Prirodno - matematički fakultet

Univerzitet u Beogradu

Ninoslav Ćirić

O REGULARIZACIJI METODA LINEARIZACIJE

- doktorska disertacija -

Beograd 1987.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR

Pri numeričkom rešavanju praktičnih problema vrlo često su nam ulazni podaci poznati samo približno. Zbog toga je važno pitanje da li dovoljne male greške u ulaznim podacima dovode do malih grešaka u određivanju rešenja, odnosno da li rešenje neprekidno zavisi od ulaznih podataka. Zadaci kod kojih to nije ispunjeno spadaju u klasu nekorektnih zadataka (primer iz §2.1). Poseban problem predstavlja njihovo numeričko rešavanje. Specijalni metodi za rešavanje takvih zadataka nazivaju se metodi regularizacije. Metod Tihonova predstavlja jedan od metoda za rešavanje nekorektnih zadataka minimizacije funkcija. On se sastoji u tome da se odabere pozitivan nula niz α_k, i da se umesto minimuma funkcionala $J(u)$, traži minimum Tihonovljevog funkcionala $T_k(u) = J(u) + \alpha_k\|u\|^2$. Korišćenjem Tihonovljevog metoda regularizacije dobija se minimizirajući niz funkcionala $J(u)$, koji konvergira rešenju problema. Pored toga, i u slučajevima kada pojedini metodi minimizacije daju minimizirajuće nizove koji slabo konvergiraju ka skupu rešenja problema, odgovarajući regularizovani metodi daju nizove koji jako konvergiraju ka normalnom rešenju, to jest onome koje među svim rešenjima ima najmanju normu.

Osnovne ideje za rešavanje nekorektnih zadataka izložene su još 1943. godine u radu A.N. Tihonova „O stabilnosti inverznih zadataka", a osnovi teorije i metoda rešavanja nekorektnih zadataka šezdesetih godina u radovima A.N. Tihonova, M.M. Lavrenteva, V.K. Ivanova, Ž.L. Lionsa i drugih.

U radovima A.N. Tihonova ([32] - [34]) predložen je Tihonovljev metod regularizacije, pogodan za teorijsko ispitivanje i praktično rešavanje nekorektnih ekstremalnih zadataka. Ideja regularizacije kasnije je razvijana u radovima F.P. Vasiljeva, V.A. Morozova, V.G. Karmanova, A.B. Bakušinskog, V.T. Poljaka i mnogih drugih. Regularizacija pojedinih metoda minimizacije funkcionala Tihonovljevim metodom izložena je u monografiji [9], radovima [13, 17, 21, 24, 39] i drugim.

Metod linearizacije, kao metod minimizacije funkcija u prostoru R^n, razmatra se u monografijama [3, 30, 31]. U njima se pretpostavlja da su ulazni podaci poznati tačno i da je skup U, na kome se minimizira funkcija, određen konveksnim nejednakostima, pri čemu je zadovoljen Sleterov uslov. U radovima [17, 39] izložen je regularizovani metod linearizacije u Hilbertovom prostoru, pri čemu su ulazni podaci poznati približno. U radu [17] se razmatra slučaj kada je skup U određen konveksnim funkcionalnim nejednakostima, pri čemu je zadovoljen Sleterov uslov, a u radu [39] U je poliedar, odnosno presek konačnog broja zatvorenih poluprostora.

U ovom radu izložene su dve varijante regularizovanog metoda linearizacije, koje predstavljaju uopštenje rezultata iz radova [17, 39]. Posmatra se zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na skupu $U=\left\{u\in U_0:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s},\ Au=b\right\}$. U prvoj varijanti (§ 2.2) umesto svakog ograničenja uzima se približna vrednost njegove linearizacije, a u drugoj (§ 2.3) od nekih ograničenja se formira kaznena funkcija, a ostala se linearizuju. U oba slučaja se u dokazu konvergencije dobijenih nizova primenjuje Kun - Takerova teorema na zadatak minimizacije Tihonovljevog funkcionala na skupu U. Pri tome se koristi činjenica da su nizovi Lagranževih množitelja ograničeni. U slučaju kada je $U=\left\{u\in U_0:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s}\right\}$, pri čemu je ispunjen Sleterov uslov, svi nizovi Lagranževih množitelja koji zadovoljavaju tvrđenja Kun - Takerove teoreme su ograničeni (dokaz teoreme 2.3.1). U slučaju da Sleterov uslov nije ispunjen nizovi Lagranževih množitelja ne moraju biti ograničeni. Posmatrajmo na primer zadatak minimizacije Tihonovljevog funkcionala $T_k(u) = J(u)+\mathcal{L}_k\|u\|^2$ na skupu $U = \left\{u \in U_0 : g(u) \leq 0\right\}$, pri čemu je $g(u) \geq 0$ za sve $u \in U_0$. Tada, za fiksirano $k \in N$, skup svih Lagranževih množitelja μ_k, koji zadovoljavaju tvrđenje odgovarajuće Kun - Takerove teoreme predstavlja (ukoliko nije prazan) interval $\left[\underline{\mu}_k, +\infty\right)$(teorema 1.1.4), pa niz odgovarajućih množitelja ne mora biti ograničen. Međutim, pod određenim uslovima, postoje „dobri" nizovi Lagranževih množitelja iz Kun - Takerove teoreme primenjene na zadatak minimizacije Tihonovljevog funkcionala, koji su ograničeni (teorema 1.3.2), ili čak koji konvergiraju ka Lagranževim množiteljima iz Kun - Takerove teoreme primenjene na zadatak minimizacije funkcionala $J(u)$ na skupu U (teorema 1.2.4).

Rad sadrži dve glave. Prva se odnosi na Kun - Takerovu teoremu i njenu primenu na zadatak minimizacije Tihonovljevog funkcionala. U drugoj glavi se izlaže regularizacija metoda linearizacije.

Prva glava se sastoji iz tri dela. U prvom je izložena Kun - Takerova teorema u oblicima pogodnim za kasnije korišćenje. Dokaz prilično opšte teoreme 1.1.5 je originalan. U drugom delu formulisani su uslovi pod kojima postoje konvergentni nizovi Lagranževih množitelja iz Kun - Takerove teoreme primenjene na zadatak minimizacije funkcionala koji ima neke osobine (1.2.2) funkcionala Tihonova. Uslovi pod kojima postoje konvergentni nizovi Lagranževih množitelja dati su u teoremi 1.2.4. Osnovu dokaza te teoreme čine tvrđenja o postojanju konvergentnih nizova Lagranževih množitelja u zadacima sa jednim ograničenjem teoreme 1.2.1 i 1.2.2). U trećem delu formulisani su uslovi od kojima su pomenuti nizovi Lagranževih množitelja ograničeni. : ovde osnovu dokaza odgovarajućih teorema čine teoreme 1.2.1 i ..2.2. Sva dokazana tvrđenja drugog i trećeg dela su originalna.

I druga glava se sastoji iz tri dela. U prvom su formulisane dve osnovne teoreme o regularizaciji i jedna pomoćna lema. drugom delu izlaže se regularizovani metod linearizacije u slučaju kada je skup na kome se minimizira funkcional određen: konveksnim funkcionalnim nejednakostima koje su stroge u nekoj tački toga skupa, linearnim funkcionalnim nejednakostima i linearnom operatorskom jednakošću. Formulacija i dokaz teoreme 2.2.1, koja predstavlja uopštenje odgovarajućih teorema iz [17, 9],su originalni. U trećem delu se posmatra takav regularizovani metod linearizacije u kome se od nekih ograničenja formira kazneni funkcional, a preostala ograničenja, koja predstavljaju konveksne funkcionalne nejednakosti i koja zadovoljavaju Sletetov uslov, se linearizuju. Formulacija i dokaz teoreme 2.3.1 takođe predstavlja upštenje odgovarajuće teoreme iz [17]) su riginalni. Kako je metod projekcije gradijenata specijalan lučaj metoda linearizacije, to su teoreme 2.2.2 i 2.3.2, koje e onose na regularizovani metod projekcije gradijenata, poslemice teorema 2.2.1 i 2.3.1. Pri tome su njihova tvrđenja bliska vrđenjima iz [9].

Popis literature sadrži 39 bibliografskih jedinica koje e odnose na funkcionalnu analizu, matematičko programiranje i etode regularizacije. Osobine konveksnih funkcija koje se koiste u dokazu teorema druge glave kao i lema 1.1.1 dokazane su monografiji [9], a osobine prostora Soboljeva koje se koriste primerima iz § 1.1, 1.3 i 2.2 dokazane su u [38]. Preostali tavovi koji su navedeni bez dokaza, dokazani su u [1, 8, 9].

Svi prostori koji se pojavljuju u ovom radu su realni, pa se ta činjenica nigde posebno ne naglašava. Umesto izraza funkcional, u radu se često koristi izraz funkcija.

U svakom paragrafu numeracija počinje iz početka. Formula iz istog paragrafa poziva se brojem formule, iz iste glave ali drugog paragrafa brojevima paragrafa i formule, a iz prethodne glave brojevima glave, paragrafa i formule.

Do nekih rezultata izloženih u ovom radu došao sam u toku naučnog usavršavanja na fakultetu VM i K MGU-a. Osećam dužnost da se zahvalim svome mentoru za vreme naučnog usavršavanja, profesoru F.P. Vasiljevu, za postavku zadataka i pomoć u radu. Takođe zahvaljujem svima ostalima koji su mi na bilo koji način pomogli u izradi ovog rada.

GLAVA 1

NEKE OSOBINE LAGRANŽEVIH MNOŽITELJA IZ KUN - TAKEROVE TEOREME PRIMENJENE NA PROBLEM MINIMIZACIJE FUNKCIJE TIHONOVA

§1. Kun - Takerova teorema

Posmatraćemo problem konveksnog programiranja

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U, \tag{1}$$

gde je U konveksan skup Banahovog prostora X, a $J(u)$ konveksna funkcija na X. Pretpostavimo da je

$$J_* = \inf_U J(u) > -\infty, \quad U_* = \{u \in U: \ J(u) = J_*\} \neq \emptyset. \tag{2}$$

L e m a 1.1.1 ([9]). Neka je U konveksan skup Banahovog prostora X, a $J(u)$ konveksna neprekidno - diferencijabilna funkcija na U. Tačka $u_* \in U$ je rešenje problema (1) ako i samo ako je $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geqslant 0$ za sve $u \in U$. Poslednja nejednakost je u slučaju $u_* \in \operatorname{int} U$ ekvivalentna sa $J'(u_*) = 0$.

T e o r e m a 1.1.1 ([1]). Neka su ispunjeni sledeći uslovi: U_0 je konveksan skup Banahovog prostora X, $J(u)$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$ su konveksne funkcije na U_0, skup

$$U = \{u \in U_0: \ g_i(u) \leqslant 0, \ i = \overline{1,m}\} \tag{3}$$

zadovoljava sledeći (Sleterov) uslov: postoji tačka $\bar{u} \in U_0$ takva da je $g_i(\bar{u}) < 0$ za sve $i = \overline{1,m}$. Pored toga neka je za problem (1), (3) ispunjen uslov (2). Tada za svaku tačku $u_* \in U_*$ postoje Lagranževi množitelji $\lambda_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$, takvi da je $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1,m}$ i $L(u_*) \leqslant L(u)$ za sve $u \in U_0$, gde je $L(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \ldots + \lambda_m g_m(u)$.

L e m a 1.1.2 ([1]). Neka su ispunjeni sledeći uslovi: X i Y su Banahovi prostori, A je ograničeni linearni operator koji preslikava X na Y, $a_i \in X^*$, $i=\overline{1,s}$ i $K=\{u\in X: \langle a_i,u\rangle \leqslant 0,$ $i=\overline{1,s},\ Au=0\}$. Tada za svako $a\in K^*=\{x^*\in X^*: \langle x^*, u\rangle \geqslant 0$ za svako $u\in K\}$, postoje $\lambda_i \geqslant 0$, $i=\overline{1,s}$ i $y^*\in Y^*$ takvi da je $a+\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_s a_s+A^*y^*=0$.

T e o r e m a 1.1.2. Neka su ispunjeni sledeći uslovi: X i Y su Banahovi prostori, A je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Y, takav da je skup AX zatvoren u Y, $\bar{b}\in Y$, $J(u)$ je konveksna, neprekidno-diferencijabilna funkcija na X, $a_i\in X^*$, $b_i\in R$, $g_i(u)=\langle a_i, u\rangle - b_i$, $i=\overline{1,s}$,

$$U=\{u\in X: g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s},\ Au=\bar{b}\}. \tag{4}$$

Pored toga neka je za problem (1), (4) ispunjen uslov (2). Tada za svaku tačku $u_*\in U_*$ postoje Lagranževi množitelji $\lambda_i \geqslant 0$, $i=\overline{1,s}$, $y^*\in Y^*$, takvi da je

$$\lambda_i g_i(u_*)=0,\ i=\overline{1,s} \text{ i } L(u_*)\leqslant L(u) \text{ za sve } u\in X,$$

gde je $L(u)=J(u)+\lambda_1 g_1(u)+\ldots+\lambda_s g_s(u)+\langle y^*, Au-\bar{b}\rangle$.

D o k a z. Razmotrimo prvo slučaj kada je $AX=Y$. Jasno je da je U konveksan skup. Neka je u_* proizvoljna tačka iz U_*, $I=\{i: 1\leqslant i\leqslant s,\ g_i(u_*)=0\}$. Dokažimo da skup mogućih pravaca skupa U u tački u_* predstavlja konus

$$K=\{e\in X: \langle a_i, e\rangle\leqslant 0,\ i\in I,\ Ae=0\}.$$

Neka je e mogući pravac skupa U u tački u_*, odnosno neka postoji $t_0>0$ takvo da je $u_*+te\in U$ za sve $t\in[0, t_0]$. Tada je $\langle a_i, u_*+te\rangle\leqslant b_i$, $i=\overline{1,s}$, $A(u_*+te)=\bar{b}$ za $0\leqslant t\leqslant t_0$, odakle, s obzirom da je $u_*\in U$, sledi $\langle a_i, e\rangle\leqslant 0$, $i\in I$, $Ae=0$, odnosno $e\in K$. Neka je $e\in K$. Tada za svako $i\in I$ imamo $g_i(u_*+te)=\langle a_i,$ $, u_*\rangle + t\langle a_i, e\rangle - b_i\leqslant 0$ za sve $t\geqslant 0$. Ako je $i\in\{1, 2,\ldots,s\}\setminus I$, onda je $\langle a_i, u_*\rangle - b_i<0$, odakle sledi $g_i(u_*+te)=\langle a_i, u_*+te\rangle -$ $- b_i<0$, za sve $t\in[0, t_0]$, pri dovoljno malom t_0. Na kraju je $A(u_*+te)-\bar{b}=Au_*-\bar{b}+tAe=0$ za sve $t>0$.

Neka je $e \in K$ proizvoljno, a $t > 0$ takvo da je $u = u_* + te \in U$. Iz leme 1.1.1 sledi da je $\langle J'(u_*), e\rangle = \langle J'(u_*), u - u_*\rangle/t \geq 0$, odnosno $J'(u_*) \in K^*$. Na osnovu leme 1.1.2 postoje $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$ i $y^* \in Y^*$, takvi da je

$$J'(u_*) + \sum_{i \in I} \lambda_i a_i + A^* y^* = 0.$$

Stavljajući $\lambda_i = 0$, $i \in \{1,2,\dots,s\} \setminus I$ dobijamo $L'(u_*) = 0$. Primenjujući lemu 1.1.1 dobijamo $L(u_*) \leq L(u)$ za svako $u \in X$. Primetimo da je $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1,s}$. Teorema je u slučaju $AX = Y$ dokazana.

Razmotrimo opšti slučaj. Skup $Y_1 = AX$ je zatvoreni linearni podprostor Banahovog prostora Y, odnosno Banahov prostor. Kako je $b \in Y_1$, jer je u protivnom $U = U_* = \emptyset$, to su na osnovu dokazanog sva tvrđenja teoreme tačna ako u formulaciji teoreme umesto $y^* \in Y^*$ stoji $y_1^* \in Y_1^*$. Na osnovu Han - Banahove teoreme y_1^* se može produžiti do $y^* \in Y^*$ tako da je $\langle y^*, y\rangle = \langle y_1^*, y\rangle$ za sve $y \in Y_1$, pa se u sva tvrđenja teoreme umesto $y_1^* \in Y_1^*$ može vratiti $y^* \in Y^*$. Teorema je dokazana.

T e o r e m a 1.1.3. Neka su ispunjeni sledeći uslovi: X i Y su Banahovi prostori, $U_0 \subset X$, $J(u)$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,s}$ su funkcije definisane na U_0, A je operator koji preslikava X u Y, $b \in Y$, $U = \{u \in U_0 :\ g_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,s},\ Au = b\}$. Pored toga, neka su $u_* \in U$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,s}$ i $y^* \in Y^*$, takvi da je $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1,s}$ i $L(u_*) \leq L(u)$ za svako $u \in U_0$, gde je $L(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \dots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*, Au - b\rangle$. Tada je $J(u_*) \leq J(u)$ za sve $u \in U$.

D o k a z. Kako je $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1,s}$, $Au_* = b$, $\lambda_i \geq 0$, $g_i(u) \leq 0$, $i = \overline{1,s}$, $Au = b$ za sve $u \in U$, to je $J(u_*) = L(u_*) \leq L(u) \leq J(u)$ za sve $u \in U$. Teorema je dokazana.

Pretpostavimo da su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.1.2

i da je $u_* \in U_*$. Označimo

$$U_0 = \left\{u \in X:\ g_i(u) \leqslant 0,\ i = \overline{2,s},\ Au = \bar{b}\right\},\ L(u) = J(u) + \lambda g_1(u), \tag{5}$$

$$\begin{gathered} U_0^+ = \left\{u \in U_0:\ g_1(u) \geqslant 0\right\}, \\ M(V) = \left\{\lambda \geqslant 0:\ \lambda g_1(u_*) = 0,\ L(u_*) \leqslant L(u) \text{ za sve } u \in V \subset X\right\}. \end{gathered} \tag{6}$$

T e o r e m a 1.1.4. Neka su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.1.2 i neka je $u_* \in U_*$. Tada je $M(U_0) \neq \emptyset$. Ako je $g_1(u_*) < 0$, onda je $M(U_0^+) = M(U_0) = \{0\}$. Ako je $g_1(u_*) = 0$, onda je $M(U_0^+) = [\underline{\lambda}, +\infty)$ i $M(U_0) = M(U_0^+)$ kada je $g_1(u) \geqslant 0$ za sve $u \in U_0$, a $M(U_0) = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ kada je $g_1(\bar{u}) < 0$ za neko $\bar{u} \in U_0$.

D o k a z. Neka je $u_* \in U_*$. Na osnovu teoreme 1.1.2 postoje $\lambda_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,s}$, $y^* \in Y^*$, takvi da je $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1,s}$ i $L_1(u_*) \leqslant L_1(u)$ za sve $u \in X$, pri čemu je $L_1(u) = L(u) + \lambda_2 g_2(u) + \ldots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*, Au - \bar{b}\rangle$, $L(u)$ iz (5), a $\lambda = \lambda_1$. Primenom teoreme 1.1.3 na problem $L(u) \to \inf$, $u \in U_0$, dobijamo prvo tvrđenje teoreme.

Neka je $g_1(u_*) < 0$. Iz $\lambda g_1(u_*) = 0$ sledi $\lambda = 0$ pa je $M(U_0^+) = M(U_0) = \{0\}$. Neka je $g_1(u_*) = 0$. Kako je $g_1(u) \geqslant 0$ za sve $u \in U_0^+$ to iz $\lambda \in M(U_0^+)$ i $\lambda' > \lambda$ sledi $\lambda' \in M(U_0^+)$. Neka je $\lambda_k \in M(U_0^+)$, $k \in N$ i neka $\lambda_k \to \lambda'$ kada $k \to \infty$. Stavimo $\lambda = \lambda_k$ u izraze koji određuju $M(U_0^+)$ i pustimo da $k \to \infty$. Dobijamo $\lambda' \in M(U_0^+)$. Time smo dokazali da je $M(U_0^+) = [\underline{\lambda}, +\infty)$. Ako je $g_1(u) \geqslant 0$ za sve $u \in U_0$, onda je $U_0 = U_0^+$, pa je $M(U_0) = M(U_0^+)$. Neka je $\bar{u} \in U_0$, $g_1(\bar{u}) < 0$. Kako je $U = \{u \in U_0:\ g_1(u) \leqslant 0\}$ to iz $\lambda \in M(U)$ i $\lambda' \in [0, \lambda]$ sledi $\lambda' \in M(U)$. Skup $M(U)$ je ograničen, jer je u protivnom $L(\bar{u}) = J(\bar{u}) + \lambda g_1(\bar{u}) < L(u_*)$ za dovoljno veliko λ. Zatvorenost skupa $M(U)$ dokazuje se na isti način kao i zatvorenost skupa $M(U_0^+)$. Prema tome, $M(U) = [0, \overline{\lambda}]$, pa je $M(U_0) = M(U) \cap M(U_0^+) = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$. Teorema je dokazana.

Posmatrajmo ograničene linearne operatore A i C koji preslikavaju Banahov prostor X u Banahove prostore Y i Z. Ako u Dekartov proizvod skupova Y i Z uvedemo operacije sabiranja: $(y_1,z_1)+(y_2,z_2)=(y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ i množenja brojem: $t(y,z)=(ty,tz)$ i normu: $\|(y,z)\|=\max\{\|y\|,\|z\|\}$, onda on postaje Banahov prostor. Jednakost

$$Ex=(Ax,\ Cx) \tag{7}$$

definiše ograničeni linearni operator E koji preslikava X u YxZ.

T e o r e m a 1.1.5. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:
1^o X i Z su Banahovi prostori, $f_i(u)$, $i=\overline{1,m_1}$ su konveksne neprekidno - diferencijabilne funkcije na X, $f_i(u)=\langle c_i,\ u\rangle-d_i$, $c_i\in X^*$, $d_i\in R$, $i=\overline{m_1+1,s_1}$, C je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Z, $d\in Z$,

$$U_o=\{u\in X:\ f_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s_1},\ Cu=d\};$$

2^o Y je Banahov prostor, J(u) i $g_i(u)$, $i=\overline{1,m}$ su konveksne neprekidno - diferencijabilne funkcije na U_o, $g_i(u)=\langle a_i,\ u\rangle-b_i$, $a_i\in X^*$, $b_i\in R$, $i=\overline{m+1,s}$, A je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Y, $\bar{b}\in Y$,

$$U=\{u\in U_o:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s},\ Au=\bar{b}\}; \tag{8}$$

3^o $g_i(\bar{u})<0$, $i=\overline{1,m}$ i $f_i(\bar{u})<0$, $i=\overline{1,m_1}$ za neko $\bar{u}\in U$, skup EX je zatvoren u YxZ, gde je E operator definisan jednakošću (7);
4^o za problem (1), (8) ispunjeni su uslovi (2).
Tada za svaku tačku $u_*\in U_*$ postoje Lagranževi množitelji $\lambda_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,s}$ i $y^*\in Y^*$ takvi da je $\lambda_i g_i(u_*)=0$, $i=\overline{1,s}$ i $L(u_*)\leqslant L(u)$ za sve $u\in U_o$, gde je

$$L(u)=J(u)+\lambda_1 g_1(u)+\ldots+\lambda_s g_s(u)+\langle y^*,\ Au-\bar{b}\rangle.$$

D o k a z. Jednakost $Eu=(\bar{b},\ d)$ ekvivalentna je sa $Au=\bar{b}$, $Cu=d$. Posmatrajmo sledeće skupove

$$J_1=\{u\in X:\ g_i(u)\leqslant 0, i=\overline{m+1,s},\ f_i(u)\leqslant 0, i=\overline{m_1+1,s_1},\ Eu=(\bar{b},d)\},$$

$$U_2=\left\{u\in U_1:\ f_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,m_1}\right\}.$$

Tada je

$$U=\left\{u\in U_2:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,m}\right\}.$$

Neka je $u_*\in U_*$. Na problem $J(u)\to\inf,\ u\in U$, primenimo teoremu 1.1.1, na osnovu koje postoje Lagranževi množitelji $\lambda_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,m}$, takvi da je $\lambda_i g_i(u_*)=0$, $i=\overline{1,m}$ i $L_1(u_*)\leqslant L_1(u)$ za sve $u\in U_2$, gde je $L_1(u)=J(u)+\lambda_1 g_1(u)+\ldots+\lambda_m g_m(u)$. Funkcija $L_1(u)$ je konveksna neprekidno - diferencijabilna funkcija na konveksnom skupu U_2, pa je na osnovu leme 1.1.1 u_* rešenje problema $\bar{L}_1(u)\to\inf,\ u\in U_2$, gde je $\bar{L}_1(u)=\left\langle L_1'(u_*),\ u-u_*\right\rangle$ konveksna funkcija definisana na X. Primenom teoreme 1.1.1 na problem $\bar{L}_1(u)\to\inf,\ u\in U_2$ dobijamo da postoje Lagranževi množitelji $\mu_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,m_1}$, takvi da je $\mu_i f_i(u_*)=0$, $i=\overline{1,m_1}$ i $\bar{L}_2(u_*)\leqslant$ $\leqslant\bar{L}_2(u)$ za sve $u\in U_1$, gde je $\bar{L}_2(u)=\bar{L}_1(u)+\mu_1 f_1(u)+\ldots+$ $+\mu_{m_1}f_{m_1}(u)$. Kako je $(Y\times Z)^*=Y^*\times Z^*$ i $\left\langle (y^*,z^*),\ (y,z)\right\rangle=\left\langle y^*,y\right\rangle+$ $+\left\langle z^*,\ z\right\rangle$ ([1]), a problem $\bar{L}_2(u)\to\inf,\ u\in U_1$ zadovoljava sve uslove teoreme 1.1.2, to postoje Lagranževi množitelji $\lambda_i\geqslant 0$, $i=\overline{m+1,s}$, $\mu_i\geqslant 0$, $i=\overline{m_1+1,s_1}$, $y^*\in Y^*$ i $z^*\in Z^*$, takvi da je $\lambda_i g_i(u_*)=0$, $i=\overline{m+1,s}$, $\mu_i f_i(u_*)=0$, $i=\overline{m_1+1,s_1}$ i $\bar{L}_3(u_*)\leqslant$ $\leqslant\bar{L}_3(u)$ za sve $u\in X$, gde je

$$\bar{L}_3(u)=\bar{L}_2(u)+\lambda_{m+1}g_{m+1}(u)+\ldots+\lambda_s g_s(u)+$$
$$+\mu_{m_1+1}f_{m_1+1}(u)+\ldots+\mu_{s_1}f_{s_1}(u)+\left\langle y^*,\ Au-b\right\rangle+\left\langle z^*,\ Cu-d\right\rangle=$$
$$=\bar{L}(u)+\mu_1 f_1(u)+\ldots+\mu_{s_1}f_{s_1}(u)+\left\langle z^*,\ Cu-d\right\rangle,\ \text{a}$$
$$\bar{L}(u)=\bar{L}_1(u)+\lambda_{m+1}g_{m+1}(u)+\ldots+\lambda_s g_s(u)+\left\langle y^*,\ Au-b\right\rangle.$$

Na problem $\bar{L}(u)\to\inf,\ u\in U_0$ primenimo teoremu 1.1.3. Dobijamo $\bar{L}(u_*)\leqslant\bar{L}(u)$ za sve $u\in U_0$. Iz leme 1.1.1 sledi da je $\left\langle\bar{L}'(u_*),\ u-u_*\right\rangle\geqslant 0$ za sve $u\in U_0$, a kako je $\bar{L}'(u_*)=L'(u_*)$, to ponovo primenjujići lemu 1.1.1 dobijamo da je $L(u_*)\leqslant L(u)$ za sve $u\in U_0$. Primetimo da je $\lambda_i\geqslant 0$, $\lambda_i g_i(u_*)=0$, $i=\overline{1,s}$. Teorema je dokazana.

Dovoljan uslov za zatvorenost skupa EX u Banahovom prostoru YxZ daje sledeća lema.

L e m a 1.1.3 ([1]). Ako je podprostor AX zatvoren u Y, a podprostor CKerA zatvoren u Z, gde je $\mathrm{Ker}A = \{u \in X:\ Au = 0\}$, onda je i podprostor EX zatvoren u YxZ.

Jasno je da tvrđenje leme 1.1.3 ostaje na snazi ako pretpostavimo da su skupovi CX i A Ker C zatvoreni.

P r i m e r. Minimizirati funkciju

$$|x(T) - z|^2_{R^n} , \tag{9}$$

ako je

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)v(t) + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

$$x(0) = x_0 , \tag{11}$$

$$v = v(t) \in V \subset L_2^r , \tag{12}$$

gde je B(t) matrica reda $n \times n$, D(t) reda $n \times r$, f(t) reda $n \times 1$, a trenutak T i tačke x_0 i z iz R^n su fiksirani. U ovom primeru svi funkcionalni prostori biće prostori funkcija definisanih na intervalu $[0,\ T]$, pa se ta činjenica neće posebno naglašavati. Elementi matrica B(t), D(t) i f(t) su deo po deo neprekidne funkcije na $[0,\ T]$. Pod datim uslovima rešenje diferencijalne jednačine (10), (11) koje odgovara upravljanju v(t) je funkcija $x(t) \in H_n^1$ koja zadovoljava integralnu jednačinu

$$x(t) = \int_0^t (B(\tau)x(\tau) + D(\tau)v(\tau) + f(\tau))d\tau + x_0 .$$

Neka je $X = H_n^1 x L_2^r$, $u = (x,\ v) \in X$, $x \in H_n^1$, $v \in L_2^r$, $u_1 = (x_1,\ v_1)$. Ako u X uvedemo skalarni proizvod na sledeći način

$$\langle u,\ u_1 \rangle_X = \langle x,\ x_1 \rangle_{H_n^1} + \langle v,\ v_1 \rangle_{L_2^r} ,$$

onda on postaje Hilbertov prostor sa kvadratom norme

$$\|u\|_X^2 = \|x\|_{H_n^1}^2 + \|v\|_{L_2^r}^2 = \|x\|_{L_2^n}^2 + \|\dot{x}\|_{L_2^n}^2 + \|v\|_{L_2^r}^2 .$$

Označimo sa

$$Au(t) = x(t) - \int_0^t (B(\tau)x(\tau) + D(\tau)v(\tau))d\tau, \quad \bar{b}(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

$$U_0 = H_n^1 \times V \subset X.$$

Tada problem (9) - (12) prelazi u problem

$$J(u) = |x(T) - z|_{R^n}^2 \to \inf, \quad u \in U = \{u \in U_0 : Au = \bar{b}\}. \tag{13}$$

Pokazaćemo da problem (13) zadovoljava drugi uslov teoreme 1.1.5. Pokažimo prvo da funkcija $J(u)$ ima izvod u Frešeovom smislu $J'(u)$, takav da je za sve $u_1, u_2 \in X$

$$\|J'(u_1) - J'(u_2)\|_X^2 \leq L \langle J'(u_1) - J'(u_2), u_1 - u_2 \rangle_X , \tag{14}$$

odakle sledi da je $J(u)$ konveksna neprekidno - diferencijabilna funkcija na X. Neka su $u, h \in X$, $u = (x, v)$, $h = (h_x, h_v)$. Kako je x iz H_n^1 to je x_i, i - ta komponenta vektora x, iz H^1. Na osnovu teoreme o potapanju prostora H^1 u prostor C ([38] str.103) važi

$$\|x_i\|_C \leq M \|x_i\|_{H^1} , \quad M = \max\{T^{1/2}, T^{-1/2}\}. \tag{15}$$

Iz (15) sledi

$$|x(T)|_{R^n}^2 = \sum_{i=1}^n |x_i(T)|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|_C^2 \leq \sum_{i=1}^n M^2 \|x_i\|_{H^1}^2 = M^2 \|x\|_{H_n^1}^2 ,$$

odnosno,

$$|x(T)|_{R^n} \leq M \|x\|_{H_n^1} \leq M \|u\|_X . \tag{16}$$

Funkcija $J(u)$ zadovoljava jednakost

$$J(u+h) - J(u) = 2 \langle x(T) - z, h_x(T) \rangle_{R^n} + |h_x(T)|_{R^n}^2 .$$

Pokažimo da postoji $u^* \in X$ takvo da je za sve $h \in X$

$$\langle u^*, h \rangle_X = 2 \langle x(T) - z, h_x(T) \rangle_{R^n} .$$

Linearnost funkcionala u^* je očigledna. Dokažimo ograničenost.

Iz (16) sledi da je

$$\left\langle u^*, h\right\rangle_X \leqslant 2|x(T)-z|_{R^n}|h_x(T)|_{R^n} \leqslant 2M|x(T)-z|_{R^n}\|h\|_X .$$

Koristeći (16) takođe dobijamo da je

$$|h_x(T)|^2_{R^n} \leqslant M^2\|h\|^2_X = o(\|h\|_X).$$

Time smo pokazali da je funkcija J(u) diferencijabilna u Frešeovom smislu pri čemu je

$$\left\langle J'(u), h\right\rangle_X = 2\left\langle x(T)-z, h_x(T)\right\rangle_{R^n} . \tag{17}$$

Dokažimo (14). Zamenimo u (17) prvo $u=u_1$, $h=u_1-u_2$, a zatim $u=u_2$, $h=u_2-u_1$ pa saberimo dobijene jednakosti. Dobijamo da je

$$\left\langle J'(u_1)-J'(u_2), u_1-u_2\right\rangle_X = 2|x_1(T)-x_2(T)|^2_{R^n}. \tag{18}$$

Zamenimo u (17) prvo $u=u_1$ a zatim $u=u_2$ pa oduzmimo dobijene jednakosti. S obzirom na (16) sledi da je za svako $h\in X$

$$\left|\left\langle J'(u_1)-J'(u_2), h\right\rangle_X\right| = \left|2\left\langle x_1(T)-x_2(T), h_x(T)\right\rangle_{R^n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2|x_1(T)-x_2(T)|\,|h_x(T)| \leqslant 2M|x_1(T)-x_2(T)|_{R^n}\|h\|_X ,$$

odakle sledi da je

$$\|J'(u_1)-J'(u_2)\|_X \leqslant 2M|x_1(T)-x_2(T)|_{R^n} . \tag{19}$$

Iz (18) i (19) sledi da je (14) tačno ako je $L=2M^2$.

Pokažimo da je A ograničeni linearni operator koji preslikava X u H^1_n . Linearnost je očigledna. Dokažimo ograničenost. Neka je $Au=y\in H^1_n$. Tada je

$$\|Au\|^2 = \|y\|^2 = \int_0^T(|y(t)|^2_{R^n} + |\dot y(t)|^2_{R^n})\,dt . \tag{20}$$

Koristeći Helderovu nejednakost dobijamo

$$|y(t)|_{R^n} = |x(t) - \int_0^t(B(\tau)x(\tau)+D(\tau)v(\tau))\,d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant |x(t)| + B_m \int_0^t |\dot{x}(t)|\,dt + D_m \int_0^t |v(t)|\,dt \leqslant |x(t)| +$$

$$+ B_m \left[\int_0^T dt \int_0^T |\dot{x}(t)|^2 dt\right]^{1/2} + D_m\left[T\int_0^T |v(t)|^2 dt\right]^{1/2} =$$

$$= |x(t)| + C_1(\|x\|_{L_2^n} + \|v\|_{L_2^r}),$$

odakle je

$$|y(t)|^2 \leqslant 3|x(t)|^2 + 3C_1^2\|x\|^2_{L_2^n} + 3C_1^2\|v\|^2_{L_2^r}, \tag{21}$$

a kako je

$$|\dot{y}(t)| \leqslant |\dot{x}(t)| + B_m|x(t)| + D_m|v(t)|,$$

to je

$$|\dot{y}(t)|^2 \leqslant 3|\dot{x}(t)|^2 + 3B_m^2|x(t)|^2 + 3D_m^2|v(t)|^2, \tag{22}$$

gde je $B_m = \sup\left\{\|B(t)\|,\ t\in[0,\ T]\right\}$, $D_m = \sup\left\{\|D(t)\|,\ t\in[0,\ T]\right\}$, a $C_1 = T^{1/2}\max\left\{B_m,\ D_m\right\}$. Zamenjujući (21) i (22) u (20) dobijamo

$$\|Au\|^2 \leqslant 3\|\dot{x}\|^2_{L_2^n} + 3(1 + B_m^2 + C_1^2T)\|x\|^2_{L_2^n} +$$

$$+ 3(D_m^2 + C_1^2T)\|v\|^2_{L_2^r} \leqslant C_2^2\|u\|^2_X,$$

za neko $C_2 \in R$, odakle sledi ograničenost operatora A .

Pretpostavimo da problem (13) zadovoljava prvi i treći uslov teoreme 1.1.5 i da je V ograničen skup iz L_2^r. U [9] je dokazano da je pod ovim pretpostavkama ispunjeno (2), pa problem (13) zadovoljava sve uslove teoreme 1.1.5 na osnovu koje postoji $y^* \in H_n^1$ takvo da je $L(u_*) \leqslant L(u)$ za sve $u \in U_0$, gde je $L(u) = J(u) + \langle y^*,\ Au - \bar{b}\rangle$.

2. Konvergencija nizova Lagranževih množitelja iz Kun – Takerove teoreme primenjene na problem minimizacije funkcije Tihonova.

Pored problema (1,1) posmatrajmo za svako $k \in N$ sledeći problem

$$J_k(u) \to \inf,\ u \in U. \tag{1}$$

T e o r e m a 1.2.1. Neka su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.1.2 i neka su $J_k(u)$, $k \in N$ konveksne neprekidno-diferencijabilne funkcije na X, a v_k i u_* rešenja problema (1) i (1,1) takva da

$$\|v_k - u_*\| \to 0,\ J_k(u) \to J(u) \text{ za sve } u \in X,$$
$$J_k(v_k) \to J(u_*),\ \|J_k'(v_k) - J'(u_*)\| \to 0 \text{ kada } k \to \infty. \qquad (2)$$

Tada postoje Lagranževi množitelji $\lambda \geqslant 0$, $\mu_k \geqslant 0$, $k \in N$, takvi da je $\lambda g_1(u_*) = \mu_k g_1(v_k) = 0$, $k \in N$, $L(u_*) \leqslant L(u)$ i $L_k(v_k) \leqslant$ $\leqslant L_k(u)$, $k \in N$ za sve $u \in U_0$, i da

$$\mu_k \to \lambda,\ L_k(u) \to L(u) \text{ za sve } u \in X,$$
$$L_k(v_k) \to L(u_*),\ \|L'(v_k) - L'(u_*)\| \to 0 \text{ kada } k \to \infty,$$

pri čemu su U_0 i $L(u)$ iz (1,5) a $L_k(u) = J_k(u) + \mu_k g_1(u)$.

D o k a z. Možemo pretpostaviti da je $U \neq U_0$ jer je u protivnom dovoljno staviti $\lambda = \mu_k = 0$. Postoje dve mogućnosti: ili je $g_1(u) \geqslant 0$ za sve $u \in U_0$, ili je $g_1(u) < 0$ za neko $u \in U_0$. Razmotrimo prvi slučaj. Tada je

$$U = U_0 \cap \Gamma,\ \Gamma = \{u \in X:\ g_1(u) = 0\}.$$

Kao i u dokazu teoreme 1.1.2 može se pokazati da skup $\{e \in X: \langle a_i, e \rangle \leqslant 0,\ i \in I,\ Ae = 0\}$, gde je $I = \{i:\ 2 \leqslant i \leqslant s,\ g_i(u_*) = 0\}$, predstavlja konus mogućih pravaca skupa U_0 u tački u_*. Odavde sledi da je

$$K_0 = \{u \in X:\ g_i(u) \leqslant 0,\ i \in I,\ Au = \bar{b}\}$$

skup svih tačaka $u \in X$ takvih da je $e = u - u_*$ moguć pravac skupa U_0 u tački u_*. Neka je K skup svih tačaka $u \in X$ takvih da je $e = u - u_*$ moguć pravac skupa U u tački u_*. Kao i u predhodnom slučaju može se pokazati da je

$$K = K_0 \cap \Gamma.$$

Jasno je da su skupovi K_0 i K konusi sa vrhom u tački u_*. Kako je $U_0 \neq U$ i $U_0 \subset K_0$, to postoji tačka $\bar{u} \in K_0$ takva da je $g_1(\bar{u}) > 0$.

Neka je $u = u_* + (\bar{u} - u_*)/g_1(\bar{u})$. Tada je $u \in K_0$ i $g_1(u) = 1$, tako da je $\Gamma_1 = \{u \in K_0 : g_1(u) = 1\} \neq \emptyset$. Neprazne preseke skupa Γ_1 sa stranama poliedarnog konusa K_0 numerišimo sa $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$, i u svakom od skupova Γ_i, $i = \overline{1,n}$ fiksirajmo po jednu tačku $u_i \in \Gamma_i$. Neka su $u, v \in X$. Uvedimo oznake: $l(u,v) = \{w \in X : w = u + tv,\ t \geq 0\}$, $[u, v] = \{w \in X : w = \alpha u + (1 - \alpha)v,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$. U daljem izlaganju potrebne su nam sledeće dve leme.

L e m a 1.2.1. Ako je $v \in K_0$ i $l(\bar{u}, w) \subset K_0$, onda je $l(v,w) \subset K_0$.

D o k a z. Neka je $l(\bar{u}, w) \subset K_0$, $i \in I$. Tada je $g_i(\bar{u} + tw) = \langle a_i, \bar{u} \rangle + t \langle a_i, w \rangle - b_i \leq 0$ i $A(\bar{u} + tw) - \bar{b} = A\bar{u} + tAw - \bar{b} = 0$ za sve $t > 0$. Deleći ove izraze sa t i puštajući da $t \to +\infty$ dobijamo $\langle a_i, w \rangle \leq 0$, $Aw = 0$. Tada je $g_i(v + tw) = \langle a_i, v \rangle + t \langle a_i, w \rangle - b_i \leq 0$ i $A(v + tw) = Av + tAw = \bar{b}$ za sve $t \geq 0$. Lema je dokazana.

L e m a 1.2.2. Ako je $\bar{u} \in \Gamma_1$, a $v \in K$, onda postoje $u' \in \Gamma_1$, $v' \in K$ i $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ takvi da je $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, $u' = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ i $v' - v = \bar{u} - u'$.

D o k a z. Neka je $w_1 = \bar{u} \in \Gamma_1$, $w_1 \neq u_1$, $l(u_1, w_1 - u_1) \not\subset \Gamma_1$. Tada postoji $w_2 \in l(u_1, w_1 - u_1)$ koja pripada nekom od skupova Γ_i, $i = \overline{2,n}$, $\Gamma_i \subset \Gamma_1$, $\Gamma_i \neq \Gamma_1$. Prenumerišimo skupove Γ_i i tačke u_i, $i = \overline{2,n}$ tako da bude $w_2 \in \Gamma_2$. Neka je $w_2 \neq u_2$ i $l(u_2, w_2 - u_2) \not\subset \Gamma_2$. Tada postoji tačka $w_3 \in l(u_2, w_2 - u_2)$ koja pripada nekom od skupova Γ_i, $i = \overline{3,n}$, $\Gamma_i \subset \Gamma_2$, $\Gamma_i \neq \Gamma_2$. Prenumerišimo ponovo skupove Γ_i i tačke $u_i \in \Gamma_i$, $i = \overline{3,n}$ tako da bude $w_3 \in \Gamma_3$, itd. Kako skupova Γ_i ima konačno mnogo, to se opisani proces mora završiti tako što će za neko $p \in \{1, \ldots, n\}$ biti ili $w_p = u_p$, ili $l(u_p, w_p - u_p) \subset \Gamma_p$. Neka je $w_p = u_p$. Tada je $w_{p-1} \in [u_{p-1}, u_p]$, $w_{p-2} \in [u_{p-2}, w_{p-1}], \ldots, \bar{u} = w_1 \in [u_1, w_2]$. Lako je pokazati da je

$\bar{u} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,p}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 1$. Za završetak dokaza leme u ovom slučaju dovoljno je staviti $u' = \bar{u}$, $v' = v$, $\alpha_i = 0$, $i = \overline{p+1,n}$. Neka je $l(u_p, w_p - u_p) \subset \Gamma_p$. Tada postoje $w_p' = u_p$, $w_{p-1}' \in [u_{p-1}, w_p'], \ldots, u' = w_1' \in [u_1, w_2']$, takvi da je $[w_p, w_p'] /\!/ [w_{p-1}, w_{p-1}'] /\!/ \ldots /\!/ [w_1, w_1'] = [\bar{u}, u']$, gde simbol $[u, v] /\!/ [u', v']$ označava $u - v = t(u' - v')$ za neko $t > 0$. Kao i u prvom slučaju i ovde se pokazati da je $u' = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Kako je $l(w_p', w_p - w_p') \subset \Gamma_1 \subseteq K_0$, to iz leme 1.2.1 sledi da je $l(v, w_p - w_p') \subset K_0$ i $\bar{u} \in l(u', w_p - w_p') \subset K_0$, tako da postoji tačka $v' \in l(v, w_p - w_p')$, takva da je $v' - v = \bar{u} - u'$. Tada je $g_1(v') = \langle a_1, \bar{u} + v - u' \rangle - b_1 = g_1(v) = 0$, pa je $v' \in K_0 \cap \Gamma = K$. Lema je dokazana.

Produžimo dokaz teoreme 1.2.1. Iz teoreme 1.1.4 i leme 1.1.1 sledi da postoji $\lambda \geq 0$, takvo da je

$$\langle L'(u_*), u_i - u_* \rangle = \langle J'(u_*) + \lambda a_1, u_i - u_* \rangle \geq 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Uvedimo oznake

$$\beta_k = J_k'(v_k) - J'(u_*), \quad d = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i - u_*\|, \quad \mu_k = \lambda + d\|\beta_k\|. \tag{4}$$

Tada $\|\beta_k\| \to 0$, $\mu_k \to \lambda$ kada $k \to \infty$. Rešimo (4) po λ i $J'(u_*)$ pa zamenimo u (3). Dobijamo da je za sve $i = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle J_k'(v_k) - \beta_k + (\mu_k - d\|\beta_k\|)a_1, u_i - u_* \rangle \leq \\ &\leq \langle L_k'(v_k), u_i - u_* \rangle + \|\beta_k\| \cdot \|u_i - u_*\| - \\ &- d\|\beta_k\| \langle a_1, u_i - u_* \rangle \leq \langle L_k'(v_k), u_i - u_* \rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

Iz neprekidnosti funkcija $g_i(u)$, $g_i(u_*) < 0$ i činjenice da $\|v_k - u_*\| \to 0$ kada $k \to \infty$ sledi da je $g_i(v_k) < 0$ za sve $i = \overline{1,s}$, $i \notin I$ i dovoljno veliko k, tako da skup tačaka $u \in X$ takvih da je $e = u - v_k$ moguć pravac skupa U u tački v_k predstavlja poliedarni konus kome pripadaju sve tačke konusa K, pa je za dov. vel. k

$$\langle J_k'(v_k), u - v_k \rangle \geq 0 \text{ za sve } u \in K. \tag{6}$$

Neka je $\bar{u} \in \Gamma_1$, $v = v_k$. Tada iz leme 1.2.2, (5) i (6), vodeći računa o tome da je $\langle a_1, u - v_k \rangle = 0$ za sve $u \in K$ i $\bar{u} - v = v' - v + u' - u_* + u_* - v$, dobijamo

$$\langle L_k'(v_k), \bar{u} - v_k \rangle = \langle J_k'(v_k) + \mu_k a_1, v' - v_k \rangle + + \langle L_k'(v_k), u' - u_* \rangle + \langle J_k'(v_k) + \mu_k a_1, u_* - v_k \rangle \geqslant$$

$$\geqslant 0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle L_k'(v_k), u_i - u_* \rangle + 0 \geqslant 0 . \tag{7}$$

Neka je $u \in U_o$. Ako je $u \in U \subset K$, onda iz (6) sledi da je $\langle L_k'(v_k), u - v_k \rangle \geqslant 0$. Ako je $0 < g_1(u) = \alpha \leqslant 1$, onda $\bar{u} = u_* + (u - u_*)/\alpha \in \Gamma_1$ pa iz (6) i (7) sledi da je $\langle L_k'(v_k), u - v_k \rangle = \alpha \langle L_k'(v_k), \bar{u} - v_k \rangle + (1 - \alpha) \langle J_k'(v_k) + \mu_k a_1, u_* - v_k \rangle \geqslant 0$. Ako je $g_1(u) = \alpha > 1$, onda je $\bar{u} = v_k + (u - v_k)/\alpha \in \Gamma_1$, pa je $\langle L_k'(v_k), u - v_k \rangle = \alpha \langle L_k'(v_k), \bar{u} - v_k \rangle \geqslant 0$. Dakle, $\langle L_k'(v_k), u - v_k \rangle \geqslant 0$ za sve $u \in U_o$, pa iz leme 1.1.1 sledi da je $L_k(v_k) \leqslant L_k(u)$ za sve $u \in U_o$ i dovoljno veliko k. Za preostale $k \in N$ postojanje Lagranževih množitelja $\mu_k \geqslant 0$, takvih da je $L_k(v_k) \leqslant L_k(u)$ za sve $u \in U_o$ sledi iz teoreme 1.1.4.

Razmotrimo drugi slučaj. Neka je $g_1(\bar{u}) < 0$, $\bar{u} \in U_o$. Uvedimo oznaku

$$M_k(V) = \{\mu_k \geqslant 0 : \mu_k g_1(v_k) = 0, \ L_k(v_k) \leqslant L_k(u), \text{ za sve } u \in V \subset U_o\}.$$

Neka je $\mu_k \in M_k(U_o)$, $k \in N$. Dokažimo da svaka tačka nagomilavanja niza μ_k, $k \in N$ pripada skupu $M(U_o)$ iz (1,6). Neka je λ tačka nagomilavanja niza μ_k. Tada postoji podniz toga niza koji konvergira ka λ. Odbacujući preostale članove niza μ_k možemo smatrati da $\mu_k \to \lambda$ kada $k \to \infty$. Ako u izrazima koji određuju skup $M_k(U_o)$ pređemo na graničnu vrednost, dobijamo izraze koji znače da $\lambda \in M(U_o)$. Razmotrimo tri mogućnosti:

1) Neka je $g_1(v_k) < 0$ za sve $k \in N$ osim konačno mnogo. Iz teoreme

1.1.4 sledi da je $M_k(U_o) = \{0\}$ za sve $k \in N$ za koje je $g_1(v_k) < 0$, pa $\mu_k \to \lambda = 0$ kada $k \to \infty$, i $\lambda = 0 \in M(U_o)$.

2) Neka je $g_1(v_k) = 0$ za sve $k \in N$ osim konačno mnogo. Iz neprekidnosti funkcije $g_1(u)$ sledi da je $g_1(u_*) = 0$. Odbacimo one $k \in N$ za koje je $g_1(v_k) < 0$ i stavimo $\lambda = \underline{\lambda} = \inf M(U_o)$. Tada iz prvog slučaja sledi da postoje $\mu_k' \in [\underline{\mu}_k, +\infty) = M_k(U_o^+)$, takvi da $\mu_k' \to \lambda$ kada $k \to \infty$. Stavimo $\mu_k = \underline{\mu}_k$, a za one $k \in N$ za koje je $g_1(v_k) < 0$ stavimo $\mu_k = 0$. Iz činjenice da $\mu_k \in M_k(U_o)$, da svaka tačka nagomilavanja niza $\mu_k, k \in N$ pripada skupu $M(U_o)$, da je za sve $k \in N$ $\mu_k \leq \mu_k'$ i da $\mu_k' \to \lambda$ kada $k \to \infty$ sledi da $\mu_k \to \lambda$ kada $k \to \infty$.

3) Neka je za beskonačno mnogo $k \in N$ $g_1(v_k) < 0$, a takođe za beskonačno mnogo $k \in N$ $g_1(v_k) = 0$. Tada je, kao i u 1), $\mu_k = 0$ za sve $k \in N$ za koje je $g_1(v_k) < 0$ i $\underline{\lambda} = \inf M(U_o) = 0$, a za one $k \in N$, za koje je $g_1(v_k) = 0$, kao i u 2), postoje $\mu_k \in M_k(U_o)$, takvi da $\mu_k \to \underline{\lambda}$ kada $k \to \infty$. Stavljajući $\lambda = 0 \in M(U_o)$ dobijamo da $\mu_k \to \lambda$ kada $k \to \infty$. Time je dokazan deo tvrđenja teoreme. Ostala neposredno slede iz dokazanih tvrđenja i uslova teoreme. Teorema je dokazana.

L e m a 1.2.3 ([1]). Neka su X i Y Banahovi prostori i neka je A ograničeni linearni operator koji preslikava X na Y. Tada postoji operator M koji preslikava Y u X, takav da je $AM(y) = y$ i $\|M(y)\| \leq c\|y\|$ za sve $y \in Y$.

L e m a 1.2.4 ([1]). Neka su ispunjeni svi uslovi leme 1.2.3. Tada je $(\mathrm{Ker}A)^{\perp} = A^*Y^*$, gde je $(\mathrm{Ker}A)^{\perp} = \{x^* \in X^* : Ax = 0 \Rightarrow \langle x^*, x\rangle = 0\}$.

T e o r e m a 1.2.2. Neka su ispunjeni sledeći uslovi: X i Y su Banahovi prostori, A je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Y takav da je skup AX zatvoren u Y,

$\bar{b}\in Y$, $U=\{u\in X:\ Au=\bar{b}\}$, $J(u)$ i $J_k(u)$, $k\in N$ su konveksne neprekidno-diferencijebilne funkcije na X. Pored toga neka je u_* rešenje problema (1,1) a v_k problema (1), pri čemu su ispunjeni uslovi (2). Tada postoje Lagranževi množitelji y^*, $y_k^*\in Y^*$, $k\in N$ takvi da $\|y_k^*-y^*\|\to 0$ kada $k\to\infty$, da je $L(u_*)\leq L(u)$ i da je $L_k(v_k)\leq L_k(u)$, $k\in N$, za sve $u\in X$, pri čemu je

$$L(u)=J(u)+\langle y^*,\ Au-\bar{b}\rangle\ ,\ L_k(u)=J_k(u)+\langle y_k^*,\ Au-\bar{b}\rangle.$$

D o k a z. Razmotrimo prvo slučaj kada je $AX=Y$. Neka je $Av=0$. Tada je $u=u_*+v\in U$ i $u_1=2u_*-u\in U$, pa iz leme 1.1.1 sledi da je $\langle J'(u_*),\ u-u_*\rangle\geq 0$ i $\langle J'(u_*),\ u_1-u_*\rangle=\langle J'(u_*),\ u_*-u\rangle\geq 0$, odnosno $\langle J'(u_*),\ u-u_*\rangle=\langle J'(u_*),\ v\rangle=0$. Slično se dokazuje da je $\langle J_k'(v_k),\ v\rangle=0$ odakle sledi da je

$$J_k'(v_k)-J'(u_*)\in(\mathrm{Ker}A)^{\perp}.$$

Neposredno se proverava da je $(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$ zatvoreni linearni podprostor Banahovog prostora X^*, odnosno Banahov prostor, pa je na osnovu leme 1.2.4 A^* ograničeni linearni operator koji preslikava Banahov prostor Y^* na Banahov prostor $(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$. Iz leme 1.2.3 sledi da postoji operator M koji preslikava $(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$ na Y^* takav da je

$$A^*M(J_k'(v_k)-J'(u_*))=J_k'(v_k)-J'(u_*) \tag{8}$$

i

$$\|M(J_k'(v_k)-J'(u_*))\|\leq c\|J_k'(v_k)-J'(u_*)\|. \tag{9}$$

Kako je u_* rešenje problema (1,1) to iz teoreme 1.1.2 i leme 1.1.1 sledi da postoji $y^*\in Y^*$ takvo da je $L(u_*)\leq L(u)$ za sve $u\in X$, odnosno

$$L'(u_*)=J'(u_*)+A^*y^*=0. \tag{10}$$

Neka je

$$y_k^*=y^*-M(J_k'(v_k)-J'(u_*)).$$

Tada iz (8), (10) i leme 1.1.1 sledi da je

$$J_k'(v_k) - J'(u_*) = A^*y^* - A^*y_k^*, \quad L_k'(v_k) = J_k'(v_k) + A^*y_k^* = 0,$$

odnosno

$$L_k(v_k) \leq L_k(u) \text{ za sve } u \in X,$$

a iz (9) sledi da $\|y_k^* - y^*\| \to 0$ kada $k \to \infty$. U slučaju $AX = Y$ teorema je dokazana.

Razmotrimo opšti slučaj. U dokazu teoreme 1.1.2 pokazano je da je $Y_1 = AX$ Banahov podprostor od Y i da je $\bar{b} \in Y_1$. Na osnovu dokazanog postoje y_1^*, $y_{1k}^* \in Y_1^*$, $k \in N$, takvi da $\|y_{1k}^* - y_1^*\| \to 0$ kada $k \to \infty$ i da je $L_1(u_*) \leq L_1(u)$ i $L_{1k}(v_k) \leq \leq L_{1k}(u)$, $k \in N$, za sve $u \in X$, gde je

$$L_1(u) = J(u) + \langle y_1^*, Au - \bar{b} \rangle, \text{ a } L_{1k}(u) = J_k(u) + \langle y_{1k}^*, Au - \bar{b} \rangle.$$

Na osnovu Han - Banahove t oreme y_1^* se može produžiti do $y^* \in Y^*$ a $\bar{y}_{1k}^* = y_{1k}^* - y_1^*$ do $\bar{y}_k^* \in Y^*$, takvih da je

$$\langle y^*, y \rangle = \langle y_1^*, y \rangle, \ \langle \bar{y}_k^*, y \rangle = \langle \bar{y}_{1k}^*, y \rangle \text{ za sve } y \in Y_1$$

i

$$\|\bar{y}_k^*\|_{Y^*} = \|\bar{y}_{1k}^*\|_{Y_1^*}.$$

Neka je $y_k^* = \bar{y}_k^* + y^*$. Tada je $\langle y_k^*, y \rangle = \langle \bar{y}_k^*, y \rangle + \langle y^*, y \rangle = \langle \bar{y}_{1k}^*, y \rangle + \langle y_1^*, y \rangle = \langle y_{1k}^*, y \rangle - \langle y_1^*, y \rangle + \langle y_1^*, y \rangle = \langle y_{1k}^*, y \rangle$ za sve $y \in Y_1$, odnosno $y_k^* \in Y^*$ je produženje funkcionala y_{1k}^*. Pored toga je $\|y_k^* - y^*\|_{Y^*} = \|\bar{y}_k^*\|_{Y^*} = \|\bar{y}_{1k}^*\|_{Y_1^*} = \|y_{1k}^* - y^*\|_{Y_1^*}$, pa $\|y_k^* - y^*\| \to 0$ kada $k \to \infty$. Kako je $Au - \bar{b} \in Y_1$ za sve $u \in X$, to stavljajući y^* i y_k^* umesto y_1^* i y_{1k}^* u funkcije $L_1(u)$ i $L_{1k}(u)$ dobijamo sva tvrđenja teoreme. Teorema je dokazana.

T e o r e m a 1.2.3. Neka su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.1.2 i neka su $J_k(u)$, $k \in N$ konveksne neprekidno - diferencijabilne funkcije na X. Pored toga neka je u_* rešenje problema (1,1) a v_k, $k \in N$ problema (1), pri čemu su ispunjeni uslovi (2). Tada postoje Lagranževi množitelji $\lambda_i \geq 0$, $\mu_{ik} \geq 0$,

$k \in N$, $i = \overline{1,s}$, $y^* \in Y^*$ i $y_k^* \in Y^*$, $k \in N$, takvi da je

$$\lambda_i g_i(u_*) = 0 \text{ i } \mu_{ik} g_i(v_k) = 0, \ k \in N, \ i = \overline{1,s},$$

da

$$\mu_{ik} \to \lambda_i, \ i = \overline{1,s} \text{ i } \|y_k^* - y^*\| \to 0 \text{ kada } k \to \infty$$

i da je

$$L(u_*) \leq L(u) \text{ i } L_k(v_k) \leq L_k(u), \ k \in N \text{ za sve } u \in X,$$

gde je

$$L(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \ldots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*, Au - \bar{b} \rangle$$

a

$$L_k(u) = J_k(u) + \mu_{1k} g_1(u) + \ldots + \mu_{sk} g_s(u) + \langle y_k^*, Au - \bar{b} \rangle \ . \tag{11}$$

D o k a z. Označimo sa

$$U_p = \{u \in X: \ g_i(u) \leq 0, \ i = \overline{p+1,s}, \ Au = \bar{b}\},$$

$$L_p(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \ldots + \lambda_p g_p(u),$$

$$L_{pk}(u) = J_k(u) + \mu_{1k} g_1(u) + \ldots + \mu_{pk} g_p(u),$$

gde su $\lambda_i \geq 0$ i $\mu_{ik} \geq 0$, $k \in N$, $i = \overline{1,p}$. Pretpostavimo da su za neko $p < s$ u_* rešenje problema $L_p(u) \to \inf$, $u \in U_p$, a v_k rešenje problema $L_{pk}(u) \to \inf$, $u \in U_p$, takvi da je (2) tačno ako se umesto funkcija $J(u)$ i $J_k(u)$ postave funkcije $L_p(u)$ i $L_{pk}(u)$. Tada iz teoreme 1.2.1 sledi da postoje $\lambda_{p+1} \geq 0$ i $\mu_{p+1k} \geq 0$, $k \in N$, takvi da je $\lambda_{p+1} g_{p+1}(u_*) = \mu_{p+1} g_{p+1}(v_k) = 0$, $k \in N$, $L_{p+1}(u_*) \leq L_{p+1}(u)$ i $L_{p+1k}(v_k) \leq L_{p+1k}(u)$, $k \in N$, za sve $u \in U_{p+1}$, da $\mu_{p+1k} \to \lambda_{p+1}$ kada $k \to \infty$ i da je (2) tačno ako se $J(u)$ i $J_k(u)$ zamene funkcijama $L_{p+1}(u)$ i $L_{p+1k}(u)$. Kako je naša pretpostavka tačna za $p = 0$ (tada je $L_0(u) = J(u)$, $L_{0k}(u) = J_k(u)$ a $U_0 = U$), to primenjujući gore rečeno za $p = 0, 1, \ldots, s-1$, dobijamo da postoje $\lambda_i \geq 0$ i $\mu_{ik} \geq 0$, $k \in N$, $i = \overline{1,s}$, takvi da je $\lambda_i g_i(u_*) = \mu_{ik} g_i(v_k) = 0$, $k \in N$, $i = \overline{1,s}$, $L_s(u_*) \leq L_s(u)$ i $L_{sk}(v_k) \leq L_{sk}(u)$, $k \in N$ za sve $u \in U_s = \{u \in X: \ Au = \bar{b}\}$, da $\mu_{ik} \to \lambda_i$, $i = \overline{1,s}$ kada $k \to \infty$, i da je (2) tačno ako se funkcije $J(u)$ i $J_k(u)$ zamene funkcijama $L_s(u)$ i $L_{sk}(u)$. Primenom teoreme 1.2.2 na probleme $L_s(u)\to\inf$, $u\in U_s$ i $L_{sk}(u)\to\inf$, $u\in U_s$ dobijamo preostala tvrđenja teoreme. Teorema je dokazana.

T e o r e m a 1.2.4. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1^0 X i Z su Banahovi prostori, $c_i\in X^*$, $d_i\in R$, $f_i(u)=\langle c_i, u\rangle - d_i$, $i=\overline{1,s_1}$, C je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Z, $d\in Z$,

$$U_0=\{u\in X:\ f_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s_1},\ Cu=d\};$$

2^0 Y je Banahov prostor, $J(u)$ i $J_k(u)$, $k\in N$ su konveksne neprekidno-diferencijabilne funkcije na U_0, $a_i\in X^*$, $b_i\in R$, $g_i(u)=\langle a_i, u\rangle - b_i$, $i=\overline{1,s}$, A je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Y, $\bar{b}\in Y$,

$$U=\{u\in U_0:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s},\ Au=\bar{b}\};$$

3^0 skup EX je zatvoren u Banahovom prostoru YxZ, gde je E operator definisan jednakošću (1.7).

4^0 u_* i v_k su rešenja problema $J(u)\to\inf$ i $J_k(u)\to\inf$, $k\in N$, $u\in U$, takva da

$$\|v_k-u_*\|\to 0,\ \|J_k'(v_k)-J'(u_*)\|\to 0 \text{ kada } k\to\infty .$$

Tada postoje Lagranževi množitelji $\lambda_i\geqslant 0$, $\mu_{ik}\geqslant 0$, $i=\overline{1,s}$, $k\in N$, $y^*\in Y^*$ i $y_k^*\in Y^*$, $k\in N$ takvi da je $\lambda_i g_i(u_*)=\mu_{ik}g_i(v_k)=0$, $k\in N$, $i=\overline{1,s}$; da $\mu_{ik}\to\lambda_i$, $i=\overline{1,s}$, $\|y_k^*-y^*\|\to 0$ kada $k\to\infty$ i da je $L(u_*)\leqslant L(u)$ i $L_k(v_k)\leqslant L_k(u)$, $k\in N$ za sve $u\in U_0$, gde su $L(u)$ i $L_k(u)$ iz (11).

Dovoljan uslov za zatvorenost skupa EX u prostoru YxZ daje lema 1.1.3.

D o k a z. Kako je jednakost $Eu=(\bar{b}, d)$ ekvivalentna sa $Au=\bar{b}$ i $Cu=d$, to se skup U može predstaviti na sledeći način

$$U=\{u\in X:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s},\ f_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{1,s_1},\ Eu=(\bar{b}, d)\}.$$

Iz leme 1.1.1 sledi da su u_* i v_k rešenja problema $J(u)\to\inf$

i $J_k(u) \to \inf$, $u \in U$, gde su $J(u) = \langle J'(u_*),\ u - u_*\rangle$ i $J_k(u) = \langle J_k'(v_k),\ u - v_k\rangle$ konveksne neprekidno-diferencijabilne funkcije definisane na X, koje zadovoljavaju uslov (2). Na osnovu teoreme 1.2.3 postoje $\lambda_i \geqslant 0$, $\mu_{ik} \geqslant 0$, $k \in N$, $i = \overline{1,s}$, $\lambda_i' \geqslant 0$, $\mu_{ik}' \geqslant 0$, $k \in N$, $i = \overline{1,s_1}$, $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$, $y_k^* \in Y^*$ i $z_k^* \in Z^*$, $k \in N$, takvi da je

$$\lambda_i g_i(u_*) = \mu_{ik} g_i(v_k) = 0,\ k \in N,\ i = \overline{1,s},$$
$$\lambda_i' f_i(u_*) = \mu_{ik}' f_i(v_k) = 0,\ k \in N,\ i = \overline{1,s_1},$$

da

$$\mu_{ik} \to \lambda_i,\ i = \overline{1,s}\ \text{i}\ \|y_k^* - y^*\| \to 0\ \text{kada}\ k \to \infty$$

i da je

$$L_1(u_*) \leqslant L_1(u)\ \text{i}\ L_{1k}(v_k) \leqslant L_{1k}(u),\ k \in N\ \text{za sve}\ u \in X,$$

gde je

$$L_1(u) = \bar{L}(u) + \lambda_1' f_1(u) + \ldots + \lambda_{s_1}' f_{s_1}(u) + \langle z^*,\ Cu - d\rangle,$$

$$L_{1k}(u) = \bar{L}_k(u) + \mu_{1k}' f_1(u) + \ldots + \mu_{s_1 k}' f_{s_1}(u) + \langle z_k^*,\ Cu - d\rangle,$$

$$\bar{L}(u) = J(u) + \lambda_1 g_1(u) + \ldots + \lambda_s g_s(u) + \langle y^*,\ Au - b\rangle,$$

i

$$\bar{L}_k(u) = J_k(u) + \mu_{1k} g_1(u) + \ldots + \mu_{sk} g_s(u) + \langle y_k^*,\ Au - b\rangle.$$

Na probleme

$$\bar{L}(u) \to \inf\ \text{i}\ \bar{L}_k(u) \to \inf,\ k \in N,\ u \in U_0$$

primenimo teoremu 1.1.3. Dobijamo da je

$$\bar{L}(u_*) \leqslant \bar{L}(u)\ \text{i}\ \bar{L}_k(v_k) \leqslant \bar{L}_k(u)\ \text{za sve}\ u \in U_0.$$

Kao i u završetku dokaza teoreme 1.1.5 primenimo dva puta lemu 1.1.1. Dobijamo da je $L(u_*) \leqslant L(u)$ i $L_k(v_k) \leqslant L_k(u)$, $k \in N$ za sve $u \in U_0$. Teorema je dokazana.

P r i m e r. Neka je u teoremi 1.2.4 X refleksivni Banahov prostor u kome je funkcija $\|u\|^2$ strogo ravnomerno konveksna i neprekidno-diferencijabilna, a u_* normalno rešenje (koje među svim rešenjima ima najmanju normu) problema $J(u) \to \inf$, $u \in U$. Tada se za funkciju $J_k(u)$ može uzeti funkcija Tihonova

$$T_k(u) = J(u) + \alpha_k\|u\|^2, \quad \alpha_k \geqslant 0 \text{ i } \alpha_k \to 0 \text{ kada } k \to \infty.$$

Tada je v_k jedinstvena tačka minimuma funkcije $J_k(u) = T_k(u)$ na skupu U i četvrti uslov teoreme 1.2.4 je ispunjen (teorema 2.1.1). Pri tome je dovoljno da U bude proizvoljan konveksan zatvoren skup iz X.

3. Ograničenost nizova Lagranževih množitelja iz Kun - Takerove teoreme primenjene na problem minimizacije funkcije Tihonova.

L e m a 1.3.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi: X je Banahov prostor, $g_i(u)$, $i = \overline{r+1,p}$ su neprekidno - diferencijabilne funkcije na X, $U_1 \subset X$,

$$U_0 = \{u \in U_1 : \; g_i(u) \leqslant 0, \; i = \overline{r+1,p}\};$$

$J(u)$, $J_k(u)$, $k \in N$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,r}$ su neprekidno - diferencijabilne funkcije na U_0,

$$U = \{u \in U_0 : \; g_i(u) \leqslant 0, \; i = \overline{1,r}\}; \tag{1}$$

u_* i v_k, $k \in N$ su rešenja problema (1,1), (1) i (2,1), (1), pri čemu $\|v_k - u_*\| \to 0$ i $\|J_k'(v_k) - J'(u_*)\| \to 0$ kada $k \to \infty$, a Lagranževi množitelji $\mu_{ik} \geqslant 0$, $k \in N$, $i = \overline{1,p}$ su takvi da $\mu_{ik} \to \lambda_i \geqslant$ $\geqslant 0$, $i = \overline{1,p}$ kada $k \to \infty$, da je

$$\mu_{ik} g_i(v_k) = 0, \; k \in N, \; i = \overline{1,p} \text{ i } L_k(v_k) \leqslant L_k(u), \; k \in N, \; u \in U_1, \tag{2}$$

gde je $L_k(u) = \langle J_k'(v_k) + \mu_{1k} g_1'(v_k) + \ldots + \mu_{rk} g_r'(v_k), \; u - v_k \rangle +$ $+ \mu_{r+1k} g_{r+1}(u) + \ldots + \mu_{pk} g_p(u)$. Tada je $\lambda_i g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1,p}$ i $L(u_*) \leqslant L(u)$ za sve $u \in U_1$, gde je $L(u) = \langle J'(u_*) + \lambda_1 g_1'(u_*) +$ $+ \ldots + \lambda_r g_r'(u_*), \; u - u_* \rangle + \lambda_{r+1} g_{r+1}(u) + \ldots + \lambda_p g_p(u)$. Pored toga $L_k(u) \to L(u)$ za sve $u \in X$, $L_k(v_k) \to L(u_*)$ i $\|L_k'(v_k) - L'(u_*)\| \to$ $\to 0$ kada $k \to \infty$.

D o k a z. Prvi deo tvrđenja se dokazuje prelaskom na graničnu vrednost u (2), a drugi se neposredno proverava.

T e o r e m a 1.3.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:
1° X i Y su Banahovi prostori, $g_i(u)$, $i=\overline{r+1,m}$ su konveksne neprekidno-diferencijabilne funkcije na X, $a_i\in X^*$, $b_i\in R$, $g_i(u)=\langle a_i, u\rangle - b_i$, $i=\overline{m+1,s}$, A je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Y takav da je skup AX zatvoren u Y, $\bar{b}\in Y$,

$$U_r=\left\{u\in X:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=\overline{r+1,s},\ Au=\bar{b}\right\};$$

2° $J(u)$, $J_k(u)$, $k\in N$ i $g_i(u)$, $i=\overline{1,r}$ su konveksne neprekidno-diferencijabilne funkcije na U_r,

$$U=\left\{u\in U_r:\ g_i(u)\leqslant 0,\ i=1,r\right\};$$

3° $g_i(\bar{u})<0$, $i=\overline{1,m}$ za neko $\bar{u}\in U$;

4° u_* i v_k, $k\in N$ su rešenja problema $J(u)\to\inf$ i $J_k(u)\to\inf$, $k\in N$, $u\in U$ pri čemu

$$\|v_k-u_*\|\to 0 \text{ i } \|J_k'(v_k)-J'(u_*)\|\to 0 \text{ kada } k\to\infty.$$

Tada postoje konstanta c i Lagranževi množitelji $\mu_{ik}\geqslant 0$, $i=\overline{1,s}$ i $y_k^*\in Y^*$, $k\in N$ takvi da je za svako $k\in N$

$$\mu_{ik}\leqslant c,\quad \mu_{ik}g_i(v_k)=0,\ i=\overline{1,s},\quad \|y_k^*\|\leqslant c \text{ i } L_k(v_k)\leqslant L_k(u),\ u\in X,$$

gde je

$$\begin{aligned} L_k(u)=&\left\langle J_k'(v_k)+\mu_{1k}g_1'(v_k)+\ldots+\mu_{rk}g_r'(v_k),\ u-v_k\right\rangle+\\ &+\mu_{r+1k}g_{r+1}(v_k)+\ldots+\mu_{sk}g_s(v_k)+\left\langle y_k^*,\ Au-\bar{b}\right\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

D o k a z. Iz leme 1.1.1 sledi da je $0=\bar{J}_k(v_k)\leqslant\bar{J}_k(u)$ za sve $u\in U$, gde je $\bar{J}_k(u)=\langle J_k'(v_k),\ u-v_k\rangle$. Primenjujući teoremu 1.1.1 na problem $\bar{J}_k(u)\to\inf$, $u\in U$ dobijamo da postoje Lagranževi množitelji

$$\mu_{ik}\geqslant 0,\ i=\overline{1,r},\ k\in N, \tag{4}$$

takvi da je za sve $k\in N$

$$\mu_{ik}g_i(v_k)=0,\ i=\overline{1,r} \text{ i } L_{rk}(v_k)\leqslant L_{rk}(u) \text{ za sve } u\in U_r, \tag{5}$$

gde je $L_{rk}(u) = J_k(u) + \mu_{1k}g_1(u) + \ldots + \mu_{rk}g_r(u)$.

Dokažimo da su Lagranževi množitelji (4) ograničeni. Neka je $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. S obzirom na treći uslov teoreme i na (4), stavljajući $u = \bar{u}$ u (5) dobijamo da je $0 \leq \langle J_k'(v_k), \bar{u} - v_k \rangle + \mu_{jk}g_j(\bar{u})$ odakle sledi da je

$$\mu_{jk} \leq \langle J_k'(v_k), \bar{u} - v_k \rangle / |g_j(\bar{u})|.$$

Koristeći četvrti uslov teoreme dobijamo da je niz na desnoj strani poslednje nejednakosti konvergentan, odakle sledi ograničenost niza μ_{jk}, $k \in N$. Primenimo lemu 1.1.1 na problem $L_{rk}(u) \to \inf$, $u \in U_r$. Dobijamo da je $\bar{L}_{rk}(v_k) \leq \bar{L}_{rk}(u)$ za sve $u \in U_r$, gde je

$$\bar{L}_{rk}(u) = \langle L_{rk}'(v_k), u - v_k \rangle =$$

$$= \langle J_k'(v_k) + \mu_{1k}g_1'(v_k) + \ldots + \mu_{rk}g_r'(v_k), u - v_k \rangle.$$

Primetimo da je, za razliku od $J_k(u)$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,r}$, funkcija $\bar{L}_{rk}(u)$ definisana na X. Označimo

$$U_m = \{u \in X: g_i(u) \leq 0, i = \overline{m+1,s}, Au = b\}.$$

Tada je

$$U_r = \{u \in U_m: g_i(u) \leq 0, i = \overline{r+1,m}\}.$$

Primenjujući teoremu 1.1.1 na problem $\bar{L}_{rk}(u) \to \inf$, $u \in U_r$, dobijamo da za svako $k \in N$ postoje Lagranževi množitelji

$$\mu_{ik} \geq 0, \; i = \overline{r+1,m}, \tag{6}$$

takvi da je

$$\mu_{ik}g_i(v_k) = 0, \; i = \overline{r+1,m} \text{ i } L_{mk}(v_k) \leq L_{mk}(u) \text{ za sve } u \in U_m, \tag{7}$$

gde je

$$L_{mk}(u) = \bar{L}_{rk}(u) + \mu_{r+1k}g_{r+1}(u) + \ldots + \mu_{mk}g_m(u).$$

Dokažimo da su i Lagranževi množitelji (6) ograničeni. Neka je $j \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$. S obzirom na treći uslov teoreme i na (6), stavljajući $u = \bar{u}$ u (7), dobijamo da je $0 \leq \bar{L}_{rk}(\bar{u}) + \mu_{jk}g_j(\bar{u})$ odakle sledi da je

$$\mu_{jk} \leq (\|J_k'(v_k)\| + \mu_{1k}\|g_1'(v_k)\| + \ldots +$$
$$+ \mu_{rk}\|g_r'(v_k)\|)\|\bar{u} - v_k\| / |g_j(\bar{u})| .$$

Iz četvrtog uslova teoreme i ograničenosti nizova μ_{ik}, $k \in N$ za sve $i = \overline{1,r}$, sledi ograničenost niza na desnoj strani posledje nejednakosti pa samim tim i niza μ_{jk}, $k \in N$.

Neka je $p \in \{m, m+1, \ldots, s-1\}$ i

$$U_p = \{u \in X: \ g_i(u) \leq 0, \ i = \overline{p+1,s}, \ Au = \bar{b}\}.$$

Pretpostavimo da postoje ograničeni nizovi Lagranževih množitelja $\mu_{ik} \geq 0$, $k \in N$, $i = \overline{1,p}$, takvi da je za svako $k \in N$

$$L_{pk}(v_k) \leq L_{pk}(u) \text{ za sve } u \in U_p,$$

gde je

$$L_{pk}(u) = \bar{L}_{rk}(u) + \mu_{r+1k}g_{r+1}(u) + \ldots + \mu_{pk}g_p(u).$$

Na problem

$$L_{pk}(u) \to \inf, \ u \in U_p = \{u \in U_{p+1}: \ g_{p+1}(u) \leq 0\}$$

primenimo, za svako $k \in N$, teoremu 1.1.4. Neka je $\underline{\mu}_{p+1k}$ najmanji od svih Lagranževih množitelja $\mu_{p+1k} \geq 0$, takvih da je

$$\mu_{p+1k}g_{p+1}(v_k) = 0 \text{ i } L_{p+1k}(v_k) \leq L_{p+1k}(u) \text{ za sve } u \in U_{p+1}, \tag{8}$$

gde je

$$L_{p+1k}(u) = L_{pk}(u) + \mu_{p+1k}g_{p+1}(u).$$

Pokažimo da je niz $\underline{\mu}_{p+1k}$, $k \in N$ ograničen. Ako nije, onda postoji njegov podniz koji teži ka $+\infty$ kada $k \to \infty$. Odbacujući članove niza koji nisu članovi tog podniza možemo smatrati da $\underline{\mu}_{p+1k} \to +\infty$ kada $k \to \infty$. Kako je niz $(\mu_{1k}, \mu_{2k}, \ldots, \mu_{pk})$, $k \in N$ ograničen u prostoru R^p, to postoji njegov konvergentan podniz. Ponovo odbacujući preostale članove tog niza možemo smatrati da postoje $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,p}$ takvi da $\mu_{ik} \to \lambda_i$, $i = \overline{1,p}$ i $\underline{\mu}_{p+1k} \to +\infty$ kada $k \to \infty$. Označimo

$$L_p(u) = \langle J'(u_*) + \lambda_1 g_1'(u_*) + \ldots + \lambda_r g_r'(u_*), \ u - u_* \rangle +$$

$$+\lambda_{r+1}g_{r+1}(u)+\ldots+\lambda_p g_p(u).$$

a osnovu leme 1.3.1 je $L_p(u_*)\leqslant L_p(u)$ za sve $u\in U_p$ i ispunjeni u uslovi (2,2) ako se u njima funkcije $J(u)$ i $J_k(u)$ zamene unkcijama $L_p(u)$ i $L_{pk}(u)$, pa na osnovu teoreme 1.2.1 postoji onvergentan niz Lagranževih množitelja $\mu_{p+1k}\geqslant 0$, $k\in N$, takav a je za svako $k\in N$ ispunjeno (8), što je kontradiktorno sa $\mu_{p+1k}\geqslant \underline{\mu}_{p+1k}$ i činjenicom da $\underline{\mu}_{p+1k}\to+\infty$ kada $k\to\infty$. Prema ome niz Lagranževih množitelja $\mu_{p+1k}=\underline{\mu}_{p+1k}$, $k\in N$ je ograničen.

Primenjujući tu činjenicu za $p=m,\ m+1,\ldots,\ s-1$ dobiamo da postoje ograničeni nizovi Lagranževih množitelja

$$\mu_{ik}\geqslant 0,\ k\in N,\ i=\overline{1,s},$$

akvih da je ispunjeno (8) za $p=\overline{0,s-1}$, pri čemu je

$$U_s=\{u\in X:\ Au=\bar{b}\}.$$

Na problem $L_{sk}(u)\to\inf$, $u\in U_s$ primenimo za svako $k\in N$ eoremu 1.1.2 (koja važi i u slučaju $s=0$, odnosno kada je $=\{u\in X:\ Au=\bar{b}\}$), na osnovu koje je skup

$$M_k=\{y_k^*\in Y^*:\ L_k(v_k)\leqslant L_k(u)\ \text{za sve}\ u\in X\},$$

de je $L_k(u)$ iz (3), neprazan. Neka je $\bar{y}_k^*\in M_k$, takvo da je

$$\|\bar{y}_k^*\|\leqslant\inf\{\|y_k^*\|+1:\ y_k^*\in M_k\}.$$

okažimo da je niz $\|\bar{y}_k^*\|$, $k\in N$ ograničen. Ako nije, onda postoi njegov podniz koji teži ka $+\infty$ kada $k\to\infty$. Odbacujući člaove niza koji nisu članovi podniza možemo smatrati da $\|\bar{y}_k^*\|\to+\infty$ kada $k\to\infty$. Diskutujući kao i ranije, u slučaju $=p$, možemo smatrati da postoje $\lambda_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,s}$ takvi da $\mu_{ik}\to\lambda_i$, $i=\overline{1,s}$ i $\|\bar{y}_k^*\|\to+\infty$ kada $k\to\infty$. Tada je na osnovu eme 1.3.1 $L_s(u_*)\leqslant L_s(u)$ za sve $u\in U_s$ i ispunjeni su uslovi

(2,2) ako se u njima funkcije $J(u)$ i $J_k(u)$ zamene funkcijama $L_s(u)$ i $L_{sk}(u)$, pa na osnovu teoreme 1.2.2 postoji konvergentan (po normi prostora Y^*) niz Lagranževih množitelja $y_k^* \in M_k$, $k \in N$, što je kontradiktorno sa $\|y_k^*\| + 1 \geq \|\bar{y}_k^*\|$, $k \in N$ i činjenicom da $\|\bar{y}_k^*\| \to +\infty$ kada $k \to \infty$. Prema tome, i Lagranževi množitelji $y_k^* = \bar{y}_k^*$, $k \in N$ su ograničeni pa postoji konstanta c takva da je $\mu_{ik} \leq c$, $i = \overline{1,s}$ i $\|y_k^*\| \leq c$ za sve $k \in N$. Teorema je dokazana.

T e o r e m a 1.3.2. Neka su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.1.5, neka su $J_k(u)$, $k \in N$ konveksne neprekidno - diferencijabilne funkcije na U_0 i neka su u_* i v_k, $k \in N$ rešenja problema $J(u) \to \inf$ i $J_k(u) \to \inf$, $u \in U$, takva da

$$\|v_k - u_*\| \to 0 \text{ i } \|J_k'(v_k) - J'(u_*)\| \to 0 \text{ kada } k \to \infty.$$

Tada postoje konstanta c i Lagranževi množitelji $\mu_{ik} \geq 0$, $i = \overline{1,s}$ i $y_k^* \in Y^*$, $k \in N$ takvi da je za svako $k \in N$

$$\mu_{ik} \leq c, \quad \mu_{ik} g_i(v_k) = 0, \quad i = \overline{1,s}, \quad \|y_k^*\| \leq c \text{ i } L_k(v_k) \leq L_k(u), \quad u \in U_0,$$

gde je

$$L_k(u) = J_k(u) + \mu_{1k} g_1(u) + \ldots + \mu_{sk} g_s(u) + \langle y_k^*, Au - \bar{b} \rangle.$$

D o k a z. Kako je jednakost $Eu = (\bar{b}, d)$ ekvivalentna sa $Au = \bar{b}$ i $Cu = d$, to se skup U može predstaviti na sledeći način

$$= \{ u \in X:\ g_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,s},\ f_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,s_1},\ Eu = (\bar{b}, d) \}.$$

Kako je $(Y \times Z)^* = Y^* \times Z^*$ i $\langle (y^*, z^*), (y, z) \rangle = \langle y^*, y \rangle + \langle z^*, z \rangle$ ([1]) i kako su ispunjeni svi uslovi teoreme 1.3.1 to postoje konstanta c i Lagranževi množitelji

$$\mu_{ik} \geq 0,\ i = \overline{1,s},\ \mu_{ik}' \geq 0,\ i = \overline{1,s_1},\ y_k^* \in Y^* \text{ i } z_k^* \in Z^*,\ k \in N,$$

takvi da je za svako $k \in N$

$$\mu_{ik} \leq c,\ \mu_{ik} g_i(v_k) = 0,\ i = \overline{1,s},\ \mu_{ik}' f_i(v_k) = 0,\ i = \overline{1,s_1},$$
$$\|y_k^*\| \leq c \text{ i } L_{1k}(v_k) \leq L_{1k}(u) \text{ za sve } u \in X,$$

de je

$$L_{1k}(u) = \bar{L}_k(u) + \mu'_{1k} f_1(u) + \ldots + \mu'_{s_1 k} f_{s_1}(u) + \langle z_k^*, Cu - d \rangle$$

$$\bar{L}_k(u) = \langle J'_k(v_k) + \mu_{1k} g'_1(v_k) + \ldots + \mu_{mk} g'_m(v_k),\ u - v_k \rangle +$$
$$+ \mu_{m+1k} g_{m+1}(u) + \ldots + \mu_{sk} g_s(u) + \langle y_k^*, Au - b \rangle.$$

a problem $\bar{L}_k(u) \to \inf$, $u \in U_0$, $k \in N$ primenimo teoremu 1.1.3. obijamo da je $\bar{L}_k(v_k) \leq \bar{L}_k(u)$ za sve $u \in U_0$. Primenjujući, kao u završetku dokaza teoreme 1.1.5, dva puta lemu 1.1.1 dobija-o da je $L_k(v_k) \leq L_k(u)$ za sve $u \in U_0$, $k \in N$. Teorema je dokazana.

P r i m e r. Za problem (1,13), razmatran u primeru iz §1, uvedimo funkciju Tihonova

$$T_k(u) = J(u) + \alpha_k \|u\|_X^2 =$$
$$= |x(T) - z|_{R^n}^2 + \alpha_k \int_0^T (|x(t)|_{R^n}^2 + |\dot{x}(t)|_{R^n}^2 + |u(t)|_{R^r}^2) dt,$$

de je α_k, $k \in N$ pozitivan nula-niz. Kako je $\|u\|^2$ jako konve-sna neprekidno-diferencijabilna funkcija na X, to je, sagla-no rečenom u primeru iz §2, niz $v_k \in U$, $k \in N$ jednoznačno od-eđen iz uslova $T_k(v_k) \leq T_k(u)$, $u \in U$, pri čemu

$$\|v_k - u_*\| \to 0 \text{ i } \|T'_k(v_k) - J'(u_*)\| \to 0 \text{ kada } k \to \infty,$$

de je u_* normalno rešenje problema (1, 13). Pretpostavimo da kupovi U i U_0 zadovoljavaju prvi i treći uslov teoreme 1.1.5 da je V ograničen skup u L_2^r. Na osnovu teoreme 1.3.2 tada po-toje konstanta c i Lagranževi množitelji $y_k^* \in H_n^1$, $k \in N$ takvi a je

$$\|y_k^*\|_{H_n^1} \leq c \text{ i } L_k(v_k) \leq L_k(u) \text{ za sve } u \in U_0,\ k \in N,$$

de je

$$L_k(u) = T_k(u) + \langle y_k^*, Au - b \rangle.$$

pecijalno, ako U_0 zadovoljava prvi i treći uslov teoreme 1.2.4 ada postoji konvergentan niz Lagranževih množitelja y_k^*, $k \in N$.

G L A V A 2

REGULARIZACIJA METODA LINEARIZACIJE

§ 1. Osnovni stavovi o regularizaciji

Prilikom rešavanja problema minimizacije funkcije $J(u)$ na skupu U, često funkcija $J(u)$ i ograničenja koja određuju skup U nisu poznati tačno, nego samo približno. Pri tome je značajno pitanje da li male greške u određivanju funkcije $J(u)$ i ograničenja dovode do malog odstupanja dobijenog rešenja od tačnog rešenja. Na žalost odgovor je negativan, jer može da se desi da skup na kome tražimo minimum približne funkcije bude prazan, a i kada nije prazan može se desiti da dobijeno rešenje značajno odstupa od tačnog rešenja.

P r i m e r. Neka je $U_0=\{u=(x,\ y)\in R^2:\ y=x,\ x\in[-1,\ 1]\}$, $U=\{u\in U_0:\ g(u)=y-x\leqslant 0\}$, $J(u)=x$. Tada je $U=U_0$, $J_*=\inf\limits_{u\in U} J(u)=-1$, $U_*=\{u\in U:\ J(u)=J_*\}=\{(-1,-1)\}$.

Pretpostavimo da je funkcija $J(u)$ poznata tačno, a da su umesto funkcije $g(u)$ poznate njene približne vrednosti $g_k(u)$, $k\in N$. Tada je skup $U_k=\{u\in U_0:\ g_k(u)\leqslant 0\}$ aproksimacija skupa U. Ako je $g_k(u)=y-x+1/k$, onda je $U_k=\emptyset$ za svako $k\in N$. Neka je $g_k(u)=y-(1-1/k)x$. Tada je za svako $k\in N$, $U_k=\{u\in U_0:\ x\geqslant 0\}$,

$$J_{k*}=\inf_{u\in U_k} J(u)=0,\quad U_{k*}=\{u\in U_k:\ J(u)=J_{k*}\}=\{(0,\ 0)\}.$$

a porastom k, funkcija $g_k(u)$ sve tačnije aproksimira funkciju $J(u)$, a ipak dobijeno rešenje značajno odstupa od tačnog.

Za rešavanje takvih problema mogu se koristiti metodi regularizacije. U daljem izlaganju koristićemo metod Tihonova. Opasnosti da skup U_k bude prazan možemo se osloboditi formiranjem kaznene funkcije od nekih ograničenja ili proširenjem skuna U_k. Konvergenciju dobijenog niza rešenja ka tačnom rešenju obezbedićemo tako, što ćemo umesto funkcije $J_k(u)$, koja predstavlja aproksimaciju funkcije $J(u)$, minimizirati funkciju $T_k(u) = J_k(u) + \alpha_k\|u\|^2$, aproksimaciju funkcije Tihonova $T_k(u) = J(u) + \alpha_k\|u\|^2$. Dve varijante regularizovanog metoda linearizacije biće izložene u sledeća dva paragrafa. Navedimo dve teoreme koje ćemo koristiti u dokazu konvergencije nizova određenih u tim varijantama.

T e o r e m a 2.1.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1° U je konveksan zatvoren skup refleksivnog Banahovog prostora X, $J(u)$ je konveksna neprekidno-diferencijabilna funkcija na U,

$$J_* = \inf_{u\in U} J(u) > -\infty, \quad U_* = \{u \in U:\ J(u) = J_*\} \neq \emptyset;$$

2° funkcija $\|u\|^2$ je strogo ravnomerno konveksna i neprekidno-diferencijabilna na skupu U;

3° niz α_k, $k\in N$ je pozitivan nula-niz.

Tada su $v_k \in U$, $k\in N$ i $u_* \in U_*$ jednoznačno određeni uslovima $T_k(v_k) \leq T_k(u)$ za sve $u\in U$ i $\|u_*\| \leq \|u\|$ za sve $u\in U_*$, gde je $T_k(u) = J(u) + \alpha_k\|u\|^2$. Pored toga tada je

$$\lim_{k\to\infty}\|v_k - u_*\| = 0 \ \text{i} \ \lim_{k\to\infty}\|T_k'(v_k) - J'(u_*)\| = 0. \tag{1}$$

D o k a z. Pri navedenim uslovima funkcije $\|u\|^2$ i $T_k(u)$, $k\in N$ su strogo ravnomerno konveksne i neprekidne na skupu U, a U_* je konveksan zatvoren skup, pa postojanje i jednoznačnost vektora v_k i u_* sledi iz teoreme 9 strana 57 [9]. Prva jednakost (1) je tvrđenje teoreme 1, str. 185, [9], a druga je posledica prve i uslova 3°. Teorema je dokazana.

T e o r e m a 2.1.2. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1° U je konveksan skup Hilbertovog prostora X, F je operator koji preslikava skup U u Banahov prostor Y, $J(u)$, $f_i(u)$, $i = \overline{1,r}$ i $\|F(u)\|$ su konveksne, neprekidne funkcije na U,

$$U' = \{u \in U:\ f_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,r},\ F(u) = 0\},$$

$$J_* = \inf_{u \in U'} J(u) > -\infty,\ U_* = \{u \in U':\ J(u) = J_*\} \neq \emptyset \ ;$$

2^o postoje $u' \in U'$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,r}$ i $y^* \in Y^*$, takvi da je

$$\lambda_i f_i(u') = 0,\ i = \overline{1,r} \text{ i } L(u') \leq L(u) \text{ za sve } u \in U,$$

gde je

$$L(u) = J(u) + \lambda_1 f_1(u) + \ldots + \lambda_r f_r(u) + \langle y^*,\ F(u)\rangle \ ;$$

3^o $\alpha_k > 0$, $A_k > 0$, $k \in N$ i $\alpha_k + A_k^{-1} + \alpha_k^{-1} A_k^{1-q} \to 0$ kada $k \to \infty$, gde je $q > 1$.

Tada su $v_k \in U$, $k \in N$ i $u_* \in U_*$ jednoznačno određeni uslovima $T_k(v_k) \leq T_k(u)$ za sve $u \in U$ i $\|u_*\| \leq \|u\|$ za sve $u \in U_*$, gde je

$$T_k(u) = J(u) + A_k P(u) + \alpha_k \|u\|^2,\ P(u) = \sum_{i=1}^{r} (\max\{0,\ f_i(u)\})^p + \|F(u)\|^p$$

i $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Pored toga tada je

$$\lim_{k \to \infty} \|v_k - u_*\| = 0. \tag{2}$$

D o k a z. Pri navedenim uslovima funkcije $\|u\|^2$ i $T_k(u)$, $k \in N$ su jako konveksne i neprekidne na skupu U, a U_* je zatvoren konveksan skup, pa postojanje i jedinstvenost vektora v_k i u_* sledi iz teoreme 8, str. 55, [9]. U slučaju kada je $Y = R$ jednakost (2) je tvrđenje teoreme 1, str. 227, [9]. Pomenuta teorema (a time i jednakost (2)) u opštem slučaju, kada je Y proizvoljan Banahov prostor, dokazuje se na isti način kao i kada je $Y = R$. Teorema je dokazana.

U narednim paragrafima koristićemo sledeću lemu.

L e m a 3.1.1 ([8]). Neka niz realnih brojeva ω_k, $k \in N$ zadovoljava sledeći uslov

$$\omega_1 \geq 0,\ 0 \leq \omega_{k+1} \leq (1 - s_k)\omega_k + d_k,\ k \in N,$$

gde je

$$0 < s_k \leq 1,\ d_k \geq 0,\ k \in N,\ \sum_{k=1}^{\infty} s_k = +\infty \text{ i } \lim_{k\to\infty} d_k/s_k = 0.$$

Tada je $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = 0.$

§2. **Regularizacija metoda linearizacije u slučaju kada su funkcija koja se minimizira i ograničenja poznati približno.**

Razmotrimo sledeći problem minimizacije

$$J(u) \to \inf,\ u \in U = \{u \in U_0:\ g_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,s},\ Au = \bar{b}\}, \tag{1}$$

gde je U_0 zadat skup iz Hilbertovog prostora X, gde su funkcije $J(u)$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$ definisane i neprekidno - diferencijabilne na skupu U_0, a $g_i(u) = \langle a_i,\ u\rangle - b_i$, $a_i \in X$, $b_i \in R$, $i = \overline{m+1,s}$, i gde je A linearni operator koji preslikava X u Hilbertov prostor Y, a $\bar{b} \in Y$. Pretpostavimo da je

$$J_* = \inf_U J(u) > -\infty \text{ i } U_* = \{u \in U:\ J(u) = J_*\} \neq \emptyset. \tag{2}$$

Uvedimo funkciju Tihonova

$$T_k(u) = J(u) + \alpha_k \|u\|^2,\ \alpha_k > 0,\ \alpha_k \to 0 \text{ kada } k \to \infty\,. \tag{3}$$

Neka su umesto tačnih vrednosti funkcija $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$, vektora $J'(u)$, $g_i'(u)$, $i = \overline{1,m}$, a_i, $i = \overline{m+1,s}$ i $\bar{b}$, operatora A i brojeva b_i, $i = \overline{m+1,s}$ poznate samo njihove približne vrednosti $g_{ik}(u)$, $J_k'(u)$, $g_{ik}'(u)$, a_{ik}, $\bar{b}_k$, $A_k \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ i b_{ik}, $k \in N$, gde je $\mathcal{L}(X,\ Y)$ Banahov prostor ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju X u Y. Tada za približnu vrednost gradijenta $T_k'(u) = J'(u) + 2\alpha_k u$ uzmimo

$$t_k'(u) = J_k'(u) + 2\alpha_k u.$$

Formirajmo niz u_k, $k \in N$ na sledeći način. Neka je $u_1 \in U_0$. Pretpostavimo da je za neko $k \in N$ poznato $u_k \in U_0$. Uvedimo funkciju

$$\Phi_k(u) = \|u - u_k\|^2/2 + \beta_k \langle t'_k(u_k),\ u - u_k\rangle,\ \beta_k > 0 \qquad (4)$$

i skup

$$Q_k = \{u \in U_o:\ g_{ik}(u_k) + \langle g'_{ik}(u_k),\ u - u_k\rangle \leq \theta_k(1 + \|u_k\|^2),\ i = \overline{1,m};$$
$$g_{ik}(u) = \langle a_{ik},\ u\rangle - b_{ik} \leq \theta_k,\ i = \overline{m+1,s}\ ;$$
$$\bar{g}_k(u) = \|A_k u - \bar{b}_k\|^2 - \theta_k^2 \leq 0\},\ \theta_k > 0. \qquad (5)$$

Pretpostavljajući da je $Q_k \neq \emptyset$ odredimo u_{k+1} iz uslova

$$u_{k+1} \in Q_k,\ \Phi_k(u_{k+1}) \leq \inf_{u \in Q_k} \Phi_k(u) + \varepsilon_k^2/2,\ \varepsilon_k \geq 0. \qquad (6)$$

Uslove pod kojima niz u_k, $k \in N$ konvergira ka rešenju problema (1) daje sledeća teorema.

T e o r e m a 2.2.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:
1^o X je Hilbertov a Z Banahov prostor, $f_i(u)$, $i = \overline{1,m_1}$ su konveksne neprekidno - diferencijabilne funkcije na X, $f_i(u) = \langle d_i,\ u\rangle - e_i$, $d_i \in X$, $e_i \in R$, $i = \overline{m_1+1,s_1}$, D je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Z takav da je skup DX zatvoren u Z, $e \in Z$,

$$U_o = \{u \in X:\ f_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,s_1},\ Du = e\}; \qquad (7)$$

2^o Y je Hilbertov prostor, $J(u)$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$ su konveksne neprekidno - diferencijabilne funkcije na skupu U_o, a $g_i(u) = \langle a_i,\ u\rangle - b_i$, $a_i \in X$, $b_i \in R$, $i = \overline{m+1,s}$, A je ograničeni linearni operator koji preslikava X u Y takav da je skup $A\mathrm{Ker}D$ zatvoren u Y, $\bar{b} \in Y$, U je skup definisan u (1), ispunjeni su uslovi (2);
3^o $g_i(\bar{u}) < 0$, $i = \overline{1,m}$ i $f_i(\bar{u}) < 0$, $i = \overline{1,m_1}$ za neko $\bar{u} \in U$; (8)
4^o postoji $L \geq 0$ takvo da je za sve $u, v \in U_o$

$$\|J'(u) - J'(v)\|^2 \leq L\ \langle J'(u) - J'(v),\ u - v\rangle$$
$$\|g'_i(u) - g'_i(v)\| \leq L\|u - v\|,\ i = \overline{1,m}; \qquad (9)$$

5^o približne vrednosti $g_{ik}(u)$, $J'_k(u)$, $g'_{ik}(u)$, a_{ik}, $\bar{b}_k$, A_k i b_{ik} funkcija $g_i(u)$, vektora $J'(u)$, $g'_i(u)$, a_i i $\bar{b}$, operatora A i brojeva b_i su takve da je za sve $k\in N$ i $u\in U_o$

$$|g_i(u)-g_{ik}(u)|\leq \delta_k(1+\|u\|^2),\ i=\overline{1,m}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\|J'(u)-J'_k(u)\|\leq \delta_k(1+\|u\|),\\ \|g'_i(u)-g'_{ik}(u)\|\leq \delta_k(1+\|u\|),\ i=\overline{1,m}\end{gathered} \tag{11}$$

$$\|a_i-a_{ik}\|\leq\delta_k,\ |b_i-b_{ik}|\leq\delta_k,\ i=\overline{m+1,s}, \tag{12}$$

$$\|A-A_k\|\mathscr{X}(X,\ Y)\leq\delta_k,\ \|\bar{b}-\bar{b}_k\|\leq\delta_k; \tag{13}$$

6^o nizovi α_k, β_k, θ_k, ε_k i δ_k, $k\in N$ zadovoljavaju uslove

$$\alpha_k>0,\ 0<\beta_k\leq\bar{\beta}<2/(2mcL+L),\ \theta_k>0,\ \varepsilon_k\geq 0,\ \delta_k\geq 0, \tag{14}$$

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k+\theta_k+\varepsilon_k+\delta_k)=0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k=\infty, \tag{15}$$

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k/\theta_k+\varepsilon_k/(\alpha_k\beta_k)+\theta_k/\alpha_k+|\alpha_k-\alpha_{k+1}|/(\alpha_k^2\beta_k))=0, \tag{16}$$

$$\delta_k\max\{5+\|\bar{u}\|,\ 3+3\|\bar{u}\|\}\leq 2\theta_k, \tag{17}$$

gde je $\bar{u}$ iz (8), L konstanta iz (9) a c konstanta iz teoreme 1.3.2. Tada je $Q_k\neq\emptyset$ za sve $k\in N$, a niz vektora u_k, $k\in N$, određen procesom (4) - (6), konvergira ka normalnom rešenju problema (1), (7) odnosno ka rešenju $u_*\in U_*$, takvom da je $\|u_*\|\leq\|u\|$ za sve $u\in U_*$.

Pre nego što pređemo na dokaz teoreme pokažimo da postoje nizovi α_k, β_k, θ_k, ε_k i δ_k $k\in N$ koji zadovoljavaju uslove (14) - (17). Na primer, možemo uzeti da je $\alpha_k=k^{-1/2}$, $\beta_k=\bar{\beta}$, $\theta_k=\varepsilon_k=k^{-1}$, $\delta_k=k^{-2}/\max\{5+\|\bar{u}\|,\ 3+3\|\bar{u}\|\}$.

D o k a z. Napomenimo da za svaku konveksnu neprekidno - diferencijabilnu funkciju $g(u)$ na skupu U_o važi nejednakost

$$g(v)+\langle g'(v),\ u-v\rangle\leqslant g(u) \text{ za sve } u,\ v\in U_0 \tag{18}$$

Dokažimo da je za svako $k\in N$

$$\bar{u}\in Q_k \text{ i } \bar{g}_k(\bar{u})<0, \tag{19}$$

gde je $\bar{g}_k(u)$ iz (5) a $\bar{u}$ iz (8). Neka je $i\in\{1,\ 2,\ldots,\ m\}$. Iz (10), (11), (17) i (18) dobijamo da je za sve $k\in N$

$$g_{ik}(u_k)+\langle g'_{ik}(u_k),\ \bar{u}-u_k\rangle\leqslant g_i(u_k)+\langle g'_i(u_k),\ \bar{u}-u_k\rangle+$$
$$+g_{ik}(u_k)-g_i(u_k)+\langle g'_{ik}(u_k)-g_i(u_k),\ \bar{u}-u_k\rangle\leqslant g_i(\bar{u})+$$
$$+\delta_k(1+\|u_k\|^2)+\delta_k(1+\|u_k\|)(\|\bar{u}\|+\|u_k\|)<0+\delta_k(1+$$
$$+\|u_k\|^2+\|\bar{u}\|+\|\bar{u}\|(1/2+\|u_k\|^2/2)+1/2+\|u_k\|^2/2+\|u_k\|^2)=$$
$$=\delta_k(3+3\|\bar{u}\|)/2+\delta_k(5+\|\bar{u}\|)\|u_k\|^2/2\leqslant\theta_k(1+\|u_k\|^2).$$

Neka je $i\in\{m+1,\ m+2,\ldots,\ s\}$ a $k\in N$. Iz (12) i (17) dobijamo

$$g_{ik}(\bar{u})=\langle a_{ik},\ \bar{u}\rangle-b_{ik}=g_i(\bar{u})+\langle a_{ik}-a_i,\ \bar{u}\rangle+$$
$$+b_i-b_{ik}\leqslant 0+\delta_k\ \|\bar{u}\|+\delta_k\leqslant 2\,\theta_k/3<\theta_k.$$

Iz (13) i (17) dobijamo da je za svako $k\in N$ $\|A_k\bar{u}-\bar{b}_k\|=$ $=\|A\bar{u}-\bar{b}+(A_k-A)\bar{u}+\bar{b}-\bar{b}_k\|\leqslant 0+\delta_k\|\bar{u}\|+\delta_k\leqslant 2\,\theta_k/3<\theta_k$, odakle sledi da je $\bar{g}_k(\bar{u})<0$. Time smo dokazali (19).

Odredimo nizove vektora v_k i z_k, $k\in N$ iz uslova

$$v_k\in U,\ T_k(v_k)\leqslant T_k(u) \text{ za sve } u\in U, \tag{20}$$

$$z_{k+1}\in Q_k,\ \Phi_k(z_{k+1})\leqslant\Phi_k(u) \text{ za sve } u\in Q_k. \tag{21}$$

Funkcije $T_k(u)$ (3) i $\Phi_k(u)$ (4) su jako konveksne sa konstantama jake konveksnosti α_k i 1/2, a skupovi U i Q_k konveksni i zatvoreni, pa su uslovima (20) i (21) tačke v_k i z_{k+1} određene jednoznačno. Napomenimo da za svaku jako konveksnu neprekidnu funkciju $J(u)$ na konveksnom zatvorenom skupu U Hilbertovog prostora X važi nejednakost

$$\varkappa\|u-u_*\|^2 \leq J(u)-J(u_*) \text{ za sve } u\in U,$$

gde je u_* rešenje problema $J(u)\to\inf,\ u\in U$, a $\varkappa$ konstanta jake konveksnosti, pa iz (6) i (21) sledi da je

$$\|u_{k+1}-z_{k+1}\|^2/2 \leq \Phi_k(u_{k+1})-\Phi_k(z_{k+1}) \leq \varepsilon_k^2/2,$$

odnosno

$$\|u_{k+1}-z_{k+1}\| \leq \varepsilon_k. \tag{22}$$

Za svaku konveksnu neprekidno-diferencijabilnu funkciju U Hilbertovog prostora važi nejednakost

$$\langle J'(u)-J'(v),\ u-v\rangle \geq 0 \text{ za sve } u,\ v\in U. \tag{23}$$

Neka je v_k određeno uslovom (20) a u_* normalno rešenje problema (1). Dokažimo da je

$$\|v_k\| \leq \|u_*\| \text{ za sve } k\in N \text{ i da } \|v_k-u_*\|\to 0 \text{ kada } k\to\infty. \tag{24}$$

Na probleme (1) i (20) primenimo lemu 1.1.1. Dobijamo da je

$$\langle J'(u_*),\ u-u_*\rangle \geq 0 \text{ i } \langle T_k'(v_k),\ u-v_k\rangle = \langle J'(v_k)+2\alpha_k,\ u-v_k\rangle \geq 0$$

za sve $u\in U$. Stavimo u prvu nejednakost $u=v_k$, a u drugu $u=u_*$, pa ih saberimo. Dobijamo da je

$$\langle J'(u_*)-J'(v_k),\ u_*-v_k\rangle + 2\alpha_k\langle v_k,\ v_k-u_*\rangle \leq 0,$$

pa iz (23) sledi da je $\langle v_k,\ v_k-u_*\rangle \leq 0$, odnosno $\|v_k\|^2 \leq$ $\leq \langle v_k,\ u_*\rangle \leq \|v_k\|\cdot\|u_*\|$, odakle dobijamo da je $\|v_k\| \leq \|u_*\|$. Da $\|v_k-u_*\|\to 0$ kada $k\to\infty$ tvrdi teorema 2.1.1.

Kako je $\|u_k-u_*\| \leq \|u_k-v_k\| + \|v_k-u_*\|$ to iz (24) sledi da je za završetak dokaza teoreme dovoljno pokazati da

$$\|u_k-v_k\|\to 0 \text{ kada } k\to\infty.$$

Uvedimo oznaku

$$\omega_k = \|u_k-v_k\|^2.$$

Tada je

$$\omega_{k+1} = \|u_{k+1} - v_{k+1}\|^2 \leqslant (\|z_{k+1} - v_k\| +$$
$$+ \|u_{k+1} - z_{k+1} + v_k - v_{k+1}\|)^2 \leqslant (1 + \alpha_k \beta_k)\|z_{k+1} - v_k\|^2 +$$
$$+ (1 + \alpha_k \beta_k)(\|u_{k+1} - z_{k+1}\| + \|v_k - v_{k+1}\|)^2/(\alpha_k \beta_k). \tag{25}$$

U (22) je ocenjeno $\|u_{k+1} - z_{k+1}\|$. Ocenimo $\|v_k - v_{k+1}\|$. Za jako konveksnu neprekidno - diferencijabilnu funkciju $J(u)$ na konveksnom skupu U Hilbertovog prostora važi nejednakost

$$\langle J'(u) - J'(v),\ u - v\rangle \geqslant 2\varkappa\|u - v\|^2 \text{ za sve } u,v \in U, \tag{26}$$

gde je $\varkappa$ konstanta jake konveksnosti. Primenom nejednakosti (26) na funkciju $T_k(u)$ i leme 1.1.1 na funkcije $T_k(u)$ i $T_{k+1}(u)$ dobijamo

$$2\alpha_k\|v_{k+1} - v_k\|^2 \leqslant \langle T_k'(v_{k+1}) - T_k'(v_k),\ v_{k+1} - v_k\rangle =$$
$$= \langle T_k'(v_{k+1}) - T_{k+1}'(v_{k+1}),\ v_{k+1} - v_k\rangle + \langle T_{k+1}'(v_{k+1}),$$
$$,\ v_{k+1} - v_k\rangle - \langle T_k'(v_k),\ v_{k+1} - v_k\rangle \leqslant 2(\alpha_k - \alpha_{k+1})\cdot$$
$$\cdot\langle v_{k+1},\ v_{k+1} - v_k\rangle \leqslant 2\,|\alpha_k - \alpha_{k+1}|\,\|v_{k+1}\|\,\|v_{k+1} - v_k\|,$$

odakle je s obzirom na (24)

$$\|v_k - v_{k+1}\| \leqslant |\alpha_k - \alpha_{k+1}|\,\|u_*\|/\alpha_k. \tag{27}$$

Ocenimo $\|z_{k+1} - v_k\|$. Na problem (20) primenimo teoremu 2.1.1 saglasno kojoj $\|v_k - u_*\| \to 0$ i $\|T_k'(v_k) - J'(u_*)\| \to 0$ kada $k \to \infty$, pa na osnovu teoreme 1.3.2 i lema 1.1.1 i 1.1.3 postoje

$$c > 0,\ \mu_{ik} \geqslant 0,\ i = \overline{1,s} \text{ i } y_k^* \in Y,\ k \in N, \tag{28}$$

takvi da je za sve $k \in N$

$$\langle T_k'(v_k) + \mu_{1k}g_1'(v_k) + \ldots + \mu_{sk}g_s'(v_k) + A^*y_k^*,\ u - v_k\rangle \geqslant 0,\ u \in U_0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\mu_{ik}g_i(v_k) = 0,\ g_i(v_k) \leqslant 0,\ i = \overline{1,s}, \\ &Av_k - \bar{b} = 0,\ \mu_{ik} \leqslant c,\ i = \overline{1,s} \text{ i } \|y_k^*\| \leqslant c. \end{aligned} \tag{30}$$

Na problem (21) primenimo teoremu 1.1.5. Primetimo samo da su $f_i(u)\leq 0$, $i=\overline{1,m_1}$ i $\bar{g}_k(u)\leq 0$ jedine nelinearne nejednakosti koje određuju skup Q_k i da u tački $u=\bar{u}$ one postaju stroge. Saglasno toj teoremi i lemi 1.1.1 postoje

$$\lambda_{ik+1}\geq 0,\ i=\overline{1,s}\ \text{i}\ \lambda_{k+1}\geq 0,\ k\in N, \tag{31}$$

takvi da je za svako $k\in N$

$$\begin{aligned}&\Big\langle \Phi_k'(z_{k+1})+\lambda_{1k+1}g_{1k}'(u_k)+\ldots+\lambda_{sk+1}g_s'(u_k)+\\&+\lambda_{k+1}\bar{g}_k'(z_{k+1}),\ u-z_{k+1}\Big\rangle\geq 0\ \text{za sve}\ u\in U_0,\end{aligned} \tag{32}$$

$$\lambda_{ik+1}(g_{ik}(u_k)+\langle g_{ik}'(u_k),\ z_{k+1}-u_k\rangle-\theta_k(1+\|u_k\|^2))=0, \tag{33}$$

$$g_{ik}(u_k)+\langle g_{ik}'(u_k),\ z_{k+1}-u_k\rangle\leq\theta_k(1+\|u_k\|^2),\ i=\overline{1,m}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_{ik+1}(\langle a_{ik},\ z_{k+1}\rangle-b_{ik}-\theta_k)=0,\\&\langle a_{ik},\ z_{k+1}\rangle-b_{ik}\leq\theta_k,\ i=\overline{m+1,s},\end{aligned} \tag{35}$$

$$\lambda_{k+1}\bar{g}_k(z_{k+1})=0\ \text{i}\ \bar{g}_k(z_{k+1})\leq 0. \tag{36}$$

Kako je $\Phi_k'(u)=u-u_k+\beta_k t_k'(u_k)$, $g_{ik}'(u)=a_{ik}$, $g_i'(u)=a_i$, $i=\overline{m+1,s}$ i $\bar{g}_k'(u)=2A_k^*(A_k u-\bar{b}_k)$, to stavljajući $u=z_{k+1}$ u (29) a $u=v_k$ u (32), pa sabirajući (32) i (29) pomnoženo sa β_k dobijamo da je

$$\begin{aligned}0\leq&\langle z_{k+1}-u_k,\ v_k-z_{k+1}\rangle+\beta_k\langle T_k'(v_k)-t_k'(u_k),\ z_{k+1}-v_k\rangle+\\&+\beta_k\sum_{i=1}^{m}\mu_{ik}\langle g_i'(v_k),\ z_{k+1}-v_k\rangle+\beta_k\sum_{i=m+1}^{s}\mu_{ik}\langle a_i,\ z_{k+1}-v_k\rangle+\\&+\beta_k\langle y_k^*,\ A(z_{k+1}-v_k)\rangle+\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ik+1}\langle g_{ik}'(u_k),\ v_k-z_{k+1}\rangle+\\&+\sum_{i=m+1}^{s}\lambda_{ik+1}\langle a_{ik},\ v_k-z_{k+1}\rangle+2\lambda_{k+1}\langle A_k z_{k+1}-\bar{b}_k,\ A_k(v_k-z_{k+1})\rangle.\end{aligned} \tag{37}$$

Ocenimo svaki od sabiraka u (37). Na prvi sabirak primenimo kosinusnu teoremu. Dobijamo da je

$$\left\langle z_{k+1}-u_k,\ v_k-z_{k+1}\right\rangle = \|u_k-v_k\|^2/2 - \\ -\|z_{k+1}-u_k\|^2/2-\|z_{k+1}-v_k\|^2/2. \tag{38}$$

Ocenimo drugi sabirak u (37). Iz (9) dobijamo da je

$$\left\langle J'(v_k)-J'(u_k),\ z_{k+1}-v_k\right\rangle \leq \left\langle J'(v_k)-J'(u_k),\ z_{k+1}-u_k\right\rangle - \\ -\left\langle J'(v_k)-J'(u_k),\ v_k-u_k\right\rangle \leq \|J'(v_k)-J'(u_k)\|\ \|z_{k+1}-u_k\| - \\ -\|J'(v_k)-J'(u_k)\|^2/L \leq L\|z_{k+1}-u_k\|^2/4,$$

pa iz (11) i kosinusne teoreme proizilazi ocena

$$\left\langle T_k'(v_k)-t_k'(u_k),\ z_{k+1}-v_k\right\rangle = \left\langle J'(v_k)-J'(u_k),\ z_{k+1}-v_k\right\rangle + \\ +\left\langle J'(u_k)-J_k'(u_k),\ z_{k+1}-v_k\right\rangle + 2\alpha_k\left\langle v_k-u_k,\ z_{k+1}-v_k\right\rangle \leq \\ \leq L\|z_{k+1}-u_k\|^2/4+\delta_k(1+\|u_k\|)\|z_{k+1}-v_k\| + \\ +\alpha_k(\|z_{k+1}-u_k\|^2-\|u_k-v_k\|^2-\|z_{k+1}-v_k\|^2). \tag{39}$$

Iz (24) sledi da je

$$\|u_k\| \leq \|u_*\| + \|v_k-u_k\|. \tag{40}$$

Koristeći nejednakost $ab \leq (a^2+b^2)/2$, (39) i (40) dobijamo

$$\beta_k\left\langle T_k'(v_k)-t_k'(u_k),\ z_{k+1}-v_k\right\rangle \leq \\ \beta_k(L/4+\alpha_k)\|z_{k+1}-u_k\|^2-\beta_k(\alpha_k-\delta_k)\|z_{k+1}-v_k\|^2 - \\ -\beta_k(\alpha_k-\delta_k/2)\|u_k-v_k\|^2+C_1\beta_k\delta_k. \tag{41}$$

Ovde i niže sa C_i, $i\in N$ označavaćemo pozitivne konstante koje ne zavise od k, pri čemu isto označene konstante u dvema različitim formulama ne moraju imati iste vrednosti.

Ocenimo treći sabirak u (37). Ako je funkcija $g_i(u)$ neprekidno - diferencijabilna na konveksnom skupu U_o i ako zadovoljava uslov (9), onda za sve $u,v \in U_o$ važi nejednakost

$$\left\| g_i(u) - g_i(v) - \langle g_i'(v),\ u - v \rangle \right\| \leq L \|u - v\|^2/2. \tag{42}$$

Iz (10), (11), (21), (34), (40) i (42) sledi da je za sve $i=\overline{1,m}$

$$g_i(z_{k+1}) \leq g_i(u_k) + \langle g_i'(u_k),\ z_{k+1} - u_k \rangle + L\|z_{k+1} - u_k\|^2/2 =$$
$$= g_{ik}(u_k) + \langle g_{ik}'(u_k),\ z_{k+1} - u_k \rangle + g_i(u_k) - g_{ik}(u_k) +$$
$$+ \langle g_i'(u_k) - g_{ik}'(u_k),\ z_{k+1} - u_k \rangle + L\|z_{k+1} - u_k\|^2/2 \leq$$
$$\leq \theta_k(1 + \|u_k\|^2) + \delta_k(1 + \|u_k\|^2) + \delta_k(1 + \|u_k\|) \cdot$$
$$\cdot \|z_{k+1} - u_k\| + L\|z_{k+1} - u_k\|^2/2 \leq (\delta_k + L/2)\|z_{k+1} - u_k\|^2 +$$
$$+ c_1(\delta_k + \theta_k)\|u_k - v_k\|^2 + c_2(\delta_k + \theta_k).$$

Odavde i iz (14), (18), (28) i (30) dobijamo da je

$$\beta_k \sum_{i=1}^{m} \mu_{ik} \langle g_i'(v_k),\ z_{k+1} - v_k \rangle = \beta_k \sum_{i=1}^{m} \mu_{ik} (g_i(v_k) +$$
$$+ \langle g_i'(v_k),\ z_{k+1} - v_k \rangle) \leq \beta_k \sum_{i=1}^{m} \mu_{ik} g_i(z_{k+1}) \leq \beta_k mc(\delta_k + L/2) \cdot$$
$$\cdot \|z_{k+1} - u_k\|^2 + \beta_k c_1(\delta_k + \theta_k)\|u_k - v_k\|^2 + \beta_k c_2(\delta_k + \theta_k), \tag{43}$$

gde je c iz (30).

Ocenimo četvrti sabirak u (37). Iz (12), (21), (24), (28) i (30) sledi da je za sve $i = \overline{m+1,s}$

$$\mu_{ik}\langle a_i,\ z_{k+1} - v_k \rangle = \mu_{ik}(\langle a_i,\ z_{k+1} \rangle - b_i) = \mu_{ik}(\langle a_{ik},\ z_{k+1} \rangle -$$
$$- b_{ik}) + \mu_{ik}(\langle a_i - a_{ik},\ z_{k+1} - v_k + v_k \rangle + b_{ik} - b_i) \leq c\,\theta_k + c\,\delta_k \cdot$$
$$\cdot \|z_{k+1} - v_k\| + c\,\delta_k\|u_k\| + c\,\delta_k \leq c_1\,\delta_k\|z_{k+1} - v_k\|^2 + c_2(\delta_k + \theta_k),$$

pa je

$$\beta_k \sum_{i=m+1}^{s} \mu_{ik}\langle a_i, z_{k+1} - v_k\rangle \leq \beta_k c_1(\theta_k + \delta_k + \delta_k\|z_{k+1} - v_k\|^2). \tag{44}$$

Ocenimo peti sabirak u (37). Iz (13), (20), (21), (24) i (30) sledi da je

$$\beta_k\langle y_k^*, A(z_{k+1} - v_k)\rangle = \beta_k\langle y_k^*, Az_{k+1} - \bar{b}\rangle = \beta_k\langle y_k^*,$$

$$, A_k z_{k+1} - \bar{b}_k\rangle + \beta_k\langle y_k^*, (A - A_k)(z_{k+1} - v_k + v_k) +$$

$$+ \bar{b}_k - \bar{b}\rangle \leq \beta_k c\, \theta_k + \beta_k c\, \delta_k\|z_{k+1} - v_k\| + \beta_k c\, \delta_k\|v_k\| +$$

$$+ \beta_k c\, \delta_k \leq \beta_k c_1(\theta_k + \delta_k) + \beta_k c_2\, \delta_k\|z_{k+1} - v_k\|^2. \tag{45}$$

Ocenimo šesti sabirak u (37). Iz (10), (11), (18), (20), (24), (31) i (33) dobijamo da je

$$\lambda_{ik+1}\langle g_{ik}'(u_k), v_k - z_{k+1}\rangle = \lambda_{ik+1}(g_{ik}(u_k) +$$

$$+ \langle g_{ik}'(u_k), v_k - u_k\rangle - g_{ik}(u_k) - \langle g_{ik}'(u_k), z_{k+1} -$$

$$- u_k\rangle) \leq \lambda_{ik+1}(g_i(u_k) + \langle g_i'(u_k), v_k - u_k\rangle + g_{ik}(u_k) -$$

$$- g_i(u_k) + \langle g_{ik}'(u_k) - g_i'(u_k), v_k - u_k\rangle - \theta_k(1 +$$

$$+ \|u_k\|^2)) \leq \lambda_{ik+1}(0 + \delta_k(1 + \|u_k\|^2) + \delta_k(1 + \|u_k\|)\cdot$$

$$\cdot(\|v_k\| + \|u_k\|) - \theta_k(1 + \|u_k\|^2)) \leq \lambda_{ik+1}(\delta_k(3 +$$

$$+ 3\|u_*\|)/2 + \delta_k(5 + \|u_*\|)\|u_k\|^2/2 - \theta_k(1 + \|u_k\|^2)) \leq 0$$

za sve $i = \overline{1,m}$ i dovoljno veliko $k \in N$, jer $\delta_k/\theta_k \to 0$ kada $k \to \infty$, tako da je za dovoljno veliko $k \in N$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ik+1} \langle g_{ik}'(u_k), v_k - z_{k+1}\rangle \leq 0. \tag{46}$$

Ocenimo sedmi sabirak u (37). Iz (12), (16), (20), (24), (31) i (35) dobijamo da je za sve $i=\overline{m+1,s}$ i dovoljno veliko $k \in N$

$$\lambda_{ik+1}\langle a_{ik}, v_k - z_{k+1}\rangle = \lambda_{ik+1}(\langle a_{ik}, v_k\rangle - b_{ik} -$$

$$-(\langle a_{ik}, z_{k+1}\rangle - b_{ik})) = \lambda_{ik+1}(\langle a_i, v_k\rangle - b_i +$$

$$+\langle a_{ik} - a_i, v_k\rangle + b_i - b_{ik} - \theta_k) \leq \lambda_{ik+1}(0+$$

$$+\delta_k\|v_k\| + \delta_k - \theta_k) \leq \lambda_{ik+1}(\delta_k(1+\|u_*\|) - \theta_k) \leq 0,$$

tako da je

$$\sum_{i=m+1}^{s} \lambda_{ik+1}\langle a_{ik}, v_k - z_{k+1}\rangle \leq 0 \text{ za dovoljno veliko } k \in N. \tag{47}$$

Na kraju, ocenimo osmi sabirak u (37). Iz (36) sledi da je $\lambda_{k+1} = 0$ ili $\bar{g}_k(z_{k+1}) = \|A_k z_{k+1} - \bar{b}_k\|^2 - \theta_k^2 = 0$, odnosno

$$\|A_k z_{k+1} - \bar{b}_k\| = \theta_k.$$

U prvom slučaju je osmi sabirak jednak nuli, a u drugom iz (13), (16), (20), (24) i poslednje jednakosti dobijamo da je za dovoljno veliko $k \in N$

$$\langle A_k z_{k+1} - \bar{b}_k, A_k(v_k - z_{k+1})\rangle = \langle A_k z_{k+1} - \bar{b}_k, A_k v_k - \bar{b}_k\rangle +$$

$$+\langle A_k z_{k+1} - \bar{b}_k, \bar{b}_k - A_k z_{k+1}\rangle \leq \|A_k z_{k+1} - \bar{b}_k\|\|A_k v_k - \bar{b}_k\| -$$

$$-\|A_k z_{k+1} - \bar{b}_k\|^2 = \theta_k(\|Av_k - \bar{b} + (A_k - A)v_k + \bar{b} - \bar{b}_k\| - \theta_k) \leq$$

$$\leq \theta_k(0 + \delta_k\|v_k\| + \delta_k - \theta_k) \leq \theta_k(\delta_k(1+\|u_*\|) - \theta_k) \leq 0.$$

Kako je $\lambda_{k+1} \geq 0$, to je u oba slučaja za dovoljno veliko $k \in N$

$$2\lambda_{k+1}\langle A_k z_{k+1} - \bar{b}_k, A_k(v_k - z_{k+1})\rangle \leq 0. \tag{48}$$

Zamenjujući ocene (38), (41) i (43) - (48) u (37) dobijamo da je za dovoljno veliko $k \in N$

$$0 \leq \|u_k - v_k\|^2 \left[1 - 2\alpha_k \beta_k + \beta_k c_1(\delta_k + \theta_k)\right] -$$

$$- \|z_{k+1} - u_k\|^2 \left[1 - \beta_k(L + 4\alpha_k + 2mcL + 4mc\,\delta_k)/2\right] -$$

$$- \|z_{k+1} - v_k\|^2 \left[1 + 2\alpha_k \beta_k - c_2 \beta_k \delta_k\right] +$$

$$+ c_3 \beta_k(\delta_k + \theta_k). \tag{49}$$

Iz (14) sledi da je $\beta_k \leq 2/(L + 2mcL + 4\alpha_k + 4mc\,\delta_k)$, odnosno da je

$$1 - \beta_k(L + 4\alpha_k + 2mcL + 4mc\,\delta_k)/2 \geq 0, \tag{50}$$

a iz (16) da je

$$1 + 2\alpha_k \beta_k - c_2 \beta_k \delta_k = 1 + \alpha_k \beta_k(2 - c_2(\delta_k/\theta_k)(\theta_k/\alpha_k)) \geq 1 \tag{51}$$

za dovoljno veliko $k \in N$. Zamenjujući ocene (50) i (51) u (49) dobijamo da je

$$\|z_{k+1} - v_k\|^2 \leq \|u_k - v_k\|^2 \left[1 - 2\alpha_k \beta_k + c_1 \beta_k(\theta_k + \delta_k)\right] +$$

$$+ c_2 \beta_k(\theta_k + \delta_k),$$

a zamenjujući tu ocenu, (22) i (27) u (25)

$$\omega_{k+1} \leq \omega_k(1 - s_k) + d_k \text{ za dovoljno veliko } k \in N, \tag{52}$$

gde je

$$s_k = \alpha_k \beta_k(1 + 2\alpha_k \beta_k - c_1(\theta_k + \delta_k)/\alpha_k), \text{ a}$$

$$d_k = \alpha_k \beta_k(1 + \alpha_k \beta_k)\left[c_2(\theta_k + \delta_k)/\alpha_k +\right.$$

$$\left. + (\varepsilon_k/(\alpha_k \beta_k) + \|u_k\| \cdot |\alpha_k - \alpha_{k+1}|/(\alpha_k^2 \beta_k))^2\right].$$

Iz (16) sledi da je $\lim_{k \to \infty} d_k / s_k = 0$, a iz (15) $\sum_{k=k_0}^{\infty} s_k = +\infty$, gde je k_0 toliko veliki prirodan broj da je ispunjeno (52) i da je $0 < s_k \leq 1$ za $k \geq k_0$. Na osnovu leme 2.1.1 sledi da $\omega_k \to 0$, odnosno $\|u_k - v_k\| \to 0$ kada $k \to \infty$. Teorema je dokazana.

U slučaju kada je U_0 poliedar iz R^n a $Y = R^r$, jednakost $Au = \bar{b}$ je ekvivalentna sa $2r$ linearnih nejednakosti, tako da u određivanju skupa Q_k (5) ne mora učestvovati nejednakost $\bar{g}_k(u) \leq 0$. Tada (4) - (6) predstavlja problem kvadratnog programiranja.

Neka u određivanju skupa U (1) učestvuju samo konveksne neprekidno - diferencijabilne funkcije pri čemu je ispunjen Sleterov uslov, i neka je U_0 proizvoljan zatvoren konveksan skup Hilbertovog prostora X. Tada su svi nizovi Lagranževih množitelja iz Kun - Takerove teoreme primenjene na problem minimizacije funkcije Tihonova ograničeni (početak dokaza teoreme 1.3.1), tako da se u formulaciji teoreme 2.2.1,umesto (7), za U_0 može uzeti proizvoljan konveksan zatvoren skup iz X. Specijalno, ako je $U = U_0$, onda metod (4) - (6) prelazi u regularizovani metod projekcije gradijenata. Pri tome je $Q_k = U$, a minimum funkcije $\Phi_k(u)$ na skupu U dostiže se u projekciji tačke $u_k - \vartheta_k t_k'(u_k)$ na skup U, koju ćemo označiti sa $P_U(u_k - \vartheta_k t_k'(u_k))$. U dokazu teoreme 2.2.1 uslov (6) direktno se koristi samo u dokazu nejednakosti (22). Iz svega rečenog, može se zaključiti da za regularizovani metod projekcije gradijenata važi sledeća teorema.

T e o r e m a 2.2.2. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:
1^0 U je konveksan i zatvoren skup Hilbertovog prostora X, J(u) je konveksna neprekidno - diferencijabilna funkcija na U, takva da je za sve $u, v \in U$

$$\|J'(u) - J'(v)\|^2 \leq L \langle J'(u) - J'(v),\ u - v \rangle,$$

ispunjeni su uslovi (2);

2° približna vrednost $J_k'(u)$ gradijenta $J'(u)$ zadovoljava uslov

$$\|J'(u) - J_k'(u)\| \leq \delta_k(1 + \|u\|) \text{ za sve } u \in U;$$

3° u_* je normalno rešenje problema $J(u) \to \inf$, $u \in U$;

4° nizovi α_k, β_k, ε_k i δ_k, $k \in N$ su takvi da je

$$\alpha_k > 0,\ 0 < \beta_k \leq \bar{\beta} < 2/L,\ \varepsilon_k \geq 0,\ \delta_k \geq 0,$$

$$\lim_{k \to \infty} (\alpha_k + \delta_k + \varepsilon_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k = \infty \text{ i}$$

$$\lim_{k \to \infty} (\varepsilon_k/(\alpha_k \beta_k) + \delta_k/\alpha_k + |\alpha_k - \alpha_{k+1}|/(\alpha_k^2 \beta_k)) = 0;$$

5° niz u_k, $k \in N$ određen je na sledeći način. Neka je $u_1 \in U$. Ako je $u_k \in U$ poznato, onda se $u_{k+1} \in U$ određuje iz uslova

$$\|u_{k+1} - P_U(u_k - \beta_k t_k'(u_k))\| \leq \varepsilon_k, \text{ gde je } t_k'(u) = J_k'(u) + 2\alpha_k u.$$

Tada je
$$\lim_{k \to \infty} \|u_k - u_*\| = 0.$$

P r i m e r. Neka su u primerima iz §1.1 i §1.3 umesto matrica $B(t)$, $D(t)$ i $f(t)$, i tačaka z i x_o poznate samo njihove približne vrednosti: $B_k(t)$, $D_k(t)$ i $f_k(t)$, matrice čiji su elementi deo po deo neprekidne funkcije, i tačke z_k i x_{ok}. Neka je pri tome za sve $k \in N$

$$B_{km} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|B(t) - B_k(t)\| \leq \delta_k/(2T^2 + 2)^{1/2}, \tag{53}$$

$$D_{km} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|D(t) - D_k(t)\| \leq \delta_k/(2T^2 + 2)^{1/2}, \tag{54}$$

$$f_{km} = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - f_k(t)| \leq \delta_k \min\{1,\ 1/2T\}/(2T)^{1/2} \tag{55}$$

$$\|z_k - z\|_{R^n} \leq \delta_k/2M \text{ i } \|x_{ok} - x_o\|_{R^n} \leq \delta_k/(8T)^{1/2} \tag{56}$$

gde je $M = \max\{T^{1/2},\ T^{-1/2}\}$. Uvedimo oznake

$$J_k(u) = \left|x(T) - z_k\right|^2_{R^n}, \quad \bar{b}_k(t) = x_{ok} + \int_0^t f_k(\tau)d\tau,$$

$$A_k u(t) = x(t) - \int_0^t (B_k(\tau)x(\tau) + D_k(\tau)v(\tau))d\tau.$$

Pokažimo da su $J'_k(u)$, A_k i $\bar{b}_k$ približne vrednosti gradijenta $J'(u)$, matrice A i vektora $\bar{b}$, koje zadovoljavaju uslove (11) i (13). Na isti način kao i u dokazu jednakosti (1.1.17) može se dokazati da je funkcija $J_k(u)$ neprekidno - diferencijabilna na X i da je za sve $u,h \in X$

$$\left\langle J'_k(u),\ h\right\rangle_X = 2\left\langle x(T) - z_k,\ h_x(T)\right\rangle_{R^n}.$$

Oduzimajući poslednju jednakost od (1.1.7) dobijamo da je

$$\left\langle J'(u) - J'_k(u),\ h\right\rangle_X = 2\left\langle z_k - z,\ h_x(T)\right\rangle_{R^n} \leq$$

$$\leq 2\left|z_k - z\right|_{R^n}\left|h_x(T)\right|_{R^n} \leq 2(\delta_k / 2M)M\|h\|_X \leq \delta_k\|h\|_X,$$

za sve $h \in X$, odakle sledi da je

$$\left\|J'(u) - J'_k(u)\right\|_X \leq \delta_k \leq \delta_k(1 + \|u\|)$$

za sve $u \in X$. Na isti način kao i za operator A može se dokazati da je A_k ograničeni linearni operator koji preslikava X u H^1_n. Neka je $y_k = (A - A_k)u \in H^1_n$. Tada je

$$\left|y_k(t)\right|_{R^n} = \left|\int_0^t ((B_k(\tau) - B(\tau))x(\tau) + (D_k(\tau) - D(\tau))v(\tau))d\tau\right| \leq$$

$$\leq B_{km}\int_0^T |x(t)|\,dt + D_{km}\int_0^T |v(t)|dt \leq B_{km}T^{1/2}\|x\|_{L^n_2} + D_{km}T^{1/2}\|v\|_{L^r_2},$$

odnosno

$$\left|y_k(t)\right|^2_{R^n} \leq 2B^2_{km}T\|x\|^2_{L^n_2} + 2D^2_{km}T\|v\|^2_{L^r_2}. \tag{57}$$

Takođe je

$$\left|\dot{y}_k(t)\right|_{R^n} = \left|(B_k(t) - B(t))x(t) + (D_k(t) - D(t))v(t)\right| \leq$$

$$\leq B_{km}\left|x(t)\right| + D_{km}\left|v(t)\right|,$$

odnosno

$$|\dot{y}_k(t)|^2_{R^n} \leqslant 2B^2_{km}|x(t)|^2 + 2D^2_{km}|v(t)|^2. \tag{58}$$

Iz (53) i (54) sledi da je

$$\|(A - A_k)u\|^2_{H^1_n} = \int_0^T (|y_k(t)|^2_{R^n} + |\dot{y}_k(t)|^2_{R^n})dt = \int_0^T (2B^2_{km}T\|x\|^2_{L^n_2} +$$

$$+ 2D^2_{km}T\|v\|^2_{L^r_2} + 2B^2_{km}|x(t)|^2_{R^n} + 2D^2_{km}|v(t)|^2_{R^r})dt \leqslant 2B^2_{km}(T^2+1)\|x\|^2_{L^n_2} +$$

$$+ 2D^2_{km}(T^2+1)\|v\|^2_{L^r_2} \leqslant \delta^2_k(\|x\|^2_{L^n_2} + \|v\|^2_{L^r_2}) \leqslant \delta^2_k\|u\|^2_X ,$$

odakle je

$$\|A - A_k\| \leqslant \delta_k.$$

Kako je

$$|\bar{b}(t) - \bar{b}_k(t)|_{R^n} = |x_o - x_{ok} + \int_0^t (f(\tau) - f_k(\tau))d\tau|_{R^n} \leqslant$$

$$\leqslant |x_o - x_{ok}|_{R^n} + \int_0^T |f(t) - f_k(t)|dt \leqslant |x_o - x_{ok}|_{R^n} + f_{km}T$$

i

$$|\dot{\bar{b}}(t) - \dot{\bar{b}}_k(t)|_{R^n} = |f(t) - f_k(t)| \leqslant f_{km},$$

to je

$$\|\bar{b} - \bar{b}_k\|^2_{H^1_n} = \int_0^T (|\bar{b}(t) - \bar{b}_k(t)|^2 + |\dot{\bar{b}}(t) - \dot{\bar{b}}_k(t)|^2)dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T ((f_{km}T + |x_o - x_{ok}|)^2 + f^2_{km})dt \leqslant$$

$$\leqslant T(T\delta_k/(2T)^{3/2} + \delta_k/(8T)^{1/2})^2 + T\delta^2_k/2T = \delta^2_k ,$$

odakle je

$$\|\bar{b} - \bar{b}_k\|_{H^1_n} \leqslant \delta_k .$$

Time je dokazano da približne vrednosti $J'_k(u)$, A_k i $\bar{b}_k$ zadovoljavaju peti uslov teoreme 2.2.1. Pretpostavimo da skupovi U_o i U zadovoljavaju prvi i treći, a nizovi α_k, ∂_k, θ_k, ε_k i δ_k, $k \in N$ šesti uslov teoreme 2.2.1, da je skup V (1.1.12) ograničen u L^r_2 i da je skup $AKerD$ (D je operator koji učestvuje u određivanju skupa U_o (7), a ne matrica $D(t)$ (1.1.10)) zatvoren u H^1_n. Sa već dokazanim, u primerima iz §1.1 i §1.3, tada su ispunjeni svi uslovi teoreme 2.2.1, pa niz u_k, $k \in N$, određen procesom (4) - (6), konvergira ka normalnom rešenju problema (1.1.9) - (1.1.12).

§3. Regularizacija metoda linearizacije sa formiranjem kaznene funkcije od nekih ograničenja.

Razmotrimo sledeći problem minimizacije

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U' = \left\{ u \in U:\ f_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,r},\ F(u) = 0 \right\},$$
$$U = \left\{ u \in U_0:\ g_i(u) \leq 0,\ i = \overline{1,m} \right\}, \tag{1}$$

gde je U_0 zadan skup Hilbertovog prostora X, gde su funkcije $J(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$ i $f_i(u)$, $i = \overline{1,r}$ definisane na U_0, pri čemu su $J(u)$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$ neprekidno - diferencijabilne i gde je $F(u)$ operator koji preslikava U_0 u Banahov prostor Y. Pretpostavimo da je

$$J_* = \inf_{U'} J(u) > -\infty \quad \text{i} \quad U_* = \left\{ u \in U':\ J(u) = J_* \right\} \neq \emptyset. \tag{2}$$

Označimo sa

$$P(u) = \sum_{i=1}^{r} \left(\max\left\{0,\ f_i(u)\right\}\right)^p + \|F(u)\|^p, \quad p > 1$$

i pretpostavimo da je $P(u)$ neprekidno - diferencijabilna funkcija na U_0. Uvedimo funkciju Tihonova

$$T_k(u) = J(u) + A_k P(u) + \alpha_k \|u\|^2\ , \tag{3}$$

gde su α_k i A_k^{-1} pozitivni nula - nizovi. Neka su umesto tačnih vrednosti funkcija $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$ i gradijenata $J'(u)$, $P'(u)$ i $g_i'(u)$, $i = \overline{1,m}$ poznate samo njihove približne vrednosti $g_{ik}(u)$, $J_k'(u)$, $P_k'(u)$ i $g_{ik}'(u)$, $i = \overline{1,m}$, $k \in N$. Tada za približnu vrednost gradijenta $T_k'(u) = J'(u) + A_k P'(u) + 2\alpha_k u$ uzmimo

$$t'_k(u) = J'_k(u) + A_k P'_k(u) + 2\alpha_k u.$$

Formirajmo niz u_k, $k \in N$ na sledeći način. Neka je $u_1 \in U_0$. Pretpostavimo da je poznato $u_k \in U_0$, za neko $k \in N$. Uvedimo funkciju

$$\phi_k(u) = \|u - u_k\|^2/2 + \beta_k \langle t'_k(u_k),\ u - u_k \rangle,\quad \beta_k > 0 \tag{4}$$

i skup

$$Q_k = \{u \in U_0:\ g_{ik}(u_k) + \langle g'_{ik}(u_k),\ u - u_k \rangle \leq$$
$$\leq \theta_k(1 + \|u_k\|^2),\ i = \overline{1,m}\},\quad \theta_k \geq 0. \tag{5}$$

Pretpostavimo da je $Q_k \neq \phi$ i odredimo u_{k+1} iz uslova

$$u_{k+1} \in Q_k,\quad \phi_k(u_{k+1}) \leq \inf_{Q_k} \phi_k(u) + \varepsilon_k^2/2,\quad \varepsilon_k \geq 0. \tag{6}$$

T e o r e m a 2.3.1. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1° U_0 je konveksan i zatvoren skup Hilbertovog prostora X, $F(u)$ je operator koji preslikava U_0 u Banahov prostor Y, $J(u)$, $P(u)$ i $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}$ su konveksne neprekidno-diferencijabilne, a $\|F(u)\|$ i $f_i(u)$, $i = \overline{1,r}$ konveksne neprekidne funkcije na U_0, skupovi U i U' su definisani u (1), ispunjeni su uslovi (2);

2° postoje $u' \in U'$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,r}$ i $y^* \in Y^*$, takvi da je

$$\lambda_i f_i(u') = 0,\ i = \overline{1,r} \text{ i } L(u') \leq L(u) \text{ za sve } u \in U,$$

gde je

$$L(u) = J(u) + \lambda_1 f_1(u) + \ldots + \lambda_r f_r(u) + \langle y^*,\ F(u) \rangle;$$

3° postoji $\bar{u} \in U'$ takvo da je $g_i(\bar{u}) < 0$, $i = \overline{1,m}$;

4° postoji $L > 0$ takvo da je za sve $u, v \in U_0$

$$\|J'(u) - J'(v)\|^2 \leq L \langle J'(u) - J'(v),\ u - v \rangle,$$

$$\|P'(u) - P'(v)\|^2 \leq L \langle P'(u) - P'(v),\ u - v \rangle, \tag{7}$$

$$\|g'_i(u) - g'_i(v)\| \leq L \|u - v\|,\ i = \overline{1,m};$$

5^0 približne vrednosti $g_{ik}(u)$, $J'_k(u)$, $P'_k(u)$ i $g'_{ik}(u)$ funkcija $g_i(u)$, $i=\overline{1,m}$ i gradijenata $J'(u)$, $P'(u)$ i $g'_i(u)$, $i=\overline{1,m}$ su takve da je za sve $k\in N$ i $u\in U_o$

$$|g_i(u)-g_{ik}(u)|\leqslant \delta_k(1+\|u\|^2),\ i=\overline{1,m}\ ,$$

$$\max\left\{\|J'(u)-J'_k(u)\|,\ \|P'(u)-P'_k(u)\|\right\}\leqslant \delta_k(1+\|u\|)$$

i

$$\|g'_i(u)-g'_{ik}(u)\|\leqslant \delta_k(1+\|u\|),\ i=\overline{1,m}\ ;$$

6^0 nizovi α_k, β_k, θ_k, ε_k, δ_k i A_k, $k\in N$ zadovoljavaju uslove

$$\alpha_k>0,\ \beta_k>0,\ \theta_k>0,\ \varepsilon_k\geqslant 0,\ \delta_k\geqslant 0,\ A_k>0,$$

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k+\beta_k+\theta_k+\varepsilon_k+\delta_k+A_k^{-1})=0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k=+\infty\ ,$$

$$\lim_{k\to\infty}(\delta_k/\theta_k+\varepsilon_k/(\alpha_k\beta_k)+\theta_k/\alpha_k+\alpha_k^{-1}A_k^{1-q}+\delta_kA_k/\alpha_k+$$

$$+\beta_kA_k+|\alpha_k-\alpha_{k+1}|/(\alpha_k^2\beta_k)+|A_k-A_{k+1}|/(\alpha_k^2\beta_k))=0$$

i

$$\delta_k\max\left\{5+\|\bar u\|,\ 3+3\|\bar u\|\right\}\leqslant 2\theta_k,$$

gde je $\bar u$ iz trećeg uslova teoreme, a $q=p/(p-1)$.

Tada je $Q_k\neq\emptyset$ za sve $k\in N$, a niz vektora u_k, $k\in N$, određen procesom (4) - (6) konvergira ka rešenju u_* problema (1), koje ima najmanju normu.

Pre nego što pređemo na dokaz teoreme pokažimo da postoje nizovi α_k, β_k, θ_k, ε_k, δ_k i A_k, $k\in N$, koji zadovoljavaju šesti uslov teoreme. Na primer, možemo uzeti da je

$$\alpha_k=k^{(1-q)/(5q)},\ \beta_k=k^{-1/(3q)},\ \theta_k=k^{-1/5},\ \varepsilon_k=k^{-1/3},$$

$$A_k=k^{1/(4q)}\ \text{ i }\ \delta_k=(k^{-1/3})/\max\left\{5+\|\bar u\|,\ 3+3\|\bar u\|\right\}.$$

D o k a z. Kao i u dokazu teoreme 2.2.1, može sa pokazati da je za sve $i = \overline{1,m}$ i $k \in N$

$$g_{ik}(u_k) + \langle g'_{ik}(u_k),\ \bar{u} - u_k \rangle < \theta_k(1 + \|u_k\|^2),$$

odnosno da je $Q_k \neq \emptyset$ i da je zadovoljen Sleterov uslov. Odredimo nizove v_k i z_k, $k \in N$ iz uslova

$$v_k \in U,\ T_k(v_k) \leq T_k(u) \text{ za sve } u \in U \tag{8}$$

i

$$z_{k+1} \in Q_k,\quad \phi_k(z_{k+1}) \leq \phi_k(u) \text{ za sve } u \in Q_k. \tag{9}$$

Funkcije $T_k(u)$ i $\phi_k(u)$ su neprekidne i jako konveksne sa konstantama jake konveksnosti α_k i $1/2$, a skupovi U i Q_k konveksni i zatvoreni, pa su uslovima (8) i (9) tačke v_k i z_{k+1} određene jednoznačno. Na osnovu teoreme 2.1.2 je

$$\lim_{k \to \infty} \|v_k - u_*\| = 0, \tag{10}$$

pa je za sve $k \in N$

$$\|v_k\| \leq \|v_k - u_*\| + \|u_*\| \leq C_1. \tag{11}$$

I ovde ćemo sa C_i, $i \in N$ označavati pozitivne konstante koje ne zavise od k, pri čemu isto označene konstante u dvema različitim formulama ne moraju imati iste vrednosti. U dokazu teoreme 2.2.1 pokazano je da je

$$\|u_{k+1} - z_{k+1}\| \leq \varepsilon_k. \tag{12}$$

Kako je $\|u_k - u_*\| \leq \|u_k - v_k\| + \|v_k - u_*\|$ to iz (10) sledi da je za završetak dokaza teoreme dovoljno pokazati da $\|u_k - v_k\| \to 0$ kada $k \to \infty$.

Uvedimo oznaku $\omega_k = \|u_k - v_k\|^2$. Tada je (formula 2.25)

$$\omega_{k+1} = \|u_{k+1} - v_{k+1}\|^2 \leq (1 + \alpha_k \beta_k)\|z_{k+1} - v_k\|^2 +$$

$$+ (1 + \alpha_k \beta_k)(\|u_{k+1} - z_{k+1}\| + \|v_k - v_{k+1}\|)^2/(\alpha_k \beta_k). \tag{13}$$

u (12) je ocenjeno $\|u_{k+1} - z_{k+1}\|$. Ocenimo $\|v_k - v_{k+1}\|$. U dokazu nejednakosti (2.27) je pokazano da je

$$2\alpha_k\|v_{k+1} - v_k\|^2 \leq \left\langle T_k'(v_{k+1}) - T_{k+1}'(v_{k+1}),\ v_{k+1} - v_k\right\rangle.$$

Zamenjujući funkciju $T_k(u)$ iz (3) u poslednju nejednakost dobijamo da je

$$2\alpha_k\|v_{k+1} - v_k\|^2 \leq (A_k - A_{k+1})\left\langle P'(v_{k+1}),\ v_{k+1} - v_k\right\rangle +$$

$$+ (\alpha_k - \alpha_{k+1})\left\langle v_{k+1},\ v_{k+1} - v_k\right\rangle \leq (|A_k - A_{k+1}|\cdot$$

$$\cdot\|P'(v_{k+1})\| + |\alpha_k - \alpha_{k+1}|\cdot\|v_{k+1}\|)\|v_{k+1} - v_k\|. \tag{14}$$

Iz (7) sledi da je $\|P'(u) - P'(v)\| \leq L\|u - v\|$ za sve $u, v \in U_0$, pa iz (10) dobijamo da je

$$\|P'(v_{k+1})\| \leq \|P'(v_{k+1}) - P'(u_*)\| +$$

$$+\|P'(u_*)\| \leq L\|v_{k+1} - u_*\| + \|P'(u_*)\| \leq C_1.$$

Zamenjujući poslednju ocenu i (11) u (14) dobijamo da je

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq C_1(|A_k - A_{k+1}| + |\alpha_k - \alpha_{k+1}|)/2\alpha_k. \tag{15}$$

Ocenimo $\|z_{k+1} - v_k\|^2$. Na probleme (8) i (9) primenimo teoremu 1.1.1 i lemu 1.1.1, pa transformišimo dobijene nejednakosti na isti način kao i pri dokazu formule (2.27). Dobijamo da je

$$0 \leq \left\langle z_{k+1} - u_k,\ v_k - z_{k+1}\right\rangle + \beta_k\left\langle T_k'(v_k) - t_k'(u_k),\ z_{k+1} - v_k\right\rangle +$$

$$+ \beta_k\sum_{i=1}^{m}\mu_{ik}\left\langle g_i'(v_k),\ z_{k+1}-v_k\right\rangle + \sum_{i=1}^{m}\lambda_{ik+1}\left\langle g_{ik}'(u_k),\ v_k-z_{k+1}\right\rangle. \tag{16}$$

Pri tome je $\mu_{ik} \geq 0$ i $\lambda_{ik+1} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Dokažimo da postoji $c > 0$, takvo da je $\mu_{ik} \leq c$, $i = \overline{1,m}$, $k \in N$. Primenom teoreme 1.1.1 na problem (8) dobijamo da postoje Lagranževi množitelji

$\mu_{ik} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ takvi da je za sve $u \in U_0$

$$J(v_k) + A_k P(v_k) + \alpha_k \|v_k\|^2 \leq J(u) + A_k P(u) + $$
$$+ \alpha_k \|u\|^2 + \mu_{1k} g_1(u) + \ldots + \mu_{mk} g_m(u).$$

Stavljajući $u = \bar{u}$ u poslednju nejednakost i koristeći treći uslov teoreme, iz koga sledi da je $P(\bar{u}) = 0$, dobijamo da je

$$J(v_k) + A_k P(v_k) + \alpha_k \|v_k\|^2 \leq J(\bar{u}) + \alpha_k \|\bar{u}\|^2 + \mu_{jk} g_j(\bar{u}),$$

za svako $j = \overline{1,m}$, odnosno da je

$$\mu_{jk} \leq (J(\bar{u}) - J(v_k) + \alpha_k \|\bar{u}\|^2 - \alpha_k \|v_k\|^2) / |g_j(\bar{u})| .$$

Niz na desnoj strani poslednje nejednakosti konvergira broju $(J(\bar{u}) - J(u_*))/|g_j(\bar{u})|$, pa je niz μ_{jk}, $k \in N$ ograničen za sve $j = \overline{1,m}$.

Prvi, treći i četvrti sabirak u (16) ocenjuje se formulama (2.37), (2.43) i (2.46). Ocenimo drugi sabirak u (16). Ako $T_k'(v_k)$ i $t_k'(u_k)$ napišemo u razvijenom obliku, onda on postaje

$$\beta_k \langle T_k'(v_k) - t_k'(u_k), z_{k+1} - v_k \rangle = \beta_k \langle J'(v_k) - J_k'(u_k), z_{k+1} - v_k \rangle +$$
$$+ \beta_k A_k \langle P'(v_k) - P_k'(u_k), z_{k+1} - v_k \rangle + 2\beta_k \alpha_k \langle v_k - u_k, z_{k+1} - v_k \rangle.$$

Suma prvog i trećeg sabirka desne strane poslednje jednakosti ocenjena je formulom (2.41), a ocenjujući $\langle P'(v_k) - P_k'(u_k), z_{k+1} - v_k \rangle$, na isti način na koji je u dokazu nejednakosti (2.41) ocenjeno $\langle J'(v_k) - J_k'(u_k), z_{k+1} - v_k \rangle$, dobijamo da je

$$\langle P'(v_k) - P_k'(u_k), z_{k+1} - v_k \rangle \leq L\|z_{k+1} - u_k\|^2/4 +$$
$$+ \delta_k \|z_{k+1} - v_k\|^2 + \delta_k \|u_k - v_k\|^2/2 + C_1 \delta_k,$$

tako da za drugi sabirak važi ocena

$$\beta_k\langle T_k'(v_k) - t_k'(u_k),\ z_{k+1} - v_k\rangle \leq \beta_k(L/4 + A_kL/4 + \alpha_k)\cdot$$
$$\cdot\|z_{k+1} - u_k\|^2 - \beta_k(\alpha_k - \delta_k - A_k\delta_k)\|z_{k+1} - v_k\|^2 -$$
$$- \beta_k(\alpha_k - \delta_k/2 - A_k\delta_k/2)\|u_k - v_k\|^2 + c_1\beta_k\delta_kA_k. \qquad (17)$$

Primetimo samo da se u dokazu nejednakosti (17) umesto nejednakosti (2.24) koristi nejednakost (11). Zamenjujući (2.37), (2.43), (2.46) i (17) u (16) dobijamo da je

$$0 \leq \|u_k - v_k\|^2\left[1 - 2\alpha_k\beta_k + \beta_kc_1(\delta_k + \theta_k) + \beta_k\delta_kA_k\right] -$$
$$- \|z_{k+1} - u_k\|^2\left[1 - \beta_k(L/2 + A_kL/2 + 2\alpha_k + mcL + 2mc\delta_k)\right] -$$
$$- \|z_{k+1} - v_k\|^2\left[1 + 2\alpha_k\beta_k - 2\beta_k\delta_k - 2\beta_kA_k\delta_k\right] +$$
$$+ c_2\beta_k(\delta_k + \theta_k) + c_3\beta_k\delta_kA_k \quad \text{za dovoljno veliko } k\in N. \qquad (18)$$

Iz šestog uslova teoreme sledi da izraz uz $\|z_{k+1} - u_k\|^2$ teži ka -1 kada $k \to \infty$, odnosno da je manji od nule za dovoljno veliko $k\in N$, kao i da je

$$1 + 2\alpha_k\beta_k - 2\beta_k\delta_k - 2\beta_kA_k\delta_k =$$
$$= 1 + 2\alpha_k\beta_k(1 - \delta_k/\alpha_k - A_k\delta_k/\alpha_k) \geq 1$$

za dovoljno veliko $k\in N$, tako da (18) postaje

$$\|z_{k+1} - v_k\|^2 \leq \|u_k - v_k\|^2\left[1 - 2\alpha_k\beta_k + \beta_kc_1(\delta_k + \theta_k) + \right.$$
$$\left. + \beta_k\delta_kA_k\right] + c_2\beta_k(\delta_k + \theta_k) + c_3\beta_k\delta_kA_k.$$

Zamenjujući poslednju ocenu, (12) i (15) u (13) dobijamo da je

$$\omega_{k+1} \leq \omega_k(1 - s_k) + d_k \qquad (19)$$

za dovoljno veliko $k \in N$, gde je

$$s_k = \alpha_k \beta_k(1 + 2\alpha_k\beta_k - C_1(\theta_k + \delta_k)/\alpha_k + 2\delta_k A_k/\alpha_k)$$

a

$$d_k = C_1\alpha_k\beta_k(1 + \alpha_k\beta_k)\Big[(\delta_k + \theta_k)/\alpha_k + \delta_k A_k +$$

$$+ (\varepsilon_k/(\alpha_k\beta_k) + |A_k - A_{k+1}|/(\alpha_k^2\beta_k) + |\alpha_k - \alpha_{k+1}|/(\alpha_k^2\beta_k))^2\Big].$$

Iz šestog uslova teoreme sledi da $d_k/s_k \to 0$ kada $k \to \infty$ i da je $\sum_{k=k_0}^{\infty} s_k = +\infty$, gde je k_0 toliko veliki prirodan broj da je ispunjeno (19) i da je $0 < s_k \leqslant 1$ za sve $k \geqslant k_0$. Na osnovu leme 2.1.1 sledi da $\omega_k \to 0$, odnosno $\|u_k - v_k\| \to 0$ kada $k \to \infty$. Teorema je dokazana.

U slučaju kada je U_0 poliedar iz R^n, odnosno presek konačnog broja zatvorenih poluprostora, problem (4) - (6) predstavlja problem kvadratnog programiranja. U slučaju kada je $m = 0$, odnosno kada je $U = U_0$, metod (4) - (6) prelazi u regularizovani metod projekcije gradijenata. Tada je $Q_k = U$, a minimum funkcije $\phi_k(u)$ na skupu U dostiže se u projekciji tačke $u_k - \beta_k t_k'(u_k)$ na skup U. U dokazu teoreme 2.3.1 uslov (6) direktno se koristi samo u dokazu nejednakosti (12), tako da za regularizovani metod projekcije gradijenata važi sledeća teorema.

T e o r e m a 2.3.2. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1° U je konveksan zatvoren skup Hilbertovog prostora X, $F(u)$ je operator koji preslikava skup U u Banahov prostor Y, $J(u)$ i $P(u)$ su konveksne neprkidno - diferencijabilne, a $\|F(u)\|$ i $f_i(u)$, $i = \overline{1,r}$ konveksne neprekidne funkcije na U, skup U' definisan je u (1), ispunjeni su uslovi (2);

2° postoje $u' \in U'$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,r}$ i $y^* \in Y^*$ takvi da je

$$\lambda_i f_i(u') = 0, \; i = \overline{1,r} \text{ i } L(u') \leq L(u) \text{ za sve } u \in U ,$$

gde je $L(u) = J(u) + \lambda_1 f_1(u) + \ldots + \lambda_r f_r(u) + \langle y^*, F(u) \rangle$;

3^o postoji $L \geq 0$ takvo da je za sve $u, v \in U$

$$\|J'(u) - J'(v)\|^2 \leq L \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \text{ i}$$

$$\|P'(u) - P'(v)\|^2 \leq L \langle P'(u) - P'(v), u - v \rangle ;$$

4^o približne vrednosti $J_k'(u)$ i $P_k'(u)$ gradijenata $J'(u)$ i $P'(u)$ su takve da je za sve $k \in N$ i $u \in U_o$

$$\max \left\{ \|J'(u) - J_k'(u)\|, \; \|P'(u) - P_k'(u)\| \right\} \leq \delta_k (1 + \|u\|) ;$$

5^o nizovi α_k, β_k, ε_k, δ_k i A_k, $k \in N$ zadovoljavaju sve relacije šestog uslova teoreme 2.3.1 u kojima se ne pojavljuje θ_k ;

6^o niz u_k, $k \in N$ određen je na sledeći način. Neka je $u_1 \in U$. Ako je $u_k \in U$ poznato za neko $k \in N$, onda se u_{k+1} određuje iz sledećeg uslova

$$u_{k+1} \in U, \; \|u_{k+1} - P_U(u_k - \beta_k t_k'(u_k))\| \leq \varepsilon_k ,$$

gde je $t_k'(u) = J_k'(u) + A_k P_k'(u) + 2\alpha_k u$.

Tada je $\lim\limits_{k \to \infty} \|u_k - u_*\| = 0$, gde je u_* normalno rešenje problema $J(u) \to \inf$, $u \in U'$; a U' skup definisan u (1).

P r i m e r. Pokažimo da se pod određenim uslovima na problem posmatran u primeru iz § 2.2 može primeniti regularizovani metod projekcije gradijenata, odnosno teorema 2.3.2. Od ograničenja $Au = \bar{b}$ iz problema (1.1.13) formiraćemo kaznenu funkciju $P(u) = \|F(u)\|^2 = \|Au - \bar{b}\|^2$. Pokažimo da je tada ispunjen treći uslov teoreme 2.3.2. Već je pokazano (1.1.14) da prvu nejednakost iz trećeg uslova zadovoljava konstanta $L = 2M^2$;

gde je $M = \max\left\{T^{1/2},\ T^{-1/2}\right\}$. Neka su $u, v, h \in X$. Tada je

$$\left\langle P'(u) - P'(v),\ h\right\rangle = \left\langle 2A^{*}(Au-\bar{b}) - 2A^{*}(Av-\bar{b}),\ h\right\rangle = 2\left\langle A(u-v), Ah\right\rangle. \quad (20)$$

Iz (20) sledi da je

$$\left|\left\langle P'(u) - P'(v),\ h\right\rangle\right| \leq 2\|A(u-v)\|\cdot\|A\|\cdot\|h\|$$

odnosno,

$$\|P'(u) - P'(v)\| \leq 2\|A(u-v)\|\cdot\|A\|. \quad (21)$$

Stavljajući $h = u - v$ u (20) dobijamo da je

$$\left\langle P'(u) - P'(v),\ u - v\right\rangle = 2\left\langle A(u-v),\ A(u-v)\right\rangle = 2\|A(u-v)\|^2. \quad (22)$$

Iz (21) i (22) sledi da je

$$\|P'(u) - P'(v)\|^2 \leq 2\|A\|^2 \left\langle P'(u) - P'(v),\ u - v\right\rangle.$$

Prema tome, treći uslov teoreme 2.3.2 zadovoljava konstanta $L = 2\max\left\{M^2,\ \|A\|^2\right\}$.

Pretpostavimo da približne vrednosti $B_k(t)$, $D_k(t)$, $f_k(t)$ i x_{ok} zadovoljavaju nejednakosti (2.53) - (2.56) u kojima se umesto δ_k nalazi δ_k / C, gde je $C = 2\max\left\{2\|A\| + \delta,\ \|\bar{b}\| + \|A\| + \delta\right\}$, a $\delta = \sup\left\{\delta_k :\ k \in N\right\}$, i da približna vrednost z_k zadovoljava prvu nejednakost (2.56). U primeru iz § 2.2 pokazano da je tada

$$\|A - A_k\| \leq \delta_k/C,\quad \|\bar{b} - \bar{b}_k\| \leq \delta_k/C \ \text{ i } \ \|J'(u) - J_k'(u)\| \leq \delta_k(1 + \|u\|), \quad (23)$$

gde je $J_k(u) = \left|x(T) - z_k\right|^2$. Neka je $P_k(u) = \|A_k u - \bar{b}_k\|^2$ i neka su $u, h \in X$. Tada je

$$\left\langle P'(u) - P_k'(u),\ h\right\rangle = 2\left\langle Au - \bar{b},\ Ah\right\rangle - 2\left\langle A_k u - \bar{b}_k,\ A_k h\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle Au - \bar{b},\ (A - A_k)h\right\rangle + 2\left\langle (A - A_k)u + \bar{b}_k - \bar{b},\ A_k h\right\rangle.$$

Iz poslednje jednakosti i (23) dobijamo da je

$$\left|\langle P'(u) - P_k'(u),\ h\rangle\right| \leqslant 2\|Au - \bar{b}\|\cdot\|A - A_k\|\cdot\|h\| + 2(\|A - A_k\|\cdot\|u\| + \|\bar{b}_k - \bar{b}\|)\|A_k\|\cdot\|h\| \leqslant 2(\|A\|\cdot\|u\| + \|\bar{b}\|)\,\delta_k\|h\|/C + 2\,\delta_k(\|u\| + 1)(\|A\| + \delta_k)\|h\|/C \leqslant \delta_k(1 + \|u\|)\|h\|\ ,$$

odnosno

$$\|P'(u) - P_k'(u)\| \leqslant \delta_k(1 + \|u\|).$$

Poslednja nejednakost, zajedno sa poslednjom nejednakošću (23) predstavlja četvrti uslov teoreme 2.3.2. Funkcija $\|F(u)\| = \|Au - \bar{b}\|$ je konveksna i neprekidna. Pretpostavimo da je ispunjen drugi uslov teoreme 2.3.2 u kome se umesto skupova U' i U nalaze U i U_0 (na primer ako skupovi U_0 i U zadovoljavaju prvi i treći uslov teoreme 1.1.5), a takođe peti i šesti uslov iste tepreme. Tada dobijeni niz u_k, $k \in N$ konvergira (po normi prostora X) ka normalnom rešenju problema (1.1.9) - (1.1.12).

LITERATURA

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление, Наука, Москва, 1979.
2. Aljančić S. Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
3. Антипин А.С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа, ВНИИСИ, Москва, 1979.
4. Бакушинский А.Б., Поляк Б.Т. О решении вариационных неравенств, ДАН СССР, т. 219, No 5, 1974.
5. Бакушинский А.Б. Регуляризующий алгоритм на основе метода Ньютона - Канторовича для решения вариационных неравенств, ЖВМ и МФ, т. 16, No 6, 1976.
6. Бакушинский А.Б. Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанных на принципе итеративной регуляризации, ЖВМ и МФ, т. 17, No 6, 1977.
7. Бакушинский А.Б. К принципу итеративной регуляризации, ЖВМ и МФ, т. 19, No 4, 1979.
8. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач, Наука, Москва, 1980.
9. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач, Наука, Москва, 1981.
10. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач, изд. Моск. Ун - та, Москва, 1974.
11. Васильев Ф.П. О регуляризации некорректных экстремальных задач, ДАН СССР, т. 241, No 5, 1978.
12. Васильев Ф.П. О регуляризации некорректных задач минимизации на множествах, заданных приближенно, ЖВМ и МФ, т. 20, No 1 , 1980.
13. Васильев Ф.П. О регуляризации метода Ньютона при неточном задании исходных данных, Тр. мат. инст. АН СССР, т. 167, 1985.
14. Васильев Ф.П., Jaćimović M.D. Об итеративной регуляризации метода условного градиента и метода Ньютона при неточно заданных исходных данных, ДАН СССР, т. 250, No 2 , 1980.
15. Васильев Ф.П., Jaćimović M.D. Об итеративной регуляризации метода Ньютона, ЖВМ и МФ, т. 21, 1981.
16. Васильев Ф.П., Хромова Л.Н., Jaćimović M. D. Итеративная

регуляризация одного метода минимизации третьего порядка, Вест. Моск. Ун-та, сер. ВМ и К, No 1, 1981.

17. Васильев Ф.П., Солодкая М.С., Jaćimović M. D. О регуляризованном методе линеаризации при наличии погрешностей в исходных данных, Вест. Моск. Ун та, сер. ВМ и К, No 4 , 1985.

18. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач, изд. Моск. Ун-та, Москва, 1970.

19. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения, Наука, Москва, 1978.

20. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач, Наука, Москва, 1974.

21. Jaćimović M. D. Итеративная регуляризация одного варианта метода условного градиента, Вест. Моск. Ун-та, сер ВМ и К, No 4 , 1980.

22. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ, Наука, Москва, 1984.

23. Карманов В.Г. Математическое программирование, Наука, Москва, 1975.

24. Ковач М. Непрерывный аналог итеративной регуляризации градиентного типа, Вест. Моск. Ун-та, сер. ВМ и К, No 3 , 1979.

25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1981.

26. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами описываемыми уравнениями с частными производными , Мир, Москва, 1972.

27. Lions J.L., Stampacchia G. Variational ineqvalites, Comm. Pure And / Appl. math., 20, No 3, 1966.

28. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач, изд. Моск. Ун-та, Москва, 1974.

29. Поляк Б.Т. Методы решения задач на условный экстремум при наличии случайных помех, ЖВМ и МФ, т. 19, No 1 , 1979.

30. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах, Наука, Москва, 1975.

31. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации, Наука, Москва, 1983.

32. Тихонов А.Н. О устойчивости оптимизации функционалов, ЖВМ и МФ, т. 6, No 4 , 1966.

33. Тихонов А.Н. О методах регуляризации задач оптимального управления, ДАН СССР, т. 162, No 4 , 1965.

34. Тихонов А.Н. О некорректных задачах оптимального планирования , ЖВМ и МФ, т. 6, No 1 , 1966.

35. Тихонов А.Н.,Арсении В.Я. Методы решения некорректных задач Наука, Москва, 1979.
36. Тихонов А.Н., Васильев Ф.П., Потапов М.М., Юрий А.Д. О регуляризации задач минимизации на множествах заданных приближенно, Вест. Моск. Ун-та, сер. ВМ и К, No 1 , 1977.
37. Тихонов А.Н., Васильев Ф.П. Методы решения некорректных экстремальных задач, Banach Center Publ., V, 3, Math. models and numerical methods, Varšava, 1978.
38. Треногин В.А. Функциональный анализ, Наука, Москва, 1980.
39. Ćirić N. T. О регуляризованном методе линеаризации для минимизации выпуклой финкции на многогранном множестве при наличии погрешностей в исходных данных, Вест. Моск. Ун-та, сер. ВМ и К, No ,