Pavle M. Miličić

PROSTORI SA POLUSKALARNIM PROIZVODIMA I NEKE PRIMENE NA NORMIRANE ALGEBRE

(Doktorska disertacija)

Beograd 1970.

S A D R Ž A J

0. U V O D

Linearni funkcionali u normiranim prostorima su jedno ıajmoćnijih sredstava koja služe za proučavanje tih prostora. ; toga je Hahn-Banachov stav o produženju ograničenih linearnih ɛcionala na normiranim prostorima, zajedno sa svojim posledica- odigrao fundamentalnu ulogu u razvoju funkcionalne analize. Od ɜbne važnosti su funkcionali od dva argumenta koji su linearni po jednom argumentu i koji zavise od norme prostora. Najznačaj- ι medju njima je svakako skalarni proizvod, na kome bazira cela :ija unitarnih prostora. Prostor ima bogatiju strukturu u geo- :ijskom smislu u koliko se na njemu može definisati neki odre- ıi funkcional, kao što je skalarni proizvod (unutarni prostor), ıi prostori u kojima se svaki linearni funkcional može pretsta- ι kao skalarni proizvod (Hilbertovi prostori) su od posebne ınsti.

Zbog toga je, još od samog početka razvoja funkcionalne ιize, postojala težnja da se okarakterišu prostori sa skalarnim .zvodima preko norme tih prostora. Tako su, još 1935. d., P. Jor- i J. V. Neumann u [25] dali potreban i dovoljan uslov da norma ɜtora izvire iz nekog skalarnog proizvoda na tom prostoru. Ta- je je, iste godine, i M. Fréchet u [14], na svoj način, oka- ɜerisao prostore u kojima se može definisati skalarni proizvod. ıs ima više radova koji su posvećeni tom problemu.

Prednost unitarnih prostora, nad ostalim normiranim pros- ıma, se ogleda najviše u tome, što se geometrijski pojmovi kao su ortogonalnost vektora, ugao izmedju vektora, projekcija vek-ra na vektor, zatim konjugovanost operatora i spektralna teorija eratora na tim prostorima, lako izučavaju.

Prvi pokušaj da se u neunitarnim normiranim prostorima edu neki geometrijski pojmovi, kao što je ortogonalnost na pri-, pripada G. Birkoffu, koji je 1935. g. u [6] definisao ortogo-lnost vektora preko norme prostora (Def. 1.2.2.). On je tada po-zao da se preko tako uvedene ortogonalnosti mogu okarakterisati ki unitarni prostori. J. R. James je 1947. g. u [22] pokazao da Birkoffljeva ortogonalnost kao i ostali geometrijski pojmovi mo-najbolje i najobuhvatnije proučavati preko izvesnih linearnih nkcionala na datom prostoru.

Kvalitetan skok, u tom smislu, je napravio G. Lumer 61. g. On je u [31] definisao jedan specijalan funkcinal (Def. 1.1.) na normiranom prostoru, koga je nazvao poluskalarni proiz-d ili s.i.p a koji prelazi u skalarni proizvod kada je prostor itaran. To je u stvari jedan funkcional sa dva argumenta, koji linearan po prvom argumentu, iz koga izvire norma i za koga va-Cauchy-Schwarzova nejednakost (Teor. 1.1.1.). On je pokazao u tom radu, da i tako dosta jednostavan funkcional, za koji se sa-zna egzistencija. može da posluži za uopštavanje raznih pojmova unitarnih prostora, za rešavanje najsloženijih i najsavremenijih oblema kao što su problemi C^*-algebra i drugi.

E. Berkson je 1965. g. u [4] pokazao da su s.i.p-ovi jed-vrsta Badeovih funkcionala (Def.4.1.16.) preko kojih se mogu dob-izučavati Hermitski operatori u Banachovim prostorima.

J. R. Giles je 1967. g. u [17] posmatrao s.i.p-ove sa latnim osobinama i u neku ruku izvršio klasifikaciju prostora pre s.i.p-ovima na njima.

Naš prilog, u ovom radu, je u okviru teorije samog po-
skalarnog proizvoda i u okviru novih rezultata korišćenjem polus-
larnog proizvoda. Posebni prilozi su ako poluskalarni proizvod
edje u skalarni proizvod.

Prelazimo na kratku analizu pojedinih odeljaka.

U odeljcima 1.1. i 1.2. su date osnovne definicije i re-
tati u vezi sa s.i.p-ovima koje su dali Lumer i Giles. Giles je
azao da postoje funkcionali koje je definisao Lumer a koji ima-
dodatnu osobinu da su homogeni po drugom argumentu (Def. 1.1.2.).
zv. neprekidnim s.i.p-ovima (Def. 1.1.3.), ortogonalnost koju
uveo Birkoff, se lako izražava preko s.i.p-a (Teor. 1.2.1.).
važniji Gilesov rezultat u ovom paragrafu je teorema 1.2.4. koja
ori da se u neprekidnim s.i.p-ovima koji su uniformno konveksni
f. 1.2.4.) i kompletni svaki ograničeni linearni funkcional mo-
prikazati kao s.i.p. (Analogno fundametalnoj Fréchet-Rieszovoj
rimi).

U odeljku 1.3. navodimo Gilesovu teoremu koja daje vezu
edju neprekidnih s.i.p.s-ova i Gâteau deferencijabilnih prostora
f. 1.3.1.), sa našim, nešto jednostavnijim, dokazom od Gileso-
dokaza iz [17] . Teoremom 1.3.2. prenosimo da s.i.p.s-ove jedan
chetov rezultat iz [14] koji se odnosi na skalarne proizvode. Na
ju, na osnovu Gilesove teoreme 1.3.1. i naše teoreme 1.3.2., da-
o jedinstven postupak kojim se na izvesnom normiranom prostoru
iniše jedan s.i.p. Navodimo i konkretne primere s.i.p-ova u real-
prostorima l^p i L^p .

U odeljku 1.4. smo, slično u initarnim prostorima, oka-
erisali linearnu nezavisnost vektora pomoću s.i.p-a, uvodeći
štenu Gramovu determinantu (Teor. 1.4.1.). Takodje smo (Teor.

4.2.) okarakterisali linearnu zavisnost vektora u s.i.p.s-ovima aditivnom transverzalnošću (Def. 1.4.2.).

Teoremama 1.4.3. i 1.4.4. dajemo neke dovoljne uslove, raženе preko transferzalnosti i ortogonalnosti, da bi niz vektobio linearno nezavisan. Teoremom 1.4.5. dajemo jedan dovoljan lov da za svaki zatvoreni potprostor nekog s.i.p.s-a postoji vekr, različit od nule, transferzalan na potprostor.

U odeljku 1.5., koristeći Gilesove rezultate [17] dajeveoma jednostavan dokaz jedne Jamesove teorema [22] u slučaju je normirani prostor jedan neprekidan s.i.p.s. Takodje pojedstavljujemo dokaze Leduca [29] za ranije poznate teoreme o egzisnciji skalarnog proizvoda u realnim normiranim prostorima. Pokajemo, dalje,da je jedna Jamesova teorema [22] o egzistenciji skarnog proizvoda opštija od jedne Fickenove teoreme iz [11] . Na iju dajemo jednu novu teoremu o potrebnim i dovoljnim uslovima eor. 1.5.1.) da jedan s.i.p.s bude unitaran prostor. Posledicom teoreme se pokazuje da se aksiome skalranog proizvoda mogu dadrukčije od uobičajenih.

Odeljak 1.6. posvećujemo takozvanim problemima "dualnos-, problemima oko minimalnog rastojanja nekog elementa od datog prostora jednog Banachovog prostora. Uvodeći pojam relativne štene dualne norme preko s.i.p-a (Def. 1.6.3.), koristići jedan ultat A. L. Garakavija [15] i rezultate Gilesa [17] , uopštili rezultate N.H. Vinha iz [45] . Uopštenja se odnose na n-dimennalni prostor C^n, koji se zamenjuje sa uniformno konveksnim i pletnim s.i.p.s-om. Dimenzija može biti proizvoljna (Teor. 1.6. Teor. 1.6.3., Teor. 1.6.4.). To nam omogućuje da teoreme, iz , o polinomima opštije iskažemo i dobijemo dve teoreme (Teor. .5. i Teor. 1.6.6.) o analitičkim funkcijama.

U odeljku 2.1. učinili smo pokušaj koordinatizacije ne
ı s.i.p.s-ova. Naime, pokazali smo (Teor. 2.1.1., Teor. 2.1.2.,
or. 2.1.3., Teor. 2.1.4., Teor. 2.1.5. i Teor. 2.1.6.) da u iz-
snim s.i.p.s-ovima postoji takozvana orto narmirana baza prosto-
, tj. takav skup uzajamno ortogonalnih jediničnih vektora preko
jih se svaki vektor može izraziti u obliku linearne kombinacije
ı vektora, slično Hilbertovim prostorima. U odnosu na takvu ba-
važi uopštena Besselova nejednakost i uopštena Parsevalova jed-
:ost. U takvim se prostorima olakšava rad jer se svi metodi ba-
sa iz Hilbertovih prostora mogu koristiti u tim prostorima. To
ogućava uopštavanje raznih problema iz Hilbertovih prostora.
oremom 21.7. pokazujemo da u nekim s.i.p.s-ovima sa bazisom pos-
ji jedinstveno razlaganje vektora preko vektora potprostora i vak-
'a transferzalnih na taj potprostor.

U odeljku 3.1. proširujemo važnost rezultata Ljubiča
sa realnih n-dimenzionih prostora, i naših rezultata [34] na
lne neprekidne s.i.p.s-ove, dokazujući pri tome strožije jedan
glavnih fakata iz [33] i [34] . Naime, u skupu svih normi opera-
a na L(C) (Def. 3.1.1.) uvodi se parcijalno uredjenje $\preceq$ (Def. 3.
.) i pokazuje se da je minimalna norma, u smislu ovog uredjenja,
ratorska norma (Def. 3.1.2.). Takodje se pokazuje da su dve raz-
ite operatorske norme na L(C) neuporedive. Za kompleksne ili rea-
Hilbertove prostore pokazujemo (Teor. 3.1.2.) da su dve opera-
ske norme, koje su inducirane normama vektora a ove izviru iz
larnih proizvoda, jednake.

U odeljku 3.2., preko s.i.p-a u neprekidnom s.i.p.s-u C
limo dve vrste konjugovanih operatora (levo konjugovan A^{*} Def.
.2. i desno konjugovav A^{+} - Def. 3.2.3.). Dajemo dve teoreme o
operatorima. Prva daje direktnu vezu izmedju tako konjugovanih

eratora i obično konjugovanog operatora A^* (konjugovani operator eratora A u Banachovom prostoru). Druga teorema pokazuje da su eme levo konjugovanog operatora, desno konjugovanog operatora i čno konjugovanog operatora jednake.

Odeljak 3.3. je posvećen Lumerovim rezultatima [31] koji odnose na specijalne funkcionale na L(V), tzv. numerička polja eratora i numerički rang operatora, i funkcionale na V tzv. stej-e.

U odeljku 4.1., prvo se daju osnovne definicije koje do-e do pojma C^*-algebre. Navodi se definicija I. Vidava [44] koja širuje pojam hermitskog elementa sa simetričnih algebri na nor-ane algebre, navodi se nova definicija hermitskog elementa na ebri operatora L(V) Banachovog prostora V, koju daje Lumer i erov dokaz da su te dve definicije ekvivalentne na algebri L(V). odje i mi dajemo jednu definiciju hermitskog elementa na elgebri ratora L(C) neprekidnog s.i.p.s-a C, ali ne uspevamo da potpuno ovorimo na pitanje odnosa ove definicije i predhodne dve na al-ri L(C). U drugom delu ovog paragrafa daju se rezultati Berkso-[5] o skupovima operatora koji su hermitski ekvivalentni, tj. re-tate koji daju odgovor koliko hermiticetet zavisi od karaktera ne operatora, odnosno da li se menja hermiticitet prilikom ekvi-entnog renormiranja prostora na kome se posmtraju operatori. Ta-je se navodi i jedan njegov rezultat koji daje vezu izmedju .p-ova, Badeovih funkcionala i projektora.

U odeljku 4.2, prvo navodimo vezu izmedju stetova i pozitivnih funkcionala na C^*algebrama a zatim Lumerov dokaz poznatog stava u B^*-algebre C^*-algenre. Taj dokaz je zasnovan na činjenici, da $*$ karakter "lokalan"- to je uslov koji vezuje involuciju i nor- blizu jedinice - u algebri. Pošto je i ovde za dokaz korišćen p. algebre, istićemo ga.

U odeljku 5.1. proširujemo naše rezultate iz [30] koji su bili dati u Hilbertovim prostorima na telu $\mathcal{D}$ gde $\mathcal{D}$ može biti polje realnih brojeva, polje kompleksnih brojeva ili telo kvaterniona, na s.i.p.s-ove. Naime, u [36] smo definisali f-izometričan i f-unitaran operator (Def. 5.1.1. i Def. 5.1.2.) na Hilbertovom prostoru nad telom kvaterniona. Pokazali smo da takvih operatora ima 24 i da su okarakterisani preko endomorfizama tela kvaterniona koji održavaju apsolutne vrednosti. Trima teoremama pokazali smo da za njih važe slične osobine kao i za obično izometrične, odnosno unitarne operatore na Hilbertovim prostorima nad poljem kompleksnih brojeva. Sada smo dokazali da se prve dve teoreme prenose na s.i. p.s-ove zajedno sa dokazima.

Ovi pojmovi, f-izometričnog (f-unitarnog) operatora, su opravdali potrebu njihovog uvodjenja rezultatima sledećeg 5.2. paragrafa.

Razvoj kvantne mehanike uslovio je potrebu karakterizacije bijektivnih operatora na Hilbertovim prostorima koji održavaju apsolutne vrednosti skalarnog proizvoda, tzv. W-operatora (Def. 5. .1.). Prvi je E. Wigner [46] rešio taj problem za neke specijalne prostore. Njegove rezultate su proširili R. Hagedorn [18] i [19] i E. Artin [2] , da bi 1963. u [30] taj problem potpuno rešili J. Lomont i P. Mendelson za najopštije Hilbertove prostore na polju kompleksnih brojeva. Mi smo u [35] rešili taj problem za proizvoljni Hilbertov prostor nad telom kvaterniona, koristeći ideju i rezultate dokaza Lomonta i Mendelsona i reziltate predhodnog paragrafa. Pored tih rezultata, sada dajemo, u izvesnom smislu, uopštenje toga rada na izvesne uniformne prostore, koji ne moraju biti Hilbertovi. Za to nam je bila potrebna jedna teorema o slaboj kompaktnosti ih prostora, koju smo dobili a koja je od opšteg interesa. Ina- glavni rezultat o reprezentaciji W-operatora u svim slučajevi- prostora H može se jednostavno ovako iskazati: Svaki W-operator fazno ekvivalentan sa nekim f-unitranim operatorom i zavisno od ;a šta je Φ i šta je f dobijemo sve ranije rezultate te vrste.

1. POLUSKALARNI PROIZVOD NAD NORMIRANIM PROSTORIMA

1.1. Definicija s.i.p-a i osnovne osobine

Definicija 1.1.1. neka je V realni ili kompleksni vek-
›rski prostor nad telom Φ . Funkcional

$$f : V \times V \longrightarrow \Phi ,$$

načen sa $[x, y]$, je poluskalarni proizvod na V ako ispunjava
love:

1. za svako $x,y,z, \in V$ je $[x + y, z] = [x,z] + [y,z]$,
   za svako $x,y \in V$ i svako $\lambda \in \Phi$ je $[\lambda x,y] = \lambda [x,y]$,
2. za svako $x \neq o$ je $[x,x] > o$,
3. za svako $x,y \in V$ je $|[x,y]|^2 \leq [x,x] [y,y]$.

m poluskalarni proizvod se naziva kratko $s.i.p$, od semi-inner
oduct, a prostor V zajedno sa jednim poluskalarnim proizvodom na
emu $s.i.p.s$, od semi-inner-product spaces.

Ovu definiciju i oznake uveo je 1961. g. G. Lumer u svom
ıdamentalnom radu "Semi-inner-product spaces" [31] .

G. Lumer je, u citiranom radu, pokazao teoremom 2 da je
ıki $s.i.p.s$ normirani prostor sa nornom $\|x\| = [x,x]^{1/2}$ i da
ıki normirani prostor može biti predstavljen kao jedan $s.i.p.s$ i
, u opštem slučaju, na beskonačno mnogo načina. J. R. Giles je u
7] pojačao ovu teoremu uvodeći još jednu osobinu $s.i.p.$-a. Zato će-
navesti njegovu teoremu 1. Predhodno

Definicja 1.1.2. Neki $s.i.p.s$ V ima osobinu homogenosti
› je ispunjen uslov:

4. za svako $x,y \in V$ i svako $\lambda \in \Phi$ je $[x, \lambda y] = \bar{\lambda} [x,y]$

Kombinovana teorema 2 iz [31] i teorema 1 iz [17] je

Teorema 1.1.1. Svaki $s.i.p.s$ V je normirani prostor sa rmom $\|x\| = [x,x]^{1/2}$ i svaki normirani vektorski prostor može

ti pretstavljen kao jedan s.i.p.s sa osobinom homogenosti 4.

kaz. Pokažimo prvo da je $\|x\| = [x,x]^{1/2}$ norma.

Na osnovu osobina 1. i 3., za svako x i y iz V je

$+y\|^2 = [x+y, x+y] = [x,x+y] + [y,x+y] \leq (\|x\| + \|y\|) \|x+y\|$

je $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

lje je, za svako $x \in V$ i svako $\lambda \in \Phi$,

$$\|\lambda x\|^2 = \lambda [x, \lambda x] \leq |\lambda| \|x\| \quad \|\lambda x\|$$

akle je

$$\|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$$

red ovoga je, za $\lambda \neq 0$,

$$\|x\| = \|\frac{1}{\lambda} \lambda x\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \| \lambda x\|$$

o zajdeno sa gornjom nejednakosti, za svako $x \in V$ i svako $\lambda \in \Phi$

je $$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| .$$

ka je sada V normirani vektorski prostor. Na osnovu Hehn-Banachove

oreme za svako $x \in V$ i $\|x\| = 1$ postoji bar jedan linearan nepre-

dan funkcional $f_x \in V^*$, i mi uzimamo samo jedan, za koji je $\|f_x\| =$

1 i

$$f_x(x) = 1.$$

$\lambda x \in V$ i $\|x\| = 1$, gde je λ proizvoljan element iz Φ , odaberi-

$f_{\lambda x}$ iz V^* tako da je

$$f_{\lambda x} = \bar{\lambda} f_x$$

ovaj način se definiše jedno preslikavanje sa V u V^*. Naravno

postoji, u opštem slučaju, beskonačno mnogo takvih preslikava-

a. Lako se proverava da funkcional $[x,y]$ definisan sa

$$[x,y] = f_y(x)$$

dovoljava uslove 1.-4.

Mi ćemo u buduće pod s.i.p.s-om V podrazumevati normira-

prostor $(V, \|\cdot\|)$ sa jednim s.i.p-om na njemu koji je saglasan

normom $\|\cdot\|$ tj. za koji je za svako $x \in V$ $[x,x] = \|x\|^2$.

Odmah je prirodno postaviti pitanja: kada će jedan s.i. s biti Hilbertov prostor i kada postoji jedinstven s.i.p koji je glasan sa datom normom prostora? Odgovore daje

Teorema 1.1.2. Hilbertov prostor H može biti pretstavljen kao s.i.p.s na jedinstven način, a s.i.p je skalarni proizvod o i samo ako njegova saglasna norma zadovoljava pravilo paralelograma.

Dokaz. Neka je na H , pored skalarnog proizvoda $(.,.)$, zadat još jedan s.i.p $[.,.]$. Tada je, za $y \neq o$, $[x,y]$ ograničen linearan funkcional na H pa je na osnovu Fréchet-Rieszovog stava o reprezentaciji ograničenog linearnog funkcionala, $[x,y] = (x,z)$, gde je fiksiran elemenat iz H, za koji je $\|z\| = \|y\|$. Pored toga je $\|y\|^2 = (y,z)$, pa na osnovu striktne Schwarzove nejednakosti mora biti $z = \lambda y$. Prema tome je $(y, \lambda y) = \|y\|^2$, odnosno $z = y$ i

$$[x,y] = (x,y).$$

Polazeći od unitarnih prostora, njegovim kompletiranjem dolazi se do istog rezultata.

G. Lumer navodi, na kraju ove teoreme, da se uopšte, normirani linearni prostor može pretstaviti kao jedan s.i.p.s na jedinstven način, ako i samo ako postoji jedinstvena oslona hiperravan u svakoj tački jedinične sfere toga prostora. Dokaz ne navodi.

1.2. KLASE PROSTORA SA POLUSKALARNIM PROIZVODIMA

S.i.p koji ispunjava uslove 1.-4. je toliko opšti funkcional da se sa njime, u normiranim prostorima, ne može mnogo više i čistije raditi nego što se to radi sa običnim linearnim neprekidnim funkcionalima. Zato je J.R. Giles posvetio svoj rad [17] specijalnim s.i.p.s-ovima. Navodimo njegovu definiciju koja specijalizuje s.i.p dajući mu još jedan uslov.

Definicija 1.2.1. S.i.p.a C je neprekidan ako je ispu-jen uslov 5. za svako $x,y \in S$ / S je jedinična sfera/ i svako $\in R$ je

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathrm{Re}\left\{[y, x + \lambda y]\right\} = \mathrm{Re}\left\{[y,x]\right\}.$$

.i.p.s C je uniformno neprekidan ako je ispunjen uslov:

5u. za svako par $(x,y) \in S \times S$, $\mathrm{Re}\left\{[y, x + \lambda y]\right\}$ niformno teži ka $\mathrm{Re}\left\{[y,x]\right\}$

Da bi se u jednom normiranom prostoru moglo izgradjiva-i bilo kakva geometrija, potrebno je u tome prostoru imati pojam rtogonalnosti. G. Birkoff je 1935. g. u [6] prvi uveo taj pojam normirane prostore sledećom definicijom

Definicija 1.2.2. Vektor x normiranog prostora V je rtogonalan na vektor $y \in V$ ako i samo ako je, za svako $\lambda \in \Phi$,

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

snije autori ovu ortogonalnost zovu pseudoortogonalnost. I mi će- je tako zvati.

Naravno da, ovako definisana, relacija ortogonalnosti, u nije, u opštem slučaju, simetrična niti aditivna. Ovu ortogonalnost iscrpno proučio R. C. James 1947.g. u svom čuvenom radu "Orthogo-nality and linear functionals" [22].

U s.i.p.s-u V J.R. Giles je uveo pojan ortogonalnosti eko poluskalarnog proizvoda. Naime imamo

Definiciju 1.2.3. U s.i.p.s-u V vektor x je ortogo-lan na vektor y i vektor y je transferzalan na vektor x ako i no ako je $[y,x] = 0$. Vektor x je ortogonalan na skup $E \subset V$ i V transferzalan na x ako je vektor x normalan na svaki vektor E.

Lako je zaključiti da je vektor x ortogonalan i trans-rzalan na prostor V ako i samo ako je $x = 0$. Isto tako lako se ključuje da relacija ortogonalnosti u ovom smislu nije simetrič- ali da jeste aditivna. To pak znači da ovako uvedena ortogonal-st nije ekvivaletna sa pseudoortogonalnosti. U neprekidnim s.i. s-ovima Giles je pokazao sledećom teoremom ekvivalentnost te dve finicije.

<u>Teorema 1.2.1.</u> U neprekidnom s.i.p.s-u C vektor x ortogonalan na vektor y ako i samo ako je vektor x pseudoortogonalan na vektor y.

<u>kaz</u>. Ako je vektor x ortogonalan na vektor y tada je, za sva- $\lambda \in \Phi$,

$$\|x+\lambda y\| \; \|x\| \geq |[x+\lambda y,x]| = |\|x\|^2 + \lambda [y,y]| = \|x\|^2$$

akle je, za svako $\lambda \in \Phi$,

$$\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$$

rnuto, ako je za svako $\lambda \in \Phi$, $\|x+\lambda y\| - \|x\| \geq 0$ tada je

$$\|x+\lambda y\|^2 - \|x\| \; \|x+\lambda y\| \geq 0.$$

og toga je, za svako $\lambda \in \Phi$,

$$\mathrm{Re}\,\{[x,x+\lambda y]\} + \mathrm{Re}\,\{\lambda[y,x+\lambda y]\} - |[x,x+\lambda y]| \geq 0$$

implicira da je, za svako $\lambda \in \Phi$,

$$\mathrm{Re}\,\{\lambda[y,x+\lambda y]\} \geq 0.$$

pak implicira slučaje, kada je λ realno:

$$\mathrm{Re}\,\{[y,x+\lambda y]\} \geq 0 \quad \text{za } \lambda \geq 0,$$

$$\mathrm{Re}\,\{[y,x+\lambda y]\} \leq 0 \quad \text{za } \lambda \leq 0$$

je

$$\lim_{\lambda\to\pm 0} \mathrm{Re}\,\{[y,x+\lambda y]\} = \pm\, 0.$$

o je još $\lim\limits_{\lambda\to 0} \mathrm{Re}\,\{[y,x+\lambda y]\} = \mathrm{Re}\,\{[y,x]\}$ zaključujemo da je

$$\mathrm{Re}\,\{[y,x]\} = 0.$$

$\lambda = i\,\lambda_1$ gde je λ_1 realno imamo

$$\mathrm{Re}\,\{\lambda[y,x+\lambda y]\} = \lambda_1\, \mathrm{Re}\,\{[iy,x+i\lambda_1 y]\} \geq 0$$

ponovo iskoristimo uslov 5. dobijamo $\mathrm{Re}\,\{[iy,x]\} = 0$

o znači da je

$$J_m\{[y,x]\} = 0,$$

je

$$[y,x] = 0$$

Da bi se u neprekidnom s.i.p.s-u C mogla izgradjivati orija, slična teoriji u Hilbertovom prostoru koja bazira na ortoalnosti, predhodno je potrebno prostor C specijalizirati tako u njemu na svaki zatvoreni potprostor postoji vektor ortogonaa na taj potprostor. Zato predhodno navodimo definicije nekih ecijalnih normiranih prostora.

Definicija 1.2.2. Normirani prostor V je uniformno konksan ako za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta(\varepsilon)$ takav da je, svako $x,y \in S$, $\|x+y\|/2 \leq 1-\delta(\varepsilon)$ kad god je $\|x-y\| > \varepsilon$

Definicija 1.2.5. Normirani prostor je striktno konveka ako za x i y različite od nule iz $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ sledi $= \lambda x$ za neko realno pozitivno λ .

Unifermno konveksne i striktno konveksne prostore je sta proučavao R. Fortet u [12] i [13] .

Dobro je poznato da su iniformno konveksni prostori i iktno konveksni. Osim toga navodimo i sledeće dve teoreme.

Teorema 1.2.2. U neprekidnom s.i.p.s-u C koji je unifor konveksan i kompletan u odnosu na normu koja je saglasna sa .p-om, postoji, različit od nule, vektor ortogonalan na svaki voreni potpsrostor N prostora C.

az. Neka je N zatvoreni potprostor Banachovog prostora C i N. Tada na osnovu [47, P.110] postoji jedinstven vektor $x_0 \in N$ $\neq 0)$ takav da je

$$\|y-x_0\| = \inf_{x \in N} \{\|y-x\|\}.$$

vimo li $z_0 = y-x_0$, tada je za svako $x \in N$

$$\|z_0\| \leqslant \|z_0 + x\|$$

j. z_0 je ortogonalan na N.

Teorema 1.2.3. S.i.p.s V je striktno konveksan ako i sa-
o ako za x i y različite od nule iz $[x,y] = \|x\| \, \|y\|$ sledi
$= \lambda x$ za neko pozitivno λ.

okaz. Sledi iz rada E. Berksona [5, p.381].

Lako je videti da je unitarni prostor striktno konvek-
an. U Hilbertovim prostorima postoji bijektivno preslikavanje iz-
adju vektora i ograničenih funkcionala, koje ostvaruje Frechet-
Riesz-ov stav. James [22] je pokazao da i u uniformno konveksnim
kompletnim prostorima čija je norma Gâteau diferencijabilna (Def.
.3.1.) postoji slično preslikavanje. Giles je tu teoremu dokazao
terminima s.i.p-a i iskazao je analogno iskazu Fréchet-Rieszovog
ava. Evo tako adaptirane teoreme:

Teorema 1.2.4. U neprekidnom s.i.p.s-u C koji je unifor-
o konveksan i kompletan u odnosu na njegovu normu, za svaki nep-
kidni linearni funkcional $f \in C^*$ postoji jedinstven vektor $y \in C$
kav da je za svako $x \in C$

$$f(x) = [x,y]$$

kaz. Dokažimo prvo egzistenciju vektora y.

Ako je, za svako $x \in C$, $f(x) = 0$, uzmimo $y = 0$. Ako je
neko $x \in C$, $f(x) \neq 0$, tada je skup $N = \{x \mid f(x) = 0\}$ zatvoren
tprostor prostora C. Na osnovu teoreme 1.2.2. postoji, različit
nule vektor y_0 koji je normalan na N pa je, za $x \in N$ $f(x) =$
$[x,y]$ gde je $y = \alpha y_0$ za svako $\alpha \in \Phi$. Ako je $x = y_0$, tada je
$x) = f(y)$ gde je

$$y = (\overline{f(y_0)} / \|y_0\|^2) \, y_0$$

što svako $x \in C$ može biti pretstavljeno u obliku $x = z + \lambda y$,
e $z \in N$ i $\lambda = f(x)/f(y_0)$, imamo za svako $x \in C$

$(x) = f(z + \lambda y_0) = f(z)+\lambda f(y_0) = [z,y] + \lambda[y_0,y] = [z+\lambda y_0, y] = [x,y]$.

Pokažimo sada jedinstvenost vektora y.

edpostavimo da postoje vektori y i y' iz C, $y \neq y'$, takvi da je, za ako x C, $f(x) = [x,y] = [x,y']$. Tada je $[y,y] = [y',y] \leq \|y\| \|y'\|$ odakle $\|y\| \leq \|y'\|$. Slično se dokazuje da je $\|y'\| \leq \|y\|$ pa je $\|y\| = \|y'\|$. Pre- ovome je $\|y\| \|y'\| = [y,y']$, a ova jednakost na osnovu teoreme 1.2.2. plicira y = y'. Prema tome je preslikavanje $x \to f_x$, inducirano i.p-om bijektivno preslikavanje od C na C. Jednostavno je uvideti ovo preslikavanje održava normu.

Da bi napravio dalji pregres u teoriji dualnosti s.i.p. ova Giles ove prostore i dalje specijalizira uvodeći pojam uni- rmnog s.i.p.s-a.

Definicija 1.2.6. S.i.p.s M je uniforman s.i.p.s ako je iformno neprekidan i ako je u odnosu na njegovu normu

uniformno konveksan i

kompletan.

Teorema 1.2.5. Za uniforman s.i.p.s M, njegov konjugo- ni prostor M je uniforman s.i.p.s sa s.i.p-om definisanim sa

$$[f_x, f_y] = [y, x]$$

kaz. 1. $[f_x+f_y, f_z] = (f_x+f_y)(z) = f_x(z) + f_y(z) = [f_x,f_z] + [f_y,f_z]$. sna distributivnost poluskalarnog množenja u M inducira levu dis- ibutivnost poluskalarnog množenja u M u odnosu:

$$[f_x,f_x] + [f_z,f_y] = [x,z] + [y,z] = [x+y,z] = [f_z,f_{x+y}],$$

tale osobine od 1. do 4. slede iz ogovarajućih osobina s.i.p.s-a i definicije s.i.p.-a u M.

43, p. 647] je pokazano da je Banachov prostor uniformno Fréchet ferencijabilan (Def. 1.3.1.) ako i sako ako je uniformno konvek- n. To znači da M^* ima osobinu 5u. i da je uniformno konveksan tj. ima osobinu 6. Kako je konjugovani prostor svakog Banachovog pros- ra Banachov prostor to je i osobina 7. ispunjena pa je dokaz vršen.

Interesantna je činjenica da ortogonalnost u M prilikom
slikavanja $x \to f_x$ prelazi u transverzalnost u M i obrnuto.

Kod konačno dimenzionalnih prostora uniformna neprekid-
st i kompletnost nisu potrebni da bi prostor bio uniforman. Pre-
nije.

Teorema 1.2.6. Svaki konačnodimenzionalan striktno kon-
ksan, neprekidan s.i.p.s je uniforman s.i.p.s.

az. U neprekidnom s.i.p.s-u C funkcional $f(x,y) = \mathrm{Re}\,[y,x]$, de-
nisan na SxS, je neprekidan u smislu da $\mathrm{Re}\,[y,x+\lambda y] \to \mathrm{Re}\,[y,x]$ za
ako realno λ koje teži nuli. Ali u konačno-dimenzionalnom pros-
ru jedinična sfera S je kompaktan skup pa je kompaktan i SxS u
C. Ovo znači da, za svako realno λ koje teži nuli

$$\mathrm{Re}\,[y,x+\lambda y] \to \mathrm{Re}\,[y,x]$$

iformno za $(x,y) \in S\times S$. Osim toga dobro je poznato da je svaki
riktno konveksan konačnodimentionalan normirani prostor uniformno
nveksan [47 , p.111] i da je svaki konačnodimenzionalni normirani
ostor kompletan.

Giles je u svom radu naveo i konkretne primere uniform-
s.i.p.s-ova. Pre nego što ih navedemo definišimo afini prostor.

Definicija 1.2.7. Neka je $X = \{x,y,\ldots\}$ n-dimenzional-
vektorski realni prostor i neka je $A = \{P, Q,\ldots\}$ neprazan skup.
up A zove se n-dimenzionalni afini prostor a njegovi elementi tač-
afinog prostora, ako postoji funkcija $\tau: A\times A \to X$ sa osobinama:
za svaku tačku $P,Q,R \in A$ je $\tau(P,Q) + \tau(Q,R) = \tau(P,R)$, (II) za
ku tačku $P \in A$ i vektor $x \in X$, postoji jedna i samo jedna tačka
A takva da je

$$x = \tau(P,Q).$$

vim prostorima se nalazi detaljnije u [28, p.507].
je prostor X normiran sa normom $\|\cdot\|$ onda se u prostoru A uvodi

rika sa

$$d(P,Q) = \|\tau(P,Q)\|.$$

je $A = X$ i $\tau(x,y) = x-y$, onda je X zajedno sa τ jedan afini

stor.

<u>Definicija 1.2.8.</u> Afini n-dimenzionalni prostor A je

stor Minkowskog sa metrikom $d(x,y) = F(x-y)$ gde je F funkcional

kowskog na odgovarajućem vektorskom prostoru koji ispunjava us-

e:

I. za $x \neq 0$ je $F(x) > 0$,

II. za svako $x \in A$ i realno λ je $F(\lambda x) = |\lambda| F(x)$,

III. za svako $x,y \in A$ je $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$,

nakost se postiže za $x,y \neq 0$ ako i samo ako je $y = \lambda x$ za neko $\lambda > 0$.

IV. $F(x)$ je klase C^2 po svakom od n argumenata komponenata

tora x.

Ako se stavi $g_{ij}(x) = \frac{1}{2} F^2_{x^i x^j}(x)$ onda se s.i.p na Min-

skievom prostoru može definisati sa

$$[y,x] = g_{ij}(x)\, x^i y^j,$$

se usvaja konvencija o sabiranju po ponovljenim indeksima.

Takodje je realni Banachov prostor L^p $(p < \infty)$ uniforman

.p.s sa s.i.p-om

$$[y,x] = \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \int_X y |x|^{p-1} \operatorname{sgn} x \, d\mu$$

okazi za oba ova primera nalaze se u [13,p.444].

1.3. GATEUV IZVOD I S.I.P.

Dobro je poznato da se u unitarnom prostoru skalarni

izvod efektivno može izraziti preko norme:

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

je Φ telo realnih brojeva i

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] - \frac{i}{4}\left[\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2\right]$$

je Φ telo kompleksnih brojeva.

Lumer-Gilesova teorema 1.1.1. je egzistencijalnog karak-ra. Ona pokazuje da u svakom normiranom prostoru postoji polus-larni proizvod iz koga izvire norma ali ne da je postupak za dobi-nje jednog odredjenog s.i.p.-a. Zato bi bio od interesa bilo ka- postupak kojim bi došli do jednog poluskalarnog proizvoda. Mi no ovde dati jedan takav postupak u izvesnim Gâteau diferencija-lnim prostorima. Tim opštim postupkom ćemo posle definisati s.i. ove na prostorima ℓ^p i L^p, koji će nam biti potrebni za dalje iz-ganje.

Definicija 1.3.1. Normirani vektorski prostor je Gâteau ferencijabilan ako za svako x i y iz jedinične sfere S i svako alno λ postoji

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}.$$

rmirani vektorski prostor je uniformno Fréchet diferencijabilan o funkcija $\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}$, kad $\lambda\to 0$, teži svojoj granici unifor-o za $(x,y)\in S\times S$.

Lako je videti da u svakom Gâteau diferencijabilnom pro-oru postoji tzv. Gâteauv izvod norme

$$N(x,y)\overset{\text{Def.}}{=}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}.$$

Teorima 1.3.1. S.i.p.s. C je neprekidan (uniformno nep-idan) ako i samo ako je Gâteau diferencijabilan (uniformno Fré-et diferencijabilan).

az. Neka je λ realno i $x,y\in S$. Tada je

$$\|x+\lambda y\|-\|x\|\geqslant\frac{|[x+\lambda y,x]|-\|x\|^2}{\|x\|}$$

$$\geqslant\frac{Re[x+\lambda y,x]-\|x\|^2}{\|x\|}$$

$$=\frac{\lambda\, Re[y,x]}{\|x\|}.$$

vde je za $\lambda>0$:

$$)\qquad \frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}\geqslant\frac{Re[y,x]}{\|x\|}$$

za $\lambda < 0$:

(2) $$\frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \geq \frac{\mathrm{Re}[y,x]}{\|x\|}$$

Sa druge strane je

$$\frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \leq \frac{\|x+\lambda y\|^2 - |[x,x+\lambda y]|}{\lambda \|x+\lambda y\|}$$

$$\leq \frac{|[x,x+\lambda y]| + \lambda \mathrm{Re}[y,x+\lambda y] - |[x,x+\lambda y]|}{\|x+\lambda y\|}$$

(3) $$= \frac{\mathrm{Re}[y,x+\lambda y]}{\|x+\lambda y\|}$$

Ako je s.i.p.s C neprekidan (uniformno neprekidan), iz nejednakosti (1) i (3) sledi da je norma Gâteau (uniformno Fréchet) diferencijabilna.

Pretpostavimo li da je C Gâteau diferencijabilan, iz (1) i (2) sledi

(4) $$\frac{\mathrm{Re}[y,x]}{\|x\|} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

Na osnovu (4) je, za t realno

$$\mathrm{Re}[y,x+ty] = \lim_{\lambda \to 0} \|x+ty\| \frac{\|x+ty+\lambda y\| - \|x+ty\|}{\lambda}.$$

Uzme li se limes leve i desna strane, kad $t \to 0$, lako je videti da na desnoj strani limesi mogu razmeniti mesta, pa je

$$\lim_{t \to 0} \mathrm{Re}[y,x+ty] = \lim_{\lambda \to 0} \lim_{t \to 0} \|x+ty\| \frac{\|x+ty+\lambda y\| - \|x+ty\|}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \|x\| \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \mathrm{Re}[y,x]$$

Dakle s.i.p.s C je neprekidan(uniformno neprekidan) zavisno da li funkcija $\frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$, kad $\lambda \to 0$, teži svojoj granici obično ili uniformno za $(x,y) \in C \times C$.

Definicija 1.3.2. Realni poluskalarni proizvod na kompleksnom prostoru V je realni funkcional $\mathcal{G}(x,y)$ koji ispunjava aksiome 2. i 3. kao i aksiom 1. za realne skalare poluskalarnog proizvoda.

Ako je prostor realan onda se realni poluskalarni proizvod svodi na poluskalarni proizvod.

Posledica teoreme 1.3.1. Na Gâteau diferencijabilnom

ostoru je

$$\mathcal{g}(y,x) \overset{\text{Def}}{=} \|x\| \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

an realni poluskalarni proizvod sa osobinam homogenosti.

kaz. Treba još samo dokazati osobinu homogenosti.

Neka je λ realno i različito od nule. Tada je

$$\begin{aligned} \mathcal{g}(y,\lambda x) &= \|\lambda x\| \lim_{t\to 0} \frac{\|\lambda x+ty\| - \|\lambda x\|}{t} \\ &= \lambda^2 \|x\| \lim_{t\to 0} \frac{\|x+\frac{t}{\lambda} y\| - \|x\|}{t} \\ &= \lambda \|x\| \lim_{\frac{t}{\lambda}\to 0} \frac{\|x+\frac{t}{\lambda} y\| - \|x\|}{\frac{t}{\lambda}} = \lambda \mathcal{g}(y,x). \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ imamo

$$\mathcal{g}(y,0x) = \|0\| \lim_{t\to 0} \frac{\|ty\|}{t} = 0\, \mathcal{g}(y,x),$$

je, za svako realno λ i svako $x,y \in V$, $\mathcal{g}(y,\lambda x) = \lambda \mathcal{g}(y,x)$.

ko je videti da je još, za svako $x,y \in V$,

$$(ix,ix) = \mathcal{g}(y,x).$$

. Fréchet je u [14] dao sledeći rezultat: Ako je (x,y) realni

alarni proizvod na kompleksnom prostoru V sa dodatnom osobinom

$$(ix,iy) = (x,y), \tag{**}$$

da je

$$((x,y)) \overset{\text{Def}}{=} (x,y) - i\,(ix,y)$$

ompleksni skalarni proizvod na V.

Prirodno je postaviti pitanje da li se ovaj rezultat renosi na s.i.p-ove i da li je realni deo kompleksnog s.i.p-a realni s.i.p. na V?

Nismo sigurni da je odgovor na prvi deo pitanja pozitivan ako se nešto više ne pretpostavi za prostor V. Za sada, imamo sledeći rezultat

Teorema 1.3.2. 1) Ako je $[x,y]$ s.i.p. na V tada je

$\mathrm{Re}[x,y]$ realni s.i.p na V. Ako s.i.p $[x,y]$ ima osobinu homogenosti

2) Ako je $g(x, y)$ realni s.i.p, definisan sa (5) na nep-
idnom s.i.p.s-u C, tada je

$$[x,y] \overset{\text{Def}}{=} g(x,y)-i\,g(ix,y)$$

i.p na C sa osobinom homogenosti.

3) Ako je C neprekidan s.i.p.a koji je, uniformno kon-
san i kompletan u odnosu na njegovu saglasnu normu, tada je (6)
linstven s.i.p na C.

az. 1) Neka je $\mathrm{Re}[x,y] = g(x,y)$. Na osnovu toga što je $[x,y]$ li-
ıran kopleksni funkcional po prvom argumentu sledi da je
$[x,y] \equiv g(x,y)-ig(ix,y)$ i da je $g(x,y)$ realni linearni funkcional
prvom argumentu ([9 , p.133[1]]). Prema tome je aksiom 1. ispu-
en. Iz $[x,x] = \|x\|^2 = g(x,x) - ig(ix,x)$ sledi da je, za svako
V, $g(ix,x) = 0$ pa je

$$g(x,x) = \|x\|^2$$

. i aksiom 2. je ispunjen. Pošto je $[x,y]$ s.i.p, to je, za svako
$\in V$

$$\|x\|^2\|y\|^2 \geq |[x,y]|^2 = g^2(x,y)+g^2(ix,y),$$

je

$$g^2(x,y) \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

$$|g(x,y)|^2 \leq g(x,x)\,g(y,y).$$

Lje je:

$$[x,\lambda y] = g(x,\lambda y) - i\,g(ix,\lambda y)$$

$$\lambda[x,y] = \lambda g(x,y) - i\lambda g(ix,y).$$

s.i.p $[x,y]$ ima osobinu homogenosti, tada su leve strane ovih
lnakosti jednake, i kako je $g(x,y)$ realni funkcional, to je za
ko $x,y \in V$

$$g(x,\lambda y) = \lambda g(x,y).$$

2) Prema teoremi 1.3.2. $g(x,y)$ egzistira. Pošto je
(x,y) realni deo linearnog funkcionala po prvom argumentu, to je
osnovu (4) i [9, p. 133[1]]

$$[x,y] = g(x,y) - i\,g(ix,y)$$

i.p na C. $g(x,y)$ je realni linearni funkcional na C pa je, za ako realno λ, $g(\lambda x,y) = \lambda g(x,y)$. Za kompleksno λ imamo $g(x,\lambda y) =$

$$\|\lambda y\| \lim_{t\to 0} \frac{\|\lambda y+tx\| - \|\lambda y\|}{t}$$

$$|\lambda|^2 \|y\| \lim_{t\to 0} \frac{\|y+t\frac{x}{\lambda}\| - \|y\|}{t} = |\lambda|^2 g(\tfrac{x}{\lambda},y) = g(\bar{\lambda} x,y),$$

je

$$[x,\lambda y] = (x,\lambda y) - i\,g(ix,\lambda y)$$

$$(\bar{\lambda} x,y) - i g(i\bar{\lambda}x,y) = [\bar{\lambda}x,y] = \bar{\lambda}[x,y],$$

o znači da je za svako $x,y\in C$ i svako $\lambda\in\Phi$,

$$[x,\lambda y] = \bar{\lambda}\,[x,y].$$

3) Na osnovu 2) (6) je s.i.p na C. On je ograničen liaran funkcional po prvom argumentu, jer je za svako $y\in C$

$$|[x,y]| \leq \|y\|\,\|x\|.$$

ka je $[x,y]_1$ još neki s.i.p na C sa normom $\|\cdot\|$. Tada, na osnovu oreme 1.2.4 svakom vektoru y odgovara jedinstven vektor z takav je

$$[x,y]_1 = [x,z]$$

avimo $z = Sy$. S je jednoznačno definisan operator na C. Prema ne je, za svako $x,y\in C$,

$$[x,y]_1 = [x,Sy] \tag{7}$$

y = x iz ove jednakosti sledi $\|x\|^2 = [x,Sx] \leq \|x\|\,\|Sx\|$ pa je

$$\|Sx\| \geq \|x\| \tag{8}$$

x = Sy iz (7) sledi $\|Sy\|^2 = [Sy,y]_1 \leq \|Sy\|\,\|y\|$.

o de ovde smesto y stavi x, dibiće se

$$\|Sx\| \leq \|x\|. \tag{9}$$

(8) i (9) sledi da je, za svako $x,y\in C$

$$\|Sx\| = \|x\|, \tag{10}$$

nosno

$$[x,Sx] = \|x\|\,\|Sx\|$$

imeni li se teorema 1.2.3 i (10) dobija se, za svako $x \in C$

$$Sx = x,$$

me je dokaz završen.

Posle ove teoreme i nekih rezultata iz [22] smo u sta-
u da navedemo neke konkretnije primene s.i.p.s-ova.

Iz [22, primer 8.1. i primer 8.2.] sledi da je

$$N(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^{p-2}}{\|x\|^{p-2}} x_i y_i .$$

teau izvod u $\ell^p(p>1)$ pa je, na osnovu (4) teoreme 1.3.1.

$$[y,x] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^{p-2}}{\|x\|^{p-2}} x_i y_i .$$

$p = 1$ ℓ^p nije Gâteau diferencijabilan jer je

$$(x,y) = \sum_{x_i \neq 0} \frac{x_i}{|x_i|} y_i + \sum_{x_i = 0} |y_i| , \quad N_-(x,y) = \sum_{x_i \neq 0} \frac{x_i}{|x_i|} y_i - \sum_{x_i = 0} |y_i|$$

se na ℓ ne može definisati s.i.p preko (4).

ično je za Banachove prostore $L^p(0,1)$.

$p > 1$ je

$$N(f,g) = \|f\|^{1-p} \int_0^1 |f|^{p-2} f g \, dt,$$

je

$$[g,f] = \|f\|^{2-p} \int_0^1 |f|^{p-2} f \, dt.$$

$p = 1$ je

$$N_+(f,g) = \int_A \frac{fg}{|f|} dt + \int_B |g| dt, \quad N_-(f,g) = \int_A \frac{fg}{|f|} dt - \int_B |g| dt,$$

je A skup elemenata iz (0,1) za koje je $f \neq 0$ a B njegov kom-
ent.

Problem 1.3.1. Ako je $[\cdot,\cdot]$ realni s.i.p na normiranom
ctoru V nad poljem kompleksnih brojeva, da li je

$$[x,y] - i\,[ix,y] \qquad (x,y \in V)$$

pleksni s.i.p na V ?

Problem 1.3.2. Da li je s.i.p na V jednoznačno odredjen
svojim realnim delom?

1.4. UOPŠTENA GRAMOVA DETERMINANTA I LINEARNA ZAVISNOST VEKTORA U S.I.P.S-OVIMA

Definicija 1.4.1 Uopštenu Gramovu matricu vektora x_1, ..., x_n definišemo sa

$$G(x_1,x_2,\dots,x_n) = \begin{bmatrix} [x_1,x_1] & [x_1,x_2] & \dots & [x_1,x_n] \\ [x_2,x_1] & [x_2,x_2] & \dots & [x_2,x_n] \\ \dots & & & \\ [x_n,x_1] & [x_n,x_2] & \dots & [x_n,x_n] \end{bmatrix}$$

Gramovu determinantu istih vektora sa

$$\Gamma(x_1,x_2,\dots, x_n) = \det G(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Dokazaćemo da u s.i.p.s-u V važi teorema iz unitarnih rostora koja daje potreban i dovoljan uslov za linearnu nezavisost vektora $x_1,x_2, \dots, x_n$ preko Gramove determinante. Daćemo takodje, potreban i dovoljan uslov linearne zavisnosti tih vektora nekim specijalnim s.i.p.s-ovima.

Teorema 1.4.1. Da bi konačan skup vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$ s.i.p.s-a V bio linearno nezavisan potrebno je i dovoljno da se opštena Gramova determinanta $\Gamma(x_1,x_2, \dots, x_n)$ ne anulira.

Dokaz. Posmatrajmo jednakost

(1) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$

Pomnožimo je poluskalarno sa desna vektorom x_k. Imamo

(2) $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, x_k] = 0$

t.

(2') $\lambda_1 [x_1,x_k] + \lambda_2 [x_2,x_k] + \dots + \lambda_n [x_n,x_k] = 0 \quad (k=1,2,\dots, n).$

Da bi ovaj sistem imao samo trivijalna rešenja po nepaznatim λ_i $(i = 1,2,\dots, n)$ potrebno je i dovoljno da bude determinantna sistema različita od nule tj. da je

$$\Gamma(x_1,x_2, \dots x_n) \neq 0$$

<u>Definicija 1.4.2.</u> Kazaćemo da je u s.i.p.s-u V transverzalnost aditivna ako je ispunjen uslov

za svako $x,y,\ z \in V$, za koje je $[z,x] = 0$ i $[z,y] = 0$, sledi

$$[z,x+y] = 0.$$

<u>Teorema 1.4.2.</u> Neka je V s.i.p.s sa osobinom homogenosti i osobinom aditivne transverzalnosti 8. Potreban i dovoljan uslov a je konačan skup vektora $x_1,x_2, \dots, x_n$ iz V linearno zavisan este da se uopštena Gramova determinanta anulira.

<u>okaz</u>. Ako je skup vektora $x_1,x_2, \dots x_n$ linearno zavisan, onda istem (2') ima netrivijalnih rešenja pa determinanta toga sistema, j. determinanta $\Gamma(x_1,x_2,\dots,x_n)$, mora biti jednaka nuli.
brnuto,neka je

$$\Gamma(x_1,x_2,\dots, x_n) = 0,$$

ada sistem (2') ima netrivijalnih rešenja po λ_i $(i = 1,2,\dots, n)$ može se napisati u obliku (2). Ako je vektor $y = \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+ \dots \lambda_n x_n \neq 0$ onda je y transferzalan sa svim vektorima $x_1,x_2,\dots,x_n$ a je na osnovu osobina 4. i 8. transferzalan sa vektorom $y = {}_1x_1+\lambda_2 x_2+ \dots +\lambda_n x_n$ tj. tada je $[y,y] = 0$ odakle sledi da je $= 0$, suprotno pretpostavci.

<u>Teorema 1.4.3.</u> Neka su $x_1,x_2,\dots,x_n$ lienearno nezavisni ektori i vektor x transferzalan ili ortogonalan sa njima. Tada e sistem vektora $x,x_1,x_2,\dots,x_n$ linearno nezavisan.

<u>okaz</u>. Posmatrajno jednakost

3) $\lambda_0 x+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_n x_n = 0$

omnožimo ovu jednakost poluskalarno sa desna redom vektorima x, ${}_1,x_2,\dots, x_n$, dobijamo

$$\lambda_0 \|x\|^2+ \lambda_1[x_1,x] + \lambda_2[x_2,x] + \dots + \lambda_n[x_n,x] = 0$$

$$\lambda_1[x_1,x_1]+ \lambda_2[x_2,x_1] + \dots + \lambda_n[x_n,x_1]= 0$$

$$- - - - - -$$

$$\begin{vmatrix} [\lambda_1 x_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\lambda_2 x_2] & \cdot & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & [\lambda_n x_n] \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} [\lambda_i, x_i] \neq 0$$

a je jednačina (5) zadovoljena jedino kada je $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Za dokaz drugog dela teoreme, posmatrajmo ponovo jednačinu (1). Ako množimo sa desna vektorima $y_1, y_2, \dots, y_n$, redom, dobićemo homogen sistem od n jednačina sa n nepoznatih čija je determinanta $\prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$, različita od nule, pa će jednačina (1) biti zadovoljena jedino trivijalno. Time je dokaz završen.

Neka je C neprekidan, uniformno konveksan i kompletan s.i.p.s i pravi zatvoreni potprostor od C. Teorema 1.2.2. tvrdi da postoji vektor iz x C– ortogonalan na .

Umesno je postaviti pitanje da li postoji transferzalan vektor na potprosto ?

Teorema 1.4.5. Neka je C, konačan neprekidan, uniformno konvensan i kompletan s.i.p.s sa osobinom aditivnosti transferzalnosti 8. i neka je $\mathcal{G}$ pravi zatvoreni potprostor od C. Tada postoji vektor iz $C-\mathcal{G}$ koji je transferzalan na $\mathcal{G}$.

Dokaz. Neka je $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ niz vektora koji razapinju prostor $\mathcal{G}$. Na osnovu teoreme 1.2.2. postoji vektor x ortogonalan na ovaj niz i je na osnovu teoreme 1.4.3. niz vektora $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ linearno nezavisan. Stavimo li u (4) umesto x_n, x i umesto i, n dobićemo vektor y_n, koji je transferzalan sa $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ i različit od nule jer je $[y_n, x] = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) \neq 0$ i $x \neq 0$. Prema teoremi 1.4.3. $y_n \neq 0$. Zbog osobine aditivnosti transferzalnost 8. i osobine homogenosti 4. iz $[y_n, x_i] = 0$ $(i = 1, 2, .., n-1)$ slediće $[y_n, \mathcal{G}] = 0$.

Lako je videti da je $\Gamma(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ ukoliko su $x_1,\ldots,x_n$ uzajamno ortogonalni.

Problem 1.4.1. Da li u svakom s.i.p.s-u iz linearne nezavisnosti vektora $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sledi pozitivnost uopštene Gramove determinante?

Problem 1.4.2. Da li se konačnost u teoremi 1.4.5. može izbaciti pa da teoreme ostaju u važnosti?

1.5. EGZISTENCIJA SKALARNOG PROIZVODA U S.I.P.S-OVIMA

Bez namere da damo neki iscrpniji spisak rezultata o egzistenciji skalarnog proizvoda u normiranim prostorima, navodimo neke koje ćemo koristiti i diskutovati u našim terminima:

Teorema a. (Jordan i Neuman [25]). Potreban i dovoljan uslov da normirani prostor V bude unitaran, jeste da je, za svako $x,y \in V$

1) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$

Teorema b. (Birkoff [6]). Neka je dim $V \geq 3$. Potreban i dovoljan uslov da realan normiran prostor V bude unitaran, jeste da je pseudoortogonalnost simetrična i aditivna. To nije tačno za dim $V = 2$.

Teorema c (Ficken [11]). Potreban i dovoljan uslov da realan normiran prostor V buve unitaran jeste da je, za svako $\lambda \in R$ i svako $x,y \in V$ za koje je $\|x\| = \|y\|$,

2) $\|\lambda x+y\| = \|x+\lambda y\|$

Teorema d (James [22]. Realni normirani prostor V je unitara ako i samo ako je, za svako $x,y \in V$,

3) $N_+(x,\|x\|y) = N_+(y,\|y\|x)$

gde je $N_+(x,y) = \lim\limits_{\lambda \to +0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$.

Teorema e (James [22]). Neka je V realan prostor, za koji je dim $V \geq 3$

je unitaran ako i samo ako iz

$$N_+(x,y) = 0 \quad \text{sledi} \quad N_+(y,x) = 0 \qquad (x,y \in V-\{0\})$$

Teorema f (Joichi [23]). Ako za svako $x,y \in V$ za koje je

$\| x \| = \min_{\lambda \in R} \| x+\lambda y \|$ sledi

(4) $\| x+y \| = \| x-y \|$,

tada je V unitaran.

Teorema g (Joly [24]). Neka je za realni normirani prostor $\dim V \geq 3$.
Potreban i dovoljan uslov da V bude unitaran jeste da je

$$(5) \qquad \sup_{x \perp y} \sup_{\lambda \in R} \frac{\| x \| + \| \lambda y \|}{\| x + \lambda y \|} = \sqrt{2},$$

gde $x \perp y$ označava da je x pseudoortogonalno na y.

Leva strana u (5) se zove konstanta trougla.

M. Leduc [30] je dao nove dokaze teorema a, b, c i e
koristeci Gâteauv izvod norme i teoremu a.

Mi ćemo, dati prostiji dokaz od Jamesovog teoreme d. i
uprostićemo Leducove dokaze teorema b, c i f. Pokazaćemo da je
teorema d. opštija od teoreme c. i takodje da je teorema b. specijalni slučaj teoreme e. Na kraju ćemo, koristeći teoremu a, dati
jednu novu korakteristiku unitarsnih prostora preko tzv. subativnosti s.i.p.-a (Def. 1.5.1.).

Za dokaz teoreme c., Leduc iz uslova (2) lemom 1. pokazuje da norma $\| \cdot \|$ ima Gâteauv izvod. Zatim pomoću još jedne leme koja
daje vezu izmedju izvoda norme u dve različite tačke, uz pomoć teoreme a, dokazuje teoremu c.

Medjutim, posle njegove leme 1., na osnovu (4) teoreme
1.5.1. dobijamo da je, u ovom slučaju, za svako $x,y \in V$

$$\frac{[y,x]}{\| x \|} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\| x+\lambda y \| - \| x \|}{\lambda},$$

gde upotrebljeni s.i.p. $[\cdot,\cdot]$ ima osobinu homogenosti 4.

Kako iz $\| x \| = \| y \|$ sledi $\| x+\lambda y \| = \| \lambda x+y \|$ za svako $\lambda \in R$, to iz

) neposredno dobijamo da je, za svako $x,y \in V$, za koje je $\|x\| = \|y\|$,

) $[x,y] = [y,x]$.

što je s.i.p. $[\cdot,\cdot]$ homogen po oba argumenta onda (7) važi za svako ,$y \in V$, tj. $[\cdot,\cdot]$ je skalarni proizvod. Time se znatno uprošćava ducov dokaz.

Za dokaz teoreme f., Leduc ponovo dokazuje jednu lemu ko- tvrdi da iz uslova (4) sledi diferencijabilnost norme.

Medjutim, iz uslova (4) sledi da je x pseudoortogonalno y, pa je, na osnovu teoreme 1.2.1. $[y,x] = 0$ i ortogonalnost aditivna. Osim toga je, na osnovu (4) teoreme f. i (4) teoreme .3.1.,

$$\frac{[x,y]}{\|y\|} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|y+\lambda x\| - \|y\|}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|y-\lambda x\| - \|y\|}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|-y+\lambda x\| - \|-y\|}{\lambda}$$
$$= \frac{[x,-y]}{\|y\|} = -\frac{[x,y]}{\|y\|},$$

iakle je $[x,y] = 0$ što znači da je ortogonalnost simetrična, pa teorema svedena na teoremu b.

Za dokaz teoreme b. Leduc tvrdi, ne navodeći dokaz, da ona može iskazati ovako: Neka je dim V 3 i neka je norma iferemcijabilna. Tada, ako iz $N(x,y) = 0$ sledi $N(y,x) = 0$ za ,y V $\in$ 0 , prostor V je unitaran.

Medjutim, to je specijalni slučaj Jamesove teoreme e. r se u teoremi e. ne pretpostavlja diferencijabilnost norme.

Pokazali smo da se Leducov dokaz teoreme c. može skrati- ne koristeći njegovu lemu 2, koja glasi: Ako je $\|\cdot\|$ diferencija- lna i ako je ispunjen uslov (2) teoreme c., onda je za svako $y \in V \setminus \{0\}$

$$N(x, \|x\|y) = N(y, \|y\|x).$$

pak znači da su dovoljni uslovi teoreme c. za egzistenciju uni- rnosti jači od dovoljnih uslova teoreme d., odnosno da je teorema d. opštija od teoreme c.

U vezi teoreme f. postavimo

Problem 1.5.1. Kolika je konstanta trougla u neprekidnim s.i.p.s-ovima?

Dokaz teoreme d. ako je V neprekidan s.i.p.s.

Na osnovu Gilesove teoreme 1.3.1. sledi da u neprekidnom s.i.p.s-u postoji $N(x,y)$ a time i $N_+(x,y)$ za svako $x,y \in V$ i da je

$$N_+(x,y) = N(x,y) = \frac{\mathrm{Re}\,[y,x]}{\|x\|}$$

U realnim neprekidnim s.i.p.s-ovima ovo se svodi na

(8) $$N(x,y) = \frac{[y,x]}{\|x\|}.$$

Ako je ispunjen dovoljan uslov teoreme c. tj. ako je za svaki par (x,y)

(9) $$N_+(x, \|x\|\, y) = N_+(y, \|y\|\, x)$$

tada je na osnovu (1), za svako $x,y \in V$

(10) $$\frac{[\|x\|\, y,x]}{\|x\|} = \frac{[\|y\|\, x,y]}{\|y\|}$$

odnosno za svako $x,y \in V$ je

(11) $$[y,x] = [x,y],$$

ta je prostor V unitaran. Obrnuto, ako je prostor V initaran, onda, iz (11) jedna za drugom, redom, slede jednakosti (10), (9) i (3).

U cilju još veće specijalizacije s.i.p.s-ov i približavanja unitarnim prostorima, čini nam se prirodnim sledeći pojam subaditivnosti s.i.p.-a, koji uvodimo sledećom definicijom.

Definicija 1.5.1. S.i.p. $[\cdot,\cdot]$ sa osobinom homogenosti 4. je subaditivan ako je, za svako x,y iz jedinične sfere S i svako realno λ,

5. $$\mathrm{Re}\,[y,x+\lambda y] \leq \mathrm{Re}\,[y,x] + \lambda \|y\|^2.$$

Kao što ćemo videti iz sledeće teoreme, ovom definicijom smo stigli do unitarnih prostora.

Teorema 1.5.1. Potreban i dovoljan uslov da jedan s.i.p.

:e skalarni proizvod jeste da je subaditivan.

:az. Dokažimo, prvo, da je za svako $x,y \in V$ i realno

$$\mathrm{Re}\,[y,x+\lambda y] \leq \mathrm{Re}\,[y,x] + \lambda \|y\|^2$$

:a su x i y različiti od nule. Označimo li $y/\|y\|$ sa y_0 i $x/\|x\|$

x_0, tada x_0 i y_0 pripadaju S pa je

$$\mathrm{Re}[y,x+\lambda y] = \|x\|\,\|y\|\ \mathrm{Re}\left[y_0,x_0 + \frac{\lambda\|y\|}{\|x\|}\ y_0\right]$$

$$\leq \|x\|\,\|y\|\left(\mathrm{Re}\,[y_0,x_0] + \frac{\lambda\|y\|}{\|x\|}\right)$$

$$= \mathrm{Re}[y,x] + \lambda\|y\|^2$$

;le ovoga imamo, za svako $x,y \in V$

$$\|x+y\|^2 = [x+y,\ x+y] = \mathrm{Re}[x+y,\ x+y]$$

$$= \mathrm{Re}\{[x,x+y] + [y,x+y]\} = \mathrm{Re}\,[x,x+y] + \mathrm{Re}\,[y,x+y]$$

$$\leq \mathrm{Re}\,[x,y] + \|x\|^2 + \mathrm{Re}[y,x] + \|y\|^2$$

.

2) $$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + \mathrm{Re}[x,y] + \mathrm{Re}[y,x].$$

:odje je

$$\|x-y\|^2 = \mathrm{Re}[x-y,x-y] = -\mathrm{Re}[x,y-x] - \mathrm{Re}[y,x-y]$$

$$\geq -\mathrm{Re}[x,y] + \|x\|^2 - \mathrm{Re}[y,x] + \|y\|^2$$

.

3) $$\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - \mathrm{Re}[x,y] - \mathrm{Re}[y,x].$$

o se u (12) umesto y stavi -y, a (13) umesto -y stavi y, (12) i

3) prelazi u

2') $$\|x-y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - \mathrm{Re}[x,y] - \mathrm{Re}[y,x]$$

3') $$\|x+y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + \mathrm{Re}[x,y] + \mathrm{Re}[y,x].$$

2) i (13') daju, za svako $x,y \in V$

4) $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \mathrm{Re}[x,y] + \mathrm{Re}\,[y,x]$$

(13) i (12')

5) $$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \mathrm{Re}[x,y] - \mathrm{Re}[y,x].$$

ir (14) i (15) daje, za svako $x,y \in V$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

osnovu [25, p. 721] postoji skalarni proizvod $(\cdot,\cdot)$ takav da je $(x,x) = \|x\|^2$ a teorema 1.1.2. pokazuje da je $[\cdot,\cdot] = (\cdot,\cdot)$.

Posledica teoreme 1.5.3. Funkcional (x,y), definisan na V je skalarni proizvod na V ako ispunjava uslove 1., 2., 4 (za realne skalare) i 9.

1.6. UOPŠTENA POLUDUALNA NORMA NA S.I.P.S.-OVIMA I NEKE PRIMENE

Nekoliko autora: M.G. Krejn [27], M. Nikoljskij [39] Eidelheit [10], W. Rogosinsky i H. Shapiro [41], S. Havinson F. Bonsall [8] razmatrali su problem rastojanja vektora x iz Banachovog prostora V od nekog njegovog potprostora V_1. Dobijene teoreme često se nazivaju teoreme dvojstvenosti, "dualnosti". U njima daje veza izmedju minimalnog rastojanja vektora x od potprostora $V_1 \subset V$ i vrednosti linearnih funkcionala na tom vektoru. Najbolje rezultate u tom smislu dao je A.L. Garakavi [15] koji je potprostor V_1 zamenio konveksnim skupom.

N.H. Vinh [45] je definisao na C^n tzv. relativnu uopštenu dualnu polunormu neke neeuklidske norme i preko nje izrazio minimalno rastojanje po toj neeuklidskoj normi, nekog elementa x iz od potprostora $G \subset C^n$. Relativnost je vezana za proizvoljnost potprostora G . Takvo prikazivanje rastojanje elementa x od potprostora G, mu je dobro poslužio da odredi minimalno rastojanje jednog polinoma od skupa polinoma koji imaju jedan koren čija je višestrukost manja ili jednaka τ.

Mi ćemo ovde uvesti još opštiji pojam od relativne uopštene dualne polunorme iz [45], iskoristiti jedan rezultat Garakavi [15] i neke Gilesove rezultate da bi dokazali opštiji rezultat glavnog rezultata iz [45] i da dobijemo dve teoreme o analitičkim ıkcijama koje su analogne teoremama o polinomima iz [45].

Definicija 1.6.1. Neka je E potskup s.i.p.s-a V.

E^{L} je skup svih elemenata iz V ortogonalnih na E.

$E^{\lrcorner}$ je skup svih elemenata iz V transferzalnih na E.

$E^{\perp}$ je skup svih linearnih funkcionala iz V koji se anulira-

na E.

Kazaćemo da je E^{L} ortogonalan na E (desno ortogonalan), je transferzalan na E (levo ortogonalan) i da je $E^{\perp}$ anulator upa E.

Iz ove definicije slede simboličke jednakosti:

$[E,E^{L}] = 0$, $[E^{\lrcorner}, E] = 0$, $E^{\perp}(E) = 0$

Jednostavna je činjenica i dobro poznata da je $E^{\perp}$ zatren potprostor prostora V [38, p.88]. Za E^{L} i $E^{\lrcorner}$ važi

Teorema 1.6.1. 1) $E^{\lrcorner}$ je zatvoren potprostor prostora V.

2) Ako je V neprekidan, uniformno konveksan i kompletan i.p.s. onda postoji bijektivno preslikavanje od E^{L} na $E^{\perp}$.

3) $E \subset (E^{\lrcorner})^{L}$.

4) $E \subset (E\ )$.

kaz. 1) Neka su x_1 i x_2 iz $E^{\lrcorner}$. Tada je $[x_1,E] = 0$ i $[x_2,E] = 0$ odatle je $[x_1+x_2,E] = 0$ što znači da je $x_1+x_2 \in E^{\lrcorner}$.
$x \in E^{\lrcorner}$ i $\lambda \in \Phi$ sledi $\lambda[x,E] = 0$ tj. $[\lambda x,E] = 0$ pa je $\lambda x \in E^{\lrcorner}$.
a je dalje, $x_n \in E^{\lrcorner}$, $x \in V$ i $x_n \to x$ kad $n \to \infty$. Tada je, za svan, $[x_n,E] = 0$, pa $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n,E] = 0$ odakle je $[\lim\limits_{n\to\infty} x_n,E] = 0$.
či da $x \in E^{\lrcorner}$.

2) Neka je $f \in E^{\perp}$. Na osnovu teoreme 1.2.4. postoji jedinven vektor y takav da je, sa svako $x \in V$, $f(x) = [x,y]$. Pošto je) = 0 to je $[E,y] = 0$ što znači da je $y \in E^{L}$.

3) Iz $[E^{\perp},E] = 0$ sledi $E \subset (E^{\perp})^{L}$.

4) Iz $[E,E^{L}] = 0$ sledi $E \subset (E^{L})^{\perp}$.

5) Ako je $(E^{\perp})^{L} = E$ tada je $[E,E^{\perp}] = 0$ a ovo znači je $E^{\perp} = E^{L}$ tj. da je ortogonalnost simetrična. Na osnovu teoreme i teoreme 1.1.2. sledi da je $[\cdot,\cdot]$ skalarni proizvod. Obrnuto, ako $[\cdot,\cdot]$ skalarni proizvod, tada je ortogonalnost simetrična pa je $E^{\perp} = E^{L}$ i prema tome $(E^{\perp})^{L} = E$.

Slično se dokazuje za jednakost u 4).

Definicija 1.6.2. Neka je G potprostor prostora V, $x \in V$, $x' \in G$ i $h \in G^{L}$. Ako je $x = x' + h$, onda x' zovemo projekcijom vektora na potprostor G i obeležavamo ga sa x_G, a h projekcijom vektora na skup G^{L} i obeležavamo da sa x_{G^L}.

Ako je G zatvoren potprostor neprekidno uniformno konksnog i kompletnog s.i.p.s-a V tada postoji jedinstvena prijakja x_{G^L} (Teor, 1.2.2.) i jedinstveno razlaganje

$$x = x_G + x_{G^L} \tag{}$$

$$x = x_{G'} + x_{(G')^L} \tag{}$$

imetimo odmah da je

$$\| x_{(G^{\perp})^L} \| \leq \| x \| \tag{}$$

ista, ako se (2) pomnoži poluskalarno sa desna vektorom x, bijamo $[x, x_{(G^{\perp})^L}] = \| x_{(G^{\perp})^L} \|^2$ odakle, i zbog aksioma 3. sledi nejedkost (3).

Definicija 1.6.3. Neka je E potskup od V i $n(\cdot)$ proizljna norma na V ekvivalentna sa normom $\|\cdot\|$ koja izvire iz s.i.p.-a V. Uopštenu poludualnu normu na V, u odnosu na E, definišemo

$$n_E^{*}(x) = \sup_{y \in E \setminus \{0\}} \frac{|[x,y]|}{n(y)}$$

Ako je $[\cdot,\cdot]$ skalarni proizvod ova se definicija poklapa definicijom iz [44]. Osnovne osobine uvedene uopštene polunore kazuje

Teorema 1.6.2. 1) $n_V^*(x) = n^*(x)$ je obična dualna norma

2) Ako je $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n$, tada je

$$n_{E_1}^*(x) \le n_{E_2}^*(x) \le \dots \; n_{E_n}^*(x)$$

3) $n_E^*(x)$ je polunorma.

4) $n_{\mathcal{G}}^*(x) = n_{\mathcal{G}}^*(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp})$

5) Ako $x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp} \in \mathcal{G}$ tada je $(n_{\mathcal{G}}^*)_{\mathcal{G}}^*(x) = n(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp})$

6) Ako $x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp} \in \mathcal{G}$ tada je $(n^*)_{\mathcal{G}}^*(x) \le \min\{n(x), n(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp})\}$.

okaz. 1) i 2) neposredno slede iz definicije 1.6.3.

3) Iz $n_E^*(x) = 0$ sledi $[x,E] = 0$ tj. $x \in E^\perp$, a $E^\perp$ je, na snovu 1) predhodne teoreme, potprostor prostora V. Osim taga je

$$n_E^*(\lambda x) = \sup_{y\in E-\{0\}} \frac{|[\lambda x,y]|}{n(y)} = |\lambda| \sup_{y\in E-\{0\}} \frac{|[x,y]|}{n(y)} = |\lambda| n_E^*(x).$$

$$n_E^*(x_1+x_2) = \sup_{y\in E-\{0\}} \frac{|[x_1+x_2,y]|}{n(y)} \le \sup_{y\in E-\{0\}} \frac{[x_1,y]}{n(y)} + \sup_{y\in E-\{0\}} \frac{|[x_2,y]|}{n(y)}$$

$$= n_E^*(x_1) + n_E^*(x_2).$$

4) Napišimo x u obliku $x = x_{\mathcal{G}^\perp} + x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}$. Posle ovoga je

$$n_{\mathcal{G}}^*(x) = \sup_{y\in E-\{0\}} \frac{|[x,y]|}{n(y)} = \sup_{y\in \mathcal{G}-\{0\}} \frac{|[x_{\mathcal{G}^\perp} + x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}, y]|}{n(y)}$$

$$= \sup_{y\in \mathcal{G}-\{0\}} \frac{|[x_{\mathcal{G}^\perp},y] + [x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}, y]|}{n(y)} = \sup_{y\in \mathcal{G}-\{0\}} \frac{|[x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}, y]|}{n(y)} = n_{\mathcal{G}}^*(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}).$$

5) Na osnovu 4) je $(n_{\mathcal{G}}^*)_{\mathcal{G}}^*(x) = (n_{\mathcal{G}}^*)_{\mathcal{G}}^*(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}) = n(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp})$.

6) Na osnovu 2) je $n^*(x) = n_V^*(x) \ge n_{\mathcal{G}}^*(x)$,

je

$$(n^*)_{\mathcal{G}}^*(x) = \sup_{y\in \mathcal{G}-\{0\}} \frac{|[x,y]|}{n^*(y)} \le \sup_{y\in \mathcal{G}} \frac{|[x,y]|}{n_{\mathcal{G}}^*(y)} = \sup_{y\in \mathcal{G}-\{0\}} \frac{|[x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp},y]|}{n(y)}$$

$$= (n_{\mathcal{G}}^*)_{\mathcal{G}}^*(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}) = n(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp}).$$

kodje je $(n^*)_{\mathcal{G}}^*(x) = (n_V^*)_{\mathcal{G}}^*(x) \le (n_V^*)_V^*(x) = n(x)$.

ema tome je

$$(n^*)_{\mathcal{G}}^*(x) \le \min\{n(x), n(x_{(\mathcal{G}^\perp)^\perp})\}.$$

Teorema 1.6.3. Neka $x \notin \bar{\mathcal{G}}$, Stavimo $\delta_{\mathcal{G}}(x) = \inf_{y \in \mathcal{G}} n(x-y)$

[ta]da je:

1) $\delta_{\mathcal{G}}(x) = (n^*)^*_{\mathcal{G}^\perp}(x)$

2) $\delta_{\mathcal{G}}(x) = \frac{\| x_{\mathcal{G}^\perp}\|^2}{n^*(x_{\mathcal{G}^\perp})}$, ako je dim $\mathcal{G}$ = dim V - 1.

[Do]kaz. 1) Iz teoreme 1 Garakavija [15] alede rezultati koji se [na]laze u [27], [39], [10], [41], [20] i [8] i koji se odnose na rasto[ja]nje vektora od potprostora Banachovog prostora. Taj zajednički [re]zultat može ovako da se iskaže: Za svaki potprostor Banachovog [p]rostora V i elemenat $x \in V$ koji nepripada $\bar{\mathcal{G}}$ ($\bar{\mathcal{G}}$ je zatvorenje od $\mathcal{G}$) [va]ži jednakost

$$(4) \qquad \inf_{y \in \mathcal{G}} \|x-y\| = \max_{\substack{f \in \mathcal{G}^\perp \\ f(x) \geq 1}} \left(\frac{1}{\|f\|}\right) = \max_{\substack{f \in \mathcal{G}^\perp \\ \|f\| = 1}} |f(x)|$$

[Po]što je norma $n(\cdot)$ ekvivalentna sa normom $\|\cdot\|$ to je, na osnovu (4)

$$\delta_{\mathcal{G}}(x) = \inf_{y \in \mathcal{G}} n(x-y) = \max_{\substack{f \in \mathcal{G}^\perp \\ \|f\|_n = 1}} |f(x)| ,$$

[gd]e je $\|f\|_n$ norma funkcionala f inducirana normom $n(\cdot)$ vektora. [Pr]imenimo li teoremu 1.2.4. i 2) iz teoreme 1.6.1. zaključujemo da [p]ostoji jedinstven vektor $y \in \mathcal{G}^\perp$ takav da je $\|f\| = \|y\|$ i da je, za [sv]ako $x \in V$

$$f(x) = [x,y].$$

[Pored]im toga je po definiciji

$$\|f\|_n = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{n(x)} = \sup_{x \neq 0} \frac{|[x,y]|}{n(x)} = n^*(y),$$

[p]a se može pisati

$$\delta_{\mathcal{G}}(x) = \max_{\substack{y \in \mathcal{G}^\perp \\ n^*(y)=1}} |[x,y]| = \max_{y \in \mathcal{G}^\perp - \{0\}} \frac{|[x,y]|}{n^*(y)} = (n^*)^*_{\mathcal{G}^\perp}(x).$$

2) Ako je dim $\mathcal{G}$ = lim V-1, tada postoji jedinstven vek[to]r $x_{\mathcal{G}^\perp}$ takav da je $x = x_{\mathcal{G}} + x_{\mathcal{G}^\perp}$. U tom slučaju je $\mathcal{G}^\perp = \{\lambda x_{\mathcal{G}^\perp} \mid \lambda \in \Phi\}$ [p]a je

$$\max_{y \in G^{\perp}-\{0\}} \frac{|[x,y]|}{n(y)} = \max_{y \in G^{\perp}-\{0\}} \frac{|[x_{G^{\perp}},y]|}{n^*(y)} = \frac{\|x_{G^{\perp}}\|^2}{n^*(x_{G^{\perp}})}$$

j. $$\delta_G(x) = \frac{\|x_{G^{\perp}}\|^2}{n'(x_{G^{\perp}})}.$$

Ako je $[\cdot,\cdot]$ skalarni proizvod i $V = C^n$, onda 1) i 2) ve teoreme daju redom b. i a. teoreme 1. iz [44].

Teorema 1.6.4. Neka je V saparabilan Hilbertov prostor, $y_1 = (y_1^1, y_1^2, \ldots)$, $y_2 = (y_2^1, y_2^2, \ldots)$, ..., $y_k = (y_k^1, y_k^2, \ldots)$ vektori iz V i $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ vektor iz prostora C^k. Tada je

$$\delta \overset{\text{Def}}{=} \min_x \{n(x) \mid Yx = C\} = (n^*)^*_G(x).$$

de je Y matrica čiji su kolone vektori $y_1, y_2, \ldots, y_k$ a C jednokolona matrica sa elementima $c_1, c_2, \ldots, c_k$. G je potprostor nad vektorima $y_1, y_2, \ldots, y_k$ i x_o jedno rešenje jednačine

(5) $$Yx = C.$$

Dokaz. Po svojoj definiciji δ nije ništa drugo nego minimalno rastojanje 0 vektora od skupa X svih rešenja sistema (5). Označimo sa N jezgro matrice Y tj. skup svih rešenja jednačine $Yx = 0$. Lako je videti da je N potprostor V. Ako je x_o vektor koji zadovoljava sistem (5) i $x \in N$, tada je $x_o - x$ rešenje sistema (5). Osim toga bilo koje rešenje sistema (5) može da se napiše u obliku $x_o - x$ de $x \in N$. Zato je

$$\delta = \min_{x \in N} n(x_o - x) = \delta_N(x_o).$$

Na osnovu predhodne teoreme je $\delta_N(x_o) = (n^*)^*_{N^{\perp}}(x_o)$.

Kako je, za svako $x \in N, (x, y_i) = 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$, to je za svako $i = 1,2,\ldots,k$ $y_i \in N^{\perp}$. Stavimo li $N^{\perp} = G$ dobijamo da je

$$\delta = (n^*)^*_G(x_o)$$

Pošto je N potprostor Hilbertovog prostora to je i $N^{\perp}$ potprostor, odnosno G je potprostor nad vektorima $y_1, y_2, \ldots y_k$.

Specijalan slučaj ove teoreme je teoreme 2 iz [45] kada umesto V uzme C^n.

Navešćemo još teoreme koje iskazuju primenu ove teoreme.

Teorema 1.6.5. Neka je $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ analitička funkci-

a za koju je

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$$

. vektor $a = (a_0, a_1 a_2, \ldots) \in \ell^2$ i neka su $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ kompleksni

ojevi iz otvorenog jediničnog kruga $k = \{z / |z| < 1\}$. Označimo sa

$\delta(f,g) \overset{Def}{=} n(a-b)$ gde je $b = (b_0, b_1, \ldots) \in \ell^2$ takav da su $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$

le funkcije $g(z) = \sum_{k=0} b_k z^k$. Tada je

$$\delta(f) \overset{Def}{=} \min\{\delta(f,g) / g(\xi_i) = 0, \ i = 1,2,\ldots,k\} = (n^*)^*_G(a)$$

e je G potprostor prostora ℓ^2 nad vektorima

$$y_1 = (1, \xi_1, \xi_1^2, \ldots)$$

$$y_2 = (1, \xi_2, \xi_2^2, \ldots)$$

$$\cdots$$

$$y_k = (1, \xi_k, \xi_k^2, \ldots)$$

kaz. Vektori $y_1, y_2, \ldots, y_k$ su iz ℓ^2. Uslov $g(\xi_i) = 0$ $(i = 1,2,\ldots k)$

že da se napiše u obliku

) $\qquad Yb = 0,$

e je Y beskonačna matrica čije su vrste koordinate vektora

$, y_2, \ldots, y_k$ a b vektor, jednokolona matrica. Skup N vektora ko-

zadovoljavaju (7) je potprostor prostora ℓ^2 pa je na osnovu

edhodne teoreme

$$\delta(f) = \delta^*_N(a) = (n^*)^*_G(a)$$

e je G ortogonalni komplement prostora N.

Ove teorema omogućava da se nadje minimalno rastojanje

te analitičke funkcije koja ispunjava uslov (6) od skupa svih

alitičkih funkcija koje ispunjavaju isti uslov i imaju nule u

čkama $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ iz unutrašnjosti jediničkog kruga K.

Ako se u ovoj teoremi umesto prostora ℓ^2 uzme prostor C^n

bija se teorema iz [44] koja daje odgovarajući iskaz o polinomima ıji je stepen $\leq$ n-1.

Sledeća teorema daje minimalno rastojanje jedne anali-ıčke funkcije od skupa analitičkih funkcija koje imaju r-tostruki ɔren u jediničkom krugu i koje zadovoljavaju uslov (6).

<u>Teorema 1.6.6.</u> Neka je f(z) funkcija iz predhodne teo-ɜme i g(z) koja pored uslova (6) ima r-tostruki koren i promenlji-ɔj tački ξ unutrašnjosti jediničkog kruga k. Tada je

$$\delta_r(f) \overset{\mathrm{Def}}{=} \min_{\xi} d(f,g) = \min_{\xi} (n')_{G_\xi}(a)$$

le je G_ξ potprostor nad vektorima

$$y_1 = (1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^n, \ldots)$$
$$y_2 = (0, 1, 2\xi, \ldots\ n\xi^{n-1}, \ldots)$$
$$- - - - - - -$$
$$y_r = (0, 0, \ldots, 0, (r-1)!, \ldots, n(n-1)\ldots(n-r+2)\xi^{n-r}, \ldots).$$

<u>ɔkaz</u>. Vektori $y_1, y_2, \ldots, y_r$ pripadaju ℓ^2 i dokaz je analogan doka-ı u predhodnoj teoremi.

Ako se i ovde umesto ℓ^2 uzme C^n dobija se sličan iskaz polinomima iz [44].

Napomenimo da se u Hilbertovim prostorima $\delta_G(x)$ lako iz-čunava formulom

$$) \qquad \delta_G(x) = \left[\frac{\Gamma(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)}{\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_k)} \right]^{1/2}$$

e je G potprostor nad vektorima $y_1, y_2, \ldots, y_k$ a Γ Gramova deter-nanta ovih vektora. [27 p. 381]

<u>Problem 1.6.1.</u> Da li formula (8) ostaje u važnosti, sa zirom na definiciju 1.4.1., u neprekidnim, uniformno konveksnim kompletnim s.i.p.s-ovima?

2. KOORDINATIZACIJA S.I.P.S-OVA

2.1. ORTONORMIRANA BAZA U S.I.P.S-OVIMA

U svakom Hilbertovom prostoru H postoji tzv. ortonormi-ana baza prostora tj. najviše probrojiv skup jediničnih uzajamno ormalnih vektora iz H preko kojih se svaki vektor iz H može i-iti preko tih vektora, u obliku linearne kombinacije tih vektora. o u mnogome olakšava rešavanje raznih problema, a mnogi problemi e mogu rešiti jedino metodom koordinata, koja se zasniva na oso-inama ortonormirane baze.

Prirodno je postaviti pitanje da li u jednom s.i.p.s-u ostoji skup vektora koji uopštava pojam ortonormirane baze iz H-rostora. U ovom delu našeg izlaganja cilj nam je da odgovorimo a to pitanje. Pokazaćemo da uz izvesna ograničenja, uvodeći opšti-e pojmove, teorija koja uvodi ortonormiranu bazu u H-prostorima ostaje specijalan slučaj slične teorije u nekim s.i.p.s-ovima, ko poluskalarni proizvod postane skalaran proizvod. Pri tome će-o se koristiti standardnim postupkom dokaza postojanja baze u H-rostorima. Specijalno, ovde smo izabrali postupak dokaza koji je zložen u knjizi S. Aljančića [1]. Neki stavovi se bitno ne razli-uju od odgovarajućih stavova u H-prostorima, ali neki zahtevaju osebnu pažnju zbog nesimetričnosti ortogonalnosti u s.i.p.s-ovima.

<u>Definicija 2.1.</u> Skup vektora $\{e_i\}_{i\in I}$ u s.i.p.s-u V obrazu-e ortonormiran sistem ako je, za svako $i,j \in I$,

$$[e_i, e_j] = [e_j, e_i] = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i = j \\ 0 & \text{ako je } i \neq j \end{cases}$$

kup indeksa I može biti konačan, prebrojiv ili neprebrojiv. U ne-im s.i.p.s-ovima postoje ortonormirani sistemi. Tako u [illegible] niz ektora

$$e_1 = (1,0,0, \dots)$$
$$e_2 = (0,1,0, \dots)$$
$$- - - - - - -$$
$$e_n = (0,0,0,\underbrace{\dots 0,1}_{n},0,\dots)$$

obrazuje ortonormirani sistem, jer iz

$$[y,x] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^{p-2}}{\|x\|^{p-2}} x_i y_i ,$$

a $x = e_p$ i $y = e_q$ sledi

$$[e_p, e_q] = [e_q, e_p] = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

Osim toga ovaj niz je fundamentalan u ℓ^p (1, primer 4). Označimo ovaj sistem sa $\mathcal{E}$.

Vektori iz jednog ortonormiranog sistema su linearno nezavisni. Zaista, kada bi vektori bili linearno zavisni postojale i konstante, na primer $\lambda_1 \neq 0$, takva da je

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$$

množeći ovu jednakost s desna poluskalarno vektorom e_1 dobijamo

$$\lambda_1 [e_1, e_1] + \lambda_2 [e_2, e_1] + \dots + \lambda_n [e_n, e_1] = 0$$

dakle sledi da je $\lambda_1 = 0$ što je suprotno pretpostavci.

<u>Definicija 2.2.</u> Neka je $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in I}$ ortonormirani sistem u s.i.p.s-u V i $x \in V$. Leve i desne Fourierove koeficijente vektora x u odnosu na sistem $\mathcal{E}$ definišemo respektivno sa

$$\hat{x}_i = [x, e_i],$$
$$\check{x}_i = [e_i, x] .$$

U unitarnim prostorima je $\check{x}_i = \overline{(\hat{x}_i)}$ gde $-$ označava konjugaciju.

<u>Teorema 2.1.1.</u> Neka je $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormirani sistem u s.i.p.s-u V i neka je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i .$$

Tada je $\lambda_i = \hat{x}_i$ i $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \check{x}_i$

...kaz. Pomnožimo s desna jednakost $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ vektorom e_j. Dobija-

$$[x, e_j] = [\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [e_i, e_j] = \lambda_j,$$

...j. za $j = 1,2,\dots, n$ je $\lambda_j = \hat{x}_j$

...ožeći sada s desna jednakost $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ vrektorom x dobijamo

$$[x,x] = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} [x, e_i, x] = \sum_{i=1}^{n} [x, e_i][e_i, x] = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \check{x}_i .$$

Definicija 2.1.3. Neka je $\mathcal{E}$ ortonormirani sistem u s.i.p. ...u V, koji ima osobinu 4. Kazaćemo da je s.i.p.s V transverzalno ...imetričan u odnosu na sistem $\mathcal{E}$ ako se svako $x \in V$, za koje je $\hat{x}_i = 0$, ...ledi $\check{x}_i = 0$ i ako je, za svako $x \in V$, $\hat{x}_i \check{x}_i \geq 0$.

Postoje s.i.p,s-ovi koji imaju osobinu transverzalne ...imetričnosti u odnosu na odredjeni ortonormirani sistem. Ponovo ... to prostor ℓ^p $(p > 2)$ i njegov ortonormirani sistem $\mathcal{E}$. Zaista, ...ko je $x = (x_1, x_2, \dots)$ vektor iz ℓ^p tada je

$$\hat{x}_i = [x, e_i] = x_i \quad \text{i} \quad \check{x}_i = [e_i, x] = \frac{|x_i|^{p-2}}{\|x\|^{p-2}} x_i$$

...a iz $\hat{x}_i = 0$ sledi $\check{x}_i = 0$ za svako $i = 1,2,\dots$.

...sim toga je, za svako $i = 1,2, \dots$, $[x, e_i][e_i, x] = \hat{x}_i \check{x}_i = \frac{|x_i|^{p}}{\|x\|^{p-2}} \geq 0$

Teorema 2.1.2. Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirani sistem u ...i.p.s-u V u odnosu na koji je V transverzalno simestričan. Tada ..., za $x \in V$,

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \check{x}_i \leq \|x\|^2 .$$

...okaz. Stavimo $h = x - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i$. Množeći ovu jednakost s desna vek-...orom e_j dobijamo $[h, e_j] = 0$, $j = 1,2,\dots,n$, pa je $[e_j, h] = 0$. ...rema tome je $e_1, e_2, \dots, e_n$ —— ortonormiran sistem u V. Ako se ...ada jednakost $x = h + \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i$ pomnoži s desna vektorom h dobijamo ...$[x, h] = \|h\|^2$ ili $\|h\| = [x, \frac{h}{\|h\|}]$. Koristeći ovu jednakost napišimo ...ektor x u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i + \|h\| \frac{h}{\|h\|} = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i + [x, \frac{h}{\|h\|}] \frac{h}{\|h\|} .$$

Na osnovu predhodne teoreme je

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \check{x}_i + \left[x, \frac{h}{\|h\|}\right] \left[\frac{h}{\|h\|}, x\right]$$

pošto je $\left[x, \frac{h}{\|h\|}\right] \left[\frac{h}{\|h\|}, x\right] \geq 0$, dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \check{x}_i \leq \|x\|^2.$$

<u>Teorema 2.1.3.</u> Neka je $\{e_i\}_{i\in I}$ ortonormiran sistem u s.i.p.s-u V u odnosu na koji je V transverzalno simetričan. Tada, za svako $x \in V$, u skupu $\{\hat{x}_i \check{x}_i\}_{i\in I}$ ima najviše prebrojivo mnogo članova koji su različiti od nule, bez obzira kakvog je kardinalnog broja skup indeksa I.

<u>Dokaz</u>. Uočimo skup $E_n = \{\hat{x}_i \check{x}_i \mid \hat{x}_i \check{x}_i > \frac{1}{n^2}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Predposvavimo da $\hat{x}_{i_1} \check{x}_{i_1}, \ldots, \hat{x}_{i_k} \check{x}_{i_k} \in E_n$. Tada je

$$k \frac{1}{n^2} \leq \sum_{j=1}^{k} \hat{x}_{i_j} \check{x}_{i_j} \leq \|x\|^2$$

tj

$$k \leq n^2 \|x\|^2.$$

Dakle za fiksirano n, postoji samo konačno mnogo elemenata u E_n pa time njih najviše prebrojivo mnogo u $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Tim pre je konačno mnogo različitih od nule levih Fourierovih koeficijenata $\hat{x}_i$.

<u>Posledica teoreme 2.1.3.</u> Sume

$$\sum_{i\in I} \hat{x}_i \check{x}_i \qquad \text{i} \qquad \sum_{i\in I} \hat{x}_i e_i,$$

posle izostavljanja sabiraka u kojima se Fourievovi koeficijenti jednaki nuli, i uredjivanja preostalih, mogu da se napišu, respektivno, u obliku

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \check{x}_i \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i .$$

<u>Teorema 2.1.4.</u> Neka je $\{e_i\}_{i\in I}$ ortonormirani sistem u s.i.p.s-u V u odnosu na koji je V transverzalno simetričan. Tada je

$$(2) \qquad \sum_{i\in I} \hat{x}_i \check{x}_i \leq \|x\|^2.$$

slučaju da je V unitaran prostor nejednačina (2) je Besselova nejednačina.

Dokaz teoreme 2.1.4. Na osnovu teoreme 2.1.2. za svako $x \in V$ i konačno n je

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \check{x}_i \leq \|x\|^2$$

pa su delimične sume reda $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \check{x}_i$ ograničene. Pošto je to red sa pozitivnim članovima, on bezuslovno konvergira, pa će važiti

$$\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \check{x}_i = \|x\|^2$$

Primer s.i.p.s-a ℓ^p $(p > 2)$ sa njegovim ortonormiranim sistemom $\mathcal{E}$ pokazuje da postoje netrivijalni s.i.p.s-ovi sa ortonormiranim sistemima u odnosu na koje su transverzalno simetrični, i odnosu na koji, za svaki vektor x, konvergira red

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \, .$$

Zaista, u ℓ^p delimična suma reda (3) je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} [x, e_i]\, e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

pa je $\|s_n\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, odakle sledi da je $\lim_{n\to\infty} \|s_n - x\| = 0$.

Definicija 2.1.4. Ortonormirani sistem $\{e_i\}_{i\in I}$ je maksimalan u V ako nije pravi deo nekog drugog prtonormiranog sistema u V.

Lema 2.1. Ne postoji vektor različit od nule koji je transverzalan na potpuni ortonormirani sistem $\mathcal{E}$ u odnosu na koji je V transverzalno simetričan.

Dokaz. Neka je $x \neq 0$, $x \in V$ takav da je $[x, e_i] = 0$ tada bi bilo $[e_i, x] = 0$ a to znači da bi sistem

$$\left\{\frac{x}{\|x\|}\right\} \cup \mathcal{E}$$

bio potpuni ortonormirani sistem u V a $\mathcal{E}$ njegov pravi deo, suprotno pretpostavci.

Teorema 2.1.5. U svakom s.i.p.s-u V ($V \neq 0$) postoji pot-
un ortonormiran sistem.

Dokaz. Pošto svaki s.i.p.s ima ortonormiran sistem, jer je takav na primer jedan jedinični vektor, dovoljno je pokazati da je svaki ortonormirani sistem $\mathcal{E}$ iz V sadržan u nekom ortonormiranom sistemu $\mathcal{E}'$ iz V. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih ortonormiranih sistema iz V koji sadrže $\mathcal{E}$. Kako je $\mathcal{A}$ delimično uredjen skup u odnosu na relaciju inkluzije $\subset$, na osnovu Hausdorffovog stava, u njemu postoji jedan maksimalni lanac L. Neka je $\mathcal{E}'$ unija svih elemenata lanca L. Sigurno je, prema tome, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, pa je dovoljno pokazati da je $\mathcal{E}'$ potpun ortonormirani sistem. Uzmimo dva proizvoljna elementa e_1, $e_2 \in \mathcal{E}'$. Neka je $e_1 \in \mathcal{E}_1$ i $e_2 \in \mathcal{E}_2$ gde su $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ ortonormirani sistemi lanca L. To znači da možemo pretpostaviti da je $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, odakle sledi da je $e_1 \in \mathcal{E}_2$ pa je

$$[e_1, e_2] = [e_2, e_1] = \begin{cases} 1 & \text{ako je } e_1 \in \mathcal{E}_1 \\ 0 & \text{ako je } e_2 \in \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

znači da je $\mathcal{E}'$ ortonormiran sistem. Ako $\mathcal{E}'$ ne bi bio potpun, onda bi postojao ortonormiran sistem $\mathcal{E}^*$ takav da je $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}^*$ ($\mathcal{E}' \neq \mathcal{E}^*$) ali to bi značilo da L nije maksimalan lanac, jer bi $\{L \cup \mathcal{E}^*\}$ bio lanac. To je u suprotnosti sa pretpostavkom pa je $\mathcal{E}'$ maksimalan ortonormirani sistem u V, što je i trebalo da se dokaže.

Sada smo u mogućnosti da dokažemo glavnu teoremu ovog izlaganja, o reprezentaciji norme i poluskalarnog proizvoda u nekim s.i.p.s-ovima.

Teprema 2.1.6. Neja $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in I}$ ortonormirani sistem s.i.p.s-a V u odnosu na koji je V transverzalno simetričan i u odnosu na koji, za svako $x \in V$, red (3) konversira. Tada su medjusobom ekivalentni iskazi:

1° $\mathcal{E}$ je maksimalan ortonormiran sistem u V.

2^o $\mathcal{E}$ je fundamentalan niz u V.

3^o Za svaki vektor x iz V je $x = \sum_{i \in I} \hat{x}_i e_i$

4^o Za svaki vektor x iz V je $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \hat{x}_i \check{x}_i$

5^o Za svaki par vektora (x,y) iz V je $[x,y] = \sum_{i \in I} \hat{x}_i \check{y}_i$

Zbirovi u 3^o,4^o i 5^o, posle teoreme 2.1.3., možemo smatrati da imaju najviše prebrojivo mnogo sabiraka različitih od nule. U slučaju da je V Hilbertov prostor jednakost iz 5^o se svodi na Parsevalovu jednakost.

Dokaz teoreme 2.1.6. Pokazaćemo da $1^o \Rightarrow 3^o \Rightarrow 2^o \Rightarrow 1^o$ i $3^o \Rightarrow 5^o \Rightarrow 4^o \Rightarrow 1^o$

$1^o \Rightarrow 3^o$. Napišimo razvoj $\sum_{i \in I} x_i e_i$, posle uredjivanja Fourierovih koeficijenata koji su različiti od nule, u niz, u obliku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i .$$

Iz konvergencije reda (3) sledi da je $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i$ vektor iz V. Označimo ga sa y. Neka je još $h = x-y=x- \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i$. Tada je za svako $n > j$

$$[x- \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i, e_j] = [x, e_j] - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i [e_i, e_j] = [x, e_j] - \hat{x}_j = 0$$

tj.

$$[x - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i, e_j] = 0 .$$

Uzumajući limes po n i koristeći neprekidnost s.i.p-a po prvom argumentu, dobijamo za svako $j = 1,2,\dots$

$$[x - \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i, e_j] = 0$$

ili

$$[h, e_j] = 0 .$$

To znači da je h transverzalan na $\mathcal{E}$ pa je na osnovu leme 2.1.1. $h = 0$. Drugim rečima je $x = y$ ili $x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i$

$3^o \Rightarrow 2^o$. Neka je L potprostor nad $\mathcal{E}$ i $x \in V$. Tada za svako n vektor $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i \in L$ pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji takvo n da je

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i \| < \varepsilon .$$

Ovo pak znači da je L svuda gust u V.

$2^o \Rightarrow 1^o$. Pretpostavimo da $\mathcal{E}$ nije maksimalan sistem, tj. da postoji vektor $h \neq 0, (h \in V)$, takav da je $[h, \mathcal{E}] = 0$ i $[\mathcal{E}, h] = 0$. Tada je $[\bar{L}, h] = 0$, gde je $\bar{L}$ zatvorenje od L. Kako je, na osnovu 2^o, $\bar{L} = V$, zaključujemo da je $[h, h] = \|h\|^2 = 0$ pa je $h = 0$, suprotno pretpostavci.

$3^o \Rightarrow 5^o$. Neka je y proizvoljni elemenat iz V. Tada je za svaki prirodni broj n

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i, y\right] = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \check{y}_i$$

Uzimajući limes po n, u ovoj jednakosti, i koristeći neprekidnost s.i.p.-a po prvom ergumentu dobijamo

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i, y\right] = [x, y] = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \check{y}_i .$$

Ako se zbiru na desnoj strani dodaju i oni sabirci za koje su Fourierovi koeficijenti jednaki nuli, zbir se neće promeniti pa je za svako $x, y \in V$

$$[x, y] = \sum_{i \in I} \hat{x}_i \check{y}_i .$$

$5o \Rightarrow 4^o$. Stavimo u poslednjoj jednakosti umesto vektora y vektor x, dobićemo

$$[x, x] = \|x\|^2 = \sum_{i \in I} \hat{x}_i \check{x}_i .$$

$4^o \Rightarrow 1^o$. Pretpostavimo suprotno tj. da postoji vektor $h \neq 0$ prtpgonalan na $\mathcal{E}$. Tada je

$$\|h\|^2 = \sum_{i \in I} [h, e_i] [e_i, h] = 0$$

tj. $h = 0$ suprotno pretpostavci.

<u>Teorema 2.1.7.</u> Neka je V konačno-dimenzionalan s.i.p.s sa osobinom aditivnosti transverzalnosti 8. i neka u njemu postoji ortonormirana baza. Neka je G potprostor od V. Tada, za svako $x \in V$ postoji jedinstveno razlaganje

(3) $\qquad x = y + z$

gde je y transferzalan na $\mathcal{G}$ a z iz $\mathcal{G}$

Dokaz. Neka je $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{G}$. Za dati vektor x iz V, potpuno su odredjeni vektori

$$z = \sum_{k=1}^{n} [x, e_k] e_k \quad \text{i} \quad y = x - z$$

tako da je $z \in \mathcal{G}$. Osim toga je

$$[y, e_i] = [x-z, e_i] = [x, e_i] - [z, e_i] = [x, e_i] - \sum_{k=1}^{n} [x, e_k][e_k, e_i] = 0,$$

što znači da je $[y, e_i] = 0$, $(i = 1, 2, .., n)$. Zbog osobine 8. i osobine 4. sledi da je $[y, \mathcal{G}] = 0$.

Dokažimo jedinstvenost razlaganja (3). Neka je $x = y + z = y' + z'$ gde su y i y' transferzalni na $\mathcal{G}$ a z,z' iz $\mathcal{G}$. Tada je $y-y' = z-z'$ pa je $[y-y', y-y'] = [y-y', z-z'] = 0$, što znači da je $y-y' = 0$ tj. $y = y'$. Posle toga je i $z = z'$.

Posledica 2.1.1. Ako je V s.i.p.s iz teoreme 2.1.7. i $\mathcal{G}$ pravi potprostor od V tada postoji vektor x iz $V-\mathcal{G}$ transverzalan na $\mathcal{G}$.

Problem 2.1.1. Neka je $\{e_i\}_{i\in I}$ ortonormirani sistem y kompletnom s.i.p.s-u V u odnosa na koji je V transverzalno simsteričan. Da li red (3) konvergira za svako $x \in V$?

2.2. KARDINALNOST ORTONORMORANE BAZE U S.I.P.S-U

Teoreme 2.2.1. Dve ortonormirane baze $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{E}' = \{e_j'\}_{j\in J}$ u odnosu na koje je s.i.p.s V Transverzalno simsteričan i u odnosu na koji red (3) konvergira, imaju isti kardinalni broj.

Dokaz. Kako je $\{e_i\}_{i\in I}$ ortonormirana baza, to je na osnovu teoreme 2.1.6., 3^o

$$e_j' = \sum_{i\in I} [e_j', e_i] e_i .$$

Prema teoremi 2.1.3., najviše prebrojivo mnogo elemenata $[e_j', e_i]$ ima različitih od nule. Označimo sa $I_j \subset I$ skup svih indeksa i za koji se to ostvaruje. Pokažimo da je

(1) $$\bigcup_{j\in J} I_j = I$$

Ako naime, neko $i_0 \in I$ ne bi pripadalo ni jednom od I_j, tj. ako bi smo imali, za svako $j \in J$

$$[e'_j, e_{i_0}] = 0 ;$$

to bi značilo da je e_{i_0} ortogonalan na $\mathcal{E}'$, Kako je

$$e_{io} = \sum_{j \in J} [e_{i_0}, e'_j] e'_j$$

to je, na osnovu 4^o teoreme 2.1.6. $\|e_{i_0}\|^2 = \sum_{j \in J} [e_{i_0}, e'_j] [e'_j, e_{i_0}] = 0$ suprotno pretpostavci da je e_{i_0} jedinični vektor. Skupovi I_j su najviše prebrojivi pa iz (1) sledi

$$\bar{\bar{I}} \leq \bar{\bar{J}} + \bar{\bar{J}} + \ldots = \bar{\bar{J}}$$

gde $\bar{\bar{I}}$ označava kardinalni broj skupa I. Na simetričan način zaključujemo da je

$$\bar{\bar{J}} \leq \bar{\bar{I}}$$

pa se na osnovu Gantor-Bernsteinove teoreme $\bar{\bar{I}} = \bar{\bar{J}}$.

3. NEKE PRIMENE S.I.P-OVA NA PROSTOR OPERATORA L(V)

3.1. APSOLUTNE NORME OPERATORA NA NEKIM S.I.P.S-OVIMA

Neka je V realni ili kompleksni normirani prostor i L(V) skup svih ograničenih linearnih operatora sa V u V.

L(V) je takodje normiran prostor sa normom

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad (A \in L(V)) \tag{1}$$

koju inducira norma vektora na V.

<u>Definicija 3.1.1.</u> Funkcional n(A) definisan na L(V) koji ispunjava uslove:

1^o $n(A) > 0$, $A \neq 0$

2^o $n(\lambda A) = |\lambda| n(A)$

3^o $n(A+B) \leq n(A)+n(B)$

4^o $n(AB) \leq n(A)\, n(B)$

zove se norma operatora.

Definicija 3.1.2. Norma operatora koja je definisana sa (1), preko neke vektorske norme, zove se operatorska norma na L(V), Norma operatora koja nije definisana sa (1) ni za koju vektorsku normu, zove se apsolutna norma na L(V).

Za svaku normu operatora na L(V) postoji norma vektora na V takva da je norma operatora $n(\cdot)$ saglasna sa normom vektora $\|\cdot\|$, tj. da je za svako $A \in L(V)$ i svako $x \in V$,

$$\|Ax\| \leq n(A)\, \|x\|$$

Za dokaz videti zadatak 58 [28,p.416].

Definicija 3.1.3. Dve vektorske norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ su proporcionalne ako postoji konstanta C tavka da je, za svako $x \in V$

$$\|x\|_1 = C\, \|x\|_2 \,.$$

Definicija 3.1.4. Dve operatorske norme n_1 i n_2 su uporedive ako je, za svako $A \in L(V)$,

$$n_1(A) \leq n_2(A)$$

ili

$$n_2(A) \leq n_1(A) \,.$$

Definicijom 3.1.5 u skupu $\mathcal{N}$ svih normi operatora uvedeno je jedno parcijalno uredjenje. U ovom paragrafu je okarakterisana minimalna norma u smislu gornjeg parcijalnog uredjenja, kada je V realan neprekidan, uniformno konveksan i kompletan s.i.p.s. Ovaj problem je razmatran u [33] gde je V bio realan n-dimenzionalan prostor R^n i u [34] gde je V bio Hilbertov realan separabilan prostor. I ovde se kao i u [34] koristi metod JU.I. Ljubiča iz [33] .I u [33] i u [34], za dokaz glavnog rezultata bitna je bila lema koja odgovara sadašnjoj lemi 3.1.2. U [33] i [34] dokaz te leme se oslanja na geometrijsku intuiciju. Ovde dajemo nov strog dokaz za opštije prostore. Osim toga, ovde dajemo dokaz jedne teoreme o uporedivosti operatorskih normi koje su inducirane odgovarajućim Hilbertovim normama ako je prostor V kompleksan Hilbertov.

Neka je V s.i.p.s sa normom $\|\cdot\|$. Neka su, pored ove norme, na V definisane još dve različite norme $\|\ \|_1$ i $\|\cdot\|_2$ koje su ekvivalentne sa normom $\|\ \|$. Primeri za takve norme su navedeni u [34] za prostor ℓ^2. Za opštije prostore egzistenciju takvih normi obezbedjuje teorema (3.1.) iz [5].

Pomoću dva fikcirana vektora x i y iz V ($x \neq 0$, $y \neq 0$) u [33] i [34] je definisan jedan operator T koji je imao presudnu ulogu za dokaz glavnog rezultata. Tamo je za njegovu definiciju korišćena separabilnost prostora. Ovde ćemo takodje definisati taj operator na realnom neprekidnom s.i.p.s-u.

<u>Definicija 3.1.5.</u> Neka su $x,y \in V$ ($x \neq 0, y \neq 0$). Označimo sa $T = T(x,y)$ operator koji zavisi od x i y, definisan sa

(2) $$Tz = T(x,y)z = [z,y]x \quad (z \in V).$$

Neka je $\mathcal{T}$ skup svih takvih operatora. Videćemo da za ovaj operator važe sve osobine koje su važile za T-operatore u [34] i [33].

<u>Lema 3.1.1.</u> Važe osobine:

1) $\mathcal{T} \subset L(V)$.

2) $T(Ax,y) = AT(x,y) \quad (T \in \mathcal{T},\ A \in L(V))$.

3) $\|T\|_i = \|x\|_i\ \|y\|_i^*$ $\quad (i = 1,2)$,

gde je $\|\cdot\|^*$ dualna norma norme $\|\cdot\|$.

<u>Dokaz</u>. 1) Na osnovu (2) i osobine linearnosti s.i.p-a po prvom argumentu, imamo

$$T(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = [\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, y]\ x = \lambda_1\ [z_1,y]x + \lambda_2\ [z_2,y]x$$
$$= \lambda_1 Tz_1 + \lambda_2 Tz_2$$

$$(\lambda_1, \lambda_2 \in \Phi;\ z_1, z_2 \in V).$$

Osim toga je $\|Tz\| = \|[z,y]x\| \leq |[z,y]|\ \|x\| \leq \|z\|\ \|y\|\ \|x\|$

tj. $\|T\| \leq \|x\|\ \|y\|$.

$$2)\ T(A,xy)z = [z,y]Ax = A[z,y]x = AT(x,y)z \quad (z \in V)$$

$$3)\ \|T\|_i = \sup_{z \neq 0} \frac{\|Tz\|_i}{\|z\|_i} = \sup_{z \neq 0} \frac{\|[z,y]x\|_i}{\|z\|_i} = \|x\|_i \sup_{z \neq 0} \frac{|[z,y]|}{\|z\|_i} =$$

$$= \|x\|_i \sup_{\|z\|_i = 1} |[z,y]| = \|x\|_i \|y\|_i^* .$$

Neka je sada V realan neprekidan s.l.ps C koji je uniformno konveksan u odnosu na njegovu normu

Lema 3.1.2. Ako su dve operatorske norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ uporedive na skupu $\mathcal{J}$ prostora L(C), tada su odgovarajuće vektorske norme proporcionalne.

Dokaz. Uočimo koveksan skup $K = \{z \mid \|z\|_2 \leq \|x\|_2\}$, gde je x fiksiran vektor. Neka je $f(z) = C$ $(C > 0)$ oslona ravan (suport ravan) ovoga skupa koja prolazi kroz tačku x. Tada na osnovu teoreme postoji jedinstven vektor y takav da je

$$[z,y] = C$$

gde je $C = [x,y]$. Osim toga je $[z,y] \leq [x,y]$, za $z \in K$,
pa je

$$[x,y] = \sup_{\|z\|_2 \leq \|x\|_2} [z,y] = \sup_{\|z\|_2 = \|x\|_2} [z,y] = \sup_{\|z\|_2 = 1} [\|x\|_2 z, y] = \|x\|_2 \|y\|_2^* .$$

Posle ovoga i nejednakosti $[x,y] \leq \|x\|_1 \|y\|_1^*$ koja sledi iz definicije dualne norme kao i osobine 3) iz leme 3.1.1. imamo $[x,y] =$
$= \|x\|_2 \|y\|_2^* \geq \|x\|_1 \|y\|_1^* \geq [x,y]$, odakle je

$$(3) \qquad \|x\|_1 \|y\|_1^* = \|x\|_2 \|y\|_2^* = [x,y] .$$

Sada je dovoljno pokazati da su norme $\|\cdot\|_1^*$ i $\|\cdot\|_2^*$ proporsionalne a zbog homogenosti norme dovoljno je pokazati da su proporcionalne na jediničnoj sferi $\|y\|_2^* = 1$. Neka je, dakle, $\|y\|_2^* = 1$.
Tada je

$$(3') \qquad [x,y] = \|x\|_2 = \|x\|_1 \|y\|_1^* .$$

Iz ekvivalentnosti normi $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ sledi da, za svako $x \in C$ postoje konstante c_1 i c_2 takve da je

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 .$$

Ovde je $C_2 = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$ pa je, na osnovu (3')

$$C_2 = \sup \frac{[x,y]}{\|x\|_1} = \|y\|_1^*$$

Prema tome je za svako y, za koje je $\|y\|_2^* = 1$, $\|y\|_1^* = C_2$ pa je na osnovu (3), za svako $x \in C$

$$\|x\|_2 = C_2 \|x\|_1 .$$

Posledica 3.1.1. Da bi dve operatorske norme na L(C) bile jednake potrebno je i dovoljno da su odgovarajuće vektorske norme proporcionalne.

Posledica 3.1.2. Dve različite operatorske norme na L(C) nisu uporedive.

Lema 3.1.3. Postoji na L(C) jedna apsolutna norme.

Dokaz. Neka je $\{\|\cdot\|_\alpha\}$ jedna familija različitih operatorskih normi, takvih da je, za svako $A \in L(C)$,

$$\sup_\alpha \|A\|_\alpha < \infty .$$

Takve familije postoje ([33]). Tada je sa

$$n(A) = \sup_\alpha \|A\|_\alpha \qquad (A \in L(C)$$

definisana jedna apsolutna norma. Zaista n(A) ispunjava uslove 1°–4°.

Ako bi $n(\cdot)$ bila operatorska norma, tada bi na osnovu posledice 3.1.1. bila, za svako $A \in L(C)$, $n(A) = \|A\|_\alpha$, što je suprotno našoj pretpostavci da su sve norme familije $\{\|\cdot\|_\alpha\}$ različite.

Na skupu Hilbert-Schmittovih operatora $\mathcal{S}$ sa

$$n(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|^2}$$

je definisana jedna apsolutna norma, gde je $\{e_i\}_{i=1}$ bazis u prostoru H. Lako je pokazati da je $\mathcal{S}$ podalgebra algebre L(H).

Lema 3.1.4. Svaka norma operatora $n(\cdot)$ ima bar jednu minorantu oblika

$$\|A\|' = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|'}{\|x\|'}$$

gde norma $\|\cdot\|'$ vektora ne mora biti u opštem slučaju ekvivalentna sa normom $\|\cdot\|$.

Dokaz. Sa $\|x\|_y = n(T(x,y))$ je definisana jedna vektorska norma na C. Sada je, za svako $A\in L(C)$

$$\|A\|_y = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_y} = \sup_{x\neq 0} \frac{n(T(Ax,y))}{n(T(x,y))}$$

Koristeći 2) iz leme 3.1.1. i 4^0 iz definicije 3.1.1. dobijamo

$$\|A\|_y = \sup \frac{n(T(Ax,y))}{n(T(x,y))} \quad \sup \frac{n(A)\ n(T(x,y))}{n(T(x,y))},$$

odakle je, za svako $A\in L(C)$

$$\|A\|_y \leq n(A).$$

Teorema 3.1.1. Da bi jedna norma operatora na L(C) bila operatorska norma potrebno je i dovoljno da ona nema netrivijalnih minoranti.

Dokaz. Neka je $\|\cdot\|$ jedna operatorska norma na L(C). Označimo sa $n(\cdot)$ jednu minorantu norme $\|\cdot\|$ a sa $\|\cdot\|'$ jednu minorantu norme $n(\cdot)$. Tada je za svako $A\in L(C)$

$$\|A\|' \leq n(A) \leq \|A\|.$$

Na osnovu posledice 3.1.2. dobijamo, za svako $A\in L(C)$

$$\|A\|' = \|A\|,$$

pa je, za svako $A\in L(C)$, $n(A) = \|A\|$. Znači da je norma $\|\cdot\|$ jednaka sa svakom svojom minorantom.

Obrnuto, ako je norma $\|\cdot\|$ jednaka sa svakom svojom minorantom, ona je jednaka i sa svojom operatorskom minorantom, što znači da je norma $\|\cdot\|$ operatorska norma.

Posledica 3.1.3. Minimalna norma operatora u skupu **N** je uvek definisana sa (1).

U dokazu leme 3.1.2 botno je bilo da je prostor C realan, tako da se Ljubičev metod ne može primeniti u slučaju da je C kompleksan. **U slučaju da je C kompleksan dobićemo nešto slabiji** rezultat.

Neka je, sada, H realan ili kompleksan Hilbertov prostor sa normom $\|\cdot\|$, koja izvire iz skalarnog proizvoda $(\cdot\,,\cdot)$ na H. Na H se na više načina može uvesti skalarni proizvod. Na primer, ako je A samokonjugovan pozitivan operator iz L(H), takav da je $(Ax,x) > 0$ za $x \neq 0$, tada je funkcional

$$(x,y)_A = (Ax,y) \qquad (x,y \in H)$$

jedan skalarni proizvod na H.

Neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dve norme koje su ekvivalentne sa normom $\|\cdot\|$ na H i koje su inducirane sa odgovarajućim skalarnim proizvodima $(\cdot\,,\cdot)_1$ i $(\cdot\,,\cdot)_2$ na H.

<u>Definicija 3.1.7.</u> Označimo sa H_i Hilbertov prostor $(H, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1,2)$ i sa A_i^* operator konjugovan operatoru $A(A \in L(H))$ na H_i prostoru, $(i = 1,2)$.

<u>Lema 3.1.5.</u> Postoji jedinstven operator $S \in L(H)$ takav da je, za svako $x,y \in H$,

1) $(x,y)_2 = (x,Sy)_1$,

2) $S^{-1} \in L(H)$,

3) $S_1^* = S_2^* = S$,

4) $A_1^* S = SA_2^* \qquad (A \in L(H))$.

<u>Dokaz.</u> 1) sledi na osnovu Fréchet-Rieszove teoreme o reprezentaciji ograničenih linearnih funkcionala na H.

2) Primenimo li ponovo Fréchet-Rieszovu teoremu zaključujemo da postoji jedinstven linearan ograničen operator T na H_2 takav da je, za svako $x,y \in H$

$$(x,y)_1 = (x,Ty)_2$$

Sa druge strane, iz 1) je

$$(x,y)_1 = (x,S^{-1}y)_2,$$

što znači da je $T = S^{-1}$

3) Neka je H kompleksan Hilbertov prostor. Iz 1) se dobija $(x,Sx)_1=\|x\|_2^2$, tj. da je za svako $x\in H$, $(x,Sx)_1$ realan broj. Na osnovu [40, p.227] sledi da je S samokonjugovan u H_1 tj. $S=S_1^*$. Stavimo sada u 1) umesto x, Sx a umesto y, x pa ćemo dobiti $(Sx,x)_2$ $\|Sx\|^2_1$, tj., na osnovu istog stava, $S=S_2^*$.

Može se pokazati, drugim postupkom, da ova lema važi i kada je H realan Hilbertov prostor.

4) $(Ax,y)_2=(Ax,Sy)_1=(x,A_1^*Sy)_1 \qquad (x,y\in H)$.

Sa druge strane je

$$(Ax,y)_2=(x,A_2^*y)=(x,SA_2^*y)_1,$$

pa je, za svako $x,y\in H$, $(x,(A_1^*S-SA_2^*)y)=0$ tj. $A_1^*S=SA_2^*$.

<u>Lema 3.1.6</u>. Postoji $\sqrt{S}=K$ i $\sqrt{S^{-1}}$. K je samokonjugovan u H_1 i H_2 i važe jednakosti

$$\sqrt{S^{-1}}=K^{-1}, \tag{4}$$

$$\|x\|_2=\|Kx\|_1 \qquad (x\in H). \tag{5}$$

<u>Dokaz</u>. Kako je $(Sx,x)_1=\|x\|_2^2\geq 0$, sledi da je S pozitivan simetričan operator. Na osnovu [38, p.336] postoji $\sqrt{S}$ koji je takodje pozitivan i simetričan. Prema tome je

$$\|x\|_2^2=(Sx,x)_1=(\sqrt{S}\sqrt{S}x,x)_1=(\sqrt{S}x,\sqrt{S}x)_1=\|Kx\|_1^2$$

tj. $\|x\|_2=\|Kx\|_1 \qquad (x\in H)$.

<u>Lema 3.1.7.</u> Važe jednakosti:

$$KA_2^*K^{-1}=K^{-1}A_1^*K, \tag{6}$$

$$\|K^{-1}A_1^*K\|_2=\|A_1^*\|_1 \tag{7}$$

$$\|K^{-1}A_1^*K\|_1=\|A_2\|_2. \tag{8}$$

Dokaz. Neposredno je:

$$\|K^{-1}A_1^*K\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|K^{-1}A_1^*Kx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|A_1Kx\|_1}{\|Kx\|_1} = \|A_1^*\|_1.$$

Koristeći 4) u lemi 3.1.5 imamo:

$$\|K^{-1}A_1^*K\|_1 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|K^{-1}A_1^*Kx\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|KA_2K^{-1}x\|_1}{\|x\|_1} =$$

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|A_2^*K^{-1}x\|_2}{\|K^{-1}x\|_2} = \|A_2^*\|_2.$$

Navodimo sada rezultat, koji u ovom prostoru odgovara lemi 3.1.2.

Teorema 3.1.2. Neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ vektorske norme koje su inducirane odgovarajućim skalarnim proizvodima na H. Tada iz $\|A\|_1 \leq \|A\|_2$ za svako $A\in L(H)$ sledi $\|A\|_1 = \|A\|_2$.

Dokaz. Iz $\|A\|_1 \leq \|A\|_2$ za svako A iz L(H), sledi da je,

$$\|K^{-1}A_1^*K\|_1 \leq \|K^{-1}A_1^*K\|_2 \qquad (A\in L(H))$$

Na osnovu ovoga i jednakosti (7) i (8) dobijamo

$$\|A_2^*\|_2 \leq \|A_1^*\|_1 \qquad (A\in L(H))$$

Međutim je $\|A_1^*\|_1 = \|A\|_1$ i $\|A_2^*\|_2 = \|A\|_2$, pa je, za svako $A\in L(H)$,

$$\|A\|_1 = \|A\|_2.$$

Kako je još, za svako $A\in L(H)$, $\|A\|_1 \leq \|A\|_2$, dobijamo da je, za svako $A\in L(H)$, $\|A\|_1 = \|A\|_2$, što je i trebalo dokazati.

Posledica 3.1.4. Dve različite operatorske norme, za koje su odgovarajuće vektorske norme inducirane skalarnim proizvodima, nisu uporedive.

Posledica 3.1.5. Za operator K iz leme 3.1.6 a koji je saglasan sa uslovima teoreme 3.1.2., postoji uniterni operator U i konstanta c tako da je $K = cU$.

Problem 3.1.1. Da li teorema 3.1.1 važi i u kompleksnom prostoru H?

3.2. O KONJUGOVANIM OPERATORIMA IZ PROSTORA L(C)

Prirodno je postaviti pitanje da li se definicija konjugovanosti operatora u Hilbertovim prostorima može preneti u s.l.p.s-ove i gde može kakva se dobijaju uopštenja?

Neka je C neprekidan uniformno konveksan i kompletan s.l.p.s i neka je L(C) skup ograničenih kinearnih operatora sa C u C. Na osnovu teoreme 1.2.4, postoji bijektivno preslikavanje $x \leftrightarrow f_x$ prostora C na prostor C .

Definicija 3.2.1. Označimo sa S operator sa C na C^* definisan sa

$$Sx = fx$$

Operator S ne mora biti linearan. Naime, ako je s.i.p $[\cdot,\cdot]$ sa osobinom homogeniteta, on je antihomogen . Ako je S aditivan, tada je s.i.p. $[\cdot,\cdot]$ jedan skalarni proizvod.

Lema 3.2.1. Za svaki operator $A \in L(C)$ postoji jedinstven operator A^x takav da je, za svako $x,y \in C$

(1) $$[Ax,y] = [x,A^x y] .$$

Dokaz. Za svako fiksirano $y \in C$, $[Ax,y]$ je ograničen linearan funkcional na C. Prema teoremi 1.2.4 postoji jedinstven vektor z iz C takav da je, za svako $x \in C$, $[Ax,y] = (x,z)$. z je jednoznačno odredjen vektorom y. Stavimo $z = A^x y$.

Definicija 3.2.2. Operator A^x zvaćemo levo konjugovan operatoru A.

Lako je videti da A^x ne mora biti linearan.

Definicija 3.2.3. Ako za operator $A \in L(C)$ postoji operator A^+ takav da je, za svako $x,y \in C$,

(2) $[x, Ay] = [A' x, y]$,

kazaćemo da je on desno konjugovan sa operatorom A. Ako postoji A^+ onda je on linearan. Za jednačinu (identični) operator I je $I' = I^+ = I$.

Definicija 3.2.4 Neka je f C^* i $A \in L(C)$. Konjugovan operator opertora A je operator $A^* : C^* \longrightarrow C^*$ takav da je, za svako $x \in C$

(3) $A^* f(x) = f(Ax)$.

Dobro je poznato da $*$-konjugovanost ima osobine:

1) $A^* \in L(C^*)$,

2) $\|A^*\| = \|A\|$,

3) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$,

4) $(A+B)^* = A^* + B^*$,

5) $(AB)^* = B^* A^*$.

Sledeća teorema daje vezu izmedju operatora A^x, A^+ i A.

Teorema 3.2.1. Neka za $A \in L(C)$ postoji A^+. Tada je:

1) $A^x = S^{-1} A^* S$,

2) $A = S^{-1} (A^+)^* S$.

Dokaz. 1) Ako $y \longleftrightarrow f_y$, tada je, za svako $x \in C$, $f_y(x) = [x, y]$ pa iz (1) sledi $f_y(Ax) = f_{A^x y}(x)$, za svako $x \in C$. Na osnovu definicije (3) dobijamo $A^* f_y(x) = f_{A^x y}(x)$ ili, zbog $f_y = Sy$, za svako $y \in C$, $A^* Sy = SA^x y$. Odavde je $A^x = S^{-1} A^* S$.

2) Iz (2) sledi $f_{Ay}(x) = f_y(A^+ x) = (A^+)^* f_y(x)$.

Odavde je $f_{Ay} = (A^+)^* f_y$ ili $SAy = (A^+)^* Sy$, te je $SA = (A^+)^* S$, odnosno $A = S^{-1} (A^+)^* S$.

Lema 3.2.2 Ako za operator $A \in L(C)$ postoji A^+, zada je:

1) $\|A^x\| = \|S^{-1} A^*\|$,

2) $\|A^+\| = \|SA\|$,

3) $\|S\| = \|S^{-1}\| = 1$.

Dokaz. 1) Iz teoreme 3.2.1. lako je primetiti da je za svako $x \in C$ $\|Sx\| = \|x\|$. Koristeći 1) iz predhodne teoreme imamo

$$\|A^x\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^x x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|S^{-1}A^* Sx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|S^{-1}A^* Sx\|}{\|Sx\|}$$
$$= \|S^{-1}A^*\|.$$

2) Iz 2) predhodne teoreme sledi $SA = (A^+)^* S$, pa je

$$\|SA\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|SAx\|}{\|x\|} = \sup \frac{\|(A^+)^* Sx\|}{\|Sx\|} = \|(A^+)^*\|.$$

Imajući još u vidu osobinu 2) $*$-konjugovanosti, dobijamo $\|SA\| = \|A^+\|$.

3) Stavi li se u 1) i 2) umesto A,E dobiće se

$$\|S\| = \|S^{-1}\| = 1.$$

Teorema 3.2.2. Ako postoji A^+ za operator $A \in L(C)$ tada je

$$\|A^x\| = \|A^+\| = \|A\|.$$

Dokaz. $$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} [Ax, Ax] = \sup_{\|x\|=1} [A^+Ax, x] \leq \sup_{\|x\|=1} \|A^+Ax\| \|x\|$$
$$= \|A^+A\| \leq \|A^+\| \|A\|.$$

Znači da je

(4) $$\|A\| \leq \|A^+\|.$$

Isto tako je

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} [Ax, Ax] = \sup_{\|x\|=1} [x, A^x Ax] \leq \|A^x A\| \leq \|A^x\| \|A\|$$

odnosno

(5) $$\|A\| \leq \|A^x\|.$$

Sa druge strane iz 1) leme 3.2.2. dobijamo $\|A^x\| \leq \|S^{-1}\| \|A^*\|$, a iz 2) leme 3.2.2. $\|A^+\| \leq \|S\| \|A\|$ Kako je još $\|S\| = \|S^{-1}\| = 1$ imamo $\|A^x\| \leq \|A\|$ i $\|A^+\| \leq \|A\|$. Iz ovih nejednakosti i nejednakosti (4) i (5) konačno se dobija $\|A^+\| = \|A^x\| = \|A\|$.

Problem 3.2.1. Koji od uslova 1) - 5) obične konjugovanosti "$*$" važe za konjugovanost "+" i "x"?

3.3. NUMERIČKO POLJE OPERATORA. STEJTOVI

Neka je V s.i.p.s sa s.i.p-om $[\,,\,]$ i neka je L(V) skup svih ograničenih linearnih operatora sa V u V.

<u>Definicija 3.3.1.</u> Za $T \in L(V)$ skup brojeva

$$W(T) = \{[Tx,x] \mid \|x\| = 1\}$$

se naziva numeričko polje operatora T.

Označimo sa $|W(T)| = \sup\{[Tx,x] \mid \|x\| = 1\}$.

Ako je I jedinični operator i ako su $T,T' \in L(V)$ a $\alpha,\beta \in \Phi$, gde je Φ skup skalara prostora V, neposredno se dobija

1^{o} $|W(T)| \leq \|T\|$

2^{o} $|W(\alpha T)| = |\alpha|\,|W(T)|$

3^{o} $|W(T+T')| \leq |W(T)| + |W(T')|$.

Iz 2^{o} i 3^{o} se vidi da je $|W(\cdot)|$ polunorma. U stvari, posle teoreme 3.3.1, videćemo da je $|W(\cdot)|$ jedna norma na L(V).

<u>Teorema 3.3.1.</u> Za svaki $T \in L(V)$ je $\|T\| \leq 4|W(T)|$. Specijalno ako je $[Tx,x] = 0$, tada je $T = 0$.

<u>Dokaz.</u> Ako je $\sigma(T)$ spaktar operatora T, nije teško pokazati da je $|\sigma(T)| \leq |W(T)|$. Tada je operatorska funkcija kompleksne promenljive $F(\lambda) = (I+\lambda A)^{-1}$ definisana i analitička sa $|\lambda| < 1/|W(T)|$, tim pre za $|\lambda| \leq R = 1/2|W(T)|$ [21,p.106]. Za $x \in V$, $\|x\| = 1$ i ako je $|\lambda| \leq R$ imamo $\|x+\lambda Tx\| \geq |[(I+\lambda T)x,x]| = |1+\lambda[Tx,x]| \geq 1/2$.
Otuda je za $|\lambda| \leq R$, za svako $x \in V$, $\|(I+\lambda T)x\| \geq \|x\|/2$.
To znači da je $\|F(\lambda)\| \leq 2$ za $|\lambda| \leq R$.
Sa druge strane je $F(\lambda) = I - T\lambda + T^{2}\lambda^{2}\ldots$, pa je na osnovu Cauchy-eve procene ([21,p. 110])

$$\|T\| \leq 2/R = 4\,|W(T)|$$

Bitno je u ovoj teoremi da je V kompleksan. Ako je V realan s.i.p.s teorema ne važi ([31,p. 33]).

Definicija 3.3.2. Tačka $x \in K$ je ekstremalna tačka skupa K prostora V, ako nije unutrašnja tačka nijednog odsečka koji pripada K.

Definicija 3.3.3. Tačka x, $\|x\| = 1$ se naziva vrh jedinične sfere prostora V, ako familija linearnih funkcionala f takvih da je $\|f\| = 1$, $f(x) = 1$ i ako iz $f(u) = 0$, za svako f iz te familije povlači $u = 0$.

Teorema 3.2.1. Jedinični operator I je ekstremalna tačka jedinične sfere prostora $L(V)$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da za $T \in L(V)$ iz $\|I+T\| = \|I-T\| = 1$ proizilazi $T = 0$. Označimo sa $D = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$. Tada $|W(T+I)| \leq 1$ daje $\{W(T) \pm 1\} \subset D$. Otuda sledi $W(T) \subset (D+1) \cap (D-1) = \{0\}$ pa je na osnovu predhodne teoreme $T = 0$.

Definicija 3.3.4. Ograničeni linearni funkcional ω na $L(V)$ se naziva stejt (engleski: state) ako je $\|\omega\| = \omega(I)$. Ako je $\|\omega\| = 1$ tada se stejt ω naziva normirani stejt.

Definicija 3.3.5. Stejt oblika $\omega(A) = [Ax, x]$, za neko fiksirano x iz V zove se tačkasti stejt.

Jasno je da tačka stejt na $L(V)$ je tačka stejt na njenom kompletiranju $L(V)^{-}$ i da stejtovi od $L(V)^{-}$ su formirani pomoću svih proširenja stejtova od $L(V)$.

Jednostavno je dokazati sledeću činjenicu.

Lema 3.3.1. Neka je Ω skup svih stejtova na $L(V)$ i Ω_o skup svih normiranih stejtova. Tada je Ω konus slabo kompaktne konveksne baze Ω_o.

Teorema 3.3.3. Neka je V realan ili kompleksan s.i.p.s, $\mathcal{A}$ neka normirana algebra ograničenih linearnih operatora na V koja sadrži I. Neka Ω označava konus od stejtova na $\mathcal{A}$, a Π skup svih tačaka stejtova. Neka Ω_o označava bazu od Ω i Π_o skup svih normiranih tačaka stejtova. Tada slabo zatvorena konveksna ljudska od Π_0 je Ω_c. Slično Ω je slabo zatvorena konveksna ljudska od $\mathcal{T}$.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je V kompletan. Tada je i L(V) kompletan prostor. Za $T\in\mathcal{A}$ uvek postoji

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{\|I+\alpha T\|-1}{\alpha}=\delta(T)$$

gde je α realan broj. Egzistencija ovog izvoda sledi, na primer, iz činjenice da je $\|I+\alpha T\|$ konveksna funkcija od α. Prvi deo dokaza biće sadržan u uspostavljanju veze izmedju $\delta(T)$ i $W(T)$, naime pokazaćemo da je $\delta(T)$ = sup Re$W(T)$. Za $x\in V$ i $\|x\|=1$ imamo

$\|(T+\alpha T)x\|\geq|[x+\alpha Tx,x]| = |1+\alpha[Tx,x]| = 1+2\alpha \mathrm{Re}\,[Tx,x]+\alpha^2|[Tx,x]|^2)^{1/2}\geq(1+2\alpha\,\mathrm{infRe}(W(T)))^{1/2}$, gde je $\mathrm{Re}W(T)=\mathrm{infRe}\{\lambda\,|\,\lambda\in W(T)\}$.

Za α blisko nuli, egzistira funkcija $F(\alpha)=(I+\alpha T)^{-1}$ i zbog gornje nejednakosti je, za svako $x\in V$,

$$\|(I+\alpha T)x\|\geq(1+2\alpha\,\mathrm{infRe}(W(T)))^{1/2}\|x\|$$

$$\|F(\alpha)\|\leq\frac{1}{1+2\alpha\,\mathrm{infRe}(W(T))^{1/2}}.$$

Sa druge strane, koristeći da je $F(\alpha)=1-\alpha T+\alpha^2T^2F(\alpha)$ imamo

$$\delta(-T)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\|I-\alpha T\|-1}{\alpha}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\|F(\alpha)\|-1}{}$$

$$\leq\lim\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(1+2\alpha\,\mathrm{infRe}(W(T)))^{1/2}}-1\right)=\mathrm{infRe}W(T).$$

Sada zamenimo T sa −T i primetimo da je $-\mathrm{infRe}-(T)=\sup\ \mathrm{Re}W(T)$.

Odatle će proizići $\delta(T)\leq\sup\ W(T)$.

Obrnutu nejednakost ćemo takodje dobiti:

$$\mathrm{Re}[Tx,x]=\lim_{\alpha\to+P}\frac{1}{\alpha}\left((1+2\ \mathrm{Re}[Tx,x]+\alpha^2|[Tx,x]|^2)^{1/2}-1\right)$$

$$\leq\lim_{\alpha\to+0}\frac{\|I+\alpha T\|-1)}{\alpha}.$$

Sada ćemo iskoristiti jednu opštu lemu iz Banchovih prostora, zasovanu na [7]. Neka je B_1 slabo kompektan konveksan potskup od anachovog prostora B^*, koji je konjugovan Banchovom prostoru B, akav da postoji $x_0 \in B$ da je $(x_0, \ell) = 1$ za sve $\ell \in B_1$. Neka je alje, S potskup od B_1 takav da je $\sup_{s \in S} |(x,s)| = \max_{\ell \in B1} |(x,\ell)|$ za vako $x \in B$. Tada slabo zatvorenje sadrži ekstremalne tačke od $_1$. Sada za svaki stejt $\omega \in \Omega_0$ i svako $T \in L(V)$ imamo

$$\omega(T) = \frac{\omega(I+\alpha T)-1}{\alpha} \le \frac{\|I+\alpha T\|-1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0),$$

iakle je

$$\max_{\omega \in \Omega_0} |(T,\omega)| = \sup_{0 \le \theta \le 2\pi} \mathcal{E}(e^{i\theta}T) = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} \operatorname{Re} W(e^{i\theta}T) =$$

$$\max_{0 \le \theta \le 2\pi} \operatorname{Re}(e^{i\theta} W(T)) = |W(T)| = \sup_{\|x\|=1} |[Tx,x]| = \sup_{\omega \in \Omega_0} |(\omega,T)|.$$

ošto je Ω_0 konveksan slabo kompaktan i normiran na I, može se rimeniti gornja lema. Kraj tvrdjenja sledi iz Krein-Milmanove eoreme [38 p. 85].

Pošto se na jednom normiranom prostoru može na beskonačno mnogo načina definisati s.i.p. koji je saglasan sa normom rostora, a numeričko polje operatora se definiše preko s.i.p-a. ostavlja se pitanje kako zavisi numeričko polje od s.i.p-a? Odovor će slediti iz teoreme 3.3.3. a koji ćemo formulisati u obiku teoreme.

Teorema 3.3.4. Sve determinacije numeričkog polja jednog perator imaju istu konveksnu ljudsku.

osledica 3.3.1. Ako je numeričko polje jednog operatora sa Banachovog prostora realno za jednu determinaciju, onda je ono realo za svaku determinaciju.

. PRIMENA S.I.P-OVA NA NEKE PROBLEME U NORMIRANIM ELGEBRAMA

4.1. OPŠTI POJMOVI. HERMITSKI OPERATORI

Navodimo prvo nekoliko dobro poznatih definicija u v-
-i sa pojmovima koji će nam biti potrebni.

Definicija 4.1.1. Linearni prostor $\mathcal{A}$ nad telom Φ u koje je definisana operacija množenja, sa osobinama:

1) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \qquad (\lambda\in\Phi,\ x,y\in\mathcal{A})$,

2) $(xy)z = x(yz) \qquad (x,yz \quad)$,

3) $(x+y)z = xz + yz$,

4) $x(y+z) = xy+xz$

zove se algebra. Ako u $\mathcal{A}$ postoji elemenat e sa osobinom

$$ex = xe = x \qquad (x\in\mathcal{A}),$$

onda se on naziva jedinica algebre $\mathcal{A}$.

Definicija 4.1.2. Algebra $\mathcal{A}$ je normirana algebra, ako je $\mathcal{A}$ normiran prostor sa normom $\|\cdot\|$ koja ima osobinu

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x,y\in\mathcal{A})$$

i ako $\mathcal{A}$ ima jedinicu da je $\|e\| = 1$.
Kompletna normirana algebra zove se Banachova algebra (B algebra).
Ako je V Banachov prostor onda je L(V) Banachova algebra [38,p. 211].

Definicija 4.1.3. Algebra $\mathcal{A}$ je $*$-algebra ako je na $\mathcal{A}$ definisana jedna unarna operacija koja primenjena na elemenat $x\in\mathcal{A}$ daje elemenat $x^*\in\mathcal{A}$ tako da su ispunjeni uslovi:

1) $(\alpha x+\beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^* \qquad (\alpha,\beta\in\Phi;\ x,y\in\mathcal{A})$,

2) $(x^*)^* = x \qquad (x\in\mathcal{A})$

3) $(xy)^* = y^*x^* \quad (x,y\in\mathcal{A})$.

Operacija $x \longrightarrow x^*$ se zove involucija.

Elementi x i x^* su medjusobno konjugovani.

Elementi $x \in \mathcal{A}$ za koji je $x^* = x$ zove se hermetski elemenat.

Definicija 4.1.4. $*$-algebra $\mathcal{A}$ sa jedinicom je sim...

a algebra(A^*) ako alemenat $e + x^*x$ ima inverzni elemenat za

ako $x \in \mathcal{A}$.

Definicija 4.1.5. $*$-algebra $\mathcal{A}$ u kojoj je za svako

x $\|x^*x\| = \|x\|^2$ zove se B^*-algebra.

Definicija 4.1.6. Simetrična i kompletna B^* algebra

.e se C^* algebra.

U zadnje vreme pojavili su se rezultati koji proširuju pojam hermitskih elemenata sa simetričnih algebri na šire algebre.

Tako je I. Vidav [44] dao sledeću definiciju hermitskog elementa u Banachovim elgebrama:

Definicija 4.1.11. Elementi h Banachove algebre B sa jedinicom e je hermitski ako i samo amo, za realno λ,

$$\|e + i\lambda h\| = 1 + o(\lambda) \qquad (\lambda \to 0).$$

Lumer [31] je hermitski elemenat u algebri $L(V)$ definisao na sledeći način:

Definicija 4.1.12. Operator $T \in L(V)$ je hermitski ako je $W(T)$ realno.

Sledeća lema pokazuje ekvivalentnost Lumerove u Vidavljeve definicija na $L(V)$, gde je V Banachov prostor.

Lema 4.1.1. Za svaki operator $T \in L(V)$ na s.i.p.s-u V je

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{\|I + \lambda T\| - 1}{\lambda} = \sup_{x} \operatorname{Re} W(T)$$

Dokaz. Jednoznačnost definicije 4.1.12 sledi iz posledice 3.3.1. Dokaz ove leme sledi iz dokaza teoreme 3.3.3.

$W(T)$ će biti realno ako i samo ako je $\operatorname{Re}(iT) = 0$ tj.

ako je sup Re(iT) = sup Re(-iT) = 0, na osnovu ove leme, će biti

$$\|I + i\lambda T\| = 1 + o(\lambda) \qquad (\lambda \to 0).$$

Nama se ovde nameće još jedna definicija hermitskog operatora koja proizilazi iz s.i.p.-a. Radi jedniznačnosti definicije ograničićemo se na prostor operatora sa neprekidnog s.i.p. s-a C.

Definicija 4.1.13. Operator $H \in L(C)$ je hermitski operator ako je, za svako $x, y \in C$

1) $$[Hx, y] = \overline{[x, Hy]}$$

U oznakama iz definicije 3.2.2. i definicije 3.2.3. operator je hermitiski ako je

$$H^x = H^+ \supseteq H.$$

Prirodno se odmah nameće pitanje koliko je ova definicija saglasna sa definicijama 4.1.11. i 4.1.12? Nemamo potpun odgovor na ovo pitanje, ali neki parcijalni odgovori neposredno slede:

1) Ako je V = C Hilbertov prostor onda se sve tri definicije poklapaju.

2) Ako je H hermitski u smislu definicije 4.1.13. onda je H^2 hermitski u smislu definicije 4.1.11. i 4.1.12. To sledi ako se u (1) umesto x stavi Hy.

Sve ove definicije uvode pojam hermitskog operatora, u suštini preko norme operatora, odnosno norme algebre. Zato je E. Berkson [5] ispitao koliko hermiticitet zavisi od karaktera norme. U tom cilju on daje sledeće definicije:

Definicija 4.1.14. Neka je F komutativan skup operatora na Banachovu prostoru V i označimo sa L(F) realni prostor razapet na F u prostoru operatora L(V). Eksponencijalna grupa od F je skup $\{e^{iT} \mid T \in L(F)\}$. Označimo taj skup sa G(F).

Definicija 4.1.15. Skup S operatora na Banachovom prostoru $(V, \|\cdot\|)$ je hermitski ekvivalentan (hermitijan) ako i samo ako postoji ekvivalentno renormiranje prostora $(V, |\cdot|)$ u odnosu na koje su operatori iz S hermitski (S se sastoji od hermitskih operatora).

U vezi ovih pojmova u [5] nalazimo dve teoreme koje navodimo bez dokaza.

Teorema 4.1.1. F je hermitski ekvivalentan ako i samo ako je G(F) uniformno ograničen.

Teorema 4.1.2. F je hermitska familija ako i samo ako G(F) je grupa izometrija na $(V, \|\cdot\|)$.

Definicija 4.1.16. Neka je F komutativna hermitski ekvivalentna familija od operatora na Banachovom prostoru $(V, \|\cdot\|)$. Norma na V ekvivalentna sa $\|\cdot\|$ u odnosu na koju je F hermitska familija biće nazvana F-norma.
Neka G označava uniformno ograničenu, komutativnu, multiplikativnu grupu operatora na Banachovom prostoru $(V, \|\cdot\|)$. Označimo sa B(G) skup ograničenih kompleksno vrednosnih funkcija na G i sa J linearan funkcional, na B(G) pozitivan, invarijantan u odnosu na translaciju grupe G i takav da je $J(1) = 1$, gde 1 označava funkciju identički jednaku 1 na G. Berkson [5] dokazuje sledeći rezultat.

Teorema 4.1.3. Neka je $1 \leq p < \infty$ u $T \in G$ fiksiran elemenat. Tada je sa

$$|x|_p = \left[J(\|Tx\|^p)\right]^{1/p} \qquad (x \in V)$$

definisana norma na V ekvivalentna sa normom $\|\cdot\|$ i u odnosu na koju je svaki operator $T \in B$ izometrija.

W. Bade je u [3] proučavao algebarsku strukturu projektora u Banachovom prostoru V. Označimo sa $\mathcal{B}$ skup komutativnih projektora na V koji sadrži O i I. U odnosu na operacije V i $\wedge$, definisane sa

$$E \vee F = E + F - EF, \qquad E \wedge F = EF$$

$\mathcal{B}$ je jedna Boolova algebra, a takodje i mreža u odnosu na uredjenje za koje je $E \leq F \Leftrightarrow E \wedge F = E$.

Definicija 4.1.16. Neka je $x \in V$ i $\mathcal{B}$ Boolova algebra projektora na V. Neprekidan linearan funkcional $x^* \in V^*$ takav da je:

1) $x^* Ex \geq 0$ za $E \in \mathcal{B}$

2) $x^* Ex = 0$ za $E \in \mathcal{B}$, implicira $Ex = 0$,

zove se (po Berksonu) Badeov funkcional koji odgovara skupu $\mathcal{B}$.

Da bismo dokazali glavni Berksonov rezultat, koji nas interesuje, navedimo predhodno dve njegove leme.

Lema 4.1.2. Neka je u idenpotentan hermatski element u Banachovoj algebri $(A, \|\cdot\|)$ sa jedinicom. Tada je $\|u\| = 1$.

Dokaz. Jasno je da spektar od u ima maximum 1. Na osnovu leme 3 u [44] je $\|e^{tu}\| = e^t$ za $t \geq 0$. Lako je videti na osnovu idenpotencije u i reda za eksponencijalnu funkciju da je

$$e^{tu} = 1 + (e^t - 1)u$$

pa je $\|1+(e^t-1)u\| = e^t$. Množeći ove jednakost sa e^{-t}, dobijamo $\|e^{-t}+(1-e^{-t})u\| = 1$. Uzimajući da $t \to \infty$ dobijamo $\|u\| = 1$.

Lema 4.1.3. Neka je u odnosu na $\|\ \|$ E hermitski projektor na V i neka je $[\cdot,\cdot]$ s.i.p. saglasan sa normom $\|\cdot\|$. Tada je

1) $[Ex,x] \geq 0$ za $x \in V$,

2) Ako je $(V, \|\cdot\|)$ struktno konveksan s.i.p.s, tada $[Ex,x] = 0$ implicira $Ex = 0$.

Dokaz. Na osnovu leme 14 u [32] infimnum numeričkog polja od E i minimum spektara od E du jednaki. Tako je numeričko polje od E nenegativno. Na osnovu teoreme 3.3.3., ako je numeričko polje operatora T nenegativno, tada je $[Tx,x] \geq 0$ za svako $x \in V$. Time je prvi deo leme dokazan. Pretpostavimo sada da je $[Ex,x] = 0$. Tada za $0 \leq t \leq 1$ neka je $y_t = tx + (1-t)(I-E)x = x-(1-t)Ex$. Na ovaj način je $[y_t,x] = [x,x] = \|x\|^2$. Odavde je $\|y_t\| \geq \|x\|$. Pošto je $I - E$ hermitski, imamo na osnovu 4.1.3, da je $\|y_0\| = \|(I-E)x\| \leq \|x\|$. To povlači da je $\|I-E\| \; \|x\| = \|y_t\|$ za svako t. Na osnovu striktne konveksnosti je $x = (I-E)x$ pa i $Ex = 0$.

Teorema 4.1.4. Ako je $(V, \|\cdot\|)$ uniformno konveksan s.i.p.s i neka su $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ komutativne ograničene Boolove algebre projektora na V, tada postoji norma $|\cdot|$ na V ekvivalentna sa normom $\|\cdot\|$, takva da je $(V, |\cdot|)$ uniformno konveksan i da je $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ hermitska familija. Što više, ako je $[\cdot,\cdot]$ s.i.p saglasan sa normom $|\cdot|$, tada je za svako $x \in V$, $[\ ,x]$ Badov funkcional u odnosu na svaki $\mathcal{B}_i$, $= 1.2.,,n.$

Dokaz. Dokaz leme 2.3. u [4] može da se prenese na proizvoljnu ograničenu Boolovu algebru projektora i da se zaključi da je ta Boolova algebra hermitski ekvivalentna. To sada pokazuje, na osnov teoreme 4.1.1. da je $\mathcal{B}$ hermitski ekvivalentan. Na osnovu posledice 4.3. u [5] postoji $\mathcal{B}$-norma $|\cdot|$ takva da je $(V,|\cdot|)$ uniformno konveksan s.i.p.s. Za kraj dokaza treba primeniti lemu 4.1.3.

4.2. O C -ALGEBRAMA

Cilj nam je da ovim paragrafom prikažemo koliko se uspešno može koristiti s.i.p. u rešavanju nekih problema C^*algebri.

Prvo istaknimo vezu izmedju pozitivnih funkcionala i stejtova. Neka je p pozitivan funkcional na C^*algebri A, tj. neka je $p(x^*x) \geq 0$ za svako $x \in A$. Neka algebra A ima jedinicu e. Dobro je poznato da pozitivnost funkcionela p implicira $p(x) \leq p(e)\,\|x\|$, što znači da je pozitivni funkcional stejt. Obrnuto je takodje tačno ([7]). Ovaj rezultat sada neposredno sledi iz teoreme 3.3.3. Naime, na osnovu dobro poznatog rezultata Geljfanda i Nejmark [10] data C^*algebra A može biti preslikana izomorfno i izometrično na neku algebru A', operatora na Hilbertovom prostoru. Tom prilikom neki stejt na A prelazi u stejt na A' i pozitivna je ako i samo ako je njegova slika pozitivna. Sa druge strane za tačkasti stejt na A' imamo $\omega(T^*T) = (T^*Tx, x) = \|Tx\|^2 \geq 0$, $x \in H$. Dalji zaključak sledi iz teoreme 3.3.3.

Za opštije $*$-algebre ova konstatacija ne važi.

Navedimo sada Lumerov dokaz jedne Kadisonove teoreme.

Teorema 4.2.1. U Banachovoj algebri A sa jedinicom postoji najviše jedna involucija koja je čini C^*algebrom.

Dokaz. Neka je ponovo A' algebra operatora na Hilbertovom prostoru, na koju je izomorfno i izometrično preslikana algebra A. Neki elemenat u A je samokonjugovan ako i samo ako je njegova slika u A' hermitski elemenat (tj. ima realno numeričko polje). Ali gornje preslikavanje prevodi stejtove na A na stejtove na A', i pošto je zatvorena konveksna ljuska nekog elementa (u A ili A' determinisana pomoću konusa od stejta / od A ili A'/, zaključujemo da su samo konjugovani elementi od A elementi koji imaju numerički rang realan i koji su determinisani pomoću stejtova (otuda pomoću norme). Prema tome involucija je definisana pomoću norme.

Lumer [31] je takodje dao jedan nov dokaz da su B^* algebre C^* algebre.

Lema 4.2.1. Ako je A neka B^* algebra sa jedinicom e i $x\in A$ takav da je $x^* = x$, onda je numerički rang $W(x)$ od x realan i ima isti l.u.b i g.l.b kao spektar $\sigma(x)$ do x.

Dokaz. Ako je $x^* = x$ onda je $\|e+i\lambda x\|^2 = \|(e+i\lambda x)(e - i\lambda x)\| = \|e+\lambda^2x^2\| = 1 + o(\lambda)$ za λ realno. Otuda, na osnovu leme 4.1.1., $\mathrm{Re}W(ix) = 0$ tj. $W(x)$ je realan. Sa druge strane, koristeći $\|x^2\| = \|x\|^2$ imamo $\|x\| = |\sigma(x)| \leq |w(x)| \leq \|x\|$. Činjenica da je $|\sigma(x)| = |w(x)|$ kada je primenjena na $\lambda e+x$, za velike realne vrednosti od λ i $-\lambda$, zajedno sa $\sigma(\lambda e+x) = \lambda+\sigma(x)$ i $W(\lambda e+x) = \lambda +W(x)$ pokazuje da $\sigma(x)$ i $W(x)$ imaju iste gornje i donje medje.

Lema 4.2.2. (Fukamija) Ako je A neka B^* algebra i $x,y\in A$, takvi da je $x^* = x$, $y^* = y$, $\sigma(x) \geq 0$, $\sigma(y) \geq 0$, onda je $\sigma(x+y) \geq 0$.

Dokaz. Neka $\mathcal{K}_0$ označava skup svih normalizovanih tačkastih stejtova od A. Na osnovu leme 4.2.1., za neko $\omega\in \mathcal{K}_0$ je $\omega(x) \geq 0$, $\omega(y) \geq 0$; otuda

$g.l.b\,\sigma(x+y) = g.l.b^{\mathcal{K}}(x+y) = g.l.b(\omega(x)+\omega(y)) \geq 0.$

Predhodne činjenice sugeriraju, a to će biti i dokazano, da C^* karakter od A^* zavisi samo od "lokalnog diferencijalnog uslova" koji vezuje involuciju i normu, blizu identiteta.

Neka je A Banachova algebra sa jedinicom e. Neka H bude skup svih hermitskih elemenata u A, tj.

$$H = \{h \mid \|e+i\lambda h\| = 1 +o(\lambda),\ h\in A\}$$

Uzmimo da je: a) Svako $a \in A$ ima reprezentaciju $a = u + iv$ u $u \in H$, $v \in H$. b) Ako $h \in H$ tada postoji reprezentacija $h^2 = u + iv$ tada da je $u \in H$ i $v \in H$. Onda je A (bez ekvivalentnog renormiranja) neka C^* algebra.

Teorema 4.2.2. Neka je A $*$-algebra sa jedinicom takva da uslov $\|x^*x\| / \|x^*\|\|x\| = 1 + \sigma(r)$, $r = \|e-x\|$, važi blizu jedinice e. Tada je A (bez ekvivalentnog renormiranja) neka C^* algebra.

Dokaz. Neka H bude skup svih hermitskih elemenata iz A i S skup svih samokonjugovanih elemenata iz A. Teoremu ćemo dokazati ako pokažemo da je H = S.

Neka je $u \in S$, $u \neq 0$. Imamo

$$\frac{\|e+\lambda^2u^2\|}{\|e+i\lambda u\|\|e-i\lambda u\|} = 1 + \sigma(r) \qquad (\lambda > 0)$$

i $r = \lambda\|u\|$, tako da je $\|e+\lambda^2x^2\| / 1+\sigma(r) = 1 + \sigma(\lambda)$.

Sledi da, označujući numeričko polje od u sa $W(u)$, i koristeći lemu 4.1.1.

$$\sup \mathrm{Re}W(iu) = \lim_{\lambda\to+0} \frac{\|e+i\lambda u\| - 1}{} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{(1+\sigma())/\|e-i\lambda u\| - 1}{\lambda}$$

$$= - \lim_{\lambda\to+0} \frac{\|e-i\lambda u\| - 1}{\lambda} = \sup \mathrm{Re}W(-iu) = \inf \mathrm{Re}W(iu)$$

Aki jasno je da je spektar od $\sigma(u)$ simetričan oko realne ose, pa je po teoremi 4 [31] $\sup \mathrm{Re}W(iu) \geq 0$, $\inf \mathrm{Re}W(iu) \leq 0$. Sledi da je $W(u)$ realno odakle je $u \in H$.

Pretpostavimo obrnuto, da je $h \in H$ i stavimo $h = u + iv$.

Neka π_0 bude skup svih normalizovanih tačka stejtova. Pošto je $h \in H$, $W(h)$ je realno i pošto smo već pokazali da je $S \subset H$. takodje su $\omega(u)$ i $\omega(v)$ realni, $\omega \in \pi_0$, otuda za neko $\omega \in \pi_0$, $\omega(v) = 0$, iz ovoga i na osnovu teoreme 3.3.1., je $v = 0$ tj. $h = u \in S$ i dokaz je završen.

<u>Posledica 4.2.1.</u> Ako je A $*$-algebra sa jedinicom e, takva da je $\|x^* x\| / \|x\| \|x^*\| = 1 + \sigma(r)$, $r = \|e-x\|$, blizu e, tada je A simetrična algebra.

Otuda mi još dobijamo, bez korišćenja Fukamiyeve leme, glavni rezulteta:

<u>Posledica 4.2.2.</u> B^*-algebre su C^*-algebre.

5. REPREZENNTACIJA OPERATORA WIGNEROVOG TIPA

5.1. UOPŠTENI IZOMETRIČNI OPERATORI

U [36] je uveden pojam f-izometričnog operatora sa jednog unitarnog prostora U_1 na drugi unitarni prostor U_2, gde su unitarni prostori nad telom kvaterniona K_v. Taj pojam se pokazao veoma pogodnim za karakterizaciju operatora Wignerovog tipa na Hilbertovim prostorima koji su nad telom kvaterniona (Def. 5.2.1.)

Ovde ćemo taj pojam iz unitarnih prostora proširiti u normirane prostore, tj. u s.i.p.s-ove.

Predhodno ćemo istaći neke osobine endomorfizama koji održavaju apsolutne vrednosti na telu kvaterniona ([35]).

<u>Lema 5.1.1.</u> Jedini endomorfizmi tela kvaterniona K_v koji održavaju apsolutne vrednosti su sledeće funkcije koje skup $\{i,j,k\}$ preslikavaju u skup $\{i,j,k,-i,-j,-k\}$.

$$f_1 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ i & j & k \end{pmatrix} \qquad f_9 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -j & i & k \end{pmatrix} \qquad f_{17} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ k & i & j \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ i & -j & -k \end{pmatrix} \qquad f_{10} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ j & -i & k \end{pmatrix} \qquad f_{18} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ k & -i & -j \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -i & j & -k \end{pmatrix} \qquad f_{11} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ j & i & -k \end{pmatrix} \qquad f_{19} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -k & i & -j \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -i & -j & k \end{pmatrix} \qquad f_{12} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -j & -i & -k \end{pmatrix} \qquad f_{20} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -k & -i & j \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -i & k & j \end{pmatrix} \qquad f_{13} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ j & k & i \end{pmatrix} \qquad f_{21} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -k & j & i \end{pmatrix}$$

$$f_6 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ i & -k & j \end{pmatrix} \qquad f_{14} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ j & -k & -i \end{pmatrix} \qquad f_{22} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ k & -j & i \end{pmatrix}$$

$$f_7 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ i & k & -j \end{pmatrix} \qquad f_{15} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -j & k & -i \end{pmatrix} \qquad f_{23} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ k & j & -i \end{pmatrix}$$

$$f_8 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -i & -k & -j \end{pmatrix} \quad f_{16} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -j & -k & i \end{pmatrix} \quad f_{24} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -k & -j & -i \end{pmatrix}$$

Dokaz. Neka je $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$ a K_v i $f : K_v \to K_v$ endomorfizam tela K_v koji održava apsolutne vrednosti. Na osnovu leme 1 iz [29] sledi

$$f(a) = a_1 + a_2 f(i) + a_3 f(j) + a_4 f(k).$$

Pored toga je

$$f(i^2) = f(j^2) = f(k^2) = f(i)^2 = f(j)^2 = f(k)^2 = f(-1) = \\ = -1$$

Iz ovih jednakosti sledi da su

$$f(i),\ f(j),\ f(k) \in \{i, j, k, -i, -j, -k\}.$$

Ali, ne može se desiti da slike od skupa $\{i,j,k\}$ budu trojke u kojima neće biti svi od i,j u k, bez obzira na njihov znak. Zaista, ako je na primer

$$f : \{i,j,k\} \to \{\pm i, \pm i, \pm j\}$$

tada je $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = (\pm a_2 \pm a_3)^2 + a_4^2$, što je nemoguće za proizvoljne $a_e (e = 1,2,3,4)$. Isto tako ne može da se desi da slika od i,j,k bude identična permutacija tog skupa u kojoj je bar jedan elemenat fiksan. Ako bi, naime, to bilo; na primer ako bi bilo $\begin{pmatrix} i & j & k \\ i & k & j \end{pmatrix}$ tada bi iz $ij = k$ sledilo $j = -j$, što je nemoguće. Nije teško proveriti da od presotalih funkcija koje ispunjavaju sve zahteve ostaju samo one koje su u skupu

$$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_{24}\}.$$

Lema 5.1.2. Za funkcije iz F važe sledeće osobine:

1) $f \in F$ je bijektivno preslikavanje, tj. f je izomorfizam tela K_v
2) f^{-1} je izomorfizam tela K_v.
3) $\overline{f(a)} = f(\bar{a})$, $\overline{f^{-1}(a)} = f^{-1}(\bar{a})$ $\quad (a \in K_v)$

4) $f_2^2 = f_3^2 = f_4^2 = f_5^2 = f_8^2 = f_{11}^2 = f_{12}^2 = f_{22}^2 = f_{24}^2 = f_1$

$f_{13}^3 = f_{15}^3 = f_{16}^3 = f_{17}^3 = f_{18}^3 = f_{19}^3 = f_{20}^3 = f_1$

$f_6^4 = f_7^4 = f_9^4 = f_{10}^4 = f_{14}^4 = f_{21}^4 = f_{23}^4 = f_1$

Dokaz se izvodi proveravanjem.

Označimo sa F^2 skup funkcija iz F čiji je kvadrat jednak f_1, sa F^3 skup funkcija iz F čiji je treći stepen jednak f_1 i sa F^4 skup funkcija iz F čiji je četvrti stepen jednak f_1. Tako je

$$F = F^2 \cup F^3 \cup F^4$$

Primetimo, iako nam to ovde neće biti potrebno, da je grupa F izomorfna sa grupom rotacija kocke ([37]).

Neka su V_1 i V_2 s.i.p.s-ovi nad sistemom Φ gde Φ može biti realno polje R, kompleksno polje K i telo kvaterniona K_v. Neka su $[\cdot,\cdot]_1$ i $[\cdot,\cdot]_2$ respektivno s.i.p-ovi na V_1 i V_2. Neka je, dalje, $S : V_1 \to V_2$ bijektivni operator od V_1 na V_2 i $f : \Phi \to \Phi$ endomorfizam sistema Φ koji održava apsolutne vrednosti. Dakle $f \in F$.

Definicija 5.1.1. Operator $S : V_1 \to V_2$ je f-linearan na V_1 ako je, za svako $x,y \in V_1$ i svako $\lambda, \mu \in \Phi$,

1) $\quad S(\mu x+\lambda y) = f(\mu)Sx + f(\lambda)Sy$

Definicija 5.1.2. Operator $S : V_1 \to V_2$ je f-izometričan ako je, za svako $x \in V_1$

2) $\quad [Sx,Sy]_2 = f([x,y]_1)$.

Ako je, još, $V_1 = V_2$ tada ćemo ovaj operator zvati f-unitaran. Ako je f identično preslikavanje, onda ćemo S zvati izometričan. Ako je $\Phi = K$ i f konjukcija u K a $V_1 = V_2$, onda ćemo operator S zvati antiunitarnim.

Ako su V_1 i V_2 unitarni, onda dobijamo uobičajene defi-icije izometričnog, unitarnog i antiunitarnog operatora.

Sledeće teoreme će podsetiti na analogiju izmedju f-i-ometričnih (f-unitarnih) operatora i uobičajenih izometričnih unitarnih) operatora.

Teorema 5.1.1. Neka je $f \in F$. Ako je S f-izometričan oper-ator sa V_1 na V_2 tada je on f-linearan.

okaz. Iz (2) sledi $[S(\lambda x+\mu y), Sz]_2 = f([\lambda x+\mu y,z]_1)$ za svako $,y,z \in V_1$ i svako $\lambda,\mu \in \Phi$. Koristeći osobine f i osobine s.i.p.-a $[\cdot]$ imamo $[S(\lambda x+\mu y),Sz]_2 = f(\lambda)\ f([x,z]_1) + f(\mu)\ f([y,z]_1)$

$$= f(\lambda)\ [Sx,Sz]_2 + f(\mu)\ [Sy,Sz]_2$$
$$= [f(\lambda)Sx + f(\mu)Sy,Sz]_2$$

j. $[S(\lambda x+\mu y)-f(\lambda)Sx-f(\mu)Sy,Sz]_2 = 0$, za svako $z \in V_1$. Pošto je $\{Sz \mid z \in V_1\} = V_2$, dobijamo da je $S(\lambda x+\mu y)-f(\lambda)Sx-f(\mu)Sy = 0$ za vako $x,y \in V_1$ i svako $\lambda, \mu \in \Phi$.

Teorema 5.1.2. Ako je S f-izometrilan onda je S^{-1} f^{-1}-izometričan.

okaz. Neka je $x = Sx'$; $y = Sy'$. Tada je
$[S^{-1}x,S^{-1}y]_1 = [S^{-1}Sx';S^{-1}Sy']_1 = [x';y']_1 = f^{-1}[Sx';\ Sy']_2 = f^{-1}[x,y]_2$
to je i trebalo dokazati, jer je $f^{-1} \in F$ (lema 5.1.2.).

Teorema 5.1.3. Neka su U_1 i U_2 unitarni prostori nad sistemom Φ. Ako je S f-linearan operator sa U_1 na U_2, za koji je, za svako x U_1, $(Sx,Sx)_2 = (x,x)_1$, onda je S f-izometričan od U_1 na U_2.

okaz. Zavisno od toga da li je $\Phi = R$, $\Phi = K$ ili $\Phi = K_v$, skalarni proizvod je redom

$$(x,y)_e = P_e(x,y)$$
$$(x,y)_e = P(x,y) + iP_e(x,iy)$$

$,y)_e = P_e(x,y) + iP_e(x,iy) + jP_e(x,jy) + kP_e(x,kj)$ $(e = 1,2)$.

e je $p(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x+y)\right]$ a $q(x)$ kvadrat norme elemen- x. Na osnovu leme 5.1.2. i teoreme 5.1.2. za S važe sledeće jnakosti:

$$Sx \pm Sy = S(x \pm y)$$

$$Sx \pm eSy = S(x \pm f^{-1}(e)y) \qquad (e \in \{i,j,k\})$$

svako $x,y \in V_1$. Prema tome je:

$$(Sx,Sy) = 1/4\left[q_2(Sx+Sy) - q_2(Sx-Sy)\right] = P_1(x,y)$$

$$(Sx,eSy) = 1/4\left[q_2(Sx,+eSy) - q_2(Sx-eSy)\right] =$$

$$= 1/4\left[q_2(S(x+f^{-1}(e)y) - q_2(S(x-f^{-1}(e)y)\right]$$

$$= 1/4\left[q_1(x+f^{-1}(e)y) - q_1(x-f^{-1}(e)y)\right] = P_1(x,f^{-1}(e)y)$$

$\in\{i,j,k\}$).

sle ovoga je

$$x,Sy)_2 = P_2(Sx,Sy)+iP_2(Sx,iSy)+jP_2(Sx,jSy)+kP_2(Sx,kSy)$$

$$= P_1(x,y)+iP_1(x,f^{-1}(i)y)+jP_1(x,f^{-1}(j)y)+kP_1(x,f^{-1}(k)y).$$

imetimo još da je $P_1(x,-y) = -P_1(x,y)$, za svako $x,y \in V_1$. Osim ga, ako je $f^{-1}(e) = e'$ tada se u skupu $\{i';j';k'\}$ moraju nalaziti i od i,j i k sa znakom + ili – (lema 5.1.1. i teorema 5.1.2.). da je

$$x,Sy)_2 = P_1(x,y) + f(i')P_1(x,i'y) + f(j')P_1(x,j'y) + f(k')$$

$$(x,k'y) = f\left[P_1(x,y) + i'P_1(x,i'y) + j'P_1(x,j'y) + k'P_1(x,k'y)\right]$$

$$= f\left[P_1(x,y) + iP_1(x,iy) + jP_1(x,jy) + kP_1(x,ky)\right],$$

svako $x,y \in V_1$.

Neka je S f-izometričan operator sa V_1 na V_2. Imajući u du lemu 1 iz [30] i našu lemu 5.1.1., imamo:

<u>sledica 5.1.1.</u> Ako je $\Phi = R$, S je izometričan operator, tada $[Sx,Sy]_2 = [x,y]_1$ za svako $x,y \in V_1$.

osledica 5.1.2. Ako je $\phi = K$, S je ili izometričan ili antiizo-
etričan operator, tj. ili je $[Sx,Sy]_2 = [x,y]_1$, ili je
$[Sx,Sy]_2 = \overline{[x,y]_1}$ za svako $x,y \in V_1$.

osledica 5.1.3. Ako je $\phi = K_v$, postoje 24 f-izometričnih opera-
ora od V_1 na V_2, ali u ovom slučaju ne postoji antiizometričan
perator, tj. takav operator S za koji je $[Sx,Sy]_2 = \overline{[x,y]}_1$, gde
$-$ označava konjukciju kvaterniona. To sledi iz leme 5.1.1. poš-
o u F nema konjukcije.

roblem 5.1.1. Da li teorema 5.1.3. važi i u nekim neatrivijalnim
.i.p.s-ovima?

5.2. REPREZENTACIJA OPERATORA WIGNEROVOG TIPA

Dobro je poznato da je matematička teorija kvantne me-
anike formulisana u terminima kompleksnih separabilnih Hilberto-
ih prostora H. Primarno mesto u toj teoriji igra, ne skalarni
roizvod, već apsolutna vrednost skalarnog proizvoda. Stoga je
oš odavno postavljen problem izučavanja bijektivnog operatora
$: H \longrightarrow H$, koji ne mora biti linearan, sa osobinom da je, za
vako $x, y \in H$,

1) $\quad |(Sx,Sy)| = |(x,y)|$

aj problem je doveo E.P. Wignera do njegove čuvene teoreme "Uni-
arnost-antiunitarnost", teoreme koja daje reprezentaciju ovih
peratora na nekim specijalnim Hilbertovim prostorima, a koja je
rgi put bila nagoveštena u njegovoj knjizi [46] i onda razvijena
otpunije u njegovim nepublikovanim Leydenskim predavanjima 1957.
. Teoremu je diskutovao R. Hagedorn [18] i [19] a takodje i E.
rtin [2].

Svi dokazi ove teoreme su bili većinom geometrijski i
ažili su samo za konačnodimenzionalne prostore na polju realnih

brojeva, sve dok je J.S. Lomont i P. Mendelson u [30] nisu najstrože dokazali metodama analize i to za kompleksne Hilbertove prostore, u opštem slučaju, neseparabilne i beskonačnodimenzionalne.

Prof. S. Kurepa je jednom prilikom istakao da bi za kvantnu mehaniku bilo važno da se da reprezentacija operatora S koji ispunjava uslov (1) ako je H Hilbertov prostor nad telom kvaterniona. Taj problem smo rešili u [35] koristeći osnovnu ideju dokaza iz [30]. Izložićemo sada taj rad i na kraju ćemo dati jedno uopštenje toga rada u izvesnom smislu.

U daljem će nam H biti Hilbertov prostor nad sistemom Φ gde Φ može biti realno polje R, kompleksno polje K i telo kvaterniona K_v, i $S : H \to H$ bijektivan operator na H koji ispunjava uslov (1).

<u>Definicija 5.2.1.</u> Bijektivan operator $S : H \to H$ koji isounjava uslove (1) na H zovemo operator Wignerovog tipa ili W-operator.

<u>Lema 5.2.1.</u> Za operator S Wignerovog tipa važe osobine:

1) S održava norme.

2) S održava ortogonalnost.

3) $Sx = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.

4) S preslikava potpune ortonormirane sisteme vektora u potpune ortonormirane sisteme.

5) S^{-1} ima sve predhodne navedene osobine.

Dokaz ove leme ne predstavlja nikakvu teškoću.

<u>Lema 5.2.2.</u> Neka S W-operator. Tada S preslikava konačne linearno nezavisne skupove u konačne linearno nezavisne skupove vektora.

<u>Dokaz.</u> Vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su linearno nezavisni ako i samo

ako postoje vektori $y_1, y_2, \ldots, y_n$, takvi da je $(x_i, y_j) = 0$ ako i samo ako je $i \neq j$. Ali onda dva skupa $\{Sx_1, Sx_2, \ldots, Sx_n\}$ i $\{Sy_1, \ldots, Sy_n\}$ imaju istu osobinu.

Definicija 5.2.2. Bijektivna preslikavanja $S : V \to V$ i $S : V \to V$ realnog ili kompleksnog vektorskog prostora su fazno ekvivalentna ako postoji skalarno vrednostna funkcija $\omega(x)$ na V takva da je, za svako $x \in V$.

1. $|\omega(x)| = 1$ 2. $Tx = \omega(x)Sx$.

Neka je $x, y \in H$. Kazaćemo da je x u relaciji sa y i pisaćemo $x \sim y$ ako postoji λ, $\lambda \neq 0$, takvo da je $y = \lambda x$. Jasno je da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Neka je $H/\sim$ skup klasa ekvivalencije. U svakom različitom od nule elementu iz $H/\sim$ izaberimo njegov reprezentativni jedinični vaktor. Ovaj izbor nije jedinstven ali ćemo jedan fiksirati. Neka E bude skup svih ovih reprezentanata zajedno sa nulom. Svakoj tački x iz H odgovara jedna tačka iz E. Označimo ovu sa $e(x)$.

Teorema 5.2.1. Neka je S W-operator na prostoru H. Tada postoji bijektivan operator $T : H \to H$ takav da je:

1) $T\lambda x = \lambda Tx$ za svako $x \in H$ i svako $\lambda \in \Phi$.

2) T održava apsolutne vrednosti skalarnog proizvoda.

3) T je fazno ekvivalentan sa S.

Dokaz. Ako je $x \neq 0$, $x \in H$ postoji jedinstven skalar q takav da je $x = qe(x)$.

Definišimo $T : H \to H$ sa

$$Tx = \begin{cases} \varrho Se(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pokazaćemo da T ima navedene osobine.

1) Važi $T\lambda 0 = \lambda T0 = 0$. Za $x \neq 0$ je $\lambda x = \lambda \varrho e(x)$, pa je

$T\lambda x = \lambda \varrho Se(x) = \lambda(\varrho Se(x)) = \lambda Tx$.

2) $|(T0,T0)| = |(0,0)| = 0$. Ako je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ tada je $x = \varrho e(x)$, $y = \varrho e(y)$ pa je

$$|(Tx,Ty)| = |(\varrho Se(x), \varrho Se(y))| = |\varrho\varrho| \, |(Se(x), Se(y)| = |\varrho\varrho| \, |(e(x), e(y)| = |(\varrho e(x), \varrho e(y))| = |(x,y)|.$$

Specijalno T održava norme i ortogonalnost.

Dokažimo da je T injektivan. Iz $Tx = Ty = 0$ sledi $x = y = 0$. Pretpostavima do je $Tx = Ty = 0$. Tada je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Ako je $x \not\sim y$, tada $e(x) \not\sim e(y)$ i na osnovu leme 5.2.2. $Se(x) \not\sim Se(y)$. Otuda $Tx = \varrho Se(x) \not\sim \varrho Se(y) = Ty$, suprotno pretpostavci. Znači da je $y = \lambda x$ pa je $Tx = Ty = \lambda Tx$, odakle je $\lambda = 1$ tj. $y = x$. Pokažimo da je T sirjektivan. Neka je $y \neq 0$. Tada postoji x takav da je $x = S^{-1}y$. Jasno je da je $e(x) \neq 0$. Neka $e(x)$ zajedno sa $\{e_\gamma\}$ bude ortonormirani bazis u H. Tada Sx, zajedno sa $\{Se_\gamma\}$ je jedan ortogormirani bazis u H. Pošto je x ortogonalan na sve $\{e_\gamma\}$, Sx je ortogonalan na sve $\{Se_\gamma\}$, otuda postoji jedinstven skalar λ takav da je $y = Sx = \lambda Se(x) = \lambda Te(x) = T\lambda e(x)$.

Neka je $x_0 = \lambda e(x)$. Tada je $y = Tx_0$.

Za $x = 0$ sledi $Tx = Sx = 0$. Neka je $x \neq 0$. Pokazali smo da je u tom slučaju $Sx = \lambda Se(x)$ za neki skalar λ. Sa druge strane je $x = \varrho e(x)$ i $Tx = \varrho Se(x)$. Stoga je $Tx = \varrho\lambda^{-1}Sx$. Šta više je $\|Tx\| = \|Sx\| = \|x\|$ odakle sledi $|\varrho\lambda^{-1}| = 1$, što je i trebalo dokazati.

Definicija 5.2.3. Neka je x iz vektorskog prostora V ($x \neq 0$). Označimo sa $p(x)$ skup svih vektora λx gde je $\lambda \in \Phi$ ($\lambda \neq 0$). Drugim rečima $p(x)$ je klasa ekvivalencije koja sadrži x. Sa V ćemo dovesti u vezu skup

$$\widetilde{V} = \{p(x) \mid x \in V, \ x \neq 0\}$$

$\widetilde{V}$ je projektivan prostor asociran prostoru V.

Neka je $T : V \rightarrow V$ bijektivan operator takav da je $T\lambda x = \bar{\lambda} Tx$, za svako x i svako $\lambda \in \Phi$. Tada iz $Tx = 0$ sledi $x = 0$.

Šta više ako je $p(y) = p(x)$ tada je $p(Tx) = p(Ty)$ pa je preslikavanje $\widetilde{T} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}$, dato sa

$$\widetilde{T}p(x) = p(Tx) \qquad (p(x) \in \widetilde{V})$$

dobro definisano.

<u>Lema 5.2.2.</u> $\widetilde{T}$ je bijektivan operator.

<u>Dokaz.</u> Pretpostavimo da je $p(y) \in \widetilde{V}$. Tada je $y \neq 0$. Pošto je T preslikavanje na, postoji $x \in V$, $x \neq 0$ takvo da je $y = Tx$ a na osnovu toga $p(y) = \widetilde{T}p(x)$ pa je $\widetilde{T}$ sirjentivan. Neka je sada $\widetilde{T}p(x) = \widetilde{T}p(y)$. Tada je $p(Tx) = p(Ty)$ odakle je $Tx = \lambda Ty = T f(\lambda) y$. Pošto je T bijektivan sledi $x = f(\lambda)^{-1} y$ i $p(x) = p(y)$.

<u>Definicija 5.2.4.</u> Neka su p, $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$ $\in \widetilde{V}$. Označimo sa $p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n)$ prostor razapet nad vektorima $x_1, x_2, \dots, x_n$. Oznaka $p \subset p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n)$ će se podrazumevati u smislu skupovne inkluzije.

<u>Teorema 5.2.2.</u> Neka je $T : H \longrightarrow H$ W-operator sa osobinom $T\lambda x = \lambda Tx$ za svako $x \in H$ i svako $\lambda \in$ ƀ. Tada postoji f-unitarni operator U takav da je $\widetilde{T} = \widetilde{U}$, gde je $f \in F$.

Za dokaz ove teoreme će biti potrebno nekoliko pomoćnih rezultata.

<u>Lema 5.2.3.</u> Ako je $p \subset p_1 + p_2 + \dots + P_n$, tada je $\widetilde{T}p \subset \widetilde{T}p_1 + \dots + \widetilde{T}p_n$.

<u>Dokaz.</u> I T i T^{-1} preslikavaju konačne linearno nezavisne skupove na konačne linearno nezavisne skupove. Neka je $x \in p$, $x_1 \in p_1$, ..., $x_n \in p_n$, tada je $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ gde je $m \leq n$ i predpostavimo da su $x_1, x_2, \dots, x_m$ linearno nezavisni. Tada su $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_m$ linearno nezavisni, ali su $Tx, Tx_1, \dots, Tx_m$ linearno zavisni pa $p(Tx) \subset p(Tx_1) + \dots + p(Tx_m)$ i $p(Tx) \subset p(Tx_1) + \dots + p(Tx_n)$.

Neka $N = \{v\}$ bude skup indeksa koji sadrži 0 i neka je $N' = N \setminus 0$. Neka $\{e_v \mid v \in N\}$ bude ortonormirana baza prostora H.

Onda je $\{Te_v\}$ takodje ortonormirana baza.

Lema 5.2.4. Postoji jedan ortonormiran bazis $\{\hat{e}_v \mid v \in N\}$ u H takav da je $\hat{e}_v \sim e_v$ i $\widetilde{T}p(e_o+e_v) = p(T\hat{e}_o+T\hat{e}_v)$ $(v \in N)$.

Dokaz. Važi $p(e_o+e_v) \subset p(e_o)+p(e_v)$. Otuda na osnovu predhodne leme $\widetilde{T}p(e_o+e_v) \subset \widetilde{T}p(e_o)+\widetilde{T}p(e_v)$ ili $pT(e_o+e_v) \subset p(Te_o)+p(Te_v)$ pa je

$$T(e_o+e_v) = \alpha_v\ (Te_o+\tau_v Te_v)$$

gde su α_v i τ_v skalari: $\alpha_v = (T(e_o+e_v),\ Te_o)$

$$\tau_v = (T(e_o+e_v), Te_v)\ (T(e_o+e_v),\ Te_o)^{-1}$$

takvi da je $|\alpha_v| = |\tau_v| = 1$. Stavimo $\hat{e}_o = e_o$, $\hat{e}_v = \tau_v e_v$ $(v \neq 0)$. Jasno je da će ovako definisan skup $\{\hat{e}_v\}$ biti bazis sa zahtevanim osobinama.

Lema 5.2.5. Neka je $v \in N'$. Tada postoji preslikavanje $\varphi_v : \Phi \to \Phi$ takvo da je $\widetilde{T}p(e_o+\lambda e_v) = p(Te_o+\varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v)$ za svako $\lambda \in \Phi$. Šta više φ_v održava apsolutne vrednosti.

Dokaz. Iz $p(e_o+\lambda e_v) \subset p(e_o) + p(e_v) = p(e_o) + p(\hat{e}_v)$ sledi $T(e_o+\lambda e_v) = \alpha_v(Te_o+\varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v)$ gde je

$$\alpha_v = (T(e_o+\lambda e_v),\ Te_o)$$

$$\varphi_v(\lambda) = (T(e_o+\lambda e_v), T\hat{e}_v)\alpha_v^{-1}.$$

Tako je $\varphi_v(\lambda)$ dobro definisano i imamo

$$|\varphi_v(\lambda)| = |(T(e_o+\lambda e_v),\ T\hat{e}_v)|\ |\alpha_v^{-1}| = |\lambda|.$$

Primetimo još da je, za svako $v \in N'$, $\varphi_v(0) = 0$, $\varphi_v(1) = 1$.

Lema 5.2.6. φ_v ne zavisi od v.

Dokaz. Neka je $v, v' \in N'$, $v \neq v'$, $\lambda \neq 0$. Jasno je da je

$$p(\lambda e_v - \lambda e_{v'}) \subset p(e_v) + p(e_{v'})$$

i

$$p(\lambda e_v - \lambda e_{v'}) \subset p(e_o + \lambda e_v) + p(e_o + \lambda e_{v'}).$$ Otuda i na osnovu leme 5.2.3. i leme 5.2.4, imamo $Tp(\quad e_v - \quad e_{v'})$

$$\widetilde{T}p(e_v) + \widetilde{T}p(e_{v'}) = \widetilde{T}p(\hat{e}_v) + \widetilde{T}p(\hat{e}_{v'})$$

$$\widetilde{T}p(\lambda e_v - \lambda e_{v'}) \subset \widetilde{T}p(e_o + \lambda e_v) + \widetilde{T}p(e_o + \lambda e_{v'}).$$

Uzimajući u obzir definiciju operatora T i lemu 5.2.4, imamo

$$p(T(\lambda e_v - \lambda e_{v'})) \subset p(T\hat{e}_v) + p(Te_{v'})$$

$$p(T(\lambda e_v - \lambda e_{v'}) \subset p\,(Te_o + \varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v) + p(Te_o + \varphi_{v'}(\lambda)\,T\hat{e}_{v'}).$$

Zato je $\lambda T(e_v - e_{v'}) = \alpha T\hat{e}_v + \beta\, T\hat{e}_{v'}$

$$= \gamma[Te_o + \varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v] + \delta[Te_o + \varphi_{v'}(\lambda)\,T\hat{e}_{v'}]$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pogodno izabrani skalari, za koje mora biti

$$\gamma + \delta = 0, \quad \alpha = \gamma\varphi_v(\lambda), \quad \beta = \delta\varphi_{v'}(\lambda) = \gamma\varphi_{v'}(\lambda)$$

pa je

$$\lambda T(e_v - e_{v'}) = \gamma[\varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v - \varphi_{v'}(\lambda)T\hat{e}_{v'}]$$

i $\widetilde{T}p(\lambda e_v - \lambda e_{v'}) = p\,[\varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v - \varphi_{v'}(\lambda)T\hat{e}_{v'}]$

Za $\lambda = 1$ je $\widetilde{T}p(e_v - e_{v'}) = p\,\varphi_v(1)T\hat{e}_v - \varphi_{v'}(1)T\hat{e}_{v'}] =$

$= p[T\hat{e}_v - T\hat{e}_{v'}]$. Ali kako je $p(e_v - e_{v'}) = p(\lambda e_v - \lambda e_{v'})$ $\lambda \neq 0$

dobijamo $p[T\hat{e}_v - T\hat{e}_{v'}] = p\;\varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v - \varphi_{v'}(\lambda)T\hat{e}_{v'}$, što implicira

$$\varphi_v(\lambda)T\hat{e}_v - \varphi_{v'}(\lambda)T\hat{e}_{v'} = \mu(T\hat{e}_v - T\hat{e}_{v'}).$$

Tako je $\mu = \varphi_v(\lambda) = \varphi_{v'}(\lambda)$ za $\lambda \neq 0$. Takodje je $\varphi_v(0) = \varphi_{v'}(0) = 0$ pa je $\varphi_v \equiv \varphi_{v'}$. Zato će u daljem indeksi na φ biti izostavljeni.

<u>Lema 5.2.7.</u> $\widetilde{T}p(e_o + \sum_{v\neq 0}\lambda_v e_v) = p(Te_o + \sum_{v\neq 0}(\lambda_v)T\hat{e}_v$, gde su obe v šume konačne i uzimaju vrednosti nad istim skupom indeksa.

<u>Dokaz.</u> Iskaz je bio dokazan za slučaj jednog sabirka (lema 5.2.5) Za dokaz opšteg slučaja upotrebićemo indukciju i uzećemo za vrednosti indeksa pozitivne cele brojeve. Pretpostavimo da lema važi kad v uzima vrednosti od 1 do r - 1. Dokažimo da važi kad v uzima vrednosti od 1 do r.

Važi $p(e_0+\sum_1^r \lambda_j e_j) \subset p(e_0 + \sum_1^{r-1}\lambda_j e_j) + p(e_r)$

i $p(e_0 + \sum_1^r \lambda_j e_j) \subset p(e_0 + \lambda_r e_r) + \sum_1^{r-1} p(e_j)$.

Odavde je $\widetilde{T}p(e_0 + \sum \lambda_j e_j) \subset \widetilde{T}p(e_0 + \sum_1^{r-1} \lambda_j e_j) + \widetilde{T}p(e_r)$

$$= p(te_0 + \sum_1^{r-2} (\lambda_j) T\hat{e}_j) + p(T\hat{e}_r)$$

i $\widetilde{T}p(e_0 + \sum_1^r \lambda_j e_j) \subset pT(e_0 + \lambda_r e_r) + \sum_1^{r-1} \widetilde{T}p(e_j)$

$$= p(Te_0 + \varphi(\lambda_r)T\hat{e}_r) + \sum_1^{r-1} p(T\hat{e}_j).$$

Traženi rezultat sada sledi iz ove dva inkluzije.

Lema 5.2.8. $\widetilde{T}p(\sum_{v\neq 0} \lambda_v e_v) = p(\sum_{v\neq 0} \varphi(\lambda_v)T\hat{e}_v)$

gde su obe sume konačne i uzimaju vrednosti nad istim indeksima.

Dokaz. Jesno je da $p(\sum_1^r \lambda_j e_j) \subset \sum_1^r p(e_j)$

i da $p(\sum_1^r \lambda_j e_j) \subset p(e_0 + \sum_1^r \lambda_j e_j) + p(e_0)$. Stoga i na osnovu

leme 5.2.3. leme 5.2.4. i leme 5.2.7, imamo

$$\widetilde{T}p(\sum_1^r \lambda_j e_j) \subset \sum_1^r p(T\hat{e}_j)$$

$$\widetilde{T}p(\sum_1^r \lambda_j e_j) \subset p(Te_0 + \sum_1^r \varphi(\lambda_j)T\hat{e}_j) + p(Te_0).$$

Iz ove dve inkluzije kraj dokaza lako se vidi.

Lema 5.2.9. $\varphi : \Phi \to \Phi$ je antomorfizam.

Dokaz. $\widetilde{T}p(e_0 + [\lambda + \mu] e_v + e_{v'}) = p(Te_0 + \varphi(\lambda + \mu)T\hat{e}_v + T\hat{e}_{v'})$.

Ali $p(e_0 + [\lambda + \mu] e_v + e_{v'}) \subset p(e_0 + \lambda e_v) + p(\mu e_v + e_{v'})$

pošto je $\widetilde{T}p(e_0 + [\lambda + \mu] e_v + e_{v'}) \subset p(Te_0 + \varphi(\lambda)T\hat{e}_v +$

$$+ p(\varphi(\lambda) T\hat{e}_v + T\hat{e}_{v'}).$$

Zato je $T(e_0 + [\lambda + \mu] e_v + e_{v'}) = \alpha(Te_0 + \varphi(\lambda + \mu)T\hat{e}_v + T\hat{e}_{v'})$

$$= \beta(Te_0 + \varphi(\lambda)T\hat{e}_v + \gamma(\varphi(\mu)Te_v + T\hat{e}_{v'}),$$

što implicira $\alpha = \beta = \gamma$ odnosno važi, za svako $\lambda, \mu \in \Phi$,

$$\varphi(\lambda+\mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu) .$$

Za dokaz jednakosti $\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\,\varphi(\mu)$, za svako $\lambda, \mu \in \Phi$ podjimo od jednakosti $\widetilde{T}p(e_o + \lambda\mu\, e_v + \lambda e_{v'}) = p(Te_o + \varphi(\lambda\mu)Te_v +$

$$+\varphi(\lambda)T\hat{e}_{v'}).$$

Kako je još $p(e_o + \lambda\mu\, e_v + \lambda e_{v'}) \subset p(e_o) + p(\mu e_v + e_{v'})$

to je $\widetilde{T}p(e_o + \lambda\mu\, e_v + \lambda e_{v'}) \subset \widetilde{T}p(e_o) + \widetilde{T}p(\mu e_v + e_{v'})$

$$= p(Te_o) + p\,(\varphi(\mu))T\hat{e}_v + T\hat{e}_{v'}).$$

Kraj dokaza sledi iz prve jednakosti i zadnje inkluzije.

<u>Posledica 5.2.1.</u> Ako je $\Phi = \mathbb{R}$ onda je φ identičko preslikavanje. Ako je $\Phi = K$ onda je φ ili identičko preslikavanje ili je kompleksna konjugacija. Ako je $\Phi = K_v$ onda $\varphi \in F$, gde F označava skup endomorfizama iz odeljka 5.1.

<u>Lema 5.2.10.</u> $\widetilde{T}p(\sum_v \lambda_v e_v) = p(\sum_v \varphi(\lambda_v)T\hat{e}_v)$,

gde su obe sume konačne i obe uzimaju vrednosti indeksa na istom skupu. Indeks 0 može da se javi.

<u>Dokaz.</u> Za $\lambda_o = 1$, jednakost je bila dokazana (lema 5.2.7. i lema 5.2.8). Pretpostavimo da je $\lambda_o \neq 0$ i $\lambda_o \neq 1$. Tada je

$$p(\sum_v \lambda_v e_v) = p(e_o + \sum_{v\neq o} \lambda_v \lambda_o^{-1} e_v) \quad \text{i}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}p(\textstyle\sum_v \lambda_v e_v &= \widetilde{T}p\,(e_o + \sum_{v\neq o} \lambda_v \lambda_o^{-1} e_v)\\
&= p\,(Te_o + \sum_{v\neq o} \varphi(\lambda_v \lambda_o^{-1})T\hat{e}_v)\\
&= p\,(Te_o + \sum_{v\neq o} \varphi(\lambda_v)\,\varphi(\lambda_o^{-1})T\hat{e}_v)\\
&= p\,(\varphi(\lambda_o)Te_o + \sum_{v=o} \varphi(\lambda_v)T\hat{e}_v)\\
&= p\,(\sum_v \varphi(\lambda_v)T\hat{e}_v)
\end{aligned}$$

<u>Lema 5.2.11.</u> $\widetilde{T}p(\sum_v \lambda_v e_v) = p\,(\sum_v \varphi(\lambda_v)T\hat{e}_v)$, gde su v sume uzete da budu prebrojive i $\sum_v \lambda_v e_v$ konvergira po normi.

Dokaz. Iz $|\varphi(\lambda_v)| = |\lambda_v|$ sledi da kovergencija $\sum_v \lambda_v e_v$ implicira konvergenciju reda $\sum_v \varphi(\lambda_v) T\hat{e}_v$. Iz leme 5.2.10. sledi da je $T(\sum_1^n \lambda_v e_v) = \alpha_n(\sum_1^n \varphi(\lambda_v) T\hat{e}_v)$ i lako je videti da je $|\alpha_n| = 1$. Pokazaćemo da leva strana teži odredjenoj granici kad $n \to \infty$. Dokaz će biti baziran na činjenici da je svaki ograničen podskup Hilbertovog prostora slabo relativno kompaktan. Stvarno, vektori $y_n = T(\sum_1^n \lambda_v e_v)$ $(n = 1,2,\dots)$ su ograničenih normi i možemo zbog toga izdvojiti podniz $y_{n'}$, takav da slabo konvergira ka y, Neka je $z \in H$. Imamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{n'\to\infty} |(y_{n'},Tz)| &= \lim_{n'\to\infty} |(T\sum_0^{n'} \lambda_v e_v, Tz)| \\
&= \lim_{n'} |(\sum_0^{n'} \lambda_v e_v, z)| \\
&= |(\sum_0^{\infty} \lambda_v e_v, z)| \\
&= |(T\sum_0^{\infty} \lambda_v e_v, Tz)|.
\end{aligned}
$$

Sa druge strane, pošto je (x,Tz), za fuksirano z, jedan neprekidan ograničen funksional od x, imamo

$$\lim_{n'\to\infty} |(y_{n'},Tz)| = |(y,Tz)|$$

pa je, za svako $z \in H$, $|(y,Tz)| = |(T\sum_0^{\infty} \lambda_v e_v, Tz)|$.

Odavde je $y = \omega T \sum_0^{\infty} \lambda_v e_v$ gde je $|\omega| = 1$.

Prema tome je $T\sum_0^{\infty} \lambda_v e_v = \omega^{-1}\alpha \sum_0^{\infty} \varphi(\lambda_v) T\hat{e}_v$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz teoreme 5.2.2. Neka je $x = \sum_v \lambda_v e_v$ proizvoljni elemenat iz H, λ_v se anuliraju osim njih prebrojivo mnogo. Neka je $R : H \to H$ operator na H definisan sa

$$Rx = \sum_v f(\lambda_v) e_v \quad (x \in H,\ \lambda_v \in \Phi,\ f \in F).$$

Lako je videti da je ovaj operator f-unitaran. Zaista je: $\|Rx\| = \|x\|$ i $R(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = \sum_v f(\alpha_1\lambda_v + \alpha_2 \mu_v) e_v = \sum_v f(\alpha_1) \overset{f(\lambda_v)}{e_v} + f(\alpha_2) f(\mu_v) e_v$

$= f(\alpha_1) \sum_v f(\lambda_v)e_v + f(\alpha_2) \sum_v f(\mu_v)e_v = f(\alpha_1)Rx + f(\alpha_2)Ry$

za svako $x,y \in H$. (Suma $\sum_v f(\alpha_1 \lambda_v + \alpha_2 \mu_v)e_v$ je nad prebrojivim skupom indeksa jer su takve $\sum_v f(\lambda_v)e_v$ i $\sum f(\mu_v)e_v$) Posle čega treba primeniti teoremu 5.1.3.

Prema lemi 5.1.2. posmatraćemo sledeća tri slučaja.

1. $f \in F^2$. Neka je G unitaran operator na H takav da je $Ge_v = RT\hat{e}_v$ za svako $v \in N$. Neka je, dalje, $U = RG$, Tada je $Ue_v = R^2T\hat{e}_v$ $(v \in N)$, odnosno $Ue_v = T\hat{e}_v$ $(v \in N)$. Osim toga lako je videti da je U f-unitaran, pa je $U(\sum_v \lambda_v e_v) = \sum_v f(\lambda_v) Ue_v = \sum_v f(\lambda_v) T\hat{e}_v$ i

$\tilde{U}p(\sum_v \lambda_v e_v) = p(\sum_v f(\lambda_v) T\hat{e}_v) = \tilde{T}p(\sum_v \lambda_v e_v)$ tj $\tilde{T} = \tilde{U}$.

2. $f \in F^3$. Neka je G unitaran operator na H takav da je $Ge_v = R^2Te_v$ $(v \in N)$ i neka je $U = RG$. Tada je $Ue_v = RGe_v = R^3T\hat{e}_v$ tj. $Ue_v = T\hat{e}_v$ za svako $v \in N$. I sada je U f-unitaran, pa se kao u slučaju 1. pokazuje da je $\tilde{T} = \tilde{U}$.

3. $f \in F^4$. Neka je ponovo G unitaran operator na H takav da je $GE_v = R^3T\hat{e}_v$ $(v \in N)$ i neka je $U = RG$. I za ovaj slučaj, kao u predhodna dva, lako se pokazuje da je $\tilde{T} = \tilde{U}$.

Teorema 5.2.3. Neka je $S : H \to H$ W-operator. Tada je S fazno ekvivalentan sa nekim f-unitarnim operatorom na H, gde je $f \in F$.

Dokaz. Iz teoreme 5.2.1. sledi da je S fazno ekvivalentan sa T, koji ima sve osobine kao S i dodatnu osobinu $T\lambda x = \lambda Tx$ $(x \in H, \lambda \in \Phi)$ ispunjava uslove teoreme 5.2.2., pa je $\tilde{T} = \tilde{U}$ gde je U operator definisan u teoremi 5.2.2. Neka je $x = \sum_v \lambda_v e_v \in H$. Na osnovu leme 5.2.11. sledi da je $Tx = \alpha \sum_v f(\lambda_v)T\hat{e}_v$. Iz teoreme 5.2.2. sledi još $Ux = \sum_v f(\lambda_v)T\hat{e}_v$ pa je $Tx = \alpha(x)Ux$. Pošto T i U održavaju norme imamo $\|x\| = \|Tx\| = |\alpha| \|Ux\| = |\alpha| \|x\|$ odakle je $|\alpha(x)| = 1$.

Posledica 5.2.2. Ako je $\Phi = R$, S je fazno ekvivalentan sa unitarnim operatorom.

Posledica 5.2.3. Ako je $\phi = K$, S je fazno ekvivalentan sa unitarnim ili sa antiunitarnim operatorom.

Posledica 5.2.4. Ako je $\phi = K_v$, ne postoji antiunitarni eperator koji održava apsolutne vrednosti skalarnog proizvoda.

Teorema 5.2.4. Neka je $S : H \to H$ W-operator. Tada S ne može biti u isti mah fazno ekvivalentan sa dva različita f-unitarna operatora.

Dokaz. Neka je, suprotno tvrdjenju, S fazno ekvivalentan sa U_1 i U_2 gde su U_1 i U_2 medjusobno različiti. Tada su U_1 i U_2 fazno ekvivalentni, tj. postoji skalarno vrednosna funkcija $\omega_1(x)$ takva da je, za svako $x \in H$,

$$U_1 x = \omega_1(x) U_2 x \qquad (|\omega_1(x)| = 1).$$

Iz teoreme 5.1.2. sledi da je $U_1^{-1} f^{-1}$ unitaran, pa je na osnovu toga $x = f^{-1}[\omega_1(x)]\ U_1^{-1} U_2 x$ ili $f^{-1}[\omega_1(x)]^{-1} x = U_1^{-1} U_2 x$. Označimo $f^{-1}\{[\omega_1(x)]^{-1}\}$ sa $\omega(x)$. Jasno je da je $(|\omega(x)| = 1$. Prema tome je operator W definisan sa $Wx = U_1^{-1} U_2 x$ skalarno unitaran, tj. $Wx = \omega(x)x$. Lako se pokazuje kao u teoremi 4 [30] da je $\omega(x) =$ const. = C. Znači da je $U_1^{-1} U_2\, x = Cx$ ili $U_2 x = f(c) U_1 x$. Ali još je

$$(U_2 x, U_2 y) = \varphi(x,y) = (f(c)U_1 x, f(c)U_1 y)$$
$$= f(c)\overline{f(c)}\ (U_1 x, U_1 y) = |f(c)|^2\, f[(x,y)]$$
$$(\varphi \in F)$$

tj. $\varphi[(x,y)] = f[(x,y)]$ što je nemoguće za svako $x,y \in H$ i $f \neq \varphi$.

Da bi smo ustanovili da li se dokazi teorema 5.2.1, 5.2.2, 5.2.2 i 5.25 mogu preneti na slučaj ako se Hilbertov prostor H zameni sa nekim s.i.p.s-om V, odnosno ako se skalarni proizvod $(\cdot\,,\cdot)$ zameni s.i.p.-om $[\cdot\,,\cdot]$, uočimo prvo gde se bitno koristi skalarni proizvod i kompletnost prostora H.

Pošto se ovde kao obavezno koristi bazis Hilbertovog prostora, to za naša uopštenja dolaze u obzir s.i.p.s-ovi u kojima postoji ortonormirani bazisi i u kojima važi Parsevalova jednakost (Teprema 2.1.6.).

Lako je proveriti da lema 5.2.1. ostaje u važnosti. Lema 5.2.2. je bazirana na jednoj teoremi koja važi za linearno nezavisne vektore u Hilbertovim prostorima ali koja ne važi u opštim s.i.p.s-ovima.

Teorema 5.2.1. ostaje u važnosti. Ako operator S ispunjava uslove leme 5.2.2. na nekim s.i.p.s-ovima, tada i operator T iz teoreme 5.2.1 ispunjava uslove leme 5.2.2., te važi lema 5.2.3. U lemi 5.2.4 i 5.2.2 se koristi samo linearnost skalarnog proizvoda, pa te leme ostaju u važnosti. U lemama 5.2.6, 5.2.7, 5.2.8, 5.2.9, i 5.2.10 se ne koristi akalarni proizvod.

U lemi 5.2.11 se koristi linearnost skalarnog proizvoda po prvom argumentu i osobina da je svaki ograničeni skup Hilbertovog prostora slabo relativno kompaktan.

Teoreme 5.2.3 i 5.2.4 bitno ne koriste elemente Hilbertovih prostora.

Pre no što budemo kazali u kojoj se meri rezultati o reprezentaciji W-operatora iz Hilbertovog prostora mogu preneti na neke s.i.p.s-ove, potrebni su nam neki pomoćni rezultati.

Lema 5.2.12. Neka s.i.p.s V ima osobinu aditivnosti transverzalnosti 8. i neka je $S : V \longrightarrow V$ bijektivan operator takav da je, za svako $x, y \in V$

$$\left| [Sx, Sy] \right| = \left| [x, y] \right| .$$

Tada S preslikava konačne linearno nezavisne skupove vektora u konačne linearno nezavisne skupove vektora.

Dokaz. Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ niz linearno nezavisnih vektora.

Tada nna osnovu teoreme 1.4.4, postoje linearno nezavisni vektori $y_1 y_2, \dots, y_n$ takvi da je $[y_i, x_j] = 0$ ako i samo ako je $i \neq j$. No, tada je i

(2) $\qquad [Sy_i, Sx_j] = 0$

ako i samo ako je $i \neq j$.

Pretpostavimo da je niz $Sx_1, Sx_2, \dots, Sx_n$ linearno nazavisan, tj. da jednačina

(3) $\qquad \lambda_1 Sx_1 + \lambda_2 Sx_2 + \dots + \lambda_n Sx_n = 0$

ima netrivijalno rešenje po nepoznatim $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Napišimo jednačinu (3) u obliku

$$\lambda_2 Sx_2 + \lambda_3 Sx_3 + \dots + \lambda_n Sx_n = -\lambda_1 Sx_1$$

i pomnožimo je poluskalarno, sa leva vektorom Sy_1. Zbog osobine aditivnosti 8. dobijamo

$$[Sy_1, \lambda_2 Sx_2 + \lambda_3 Sx_3 + \dots + \lambda_n Sx_n] = 0 = -\lambda_1 [Sy_1, Sx_1].$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$. Napišemo li jednačinu (3) u obliku

$$\lambda_1 Sx_1 + \lambda_3 Sx_3 + \dots + \lambda_n Sx_n = -\lambda_2 Sx_2$$

i pomnožimo li je poluskalarno sa leva vektorm Sy_2, dobićemo $\lambda_2 = 0$. itd. na kraju dobijamo $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, suprotno pretpostavci da su vektori $Sx_1, Sx_2, \dots, Sx_m$ linearno zavisni.

<u>Teorema 5.2.5.</u> Neka je V uniforman s.i.p.s koji ima osobinu da na svaki njegov zatvoreni potprostor G pastaje vektor transverzalan na G. Tada je u V svaki ograničeni skup slabo relativno kompaktan.

<u>Dokaz.</u> Neka je V^* konjugovani prostor od prostora V. Na osnovu teorema 1.2.5. V^* je uniformni s.i.p.s u kome se može definisati s.i.p. preko s.i.p-a iz V sa

$$[f_x, f_y] = [y, x] \qquad (x, y \in V;\ f_x, f_y \in V^*),$$

gde $x \leftrightarrow f_x$ označava bijektivno preslikavanje prostora V na V^* definisano u teoremi 1.2.4. Neka je $\{x_n\}$ proizvoljni niz koji pripada ograničenom skupu E u V. Tada postoji konstanta C takva da je $\|x_n\| \leq C$. Označimo sa y_k sliku od x_k pri preslikavanju $x \leftrightarrow f_x$. Tada je $\|x_k\| = \|y_k\|$ pa je niz $\{y_n\}$ ograničen u V. Posmatrajmo niz

(4) $\qquad [y_1, y_k] \quad (k = 1, 2, \dots).$

Ovaj niz je ograničen jer je $|[y_1, y_k]| \leq \|y_1\|\|y_k\| \leq C^2$. Znači da postoji konvergentan delimičan niz $[y_1, y_{1k}$ takav da postoji

(5) $\qquad \lim\limits_{k\to\infty} [y_1, y_{1k}]$.

Polazeći zatim od ograničenog niza $[y_2, y_{1k}]$ izdvojimo delimičan niz $\{y_{2k}\}$ iz niza $\{y_{1k}\}$ takav da postoji

(6) $\qquad \lim\limits_{k\to\infty} [y_2, y_{2k}]$.

Produžujući ovaj postupak, dobijamo niz nizova

(7) $\qquad \{y_{1k}\}, \{y_{2k}\}, \dots$

tako da za svako $r = 1, 2, \dots$ postoji $\lim\limits_{k\to\infty} [y_r, y_{rk}]$.

Kako je svaki od nizova (7) delimičan niz predhodnih, postojaće

$$\lim_{k\to} [y, y_{rk}]$$

za $y = y_1, y_2, \dots, y_r$ zato će postojati taj limes za dijagonalni niz $\{y_{kk}\}$ tj. postojaće

(8) $\qquad \lim\limits_{k\to\infty} [y, y_{kk}]$.

Označimo sa G_1 zatvoren prostor razapet sa $y_1, y_2, \dots$ Zbog linearnosti s.i.p-a po prvom argumentu i zbog njegove neprekidnosti, postojaće limea u (8), za svako $y \in G_1$. Ako je $G_1 = V^*$ onda (8) postoji za svako $y \in V^*$. Ako je G_1 pravi deo od V^* tada će (8) postojati za svako $y \in G_1^{\perp}$, jer je $[G_1^{\perp}, y_k] = 0$. Označimo $G_2 = G_1 + G_1^{\perp}$. Pošto je $G_1^{\perp}$ zatvoren potprostor (1) teoreme 1.6.1) to je i G_2 zatvoren potprostor od V^* i limes u (8) će postojati, za svako $y \in G_2$. Ako G_2 nije jednako V^*, stavimo: $G_3 = G_2 + G_2^{\perp}$, $G_4 = G_3 + G_3^{\perp}$ itd. Jasno je da je $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset V$ i da će postojati k za koje će biti $G_k = V$.

Prema tome limes u (8) postoji za svako $y \in V^*$.
Sada, iz egzistencije $\lim\limits_{k \to \infty} [y, y_{kk}]$, gde su $y, y_{kk} \in V^*$, sledi da postoji limes

$$\lim_{k \to \infty} [x_{kk}, x]$$

za svako $x \in V$, tj. x_{kk} je jedan slab Gauchyev niz u V. Kako je V refleksivan, to je on slabo kompletan, a to znači da nih x_{kk}, delimičan niz niza x_k, slabo konvergira nekom vektoru iz V. Time je dokaz završen.

Vratimo se sada W-operatorima. Na osnovu onoga što smo rekli posle dokaza teoreme 5.2.4., zatim na osnovu leme 5.2.12 i teoreme 5.2.5, imamo sledeći rezultat:

Teoreme 5.2.6. Neka je V realan s.i.p.s za koji važi prethodna teorema. Neka, pored toga, V ima ortonormirani bazis i neka je $S : V \to V$ bijektivan operator takav da je, za svako $x, y \in V$,

$$\left|[Sx, Sy]\right| = \left|[x, y]\right|$$

Tada je S fazno ekvivalentan sa unitornim operatorom na V.

Problem 5.2.1. Mogu li se uslovi teoreme 5.2.6. oslabiti?

6. LITERATURA

[1] S.Aljančić:Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1969.

[2] E.Artin: Geometric Algebra, Interscience Publishers, Inc., 1957.

[3] W. G. Bade: On Boolean algebras of projections and algebras of operators, Trans. Amer. Math. Soc., 80 (1955.) p. 345-360.

[4] E. Berkson: Acharacterization of scalar type operators on reflexive Banach spaces, Pacific J. Math., 13 (1963) p.365-373.

[5] E. Berkson: Some types of Banach spaces, Hermitian operators and Bade functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965.) p. 376-385.

[6] G. Birkoff: Ortogonaity in linear metric spaces, Duke Math. J. vol. 1(1935.) p. 169-172.

[7] H. F. Bonhenblust and S. Karlin: Geometricalproperties of the unit sphere in Bamach algebras, Ann. of Math. vol. 62 (1955.) p.217-229

[8] F. Bonsall: Dual extremumproblems in the theory of funcfions, Jornal London Math. Sos. 31 (1956.), p. 1o5-11o.

[9] N. Burbaki: Topologičeskie vektornie prostranstva, Izdateljstvo inostrane literaturi, Moskva, 1959.

[10] M. Eidelheit: Quelques remarques sur les fonctionnelles linéaires, Studia Math. 10 (1948.), p. 14o-147.

[11] F. A. Ficken: Note on the existece of scalar products in normed linear speces, Ann. of Math. vol. 45 (1944.), p. 362-366.

[12] R. Fortet: Remarques sur les espaces uniformément convexes, C.R. Acad. Sci. Paris vol. 210 (194o.), p. 497-499.

[13] R. Fortet: Remarques sur les espaces uniformément convexes, Bull. Doc. Math. France vol. 69 (1941.) pp. 23-46.

[14] M. Fréchet: Sur la definiton axiomatique dune classe d espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l' éspaces de Hilbert, Ann. of Math, vol 36, No 3 (1935.) p. 705-719.

[15] E. L. Garakvi: Teoremi dvojstvenosti dlja približenij podsredstvom elementov vipuklih množestv, UMN m. XVI. vip. 4(100) (1961.), p. 141-145.

[16] I. M. Geljfand i M. A. Najmark: O vključeniji normiravanovo koljca v koljco operatorov v Giljbertovom prostranstve, Matem. sb. 12 (1943.) p. 197-213.

[17] J. R. Giles: Classes of semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 129, No 3 (1967.) p. 436-446.

[18] R. Hagedorn: Note on symetry operations in quantum mehanics, Suppl. Nuovo Cim,, 12 (1959.) p. 73-68.

[19] R. Hagedorn: Lectures on Field Theory and the Many Body Problem, Academic Press, 1961.

[20] S. J. Havinson: Ob ekstremaljnih svojstvah funkcii, otobražajuščih oblast na mnogolistnij krug, 2AH 88.

[21] E. Hille u R. Fillips: Funkcionaljnij analiz i polugripi, Izd. in. literaturi, Moskva 1962.

[22] R. C. James: Ortogonality and linear functionals, Trans. Amer. Math. Soc. vol 61, (1947.) pp. 265-292

[23] J. T. Joichi: More characterizations of inner product spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968.) p. 1185-1186.

[24] J. L. Joly: La constante rectangle d' un espace vectorial normé, C.R. Acad. Sc. t. 268, No 1 (1969.), p. 36-39

[25] P. Jordan and J. V. Neumann: Inner products in linear, metric spaces, Ann. of Math. vol 36, No 3 (1935.) p. 719-723.

26] R. Kadison: Isometries of operator algebras, Ann. of Math. vol. 54 (1951.) p. 325-338.

27] M. G. Krejn: L-problema v abstraktnom linejnom normirovanom prostranstve (u knjizi H. Ahiezera i M. Krejna "Onekotorih voprosak teorii momentov", Horkov, 1938.

28] S. Kurepa: Konačno dimenzionalni vektorski prostor i primene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

29] M. Leduc: Caractérisation des espaces euclidiens, Compt. R. Acad. Sc. t. 268, 17 (1969.) p. 943-946.

30] J. S. Lomont and P. Mendelson: The Wigner unitarty-antiunitarity theorem, ANN. of Math. vol. 78, No 3 (1963.), p. 548-559.

31] G. Lumer: Semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961.) p. 29-43.

32] G. Lumer: Spectral operators, Hermitian operators, and bounded groups, Acta Sci. Math. (Szeged) 25 (1964.) p. 75-85.

33] J. I. Ljubič: Ob operatornih norma matric, UMN, t. XVIII vip. 4/112/, (1963.), p.

34] P. M. Miličić: Les normes absolues et les normes opératoires des opérateurs linéaires et bornés sur H, Matematički vesnik 2/17/, sv. 2, Beograd (1965.) p. 107-112.

35] P. M. Miličić: Reprezentacija operatora Wignerovog tipa u H prostorima nad sistemom kvaterniona, Matm. vesnik 4/19, Beograd (1967.), p. 376-378.

36] P. M. Miličić: Kvazi-izometrični opperatori na unitarnim prostorima, Matem. vesnik 4/19, Beograd (1967.), p. 376-378.

37] P. M. Miličić: Les endomorpfismes du corps des quaternions qui conservent les valeurs absolues et le group du cube,

-- Publikacije Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, No 247 - No 273 (1969.), p. 149-151.

[38] M. A. Najmark: Normirovanje koljca, "Nauka" Moskva (1968).

[39] S. M. Nikoljskij: Približenije funkcij trigonometričeskim polinomami v srednjem, Izv. A.H., ser matem. 10 (1946.), p. 295-332.

[40] F. Riesz et B. Sz-Nagy: Lecons d' analyse functionele, Paris--Budepest (1955) p. 268.

[41] W. Rogosinsky and H. Shapiro: On contain extremum problemes for analytic functions, Acta Math. (Upsala) 90 (1953.), p. 287-318.

[42] H. Rubin and M. H. Stone: Postulates for generalizations of Hilbert spaces, Proceedings of the Amer. Math. Soc. vol. 4 (1953.) p. 610-616.

[43] V. Smulian: Sur la dérivabilitéde de la norme dans l'aspace de Banach, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 27 (1940.), p. 643-648

[44] I. Vidav: Eine metriche Kennzeichung der selbstadjungierten Operatoren, Math. Z. 66 (1956.) p. 121-128.

[45] N. H. Vinh: Semi-norme duale généralisée et aproximation d' un vecteur, C. R. Acad. Sc. t. 262, No 26 (1966.), p. 1456-1459.

[46] E. P. Wigner: Gruppentheorie und ihre Anwendugen auf die Quantemechanik der Atomspectren, Friedr., Vieweg und Sohu Akt. Ges., (1935.) p. 251.

[47] A. Wilansky: Functional analysis, Blaisdell, New York, 1964.