{2}{\pi} r$ (в. 4. примеру чл. 77.).



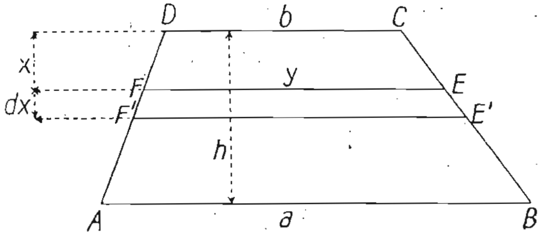
Сл. 49.

2. Пример. Троугао. Повуцимо висину $OD = h$ и узмимо је за x-осу и растворимо троугао OBC на површинске елементе $PP'QQ'$ повлачећи паралелне са основом $BC = a$. На основу тога што је $\Delta OPQ \backsim \Delta OBC$ следује $z : x = a : h$, одакле $z = \frac{a}{h} x$ и према томе површински елеменат $PP'QQ' = z\,dx = \frac{a}{h} x^2 dx$, а његов статичан моменат у односу на y-осу, као обртну осу, $x y\, dx = \frac{a}{h} x^2\, dx$. Статичан моменат за све површинске елементе, дакле

$$\text{за троугао} = \int_0^h \frac{a}{h} x^2\, dx = \frac{a}{h} \int_0^h x^2\, dx = \frac{a h}{3}.$$

По познатом правилу тај је статичан моменат још $= \frac{a h}{2} x_0$ и онда из $\frac{a h}{2} x_0 = \frac{a h^2}{3}$ следује $x_0 = \frac{2}{3} h$.

3. Пример. Трапез. Повлачењем паралелне EF у одстојању x од трапезове стране CD можемо да напишемо: трапез $ABCD =$ трапезу $CDEF +$ трапезу $ABEF$, дакле $\frac{a+b}{2} h = \frac{b+y}{2} x + \frac{a+y}{2} (h - x)$, одакле $y = b + \frac{a-b}{h} x$.



Сл. 50.

Статичан моменат површинског елемента $EFE'F'$ јесте

$$x y\, dx = (b x + \frac{a-b}{h} x^2)\, dx,$$

а статичан моменат целог трапеза

$$\int_0^h (b x + \frac{a-b}{h} x^2)\, dx = \frac{b h^2}{2} + \frac{a-b}{h} \frac{h^3}{3} = \frac{h^2 (2a+b)}{6}.$$

Осим тога је опет статичан моменат трапеза $= \frac{a+b}{2} h x_0$ и онда из једначине $\frac{a+b}{2} h x_0 = \frac{h^2 (2a+b)}{6}$ налазимо за одстојање тежишта од трапезове стране BC да је

$$x_0 = \frac{h (2a+b)}{3 (a+b)}.$$

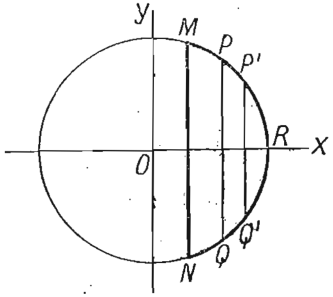
4. Пример. Кружни исечак. Унапред знамо да тежиште исечка OMN (в. сл. 47. у 1. примеру) мора лежати на симетралној оси фигуре, тј. на полупречнику OR. Статичан моменат површинског елемента $OPP' = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ добићемо кад површину тога елемента помножимо са одстојањем његовог тежишта од y-осе, као обртне осе. Сматравши OPP' као троугао, знамо да је одстојање његовог тежишта од темена O равно $\frac{2}{3}r$ (в. 2. пример), а његово одстојање од обртне осе је $\frac{2}{3}r\cos\varphi$. Према томе је статичан моменат површинског елемента OPP' $\frac{1}{2}r^2\,d\varphi\,.\,\frac{2}{3}r\cos\varphi = \frac{1}{3}r^3\cos\varphi\,d\varphi$, а збир свију статичних елемената

$$\frac{r^3}{3}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}r^3\sin\alpha.$$

Површина сектора је $= r^2\alpha$, а његов моменат $r^2\alpha x_0$, дакле $r^2\alpha x_0 = \frac{2}{3}r^3\sin\alpha$,

$$x_0 = \frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

5. Пример. Кружни одсечак. Површински елеменат је $PP'QQ' = 2y\,dx$, а његов статичан моменат у односу на y-осу јесте $2xy\,dx$ или, кад из једначине круга $x^2+y^2=r^2$ заменимо $y=\sqrt{r^2-x^2}$, овако: $2x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$, дакле статичан моменат одсечка MNR једнак



Сл. 51.

$$2\int_x^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = -\int_x^r (r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,(r^2-x^2)$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{r^2-x^2}^{\,3}.$$

С друге стране знамо да је статичан моменат фигуре MNR једнак производу из површине MNR и одстојања x_0 тежишта њеног од обртне осе. За површину MNR имамо

$$MNR = 2\int_x^r y\,dx = 2\int_x^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{r^2\pi}{2} - x\sqrt{r^2-x^2} - r^3\,arc\sin\frac{x}{r}\quad{}^{1)}$$

дакле њен статичан моменат

$$x_0\left[\frac{r^2\pi}{2} - x\sqrt{r^2-x^2} - r^2\,arc\sin\frac{x}{r}\right] = \frac{2}{3}\sqrt{r^2-x^2}^{\,3},$$

одакле

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{r^2-x^2}^{\,3}}{\frac{r^2\pi}{2} - x\sqrt{r^2-x^2} - r^2\,arc\sin\frac{x}{r}}.$$

За полукруг је $x=0$ и према томе $x_0 = \frac{4r}{3\pi}$.

6. Пример. Параболичан сегмент. Једначина параболе је $y^2 = 2px$. Површина елемента је $PP'QQ' = y\,dx = \sqrt{2px}\,dx$. Пошто се површински елеменат може да замене уписаним правоугаоником, то је

одстојање његовог тежишта од y-осе, $= x$,
а одстојање његовог тежишта од x-осе, $= \frac{y}{2}$

и према томе статичан моменат елемента $PP'QQ'$ у односу на y-осу, $= x\,.\,\sqrt{2px}\,dx$, а у односу на x-осу, $= \frac{y}{2}\sqrt{2px}\,dx = px\,dx$. Дакле статичан моменат параболичног сегмента OMN

$$\text{у односу на } y\text{-осу}, \quad = \quad \sqrt{2p}\int_0^x x^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2px},$$

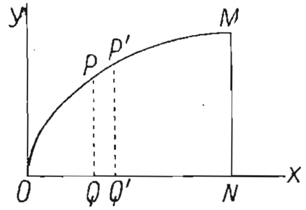
$$\text{у односу на } x\text{-осу}, \quad = \quad p\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}px^2.$$

Површина параболичног сегмента OMN је $= \frac{2}{3}xy$ (в. 3. пример у чл. 37.). С овим имамо ове две једначине

$$x_0\,.\,\frac{2}{3}xy = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2px},$$

$$y_0\,.\,\frac{2}{3}xy = \frac{1}{2}px^2$$

из којих налазимо координате x_0, y_0 тежишта параболичног сегмента:



Сл. 52.

$$x_0 = \frac{3}{5}x,\quad y_0 = \frac{3}{8}y,\quad \text{где је } x = ON,\ y = MN.$$

7. Пример. Лоптина зона. Из једначине круга $x^2+y^2=r^2$ следује $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $ds = \frac{r}{y}\,dx$. Обртањем око x-осе лучни елеменат ds описује површински елеменат зоне $dS = 2\pi y\,ds = 2\pi r\,dx$, чији је, у односу на y-осу, статичан моменат $x\,dS = 2\pi rx\,dx$. С овим налазимо

$$x_0 = \frac{\int x\,dS}{\int dS} = \frac{2\pi r\int_x^{x+h}x\,dx}{2\pi r\int_x^{x+h}dx} = \frac{\frac{(x+h)^2-x^2}{2}}{x+h-x} = x+\frac{h}{2}.$$

Тежиште зоне налази се, дакле, у средини њене висине h.

8. Пример. Лоптин слој. Обртање замишљамо око x-осе, тако да лучни елеменат производи запремински елеменат $dV = \pi y^2\,dx = \pi(r^2-x^2)\,dx$, чији је, у односу на x-осу, статичан моменат $x\,dV = \pi(r^2-x^2)\,x\,dx$. На тај начин добијамо

$$x_0 = \frac{\int_x^{x+h}x\,dV}{\int_x^{x+h}dV} = \frac{\pi\int_x^{x+h}(r^2-x^2)\,x\,dx}{\pi\int_x^{x+h}(r^2-x^2)\,dx} = \frac{r^2\int_x^{x+h}x\,dx - \int_x^{x+h}x^3\,dx}{r^2\int_x^{x+h}dx - \int_x^{x+h}x^2\,dx}$$

---

[1] $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ решавамо делимичним интеграљењем. Такав смо интеграл имали у 1. примеру чл. 37

$$= \frac{\left[\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_x^{x+h}}{\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_x^{x+h}} = \frac{\frac{r^2}{2}(2hx + h^2) - \frac{1}{4}(4x^3 h + 6x^2 h^2 + 4xh^3 + h^4)}{r^2 h - \frac{1}{3}(3x^2 h + 3xh^2 + h^3)}.$$

За полулопту имали бисмо кад ставимо $x = 0,\ h = r$ за тежиште $x_0 = \frac{3}{8} r$.

9. Пример. Пирамида. Означимо са b основу, са h висину пирамиде. У одстојању x од врха, а паралелно са основом замишљамо пресек, чију ћемо површину обележити са y. Из познате пропорције $y : b = x^2 : h^2$ следује $y = \frac{b}{h^2} x^2$ и према томе је запремински елеменат дебљине dx ово $dV = \frac{b}{h^2} x^2 dx$, а запремина пирамиде $V = \frac{b}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{bh}{3}$. Статичан моменат запреминског елемента је $xydx = \frac{b}{h^2} x^3 dx$, а статичан моменат целе пирамиде, узев нормалу у врху на висину пирамиде као обртну осу, $\int x\, dV = \frac{b}{h^2}\int_0^h x^3 dx = \frac{bh^2}{4}$.

Према овоме је

$$x_0 = \frac{\int x\, dV}{\int dV} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh}{3}} = \frac{3}{4} h.$$

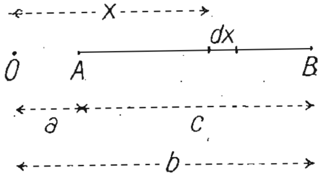
10. Пример. Обртни параболоид. На основу једначине параболе $y^2 = 2px$ добијамо као запремински елеменат $\pi y^2 dx = 2\pi p x \,.\, dx$, а за запремину обртног параболоида $V = 2\pi p \int_0^x x\, dx = \pi p x^2$. Статичан моменат параболоида у односу на y-осу јесте $\int x\, dV = 2\pi p \int_0^x x^2 dx = \frac{2\pi p x^3}{2}$. Према овоме је

$$x_0 = \frac{2\pi p x^3}{3} : \pi p x^2 = \frac{2}{3} x.$$

79. Примери за одређивање момента лењивости. —

1. Пример. Дуж $AB = c$ обрће се око осе у тачци O, која дуж (односно њено продужење) нормално сече. Означимо са m масу дужне јединице. Линиски елеменат dx у одстојању x од осе има масу $m\,dx$, а његов је моменат лењивости $m x^2 . dx$ и према томе моменат лењивости целе дужи

$$m\int_a^b x^2 dx = \frac{m}{3}(b^3 - a^3).$$

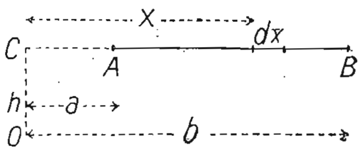


Сл. 53.

Но пошто је моменат лењивости дужи $c = b - a$ раван $m c z^2 = m(b - a) z^2$, ако за z означимо одстојање средишта лењивости масе mc целе дужи од осе, то имамо $m(b - a) z^2 = \frac{m}{3}(b^3 - a^3)$, одакле $z^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$.

Ако дуж почиње од саме осе, дакле $a = 0$ имамо простије $z^2 = \frac{b^2}{3}$, $z = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

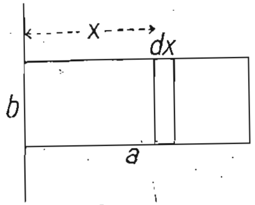
У случају да правац дужи AB не пролази кроз O, али је дуж, ипак, нормална на оси, означимо са $OC = h$ одстојање дужи од осе. Одстојање елемента dx са масом $m\,dx$ од осе је сада $\sqrt{h^2 + x^2}$ и према томе његов моменат лењивости $= m(h^2 + x^2)\,dx$, а моменат лењивости целе дужи



Сл. 54.

$$m\int_a^b (h^2 + x^2)\, dx = m\left[h^2 x + \frac{x^3}{3}\right]_a^b = m(b - a)\left(h^2 + \frac{b^2 + ab + a^2}{3}\right).$$

Но тај исти моменат ленивости је $= m(b - a) z^2$ и по томе је $z^2 = h^2 + \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$.



Сл. 55.

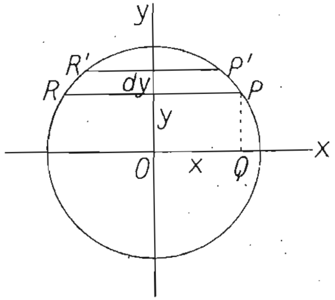
2. Пример. Узмимо правоугаоник који се обрће око једне своје стране, нпр. стране b. Површински елеменат $b\,dx$ има моменат лењивости $b x^2 dx$ узев да је маса површинске јединице $= 1$. Моменат лењивости целога правоугаоника је $=$

$$b\int_0^a x^2 dx = \frac{ba^3}{3} = ab \cdot \frac{a^2}{3}.$$

3. Пример. Замислимо круг, који се обрће око једног свог пречника. Моменат лењивости површинског елемента $PP'RR' = 2x\,dy$ јесте $2xy^2 dy$. Да бисмо ово интегралили и добили моменат лењивости круга ставићемо из једначине круга $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ и добићемо за моменат лењивости

$$J = 2\int_{-r}^{r} y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

Овај интеграл могли бисмо да извршимо методом делимичног интеграљења. Ми ћемо да га доведемо на тригонометриску форму заменом $y = r \sin\varphi$, дакле $\sqrt{r^2 - y^2} = r\cos\varphi$,

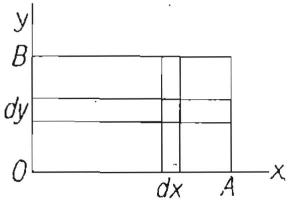


Сл. 56.

$dy = r\cos\varphi\, d\varphi$. Следује $J = 2r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi$, а ово решавамо помоћу формуле 1) у чл. 17. и формуле 2) у чл. 18.

$$J = \frac{r^4}{2}\left[-\sin\varphi\cos^3\varphi + \int \cos^2\varphi\, d\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^4}{2}\left[-\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{r^4\pi}{4}.$$



Сл. 57.

4. Пример. Правоугли паралелопипед са ивицама a, b, c обрће се око ивице c. Замислимо у равни основе са ивицама $a = OA$ и $b = OB$ као осама координатне системе узет површински елеменат $dx \, . \, dy$ између апсциса x и $x + dx$ и ордината y и $y + dy$. Тај површински елеменат је основа једне призме висине c. Одстојање те призме, чија је запремина $c \, dx \, dy$, од обртне осе је $\sqrt{x^2 + y^2}$ (као и одстојање површинског елемента $dx \, . \, dy$ од тачке O). Према томе је моменат лењивости те призме у односу на обртну осу (а то је ивица c) $m \, c \, (x^2 + y^2) \, dx \, . \, dy$, где m означава масу запреминске јединице. Моменат лењивости паралелопипеда је

$$J = m \, c \int\limits_{y=0}^{y=b} \int\limits_{x=0}^{x=a} (x^2 + y^2) \, dx \, . \, dy.$$

Пошто су границе овога двоструког интеграла константне, то на основу правила у чл. 54., можемо да напишемо

$$J = m \, c \int\limits_{y=0}^{y=b} dy \int\limits_{x=0}^{x=a} (x^2 + y^2) \, dx = m \, c \int\limits_{0}^{b} \left(\frac{a^3}{3} + a y^2 \right) dy$$

$$= m \, c \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{a b^3}{3} \right) = \frac{m \, a \, b \, c}{3} \, (a^2 + b^2).$$

Но пошто је иначе моменат лењивости паралелопипеда $J = m \, a \, b \, c \, . \, z^2$, добијамо равнењем ових двеју вредности за J, за средиште лењивости $z^2 = \frac{a^2 + b^2}{3}$.

5. Пример. Управни кружни ваљак обрће се око његове геометриске осе. Нека је r полупречник основе, h висина ваљка, m маса запреминске јединице. Замишљамо два коаксиална ваљка са полупречницима x и $x + dx$, који међусобом захватају волумен $2 \pi \, x \, dx \, . \, h$ са масом $2 \, m \, \pi \, h \, x \, dx$, а чији је моменат лењивости $2 \, m \, \pi \, h \, x \, dx \, . \, x^2 = 2 \, m \, \pi \, h \, x^3 \, dx$. Моменат лењивости целог ваљка је,

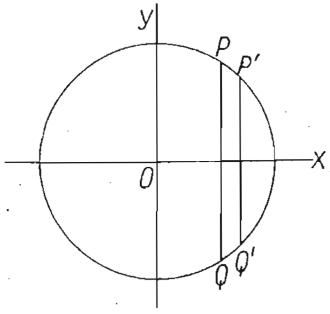
$$J = 2 \, m \, \pi \, h \int\limits_{0}^{r} x^3 \, dx = \frac{1}{2} \, m \, \pi \, h \, r^4.$$

Но пошто је моменат лењивости исто тако $J = m \, \pi \, r^2 \, h \, z^2$, следује $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

6. Пример. Потражимо моменат лењивости за хомогену лопту у однос на један њен пречник као обртну осу. Нека је x-оса обртна оса. Једначина великог круга у xy-равни гласи $y^2 = r^2 - x^2$. Замислимо лопту пресечену равнима у одстојању x и $x + dx$ нормално према x-оси. Таква два пресека, у слици означена са PQ и $P'Q'$, исецају из лопте један ваљак, чија је основа πy^2, а висина dx, дакле запремина $\pi \, y^2 \, dx$, а маса $m \, \pi \, y^2 \, dx$. Његов моменат лењивости је, према ресултату у 5. примеру, $= \frac{1}{2} \, m \, \pi \, y^4 \, dx = \frac{1}{2} \, m \pi \, (r^2 - x^2)^2 \, dx$. Моменат лењивости лопте је

$$J = \frac{1}{2} \, m \, \pi \int\limits_{-r}^{r} (r^2 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \frac{m \, \pi}{2} \int\limits_{-r}^{r} (r^4 - 2 \, r^2 \, x^2 + x^4) \, dx = \frac{m \, \pi}{2} \left[r^4 \, x - \frac{2 \, r^2 \, x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-r}^{r} = \frac{8 \, m \, \pi \, r^5}{15}.$$



Сл. 58.

Пошто је маса лопте $= \frac{4}{3} \, \pi \, r^3 \, m$, то је њен моменат лењивости $= \frac{4}{3} \, \pi \, r^3 \, m \, . \, z^2$ и онда из једначине $\frac{4}{3} \, \pi \, r^3 \; m \; z^2 = \frac{8}{15} \, m \, \pi \, r^5$ налазимо за средиште лењивости

$$z^2 = \frac{2}{5} \, r^2, \quad z = r \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

За шупљу лопту са полупречницима R и r имали бисмо, према горњем

$$J = \frac{8}{15} \, m \, \pi \, (R^5 - r^5)$$

или с обзиром да је маса шупље лопте

$$M = \frac{4}{3} \, m \, \pi \, (R^3 - r^3), \quad J = \frac{2}{5} \, M \, \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Замишљајући да се R приближује у бесконачет r и постаје најзад $R = r$, шупља лопта претвара се у површје сфере. Моменат лењивости за површје лопте добићемо, дакле, узев

$$J = \frac{2}{5} \lim_{R=r} M \, \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{2}{5} \lim_{R=r} M \, . \lim_{R=r} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Овде је $\lim\limits_{R=r} M = 4 \, \pi \, r^3 \, m =$ маси површја сфере, где m означава масу површинске јединице. За други израз $\lim\limits_{R=r} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$, који се јавља у неодређеном виду $\frac{0}{0}$, добићемо праву вредност на познати начин образујући количник из изводних, дакле

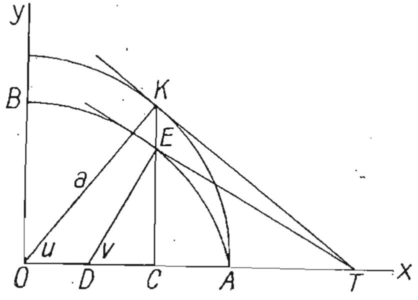
$$\lim_{R=r} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \lim_{R=r} \frac{5 \, R^4}{3 \, R^2} \lim_{R=r} \frac{5}{3} \, R^2 = \frac{5}{3} \, r^2.$$

Кад уметнемо добивене вредности налазимо моменат лењивости површја сфере

$$J = \frac{2}{5} \, 4 \, \pi \, r^2 \, m \, . \, \frac{5}{3} \, r^2 = \frac{8}{3} \, \pi \, m \, r^4.$$

4. Примери из Више Геодезије.

80. Израчунавање спљоштености земље из меридианских мерења. — Нека је AEB једна четврт земног елиптичног меридиана са полуосама $OA = a$ и $OB = b$. Количник $\frac{a - b}{a} = \varepsilon$ зове се *спљоштеност земље*. Обележимо координате елиптичне тачке E са $OC = x$ $EC = y$. Средишна једначина елипсе (меридиана) гласи $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, а лучни је елеменат уопште $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Опишимо из средишта



Сл. 59.

O круг са полупречником a и проду жимо ординату тачке E до пресека са кругом. Означимо $\sphericalangle KOA =$ и повуцимо у тачци K дирку K на круг. Тада је ET тангент елипсе у тачци Е. Повуцимо у нормалу ED на елипсину тангент и онда је $\sphericalangle EDA = v$ географск ширина места E. Из слике видимо да је

$$x = a \cos u,$$

а на основу једначине елипсе следује

$$y = b \sin u,$$

дакле

$$dx = - a \sin u \, du, \quad dy = b \cos u \, du$$

и са тиме

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} \, du$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b}{a} \cot g \, u.$$

С погледом на то да је $DE \perp TE$, дакле

$$\cot g \, v = - \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cot g \, u$$

следује

$$a \, tg \, u = b \, tg \, v,$$

одакле

$$\cos^2 u = \frac{a^2 \cos^2 v}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}, \quad \sin^2 u = \frac{b^2 \sin^2 v}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v},$$

$$du = \frac{a b \, dv}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}.$$

Овим добијамо за диференциал меридиана изражен географском ширином места израз

$$ds = \frac{a^2 b^2 \, dv}{(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)^3/_2}.$$

Да бисмо овај диференциал упростили и подесили за интегралење узмимо у обзир да је $\frac{a - b}{a} = \varepsilon$, $b = a \, (1 - \varepsilon)$. Занемарујући ε^2, као врло малу количину, узећемо $b^2 = a^2 \, (1 - 2 \varepsilon)$ и ставићемо према томе

$$ds = \frac{a \, (1 - 2 \varepsilon) \, dv}{(1 - 2 \varepsilon \sin^2 v)^3/_2}.$$

Одавде видимо да лучни елементи меридиана, па дакле и сами меридиански луци, расту упоредно са географском ширином v. То значи да меридиански степени од екватора ка полу бивају све већи.

Да бисмо интегралили горњи израз за ds развићемо у ред његов именитељ занемаривши, при томе, чланове са другим и вишим степенима количине ε. Ставићемо

$$(1 - 2 \varepsilon \sin^2 v)^{-\frac{3}{2}} = 1 + 3 \varepsilon \sin^2 v,$$

дакле

$$ds = a \, (1 - 2 \varepsilon) \, (1 + 3 \varepsilon \sin^2 v) \, dv$$
$$= a \, (1 - 2 \varepsilon + 3 \varepsilon \sin^2 v) \, dv$$

или, ако заменимо $\sin^2 v = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 v)$

$$ds = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) dv - \frac{3 a \varepsilon}{2} \cos 2 v \, dv$$

$$s = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) v - \frac{3 a \varepsilon}{4} \sin 2 v + C.$$

Ако означимо са s меридиански лук између географских ширина v и v', са S меридиански лук између географских ширина V и V', онда је

$$s = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (v' - v) - \frac{3 a \varepsilon}{4} (\sin 2 v' - \sin 2 v)$$

$$S = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (V' - V) - \frac{3 a \varepsilon}{4} (\sin 2 V' - \sin 2 V)$$

или, пошто трансформујемо на основу познате формуле

$$\sin 2 v' - \sin 2 v = 2 \sin (v' - v) \cos (v' + v),$$

$$s = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (v' - v) - \frac{3 a \varepsilon}{2} \sin (v' - v) \cos (v' + v)$$

$$S = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (V' - V) - \frac{3 a \varepsilon}{2} \sin (V' - V) \cos (V' + V).$$

Узмимо да је $v' - v = 1^0$ и $V' - V = 1^0$, да су s и S, дакле, меридиански луци за 1^0. Без осетне грешке можемо синусе тих лукова да заменимо самим луцима. Осим тога ставићемо $v' + v = 2 v_0$, $V' + V = 2 V_0$, где су v_0 и V_0 средње географске ширине лукова s и S. Последњи обрасци своде се сада на ове простије

$$s = a \, (v' - v) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3 \varepsilon}{2} \cos 2 \, v_0\right)$$

$$S = a \, (V' - V) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3 \varepsilon}{2} \cos 2 \, V_0\right),$$

одакле, с обзиром да је $v' - v = V' - V = 1^0$;

$$\frac{S}{s} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3\,\varepsilon}{2}\, cos\, 2\, V_0}{1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3\,\varepsilon}{2}\, cos\, 2\, v_0}.$$

Узев да је $V_0 > v_0$, у коме је случају и $S > s$, количник $\frac{S}{s}$ различан је од 1 за неку малу количину η:

$$\frac{1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3\,\varepsilon}{2}\, cos\, 2\, V_0}{1 - \frac{\varepsilon}{1} - \frac{\varepsilon}{2}\, cos\, 2\, v_0} = 1 + \eta,$$

одакле, занемаривши чланове са производом $\varepsilon\eta$,

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\, \frac{\eta}{cos\, 2\, v_0 - cos\, 2\, V_0}.$$

Према мерењима *Bouger*-а, *Condamine*-а и *Godin*-а у Перу год, 1735. и *Picard*-а код Amiens-а у Француској год. 1669., које је год. 1739. проверено од *Lacaille*-а, нађено је у Перу ($v_0 = 0^0\, 0'$), $s = 56753$ тоазе, код Amiens-а ($V_0 = 49^0\, 54'$), $S = 57060$ тоаза. Отуда следује

$$\frac{S}{s} = 1{,}00541, \quad \eta = 0{,}00541$$

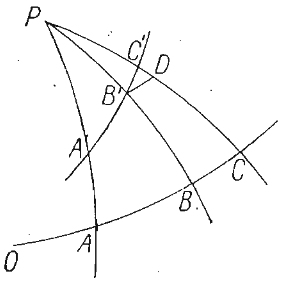
$$cos\, 2\, v_0 - sos\, 2\, V_0 = 1 + cos\, 80^0\, 12' = 1{,}170209,$$

а с овим

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\, \frac{0{,}00541}{1{,}170209} = \frac{1}{324}.$$

Према овоме се мала оса елиптичног меридиана има према његовој великој оси као 323 : 324.

81. Локсодрома на сфери. — *Линија* (двојаке кривине), која све меридиане сече под истим углом, зове се *локсодрома.* Она је пронађена од *Нонија* (Pedro Nunnez или Nonius, 1492—1577) год. 1546. Локсодрома је путања, којом плове бродови по мору. Брод, који би, пошав од једне тачке, пловио истим правцем ка полу, описивао би локсодрому и непрекидно се приближавао полу, као асимптотној тачци, не достигавши га никако. У *Меркатор*-овој пројекцији карата локсодрома се показује као права линија.



Сл. 60.

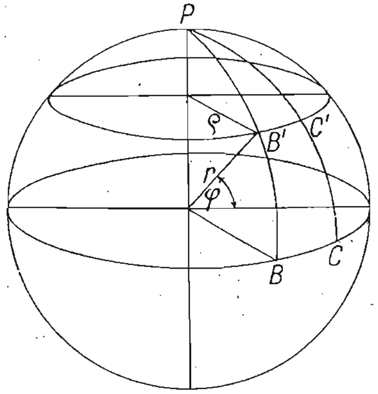
Нека је P северни пол, $A\,B\,C$ један део екватора, $A'\,B'\,C'$ локсодрома. Кроз тачке A' и B' повучени су меридиани $P\,A$ и $P\,B$. Први меридиан нека иде кроз тачку 0. Тада су географске координате тачака A' и B'

$$O\,A = \lambda_1, \quad A\,A' = \varphi_1, \quad O\,B = \lambda, \quad B\,B' = \varphi.$$

Означимо са r полупречник земље, са α угао под којим локсодрома сече меридиане. Пошав од тачке B' бесконачно приближној тачци C' на локсодроми, λ се мења за $d\lambda$, а φ за $d\varphi$, дакле $B\,C = d\,\lambda$, $C'D = d\varphi$. Повуцимо из B' упоредник $B'D$. Из правоуглог троугла $B'C'D$, у коме је $\sphericalangle B'D\,C' = 90^0$, $\sphericalangle B'C'D = \alpha$ читамо

$$B'D = C'D\,.\,tg\,\alpha = tg\,\alpha\,.\,d\varphi. \qquad \text{(I}$$

Пошто се луци $B'D$ и $B\,C = d\lambda$, као луци са једнаким углом код P, имају као њихови полупречници ϱ и r, дакле



Сл. 61.

$$B'D : d\lambda = \varrho : r$$

$$B'D = \frac{\varrho}{r}\, d\,\lambda,$$

а из слике 61. видимо да је $\varrho = r\, cos\,\varphi$, то је

$$B'D = cos\,\varphi\,.\,d\lambda$$

и онда према I)

$$cos\,\varphi\,.\,d\lambda = tg\,\alpha\,.\,d\varphi$$

$$d\lambda = tg\,\alpha\,.\,\frac{d\varphi}{cos\,\varphi}. \qquad \text{(II}$$

Ово је диференциална једначина локсодроме. Из ње следује

$$\lambda - \lambda_1 = tg\,\alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{cos\,\varphi}.$$

Овај ћемо интеграл извршити по упутству у чл. 15., тј. заменом

$$t = tg\,\frac{\varphi}{2}, \quad \text{одакле } d\varphi = \frac{2\,d\,t}{1 + t^2}, \quad cos\,\varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Тада је

$$\lambda - \lambda_1 = tg\,\alpha \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = 2\,tg\,\alpha \int\limits_{t_1}^{t} \frac{dt}{1-t^2} = tg\,\alpha \left[l \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right]_{t_1}^{t}$$ [1]

$$= tg\,\alpha \left[l \left(\frac{1 + tg\,\frac{\varphi}{2}}{1 - tg\,\frac{\varphi}{2}} \right) \right]_{\varphi_1}^{\varphi} = tg\,\alpha \,.\left[l\; tg \left(45^0 + \frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\varphi_1}^{\varphi}$$

$$\lambda - \lambda_1 = tg\,\alpha \left[l\; tg \left(45^0 + \frac{\varphi}{2} \right) - l\; tg \left(45^0 + \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \qquad \text{(III}$$

Овде су λ_1, φ_1 и λ, φ географске координате полазне и крајне тачке између којих брод плови, дакле познате количине. Помоћу добивеног обрасца III) израчунава си угао α, који одређује правац, којег се брод, помоћу компаса, има да држи у своме пловљењу.

---

[1] в. 1. Пример у чл. 8.

ДИФЕРЕНЦИАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Подела.

82. Ми увек замишљамо да је функција са њеном прапроменљивом или њеним прапроменљивама везана једначином. Ако се у тој једначини, осим функције и прапроменљивих, јављају само још константе, онда се таква једначина зове *коначна једначина*, зато што она садржи искључиво коначне количине, а не диференциале. Супротно коначним једначинама јесу *диференциалне једначине* у којима се, поред прапроменљивих и њихове функције, налази један или више диференциалних количника дотичне функције.

Код диф. једначина правимо разлику између *обичних* и *парциалних* диф. једначина. *Диференциална једначина* је *обична*, ако функција у њој зависи само од једне прапроменљиве и у једначини се, према томе, јављају диф. количници функције само у односу према оној једној прапроменљивој. Ако, пак, функција зависи од више прапроменљивих и у једначини има парциалних диф. количника, који су узети по разним прапроменљивама, онда се каже да је то *парциална диференциална једначина.*[1]

Диф. једначине (обичне и парциалне) делимо на диф. једначине првога, другога,... n-тога *реда.* Диф. једначина је n-тога реда, када се у њој јавља диф. количник n-тога ступња, а не вишега.

Осим овога правимо разлику између *линеарних* и *нелинеарних* диф. једначина. Диф. једначина је линеарна, ако су у њој функција и њени диф. количници само у првоме степену и ако се у њој не јављају производи из функције и њених диф. количника или производи из диф. количника.

А. Обичне диференциалне једначине.

83. Диференциалећи поступно n пута једначину, која осим променљивих x и y, садржи извесан број констаната добијамо нових n једначина од којих је у првој само диф. количник првога ступња, у

---

[1] Парциалне диф. једначине примењују се нарочито при решавању физикалних проблема. Код природних појава играју улогу прапроменљивих количина време и три координате у простору.

другој највиши диф. количник другога ступња итд. у последњој једначини највиши диф. количник n-тога ступња. Из ових тако добивени n једначина и оне задате (примитивне) једначине можемо да елиминујемо n (али не више) констаната и резултат је једна обична диф. једначина n-тога реда, која садржи n констаната мање но једначина од које смо пошли.

Првобитна једначина изражава извесну везу између x и y, на које постоји и она диф. једначина n-тога реда. Првобитна једначина зове се *интеграл* оне диф. једначине.

Из горе реченога следује да коначна једначина, која задовољава извесну диф. једначину n-тога реда, може да има n констаната, које се не јављају у диф. једначини, али не више од n. Ове n константе су потпуно произвољне, на случај да нам је дата само диф. једначина, а нису постављени никакви ближи услови, које треба да испуни интеграл задате диф. једначине. Првобитна или примитивна једначина, у којој се јављају n потпуно произвољних констаната, којих нема у диф. једначини, зове се *потпуни* или *општи интеграл* диф. једначине. Ако је, пак, у коначној једначини (која задовољава диф. једначину) мање од n произвољних констаната, онда се она зове *партикуларан интеграл* диф. једначине n-тога реда.

84. Узмимо једначину

1) $$F(x,\ y,\ c) = 0,$$

у којој се, поред променљивих x и y, јавља и једна произвољна константа c. Диференциалењем једначине 1) произилази

2) $$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

а елиминовањем константе c из 1) и 2) добијамо једначину

3) $$\phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

која, осим променљивих x и y, садржи диф. количник $\frac{dy}{dx}$. Ово је диференциална једначина *првога реда*, а једн. 1), која садржи једну произвољну константу, које нема у једн. 3), представља општи интеграл диф. једначине 3).

Примедба. Ако решимо једн. 1) по c, тј. ако је доведемо на вид

$$f(x,\ y) = c$$

и онда је диференциалимо добићемо у резултату

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

непосредно диф. једначину у којој се јављају x, y, $\frac{dy}{dx}$ и која не садржи константу c.

Пођимо од једначине

$$F(x,\ y,\ c,\ c') = 0,$$

која, осим променљивих x, y, има још две константе c и c'. Ако ову једначину диференциалимо два пута, па онда из тих двеју добивених и оне задате једначине елиминујемо константе c и c' добићемо као резултат једначину вида

$$\phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

у којој су променљиве x, y, прва и друга изводна, а која не садржи константе c и c', онда је једна диф. једначина *другога реда*, а њен општи интеграл има две произвољне константе. Итд. итд.

Уопште диф. једначина n-тога реда

$$\phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

има као општи интеграл једначину вида

$$F(x,\ y,\ c,\ c',\ldots\ c^{n-1}) = 0$$

у којој је n произвољних констаната c, c', $\ldots\ c^{(n-1)}$.

85. Узмимо да су нам дате две једначине са три променљиве (од којих је, дакле, једна независна, а остале две њене функције) и двема константама, нпр. једначине

$$F_1(x,\ y,\ z,\ c,\ c') = 0,$$
$$F_2(x,\ y,\ z,\ c,\ c') = 0.$$

Диференциалењем следује

$$\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Ако из ове четири једначине, елиминовањем, образујемо две једначине, у којима се не јављају константе c и c', онда се тако добивене једначине зову две *симултане диференциалне једначине.* Њихови су општи интеграли оне две задате једначине.

На исти начин, ако имамо три једначине са четири променљиве количине (тако да је, опет, само једна од њих независно променљива, а остале три њене функције) и три произвољне константе, нпр. једначине

$$F_1(x, y, z, t, c, c', c'') = 0,$$
$$F_2(x, y, z, t, c, c', c'') = 0,$$
$$F_3(x, y, z, t, c, c', c'') = 0,$$

па их диференциалимо

$$\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF_1}{dt}\frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF_2}{dt}\frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF_3}{dx} + \frac{dF_3}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_3}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF_3}{dt}\frac{dt}{dx} = 0$$

и онда из ових шест једначина образујемо, елиминовањем, нове три, у којима нема оних констаната c, c', c'', добијамо три симултане диференциалне једначине, чији су интеграли оне задате три једначине.

Итд. итд.

Сасвим уопште, ако имамо n једначина са $n+1$ променљивом и n констаната и диференциалимо све једначине, добићемо укупно $2n$ једначина из којих, елиминовањем, можемо да образујемо нових n једначина, у којима се не јавља ниједна од оних n констаната. Добивене једначине представљају n симултаних диференциалних једначина, чији су интеграли оне n задате једначине са n произвољних констаната.

I.

Диференциалне једначине првога реда.

1. Одвајање променљивих.

86. О одвајању променљивих уопште. — У случајевима, где се задата једначина

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

може да доведе на вид

$$f(x)\,dx = \varphi(y)\,dy,$$

кажемо да су променљиве одвојене и таква се једначина може одмах да интеграли:

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(y)\,dy.$$

Тако нпр. простим операцијама доводимо једначину $Ydx + Xdy = 0$ на вид $\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0$, а једначину $X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0$ на

$$\frac{X_1\,dx}{X_2} + \frac{Y_2\,dy}{Y_1} = 0,$$

где су X, X_1, X_2 функције x-а, Y, Y_1, Y_2 функције y-а.

1. Пример.

$$xy\,dx - (x-a)(y-b)\,dy = 0,$$

одакле

$$\frac{x\,dx}{x-a} = \frac{(y-b)\,dy}{y}$$

или

$$\left(1 + \frac{a}{x+a}\right)dx = \left(1 - \frac{b}{y}\right)dy,$$

које, кад интегралимо, даје

$$x + a\,l(x-a) = y - b\,ly + c$$

или

$$l\left[\frac{(x-a)^a\,y^b}{C}\right] = y - x$$

и најзад

$$(x-a)^a\,y^b = C e^{y-x}.$$

2. Пример.

$$(y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 - yx^2)\,dy = 0,$$

одакле

$$\frac{1+x}{x^2}\,dx = \frac{y-1}{y^2}\,dy$$

$$\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$-\frac{1}{x} + lx = ly + \frac{1}{y} + C$$

$$l\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x+y}{xy} + C.$$

3. Пример.

$$\frac{dy}{dx} + b^2 y^2 = a^2,$$

одакле

$$dy = (a^2 - b^2 y^2)\,dx$$

или

$$dx = \frac{dy}{a^2 - b\,y^2}$$

$$x = \int\frac{dy}{a^2 - b^2 y^2} = \frac{1}{ab}\int\frac{d\left(\frac{b}{a}y\right)}{1 - \left(\frac{b}{a}y\right)^2} = \frac{1}{2ab}\,l\left(\frac{1 + \frac{b}{a}y}{1 - \frac{b}{a}y}\right) + C$$

(в. 1. пример чл. 8.) или најзад

$$2abx = l\left(\frac{a+by}{a-by}\right) + C.$$

4. *Пример.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{x^2+1},$$

одакле

$$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{dy}{y^2+1}$$

$$arc\, tg\, x = arc\, tg\, y + C$$

$$arc\, tg\, x - arc\, tg\, y = C$$

$$tg\,(arc\, tg\, x - arc\, tg\, y) = c$$

$$\frac{x-y}{1+xy} = c.$$

5. *Пример.*

$$a x \frac{dy}{dx} + 2y = xy\frac{dy}{dx},$$

одакле

$$2\frac{dx}{x} = \frac{y-a}{y} dy$$

$$2\, l x = \int \left(1 - \frac{a}{y}\right) dy$$

$$l x^2 = y - a\, l y + C$$

$$l\,(x^2 y^a) = y + C$$

$$x^2 y^a = c\, e^y.$$

6. *Пример.*

$$\frac{dy}{dx} + e^x y = e^x y^2,$$

$$dy = e^x (y^2 - y)\, dx$$

$$e^x\, dx = \frac{dy}{y^2 - y}$$

$$e^x = \int \frac{dy}{y^2 - y}.$$

Овде имамо да интегралимо једну чисто разломљену функцију $\frac{\varphi(y)}{f(y)} = \frac{}{y^2}$ коју, према коренима једначине $f(y) = y^2 - y = 0$, а то су $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$, лажемо на просте разломке $\frac{\varphi(y)}{f(y)} = \frac{A}{y-y_1} + \frac{B}{y-y_2}$, где је

$$A = \left[\frac{\varphi(y)}{f'(y)}\right]_{y=y_1} = \left[\frac{1}{2y-1}\right]_{y=0} = -1, \quad B = \left[\frac{\varphi(y)}{f'(y)}\right]_{y=y_2} = \left[\frac{1}{2y-1}\right]_{y=1} = 1,^{1)}$$

дакле

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}$$

---

[1]) в. Д. Р. формула 5 чл. 93. и формула 2 чл. 95.

и према томе

$$e^x = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1}$$

$$= -ly + l\,(y-1) + C$$

$$= l\left(\frac{y-1}{y}\right) + C.$$

7. *Пример.*

$$x^2\, dy = (y+a)\, dx,$$

одакле

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y+a}$$

$$C - \frac{1}{x} = l\,(y+a)$$

$$y + a = e^{c - \frac{1}{x}}.$$

8. *Пример.*

$$x\,y\,dx = \frac{dy}{sin\, x},$$

одакле

$$\frac{dy}{y} = x\, sin\, x\, dx$$

$$ly = \int x\, sin\, x\, dx$$

$$= -x\, cos\, x + sin\, x + C$$

(в. формулу 1 у чл. 22.).

87. Особени случај. — Код неких се функција може да изврши одвајање променљивих завођењем нове променљиве. Кад нпр. у диф. једначини

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ставимо

$$\frac{y}{x} = t, \text{ дакле } dy = x\,dt + t\,dx$$

задата се једначина претвара у ову

$$x\,dt + t\,dx = f(t)\, dx$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$$

у којој су једначини променљиве количине x и t одвојене.

88. Одвајање променљивих код хомогених једначина. — Код хомогених диф. једначина одвајање променљивих може увек да се изврши.

Диф. једначина је хомогена, кад су сви чланови у њој, који су жени са dx и dy, једне исте димензије.

Претпоставимо да су у задатој једначини

$$1)\qquad f(x,\ y)\,dx + \varphi(x,\ y)\,dy = 0$$

функције f и φ хомогене, нпр. k-тога степена и ставимо

$$2)\qquad y = xt,\ \text{дакле}\ dy = x\,dt + t\,dx.$$

С овим, а услед хомогености функција f и φ, на основу које је

$$f(x,\ y) = f(x,\ xt) = x^k f(t),$$
$$\varphi(x,\ y) = \varphi(x,\ xt) = x^k \varphi(t),$$

задата се једначина претвара у ову

$$x^k\left[f(t)\,dx + \varphi(t)(x\,dt + t\,dx)\right] = 0$$

или кад средимо

$$3)\qquad x^k\left[f(t) + t\varphi(t)\right]dx + x^{k+1}\varphi(t)\,dt = 0,$$

одакле

$$4)\qquad \frac{dx}{x} = -\frac{\varphi(t)\,dt}{f(t) + t\varphi(t)},$$

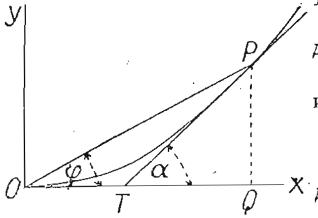
$$5)\qquad lx = -\int\frac{\varphi(t)\,dt}{f(t) + t\varphi(t)} + C,\quad x = c\,e^{-\int\frac{\varphi(t)\,dt}{f(t)+t\varphi(t)}}.$$

Најзад, кад у овоме последњем ресултату заменимо $t = \frac{y}{x}$, бијамо интеграл задате хомогене диф. једначине.

Примедба. Лако је увидити да је овим обухваћен и онај случ прошломе члану.

89. Примери хомогених диф. једначина. —

1. Примéр. Да се нађу линије за које је угао, који дирка линије са x-осом два пута већи од угла, који чини потега додчирне таке са x-



Сл. 62.

Треба да је

$$\alpha = 2\varphi,$$

дакле

$$tg\,\alpha = \frac{2\,tg\,\varphi}{1 - tg^2\varphi}$$

и с обзиром на то што је

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx},\quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}$$

диф. једначина линија, које тражимо, гласи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Кад ставимо $y = tx$, дакле $dy = x\,dt + t\,dx$ диф. једначина постаје

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{2t}{1 - t^2},$$

одакле

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - t^2)\,dt}{t + t^3}\quad \text{или}\quad \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{1 + t^2}\right)dt,^{1)}$$

које, када интегралимо, даје

$$lx = lt - l(1 + t^2) + C\ \text{или}\ \frac{x}{t}(1 + t^2) = C$$

Најзад, кад заменимо $t = \frac{y}{x}$, следује једначина

$$x^2 + y^2 - Cy = 0$$

оних линија за које је $\alpha = 2\varphi$. Добивена једначина представља кругове, који пролазе кроз почетак координата, а средиште им је на y-оси.

Примедба. До истога решења долазимо заменом

$$x = yt,\quad dx = y\,dt + t\,dy.$$

Диф. једначина

$$(x^2 - y^2)\,dy = 2\,xy\,dx$$

претвара се у нову

$$(t^2 - 1)\,dy = 2t(y\,dt + t\,dy)$$

или

$$2ty\,dt + (t^2 + 1)\,dy = 0,$$

која, када се одвоје промењљиве, добија вид

$$\frac{dy}{y} + \frac{2t\,dt}{t^2 + 1} = 0$$

и пошто је интегралимо

$$ly + l(t^2 + 1) = C\ \text{или}\ y(t^2 + 1) = C$$

и заменимо $t = \frac{x}{y}$ добијамо ресултат

$$x^2 + y^2 - Cy = 0,$$

који смо горе добили.

---

[1] Разлагањем чисто разломљене функције $\frac{1 - t^2}{t + t^3}$ на просте разломке према коренима једначине $t^3 + t = 0$, а то су $t_1 = 0$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$, на начин $\frac{1 - t^2}{t + t^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - i} + \frac{C}{t + i}$. Овде је

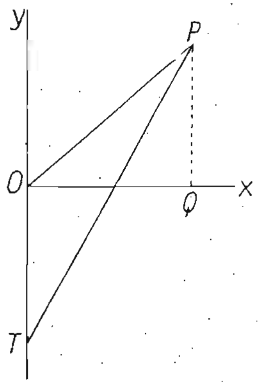
$$A = \left[\frac{1 - t^2}{1 + 3t^2}\right]_{t=0} = 1,\quad B = \left[\frac{1 - t^2}{1 + 3t^2}\right]_{t=i} = -1,\quad C = \left[\frac{1 - t^2}{1 + 3t^2}\right]_{t=-i} = -1,$$

дакле

$$\frac{1 - t^2}{t + t^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t - i} - \frac{1}{t + i} = \frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2 + 1}$$

(в. Напомену у чл. 99. Д. Р.).

2. *Пример.* Да се одреди линија за коју је



Сл. 63.

$$OP^2 = OT^2,$$

ако са PT означимо дирку линије у тачци P.

Пре свега је

$$OP = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Једначина дирке гласи

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

За $X = 0$ добијамо одавде Y, тј.

$$OT = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Задатак захтева да је

$$y - x\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ова је једначина хомогена. Ставићемо

$$y = xt, \quad dy = xdt + tdx$$

и тиме претварамо диф. једначину у ову

$$\frac{dx}{x} = \pm\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

одакле интеграљењем

$$lx = \pm l\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C$$

(види чл. 13. Пример 1.).

Према двојакоме знаку имамо два случаја. Први:

$$lx = -l\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C$$

или

$$x\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C,$$

где, кад заменимо $t = \frac{y}{x}$, добијамо као решење

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = C \text{ или } x^2 = C^2 - 2Cy$$

а то је једначине параболе.

Друго:

$$lx = l\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C$$

или

$$x = C\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$$

и кад заменимо $t = \frac{y}{x}$

$$x^2 = C\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) \text{ или } (x^2 - Cy)^2 = C^2(x^2+y^2).$$

Линија је четвртога степена.

3. *Пример.*

$$(x - ay)\,dx + (y + ax)\,dy = 0.$$

Заменом $y = xt$ сводимо једначину на ову

$$\frac{dx}{x} + \frac{t+a}{1+t^2}\,dt = 0,$$

одакле

$$lx = \int\frac{t+a}{1+t^2}\,dt = C$$

или[1]

$$lx + \frac{1}{2}\,l(1+t^2) + a \,.\, arc\,tg\,t = C$$

и пошто заменимо $t = \frac{y}{x}$

$$l\sqrt{x^2+y^2} + a \,.\, arc\,tg\,\frac{y}{x} = C$$

4. *Пример.*

$$(x^2+y^2)\,dx - 2xydy = 0.$$

Заменом $y = tx$ добијамо

$$(1+t^2)\,dx - 2t(xdt + tdx) = 0,$$

одакле

$$(1 - t^2)\,dx = 2txdt$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2tdt}{1-t^2},$$

а интеграљењем

$$lx = -l(1 - t^2) + C$$

$$= -l\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C$$

или

$$l\left(\frac{x^2-y^2}{x}\right) = C$$

$$x^2 - y^2 = cx.$$

5. *Пример.*

$$y^2 + (xy + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

или

$$y^2dx + (xy + x^2)\,dy = 0,$$

које се, после замене $y = tx$, претвара у диф. једначину

$$t^2dx + (t+1)(tdx + xdt) = 0$$

или кад средимо

$$(2t^2 + t)\,dx + (t+1)\,xdt = 0$$

и одвојимо промењиве

$$\frac{dx}{x} = -\frac{t+1}{2t^2+t}\,dt$$

$$lx = -\int\frac{(t+1)\,dt}{2t^2+t}.$$

---

[1] $$\int\frac{t+a}{1+t^2}\,dt = \int\frac{tdt}{1+t^2} + a\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2} + a \,.\, arc\,tg\,t + C$$

$$= \frac{1}{2}\,l(1+t^2) + a \,.\, arc\,tg\,t + C$$

$$= l\sqrt{1+t^2} + a \,.\, arc\,tg\,t + C.$$

На десној страни имамо интеграл чисто разломљене функције, коју разлаже $\frac{t+1}{2t^2+t} = \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2}$. Из $2t^2+t=0$ налазимо корене $t_1 = 0$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. За A и B имамо (в. Д. Р. формула 5 чл. 93. и формула 2 чл. 95.)

$$A = \left[\frac{t+1}{4t+1}\right]_{t=0} = 1, \quad B = \left[\frac{t+1}{4t+1}\right]_{t=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2},$$

и према томе

$$\frac{t+1}{2t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t+1}$$

$$lx = -\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t+1}\right)dt = -lt + \frac{1}{2}\,l\,(2t+1) + C$$

$$= l\left(\frac{\sqrt{2t+1}}{t}\right) + C = l\left(\frac{\sqrt{2xy+x^2}}{y}\right) + C$$

или простије

$$xy^2 = c\,(2y+x).$$

6. Пример.

$$(xy - x^2)\frac{dy}{dx} = y^2$$

или

$$(xy - x^2)\,dy = y^2dx,$$

које сводимо на диф. једначину

$$(t-1)\,(tdx + xdt) = t^2dx,$$

која, скраћена и сређена, гласи

$$tdx = (t-1)\,xdt,$$

одакле

$$\frac{dx}{x} = \frac{t-1}{t}\,dt = dt - \frac{dt}{t}.$$

Интегралењем следује

$$lx = t - lt + C$$

или простије

$$l\,(tx) = t + C$$

$$ly = \frac{y}{x} + C$$

или најзад

$$y = ce^{\frac{y}{x}}.$$

7. Пример.

$$x + y\frac{dy}{dx} = 2y$$

или

$$ydy = (2y - x)\,dx.$$

Ово сводимо на диф. једначину

$$t\,(xdt + tdx) = (2t-1)\,dx$$

или

$$(t^2 - 2t + 1)\,dx = -txdt,$$

одакле

$$\frac{dx}{x} = -\frac{tdt}{(t-1)^2}$$

$$lx = -\int\frac{tdt}{(t-1)^2}.$$

Заменом $t - 1 = z$ добијамо

$$\int\frac{tdt}{(t-1)^2} = \int\frac{z+1}{z^2}\,dz = \int\frac{dz}{z} + \int z^{-2}\,dz = lz - \frac{1}{z} = l\,(t-1) - \frac{1}{t-1}.$$

Дакле

$$lx = -l\,(t-1) + \frac{1}{t-1} + C$$

или

$$l\,[x\,(t-1)] = \frac{1}{t-1} + C$$

$$l\,(y-x) = \frac{x}{y-x} + C.$$

8. Пример.

$$(x+y)\frac{dy}{dx} + x - y = 0$$

или

$$(x+y)\,dy + (x-y)\,dx = 0,$$

које се претвара у

$$(1+t)\,(xdt + tdx) + (1-t)\,dx = 0$$

или простије

$$(1+t^2)\,dx + x\,(1+t)\,dt = 0,$$

одакле

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1+t}{1+t^2}\,dt,$$

$$lx = -\int\frac{1+t}{1+t^2}\,dt = -\int\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2}\right)dt = -\,arc\,tg\,t - \frac{1}{2}\,l\,(1+t^2) + C$$

$$lx = -\,arc\,tg\,\frac{y}{x} - l\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} + C$$

или најзад

$$l\sqrt{x^2+y^2} + arc\,tg\,\frac{y}{x} + C.$$

9. Пример.

$$xdx + ydy = 2nydx$$

или сређено

$$(x - 2ny)\,dx + ydy = 0.$$

Ово нас доводи диф. једначини

$$(1 - 2nt)\,dx + t\,(xdt + tdx) = 0,$$

која сређена гласи

$$(1 - 2nt + t^2)\,dx + txdt = 0,$$

одакле, одвајањем промењљивих, следује

$$\frac{dx}{x} = -\frac{tdt}{1 - 2nt + t^2},$$

а интегралењем

$$lx = -\int\frac{tdt}{1 - 2nt + t^2}. \quad \text{Итд.}$$

За $n = 1$ имамо случај у 7. примеру.

10. Пример.

$$\int y\;dx = \frac{y^3}{x}.$$

Диференциалењем изводимо одавде диф. једначину

$$y\,dx = \frac{3\,xy^2\,dy - y^3\,dx}{x^2}$$

или

$$\left(y + \frac{y^3}{x^2}\right) dx = \frac{3\,y^2}{x}\,dy,$$

које доводимо на

$$(1 + t^2)\,dx = 3\,t\,(x\,dt + t\,dx)$$

$$(1 - 2\,t^2)\,dx = 3\,tx\,dt$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{3\,t\,dt}{1 - 2\,t^2} = -\,\frac{3}{4}\;\frac{d\,(1 - 2\,t^2)}{1 - 2\,t^2},$$

одакле интегралењем

$$lx = -\,\frac{3}{4}\,l\,(1 - 2\,t^2) + C$$

$$x\left(1 - 2\,\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{4}} = c$$

или најзад

$$(x^2 - 2\,y^2)^3 = c\,x^2.$$

11. Пример.

$$(mx + ny)\,dx + (px + qy)\,dy = 0.$$

Имамо сада

$$(m + nt)\,dx + (p + qt)\,(xdt + tdx) = 0$$

или кад средимо

$$[m + (n + p)\,t + qt^2]\,dx + (p + qt)\,xdt = 0,$$

одакле

$$\frac{dx}{x} = -\,\frac{(p + qt)\,dt}{m + (n + p)\,t + qt^2}$$

$$lx = -\int\frac{(p + qt)\,dt}{m + (n + p)\,t + qt^2}.\quad \text{Итд.}$$

12. Пример.

$$(x - y)\,dx = xdy.$$

За t имамо диф. једначину

$$(1 - 2\,t)\,dx = xdt,$$

одакле

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1 - 2\,t} = -\,\frac{1}{2}\;\frac{d\,(1 - 2\,t)}{1 - 2\,t}$$

$$lx = -\,\frac{1}{2}\,l\,(1 - 2\,t) + C$$

$$lx\sqrt{1 - 2\,\frac{y}{x}} = C$$

или најзад

$$x\,(x - 2\,y) = c.$$

90. Особени случај нехомогене диф. једначине. — Једначина

1) $$(a + bx + cy)\,dx + (a' + b'x + c'y)\,dy = 0$$

није хомогена, али је можемо начинити хомогеном помоћу линеарне субституције

2) $$a + bx + cy = u, \qquad a' + b'x + c'y = v,$$

дакле

$$du = b\,dx + c\,dy, \qquad dv = b'\,dx + c'\,dy$$

$$dx = \frac{c'\,du - c\,dv}{b\,c' - b'\,c}, \qquad dy = \frac{b\,dv - b'\,du}{b\,c' - b'\,c}. \tag*{(3}$$

Овим се задата диф. једначина претвара у ову хомогену једначину

$$(c'u - b'\,v)\,du + (b\,v - c\,u)\,dv = 0. \tag*{(4}$$

1. Напомена. Као што видимо из 3) трансформација постаје немогућа, ако је

$$b\,c' - b'\,c = 0.$$

Но пошто је сада $c' = \dfrac{b'\,c}{b}$ диф. једн. 1) гласи

$$b\,(a + b\,x + c\,y)\,dx + [a'\,b + b'\,(b\,x + cy)]\,dy = 0.$$

Заменом

$$b\,x + c\,y = t, \;\text{ дакле }\; dy = \frac{'dt - b\,dx}{c}$$

једначина са претвара у

$$b\,(a + t)\,dx + (a'\,b + b'\,t)\,\frac{dt - b\,dx}{c} = 0,$$

одакле

$$b\,dx = \frac{(a'\,b + b'\,t)\,dt}{a'\,b - a\,c + (b' - c)\,t}$$

$$b\,x = \int\frac{(a'\,b + b'\,t)\,dt}{a'\,b - a\,c + (b' - c)\,t}.$$

Пошто интеграл на десној страни извршимо и ставимо $t = bx + cy$ добијамо решење задате диф, једначине 1).

Ако је, осим $b\,c' - b'c = 0$, још и $c' = 0$, тако да је $b'\,c = 0$, онда мора да је или $b' = 0$ или $c = 0$. У једном и у другом случају промењиве се могу да раздвоје и интегралење једн. 1) може да се изврши.

2. *Напомена.* Једначина 1) може да се начини хомогеном и на овај начин. Ставимо

$$x = \alpha + \xi, \qquad y = \beta + \eta \tag*{(II}$$

услед чега задата једначина постаје

$$(a + b\,\alpha + c\beta + b\xi + c\eta)\,d\xi + (a' + b'\alpha + c'\beta + b'\xi + c'\,\eta)\,d\eta = 0,$$

које, кад одредимо α и β из погодбени једначина

$$a + b\,\alpha + c\,\beta = 0$$
$$a' + b'\alpha + c'\,\beta = 0$$

дакле

$$\alpha = \frac{a'c - a\,c'}{b\,c' - b'c}, \quad \beta = \frac{ab' - a'b}{b\,c' - b'\,c} \tag*{(III}$$

води хомогеној једначини

$$\text{IV)}\qquad (b\xi + c\eta)\, d\xi + (b'\xi + c'\eta)\, d\eta = 0$$

(в. 11. пример у прошлом члану).

Из образаца III) видимо да иста примедба, коју смо учинили у прошлој Напомени, важи и код ове трансформације.

Пример.

$$(2y - 7x + 7)\, dx + (7y - 3x + 3)\, dy = 0.$$

Заменом

$$3y - 7x + 7 = u, \qquad 7y - 3x + 3 = v$$

$$3\,dy - 7\,dx = du \qquad 7\,dy - 3\,dx = dv,$$

$$dx = \frac{3\,dv - 7\,du}{40}, \qquad dy = \frac{7\,dv - 3\,du}{40}$$

произилази ова хомогена диф. једначина

$$u\,\frac{3\,dv - 7\,du}{40} + v\,\frac{7\,dv - 3\,du}{40} = 0$$

или

$$-(7u + 3v)\, du + (3u + 7v)\, dv = 0,$$

која се кад ставимо $v = tu$, претвара у

$$7\,(t^2 - 1)\, du + (3 + 7t)\, u\,dt = 0,$$

одакле

$$\frac{du}{u} = -\frac{(3 + 7t)\, dt}{7\,(t^2 - 1)} = -\frac{5}{7}\,\frac{dt}{t - 1} - \frac{2}{7}\,\frac{dt}{t + 1}\ ^{1)}$$

$$lu = -\frac{5}{7}\, l\,(t - 1) - \frac{2}{7}\, l\,(t + 1) + C$$

$$= -l\sqrt[7]{(t - 1)^5\,(t + 1)^2} + C$$

$$l\,[u\,\sqrt[7]{(t - 1)^5\,(t + 1)^2} = C$$

$$u\sqrt[7]{\left(\frac{v}{u} - 1\right)^5\left(\frac{v}{u} + 1\right)^2} = c$$

$$(v - u)^5\,(v + u)^2 = Const.$$

$$(x + y - 1)^5\,(y - x + 1)^2 = Const.$$

---

[1] Добијамо разлагањем $\frac{3 + 7t}{7\,(t^2 - 1)} = \frac{A}{7\,(t - 1)} + \frac{B}{7\,(t + 1)}$ према коренима $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$ једначине $t^2 - 1 = 0$, а на основу тога што је

$$A = \left[\frac{3 + 7t}{2t}\right]_{t = 1} = 5, \qquad B = \left[\frac{3 + 7t}{2t}\right]_{t = -1} = 2$$

(Д. Р. формула 5 чл. 93. и формула 2 чл. 95.).

91. Одвајање промењивих код линеарних диф. једначина. — Општа форма линеарне диф. једначине првога реда јесте

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$

Заменом

$$y = uv \tag{2}$$

претварамо једначину 1) у ову

$$v\,\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + vf(x)\right] = \varphi(x). \tag{3}$$

Један од фактора u или v можемо да узмемо произвољно. Определимо v на начин да је

$$\frac{dv}{dx} + v\,f(x) = 0,$$

дакле

$$\frac{dv}{v} = -f(x)\,dx, \quad lv = -\int f(x)\,dx,$$

$$v = e^{-\int f(x)\,dx}\ ^{1)} \tag{4}$$

Једначина 3) своди се на ову једначину са свега два члана

$$v\,\frac{du}{dx} = \varphi(x). \tag{5}$$

Одавде следује (с обзиром на 4)

$$du = e^{\int f(x)\,dx}\,.\,\varphi(x)\,dx$$

$$u = \int e^{\int f(x)\,dx}\,.\,\varphi(x)\,dx + C. \tag{6}$$

На основу добивених вредности под 4) и 6), а с обзиром на замену 2), налазимо следеће решење задате диф. једначине

$$y = \left[\int e^{\int f(x)\,dx}\,.\,\varphi(x)\,dx + C\right] e^{-\int f(x)\,dx}. \tag{7}$$

92. Друга метода за линеарне диф. једначине првога реда. — Узмемо опет једначину

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$

---

[1] Интегралу није потребно додавати константу, јер је за нашу циљ довољно да добијемо ма какву партикуларну вредност, која задату једначину своди на вид 5).

Решимо прво хомогену једначину

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = 0.$$

Из ње слдеује

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)\,dx$$

2) $$y = K e^{-\int f(x)\,dx}.$$

Ову константу K гледаћемо да определимо тако да решењем 2) буде задовољена задата диф. једначина.

Сматравша K као функцију x-а добијамо из 2)

$$\frac{dy}{dx} = -Kf(x)\,e^{-\int f(x)\,dx} + \frac{dK}{dx}\,e^{-\int f(x)\,dx},$$

$$y\,f(x) = Kf(x)\,e^{-\int f(x)\,dx},$$

које, кад саберемо и узмемо у обзир једначину 1), даје

$$\frac{dK}{dx}\,e^{-\int f(x)\,dx} = \varphi(x),$$

одакле

3) $$K = \int \varphi(x)\,e^{\int f(x)\,dx}\,dx + C.$$

Према обрасцима 2) и 3) следује решење задате диф. једначине

4) $$y = \left[\int \varphi(x)\,e^{\int f(x)\,dx}\,dx + C\right] e^{-\int f(x)\,dx}.$$

Ова метода решавања зове се *вариациа констаната*.

93. Једначине, које могу да се сведу на линеарне једначине.

— Дата је *Бернули*-ева једначина

1) $$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = y^n\,\varphi(x),$$

која, кад се напише

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}f(x) = \varphi(x)$$

и кад ставимо

2) $$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z, \text{ дакле } \frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

добија вад линеарне једначине

3) $$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,z\,f(x) = \varphi(x)$$

и као таква може да се интеграли.

94. Продужење чл. 93.

— На једначину

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = y^n\,\varphi(x) \tag{1}$$

може да се примени метода, коју смо показали у чл. 91. Ако ставимо

$$y = uv \tag{2}$$

једн. 1) добија вид

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + vf(x)\right) = u^n v^n\,\varphi(x). \tag{3}$$

Определујући v из

$$\frac{dv}{dx} + v\,f(x) = 0,$$

дакле

$$v = e^{-\int f(x)\,dx} \tag{4}$$

једн. 3) се своди на ову

$$\frac{du}{dx} = u^n v^{n-1}\,\varphi(x) \tag{5}$$

из које даље следује (с обзиром на 4)

$$\frac{du}{u^n} = v^{n-1}\,\varphi(x)\,dx = e^{(1-n)\int f(x)\,dx}\,.\,\varphi(x)\,dx,$$

$$u^{1-n} = (1-n)\left[\int e^{(1-n)\int f(x)\,dx}\,.\,\varphi(x)\,dx + C\right]. \tag{6}$$

На основу обрасца 4) јесте

$$v^{1-n} = e^{(n-1)\int f(x)\,dx}$$

и с обзиром на замену 2) $y^{1-n} = u^{1-n}\,v^{1-n}$, дакле

$$y^{1-n} = (1-n)\left[\int e^{(1-n)\int f(x)\,dx}\,.\,\varphi(x)\,dx + C\right] e^{(n-1)\int f(x)\,dx}. \tag{7}$$

95. Примери линеарних једначина. —

1. Пример.

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3.$$

Заменом

$$y = uv$$

задата се једначина претвара у ову

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + v\right) = x^3$$

и ми је растварамо на ове две

$$\frac{dv}{dx} + v = 0, \text{ одакле } \frac{dv}{v} = -\,dx,\ v = e^{-x} \text{ и}$$

$$v\frac{du}{dx} = x^3 \text{ или } du = x^3 e^x\,dx,\; u = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$ 1)

С овим имамо решење $y = uv$

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + Ce^{-x}.$$

Решење вариацијом констананата.

Из хомогене једначине

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

следује

$$y = Ke^{-x}.$$

Сматравши K као функцију x-а добијамо

$$\frac{dy}{dx} = -Ke^{-x} + e^{-x}\frac{dK}{dx},$$

одакле

$$e^{-x}\frac{dK}{dx} = \frac{dy}{dx} + Ke^{-x} = x^3$$

$$dK = e^x \,.\, x^3\,dx,\; K = \int e^x x^3\,dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

и према томе

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + Ce^{-x}.$$

2. *Пример.*

$$\frac{dy}{dx} + ay = sin\, x.$$

Решимо вариацијом констананата. Из хомогене једначине

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

следује

$$y = Ke^{-ax}.$$

Одавде добијамо диференциалењем

$$\frac{dy}{dx} = -Kae^{-ax} + e^{-ax}\frac{dK}{dx},$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} + Kae^{-ax} = e^{-ax}\frac{dK}{dx} = sin\, x,$$

$$dK = e^{ax}\, sin\, x\, dx,$$

$$K = \int e^{ax}\, sin\, x\, dx = \frac{e^{ax}(a\, sin\, x - cos\, x)}{a^2 + 1} + C$$ 2)

и најзад

$$y = \frac{a\, sin\, x - cos\, x}{a^2 + 1} + Ce^{-ax}.$$

---

1) Види чл. 7. Пример 2.

2) Види чл. 25. формула 2.

3. *Пример.*

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = a$$

или кад је доведемо на форму једн. 1) чл. 91.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 + x^2}y = \frac{a}{1 + x^2}.$$

Овде је

$$f(x) = -\frac{x}{1 + x^2}, \qquad \varphi(x) = \frac{a}{1 + x^2}$$

и на основу формуле 7) чл. 91.

$$y = \left(\int \frac{a}{1 + x^2} e^{-\int\frac{x\,dx}{1 + x^2}}\,dx + C\right) e^{\int\frac{x\,dx}{1 + x^2}}$$

$$= \left(\int \frac{ae^{-l\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2}\,dx + C\right) e^{l\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \left(\int \frac{a\,dx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + C\right)\sqrt{1 + x^2}.$$

$$= \left(\frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}} + C\right)\sqrt{1 + x^2} = ax + C\sqrt{1 + x^2}.$$

4. *Пример.*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3,$$

дакле

$$f(x) = -\frac{2}{x + 1}, \qquad \varphi(x) = (x + 1)^3$$

и према формули 7) чл. 91.

$$y = \left(\int (x + 1)^3 e^{-\int\frac{2\,dx}{x + 1}}\,dx + C\right) e^{\int\frac{2\,dx}{x + 1}}$$

$$= \left(\int (x + 1)^3 e^{-2\,l\,(x + 1)}\,dx + C\right) e^{2\,l\,(x + 1)}$$

$$= \left(\int (x + 1)^3 \frac{1}{(x + 1)^2}\,dx + C\right)(x + 1)^2$$

$$= \left[\frac{(x + 1)^2}{2} + C\right](x + 1)^2$$

или

$$2y = (x + 1)^4 + c(x + 1)^2.$$

5. *Пример.*

$$\frac{dy}{dx} + y\, tg\, x = \frac{1}{cos\, x}.$$

Овде је

$$f(x) = tg\, x, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{cos\, x}$$

и на основу формуле 7) чл. 91.

$$y = \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\int tg\, x \,.\, dx} dx + C\right) e^{-\int tg\, x \,.\, dx}\ ^{1)}$$

$$= \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{-l \cos x} dx + C\right) e^{l \cos x}$$

$$= \left(\int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx + C\right) \cos x = \cos x \,(tg\, x + C),$$

дакле

$$y \sin x + C \cos x.$$

6. *Пример.*

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin 2x.$$

С обзиром да је

$$f(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = \sin 2x$$

даје формула 7) чл. 91.

$$y = \left(\int \sin 2x\, e^{\int \cos x \,.\, dx} dx + C\right) e^{-\int \cos x \,.\, dx}$$

$$= \left(\int \sin 2x\, e^{\sin x} dx + C\right) e^{-\sin x}.$$

Делимичним иптетралењем налазимо

$$\int \sin 2x\, e^{\sin x} dx = 2 \int \sin x \cos x\, e^{\sin x} dx = 2 \int \sin x\, e^{\sin x} d \sin x$$

$$= 2 \int \sin x\, d\, e^{\sin x} = 2 \sin x\, e^{\sin x} - 2 \int e^{\sin x} \cos x\, dx$$

$$= 2 \sin x\, e^{\sin x} - 2 \int e^{\sin x} d \sin x$$

$$= 2 \sin x\, e^{\sin x} - 2\, e^{\sin x}$$

и према овоме

$$y = (2 \sin x\, e^{\sin x} - 2\, e^{\sin x} + C)\, e^{-\sin x}$$

$$= 2 \sin x - 2 + C e^{-\sin x}.$$

96. Трећа метода за интегралење линеарних једначина прво реда.

— Нека је задата диф. једначина вида

$$1) \qquad \varphi(x) \frac{dy}{dx} + y f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n.$$

Узмимо прво ову једначину

$$\varphi(x) \frac{dy}{dx} + y f(x) = 0.$$

Из ње добијамо

$$\frac{dy}{y} = -\frac{f(x)}{\varphi(x)} dx, \quad y = e^{-\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx} . C.$$

---

[1]) в. 2. Пример у чл. 6.

Ставићемо

$$y = C e^{-\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx} + \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \mu x^n \qquad (2$$

и покушаћемо да определимо којефицијенте $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ тако да решењем 2) буде задовољена задата диф. једначина 1).

Из 2) следује

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{\varphi(x)} C e^{-\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx} + \beta + 2\gamma x + \ldots + \mu n x^{n-1}$$

и с овим, а према задатој једн. 1),

$$\varphi(x) \frac{dy}{dx} + y f(x) =$$

$$\varphi(x)(\beta + 2\gamma x + \ldots + \mu n x^{n-1}) + f(x)(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \mu x^n)$$
$$= a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n.$$

Упоређењем којефицијената једнаких степена x-а на левој и десној страни последње једначине добијамо константе $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$, а са тиме и решење 2) диф. једначине 1).

Пример.

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 2 - 5x + x^2.$$

Из

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

следује

$$\frac{dy}{y} = 3\,dx, \quad y = Ce^{3x}.$$

Ставићемо

$$y = Ce^{3x} + \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

дакле

$$\frac{dy}{dx} = 3\,Ce^{3x} + \beta + 2\gamma x.$$

С овим, а на оснвоу задате једначине, имамо

$$\frac{dy}{dx} - 3y =$$

$$\beta + 2\gamma x - 3\alpha - 3\beta x - 3\gamma x^2 = 2 - 5x + x^2$$

или

$$(\beta - 3\alpha) + (2\gamma - 3\beta)x - 3\gamma x^2 = 2 - 5x + x^2.$$

Одавде, упоређењем, закључујемо да је

$$\beta - 3\alpha = 2,$$
$$2\gamma - 3\beta = -5,$$
$$-3\gamma^2 = 1,$$

одакле

$$\alpha = -\frac{5}{27}, \qquad \beta = \frac{13}{9}, \qquad \gamma = -\frac{1}{3}.$$

Према овоме гласи решење задате једначине

$$y = Ce^{3x} - \frac{5}{27} + \frac{13}{9}x - \frac{x^2}{3}.$$

2. Интегралење потпуних диференциала.

97. Услов за интегралење. — Нека је

$$u = f(x,\ y),$$

$$du = P\,dx + Q\,dy,$$

где означава

$$P = \frac{du}{dx}, \qquad Q = \frac{du}{dy}.$$

Одавде закључујемо

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{dQ}{dx}.$$

То значи: израз $P\,dx + Q\,dy$ јесте потпуни диференциал, када је

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Ако је овај услов испуњен задати је израз потпуни диференциал и може увек да се интеграли.

98. Интегралење потпунога диференциала. — Нека је

1) $$du = P\,dx + Q\,dy,$$

а претпостављамо да је

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Можемо да ставимо

$$u = \int P\,dx + \varphi(y)$$

или ако означимо

$$\int P\,dx = v,$$

$$u = v + \varphi(y).$$

Отуда што је

$$Q = = \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

следује

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q - \frac{dv}{dy}, \quad \varphi(y) = \int\left(Q - \frac{dv}{dy}\right)dy$$

и на тај начин

2) $$u = \int P\,dx + \int\left(Q - \frac{dv}{dy}\right)dy + C.$$

Примедба. Пошто израз $Q - \frac{dv}{dy}$ садржи само y, а независан је од x-а, јесте

$$\frac{d\left(Q - \frac{dv}{dy}\right)}{dx} = 0, \text{ одакле } \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2v}{dx\,dy} = \frac{dP}{dy}.$$

99. Продужење чл. 98. — У прошломе члану показана метода може да се примени и код више од две променљиве. Нека је

$$u = f(x.\ y,\ z),$$

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где је

$$P = \frac{du}{dx}, \quad Q = \frac{du}{dy}, \quad R = \frac{du}{dz}.$$

Одавде следује

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}, \qquad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}.$$

Ово су, дакле, три услова који мора да буду испуњени да би израз $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ био потпуни диференциал du једне функције која зависи од три променљиве x, y, z. То значи: ако су испуњена горња три услова, задати израз може увек да се интеграли. Тада је

$$u = \int P\,dx + \varphi(y,\ z) = v + \varphi(y,\ z), \text{ где је } v = \int P\,dx.$$

Отуда што је

$$Q = \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{d\varphi(y,\ z)}{dy}, \text{ дакле } \frac{d\varphi(y,\ z)}{dy} = Q - \frac{dv}{dy},$$

$$R = \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} + \frac{d\varphi(y,\ z)}{dz}, \quad „ \quad \frac{d\varphi(y,\ z)}{dz} = R - \frac{dv}{dz}$$

изводимо израз

$$d\varphi(y,\ z) = \left(Q - \frac{dv}{dy}\right)dy + \left(R - \frac{dv}{dz}\right)dz,$$

који, пошто зависи само од две променљиве y и z, може да се интеграли по методи у чл. 98. и ми имамо решење

$$u = \int P\,dx + \int\left(Q - \frac{dv}{dy}\right)dy + \int\left(R - \frac{dv}{dz}\right)dz + C.$$

Примедба. Отуда што су изрази $Q - \frac{dv}{dy}$ и $R - \frac{dv}{dz}$ независни од x-а следује

$$\frac{d\left(Q - \frac{dv}{dy}\right)}{dx} = 0, \qquad \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2v}{dx\ dy} = \frac{dP}{dy},$$

$$\frac{d\left(R - \frac{dv}{dz}\right)}{dx} = 0, \qquad \frac{dR}{dx} = \frac{d^2v}{dx\ dz} = \frac{dP}{dz}.$$

Ово су две од оних условних једначина за интегралење изра $Pdx + Qdy + Rdz$. Трећу условну једначину изводимо из добивени двеју, када узмемо да је

$$\frac{d^2P}{dz\,dy} = \frac{d^2Q}{dz\,dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dz}\right),$$

$$\frac{d^2P}{dy\,dz} = \frac{d^2R}{dy\,dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dy}\right),$$

одакле

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

100. Примери. —

1. Пример.

$$du = \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right] dy.$$

Испуњен је услов: $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, јер је једно и друго $= -\frac{2xy}{(x-y)^3}$.

Према чл. 98. стављамо

$$u = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] dx + \varphi(y)$$

$$= lx + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y).$$

Отуда што је

$$Q = \frac{du}{dy}, \quad \text{тј. } \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = \frac{(x-y)\,2y + y^2}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

следује

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = 1 - \frac{1}{y}, \quad \varphi(y) = y - ly + C$$

и према томе

$$u = lx + \frac{y^2}{x-y} + y - ly + C = l\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xy}{x-y} + C.$$

2. Пример.

$$du = (3x - y + 2z)\,dx + (-x + 4y + 5z)\,dy + (2x + 5y - z)\,dz.$$

Услови су за интегралење испуњени, јер је

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = -1, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} = 5, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz} = 2.$$

Према чл. 99. имамо

$$u = \int (3x - y + 2z)\,dx + \varphi(y, z) = \frac{3x^2}{2} - xy + 2xz + \varphi(y, z).$$

Отуда што је

$$Q = \frac{du}{dy}, \text{ у нашем примеру } -x + 4y + 5z = -x + \frac{d\varphi(y, z)}{dy},$$

$$R = \frac{du}{dz}, \text{ „ \quad „ \quad „ } \quad 2x + 5y - z = 2x + \frac{d\varphi(y, z)}{dz},$$

дакле

$$\frac{d\varphi(y, z)}{dy} = 4y + 5z, \quad \frac{d\varphi(y, z)}{dz} = 5y - z,$$

следује

$$d\varphi(y, z) = (4y + 5z)\,dy + (5y - z)\,dz$$

$$\varphi(y, z) = \int (4y + 5z)\,dy + \psi(z) = 2y^2 + 5yz + \psi(z).$$

Из тога што је

$$\frac{d\varphi(y, z)}{dz} = 5y - z = 5y + \frac{d\psi(z)}{dz}$$

добијамо

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = -z, \quad \psi(z) = -\frac{z^2}{2} + C$$

и према томе

$$\varphi(y, z) = 2y^2 + 5yz - \frac{z^2}{2} + C$$

$$u = \frac{3x^2}{2} - xy + 2xz + 2y^2 + 5yz - \frac{z^2}{2} + C.$$

101. Интеграциони фактор. — Претпоставимо да код једначине

$$Mdx + Ndy = 0$$

нису испуњени услови за интегралење и да, према томе, лева страна једначине није потпуни деференциал. Множењем леве стране једначине извесним фактором μ, који је функција x-а и y-а, тај се фактор може да определи тако да диференциал постане потпун и задата се једначина може да интеграли.

Узев

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

определићемо μ тако да је

$$\frac{d(\mu M)}{dy} = \frac{d(\mu N)}{dx},$$

одакле за одређивање μ-а диф. једначина

$$\mu\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) = M\frac{d\mu}{dy} - N\frac{d\mu}{dx}. \qquad (1$$

Интегралење ове парциалне диф. једначине скопчано је, у главноме, са великим тешкоћама и претпоставља интегралење задате једначине. У извесним случајевима, пак, једн. 1) може да послужи да се нађе фактор μ. Расмотрићемо два специална случаја.

102. Први случај опредељавања интеграционог фактора. –

Узмимо да фактор μ зависи само од једне променљиве, нпр. од x, онд је $\frac{d\mu}{dy}=0$ и једн. 1) у чл. 101. своди се на ову простију

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}\,dx. \tag*{1)}$$

Услед претпоставке, да μ, дакле и лева страна ове једначине, завис само од x-а, јесте

$$\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=f(x) \tag*{2)}$$

и тиме

$$\mu=e^{\int f(x)\,dx}. \tag*{3)}$$

Рачун постаје простији, ако је $N=1$, тј. ако замислимо да ј задата једначина доведена на форму

$$dy+M\,dx=0. \tag*{4)}$$

Место једн. 2) имамо у овоме случају ($N=1$)

$$\frac{dM}{dy}=f(x), \tag*{5)}$$

одакле

$$M=y\,f(x)+\varphi(x).$$

С овим задата једн. 4) постаје оваква

$$\frac{dy}{dx}+y\,f(x)+\varphi(x)=0.$$

Да бисмо леву страну ове једначине начинили потпуним диференци алем треба је, дакле, помножити фактором μ (формула 3), тј. треба за дату једначину написати

$$e^{\int f(x)\,dx}\cdot\frac{dy}{dx}+y\,f(x)\,e^{\int f(x)\,dx}+\varphi(x)\,e^{\int f(x)\,dx}=0$$

или

$$e^{\int f(x)\,dx}\cdot dy+\left[y\,f(x)\,e^{\int f(x)\,dx}+\varphi(x)\,e^{\int f(x)\,dx}\right]dx=0,$$

одакле помоћу формуле 2) у чл. 78.[1])

$$y\,e^{\int f(x)\,dx}+\int\varphi(x)\,e^{\int f(x)\,dx}\,dx=C.$$

---

[1]) Формула 2) у чл. 98. примењена је у овоме случају у форми

$$u=\int Q\,dy+\int\left(P-\frac{dv}{dx}\right)dx+C,\quad v=\int Q\,dy.$$

Примедба. На исти начин бисмо поступили да фактор μ, место да зависи само од x-а, зависи само од y-а, у коме је случају $\frac{d\mu}{dx}=0$ и општа се једн. 1) у чл. 101. своди на ову

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}}{M}\,dy.$$

103. Други случај опредељавања интеграционог фактора. —

Претпоставимо да фактор μ има форму XY, где је X функција x-а, Y функција y-а. Овде је

$$\frac{d\mu}{dx}=Y\frac{dX}{dx},\qquad\frac{d\mu}{dy}=X\frac{dY}{dy},$$

а са тиме једн. 1) у чл. 101. за опредељавање фактора μ

$$\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}=M\frac{dY}{Y\,dy}-N\frac{dX}{X\,dx}$$

или ако ставимо

$$\frac{dX}{X\,dx}=\varphi(x),\qquad\frac{dY}{Y\,dy}=\psi(y) \tag*{(1}$$

$$\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}=M\,\psi(y)-N\,\varphi(x), \tag*{(2}$$

Са претпоставком да је испуњена последња једначина имамо (из обрасца 1)

$$X=e^{\int\varphi(x)\,dx},\qquad Y=e^{\int\psi(x)\,dx}$$

$$\mu=e^{\int\varphi(x)\,dx}\cdot e^{\int\psi(x)\,dx}. \tag*{(3}$$

Примедба. Извесне операције, којима смо се раније служили код одвајања променљивих у диф. једначинама, своде се на употребу интеграционога фактора. Тако у чл. 88. код хомогених једначина видимо из једн. 3) да се одвајање променљивих (доводење на форму једн. 4) своди на то да се диф. једначина 3) помножи фактором $\frac{1}{x^{k+1}[f(t)+t\,\varphi(t)]}$ тј. с обзиром на то што је $t=\frac{y}{x}$, $f(t)=\frac{1}{x^k}f(x,y)$, $\varphi(t)=\frac{1}{x^k}\varphi(x,y)$ да се задата диф. једначина помножи фактором $\frac{1}{x\,f(x,y)+y\,\varphi(x,y)}$. Иста примедба важи и за случај посматран у чл. 87.

104. Примери за изналажење интеграционога фактора. —

1. Пример.

$$(x+y)\,dx+dy=0.$$

Овде је $M=x+y$, $N=1$; задата једначина има вид $M\,dx+dy=0$ (вид једн. 4 у чл. 102.) и на основу формула 3) и 5) чл. 102. добијамо

$$\mu=e^x.$$

Заиста кад напишемо задату једначину

$$e^x\,(x+y)\,dx+e^x\,dy=0$$

увериђемо се да је $\dfrac{dP}{dy}=\dfrac{dQ}{dx}$ (види чл. 97.).

Помоћу формуле 2) чл. 98., када је применимо у форми

$$u=\int Q\,dy+\int\left(P-\frac{dv}{dx}\right)dx+C,\quad v=\int Q\,dv,$$

налазимо

$$C=\int e^x\,dy+\int xe^x\,dx$$

или

$$C=e^x\,(y+x-1)$$

као решење горње диф. једначине.

2. Пример.

$$(x\sin y+y\cos y)\,dx+(x\cos y-y\sin y)\,dy=0.$$

Овде је дакле

$$M=x\sin y+y\cos y\qquad N=x\cos y-y\sin y.$$

Претпоставимо да интеграциони фактор зависи само од x-а. Према обрасцу 1) у чл. 102. имамо

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{(x\cos y+\cos y-y\sin y)-\cos y}{x\cos y-y\sin y}\,dx=dx,$$

дакле

$$\mu=e^x.$$

Ако задату једначину напишемо

$$e^x\,(x\sin y+y\cos y)\,dx+e^x\,(x\cos y-y\sin y)\,dy=0$$

увериђемо се да је лева страна потпуни диференциал $\left(\dfrac{dP}{dy}=\dfrac{dQ}{dx}\right)$ и помоћу обрасца 2) у чл. 98. налазимо решење задате једначине

$$C=\int e^x\,(x\sin y+y\cos y)\,dx+\int\left[e^x\,(x\cos y-y\sin y)-\frac{dv}{dy}\right]dy,$$

где је

$$v=\int e^x\,(x\sin y+y\cos y)\,dx=e^x\,[(x-1)\sin y+y\cos y],$$

дакле

$$\frac{dv}{dy}=e^x\,(x\cos y-y\sin y)$$

и према томе решење

$$C=e^x\,[(x-1)\sin y+y\cos y].$$

3. Пример.

$$(x-ay)\,dx+(y+ax)\,dy=0$$

(3. пример у чл. 89.). Овде је $M=x-ay$, $N=y+ax$, а интеграциони је фактор

$$\mu=\frac{1}{(x-ay)\,x+(y+ax)\,y}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

(види примедбу на крају чл. 103.). С овим помножена задата једначина

$$\frac{x-ay}{x^2+y^2}\,dx+\frac{y+ax}{x^2+y^2}\,dy=0$$

постаје њена лева страна потпуним диференциалом, јер је

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{-ax^2+ay^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Интегралењем помоћу формуле 2) у чл. 78., узевши ту формулу у виду

$$u=\int Q\,dy+\int\left(P-\frac{dv}{dx}\right)dx+C,\qquad v=\int Q\,dy,$$

налазимо решење наше задате једначине

$$C=\int\frac{y+ax}{x^2+y^2}\,dy+\int\left[\frac{x-ay}{x^2+y^2}-\frac{dv}{dx}\right]dx$$

$$=l\,(x^2+y^2)+a\,.\,arc\,tg\,\frac{y}{x}+\int\left[\frac{x-ay}{x^2+y^2}+\frac{ay}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}\right]dx$$

$$=l\,\sqrt{x^2+y^2}+a\,.\,arc\,tg\,\frac{y}{x}.$$

4. Пример.

$$(x^2+y^2)\,dx-2\,xy\,dy=0$$

(в. 4. Пример у чл. 89.).

Овде је

$$\frac{dM}{dy}=2\,y,\ \frac{dN}{dx}=-2\,y,\quad\text{дакле}\ \frac{dM}{dy}\ \text{није}=\frac{dN}{dx}.$$

На основу формуле 1) чл. 102. ставићемо

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2\,dx}{x},$$

одакле

$$l\mu=-\,lx^2+C,\quad \mu x^2=c,\quad \mu=\frac{c}{x^2}$$

или простије

$$\mu=\frac{1}{x^2}.$$

С овим имамо диф. једначину

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}\,dx-\frac{2\,y}{x}\,dy=0,$$

чија је лева страна потпуни диференциал, јер је

$$\frac{d\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right)}{dy}=\frac{d\left(-\dfrac{2\,y}{x}\right)}{dx}=\frac{2\,y^2}{x^2}.$$

Према формули 2) у чл. 98. интегрална једначина гласи

$$C = \int \frac{x^2 + y^2}{x^2} dx + \int \left(-\frac{2y}{x} - \frac{dv}{dy}\right) dy,$$

где је

$$v = \int \frac{x^2 + y^2}{x^2} dx = x - \frac{y^2}{x}, \quad \frac{dv}{dy} = -\frac{2y}{x}$$

и према томе добијамо ово решење

$$C = x - \frac{y^2}{x} + \int \left(-\frac{2y}{x} + \frac{2y}{x}\right) dy$$

или

$$x^2 - y^2 = Cx.$$

5. *Пример.*

$$2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0.$$

Пошто нас формула 1) у чл. 101., а тако исто и формула 1) у чл. 102. во, диф. једначини коју нисмо у стању да интегралимо, учинићемо претпоставку, интеграциони фактор μ зависи само од y и место диф. једн. 1) у чл. 102. узћемо диф. једначину

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}}{M} dy,$$

која у овоме случају, где је $\frac{dM}{dy} = 2x$, $\frac{dN}{dx} = -6x$, гласи

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{4\,dy}{y},$$

одакле

$$l\mu = -4\,ly + C, \quad \mu = \frac{c}{y^4}$$

или простије

$$\mu = \frac{1}{y^4}.$$

С овим претварамо задату диф. једначину у

$$\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0,$$

у којој је лева страна потпун диференциал, јер је

$$\frac{d\left(\frac{2x}{y^3}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\right)}{dx} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Према овоме добијамо интегралну једначину (формула 2) у чл. 98.)

$$C = \int \frac{2x\,dx}{y^3} + \int \left(\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} + \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = \frac{x^2}{y^3} + \int \frac{dy}{y^2} = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = \frac{x^2 - y^2}{y^3}$$

или

$$x^2 - y^2 = Cy^3.$$

---

105. Теорема. — Свака диференциална једначина првога реда има свој интеграл.

За диф. једначину првога реда

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \text{ или } M dx + N dy = 0$$

постоји извесна једначина, у којој се јавља x и y и једна произвољна константа, која (коначна) једначина, када је диференциалимо и елиминујемо ону произвољну константу, даје задату диф. једначину.

Интегралити диф. једначину значи наћи извесну функцију y, која зависи од x-а и чија је изводна $= f(x)$ и која за бесконачно мале промене dx прапроменљиве x добија задатом диф. једначином одређене бесконачно мале промене $dy = f(x, y)\,dx$. Услед тога, што задата диф. једначина одређује само начин како се промене функције управљају према променама прапроменљиве, дозвољено је да за какву било вредност x-а узмемо произвољну вредност за y, да ставимо нпр. да је за $x = a$ одговарајућа вредност функције $y = b$. Но с овим је, онда, и за сваку другу вредност x-а вредност y-а потпуно определена. То значи да је y некаква функција x-а у којој се јавља и једна произвољна константа. Са постојањем функције y доказано је постојање интеграла диф. једначине.

106. Теорема. — Постоји увек фактор, којим кад помножимо леву страну диф. једначине првога реда

$$M dx + N dy = 0 \qquad (1$$

чини да лева страна једначине постане потпуним диференциалом.

У чл. 105. смо показали да свака диф. једн. 1) има свој интеграл, у коме се јавља једна произвољна константа. Замислимо да је та интегрална једначина решена по оној произвољној константи, да је доведена на форму

$$u = C, \qquad (2$$

где је u функција од x и y, у којој нема произвољне константе. Из интегралне једначине 2) следује

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0, \text{ одакле } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}},$$

док из једн. 1) опет имамо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

и према томе

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}=\frac{M}{N}.$$

Ову идентичну једначину можемо да напишемо

$$\frac{\frac{du}{dx}}{M}=\frac{\frac{du}{dy}}{N}=\mu,$$

одакле

$$\frac{du}{dx}=\mu M, \quad \frac{du}{dy}=\mu N$$

$$du=\mu\,(M\,dx+N\,dy).$$

Овим смо показали да постоји такав фактор (зависан од x-а и y- којим кад се помножи лева страна диф. једначине, та лева страна і стаје потпуним диференциалом.

107. Теорема. — Има безбројно много фактора који чине да ле страна диф. једначине

$$M\,dx+N\,dy=0$$

постаје потпуни диференциал.

Помножимо обе стране једначине

$$\mu\,(M\,dx+N\,dy)=du$$

каквом било функцијом од u, нпр. са $\varphi\,(u)$. Тада је

$$\mu\,\varphi\,(u)\,(M\,dx+N\,dy)=\varphi\,(u)\,du=d\int\varphi(u)\,du.$$

Одавде видимо да је и сада лева страна потпуни диференциал. Фа тор $\mu\,\varphi\,(u)$ има, дакле, исто својство које има фактор μ.

Закључак. Ако два фактора M и μ чине да израз $M\,dx+Na$ постаје потпуним диференциалом, онда је $\frac{\mathsf{M}}{\mu}=C$ интеграл диф. једн чине $M\,dx+N\,dy=0$.

Доказ. Из $\frac{\mathsf{M}}{\mu}=C$ или дакле $\varphi\,(u)=C$ следује $u=c$, а то интеграл горње диф. једначине.

Пример

$$x\,dy-y\,dx=0$$

или

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},$$

одакле, кад интегралимо

$$y=Cx \text{ или } \frac{y}{x}=C=u.$$

Најпростији је интеграциони фактор овде $\mu=\frac{1}{x^2}$. Остали интеграциони фактори обухваћени су формулом $\mu\,\varphi\,(u)=\frac{1}{x^2}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Тако ако узмемо $\varphi\,(u)=u$ имамо интеграциони фактор $\mathsf{M}=\frac{y}{x^3}$, а диф. једначина је $\frac{xy\,dy-y^2\,dx}{x^3}=d\,\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{x^2}=0$.

За $\varphi\,(u)=\frac{1}{u}$ интеграциони је фактор $\mathsf{M}=\frac{1}{xy}$, а диф. једначина

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=dl\,\frac{y}{x}=0,$$

Замена $\varphi\,(u)+\frac{1}{1+u^2}$ даје интеграциони фактор $\mathsf{M}=\frac{1}{x^2+y^2}$, а диф. једначина гласи $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=d\,arctg\,\frac{y}{x}=0$.

3. Диференциалне једначине првога реда.

108. Линеарне диференциалне једначине првога реда. — Општи вид линеарне диф. једначине првога реда јесте

$$\frac{dy}{dx}+y\,f\,(x)=\varphi\,(x).$$

За интегралење оваквих једначина имали смо методе у чл. 91., 92. и 96.

109. Диференциалне једначине првога реда, које су вишега степена. — Један случај, у коме се једначина вишега степена може да сведе на линеарну једначину, расматрали смо у чл. 93. и 94. (*Бернули*-ева једначина.)

Узећемо сада на проучавање неке случајеве, где се интегралење једначине првога реда, која је вишега степена, може да изврши на релативно прост начин.

Први случај. — Претпоставимо да се диф. једначина

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1}$$

у којој се $\frac{dy}{dx}$ јавља у вишем степену, може да реши по $\frac{dy}{dx}$. Тиме се задата једначина раствара на више диф. једначина првога степена, које ћемо интегралити по методама у чл. 91., 92. и 96.

Примедба. Често нас решавање једн. 1) по $\frac{dy}{dx}$ води линеарним једначинама код којих се не може да изврши одвајање променљивих. У таквима ћемо случајевима покушати да дођемо до ресултата на на- ин показан у чл. 110. (Види у томе члану 3. пример.)

На случај да диф. једн. 1) има простији вид

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

а може да се реши по $\frac{dy}{dx}$, нпр.

$$\frac{dy}{dx}=a_1,\quad \frac{dy}{dx}=a_2,\quad \frac{dy}{dx}=a_3,\ldots$$

интеграљењем добијамо решења

$$y=a_1x+C_1,\quad y=a_2x+C_2,\quad y=a_3x+C_3,\ldots,$$

која су сва обухваћена једначином

$$(y-a_1x-C_1)\,(y-a_2x-C_2)\,(y-a_3x-C_3)\ldots=0.$$

Општност овога решења нећемо смањити, ако претпоставимо у свима факторима једну исту константу C и према томе ресултат напишемо

$$\left(\frac{y-C}{x}-a_1\right)\left(\frac{y-C}{x}-a_2\right)\left(\frac{y-C}{x}-a_3\right)\ldots=0$$

или краће

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$$

Пример.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a^2=0.$$

Решење:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^2-a^2=0 \text{ или } y=\pm ax+C.$$

110. Продужење чл. 109. Други случај. — Претпоставимо да се задата диф. једначина

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$$

може да реши по једној променљивој, нпр. да се доведе на форму

1) $$y=f(x,\ p),$$

где је

2) $$p=\frac{dy}{dx}.$$

Диференциалењем једн. 1) добијамо ову линеарну диф. једначину првога реда

3) $$dy \text{ или } p\,dx=\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dp}dp.$$

Ако будемо умели да интегралимо ову једначину, онда елиминовањем количине p из тако добивене интегралне једначине и једн. 1) налазимо решење задате диф. једначине.

Примедба. Главна тешкоћа у овоме послу састоји се, обично, у елиминовању количине p из назначених једначина. У случају да је немогуће извршити ово елиминовање можемо се задовољити тиме што ћемо за поједине, а произвољне вредности количине p одређивати одговарајуће вредности за x и за y помоћу једн. 1) и интеграла једн. 3).

1. Пример.

$$y=x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \qquad (1$$

Диференциалењем ове једначине добијамо

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}$$

или

$$(x+2p)\frac{dp}{dx}=0, \qquad (2$$

где је $p=\frac{dy}{dx}$. Једн. 2) разлаже се на ове две

$$\frac{dp}{dx}=0 \qquad (2\,а$$

и

$$x+2p=0. \qquad (2\,б$$

Из 2 *а*) следује $p=C$, а с овим и на основу једн. 1) добијамо решење:

$$y=Cx+C^2. \qquad (3\,а$$

Из 2 *б*) налазимо $p=-\frac{x}{2}$ и онда на основу једн. 1) добијамо друго решење

$$y=-\frac{x^2}{4}. \qquad (3\,б$$

Ово друго решење зове се *сингуларно* решење диф. једначине, пошто се у њему не налази произвољна константа.

2. Пример.

$$y=\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \qquad (1$$

Диференциалењем ове једначине следује

$$p=\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{1}{4x^2}2p\frac{dp}{dx}-\frac{1}{2x^3}p^2$$

или

$$\frac{p}{2}\left(1+\frac{p}{x^3}\right)=\frac{x}{2}\left(1+\frac{p}{x^3}\right)\frac{dp}{dx}$$

или најзад

$$\left(1+\frac{p}{x^3}\right)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0. \qquad (2$$

Ова је једначина задовољена прво, ако је

$$p-x\frac{dp}{dx}=0, \qquad (2\,а$$

одакле

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x},\ p=Cx.$$

С овим, а на основу једн. 1), имамо решење

3 *a*) $$y = \frac{C x^2}{2} + \frac{C^2}{4}.$$

Друго, када ставимо

2 *b*) $$1 + \frac{p}{x^3} = 0,$$

дакле

$$p = - x^8$$

и на основу једн. 1) следује ово решење

3 *b*) $$y = - \frac{x^4}{4}.$$

Ово је решење сингуларно, јер у њему нема произвољне константе.

3. Пример.

$$\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + a x - b y = 0.$$

Ми бисмо ову једначину могли да решимо по $\frac{d y}{d x}$ и нашли бисмо

$$\frac{d y}{d x} = \pm \sqrt{b y - a x}.$$

Но пошто се овде не могу непосредно да одвоје променљиве,[1]) то ћемо употребити и у овоме случају горњу методу решавајући задату једначину по y, доводећи је, дакле, на вид

1) $$b y = p^2 + a x,$$

где је $p = \frac{d y}{d x}$. Диференциалењем ове једначине добијамо

$$b p d x = 2 p\, d p + a d x,$$

одакле

$$d x = \frac{2 p\, d p}{b p - a}$$

2) $$x = \frac{2}{b^2}\, [b p + a l\, (b p - a)] + C.^{2})$$

Елиминовањем количине p из ове једн. 2) и задате једн. 1) добијамо решење диф. једначине.

4. Пример

$$y\, d x - x \sqrt{d x^2 + d y^2} = 0,$$

одакле

$$y = x \sqrt{1 + p^2},$$

које кад диференциалимо

$$p\, d x = \sqrt{1 + p^2}\, d x + \frac{x p\, d p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

---

[1]) Види примедбу у чл. 109.

[2]) $$\int \frac{2 p\, d p}{b p - a} = \frac{2}{b} \int d p + \frac{2 a}{b} \int \frac{d p}{b p - a} = \frac{2}{b}\, p + \frac{2 a}{b^2}\, l\, (b p - a) + C$$
$$= \frac{2}{b^2}\, [b p + a l\, (b p - a)] + C.$$
(Види чл. 9.)

и средимо

$$(p - \sqrt{1 + p^2})\, d x = \frac{x p\, d p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

одакле опет

$$\frac{d x}{x} = \frac{p\, d p}{\sqrt{1 + p^2}\, (p - \sqrt{1 + p^2})}$$
$$= - \frac{p\, (p + \sqrt{1 + p^2})\, d p}{\sqrt{1 + p^2}}$$
$$= - p\, d p - \frac{p^2\, d p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

и најзад интегралимо

$$l x = \frac{1}{2}\, [l\, (p + \sqrt{1 + p^2}) - p^2 - p \sqrt{1 + p^2}] + C.$$

Решење задате једначине добићемо кад у ову једначину за $l x$ ставимо

$$p = \pm \frac{\sqrt{y^2 - x^3}}{x},$$

које нам даје постављена диф. једначина.

5. Пример.

$$x p^2 - 2 y p + a x = 0$$

или

$$2 p y = x p^2 + a x,$$

одакле диференциалењем

$$2 p^2\, d x + 2 y\, d p = p^2 d x + 2 p x d p + a d x,$$

које, кад средимо

$$(p^2 - a)\, d x = 2\, (p x - y)\, d p$$

и заменимо из задате једначине

$$y = \frac{x p^2 + a x}{2 p},$$

даје

$$(p^2 - a)\, d x = 2 \left(p x - \frac{x p^2 + a x}{2 p}\right) d p$$
$$= \frac{(p^2 - a)\, x}{p}\, d p$$

или скраћено

$$\frac{d x}{x} = \frac{d p}{p},$$

дакле

$$p = C x.$$

Замена овог последњег у задату једначину даје решење

$$C^2 x^3 - 2\, C x y + a x = 0$$

или простије

$$C^2 x^2 - 2\, C y + a = 0$$

6. Пример.

$$y = x f\, (p) + \varphi\, (p). \qquad (1$$

Диференциалењем добијамо

$$p\, d x = x f'\, (p)\, d p + f\, (p)\, d x + \varphi'\, (p)\, d p,$$

одакле

$$\frac{d x}{d p} + \frac{f'\, (p)}{f (p) - p}\, x = - \frac{\varphi'\, (p)}{f (p) - p}.$$

Ова се диф. једначина интеграли по методи интегралења диф. једначине 1) у чл. 91. Резултат је

$$2)\qquad x = -e^{-\int\frac{f'(p)\,dp}{f(p)-p}}\left(\int\frac{\varphi'(p)}{f(p)-p}\,e^{\int\frac{f'(p)\,dp}{f(p)-p}}\,dp + C\right).$$

Елиминовањем количине p из ове једначине и оне задате добијамо интегралну једначину.

У већини случајева се елиминовање количине p не може да изврши пошто она последња једначина за x садржи трансцендентне функције од p. У таквоме случају дајемо количини p поступно разне вредности, а оне две једначине дају одговарајући вредности за x и y.

Примедба. Ако је $f(p) = p$ формула 2) постаје неупотребљива. Једначина 1) гласи у овоме случају

$$y = px + \varphi(p)$$

(*Clairaut*-ова једначина).

Диференциалењем следује

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + \varphi'(p)\,dp$$

или

$$[x + \varphi'(p)]\,dp = 0.$$

Ова је једначина задовољена:

1) ако је $dp = 0$, дакле $p = C$ и онда је

$$y = Cx + \varphi(C).$$

2) ако је $x + \varphi'(p) = 0$. Елиминовањем количине p из ове једначине и оне задате долазимо до решења

$$y = xf(x) + \varphi[f(x)]$$

у коме нема произвољне константе. Ово је решење дакле *сингуларно решење*.

111. Продужење чл. 110. Трећи случај. — Претпоставимо да се у задатој диф. једначини јавља само једна променљива, да је задата једначина ово

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

и претпоставимо да се она може да реши по $\frac{dy}{dx}$, тј. да се може да доведе на форму

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Интегралење је тада сведено на квадратуре, јер је

$$y = \int f(x)\,dx.$$

1. Пример.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ax = 0.$$

Одавде

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{ax},\quad y = \pm\int\sqrt{ax}\,dx = \pm\frac{2}{3}\,x\sqrt{ax} + C$$

или

$$(y - C)^2 = \frac{4}{9}\,ax^3.$$

---

2. Пример.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (a + x)\frac{dy}{dx} + ax = 0.$$

Одавде, кад решимо по $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = a,\qquad \frac{dy}{dx} = x$$

и према томе имамо решења

$$y = ax + C,\quad y = \frac{x^2}{2} + C.$$

112. Продужење чл. 111. Четврти случај. — Узмимо да се једначина

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

не може да реши по диф. количнику $\frac{dy}{dx}$, али је могуће да се реши по променљивој x. Задата диф. једначина има, дакле, вид

$$x = f(p),\tag{1}$$

где је $p = \frac{dy}{dx}$. Из $\frac{dy}{dx} = p$ следује $dy = p\,dx$ или с обзиром на једн. 1)

$$dy = p\,df(p),$$

одакле

$$y = \int p\,df(p) + C = pf(p) - \int f(p)\,dp + C.\tag{2}$$

Елиминујући p из једн. 1) и 2) добијамо решење задате диф. једначине.

113. Продужење чл. 112. Пети случај. — Нека је

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

задата диф. једначина и претпоставимо да се она може да реши по y, да се доведе, дакле, на вид

$$y = f(p),\tag{1}$$

где је, као и горе, $p = \frac{dy}{dx}$.

Отуда што је

$$dx = \frac{df(p)}{p} = \frac{f'(p)\,dp}{p}$$

изводимо

$$x = \int\frac{f'(p)}{p}\,dp + C.\tag{2}$$

Елиминовањем количине p из једн. 1) и 2) добијамо решење задате диф. једначине.

Пример.

$$y = ap + bp^2,$$

одакле

$$p\,dx = a\,dp + 2\,bp\,dp$$

$$dx = \frac{(a + 2\,bp)\,dp}{p}$$

$$x = alp + 2.bp + C.$$

Из задате једначине следује $p = \frac{\sqrt{a^2 + 4\,by} - a}{2\,b}$, које, уметнуто у последњу једначину, даје решење

$$x = al\left(\frac{\sqrt{a^2 + 4\,by} - a}{2\,b}\right) + \sqrt{a^2 + 4\,by} - a + C$$

или простије

$$x = al\,(\sqrt{a^2 + 4\,by} - a) + \sqrt{a^2 + 4\,by} + Const.$$

114. Метода неодређених сачинитеља. — Објаснићемо је на следећем примеру

1) $$\frac{dy}{dx} + y - x^3 = 0$$

(види чл. 95. пример 1.)

Претпоставићемо интеграл задате једначине у форми

2) $$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \ldots$$

Одавде следује

3) $$\frac{dy}{dx} = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + 4\,Ex^3 + 5\,Fx^4 + 6\,Gx^5 + \ldots$$

Кад заменимо ово из 2) и 3) у једн. 1) добијамо идентичну једначину

$$(A + B) + (B + 2\,C)\,x + (C + 3\,D)\,x^2 + (D + 4\,E - 1)\,x^3 + (E + 5\,F)\,x^4 + (F + 6\,G)\,x^5 + \ldots = 0.$$

у којој сви сачинитељи мора да су $= 0$, тј.

$A + B = 0,$ одакле $B = -A,$

$B + 2\,C = 0$ или $-A + 2\,C = 0,$ „ $C = \frac{A}{2},$

$C + 3\,D = 0$ „ $\frac{A}{2} + 3\,D = 0,$ „ $D = -\frac{A}{2.3},$

$D + 4E - 1 = 0$ „ $-\frac{A}{2.3} + 4\,E - 1 = 0,$ „ $E = \frac{A}{2.3.4} + \frac{1}{4},$

$E + 5F = 0$ „ $\frac{A}{2.3.4} + \frac{1}{4} + 5\,F = 0,$ „ $F = -\frac{A}{2.3.4.5} - \frac{1}{4.5},$

$F + 6\,G = 0$ „ $-\frac{A}{2.3.4.5} - \frac{1}{4.5} + 6\,G = 0,$ „ $G = \frac{A}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6},$

. . . .

С овим коефицијентима A, B, C, . . . налазимо, на основу формуле 2), овај општи интеграл

$$y = A\left[1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots\right] + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^6}{4.5.6} - \ldots$$

$$= A\,e^{-x} + 2.3\left[1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right] - 6\left(1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\right)$$

$$= A\,e^{-x} + 6\,e^{-x} - 6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3$$

$$= K\,e^{-x} - 6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3.$$

Овде је K интеграциона (произвољна) константа.

115. Сингуларна решења. — Решење диф. једначине, у коме нема произвољне константе, зове се *сингуларно решење.* (Види 1. и 2. пример у чл. 110.) До оваквих сингуларних решења долазимо на основу следећега посматрања.

Дата је диф. једначина

$$M\,dx + N\,dy = 0. \tag{1}$$

Њен интеграл нека је

$$F(x, y, a) = 0. \tag{2}$$

Диференциалењем следује из 2)

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy = 0, \text{ одакле } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}. \tag{3}$$

Елиминовањем константе a из једн. 3) и једн. 2) враћамо се задатој диф. једн. 1). Диференциалећи интегралну једн. 2), сматравши, при томе, константу a као функцију x-а, добијамо

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{da}\frac{da}{dx} = 0,$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} - \frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}}\,\frac{da}{dx}. \tag{4}$$

Кад ово под 4) сравнимо с оним под 3), а претпоставимо да диференцијални количник задржава вредност, која је опредељена задатом диф једначином, следује

$$\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}}\,\frac{da}{dx} = 0.$$

Ова једначина може да буде задовољена на двојак начин:

$$\frac{da}{dx} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}} = 0.$$

Претпоставка $\frac{da}{dx} = 0$ не води ни чему новоме, јер $a = Const.$ даје партикуларно решење наше диф. једначине.

Друга претпоставка: да је $\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}} = 0$ може да буде испуњена

1) када је $\frac{dF}{da} = 0$ и 2) када је $\frac{dF}{dy} = \infty$. Елиминујући константу a из

5) $$F(x, y, a) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{da} = 0$$

или из

6) $$F(x, y, a) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dy} = \infty$$

добијамо решење задате диф. једначине у коме нема произвољне константе, а такво је решење сингуларно.

Сингуларна решења диф. једначине првога реда добијамо, дакле, кад из општега интеграла диф. једначине и изводне тога интеграла узетој по константи, коју изводну стављамо $= 0$, елиминујемо константу. Или: кад елиминујемо константу из општега интеграла диф. једначине и његове изводне по y, коју изводну стављамо $= \infty$.

1. Примедба. При одређивању константе a из

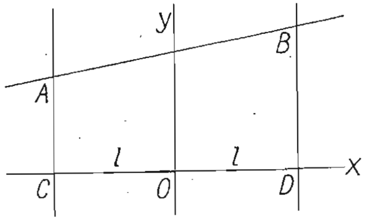
$$\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}} = 0$$

треба имати на уму да се не узму за a вредности које чине да је једновремено $\frac{dF}{da} = 0$ и $\frac{dF}{dy} = 0$ или $\frac{dF}{da} = \infty$ и $\frac{dF}{dy} = \infty$, јер се у таквоме случају горња једначина јавља у неопредељеној форми $\frac{0}{0} = 0$ или $\frac{\infty}{\infty} = 0$. Тако исто не важе оне вредности константе, које дају таква решења, која се могу да добију из општега интеграла, кад се у њему произвољна константа замени извесном вредношћу. Такво је решење партикуларно, а не сингуларно.

2. Примедба. Примећујемо да је поступак при изналажењу сингуларних решења из општега решења диф. једначине онај исти, који и код одређивања анвелопе за низ линија, чија је општа једначина представљена једначином 2), где свакој особеној вредности константе (параметра) a одговара извесна линија дотичнога низа. Партикуларна решења диф. једначине представљена су, дакле, појединим линијама у серији линија, које репрезентује општи интеграл 2). Сингуларно решење диф. једначине даје анвелопу за линије чија је заједничка једначина општи интеграл 2). (Види Диф. Р. Анвелопе.)

116. Примери за сингуларна решења. —

1. Пример. Дата је права CD и две према њој управне праве AC и BD. Четврта права AB креће се тако да је $AC.BD = Const. = k^2$. Да се одреди анвелопа ове покретне праве.



Сл. 64.

Узећемо праву CD за x-осу, нормалу на њу у тачци O (средини дужи $CD = 2l$) за y-осу. Једначина покретне праве AB нека је

$$y = ax + b.$$

За тачку A (тј. за $x = -l$) јесте ордината

$$AC = -al + b,$$

за тачку B (тј. за $x = l$) ордината је

$$BD = al + b.$$

Одавде, а према задатку да је $AC.BC = k^2$, следује $k^2 = b^2 - a^2l^2$, одакле $b^2 = k^2 + a^2l^2$ и тако једначина покретне праве AB

$$y = ax + \sqrt{k^2 + a^2l^2}. \tag{1}$$

Ово је опште решење. Сингуларно решење добићемо кад помоћу једначине $\frac{dF}{da} = 0$, а то је

$$x + \frac{al^2}{\sqrt{k^2 + a^2l^2}} = 0 \tag{2}$$

и једн. 1) елиминујемо константу a. То ћемо извршити најбоље на овај начин. Из 2) следује

$$x = -\frac{al^2}{\sqrt{k^2 + al^2}},$$

које, кад се замени у 1), даје

$$y = -\frac{a^2l^2}{\sqrt{k^3 + a^2l^2}} + \sqrt{k^2 + a^2l^2} = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + a^2l^2}},$$

одакле

$$\frac{y^2}{k^2} = \frac{k^2}{k^2 + a^2l^2}.$$

Ово сабрано са ресултатом из 2)

$$\frac{x^2}{l^2} = \frac{a^2 l^2}{k^2 + a^2 l^2}$$

даје једначину елипсе

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

као једначину анвелопе покретне праве AB.

2. *Притср.* Општи интеграл диф. једначине

1) $$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

јесте

2) $$y = Cx + C^2$$

(види 1. пример у чл. 110.). Сингуларно решење налазимо кад, на основу једн. 2 ставимо $\frac{dF}{dC} = 0$, дакле

$$x + 2C = 0, \quad C = -\frac{x}{2}.$$

Ова вредност за C замењена у 2) даје сингуларно решење диф. једначине

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

Анвелопа правих линија 2) јесте, дакле, парабола 3) теменом у почетку координата и главним пречником у правцу одречне половине y-осе.

3. *Пример.*

1) $$xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\,dy.$$

Интеграциони је фактор $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$. Множењем њиме задата диф. једначина добија вид потпунога диференциала, јер је

$$dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = d\,\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Општи интеграл диф. једн. 1) гласи дакле

$$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

или

2) $$x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0.$$

За сингуларно решење имамо

$$\frac{dF}{dc} = -2y - 2c - 0 \text{ или } \frac{dF}{dy} = -2c = \infty.$$

Прво даје $c = -y$ и на основу једн. 2) следује сингуларно решење

3) $$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Општи интеграл 2) репрезентује серију парабола; сингуларни интеграл представља један круг.

Случај $\frac{dF}{dy} = -2c = \infty$ даје незначеће решење.

4. *Пример.*

$$y = -xp + x^4 p^2,$$

одакле диференциалењем

$$pdx = -pdx - xdp + 4x^3p^2dx + 2x^4pdp$$

или

$$2p(1 - 2x^3p)\,dx = x(2x^3p - 1)\,dp$$

$$2p\,dx = -x\,dp$$

$$\frac{2dx}{x} = -\frac{dp}{p},$$

које интегралено даје

$$lx^2 = -lp + C, \quad px^2 = c$$

$$p = \frac{c}{x^2}.$$

Заменом добивени вредности за p у задату диф. једначину добијамо њен општи интеграл

$$y = c^2 - \frac{c}{x}.$$

Да бисмо нашли сингуларно решење образоваћемо једначину $\frac{dF}{dc} = 0$, а то је

$$2c - \frac{1}{x} = 0, \quad \text{одакле } c = \frac{1}{2x},$$

које, кад се унесе у општи интеграл, даје сингуларно решење

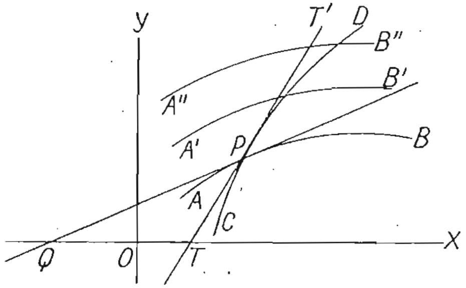
$$4x^2y + 1 = 0.$$

117. Проблем о трајекторијама. — Да се одреди линија која под задатом углом сече линије обухваћене једначином

$$F(x, y, a) = 0, \qquad (1$$

где је $a` промењљиви параметар.

Означимо са τ угао који чини тангента трајекторије CD са тангентом линија AB, $A'B'$, $A''B''$, . . . (које су опредељене једначином 1) у пресечној тачци $P(x, y)$ трајекторије са линијама AB.



Сл. 65.

Из слике видимо да је

$$\tau = \measuredangle PTx - \measuredangle PQx,$$

дакле

$$tg\,\tau = m = \frac{tg\,PTx - tg\,PQx}{1 + tg\,PTx . tg\,PQx}$$

или, кад ставимо овде

$$tg\,PTx = \frac{dy}{dx}, \qquad tg\,PQx = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

следује

$$m\left(\frac{dF}{dy}-\frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}$$

или

2) $$\left(m\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=m\frac{dF}{dy}-\frac{dF}{dx}.$$

Елиминовањем параметра a из једн. 1) и 2) добијамо диференцијалну једначину трајекторије.

Примедба: Проблем постаје знатно простији када претпоставимо да је угао $\tau=90^0$, у коме је случају $m=\infty$, дакле

$$1+tg\,PTx\,.\,tg\,PQx=0$$

или

$$1-\frac{dy}{dx}\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}=0.$$

Трајекторије се у овоме случају ($\tau=90^0$) зову *ортогоналне* и њихова се диф. једначина добија елиминовањем параметра a из једначина

$$F(x, y, a)=0,$$

3) $$\frac{dF}{dx}dy-\frac{dF}{dy}dx=0.$$

118. Примери за трајекторије. —

1. Пример. Једначина датих линија

$$y=ax.$$

Количина a је промењљиви параметар. Из задате једн. 1) $y-ax=0$ следује $\frac{dF}{dx}=-a$, $\frac{dF}{dy}=1$ и према томе гласи једн. 2) у чл. 117.

2) $$(-ma+1)\frac{dy}{dx}=m+a.$$

Елиминовањем параметра a из једн. 1) и 2) налазимо диф. једн. трајекторије

3) $$(x-my)\frac{dy}{dx}=mx+y.$$

Ова је диф. једначина хомогена. Ставићемо (види чл. 88.)

$$y=xt$$

услед чега се једн. 3) претвара у ову

$$m(1+t^2)\,dx=(1-mt)\,x\,dt,$$

одакле

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-mt}{m(1+t^2)}dt,$$

$$lx=\frac{1}{m}\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{t\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{m}\,arc\,tg\,t-\frac{1}{2}\,l\,(1+t^2)+c$$

$$=\frac{1}{m}\,arc\,tg\,\frac{y}{x}-l\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+c$$

или

$$l\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{m}\,arc\,tg\,\frac{y}{x}+c.$$

Најзад, ако узмемо поларне координате, тј. заменимо

$$\sqrt{x^2+y^2}=\varrho,\qquad arc\,tg\,\frac{y}{x}=\varphi,$$

добивена једначина гласи

$$l\varrho=\frac{\varphi}{m}+c\text{ или }\varrho=Ce^{\frac{\varphi}{m}}.$$

Ово је једначина логаритамске спирале.[1] Трајекторија за све кроз почетак координата пролазеће праве линије 1), која те праве сече под задатим углом (за који је $tg\,\tau=m$), јесте, дакле, логаритамска спирала са асимптотном тачком у полу.

2. Пример. Да се нађу ортогоналне трајекторије за линије

$$y^n=ax^k.$$

Параметар a елиминоваћемо из задате једначине и једн. 3) у чл. 117., која у овоме случају гласи

$$kax^{k-1}\,dy+ny^{n-1}\,dx=0.$$

Тако добијамо ову диф. једначину

$$k\,y\,dy+n\,x\,dx=0,$$

која, када се интеграли, даје решење

$$\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{n}=C.$$

Према томе да ли су бројеви k и n истога или противнога знака нађена једначина даје за ортогоналне трајекторије систему концентричних и сличних елипса или хипербола.

---

[1] Види Диф. Р. 11. пример у чл. 107.

II.

Диференциалне једначине вишега реда.

1. Општа посматрања.

119. Теорема. — Свака диференциална једначина има свој интеграл

Диф. једначину n-тога реда можемо да представимо символно на начин

$$1)\qquad F\left(x,\ y,\frac{d y}{d x},\frac{d^2 y}{d x^2},\ \dots\frac{d^n y}{d x^n}\right)=0$$

или, ако замислимо да је једначина решена по изводној највишега (n-тога) реда, овако

$$2)\qquad \frac{d^n y}{d x^n}=f\left(x,\ y,\ \frac{d y}{d x},\frac{d^2 y}{d x^2},\dots\ \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}\right).$$

Једн. 2) опредељује $\frac{d^n y}{d x^n}$ или $d\,\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$, тј. промену $n-1$ ве изводне $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$, када су познате вредности од $y, \frac{d y}{d x}, \dots \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$ за какву вредност x-а. Нека су нпр. за $x=a$ дате вредности $y=b$, $\frac{d y}{d x}=b'$, $\frac{d^2 y}{d x^2}$ $=b''$, $\dots$ $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}=b^{(n-1)}$, где су $b, b', b'', \dots b^{(n-1)}$ произвољни бројеви. Ако пустимо x да се мења за $d x$ промене y-а и њених изводних јесу

$$d y=b'\,d x,\ d\,\frac{d y}{d x}+b''\,d x,\ d\,\frac{d^2 y}{d x^2}=b'''\,d x, \dots\ d\,\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}}=b^{(n-1)}\,d x,$$

а промена изводне $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$ одређена је једначином 2). На исти ћемо начин одредити вредност за y и њених изводних, када узмемо $x=a+2\,d x$, $x=a+3\,d x, \dots$, дакле, уопште за сваку вредност x-а. Отуда, што се за сваку вредност x-а може да израчуна одговарајућа вредност y-а, закључујемо да је диференциалном једначином 1) или 2) функција y опредељена тиме што зависи од променљиве x и n произвољних констаната $b, b', \dots b^{(n-1)}$. *Q. e. d.*

Обратно: Свака једначина $\phi\,(x, y, c, c', \dots c^{(n-1)})=0$, која задовољава задату диф. једначину, а садржи у себи n произвољних констаната, помоћу којих се може да стави за какво $x=a$ да је $y=b$, $y'=b'$, $y''=b''$, $\dots$ $y^{(n-1)}=b^{(n-1)}$, где су $b, b', b'', \dots b^{(n-1)}$ произвољне вредности, може се сматрати као општи интеграл дотичне диф. једначине.

Примедба. Да би једначина са n констананата могла да важи као општи интеграл једне диф. једначине n-тога реда потребно је да су оне n константе одвојене и независне једна од друге, тј. да се ни којом операцијом не може смањити њихов број, јер да би дотична једначина могла се узети као општи интеграл диф. једначине n-тога реда треба да постоји могућност да се оне n константе тако определе како ће за ма какво $x=a$ функција y и њене прве $n-1$ изводне $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ моћи добити произвољне вредности $b, b', b'', \dots b^{(n-1)}$.

Тако нпр. једначина

$$y=c\,sin\,(x+\alpha)+c'\,sin\,(x+\alpha')+c''\,sin\,(x+\alpha'')$$

не садржи три, но само две произвољне константе, о чему ћемо се уверити кад једначину напишемо

$$y=(c\,cos\,\alpha+c'\,cos\,\alpha'+c''\,cos\,\alpha'')\,sin\,x \\ +(c\,sin\,\alpha+c'\,sin\,\alpha'+c''\,sin\,\alpha'')\,cos\,x$$

или краће

$$y=A\,sin\,x+B\,cos\,x.$$

Горња једначина не може, дакле, бити узета за општи интеграл какве диф. једначине трећега реда.

120. Интеграли разнога реда диференциалне једначине. — Општи интеграл једне диф. једначине n-тога реда садржи у себи n произвољних констаната. Означимо га једначином

$$\phi\,(x, y, c, c', c'', \dots c^{(n-1)})=0. \qquad (1$$

Диференциалну једначину

$$F\,(x, y, y', y'', \dots y^{(n)})=0, \qquad (2$$

која не садржи ниједну од оних констаната, које се јављају у њеноме општем интегралу, добијамо када једн. 1) диференциалимо n пута и елиминујемо константе $c, c', c'', \dots c^{(n-1)}$ из тих n добивених једначина и једн. 1). То елиминовање можемо да извршимо на разне начине.

Диференциалимо један пута једн. 1) и вежимо то са задатом једн. 1). Из тих двеју једначина

$$\phi=0$$

и

$$d\,\phi=0$$

можемо да елиминујемо ма коју од констаната $c, c' \dots c^{(n-1)}$. Радећи то редом са сваком од њих добијамо поступно n диф. једначина првога реда од којих свака садржи само $n-1$ произвољну константу. Тако нађене једначине јесу, у односу према диф. једначини 2), њена *n интеграла реда $n-1$ вога.*

Да бисмо могли да елиминујемо две константе потребно је да диференциалимо једн. 1) два пута. На тај начин имамо за елиминовање двеју констаната ове три једначине

$$\phi=0, \qquad d\,\phi=0, \qquad d^2\phi=0.$$

Елиминовањем по двеју констаната из ове три једначине добијамо $\frac{n(n-1)}{1.2}$ диф. једначина другога реда, од којих свака садржи само $n-2$ произвољне константе. Те једначине зову се *интеграли* $n-2$ *ога реда* диф. једначине 2).

На исти начин, поступним диференциалењем јед. 1) и елиминовањем трију, четири, . . . констаната, добијамо диф. једначине 3-ћега, 4-тога, . . . реда, у којима се јављају само још $n-3$, $n-4$, . . . произвољне константе. Такве једначине представљају интеграле $n-3$ ћега, $n-4$ тога, . . . реда. Продужујући и даље: елиминовањем свих констаната осим једне долазимо до n диф. једначина $n-1$вога реда са по једном произвољном константом. Те једначине сачињавају *интеграле првога реда.* Ако из ових n диф. једначина $n-1$вога реда елиминујемо $n-1$ изводну y', y'', . . . $y^{(n-1)}$ добићемо општи интеграл 1). Из тога закључујемо да се диф. једначина 2), која је n-тога реда, може да интеграли познавајући њене n интегралне једначине првога реда.

2. Диференциалне једначине другога реда.

121. Распоред проучавања. — Пошто не постоји метода за интегралење диф. једначине другога реда у њеној најопштијој форми

$$F(x, y, y', y'')=0$$

расматраћемо извесне особене случајеве. Ови се особени случајеви односе на то да у диф. једначини нема једне, две, или све три количине x, y, y'. Једначине, које су, дакле, вида

$$F(y'')=0, \quad F(x, y'')=0, \; F(y, y'')=0, \; F(y', y'')=0,$$
$$F(x, y, y'')=0, \; F(x, y', y'')=0, \; F(y, y', y'')=0,$$

интегралићемо помоћу извесних замена, од којих је најобичнија замена $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$. Овима заменама претварамо диф. једначину другога реда у диф. једначину првога реда.

122. $\frac{d^2y}{dx^2}-a=0$. — Ставимо у диф. једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2}-a=0. \tag*{1)}$$

$$\frac{dy}{dx}=p, \quad \text{дакле} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx},$$

па ћемо добити диф. једначину првога реда

$$\frac{dp}{dx}-a=0,$$

одакле

$$dp=a\,dx, \; p \text{ или } \frac{dy}{dx}=ax+c, \;\; dy=ax\,dx+c\,dx,$$

$$y=\frac{ax^2}{2}+cx+c'. \tag*{(2}$$

Ово 2) је интеграл диф. једначине 1).

123. $\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)=0$. — Задата једначина

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)=0 \tag*{(1}$$

претвара се заменом

$$\frac{dy}{dx}=p$$

у једначину првога реда

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(x)=0,$$

одакле

$$dp=-\varphi(x)\,dx, \quad p \text{ или } \frac{dy}{dx}=-\int\varphi(x)\,dx+c$$
$$=f(x)+c$$
$$dy=f(x)\,dx+c\,dx,$$
$$y=\int f(x)\,dx+cx+c'. \tag*{(2}$$

Пример.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-ax+bx^2-\sin x=0.$$

Заменом $\frac{dy}{dx}=p$ добијамо једначину

$$\frac{dp}{dx}-ax+bx^2-\sin x=0,$$

одакле

$$p \text{ или } \frac{dy}{dx}=\int(\sin x+ax-bx^2)\,dx=-\left(\cos x-\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}\right)+c$$

и најзад општи интеграл задате диф. једначине

$$y=-\int\left(\cos x-\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}\right)dx+cx+c'$$

$$=-\sin x+\frac{ax^3}{6}-\frac{bx^4}{12}+cx+c'.$$

124. $\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(y)=0.$ — Замена $\frac{dy}{dx}=p$ у једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(y)=0$$

води диф. једначини првога реда

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(y)=0,$$

која се, опет, кад у њој заменимо $dx=\frac{dy}{p}$, своди на ову

$$p\,dp=-\varphi(y)\,dy,$$

одакле

$$p^2 \text{ или } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-2\int\varphi(y)\,dy+c=f(y)+c$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{f(y)+c}$$

и најзад

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{f(y)+c}}+c'.$$

Пример.

1) $$\frac{d^2y}{dx^2}+ay=0.$$

Заменом $\frac{dy}{dx}=p$ добијамо

$$p\,dp=-ay\,dy,$$

одакле

$$p^2 \text{ или } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-ay^2+c,$$

а одавде следује општи интеграл

2) $$x=\int\frac{dy}{\sqrt{c-ay^2}}+c'.$$

При изналажењу вредности интеграла у формули 2) мора да правим следећу разлику:

1) ако је $a>0$ интеграл 2), кад се изврши, даје решење

2 a) $$x=\frac{1}{\sqrt{a}}\,arc\,sin\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\,y\right)+c'$$

(види чл. 6. Пример 5.).

Овај ресултат може да се напише, када једн. 2 a) решимо по y

$$y=\sqrt{\frac{c}{a}}\,sin\,\sqrt{a}\,(x-c')$$

$$=\sqrt{\frac{c}{a}}\,[sin\,x\sqrt{a}\,cos\,c'\sqrt{a}-cos\,x\sqrt{a}\,sin\,c'\sqrt{a}]$$

или краће

3 a) $$y=A\,sin\,x\sqrt{a}+B\,cos\,x\sqrt{a}.$$

2) ако је $a<0$, нпр. $a=-\alpha$, где је $\alpha>0$. Образац 2) гласи

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{c+\alpha y^2}}+c'$$

и када се изврши интегралење (в. 1. Пример у чл. 13.)

$$x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,l\left[y+\sqrt{\frac{c}{\alpha}+y^2}\right]+c'. \qquad (2\,b$$

Решавањем по y налазимо

$$y+\sqrt{\frac{c}{\alpha}+y^2}=e^{\sqrt{\alpha}\,(x-c')}=Ce^{\sqrt{\alpha}\,x},$$

$$\sqrt{\frac{c}{\alpha}+y^2}=Ce^{x\sqrt{\alpha}}-y,$$

$$\frac{c}{\alpha}+y^2=C^2e^{2x\sqrt{\alpha}}+y^2-2\,Ce^{x\sqrt{\alpha}},$$

$$y=\frac{C}{2}\,e^{x\sqrt{\alpha}}-\frac{c}{2\,\alpha C}\,e^{-x\sqrt{\alpha}}$$

или краће

$$y=Ae^{x\sqrt{\alpha}}+Be^{-x\sqrt{\alpha}}. \qquad (3\,b$$

125. $\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)=0.$ — У задатој диф. једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (1$$

стављамо $\frac{dy}{dx}=p$ и добијамо диф. једначину

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(p)=0,$$

одакле

$$x=-\int\frac{dp}{\varphi(p)}+c. \qquad (2$$

Ако се ова једн. 2) може да реши по p, тј. да се доведе на вид

$$p=\psi(x), \text{ дакле } dy=\psi(x)\,dx$$

интеграл задате диф. једначине 1) јесте тада

$$y=\int\psi(x)\,dx+c'. \qquad (3$$

Ако се, пак, једн. 2) не може да реши по p, онда ћемо поступити на следећи начин:

$$dy=p\,dx=-\frac{p\,dp}{\varphi(p)},$$

$$y=-\int\frac{p\,dp}{\varphi(p)}+c'. \qquad (4$$

Елиминовањем количине p из једн. 2) и 4) налазимо општи интеграл диф. једначине 1).

Пример. Да се нађе линија чији је полупречник ϱ кривине константан =
Диф. једначина гласи

1) $$\frac{(1+p^2)^{3/2}}{\dfrac{dp}{dx}} = a$$

(види Диф. Р. чл. 126.), одакле

$$dx = \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{3/2}},$$

2) $$x = \frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2}} + c,$$

$$dy = p\,dx = \frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{3/2}},$$

3) $$y = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + c'.$$

Елиминовањем количине p из 2) и 3) добијамо општи интеграл диф. једначине 1)

4) $$(x-c)^2 + (y-c')^2 = a^2.$$

Ово је једначина круга чији је полупречник $= a$.

Примедба. Могли бисмо доћи до резултата и овако: из једн. 2) имамо

$$p = \frac{x-c}{\sqrt{a^2-(x-c)^2}}$$

и онда

$$dy = \frac{(x-c)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-c)^2}}$$

$$y = -\sqrt{a^2-(x-c)^2} + c'$$

или

$$(x-c)^2 + (y-c')^2 = a^2.$$

126. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + ayf(x) = 0$. — Задата диф. једначина има вид

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + ayf(x) = 0.$$

Заменом

$$y = e^t,$$

$$\frac{dy}{dx} = e^t\frac{dt}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^t\frac{d^2t}{dx^2} + e^t\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$$

претвара се једн. 1) у ову

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + af(x) = 0$$

или, ако ставимо $\dfrac{dt}{dx} = p$,

2) $$\frac{dp}{dx} + p^2 + af(x) = 0.$$

Овим смо нашу диф. једначину 1), која је другога реда, свели на једну диф. једначину првога реда. Интеграљењем једн. 2) добијамо p као функцију x-а, нпр.

$$p = \varphi(x), \tag*{(3}$$

одакле, поновним интеграљењем, интеграл једн. 1)

$$y = \int \varphi(x)\,dx. \tag*{(4}$$

127. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + f(x)\dfrac{dy}{dx} + \varphi(x) = 0$. — Нека је задата диф. једначина вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x) = 0. \tag*{(1}$$

Ако ставимо $\dfrac{dy}{dx} = p$ добићемо диф. једначину првога реда

$$\frac{dp}{dx} + f(x)\,p + \varphi(x) = 0. \tag*{(2}$$

Претпоставимо да је ова диф. једначина 2) интеграљена и добивена интегрална једначина решена по p, нпр.

$$p = \psi(x, c), \tag*{(3}$$

онда је општи интеграл диф. једначине 1)

$$y = \int \psi(x, c)\,dx + c'. \tag*{(4}$$

Ако се, пак, интегрална једначина добивена из 2) не може да реши по p, али може да реши по x-у, нпр. овако

$$x = \chi(p, c), \tag*{(5}$$

онда диференциалењем следује

$$dx = \chi'(p, c)\,dp$$

и кад заменимо $dx = \dfrac{dy}{p}$

$$dy = p\,\chi'(p, c)\,dp,$$

$$y = \int p\,\chi'(p, c)\,dp \tag*{(6}$$

и најзад, елиминовањем количине p из 5) и 6), добијамо везу између x и y, а то је општи интеграл диф. једн. 1).

1. Пример.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+ax=0.$$

Заменом $\frac{dy}{dx}=p$ добијамо

$$\frac{dp}{dx}+x(p+a)=0,$$

одакле

$$\frac{dp}{p+a}=-x\,dx$$

$$l(p+a)=-\frac{x^2}{2}+c, \qquad p+a=e^{-\frac{x^2}{2}+c},$$

$$p=Ce^{-\frac{x^2}{2}}-a,$$

$$y=C\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx-ax+c'.$$

2. Пример. Да се нађе линија код које је полупречник кривине обрнуто пропорционалан апсциси.

Према формули за полупречник кривине (види Диф. Р. чл. 126.) диф. једначина линије, коју тражимо, јесте

$$\frac{(1+p^2)^{3/2}}{\frac{dp}{dx}}=\frac{a^2}{2x}$$

означујући са $\frac{a^2}{2}$ константни производ из апсцисе и полупречника кривине. Напишимо горњу диф. једначину

$$2x\,dx=\frac{a^2dp}{(1+p^2)^{3/2}},$$

које, кад интегралимо, даје

$$x^2+c=\frac{a^2p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad ^{1)}$$

одакле

$$p \text{ или } \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+c}{\sqrt{a^4-(x^2+c)^2}}$$

и пошто поново интегралимо

$$y=\int\frac{(x^2+c)\,dx}{\sqrt{a^4-(x^2+c)^2}}+c'.$$

Ово опште решење наше диф. једначине представља линију, која се зове *еластична линија.* То је линија коју показује једна еластична шипка када је једним крајем утврдимо, а други крај оптеретимо.

---

[1] $\int\frac{a^2dp}{(1+p^2)^{3/2}}$ добићемо најлакше заменом $p=tg\,u$, $dp=\frac{du}{cos^2u}$, $\frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}=cos^3u$. Тиме се горњи интеграл претвара у $\int\frac{a^2dp}{(1+p^2)^{3/2}}=a^2\int cos\,u\,du=a^2sin\,u=\frac{a^2p}{\sqrt{1+p^2}}$.

128. $\frac{d^2y}{dx^2}+f(y)\frac{dy}{dx}+\varphi(y)=0.$ — Узмимо да задата диф. једначина има вид

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(y)\frac{dy}{dx}+\varphi(y)=0. \qquad (1$$

Ставимо $\frac{dy}{dx}=p$, дакле $dx=\frac{dy}{p}$, које, замењено у једн. 1), даје нову диф. једначину

$$p\,dp+pf(y)\,dy+\varphi(y)\,dy=0. \qquad (2$$

Ако будемо умели да интегралимо ову једн. 2) и на тај начин изразимо y као функцију од p или обратно p као функцију од y, онда је остали поступак као и са једн. 2) у чл. 127.

1) Нека је

$$p=\psi(y,c) \qquad (3$$

интегрална једначина за диф. једн. 2). Из

$$\frac{dy}{dx}=\psi(y,c)$$

добијамо

$$x=\int\frac{dy}{\psi(y,c)}+c' \qquad (4$$

као интеграл диф. једн. 1).

2) Нека је

$$y=\chi(p,c) \qquad (5$$

интегрална једначина за диф. једн. 2). Диференциалењем једн. 5) следује

$$dy \text{ или } p\,dx=\chi'(p,c)\,dp,$$

одакле

$$x=\int\frac{\chi'(p,c)}{p}dp+c'. \qquad (6$$

Елиминовањем количине p из једн. 5) и 6) налазимо везу између x и y, дакле интеграл диф. једначине 1).

Пример.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(y-a)\frac{dy}{dx}=0.$$

Ставимо $\frac{dy}{dx}=p$ и задата се једначина претвара у ову

$$\frac{dp}{dx}+(y-a)p=0$$

или кад заменимо $dx=\frac{dy}{p}$

$$dp=(a-y)\,dy.$$

Одавде

$$p = ay - \frac{y^2}{2} + c,$$

дакле

$$dx = \frac{dy}{-\frac{y^2}{2} + ay + c}$$

$$x = -2\int \frac{dy}{y^2 - 2ay - c}.$$

Овај интеграл изналазимо на познат начин. (В. чл. 10.)

129. $\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + y\varphi(x) = 0.$ — Дата је диф. једначина

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + y\varphi(x) = 0.$$

Узећемо да је

$$y = uv,$$

где су u и v зависни од x-а, дакле

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2},$$

које, кад заменимо уједн. 1), даје

2) $$v\frac{d^2u}{dx^2} + \left[2\frac{dv}{dx} + vf(x)\right]\frac{du}{dx} + u\left[\frac{d^2v}{dx^2} + f(x)\frac{dv}{dx} + v\varphi(x)\right] =$$

Пошто једну од количина u и v можемо да определимо произвољ узећемо да је у једн. 2) фактор

$$2\frac{dv}{dx} + vf(x) = 0,$$

одакле

3) $$v = e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx},$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}f(x)\,e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \left[\frac{1}{4}f(x)^2 - \frac{1}{2}f'(x)\right]e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx},$$

које, када заменимо у једн. 2) $\Big($у којој сада нема више члана са $\frac{du}{dx}$ даје диф. једначину

4) $$\frac{d^2u}{dx^2} + u\left[\varphi(x) - \frac{1}{4}f(x)^2 - \frac{1}{2}f'(x)\right] = 0,$$

са којом ћемо поступити на начин изложен у чл. 126.

Пример.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + n^2y = 0.$$

Овде је $f(x) = \frac{2}{x}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$, $\varphi(x) = n^2$ и на основу обрасца 3)

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x}.$$

Диф. једн. 4) гласи

$$\frac{d^2u}{dx^2} + n^2u = 0.$$

Интеграл је ове једначине

$$u = A\sin nx + B\cos nx$$

(види чл. 124., пример, решење за $a > 0$).

Према овоме је општи интеграл задате диф. једначине $y = uv$

$$y = \frac{A\sin nx + B\cos nx}{x}.$$

130. Продужење чл. 129. — На случај да познајемо један партикуларан интеграл y_1 диф. једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + y\varphi(x) = 0, \qquad (1$$

онда можемо диф. једначину да сведемо на диф. једначину првога реда. Поступак је следећи. На основу претпоставке је

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + f(x)\frac{dy_1}{dx} + y_1\varphi(x) = 0. \qquad (2$$

Елиминовањем функције $\varphi(x)$ из 1) и 2) добијамо

$$y_1\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2y_1}{dx^2} + f(x)\left[y_1\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx}\right] = 0. \qquad (3$$

Ако ставимо

$$y_1\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx} = u, \quad \text{дакле } y_1\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{du}{dx} \qquad (4$$

једн. 3) добиће тиме форму диф. једначине првога реда

$$\frac{du}{dx} + uf(x) = 0,$$

одакле

$$u = Ce^{-\int f(x)\,dx}. \qquad (5$$

С овим и према обрасцу 4) имамо

$$y_1\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx} = Ce^{-\int f(x)\,dx}$$

или

$$d\frac{y}{y_1} = \frac{Ce^{-\int f(x)\,dx}}{y_1^2}$$

и најзад

$$y = C'y_1 + Cy_1\int\frac{e^{-\int f(x)\,dx}}{y_1^2}dx.$$

131. Метода неодређених сачинитеља. — Да бисмо интегралили диф. једначину другога реда

$$1)\qquad F(x, y, y', y'') = 0$$

ми претпостављамо да њен интеграл има вид

$$2)\qquad y = A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + \ldots$$

означавајући са $A, B, C, \ldots$ извесне константне сачинитеље, са $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ такође константне бројеве тако да је $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$

Из 2) следује

$$3)\qquad y' = \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \ldots$$

$$4)\qquad y'' = \alpha(\alpha-1) A x^{\alpha-2} + \beta(\beta-1) B x^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1) C x^{\gamma-2} + \ldots$$

Заменом ових вредности за y, y', y'' из 2), 3) и 4) у задату једн. 1) добијамо једначину на основу које смо у стању да определимо све оне константе $A, B, C, \ldots$, које се јављају у решењу 2) изузев двеју или једне. Ове две или једна константа, које остају неодређене то су интеграционе константе. Ако остану две произвољне константе добивени резултат представља општи интеграл диф. једначине 1); ако, пак, остаје само једна произвољна константа, онда је дотично решење партикуларан интеграл диф. једн. 1).

Покажимо ову методу на диф. једначини

$$1)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

(пример у чл. 129.). Претпостављамо интеграл у форми

$$2)\qquad y = A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + \ldots,$$

где је $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ Из 2) добијамо

$$3)\qquad \frac{dy}{dx} = \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \ldots$$

$$4)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1) A x^{\alpha-2} + \beta(\beta-1) B x^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1) C x^{\gamma-2} + \ldots$$

Заменом овога под 2), 3) и 4) у једн. 1) добијамо идентичну једначину

$$5)\qquad \begin{aligned} &A\alpha(\alpha+1) x^{\alpha-2} + A n^2 x^{\alpha} + B\beta(\beta+1) x^{\beta-2} + \\ &\qquad B n^2 x^{\beta} + C\gamma(\gamma+1) x^{\gamma-2} + C n^2 x^{\gamma} + \ldots = 0, \end{aligned}$$

у којој мора да су којефицијенти свију степена од x појединце $= 0$. Отуда што је $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ следује да је у једн. 5) најмањи изложитељ $\alpha - 2$. Којефицијент степена $x^{\alpha-2}$ мора да буде $= 0$, тј.

$$A\alpha(\alpha+1) = 0$$

и пошто A не може да је $= 0$, то мора да буде

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \alpha + 1 = 0, \ \text{тј.} \ \alpha = -1.$$

Узмимо да је

$$\alpha = -1.$$

Идући најмањи изложитељи јесу α и $\beta - 2$. Они могу бити једнаки или неједнаки. Ако су неједнаки, онда се члан $B\beta(\beta+1) x^{\beta-2}$ не може да потре ни са којим другим чланом у једн. 5) и зато мора да буде

$$B\beta(\beta+1) = 0,$$

дакле

$$\beta = 0 \quad \text{или} \quad \beta = -1.$$

Ово друго: $\beta = -1$ искључено је, јер је и $\alpha = -1$, а знамо да је $\beta > \alpha$. Онда мора да је

$$\beta = 0.$$

Од идућих изложитеља долазе као најмањи α и $\gamma - 2$. Они мора да су једнаки, јер у противноме случају члан $A n^2 x^{\alpha}$ не би имао ни са којим другим да се потре (пошто A није $= 0$). Из $\alpha = \gamma - 2$ следује

$$\gamma = 1, \qquad A n^2 + C\gamma(\gamma+1) = 0.$$

На исти начин налазимо

$$\begin{aligned} \delta &= 2, & B n^2 + D\delta(\delta+1) &= 0, \\ \varepsilon &= 3, & C n^2 + E\varepsilon(\varepsilon+1) &= 0, \end{aligned}$$

. . . .

Одавде следује

$$C = -\frac{A n^2}{1.2}, \ D = -\frac{B n^2}{1.2.3}, \ E = \frac{A n^4}{1.2.3.4}, \ F = \frac{B n^4}{1.2.3.4.5}, \ldots$$

и према томе

$$y = A\left(\frac{1}{x} - \frac{n^2 x}{1.2} + \frac{n^4 x^3}{1.2.3.4} - \ldots\right) + B\left(1 - \frac{n^2 x^2}{1.2.3} + \frac{n^4 x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

или

$$y = \frac{A \cos nx}{x} + \frac{B \sin nx}{nx}.$$

Најзад, ако произвољну константу $\frac{B}{n}$ обележимо краће са B, решење добија вид

$$y = \frac{A \cos nx + B \sin nx}{x}. \qquad (6$$

Ово решење, у коме се налазе две произвољне константе A и B, представља општи интеграл диф. једначине.

Примедба. Ми смо претпоставили горе да су α и $\beta - 2$ различни. Расмотримо случај да је $\beta - 2 = \alpha = -1$, дакле

$$\beta = 1.$$

У овоме случају члан $C\gamma(\gamma+1)x^{\gamma-2}$ мора да се потре са чланом Bn^2x^β, а то значи да је $\gamma-2=\beta=1$, дакле $\gamma=3$, а на исти нанин

$$\delta-2=\gamma=3, \quad „ \quad \delta=5,$$
$$\varepsilon-2=\delta=5, \quad „ \quad \varepsilon=7,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Одавде следује

$$B=-\frac{An^2}{1.2}, \quad C=\frac{An^4}{1.2.3.4}, \quad D=-\frac{An^6}{1.2.3.4.5.6}, \ldots$$

и према томе

7) $$y=A\left(\frac{1}{x}-\frac{n^2x}{1.2}+\frac{n^4x^3}{1.2.3.4}-\ldots\right)=\frac{A\cos nx}{x}.$$

Ово је решење партикуларно, јер садржи само једну произвољну константу.

Претпоставка да је

$$\alpha=0$$

(ми смо горе у почетку од две могућности: $\alpha=0$ и $\alpha=-1$, које потичу из једначине $A\alpha(\alpha+1)=0$, узели у расматрање ону другу: $\alpha=-1$) води нас опет једноме партикуларноме решењу:

8) $$y=\frac{B\sin nx}{nx}.$$

Када саберемо ова два партикуларна интеграла 7) и 8) добијамо општи интеграл 6).

3. Диференциалне једначине вишега реда.

132. $\frac{d^ny}{dx^n}=\varphi(x)$. — Нека је задата диф. једначина

1) $$\frac{d^ny}{dx^n}=\varphi(x).$$

Из 1) следује поступно

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int\varphi(x)\,dx+c,$$
$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int dx\int\varphi(x)\,dx+cx+c',$$
$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}=\int dx\int dx\int\varphi(x)\,dx+cx^2+c'x+c'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2) $$y=\int\varphi(x)\,dx^n+cx^{n-1}+c'x^{n-2}+\ldots+c^{(n-2)}x+c^{(n-1)}.$$

Овде означава $\int\varphi(x)\,dx^n$ многоструки интеграл $\int dx\int dx\ldots\int\varphi(x)\,dx$, који добијамо n пута поновљеним интегралењем по x-у.

Пример.

$$\frac{d^4y}{dx^4}=3x^2-2.$$

Решење:

$$y=\int dx\int dx\int dx\int(3x^2-2)\,dx+cx^3+c'x^2+c''x+c'''.$$

Овде је

$$\int dx\int dx\int dx\int(3x^2-2)\,dx=\int dx\int dx\int(x^3-2x)\,dx$$
$$=\int dx\int\left(\frac{x^4}{4}-x^2\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{x^6}{120}-\frac{x^4}{12}$$

и према томе

$$y=\frac{x^6}{120}-\frac{x^4}{12}+cx^3+c'x^2+c''x+c'''.$$

133. $F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$. — Посматрајмо диф. једначину

$$F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0. \tag{1}$$

Ставићемо $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=p$, дакле $\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{dp}{dx}$ и тиме ћемо претворити једн. 1) у ову

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}\right)=0, \tag{2}$$

одакле

$$\frac{dp}{dx}=f(p), \quad dx=\frac{dp}{f(p)}, \quad x=\int\frac{dp}{f(p)}+c. \tag{3}$$

(Види чл. 125.). Ако се ова последња једн. 3) може да реши по p, тј. ако се може да доведе на вид

$$p=\varphi(x) \quad \text{или} \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varphi(x)$$

добићемо

$$y=\int\varphi(x)\,dx^{n-1}+c'x^{n-2}+c''x^{n-3}+\ldots+c^{(n-1)} \tag{4}$$

(види чл. 132.).

Ако, пак, није могуће да се изрази p у x-у, онда је поступак следећи:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=p \quad \text{или} \quad d\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=p\,dx,$$

а ово је, на основу обрасца 3), $=\frac{p\,dp}{f(p)}$, дакле

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int\frac{p\,dp}{f(p)}+c',$$

које, кад помножимо са $dx = \frac{dp}{f(p)}$ и поново интегралимо, даје

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int \frac{dp}{f(p)} \int \frac{p\,dp}{f(p)} + c'x + c''$$

итд. итд.

134. $F\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$. — Узмимо диф. једначину

1) $$F\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

и означимо

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p, \text{ дакле } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^2 p}{dx^2},$$

услед чега она добија вид

$$F\left(p, \frac{d^2 p}{dx^2}\right) = 0$$

или

2) $$\frac{d^2 p}{dx^2} = f(p)$$

(види чл. 124.). Помножимо леву и десну страну ове једначине 2) са $2\frac{dp}{dx}dx = 2\,dp$, па ћемо добити

$$2\frac{d^2 p}{dx^2}\,\frac{dp}{dx}\,dx = 2f(p)\,dp$$

или

$$d\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2f(p)\,dp,$$

одакле

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{c + 2\int f(p)\,dp},$$

3) $$x = \int \frac{dp}{\sqrt{c + 2\int f(p)\,dp}} + c' = \int \frac{dp}{\psi(p)} + c'.$$

Ако се ова једначина 3) може да реши по p, тј. да се преведе на форму

$$p \text{ или } \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \varphi(x),$$

онда се општи интеграл (према чл. 132.) добија вршењем квадратура, којима се, поред оних двеју констаната c и c', уносе још њих $n-2$. Ако се, међутим, једн. 3) не буде могла да реши по p поступак је овај: Из

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p \quad \text{следује}$$

$$d\,\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = p\,dx = \frac{p\,dp}{\psi(p)},$$

дакле

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int \frac{p\,dp}{\psi(p)} + c''.$$

Аналогно $$\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = \int \frac{dp}{\psi(p)} \int \frac{p\,dp}{\psi(p)} + c'' \int \frac{dp}{\psi(p)} + c'''$$

итд. док на крају не добијемо

$$y = \phi(p), \tag*{4)}$$

која у себи садржи n произвољних констаната. Општи интеграл диф. једначине 1) налазимо елиминовањем количине p из једн. 3) и 4).

135. Диференциалне једначине чији се ред може да смањи. Први случај. — Ако у диф. једначини

$$F\left(x, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \tag*{(1}$$

која је n-тога реда, ставимо $\frac{d^m y}{dx^m} = p$ задата се једначина своди на ову

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots \frac{d^{n-m}y}{dx^{n-m}}\right) = 0, \tag*{(2}$$

која је $n-m$-тога реда, дакле за m јединица нижега реда од задате диф. једначине.

Ако будемо умели да интегралимо једн. 2) и после је решимо по x или по p, онда је даљи поступак исти као у чл. 134.

136. Продужење чл. 135. Други случај. — Узмимо диф. једначину

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \tag*{(1}$$

у којој нема променљиве x. Ред овакве једначине може да се смањи за 1, када узмемо y за прапроменљиву и ставимо $\frac{dy}{dx} = p$. Тада је

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dx} = p^2\frac{d^2 p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

. . . .

Уопште $\frac{d^n y}{dx^n}$ као функција од p постаје $n-1$вога реда. Заменом ових вредности у једн. 1) добијамо диф. једначину $n-1$вога реда

$$\phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0, \tag*{(2}$$

чији општи интеграл садржи $n-1$ произвољну константу, којима, интегралењем једачине $dy = p\,dx$, придолази још једна произвољна константа.

137. Продужење чл. 136. Трећи случај: хомогене једначине. — Ако је диф. једначина

1) $$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

хомогена у односу према y и њеним изводнама, онда се њен ред може да смањи за 1: од n на $n-1$.

Нека је k степен хомогености једначине 1). У томе се случају једн. 1) може да напише

2) $$y^k \Phi\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0.$$

Ставимо

$$y = e^{\int u\,dx},$$

дакле

$$y' = e^{\int u\,dx}.\,u,$$

$$y'' = e^{\int u\,dx}\left(\frac{du}{dx} + u^2\right),$$

$$y''' = e^{\int u\,dx}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3\,u\frac{du}{dx} + u^3\right),$$

. . . .

Заменом ових вредности у једн. 2) добијамо диф. једначину $n-1$вога реда.

4. Линеарне једначине вишега реда.

138. Дефиниција. — За диф. једначину кажемо да је линеарна када се у њој функција y и њене изводне налазе само у првоме степену и нису ни међусобом множене. Општи вид једне линеарне диф. једначина n-тога реда јесте

1) $$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

где су $P, Q, \dots T, U, V$ функције од x.

За једначину 1) кажемо да је потпуна за разлику од једначине

2) $$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0,$$

у којој на десној страни нема (другога) члана V.

139. Својство линеарних једначина које немају другога члана. — Нека су $y_1, y_2, \dots y_k$ извесне особене функције, које задовољавају линеарну једначину

1) $$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

Једначина 1) је тада задовољена и збиром оних партикуларних интеграла $y_1, y_2, \dots y_k$ пошто сваки још помножимо каквом произвољном константом, тј. једн. 1) има и ово решење

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k. \qquad (2$$

Доказ. Диференциалењем добијамо из 2)

$$\frac{dy}{dx} = c_1\frac{dy_1}{dx} + c_2\frac{dy_2}{dx} + \dots + c_k\frac{dy_k}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \dots + c_k\frac{d^2y_k}{dx^2},$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = c_1\frac{d^ny_1}{dx^n} + c_2\frac{d^ny_2}{dx^n} + \dots + c_k\frac{d^ny_k}{dx^n},$$

које, кад заменимо у једн. 1), даје

$$c_1\left(\frac{d^n y_1}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \dots + T\frac{dy_1}{dx} + Uy_1\right) +$$

$$c_2\left(\frac{d^n y_2}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-2}} + \dots + T\frac{dy_2}{dx} + Uy_2\right) +$$

. . . .

$$c_k\left(\frac{d^n y_k}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} + \dots + T\frac{dy_k}{dx} + Uy_k\right) = 0.$$

Пошто је (на основу претпоставке) сваки од израза у загради за себе $= 0$, то је тиме доказано да је диф. једн. 1) задовољена функцијом под 2).

Закључак. На основу горе доказанога изводимо закључак: ако познајемо n партикуларних решења диф. једн. 1) добићемо опште решење узев

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \qquad (3$$

са претпоставком да се константе $c_1, c_2, \dots c_n$ могу да определе тако да функција y и њене изводне $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ за ма какву вредност x-а добију произвољне вредности. Овај услов претпоставља да су партикуларна решења независна међусобом: да између њих не постоји никаква веза, јер на случај да је нпр.

$$y_3 = a\,y_1 + b\,y_2$$

имали бисмо

$$y = (c_1 + a\,c_3)\,y_1 + (c_2 + b\,c_3)\,y_2 + c_4 y_4 + \dots + c_n y_n,$$

а ово решење садржи, као што видимо, свега $n-1$ произвољну константу (то су $c_1 + a\,c_3$, $c_2 + b\,c_3$, $c_4, \dots c_n$) и, према томе, није општи интеграл диф. једначине n-тога реда.

Из овога, опет, изводимо даљи закључак да диф. једначина n-тога реда не може да има више од n независних партикуларних интеграла.

Јер, у противноме случају, множећи сваки партикуларни интеграл произвољном константом и сабирањем тих производа добили бисмо нови интеграл, који би имао више од n произвољних констананата.

Обратно, ако нам је познат општи интеграл 3) диф. једн. 1), онда се помоћу њега, придавањем специалних вредности онима произвољним константама, може да добије сваки партикуларни интеграл.

140. Продужење чл. 139. — Пошто је линеарна једначина

$$1)\qquad \frac{d^n y}{d x^n}+P\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}}+\ldots+T\frac{dy}{dx}+Uy=0$$

хомогена у погледу y-а и њених изводних, то се њен ред може да смањи за 1, када се замени $y=e^{\int u\,dx}$ (види чл. 137.), али једначина престаје бити линеарна, јер добија овакав вид

$$2)\qquad \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}}+\ldots+(u^n+Pu^{n-1}+Q\,u^{n-2}+\ldots+U)=0.$$

Ову је диф. једначину, у већини случајева, теже интегралити но задату једн. 1). Међутим, у извесним случајима, лако је добити партикуларне интеграле једн. 2). Тако нпр. ако једначина

$$3)\qquad u^n+Pu^{n-1}+Q\,u^{n-2}+\ldots+U=0$$

има корен r, који је независан од x, онда та вредност $u=r$, која задовољава једн. 3) и за коју су и изводне $\frac{d\,u}{d\,x}=\ldots=\frac{d^{n-1}u}{d\,x^{n-1}}=0$, задовољава и диф. једн. 2). На тај начин је, дакле, $y=Ce^{\int r\,dx}=Ce^{rx}$ један партикуларан интеграл диф. једначине 1).

141. Хомогене линеарне једначине са константним коефицијентима. — Општа метода за интегралење линеарних диф. једначина, које немају другога члана (које су, дакле, хомогене), није позната. Ако су, пак, у једначини

$$1)\qquad \frac{d^n y}{d x^n}+P\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}}+\ldots+T\frac{dy}{dx}+Uy=0$$

коефицијенти $P, Q, \ldots T, U$ константни, онда се може увек да добије општи интеграл такве једначине. У случају да су коефицијенти $P, Q, \ldots T, U$ константни јесу и корени једн. 3) у прошломе члану константни, дакле независни од x. Претпоставимо да су сви ти корени $r_1, r_2, \ldots r_n$ једначине

$$2)\qquad f(r)=r^n+Pr^{n-1}+Qr^{n-2}+\ldots+Tr+U=0$$

стварни и различни, онда имамо као партикуларне интеграле $y_1=C_1e^{r_1 x}$, $y_2=C_2\,e^{r_2 x}, \ldots\; y_n=C_n\,e^{r_n x}$, а опште је решење диф. једн. 1)

$$3)\qquad y=C_1\,e^{r_1 x}+C_2\,e^{r_2 x}+\ldots+C_n e^{r_n x}.$$

Пример.

$$\frac{d^2 y}{d x^2}-a^2 y=0. \qquad (1$$

Имамо квадратну једначину

$$r^2-a^2=0, \qquad (2$$

одакле

$$r_1=+a, \qquad r_2=-a$$

и према томе општи интеграл диф. једн. 1)

$$y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}.$$

(Види чл. 124., пример, решење под 2).

142. Продужење чл. 141. — На случај да једначина

$$f(r)=r^n+Pr^{n-1}+Q\,r^{n-2}+\ldots+Tr+U=0$$

има имагинарних корена општи је интеграл хомогене линеарне једначине 1) у чл. 141. и сада представљен формулом

$$y=C_1\,e^{r_1 x}+C_2\,e^{r_2 x}+\ldots+C_n\,e^{r_n x},$$

али је сада у имагинарноме облику. Да бисмо му дали стваран вид имаћемо на уму да се имагинарни корени једне алгебарске једначине јављају у спреговима. Узмимо да су

$$r_1=\alpha+i\beta \quad \text{и} \quad r_2=\alpha-i\beta,$$

где је $i=\sqrt{-1}$, два корена горње једначине $f(r)=0$. У општему интегралу имамо тада

$$\begin{aligned}C_1\,e^{r_1 x}+C_2\,e^{r_2 x}&=C_1\,e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2\,e^{(\alpha-i\beta)x}\\&=e^{\alpha x}\,[(C_1+C_2)\cos\beta x+i\,(C_1-C_2)\sin\beta x]\\&=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)\,e^{\alpha x},\end{aligned}$$

где су $A=C_1+C_2$ и $B=i\,(C_1-C_2)$ две произвољне константе, које се могу сматрати као стварне.

Збир оваква два члана, који одговарају спрегу имагинарних корена, може да се представи на овај начин

$$(A\cos\beta x+B\sin\beta x)\,e^{\alpha x}=c\,e^{\alpha x}\sin(\beta x+c')$$

(види чл. 124., пример, решење под 1).

1. Пример.

$$\frac{d^2 y}{d x^2}+a^2 y=0. \qquad (1$$

Из квадратне једначине

$$r^2+a^2=0 \qquad (2$$

следују корени

$$r_1=+ia \text{ и } r_2=-ia$$

и према томе као опште решење диф. једн. 1)

$$y=C_1e^{iax}+C_2e^{-iax}=A\cos ax+B\sin ax \qquad (3$$

(види чл. 124. пример, решење под 1).

2. *Пример.*

1) $$\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{d^2y}{dx^2} + 19\frac{dy}{dx} - 13y = 0.$$

Корени кубне једначине

2) $$r^3 - 7r^2 + 19r - 13 = 0$$

јесу

$$r_1 = 1,\ r_2 = 3 + 2i,\ r_3 = 3 - 2i,$$

дакле општи интеграл задате једн. 1)

3) $$y = Ce^x + [A\cos 2x + B\sin 2x]\,e^{3x}.$$

143. Продужење чл. 142. — Претпоставимо да једначина

$$f(r) = r^n + Pr^{n-1} + Qr^{n-2} + \ldots + Tr + U = 0$$

има многоструке корене. Узмимо нпр. да је r_1 двоструки корен, дакле

$$f(r) = (r - r_1)^2\,\varphi(r).$$

Диференциалењем следује

$$f'(r) = 2(r - r_1)\,\varphi(r) + (r - r_1)^2\,\varphi'(r),$$

одакле закључујемо да је у овоме случају (тј. када је r_1 двоструки корен једн. $f(r) = 0$) r_1 прост корен једначине $f'(r) = 0$.

Замислимо да је r_1 троструки корен једн. $f(r) = 0$, дакле

$$f(r) = (r - r_1)^3\,\varphi(r).$$

Диференциалењем налазимо

$$f'(r) = 3(r - r_1)^2\,\varphi(r) + (r - r_1)^3\,\varphi'(r),$$
$$f''(r) = 6(r - r_1)\,\varphi(r) + 6(r - r_1)^2\,\varphi'(r) + (r - r_1)^3\,\varphi''(r)$$

и закључујемо: ако је r_1 троструки корен једн. $f(r) = 0$, онда је r_1 у исто време двоструки корен једн. $f'(r) = 0$, а прост корен једн. $f''(r) = 0$. Итд. итд.

Узмимо као пример диф. једначину

$$\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^3y}{dx^3} + Q\frac{d^2y}{dx^2} + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

Да би e^{r_1x} представљало партикуларно решење ове диф. једначине мора да је r_1 корен једначине $f(r) = 0$, тј. мора да постоји једначина

$$r_1^4 + Pr_1^3 + Qr_1^2 + Tr_1 + U = 0.$$

Ако је r_1 двоструки корен, онда је испуњена и ова једначина $f'(r_1) = 0$, а то је

$$4r_1^3 + 3Pr_1^2 + 2Qr_1 + T = 0.$$

У томе случају постоји, осим партикуларнога интеграла e^{r_1x}, још и партикуларно решење xe^{r_1x}, које добијамо диференциалењем e^{r_1x} по r_1.

Доказ. Узмимо да је

$$y = xe^{r_1x},$$

дакле

$$\frac{dy}{dx} = e^{r_1x}(1 + r_1x),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{r_1x}(2r_1 + r_1^2x),$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{r_1x}(3r_1^2 + r_1^3x),$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^{r_1x}(4r_1^3 + r_1^4x)$$

и заменимо ово у задату диф. једначину, па ћемо добити

$$(r_1^4 + Pr_1^3 + Qr_1^2 + Tr_1 + U)\,x + 4r_1^3 + 3Pr_1^2 + 2Qr_1 + T = 0$$

или краће

$$xf(r_1) + f'(r_1) = 0.$$

Отуда, што је r_1 двоструки корен, дакле $f(r_1) = 0$ и $f'(r_1) = 0$, следује је наша диф. једначина задовољена кад ставимо $y = xe^{r_1x}$. Из партикуларних интеграла $C_1e^{r_1x}$ и $C_2xe^{r_1x}$ налазимо решење $C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x}$, које се односи на двоструки корен r_1 и у коме се решењу, као што видимо, налазе две произвољне константе C_1 и C_2. Остала два корена r_3 и r_4 дају партикуларне интеграле $C_3e^{r_3x}$ и $C_4e^{r_4x}$. Опште је решење диф. једначине, дакле, ово

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^{r_1x} + C_3e^{r_3x} + C_4e^{r_4x}.$$

На случај да је r_1 троструки корен једначине $f(r) = 0$ јесте

$$r_1^4 + Pr_1^3 + Qr_1^2 + Tr_1 + U = 0,$$
$$4r_1^3 + 3Pr_1^2 + 2Qr_1 + T = 0,$$
$$12r_1^2 + 6Pr_1 + 2Q = 0.$$

Доказаћемо да, поред партикуларних решења e^{r_1x} и xe^{r_1x}, постоји још и партикуларно решење $x^2e^{r_1x}$, које се такође односи на троструки корен r_1. Ако ставимо $y = x^2e^{r_1x}$ и вредности, које одавде потичу за $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и $\frac{d^4y}{dx^4}$, заменимо у задату диф. једначину добићемо ресултат

$$(r_1^4 + Pr_1^3 + Qr_1^2 + Tr_1 + U)\,x^2 + (4r_1^3 + 3Pr_1^2 + 2Qr_1 + T)\,x$$
$$+ 12r_1^2 + 6Pr_1 + 2Q = 0$$

или краће

$$f(r_1)\,x^2 + f'(r_1)\,x + f''(r_1) = 0,$$

из кога, пошто је $f(r_1) = 0$, $f'(r_1) = 0$ и $f''(r_1) = 0$, закључујемо да је наша диф. једначина задовољена решењем $x^2e^{r_1x}$. Имамо, дакле, ова три партикуларна интеграла $C_1e^{r_1x}$, $C_2xe^{r_1x}$ и $C_3x^2e^{r_1x}$, који одговарају троструком корену r_1. Заједничко је решење $C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + C_3 x^2 e^{r_1 x}$. Четвртоме простоме корену r_4 одговара партикуларно решење $C_4 e^{r_4 x}$. Опште решење је дакле

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{r_1 x} + C_4 e^{r_4 x},$$

где су C_1, C_2, C_3 и C_4 четири произвољне константе.

Пример.

$$\frac{d^4 y}{d x^4} - \frac{d^3 y}{d x^3} - 3\,\frac{d^2 y}{d x^2} + 5\,\frac{d y}{d x} - 2 x = 0.$$

Стављамо $y = e^{rx}$ и добијамо за r биквадратну једначину

$$r^4 - r^3 - 3 r^2 + 5 r - 2 = 0,$$

чији су корени

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1,\ r_4 = -2.$$

Општи је интеграл, према горњему, ово

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^x + C_4 e^{2x}.$$

144. Општа линеарна диференциална једначина другога реда са константним коефицијентима. — Тип ове групе једначина је

1) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + A\,\frac{dy}{dx} + B y = F(x).$$

Прво решавамо хомогену диф. једначину

2) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + A\,\frac{dy}{dx} + B y = 0$$

(у којој нема другога члана $F(x)$) узев

3) $$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

где су r_1 и r_2 корени квадратне једначине

4) $$r^2 + A r + B = 0$$

(види чл. 141.).

Сматравши α и β као функције од x, које треба одредити тако да задата диф. једначина 1) буде решењем под 3) задовољена, применићемо методу варијације констаната (види чл. 92.). Диференциалењем добијамо из 3)

$$\frac{dy}{dx} = r_1 \alpha e^{r_1 x} + r_2 \beta e^{r_2 x} + \left(e^{r_1 x}\frac{d\alpha}{dx} + e^{r_2 x}\frac{d\beta}{dx}\right).$$

Заменом добивених вредности за y и $\dfrac{dy}{dx}$ и вредности за $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, која се добија из последњега обрасца, у једн. 1) налазимо једну једначину за опредељавање количина α и β. Но пошто ова једна једначина није довољна да се одреде две непознате α и β, то ћемо, осим речене једначине, узети још и условну једначину

$$e^{r_1 x}\frac{d\alpha}{dx} + e^{r_2 x}\frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Овим постаје

$$\frac{dy}{dx} = r_1 \alpha e^{r_1 x} + r_2 \beta e^{r_2 x},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r_1^{\,2} \alpha e^{r_1 x} + r_2^{\,2} \beta e^{r_2 x} + r_1 e^{r_1 x}\frac{d\alpha}{dx} + r_2 e^{r_2 x}\frac{d\beta}{dx},$$

које, кад заменимо у једн. 1), даје

$$\alpha e^{r_1 x}(r_1^{\,2} + A r_1 + B) + \beta e^{r_2 x}(r_2^{\,2} + A r_2 + B) + r_1 e^{r_1 x}\frac{d\alpha}{dx} + r_2 e^{r_2 x}\frac{d\beta}{dx} = F(x).$$

Услед тога што су r_1 и r_2 корени квадратне једначине 4) прва су два члана $= 0$ и тиме имамо за опредељавање количина α и β ове две једначине

$$r_1 e^{r_1 x}\frac{d\alpha}{dx} + r_2 e^{r_2 x}\frac{d\beta}{dx} = F(x),$$

$$e^{r_1 x}\frac{d\alpha}{dx} + e^{r_2 x}\frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Одавде сабирањем, пошто помножимо, претходно, прву једначину са -1, другу са r_2,

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{r_2 - r_1} F(x)\, e^{-r_1 x}$$

и аналогно, кад помножимо прву једначину са 1, другу са $-r_1$,

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{r_2 - r_1} F(x)\, e^{-r_2 x}.$$

Дакле

$$\alpha = -\frac{1}{r_2 - r_1}\int F(x)\, e^{-r_1 x}\, dx + C_1$$

$$\beta = \frac{1}{r_2 - r_1}\int F(x)\, e^{-r_2 x}\, dx + C_2$$

и према обрасцу 3) опште решење диф. једн. 1)

$$y = e^{r_1 x}\left[-\frac{1}{r_2 - r_1}\int F(x)\, e^{-r_1 x}\, dx + C_1\right] + e^{r_2 x}\left[\frac{1}{r_2 - r_1}\int F(x)\, e^{-r_2 x}\, dx + C_2\right].$$

Пример.

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 3\,\frac{d y}{d x} + 2 y = e^{2x}.$$

Прво расматрамо хомогену једначину

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 3\,\frac{d y}{d x} + 2 y = 0.$$

Стављамо $y = e^{rx}$, а r одређујемо из квадратне једначине

$$r^2 - 3x + 2 = 0.$$

Корени су $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$ и према томе опште решење хомогене диф. једначине ово

$$y = \alpha e^x + \beta e^{2x}.$$

Одавде, вариацијом констаната,

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^x + 2\beta e^{2x} + \left(e^x \frac{d\alpha}{dx} + e^{2x} \frac{d\beta}{dx} \right).$$

За определење количина α и β узећемо да је

$$e^x \frac{d\alpha}{dx} + e^{2x} \frac{d\beta}{dx} = 0$$

услед чега је

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^x + 2\beta e^{2x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha e^x + 4\beta e^{2x} + e^x \frac{d\alpha}{dx} + 2e^{2x} \frac{d\beta}{dx},$$

које, када заменимо у задату диф. једначину, даје за определење количина α и β, осим једначине

$$e^x \frac{d\alpha}{dx} + e^{2x} \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

још и ову

$$e^x \frac{d\alpha}{dx} + 2e^{2x} \frac{d\beta}{dx} = e^{2x}.$$

Из ових двеју једначина налазимо

$$\frac{d\alpha}{dx} = -e^x, \quad \alpha = -e^x + C_1,$$

$$\frac{d\beta}{dx} = 1, \qquad \beta = x + C_2$$

и према овоме имамо као решење задате диф. једначине

$$y = (-e^x + C_1) e^x + (x + C_2) e^{2x}$$

или краће

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^{2x}.$$

145. Особени случај диференциалне једначине другога реда са константним коефицијентима. — Посматрајмо случај да се на десној страни диф. једначине налази једна цела и рационална функција од x, да је диф. једначина, дакле, вида

$$1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \ldots + \mathfrak{P}x^n.$$

Полазимо од хомогене диф. једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0.$$

Њено је решење $y = \alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x}$, где су r_1 и r_2 корени квадратне једначине $r^2 + Ar + B = 0$. Овоме решењу хомогене диф. једначине додајемо једну целу и рационалну функцију n-тога степена од x, тј. стављамо

$$y = \alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x} + a + bx + cx^2 + fx^3 + \ldots + px^n. \qquad (2$$

Онда је

$$\frac{dy}{dx} = r_1 \alpha_1 e^{r_1 x} + r_2 \alpha_2 e^{r_2 x} + b + 2cx + 3fx^2 + \ldots + npx^{n-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r_1{}^2 \alpha e^{r_1 x} + r_2{}^2 \alpha_2 e^{r_2 x} + 2c + 6fx + \ldots + n(n-1)px^{n-2}.$$

Заменом ових вредности у задату диф. једначину добијамо идентичну једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = \alpha_1 e^{r_1 x}(r_1{}^2 + Ar_1 + B) + \alpha_2 e^{r_2 x}(r_2{}^2 + Ar_2 + B)$$
$$+ 2c + Ab + Ba + (6f + 2Ac + Bb)x + \ldots + Bpx^n =$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \ldots + \mathfrak{P}x^n,$$

која, услед тога што је $r_1{}^2 + Ar_1 + B = 0$ и $r_2{}^2 + Ar_2 + B = 0$, скраћује се на ову

$$2c + Ab + Ba + (6f + 2Ac + Bb)x + \ldots + Bpx^n =$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \ldots + \mathfrak{P}x^n.$$

Сравнењем сачинитеља једнаких степена x-а на левој и десној страни ове идентичне једначине добијамо потребан број једначина

$$2c + Ab + Ba = \mathfrak{A},$$
$$6f + 2Ac + Bb = \mathfrak{B},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Bp = \mathfrak{P}$$

за определење коефицијената $a, b, c, \ldots p$, који се јављају у решењу 2) задате диф. једн. 1).

1. Пример.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 5 + 4x + x^2.$$

За хомогену једначину $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ имамо квадратну једначину $r^2 - 3r + 2 = 0$, чији су корени $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$, дакле општи интеграл њен ово $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}$. Интеграл задате диф. једн. има вид

$$y = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + a + bx + cx^2.$$

Одавде
$$\frac{dy}{dx} = \alpha_1 e^x + 2\,\alpha_2 e^{2x} + b + 2\,cx,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha_1 e^x + 4\,\alpha_2 e^{2x} + 2\,x,$$

које, кад заменимо у задату једначину, даје ресултат
$$2 + 2\,a - 3\,b + (2\,b - 6)\,x + 2\,cx^2 = 5 + 4\,x + x^2.$$

За одређивање којефицијената a, b, c имамо
$$\begin{aligned} 2 + 2\,a - 3\,b &= 5,\\ 2\,b - 6 &= 4,\\ 2\,c &= 1, \end{aligned}$$

одакле
$$a = 9,\; b = 5,\; c = \frac{1}{2}$$

и према томе интеграл задате диф. једначине јесте
$$y = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + 9 + 5x + \frac{x^2}{2}.$$

2. Пример.
$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = g + hx.$$

Општи интеграл хомогене једн. $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0$ јесте $y = A\cos ax + B\sin ax$ (види чл. 142., 1. пример). Интеграл задате диф. једначине мора да има вид
$$y = A\cos ax + B\sin ax + k + mx.$$
Дакле
$$\frac{d^2y}{dx^2} = - A a^2 \cos ax - B a^2 \sin ax.$$

Заменом ових вредности за y и $\frac{d^2y}{dx^2}$ у задату једначину добијамо
$$a^2\,(k + mx) = g + hx,$$
дакле
$$k + mx = \frac{g + hx}{a^2}.$$

Према овоме је интеграл задате диф. једн.
$$y = A\cos ax + B\sin ax + \frac{g + hx}{a^2}.$$

3. Пример.
$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2 y = hx^2.$$

Општи интеграл хомогене једн. $\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 a = 0$ јесте $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$ (види пример у чл. 141.).

Интеграл задате диф. једначине има вид
$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + k + mx + qx^2.$$
Одавде
$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 a^2 e^{ax} + C_1 a^2 e^{-ax} + 2\,q.$$

Заменом ових вредности за y и $\frac{d^2y}{dx^2}$ у задату једначину налазимо
$$2\,q - a^2\,(k + mx + qx^2) = hx^2,$$
тј.
$$2\,q - a^2 k = 0,\quad a^2 m = 0,\quad - a^2 q = h,$$
дакле
$$q = -\frac{h}{a^2},\quad m = 0,\quad k = -\frac{2\,h}{a^4}.$$

Према овоме је интеграл наше диф. једначине
$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} - \frac{2\,h}{a^4} - \frac{h}{a^2}\,x^2.$$

III.

Симултане диференциалне једначине.

1. О симултаним диференциалним једначинама уопште.

146. Замена једне системе симултаних једначина једном диференциалном једначином. — Узмимо две једначине
$$F\left(x,\; y,\; \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^m y}{dx^m},\; z,\; \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0,$$
$$\Phi\left(x,\; y,\; \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^n y}{dx^n},\; z,\; \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0,$$
које садрже две функције x-а, то су y и z и њихове изводне до извесного ступња. Из ове две једначине може да се елиминује z и да се добије једна једначина са само једном функцијом y и њенима изводнама. То елиминовање извршили бисмо на овај начин: прву бисмо једначину диференциалили q пута, другу једначину p пута и добили бисмо свега (заједно са задатима двема) $p + q + 2$ једначине из којих се, познатим начином, могу да елиминују $n + 1$ количина z, $\frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{p+q} z}{dx^{p+q}}$. Појмљиво је да је ред једначине, до које долазимо елиминовањем z-а, раван већему од два броја $n + p$ и $m + q$.

Примедба. Онако како смо урадили са две симултане једначине, у којима се јављају две функције прапромењљиве x, можемо да поступимо и опште када нам је дато k једначина у којима је k функција, које све зависе од x. Поступним елиминовањем по једне функције и њених изводних долазимо, најзад, до једне једначине у којој се налази само још једна функција са њенима изводнама.

147. Замена једне диференциалне једначине системом симултаних једначина. — Диференциална једначина ма којега реда са две променљиве може да се замени једном системом симултаних једначина првога реда, када се све изводне, изузев изводну највишега ступња, обележе нарочитим знаком. Тако нпр. диф. једначина трећега реда

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}\right)=0$$

еквивалентна је системи једначина

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=y'', \\ &F\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ \frac{dy''}{dx}\right)=0. \end{aligned}\right\}$$

На исти начин следеће две једначине са три променљиве

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ z,\ \frac{dz}{dx}\right)=0,$$

$$\Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2}\right)=0$$

можемо да заменимо системом симултаних једначина првога реда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=y'', \quad \frac{dz}{dx}=z', \\ &F\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ \frac{dy''}{dx},\ z,\ z'\right)=0, \\ &\Phi\left(x,\ y,\ y',\ z,\ z',\ \frac{dz'}{dx}\right)=0. \end{aligned}\right\}$$

Аналогно и код већега броја диф. једначина са више променљивих.

148. О интегралима симултаних диференциалних једначина првога реда. — Узмимо, примера ради, три симултане диф. једн. првога реда у којима се налазе три функције y, z и t, које зависе од прапроменљиве x. Замислимо да су речене три једначине решене по диф. количницима $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dt}{dx}$ и тиме доведене на форму

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}, \quad \frac{dt}{dx}=\frac{V}{P}$$

или

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{dt}{V}, \tag*{1)}$$

где су P, Q, R, V извесне одређене функције. Интегралити ове три симултане једн. 1) значи, дакле, наћи између x, y, z и t такве односе

да диференциали тих променљивих буду пропорционални функцијама P, Q, R, V. Нађени односи између x, y, z, t, који одговарају наведеноме услову (тј. интеграли симултаних једн. 1), морају садржавати у себи три произвољне константе, помоћу којих је могуће да за ма какво $x=a$ функцијама y, z, t придамо произвољне вредности.

Нека су ове три једначине

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x,\ y,\ z,\ t,\ c,\ c',\ c'')=0, \\ &F_2(x,\ y,\ z,\ t,\ c,\ c',\ c'')=0, \\ &F(x,\ y,\ z,\ t,\ c,\ c',\ c'')=0 \end{aligned}\right\} \tag*{(2}$$

интеграли симултаних диф. једн. 1). Замислимо да су једн. 2) решене по c, c' и c''. Тада се система једн. 2) може да замени системом

$$\alpha=c,\ \beta=c',\ \gamma=c'', \tag*{(3}$$

где су α, β, γ функције од x, y, z, t без произвољних констаната. То значи да се могу да нађу три функције од x, y, z, t, које своју вредност не мењају променом количина x, y, z, t из којих су оне састављене.

Диференциалењем једначине $\alpha=c$ добијамо

$$\frac{d\alpha}{dx}dx+\frac{d\alpha}{dy}dy+\frac{d\alpha}{dz}dz+\frac{d\alpha}{dt}dt=0.$$

С обзиром на то да је $\alpha=c$ интеграл једн. 1), диференциали dx, dy, dz, dt мора да буду пропорционални са P, Q, R, V и према томе постоји идентична једначина

$$P\frac{d\alpha}{dx}+Q\frac{d\alpha}{dy}+R\frac{d\alpha}{dz}+V\frac{d\alpha}{dt}=0$$

и аналогно

$$\left.\begin{aligned} &P\frac{d\alpha}{dx}+Q\frac{d\alpha}{dy}+R\frac{d\alpha}{dz}+V\frac{d\alpha}{dt}=0 \\ &P\frac{d\beta}{dx}+Q\frac{d\beta}{dy}+R\frac{d\beta}{dz}+V\frac{d\beta}{dt}=0, \\ &P\frac{d\gamma}{dx}+Q\frac{d\gamma}{dy}+R\frac{d\gamma}{dz}+V\frac{d\gamma}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \tag*{(4}$$

Обратно: Ако функције α, β, γ, које зависе од x, y, z, t, а не садрже у себи никакве произвољне константе, испуњавају идентично једн. 4), онда су једн. 3) интеграли симултаних једначина 1).

149. Продужење чл. 148. — Из интеграла 3) у прошломе члану могу да се образују безбројно много нових интеграла. Пошто α, β, γ задржавају константну вредност мењањем променљивих x, y, z, t, то и свака функција сложена из α, β, γ задржава константну вредност и ми тврдимо да је

$$\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=C$$

такође интеграл симултаних једн. 1) у чл. 148.

Доказ. Из једначина

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dy},$$

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dz},$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dt}+\frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}$$

пошто их помножимо редом са P, Q, R, V и после их саберемо, добијамо с обзиром на једн. 4) у чл. 148., ресултат

$$P\frac{d\varphi}{dx}+Q\frac{d\varphi}{dy}+R\frac{d\varphi}{dz}+V\frac{d\varphi}{dt}=0.$$

Ова једначина има потпуно исти вид као и оне под 4) у чл. 148., а то значи да је

$$\varphi=C$$

такође интеграл симултаних једн. 1) у чл. 148.

2. Интегралење симултаних диференциалних једначина.

150. Две линеарне симултане диф. једначине првога реда. — Дате су нам две линеарне диф. једначине првога реда у којима су две функције y и z прапромењиве x. Елиминовањем прво изводне $\frac{dz}{dx}$, па онда изводне $\frac{dy}{dx}$ задате се једначине доводе на овакве две

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+Py+Qz=V, \\[2ex] \dfrac{dz}{dx}+P'y+Q'z=V', \end{cases}$$

где су P, Q, V, P', Q', V' функције од x. Елиминовањем ми бисмо могли из једн. 1) да образујемо једну линеарну једначину другога реда само са једном непознатом функцијом (види чл. 146.), али је, ипак, боље поступити по следећој методи.

Саберимо горње две једн. 1), пошто смо, претходно, помножили ону другу произвољним фактором Θ, па ћемо добити

$$2)\qquad \frac{dy}{dx}+\Theta\frac{dz}{dx}+(P+P'\Theta)y+(Q+Q'\Theta)z=V+V'\Theta$$

и ставимо

$$3)\qquad t=y+\Theta z,$$

одакле

$$y=t-\Theta z,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-\Theta\frac{dz}{dx}-z\frac{d\Theta}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx}+\Theta\frac{dz}{dx}=\frac{dt}{dx}-z\frac{d\Theta}{dx}.$$

Једн. 2) добија с овиме вид

$$\frac{dt}{dx}-z\frac{d\Theta}{dx}+(P+P'\Theta)(t-\Theta z)+(Q+Q'\Theta)z=V+V'\Theta. \qquad (4$$

Примећујемо да се у овој једначини z јавља у првоме степе Ми можемо функцију z да елиминујемо користећи се тиме што је фактор Θ потпуно произвољан, а определићемо га тиме што ћемо у једн. 4) да ставимо сачинитељ z-а да је $=0$. На тај начин се једн. 4) раствара на ове једначине

$$\frac{d\Theta}{dx}+(P+P'\Theta)\Theta-Q-Q'\Theta=0, \qquad (5$$

$$\frac{dt}{dx}+(P+P'\Theta)t-V-V'\Theta=0. \qquad (6$$

У једн. 5) јавља се само Θ и x и према томе је количина Θ определена једначином 5). Ова је једначина првога реда, али није линеарна и с тога се, уопште, не може да интеграли. Међутим је за нашу циљ довољно, ако познајемо два партикуларна решења Θ_1 и Θ_2 једн. 5). Заменом ових партикуларних вредности у једн. 6), која је линеарна, добијамо две вредности t_1 и t_2 за t, од којих свака садржи једну произвољну константу. Функције y и z добијамо (према обрасцу 3) из

$$t_1=y+\Theta_1 z,$$
$$t_2=y+\Theta_2 z.$$

151. Продужење чл. 150. — На случај да су P, Q, P', Q' константни количина Θ може се сматрати као константна и једн. 5) постаје тиме

$$(P+P'\Theta)\Theta-Q-Q'\Theta=0$$

или

$$P'\Theta^2+(P-Q')\Theta-Q=0. \qquad (1$$

Из ове квадратне једначине добијамо две вредности Θ_1 и Θ_2.

У случају да су корени једн. 1) једнаки и да, према томе, добијамо за Θ само једну вредност, сматраћемо Θ као променљиво и једн. 5) може да се доведе на форму

$$\frac{d\Theta}{dx}+P'(\Theta-\alpha)^2=0,$$ [1]

---

[1] Ако је α двоструки корен квадратне једн. 1), онда је

$$P'\Theta^2+(P-Q')\Theta-Q=P'(\Theta-\alpha)^2.$$

одакле

$$\frac{d\Theta}{(\Theta-\alpha)^2} + P'\,dx = 0,$$

$$\Theta = \alpha + \frac{1}{P'x + c}. \tag*{2)}$$

Пошто је за нашу циљ довољно да имамо две партикуларне вредности за Θ, можемо их добити када у решењу 2) узмемо за c какве било две вредности, нпр. ставимо $c = 0$ и $c = \infty$, које даје $\Theta_1 = \alpha + \frac{1}{P'x}$ и $\Theta_2 = \alpha$,

152. Три линеарне симултане диф. једначине првога реда. — Узмимо сада да су нам дате три линеарне симултане диф. једначине првога реда са четири променљиве количине x, y, z, t, од којих су y, z, t функције од x. Као у чл. 150., тако и овде, замишљамо да су задате једначине, после извршенога елиминовања, доведене на форму

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + Py + Qz + Rt = V, \\ &\frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R't = V', \\ &\frac{dt}{dx} + P''y + Q''z + R''t = V''. \end{aligned}\right\} \tag*{1)}$$

Помножимо ове три једначине редом са 1, Θ, λ, где су Θ и λ два произвољна фактора, и саберимо их

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + \Theta\frac{dz}{dx} + \lambda\frac{dt}{dx} + (P + \Theta P' + \lambda P'')\,y + (Q + \Theta Q' + \lambda Q'')\,z \\ &\qquad + (R + \Theta R' + \lambda R'')\,t = V + \Theta V' + \lambda V''. \end{aligned} \tag*{2)}$$

Ставимо

$$y + \Theta z + \lambda t = u, \tag*{3)}$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} + \Theta\frac{dz}{dx} + z\frac{d\Theta}{dx} + \lambda\frac{dt}{dx} + t\frac{d\lambda}{dx} = \frac{du}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} + \Theta\frac{dz}{dx} + \lambda\frac{dt}{dx} = \frac{du}{dx} - z\frac{d\Theta}{dx} - t\frac{d\lambda}{dx},$$

која чини да једн. 2) добија вид

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dx} - z\frac{d\Theta}{dx} - t\frac{d\lambda}{dx} + (P + P'\Theta + P''\lambda)(u - \Theta z - \lambda t) + \\ &(Q + Q'\Theta + Q''\lambda)\,z + (R + R'\Theta + R''\lambda)\,t = V + V'\Theta + V''\lambda. \end{aligned} \tag*{4)}$$

У овој се једначини јављају функције z и t у првоме степену. Пошто нам стоји на вољи да одредимо факторе Θ и λ како хоћемо, то можемо да учинимо да чланови са z и t нестану из једн. 4) ставивши њихове којефицијенте да су $= 0$. Тиме се једн. 4) раствара на ове три једначине

$$\frac{d\Theta}{dx} + (P + P'\Theta + P''\lambda)\,\Theta - Q - Q'\Theta - Q''\lambda = 0, \tag*{(5}$$

$$\frac{d\lambda}{dx} + (P + P'\Theta + P''\lambda)\,\lambda - R - R'\Theta - R''\lambda = 0, \tag*{(6}$$

$$\frac{du}{dx} + (P + P'\Theta + P''\lambda)\,u - V - V'\Theta - V''\lambda = 0. \tag*{(7}$$

Прве две једначине (5 и 6) садрже само Θ и λ. Оне су, истина, првога реда, али нису линеарне и с тога се, уопште, не могу да интеграле. Међутим, ако су нам познате три партикуларне вредности Θ_1, Θ_2 и Θ_3 за Θ и овима кореспондирајуће три вредности λ_1, λ_2 и λ_3 за λ, онда се могу да нађу интеграли задатих симултаних једначина 1). Сваки од позната три спрега Θ и λ, када ставимо дотичне вредности у једн. 7), која је линеарна и првога реда, даје по једно решење са по једном произвољном константом. Добићемо, дакле, три вредности u_1, u_2, u_3, помоћу којих, а на основу образаца 3), налазимо интеграле y, z, t из

$$\left.\begin{aligned} y + \Theta_1 z + \lambda_1 t &= u_1, \\ y + \Theta_2 z + \lambda_2 t &= u_2, \\ y + \Theta_3 z + \lambda_3 t &= u_3. \end{aligned}\right\} \tag*{(8}$$

153. Продужење чл. 152. — Ако су у симултаним једначинама 1) чл. 152. којефицијенти P, Q, R, P', ... константни, онда су једначине 5) и 6) чл. 152. задовољене константним факторима Θ и λ, чије вредности опредељујемо из

$$(P + P'\Theta + P''\lambda)\,\Theta - Q - Q'\Theta - Q''\lambda = 0, \tag*{(1}$$

$$(P + P'\Theta + P''\lambda)\,\lambda - R - R'\Theta - R''\lambda = 0. \tag*{(2}$$

$\left(\text{Види једн. 5) и 6) у чл. 152, када ставимо } \frac{d\Theta}{dx} = 0, \frac{d\lambda}{dx}.\right)$ Ако из једн. 1) заменимо за λ његову вредност у једн. 2) добићемо за Θ једначину трећега степена, која за Θ даје три вредности Θ_1, Θ_2, Θ_3, које, опет, када заменимо у једн. 1) (која је у погледу λ првога степена) дају три вредности λ_1, λ_2, λ_3.

B. Парциалне диференциалне једначине.

154. Особени случајеви. — Ако се у диф. једначини налазе парциалне изводне само по једној прапроменљивој, онда се са таквом парциалном диф. једначином поступа као с обичном диф. једначином с том разликом што се, после извршенога интегралења, произвољна константа замењује произвољном функцијом оне друге прапроменљиве по којој нису узете парциалне изводне.

1. Пример. Сматравши у једначини

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5\, x\, e^y$$

y као константу добијамо интегралењем

$$u = \frac{5\, x^2\, e^y}{2} + C$$

и пошто заменимо константу C произвољном функцијом $\varphi(y)$, налазимо

$$u = \frac{5\, x^2\, e^y}{2} + \varphi(y),$$

као решење задате парциалне диф. једначине.

2. Пример.

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - a y u = 0$$

или

$$x \frac{d u}{u} = a y\, d y,$$

одакле интегралењем

$$l u = \frac{a y^2}{2 x} + \varphi(x)$$

или

$$u = \psi(x)\, e^{\frac{a y^2}{2 x}}.$$

3. Пример.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, y).$$

Интегралењем, сматравши y као константно и узев место интеграционе константе произвољну функцију од y, налазимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int F(x, y)\, d x + \varphi(y),$$

одакле на исти начин

$$u = \int \left[\int F(x, y)\, d x + \varphi(y) \right] d x + \psi(y).$$

Аналогно бисмо поступили са једначином $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y)$.

4. Пример.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = F(x, y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int F(x, y)\, d x + \varphi(y),$$

$$u = \int \left[\int F(x, y)\, d x + \varphi(y) \right] d y + \psi(x).$$

1. Линеарне парциалне једначине првога реда.

155. Једначине са две прапроменљиве. — Узмимо две функције α и β, које зависе од променљивих x, y, z, нпр.

$$\alpha = f_1(x, y, z),$$
$$\beta = f_2(x, y, z)$$

и замислимо између њих ма какву везу

$$\beta = \varphi(\alpha). \tag{1}$$

Ставимо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$ и диференциалимо једн. 1) парциално по x и по y

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} p = \varphi'(\alpha) \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p \right],$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q = \varphi'(\alpha) \left[\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q \right].$$

Елиминовањем функције $\varphi'(\alpha)$ из ових двеју једначина добијамо једначину вида

$$P p + Q q = V, \tag{2}$$

у којој P, Q, V означавају извесне функције од x, y, z.

До такве исте једначине, као што је ова под 2), долазимо ако између α и β поставимо везу у форми

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0, \tag{3}$$

јер диференциалећи једн. 3) парциално по x и по y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} p \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} q \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \left[\frac{\partial \beta}{\partial z} q \right] = 0$$

и елиминујући одавде однос $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha} : \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ долазимо опет до једначине 2).

1. Пример. Општа једначина за цилиндричне површине јесте

$$\Phi(x - m z, y - n z) = 0$$

или

$$y - n z = \varphi(x - m z).$$

Диференциалећи ову једначину парциално прво по x, па онда по y добијамо

$$- n p = \varphi'(x - m z)\, [1 - m p],$$
$$1 - n q = - m p\, \varphi'(x - m z)$$

и елиминујући одавде произвољну функцију φ' добијамо парциалну диф. једначину

$$m p + n q = 1$$

као карактеристичну једначину за све цилиндричне површине.

2. *Пример.* Општа једначина за конусне површине јесте

$$\Phi\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \quad \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0$$

или

$$\frac{gz - hy}{z - h} = \varphi\left(\frac{fz - hx}{z - h}\right).$$

Парциалним диференциалењем по x и по y налазимо

$$\frac{(z - h)\, gp - (gz - hy)\, p}{(z - h)^2} = \frac{(z - h)(fp - h) - (fz - hx)\, p}{(z - h)^2}\, \varphi'\left(\frac{fz - hx}{z - h}\right),$$

$$\frac{(z - h)(gq - h) - (gz - hy)\, q}{(z - h)^2} = \frac{(z - h) fq - (fz - hx)\, q}{(z - h)^2}\, \varphi'\left(\frac{fz - hx}{z - h}\right)$$

или краће

$$(y - g)\, p = (xp - fp - z + h)\, \varphi'\left(\frac{fz - hx}{z - h}\right),$$

$$yq - gq - z + h = (x - f)\, q\, \varphi'\left(\frac{fz - hx}{z - h}\right),$$

одакле дељењем

$$\frac{(y - g)\, p}{(y - g)\, q - (z - h)} = \frac{(x - f)\, p - (z - h)}{(x - f)\, q}$$

и пошто ово скратимо добијамо парциалну диф. једначину за конусне површине

$$(x - f)\, p + (y - g)\, q = z - h.$$

3. *Пример.* Једначна за обртне површине, узев обртну осу у правцу z-осе, гласи

$$\Phi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

или

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2).$$

Одавде, парциалним диференциалењем по x и по y, следује

$$p = 2\,x\,\varphi'\,(x^2 + y^2),$$
$$q = 2\,y\,\varphi'\,(x^2 + y^2),$$

а одавде елиминовањем произвољне функције φ'

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$$

или

$$py - qx = 0,$$

као парциална диф. једначина, која карактерише обртне површине.

156. Интегралење линеарних једначина првога реда са две прапромењљиве.

— Интегралити парциалну диф. једначину

$$1) \qquad Pp + Qq = R,$$

где су $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, а P, Q и R извесне функције од x, y, z, значи наћи једначину

$$F(x, y, z) = 0,$$

која за p и q даје такве вредности које задовољавају идентично задату једн. 1). Мы смо видили (у чл. 155.) да се до једначине, као што је ова под 1), долази када се, путем парциалнога диференциалења из

$$\beta = \varphi\,(\alpha)$$

елиминује произвољна функција φ, где су α и β, међутим, одређене функције од x, y, z:

$$\alpha = f_1\,(x, y, z),$$
$$\beta = f_2\,(x, y, z).$$

Према томе, дакле, гледаћемо да задовољимо задату парциалну диф. једначину једначином вида једн. 2).

157. Продужење чл. 156.

— Претпоставимо да је интеграл парциалне диф. једначине

$$Pp + Qq = R \tag{1}$$

ово

$$\beta = \varphi\,(\alpha), \tag{2}$$

где су α и β извесне, за сада непознате, функције од x, y, z. Из 2) следује

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\, p = \varphi'(\alpha)\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\, p\right],$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\, q = \varphi'(\alpha)\left[\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\, q\right],$$

одакле, када прву једначину помножимо са P, другу са Q, па их саберемо

$$P\frac{\partial \beta}{\partial x} + Q\frac{\partial \beta}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial \beta}{\partial z} =$$
$$\varphi'(\alpha)\left[P\frac{\partial \alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial \alpha}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right]$$

или, с обзиром на задату једн. 1), краће

$$P\frac{\partial \beta}{\partial x} + Q\frac{\partial \beta}{\partial y} + R\frac{\partial \beta}{\partial z} = \varphi'(\alpha)\left[P\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial \alpha}{\partial y} + R\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right]. \tag{3}$$

Ова ће једначина бити идентично испуњена, ма каква била функција φ, ако α и β определимо из једначина

$$\left.\begin{aligned} P\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial \alpha}{\partial y} + R\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0, \\ P\,\frac{\partial \beta}{\partial x} + Q\frac{\partial \beta}{\partial y} + R\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ове једн. 4) испуњене су када за α и β узмемо две функције $f_1\,(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$, које стављене = једној константи представљају интеграле симултаних диф. једначина

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{5}$$

(види чл. 148., 149.).

Из овога изводимо закључак: Ако су

$$f_1(x, y, z) = c_1$$

и

$$f_2(x, y, z) = c_2$$

интеграли симултаних диф. једначина

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

и ми ставимо

$$f_1(x, y, z) = \alpha,$$
$$f_2(x, y, z) = \beta,$$

онда је

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

где φ обележава произвољну функцију, опште решење парциалне диф. једначине првога реда

$$Pp + Qq = R.$$

1. *Примедба.* Једначину 3) можемо да задовољимо још и на ове начине 1) кад ставимо

$$P\frac{\partial \beta}{\partial x} + Q\frac{\partial \beta}{\partial y} + R\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0 \text{ и } \varphi'(\alpha) = 0 \text{ и}$$

2) кад ставимо

$$P\frac{\partial \alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial \alpha}{\partial y} + R\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \text{ и } \frac{1}{\varphi'(\alpha)} = 0.$$

Но пошто ова решења не образују везу између α и β и нису, дакле, обухваћена формулом $\beta = \varphi(\alpha)$, та су решења, обично, сингуларна.

2. *Примедба.* Вредно је поменути да интегралење парциалних диф. једначина

$$P\frac{\partial y}{\partial x} + R\frac{\partial y}{\partial z} = Q,$$

$$Q\frac{\partial x}{\partial y} + R\frac{\partial x}{\partial z} = P$$

(у првој су прапроменљиве x и z, у другој y и z) зависи од истих симултаних једначина 5) од којих зависи интегралење горње парциалне диф. једначине

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

(у којој су прапроменљиве x и y) и да је, према томе, и њихов интеграл $\beta = \varphi(\alpha)$.

1. *Пример.*

$$xp - yq = 0.$$

Овде имамо симултане једначине

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{0},$$

чији су интеграли

$$z = c_1, \ xy = c_2,$$

дакле решење задате диф. једначине

$$z = \varphi(xy).$$

2. *Пример.*

$$p - q = 0.$$

Симултане једначине јесу у овоме случају

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{1} = \frac{dz}{0},$$

а њихови интеграли

$$z = c_1, \quad x + y = c_2$$

и према томе решење задате једначине

$$z = \varphi(x + y).$$

3. *Пример.*

$$yp + x^2 q = xy.$$

Имамо симултане једначине

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{xy}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} x^2 dx = y\,dy, \\ x\,dx = dz, \end{array}\right\}$$

одакле

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = c_1,$$

$$\frac{x^2}{2} - z = c_2,$$

дакле решење горње парциалне диф. једначине

$$x^2 - 2z = \varphi(2x^3 - 3y^2).$$

158. Једначине са три прапроменљиве. — Узмимо три функције α, β, γ, које зависе од четири променљиве x, y, z, t:

$$\alpha = f_1(x, y, z, t),$$
$$\beta = f_2(x, y, z, t),$$
$$\gamma = f_3(x, y, z, t)$$

и доведимо их у везу

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \tag{1}$$

где је Φ произвољна функција. Означимо

$$\frac{\partial t}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = r$$

и диференциалимо парциално једначину 1) редом по x, y, z

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}p\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\left[\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial t}p\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}p\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}q\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\left[\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial t}q\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\left[\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}q\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}r\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\left[\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \beta}{\partial t}r\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\left[\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}r\right] = 0.$$

Елиминовањем количника $\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}:\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}$ и $\frac{\partial\phi}{\partial\beta}:\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}$ из ових трију једначина долазимо до парциалне диф. једначине вида

$$2)\qquad Pq + Qq + Rr = V.$$

159. Интегралење линеарних једначина првога реда са три прапромењиве. — Дата је парциална диф. једначина

$$1)\qquad Pp + Qq + Rr = V,$$

где су P, Q, R, V функције од $x, y, z, t,$

$$p = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Нека је

$$\alpha = f_1(x, y, z, t),$$
$$\beta = f_2(x, y, z, t),$$
$$\gamma = f_3(x, y, z, t);$$

f_1, f_2, f_3 означавају за сада још непознате функције од $x, y, z, t.$

Интеграл задате диф. једн. 1) замишљамо да је

$$2)\qquad \alpha = \varphi(\beta, \gamma).$$

Парциалним диференциалењем једн. 2) добијамо

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}p = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left[\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial t}p\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial t}p\right],$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}q = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left[\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial t}q\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial t}q\right],$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}r = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left[\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\beta}{\partial t}r\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial t}r\right].$$

Помножимо ове три једначине редом са P, Q, R и саберимо их, добићемо с обзиром на једн. 1)

$$P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} + V\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left[P\frac{\partial\beta}{\partial x} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + R\frac{\partial\beta}{\partial z} + V\frac{\partial\beta}{\partial t}\right]$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\left[P\frac{\partial\gamma}{\partial x} + Q\frac{\partial\gamma}{\partial y} + R\frac{\partial\gamma}{\partial z} + V\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right].$$

Ова је једначина испуњена, ма каква била функција φ, када определимо α, β, γ на основу једначина

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} &P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} + V\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0,\\ &P\frac{\partial\beta}{\partial x} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + R\frac{\partial\beta}{\partial z} + V\frac{\partial\beta}{\partial t} = 0,\\ &P\frac{\partial\gamma}{\partial x} + Q\frac{\partial\gamma}{\partial y} + R\frac{\partial\gamma}{\partial z} + V\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ове су једначине задовољене функцијама $\alpha, \beta, \gamma,$ које када ставимо

$$\alpha = c_1, \quad \beta = c_2, \quad \gamma = c_3 \qquad (4$$

представљају интеграле симултаних једначина

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{dt}{V} \qquad (5$$

(види чл. 148., 149. и 157.).

Примедба. Поменимо да симултане једначине 5) решавају и следеће парциалне диф. једначине

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + V\frac{\partial z}{\partial t} = R,$$
$$P\frac{\partial y}{\partial x} + R\frac{\partial y}{\partial z} + V\frac{\partial y}{\partial t} = Q,$$
$$Q\frac{\partial x}{\partial y} + R\frac{\partial x}{\partial z} + V\frac{\partial x}{\partial t} = P.$$

Пример.

$$x\frac{dt}{dx} + y\frac{dt}{dy} + z\frac{dt}{dz} = mt.$$

Симултане једначине јесу у овоме случају

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dt}{mt},$$

одакле интегралењем

$$\frac{y}{x} = c_1, \quad \frac{z}{x} = c_2, \quad \frac{t}{x^m} = c_3.$$

Према овоме је решење задате диф. једначине

$$t = x^m\,\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Видимо да је t хомогена функција m-тога степена промењивих $x, y, z.$ Задата парциална диф. једначина изражава познато својство хомогених једначина.

2. Линеарне парциалне једначине другога реда.

160. О линеарним парциалним једначинама другога реда уопште. — Опште важеће методе за интегралење парциалних диф. једначина, које су вишега реда, не постоје.[1] За примене у математичкој Физици од највећега су значаја линеарне парциалне једначине другога реда. Код двеју прапромењивих је општа форма такве једначине ово

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + f\frac{\partial z}{\partial y} + gz = h.$$

---

[1] У извесним особеним случајевима и то код једначина другога реда са две прапромењиве доводи циљу метода коју је дао *Monge*, а доцније проширио *Ampère*.

Од нарочите је важности случај када је једначина хомогена, тј. када је $h = 0$.

Ако су коефицијенти a, b, c, d, f, g константни, онда је врло лако наћи партикуларне интеграле једначине

$$1) \qquad a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + f\frac{\partial z}{\partial y} + gz = 0.$$

Ставићемо

$$2) \qquad z = e^{\alpha x + \beta y},$$

дакле

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha z, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \beta z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha^2 z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \beta^2 z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \alpha\beta z,$$

услед чега се једн. 1) претвара у ову

$$z[a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + f\beta + g] = 0.$$

За опредељење количина α и β имамо, дакле, ову квадратну једначину

$$3) \qquad a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + f\beta + g = 0.$$

Пошто овој једначини одговарају безбројно много спрегова α и β, значи да постоје безбројно много партикуларних интеграла 2). У овоме је битна разлика између парцијалних и обичних диф. јддначина. (Ми знамо да обичне диф. једначине имају ограничен број међусобом независних партикуларних интеграла. Види закључак на крају чл. 139.)

Ако су $J_1, J_2, J_3, \ldots$ партикуларна решења хомогене парцијалне једн. 1), онда је и $C_1J_1 + C_2J_2 + C_3J_3 + \ldots$ решење речене једначине. Опште решење једн. 1) састављено је, према томе, из безбројно много партикуларних интеграла и садржи, дакле, у себи бесконачно много произвољних констаната. Партикуларна решења се, обично, лако налазе, па је и опште решење лако добити. Међутим са таквима општим решењима, у којима је безбројно много произвољних констаната, није много постигнуто у ствари. Од највеће је важности код свију питања, која нас воде парцијалним диф. једначинама, да се константе определе на такав начин како ће бити испуњени извесни услови, који су дотичним задатком постављени.

Примедба. Да хомогена парцијална једначина има бесконачно много партикуларних интеграла и да, према томе, њено опште решење садржи бесконачно много произвољних констаната, важи у опште ма којега реда била једначина, доказаћемо на следећи начин.

Нека је ово задата једначина

$$1) \quad 0 = az + \left(b_1\frac{\partial z}{\partial x} + b_2\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(c_1\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c_3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \ldots$$

Заменимо

$$2) \qquad z = e^{\alpha x + \beta y}$$

и једн. 1) добија вид

$$zf(\alpha, \beta) = 0,$$

где је

$$f(\alpha, \beta) = a + (b_1\alpha + b_2\beta) + (c_1\alpha^2 + c_2\alpha\beta + c_3\beta^2) + \ldots$$

Ако је α_1, β_1 један спрег, који задовољава једначину

$$f(\alpha, \beta) = 0, \tag{3}$$

а C_1 произвољна константа, онда је

$$z_1 = C_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 y}$$

једно партикуларно решење диф. једн. 1). Пошто је једн. 3) задовољена бесконачно многима спреговима α, β, то следује да задата диф. једн. 1) има безбројно много партикуларних интеграла, а у општем решењу

$$z = \Sigma\, C e^{\alpha x + \beta y}$$

бесконачно много произвољних констаната.

Ова теорема важи и онда, када је у једначини више од две праpromenљиве.

161. Особени случајеви. — Осим оних случајева, наведених у чл. 154., где се са парцијалном диф. једначином може да поступи аналогно као и са обичном диф. једначином, узећемо овде на расматрање парцијалну диф. једначину

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} = Q. \tag{1}$$

P и Q означавају функцију од x и y.

Ставимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t. \tag{2}$$

Једначина 1) претвара се тиме у ову

$$\frac{\partial t}{\partial x} + Pt = Q, \tag{3}$$

која има исти вид који има једн. 1) у чл. 91. Ону методу (у чл. 91.) примењујемо и овде. Замењујемо

$$t = uv \tag{4}$$

и доводимо тиме једн. 3) на облик

$$v\frac{\partial u}{\partial x} + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} + Pv\right) = Q. \tag{5}$$

Узимамо да је

$$\frac{\partial v}{\partial x} + Pv = 0, \quad v = e^{-\int P\,dx}\,{}^{1)} \tag{6}$$

---

[1] Овоме интегралу није потребно додавати константу, односно произвољну функцију од y, пошто је за нашу циљ потпуно довољно да се́ узме ма каква партикуларна вредност за v.

услед чега се једн. 5) своди на

$$v \frac{\partial u}{\partial x} = Q,$$

одакле, с обзиром на ресултат под 6),

7) $$u = \int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y).$$

С овиме под 6) и 7), а на основу 4), јесте

$$t = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y) \right],$$

а према ономе под 2) следује

8) $$z = \int e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y) \right] dx + \psi(y).$$

Притедба. Ако су у задатој једначини P и Q константе, онда горње формуле гласе простије

(6) $$v = e^{-Px},$$

(7) $$u = Q \int e^{Px} dx + \varphi(y) = \frac{Q}{P} e^{Px} + \varphi(y),$$

(4) $$t = uv = \frac{Q}{P} + \varphi(y) e^{-Px},$$

(2) $$z = \int t\, dx$$

(8) $$= \frac{1}{P} [Qx - \varphi(y) e^{-Px}] + \psi(y).$$

162. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. — Да се интеграли парциална диф. једначина

1) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Ставићемо (види чл. 160.)

$$y = e^{\alpha x + \beta t},$$

дакле

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha^2 y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \beta^2 y$$

и према задатој једначини имамо за α и β квадратну једначину

$$\beta^2 - a^2 \alpha^2 = 0,$$

одакле

$$\beta = \pm a \alpha.$$

За сваку вредност од α добијамо две вредности за β и, према томе, за сваку вредност од α два партикуларна интеграла

$$y_1 = A e^{\alpha(x + at)}, \quad y_2 = B e^{\alpha(x - at)}.$$

Партикуларан је интеграл, као што знамо, и ово

$$y = A e^{\alpha(x + at)} + B e^{\alpha(x - at)},$$

а општи је интеграл

$$y = \Sigma A e^{\alpha(x + at)} + \Sigma B e^{\alpha(x - at)}.$$

Први члан је извесна функција од $x + at$, а други члан функција од $x - at$. Опште решење наше диф. једначине може, дакле, да се представи на начин

$$y = \Phi(x + at) + \Psi(x - at). \qquad (2$$

Овде су Φ и Ψ две потпуно произвољне функције. Ми ћемо их ближе определити, ако поставимо какве специалне погодбе, нпр. ако условимо:

$$\text{за } t = 0 \text{ да буде } y = F_1(x), \ \frac{dy}{dt} = f(x).$$

Из

$$y = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$$

и

$$\frac{dy}{dt} = a \Phi'(x + at) - a \Psi'(x - at),$$

када ставимо $t = 0$, а према учињеним условима, следује

$$\Phi(x) + \Psi(x) = F_1(x), \qquad (3$$

$$a \Phi'(x) - a \Psi'(x) = f(x).$$

Из последње једначине налазимо

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{a} \int f(x) dx = F_2(x). \qquad (4$$

Из 3) и 4) добијамо

$$\Phi(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2},$$

$$\Psi(x) = \frac{F_1(x) - F_2(x)}{2}.$$

С овим решење 2) добија овакав вид

$$y = \frac{F_1(x + at) + F_1(x - at)}{2} + \frac{F_2(x + at) - F_2(x - at)}{2}. \qquad (5$$

1. Примедба. Решење диф. једн. 1) можемо да добијемо и на овај начин. Ставимо

$$x + at = u,$$

$$x - at = v$$

и заменимо прапромењиве x и t новима u и v.

Из

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=a\left(\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

када ове вредности за $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ заменимо у задату једначину, следује диф. једначина

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0$$

(види 4. пример у чл. 154.). Одавде, када напишемо

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{\partial v}=0,$$

изводимо

$$\frac{\partial y}{\partial u}=f(u),$$

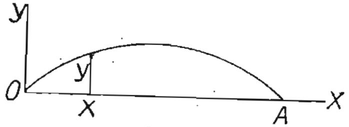
$$y=\int f(u)\,du+\psi(v)$$

$$=\varphi(u)+\psi(v)$$

или

$$y=\varphi(x+a\,t)+\psi(x-a\,t).$$

2. *Примедба.* Једначина 1) је уопште прва парциална диф. једначина која је проучавана и с тога као и због научне полемике, која је тим поводом потекла између првих математичара (d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange, а доцније Fourier, Poisson) и која је учинила много за усавршавање теорије парциалних диф. једначина; најзад и због њенога значаја у примени, ради које је и проучавана, од велике је важности. До једн. 1) долази се проучавањем треперења струне, која је утврђена њеним крајевима и трепери у равни која пролази кроз утврђене тачке. Тада означава x апсцису, y ординату ма које тачке на струни, t време.



Сл. 66.

ЕЛИПТИЧНИ ИНТЕГРАЛИ И ЕЛИПТИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ.

I. Елиптични интеграли.

163. Дефиниција. — Видели смо у Интегралноме Рачуну да се интеграли, како рационално алгебарских, тако и ирационално алгебарских диференциала, у колико се у овима последњима јављају квадратни корени са подкореним количинама највише другога степена, могу да изразе алгебарским, тригонометриским функцијама и логаритмом, дакле уопште познатим функцијама. Тај посао, отпочет од *Лајбница*, продужен и обрађен од *Јакова* и *Јована Бернули-а*, довршен је, у главноме. од *Ајлера*. Код интеграла, пак, у којима се налазе квадратни корени из израза, чији је степен виши од другога, ово се свођење на познате функције није могло да изврши. Ово је се, у прво време, приписивало несавршености методе, док није *Лежандр*, темељније проучавајући ово питање, показао да се такви интеграли не могу да изразе познатим функцијама. Интеграле алгебарских диференциала са квадратним коренима у којима је под кореним знаком полином трећега или четвртога степена, назвао је *Лежандр елиптичним функцијама.*[1]) *Јакоби* је променио назив и таквима интегралима дао име *елиптичних интеграла*, а функцијама, које на извесан начин из ових потичу, елиптичне функције,

164. Општи вид елиптичних интеграла. — Елиптични интеграли обухваћени су обрасцем

$$\int F\left(x,\sqrt{X}\right)\,dx$$

означивши са F рационалну функцију од x и $\sqrt{X}$, где је

$$\sqrt{X}=\sqrt{A x^4+B x^3+C x^2+D x+E}.$$

Претпостављамо да полином X не садржи многоструке линеарне факторе (тј. да једначина $X=0$ нема многоструке корене), јер би се, у томе случају, полином под кореним знаком, који је четвртога степена, свео на полином другога или првога степена или би сасвим нестао

---

[1]) *Лежандр* је ово име дао због тога што је интеграл, који изражава елиптичан лук, такав.

под кореним знаком (према томе да ли биквадратна једначина $X = 0$ има два, три или сва четири корена једнака) и тако задати интеграл неби био више елиптичан, него би се дао изразити алгебарским функцијама, тригонометриским функцијама и логаритмом.

Тако исто нећемо узети да је у исто време $A = 0$ и $B = 0$, јер би и у томе случају интеграл престао бити елиптичан.

Да покажемо како се $F(x, \sqrt{X})$ може да сведе на другу једну функцију $\Phi(\xi, \sqrt{\Xi})$, означавајући са Φ такође рационалну функцију од ξ и $\sqrt{\Xi}$, где је Ξ полином четвртога степена, у коме нема чланова са непарним степенима (првим и трећим).

Пре свега написаћемо:

$$\begin{aligned}\sqrt{X} &= \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}\\ &= \sqrt{A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\\ &= \sqrt{A[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta][x^2 - (\gamma+\delta)x + \gamma\delta]}\\ 1) \qquad &= \sqrt{A[x^2 - 2px + q][x^2 - 2p'x + q']},\end{aligned}$$

где је дакле

$$2) \qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{\alpha+\beta}{2}, \ q = \alpha\beta,\\ p' &= \frac{\gamma+\delta}{2}, \ q' = \gamma\delta.\end{aligned}\right.$$

Ако у последњем изразу за $\sqrt{X}$ учинимо замену

$$3) \qquad x = \frac{a + b\xi}{1 + \xi}$$

добићемо

$$\sqrt{X} =$$

$$\frac{\sqrt{A}}{(1+\xi)^2}\sqrt{(q - 2pb + b^2)\xi^2 - 2[p(a+b) - ab - q]\xi + q - 2pa + a^2} \times$$

$$\sqrt{(q' - 2p'b + b^2)\xi^2 - 2[p'(a+b) - ab - q']\xi + q' - 2p'a + a^2}. \quad (4$$

Нама стоје на расположењу да у замени под 3) определимо константе a и b и ми ћемо их определити тако да у изразу 4) нестану непарни степени од ξ, дакле из једначина

$$\begin{aligned} p(a+b) - ab - q &= 0,\\ p'(a+b) - ab - q' &= 0.\end{aligned}$$

Одавде (и с обзиром на 2) налазимо

$$5) \qquad \left\{\begin{aligned} a + b &= \frac{q - q'}{p - p'} = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta},\\ ab &= \frac{pq' - p'q}{p - p'} = \frac{(\gamma+\delta)\alpha\beta - (\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}.\end{aligned}\right.$$

Из ових образаца видимо да су a и b корени извесне квадратне једначине коју је лако образовати. С овим сводимо $\sqrt{X}$ на другу количину $\sqrt{\Xi}$, у којој се под кореним знаком променљива ξ налази само у другоме и четвртоме степену. Израз под 4) гласи сада

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(1+\xi)^2} \times$$

$$\sqrt{A[(q - 2pb + b^2)\xi^2 + q - 2pa + a^2][(q' - 2p'b + b^2)\xi^2 + q' - 2p'a + a^2]}.$$

$$= \frac{\sqrt{A(q - 2pa + a^2)(q' - 2p'a + a^2)}}{(1+\xi)^2} \times$$

$$\sqrt{\left[1 + \frac{q - 2pb + b^2}{q - 2pa + a^2}\xi^2\right]\left[1 + \frac{q' - 2p'b + b^2}{q' - 2p'a + a^2}\xi^2\right]}.$$

Свели смо, дакле, количину $\sqrt{X}$ на ову

$$\sqrt{\Xi} = \sqrt{\left[1 + \frac{q - 2pb + b^2}{q - 2pa + a^2}\xi^2\right]\left[1 + \frac{q' - 2p'b + b^2}{q' - 2p'a + a^2}\xi^2\right]}$$

или краће

$$\sqrt{\Xi} = \sqrt{(1 + m\xi^2)(1 + n\xi^2)}.$$

Најзад, ако ставимо

$$\xi = x\sqrt{-m}, \ k^2 = +\frac{n}{m},$$

корена се количина представља у форми

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2}$$

и задати је интеграл

$$\int f(x, y)\,dx.$$

Знак f представља и овде рационалну функцију

Узев за m већу од оних двеју количина m и n примећујемо да се, према формули $k^2 = +\frac{n}{m}$, може да претпостави да је k, такозвани *модуо*, увек мање од 1.

1. Примедба. У обрасцима 5), који служе за одређивање бројева a и b, потребних за замену под 3), претпоставља се да је $\alpha + \beta - \gamma - \delta \gtrless 0$. На случај да је

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \text{ или } \alpha + \beta = \gamma + \delta$$

образац 1) гласи

$$\sqrt{X} = \sqrt{A[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta][x^2 - (\alpha+\beta)x + \gamma\delta]}$$

и замена

$$x - \frac{\alpha+\beta}{2} = \xi$$

чини да под кореним знаком нестану непарни степени променљиве ξ.

2. *Примедба.* Ако је подкорена количина X трећега
ако је $A=0$, дакле

$$\sqrt{X}=\sqrt{Bx^3+Cx^2+Dx+E}=\sqrt{B(x-\alpha)(x-\beta)}$$

ставићемо

$$x-\alpha=\xi^2.$$

Тиме постаје

$$\sqrt{X}=\xi\sqrt{B(\xi^2+\alpha-\beta)(\xi^2+\alpha-\gamma)}$$

и под квадратним кореном налазе се само парни степени пра

165. Своћење елиптичних интеграла на три основ

У чл. 12. показали смо да се интеграли ирационалних
квадратним коренима могу да доведу на заједничку форму

$$\int\frac{T\,dx}{W\sqrt{X}},$$

где су T и W целе и рационалне функције, од x. Овоме
можемо да дамо и други вид. Очевидно се може да напише

$$\frac{T}{W}=\frac{H+Kx}{J+Lx}$$

означујући са H, K, J, L целе функције, у којима се x ја
парноме степену. Даље:

$$\frac{H+Kx}{J+Lx}=\frac{(H+Kx)(J-Lx)}{(J+Lx)(J-Lx)}=\frac{(HJ-KLx^2)+(KJ}{J^2-L^2x^2}$$

$$=\frac{M+Nx}{S}.$$

M, N и S означују полиноме са парним степенима x-а.

Према овоме се посматрани интеграл раствара

1) $$\int\frac{T\,dx}{W\sqrt{X}}=\int\frac{M}{S}\frac{dx}{\sqrt{X}}+\int\frac{N}{S}\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Ми претпостављамо овде да је

$$\sqrt{X}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Други интеграл на десној страни једн. 1), тј. $\int\frac{N}{S}\frac{x\,d}{\sqrt{}}$
вимо $x^2=z$, добија форму

$$\int\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{(1-z)(1-kz)}},$$

није, дакле, елиптичан и може да се изнађе по упутствима ч
Интеграли, којима ћемо се имати да бавимо, представљени су,

2) $$\int\frac{M}{S}\frac{dx}{\sqrt{X}}\text{ или }\int P\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

где P означава рационалну функцију, у којој се јављају само парни степени x-а. Разлажући функцију P на просте делове растворићемо је на известан број чланова вида Ax^{2m} и $\frac{A}{x^2+a}$, бележећи са A и a константе. Тако се и и посматрани интеграл 2) разлаже на интеграле као што су

$$\int\frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{X}}\text{ и }\int\frac{dx}{(x^2+a)\sqrt{X}}. \qquad (3$$

Први интеграл, тј. $\int\frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{X}}$ може да се сведе на један од ова два

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\text{ и }\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}. \qquad (4$$

Из диференциалне формуле

$$d\left[x^{2m-3}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right]=\frac{fx^{2m}+gx^{2m-2}+hx^{2m-4}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,$$

где су f, g, h константе, које је лако определити када се изврши назначено диференцијалење, следује интегрална формула

$$x^{2m-3}\sqrt{X}=f\int\frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{X}}+g\int\frac{x^{2m-2}\,dx}{\sqrt{X}}+h\int\frac{x^{2m-4}\,dx}{\sqrt{X}}$$

из које видимо како се $\int\frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{X}}$, поступним смањивањем изложитеља $2m$ са по 2, доводи, најзад, на један од она два интеграла под 4).

166. Продужење чл. 165. — Из свега видимо да се интеграли вида

$$\int F(x,\sqrt{X})\,dx,$$

где F означава рационалну функцију x-а и корена квадратнога из једнога полинома четвртога степена, израчунавају алгебарским функцијама, логаритмом, тригономитриским функцијама и новима трансцендентним функцијама, које се заводе на основу израза

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\\&\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\\&\int_0^x\frac{dx}{(x^2+a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\text{ или}\\&\int_0^x\frac{dx}{(1+ax^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.\end{aligned}\right\}\qquad(1$$

Ове интеграле зовемо *елиптичним интегралима* и то елиптичним интегралима *прве*, *друге* и *треће врсте*. Најважнији је од њих интеграл прве врсте.

Пошто се може да учини да x остаје у границама између -1 и $+1$, *Лежандр* ставља

$$x = \sin\varphi$$

и претвара тиме горња три елиптична интеграла на форме

$$2)\quad \left|\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \\ \displaystyle\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \\ \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \end{array}\right.$$

Лежандр је први интеграл назвао елиптичним интегралом прве врсте, интеграл $\displaystyle\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ елиптичним интегралом друге врсте, а трећи интеграл елиптичним интегралом треће врсте.

φ је *амплитуда*, k *модуо* за сва три елиптична интеграла, a је *параметар* елиптичнога интеграла треће врсте.

Примедба. За специалне вредности модуа, за $k=0$ и $k=1$ интеграли под 1) и 2) престају бити елиптични; они се, у томе случају, могу да изразе елементарним функцијама.

Интеграл прве врсте

$$\text{за } k=0 \text{ постаје } \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = l\,arc\sin x,$$

$$\text{за } k=1 \quad \text{„} \quad \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}.$$

Ми видимо да су елиптични интеграли функције, које обухватају циклометриске функције и логаритамску функцију као специалне видове; значи да су елиптични интеграли циклометриским функцијама и логаритму аналогне функције.

2. Дефиниција елиптичних функција.

167. Општа посматрања. — Приметили смо да се логаритми и циклометриске функције могу да представе као интеграли алгебарских функција. Закључујемо отуда што је нпр.

$$1)\ \int_1^x \frac{dx}{x} = l\,x;\quad 2)\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l(x+\sqrt{1+x^2});$$

$$3)\ \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right);\quad 4)\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x;$$

$$5)\ \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x.$$

(Овде су доње границе интеграла узете тако да произвољна константа у неодређеноме интегралу постаје $=0$.)

Замислимо у овима интегралима, које ћемо означити са u, горњу границу као променљиву и интеграл представљен као функцију горње границе x, онда је за горњих пет интеграла:

$$1)\ x = e^u;\quad 2)\ x = \frac{e^u - e^{-u}}{2};\quad 3)\ x = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}};$$

$$4)\ x = \sin u;\quad 5)\ x = tg\,u.$$

То значи: ако у извесним интегралима алгебарских функција посматрамо интеграл u као функцију његове горње границе x, онда је дотична функција $u = F(x)$ логаритам или каква циклометриска функција; ако, пак, у истим интегралима посматрамо горњу границу као функцију интеграла, онда је та функција $x = f(u)$ изложитељна или тригонометриска функција.

Абел је учинио примедбу да од много веће важности по Анализу, но што су интеграли, који представљају логаритме и циклометриске функције, јесу овима инверзне функције, тј. изложитељне и тригонометриске функције[1]) и он је из тога закључио да ће тако исто и оне функције,

---

[1]) Познато је с каквом се гипкости тригонометриске функције доводе у везу и с каквом се прилагодности могу да употребе при удешавању аналитичких израза за практично рачунање. То исто вреди и за изложитељне функције, које, у осталоме, и нису друго до тригонометриске функције за уображене аргументе. Од нарочите су важности изрази

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

који су потпуно аналогни тригонометриским функцијама.

Осим поменутих преимућстава уживају тригонометриске и изложитељне функције према њиховим изврнутим функцијама (циклометриским и логаритму) још неколико важних особина која их нарочито одликују.

1. Бесконачни редови, у које се развијају синус и косинус (а то су главне тригонометриске функције), као и редови за изложитељну функцију конвергентни су за све могуће вредности променљиве.

до којих долазимо инверзијом елиптичнога интеграла, бити од несрављено веће важности, но што су сами елиптични интеграли.

Ми смо видели да елиптични интеграли обухватају, као специалну врсту, логаритам и циклометриске функције (види Примедбу на крају чл. 166.). Логички следује да елиптичним интегралима инверзне функције, а то су оне које добијамо кад горњу границу елиптичнога интеграла будемо сматрали као функцију интеграла, обухватају, као специалне форме, изложитељну и тригонометриске функције. Ове елиптичноме интегралу инверзне функције, где се горња граница x интеграла сматра као функција интеграла u, зову се *елиптичне функције.*

168. Дефиниције. — Поменули смо да је од највеће важности елиптични интеграл прве врсте, који у *нормалној форми* гласи

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

где је модуо $k < 1$ и увек положан.

Пошто је *Лежандр* показао, да се може да учини да горња граница интеграла лежи у границама -1 и $+1$ и пошто је дакле $x \begin{smallmatrix} < 1 \\ > -1 \end{smallmatrix}$ може да се стави

$$x = \sin\varphi.$$

Овим постаје

$$1) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Лук φ (горњу границу елиптичнога интеграла) *Лежандр* је назвао амплитудом, k модуом и, ради краћега бележења, ставио је

$$1\,a) \qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi,\ k)$$

или, ако о моду-у не може бити сумње

$$u = F(\varphi).$$

---

2. Речене функције могу да се представе у форми производа и то како са бесконачно многим, тако и са коначним бројем чинитеља.

3. Функција збира промењљивих може врло просто да се алгебарски изрази функцијама појединих промењљивих. Нпр.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ e^{(x+y)} = e^x\,e^y.$$

4. Функције су периодне. Код тригонометриских је функција индекс периоде стваран $= 2\pi$; код изложитељних функција имагинаран $= 2\pi i$.

5. Изводне (диференциални количници) тригонометриских функција и изложитељних функција јесу функције исте врсте. Нпр.

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x,\ \frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Изртањем елиптичних интеграла добијамо елиптичне функције. У једн. 1) и 1a) представљено је u као функција од φ. Обратно: φ је амплитуда од u, које се, по *Јакоби*-у зове *аргуменат* и то се бележи

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = am\,u \\ \text{или}\quad &\varphi = am\,(u,\ k), \\ &\varphi = am\,u\,(mod\ k). \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

Последња два означавања употребљавају се, ако је потребно да се нарочито обележи модуо, од кога, поред аргумента, амплитуда још зависи.

Ако у елиптичноме интегралу 1) будемо горњу границу x сматрали као функцију интеграла u, онда, према учињеној замени $x = \sin\varphi$, јесте

$$x = \sin am\,u,$$

„x је *синус амплитуде u*“.

Именитељ $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ у елиптичноме интегралу $F(\varphi)$ обележио је *Лежандр* нарочитим знаком

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \triangle(\varphi,\ k). \qquad (3$$

или простије

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \triangle\varphi. \qquad (3\,a$$

Тригонометриске функције лука φ (амплитуде од u), заједно с овом функцијом $\triangle$, сачињавају елиптичне функције.

Као најважније елиптичне функције треба сматрати ове три

$$\sin am\,u,\quad \cos am\,u,\quad \triangle\,am\,u,$$

из којих се, на прост начин, изводе остале

$$tg\,am\,u,\quad cotg\,am\,u,\quad sec\,am\,u,\quad cosec\,am\,u.$$

Лежандр је, поред модуа k, завео још један модуо, који *Јакоби* означава са k' и који с првим стоји у вези

$$k^2 + k'^2 = 1. \qquad (4$$

Модуи k и k' стоје у истоме односу као синус и косинус. *Лежандр* назива такве модуе *комплементне.*

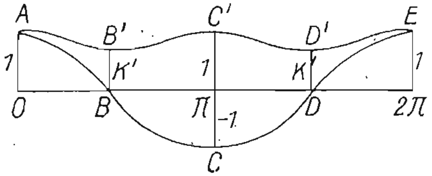
169. Напомене. — 1. Функција $\triangle$ узима се за стварне вредности лука φ увек као положна. Функција $\triangle$ је сродна косинусној функцији. Из

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi},\ \triangle\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

видимо да је

$$\triangle\varphi > \cos\varphi.$$

За $\varphi = 0$ обе су функције $= 1$, $\cos 0 = 1$ и $\Delta 0 = 1$; за $\varphi = \frac{\pi}{2}$ јесте $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\Delta \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - k^2} = k'$.



Сл. 67.

У слици је представљен косинус линијом $ABCDE$, функција Δ линијом $AB'C'D'E$.

Вредно је скренути пажњу на ове релације

$$\Delta^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi = 1,$$
$$\Delta^2 \varphi - k^2 \cos^2 \varphi = k'^2,$$

које су, у неколико, аналогне обрасцу $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

2. Поменули смо да елиптични интеграл

$$u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

за специалне вредности модуа води циклометриским фунцијама или логаритму. То значи да се у таквоме случају елиптичне функције своде на тригонометриске и на изложитељне функције.

За $k = 0$ јесте $u = \arc \sin x = \varphi$, дакле

$$am\,(u,\ o) = u, \quad \sin am\,(u,\ o) = \sin u.$$

За $k = 1$ јесте $u = \int\limits_0^x \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\, l \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$, одакле

$$u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \quad \sin am\,(u,\ 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

3. Пошто интеграл $F(\varphi)$ и амплитуда φ постају у исто време $= 0$ за ма какво k, то је дакле

$$am\,(0,\ k) = 0,$$

$$\sin am\,(0,\ k) = 0, \quad \cos am\,(0,\ k) = 1, \quad \Delta\, am\,(0,\ k) = 1.$$

4. Функција $am\, u$ је непарна функција, јер је

$$am\,(-u) = -\, am\, u,$$

дакле

$$\sin am\,(-u) = -\sin am\, u,$$
$$\cos am\,(-u) = \cos am\, u,$$
$$\Delta\, am\,(-u) = \Delta\, am\, u.$$

5. У примедби под 1) чл. 167., а у тачци 5., навели смо као једну од карактерних особина тригонометриских и изложитељних функција да су њихови диференциални количници функције исте врсте. Лако је потврдити да то важи и за елиптичне функције. Из

$$u = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{d\Delta}$$

следује

$$\frac{d\varphi}{du} = \Delta \varphi \quad \text{или} \quad \frac{d\, am\, u}{du} = \Delta\, am\, u.^{1)}$$

Имамо

$$\frac{d \sin \varphi}{d\varphi} = \cos \varphi, \quad \frac{d \cos \varphi}{d\varphi} = -\sin \varphi, \quad \frac{d \Delta \varphi}{d\varphi} = -\frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta \varphi}.$$

Према томе је

$$\frac{d \sin am\, u}{du} = \cos am\, u\ \Delta\, am\, u,$$

$$\frac{d \cos am\, u}{du} = -\sin am\, u\ \Delta\, am\, u,$$

$$\frac{d\, \Delta\, am\, u}{du} = -k^2 \sin am\, u \cos am\, u.$$

3. Периодност елиптичних функција.

170. Напомена. — Отуда, што елиптичне функције обухватају тригонометриске и изложитељне функције, унапред је јасно да елиптичне функције уживају сва она својства која одликују тригономеериске и изложитељне функције. Једно од тих својстава доказато је на крају последњега члана. Најважније од свих својстава то је њихова периодност. Доказаћемо да елиптичне функције имају двојаку периоду; једна је стварна, као код тригонометриских функција, друга имагинарна, као код изложитељних функција.

171. Потпуни интеграл. — Од свију могућих вредности, које може да има горња граница елиптичнога интеграла $F(\varphi)$ карактеристична је амплитуда $\frac{\pi}{2}$. Интеграл, чија је амплитуда $= \frac{\pi}{2}$, назвао је *Лежандр потпуним интегралом* и ми ћемо га, по *Јакоби*-у, означити са K. Дакле

$$K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

---

[1] Пошто је $\Delta\, am\, u > 0$ закључујемо да функција $am\, u$ за стварне вредности од u расте упоредно са u. (Види Дпф. Р. чл. 41.)

Количина K зависи једино од модуа k. За комплементни модуо бележимо аналогно

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}}.$$

Односно количине K утврђујемо:

1. за $k=0$ јесте $K=\frac{\pi}{2}$.
2. за $k=1$ постаје $K=\infty$.

Ово закључујемо из тога што је за

$$k=1,\ K=\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \left[\frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^1 = \infty.$$

3. количина K је увек >0. То се потврђује тиме што је K представљено као збир (интеграл) из све положних чланова $\Delta\varphi$.

Из истога разлога закључујемо

4. да је

$$\frac{dK}{d(k^2)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \text{ увек} > 0.$$

То значи да је за $k>0$, $K>\frac{\pi}{2}$.[1]

5. Из дефиниције, коју смо дали за количину K, следује

$$am(K,\ k) = am(K',\ k') = \frac{\pi}{2}$$

и према томе

$$\sin am(K,\ k) = 1, \quad \cos am(K,\ k) = 0, \quad \Delta\, am(K,\ k) = k'.$$

Количина K игра, дакле, код елиптичних функција исту улогу коју и број $\frac{\pi}{2}$ код тригонометриских функција. То се потврђује и тиме што је за $k=0$, $K=\frac{\pi}{2}$.

172. Теорема. — Сваки елиптични интеграл са ма каквом амплитудом може да се разложи на известан број интеграла са амплитудом $\frac{\pi}{2}$ и један интеграл, чија је амплитуда мања од $\frac{\pi}{2}$.

---

[1] Види Диф. Р. чл. 41.

Да бисмо ово доказали констатујмо:

1. да све три врсте елиптичних интеграла имају заједнички вид

$$\int f(\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

2. за цело n јесте

$$\int_0^{n\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi + \dots$$

$$\dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

3.

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Доказ. Ставимо $\varphi=(n-1)\pi+\psi$. Тада је

$$f(\sin^2\varphi) = f(\sin^2\psi),$$

$$d\varphi = d\psi,$$

за $\varphi=(n-1)\pi$ јесте $\psi=0$,

„ $\varphi=n\pi$ „ $\psi=\pi$

и према томе

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi} f(\sin^2\psi)\,d\psi \quad q.\ e.\ d.$$

С овим, а на основу онога под 2), утврђујемо

4. да је

$$\int_0^{n\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi = n\int_0^{\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

5.

$$\int_0^{\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Доказ

$$\int_0^{\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi$$

и ако ставимо у последњем интегралу

$$\varphi = \pi - \psi$$

биће

$$f(\sin^2\varphi) = f(\sin^2\psi),$$

$$d\varphi = -\,d\psi,$$

$$\text{за } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{2},$$
$$\text{„ } \varphi = \pi, \quad \psi = 0.$$

Дакле

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\,(sin^3\,\varphi)\,d\varphi = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\,(sin^2\,\psi)\,d\psi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\,(sin^2\,\psi)\,d\psi \quad q.\ e.\ d.$$

Ово под 5) с оним под 4) даје формулу

$$6. \qquad \int_0^{n\pi} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi = 2\,n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi,$$

а одавде изводимо теорему

$$7. \qquad \int_0^{n\pi \pm \alpha} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi = 2\,n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi \pm \int_0^{\alpha} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi.$$

Доказ

$$\int_0^{n\pi \pm \alpha} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi = \int_0^{n\pi} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi + \int_{n\pi}^{n\pi \pm \alpha} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi$$
$$= 2\,n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi + \int_{n\pi}^{n\pi \pm \alpha} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi.$$

Ако у последњем интегралу ставимо

$$\varphi = n\pi \pm \psi,$$

дакле

$$f\,(sin^2\,\varphi) = f\,(sin^2\,\psi),$$
$$d\varphi = \pm\,d\psi,$$

а с обзиром да је за $\varphi = n\pi$, $\psi = 0$,
за $\varphi = n\pi \pm \alpha$, $\psi = \alpha$

добићемо

$$\int_{n\pi}^{n\pi \pm \alpha} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi = \pm \int_0^{\alpha} f\,(sin^2\,\psi)\,d\psi. \quad Q.\ e.\ d.$$

У интегралу $\int_0^{n\pi \pm \alpha} f\,(sin^2\,\varphi)\,d\varphi$ узета је горња граница тако да се под α може разумети амплитуда увек мања од $\frac{\pi}{2}$.

---

173. Примена последње теореме на елиптичне интеграле прве врсте. — На основу ресултата под 6 у последњем члану јесте

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = n\,K,$$

дакле

$$n\,\frac{\pi}{2} = am\,(n\,K)$$

или с обзиром на то што је $\frac{\pi}{2} = am\,K$ (види чл. 171. под 5.),

$$am\,(n\,K) = n\;am\;K.$$

Теорема, коју смо доказали у последњем члану (види ресултат под 7 у чл. 172.) уопште за елиптичне интеграле важи, разуме се, и за интеграл $F(\varphi)$. Елиптични интеграл $F(\varphi)$ са произвољном амплитудом своди се на потпуни интеграл K и на један интеграл, чија је амплитуда $< \frac{\pi}{2}$. У формули

$$\int_0^{n\pi \pm \alpha} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2\,n\,K \pm \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

174. Стварна периода елиптичних функција. — Означимо

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \quad \alpha = am\,u$$

и тиме последња формула у чл. 173. гласи

$$\int_0^{n\pi \pm \alpha} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2\,n\,K \pm u,$$

дакле

$$n\pi \pm \alpha = am\,(2\,n\,K \pm u)$$

или

$$n\pi \pm am\,u = am\,(2\,n\,K \pm u)$$

или најзад, с обзиром на то што је $am\,(\text{-}v) = -\,am\,v$ (види чл. 169. под 4),

$$am\,(u \pm 2\,n\,K) = am\,u \pm n\pi. \qquad (1$$

Одавде, када ставимо $n = 1$, изводимо:

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin am\,(u \pm 2\,K) &= -\sin am\,u,\\ \cos am\,(u \pm 2\,K) &= -\cos am\,u,\\ \Delta\,am\,(u \pm 2\,K) &= -\Delta\,am\,u.\end{aligned}\right.$$

Ове формуле, када у њима заменимо $u = 0$, дају следеће вредности

$$3)\qquad \sin am\,2\,K = 0,\quad \cos am\,2\,K = -1,\quad \Delta\,am\,2\,K = 1.$$

Ставимо сада у обрасцу 1) да је $n = 2$, па ћемо добити

$$4)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin am\,(u \pm 4\,K) &= \sin am\,u,\\ \cos am\,(u \pm 4\,K) &= \cos am\,u,\\ \Delta\,am\,(u \pm 4\,K) &= \Delta\,am\,u,\end{aligned}\right.$$

одакле, опет, за $u = 0$, следује

$$5)\qquad \sin am\,4\,K = 0,\quad \cos am\,4\,K = 1,\quad \Delta\,am\,4\,K = 1.$$

Из образаца 4) видимо да се елиптичне функције не мењај
им аргуменат повећамо или смањимо за $4\,K$. То значи да су ели
функције периодне. Њихов индекс периоде није, пак, као код тр
метриских функција, стална количина; напротив индекс периоде
сан је од модуа k. Ако, место модуа k, узмемо модуо k', онда је
периоде $4\,K'$

$$\sin am\,(u \pm 4\,K',\ k') = \sin am\,(u,\ k').$$

Вредно је поменути, а то се види из формула 2), да је
периоде за $tg\,am\,u$ и $\Delta\,am\,u$ раван половини од општега инде
$= 2\,K$, јер је

$$tg\,am\,(u \pm 2\,K) = tg\,am\,u,\ \ \Delta\,am\,(u \pm 2\,K) = \Delta\,am\,u.$$

175. Елиптичан интеграл са уображеном амплитудом

бисмо доказали да елиптичне функције имају, осим горе
стварне периоде, још једну и то имагинарну периоду, треба
жемо како се елиптичан интеграл са уображеном амплитудом
доведе на форму са i помноженога елиптичнога интеграла
амплитуда стварна.

Претпоставимо да је у интегралу

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

амплитуда уображена и ставимо

$$\sin\varphi = i\,tg\,\psi,$$

одакле

$$\cos\varphi = \frac{1}{\cos\psi},\ \ \Delta\varphi = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}}{\cos\psi} = \frac{\Delta\,(\psi,\ k')}{\cos\psi}$$

$$d\varphi = i\,\frac{d\psi}{\cos\psi}$$

и пошто φ и ψ једновремено постају $= 0$, то је

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = i\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\,(\psi,\ k')}. \qquad (2$$

Означимо

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\,(\psi,\ k')} = u,\ \ \psi = am\,(u,\ k').$$

Према формули 2) је

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = i\,u,\ \ \varphi = am\,(i\,u)$$

и када ово заменимо у 1) налазимо ове значајне обрасце

$$\left.\begin{aligned} \sin am\,(i\,u) &= i\,tg\,am\,(u,\ k'),\\ \cos am\,(i\,u) &= \frac{1}{\cos am\,(u,\ k')},\\ \Delta\,am\,(i\,u) &= \frac{\Delta\,am\,(u,\ k')}{\cos am\,(u,\ k')}.\end{aligned}\right\} \qquad (3$$

Одавде видимо да се елиптичне функције имагинарнога аргумента претварају опет у елиптичне функције, али са комплементним модуом, док се, међутим, тригонометриске функције са уображеним аргументом претварају у изложитељне функције, а изложитељне функције са уображеним аргументом у тригонометриске функције.

176. Имагинарна периода елиптичних функција. — На основу формула 3) у чл. 175. изводимо имагинарну периоду елиптичних функција, јер када на десној страни поменутих образаца, где се налазе функције са модуом k', заменимо u са $u \pm 4\,K'$ функције, услед стварне периодичности, своју вредност не мењају. Дакле

$$\sin am\,(i\,u \pm 4\,i\,K') = i\,tg\,am\,(u,\ k') = \sin am\,(i\,u),$$

$$\cos am\,(i\,u \pm 4\,i\,K') = \frac{1}{\cos am\,(u,\ k')} = \cos am\,(i\,u),$$

$$\Delta\,am\,(i\,u \pm 4\,i\,K') = \frac{\Delta\,am\,(u,\ k')}{\cos am\,(u,\ k')} = \Delta\,am\,(i\,u).$$

На[illegible] ако заменимо овде iu са u

$$\begin{cases} \sin am\,(u \pm 4\,i\,K') = \sin am\, u, \\ \cos am\,(u \pm 4\,i\,K') = \cos am\, u, \\ \Delta\, am\,(u \pm 4\,i\,K') = \Delta\, am\, u. \end{cases}$$

Индекс је имагинарне периоде $4\,i\,K'$ за модуо k, а за модуо k' је $\pm i$

Ако у формулама 1) ставимо $u = 0$ добићемо ове специалне вредности

$$2)\qquad \begin{cases} \sin am\, 4\,i\,K' = 0, \\ \cos am\, 4\,i\,K' = 1, \\ \Delta\, am\, 4\,i\,K' = 1. \end{cases}$$

Заменимо уформулама 3) чл. 175. u са $u \pm 2\,K'$, применимо на десну страну обрасце 2) чл. 174. и заменимо онда iu са u па ћем добити

$$3)\qquad \begin{cases} \sin am\,(u \pm 2\,i\,K') = \sin am\, u \\ \cos am\,(u \pm 2\,i\,K') = -\cos am\, u, \\ \Delta\, am\,(u \pm 2\,i\,K') = -\Delta\, am\, u; \end{cases}$$

одакле, када ставимо $u = 0$, следује

$$4)\qquad \sin\ am\, 2\,i\,K' = 0, \quad \cos am\, 2\,i\,K' = -1, \quad \Delta\, am\, 2\,i\,K' = -1.$$

177. Двојака периода елиптичних функција. — Стварна и имагинарна периода могу да се комбинују. Заменом u са $u \pm 4\,K$, односно са $u \pm 2\,K$ у формулама 1) и 3) чл. 176. налазимо ове [illegible] обрасце

$$1)\qquad \begin{cases} \sin am\,(u \pm 4\,K \pm 4\,i\,K') = \sin am\, u, \\ \cos am\,(u \pm 4\,K \pm 4\,i\,K') = \cos am\, u, \\ \Delta\, am\,(u \pm 4\,K \pm 4\,i\,K') = \Delta\, am\, u. \end{cases}$$

$$2)\qquad \begin{cases} \sin am\,(u \pm 2\,K \pm 2\,i\,K') = -\sin am\, u, \\ \cos am\,(u \pm 2\,K \pm 2\,i\,K') = \cos am\, u, \\ \Delta\, am\,(u \pm 2\,K \pm 2\,i\,K') = -\Delta\, am\, u. \end{cases}$$

Из образаца 1) и 2), када ставимо $u = 0$, налазимо специалне вредности

$$3)\qquad \begin{cases} \sin am\,(4\,K \pm 4\,i\,K') = 0, \\ \cos am\,(4\,K \pm 4\,i\,K') = 1, \\ \Delta\, am\,(4\,K \pm 4\,i\,K') = 1. \end{cases}$$

$$4)\qquad \begin{cases} \sin am\,(2\,K \pm 2\,i\,K') = 0, \\ \cos am\,(2\,K \pm 2\,i\,K') = 1. \\ \Delta\, am\,(2\,K \pm 2\,i\,K') = -1. \end{cases}$$