МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ
"КИРИЛ И МЕТОДИЈ" - СКОПЈЕ

Речковски Никола

ПРИЛОГ КОН АНАЛИТИЧНАТА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА ДИСТРИБУЦИИ

- докторска дисертација -

Скопје, 1979 год.

С О Д Р Ж И Н А

У В О Д

Претставувањето на дистрибуциите преку аналитични функции може да се сфати и како нова операција со нив и како еден метод за нивното дефинирање. Тој метод има и предимство: операциите со дистрибуции се заменуваат со операции на конкретни аналитични функции. Освен тоа, вообичаено е, особено во физиката, дејството на дадена дистрибуција T врз "основна функција ϕ да се пишува во вид на интеграл

$$\int T(x)\phi(x)\,dx.$$

Тој интеграл е симболичен и тука T(x) нема никакво независно значење. При аналитичната репрезентација тој симболичен интеграл се заменува со обичен контурен интеграл. Понатаму претставувањето на дистрибуциите со аналитични функции има примена и во другите науки како физиката и техниката.

Суштината на аналитичната репрезентација е следната: за дадена еднодимензионална Шварцова дистрибуција T, постои комплексна функција $f(z)$ аналитична на комплексната рамнина C освен на носачот од дистрибуцијата T (дел од реалната права) и таква што регуларните дистрибуции $f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)$ кога $\epsilon \to +0$ конвергираат слабо кон дистрибуцијата T. Може да се каже и вака: за дадена дистрибуција T постои пар од функции $f^{+}(z)$ и $f^{-}(z)$, при што $f^{+}(z)$ е аналитична во горната отворена комплексна полурамнина $(\operatorname{Im} z>0)$ $f^{-}(z)$ е аналитична во долната отворена комплексна полурамнина $(\operatorname{Im} z<0)$ тие аналитички се продолжуваат на целата рамнина освен на носачот од дистрибуцијата T и при тоа $f^{+}(x+i\varepsilon)-f^{-}(x-i\epsilon)$ кога $\epsilon \to +0$, конвергира слабо кон дистрибуцијата T.

Аналитичната репрезентација на повеќедимензионалните дистрибуции се разликува од аналитичната репрезентација на еднодимензионалните дистрибуции. Имено, за аналитично претставување на еднодимензионална дистрибуција потребни се две функции $f^{+}(z)$ и $f^{-}(z)$ и две области горна комплексна полурамнина и долна комплексна полурамнина, додека при n-димензионалните дистрибуции за таа цел потребни се 2^n функции и исто толку области од n-димензионалниот комплексен простор C^n. Освен тоа кај еднодимензионалниот случај сингуларните точки на аналитичната функција се содржат во носачот од дистрибуцијата, при повеќедимензионалниот случај не е така.

Во оваа работа направен е еден прилог во аналитичката репрезентација на дистрибуциите. Сега ќе дадеме краток приказ. Целата работа е поделена на четири глави.

Во глава прва станува збор за продолжување на дистрибуции од просторот (D) на просторот (0_α). Просторот (0_α) α-реален број ги вовел американскиот математичар Н.Бремерман и тие се нарочно приспособени за аналитична репрезентација на дистрибуции со помош на Кошиевото јадро. Во оваа глава централно место има теорема 2 во која се дадени доволни услови за да дистрибуцијата $T \in (D')$ може да се продолжи до дистрибуција од некој простор $(0'_\alpha)$. Како последица на оваа теорема се дадени уште две теореми: теорема 3 која се однесува на продолжувањето на умерени дистрибуции и теорема 4 за продолжување на периодични дистрибуции.

Во втората глава се зборува за аналитичната репрезентација на еднодимензионалните дистрибуции. Тука е даден еден нов начин за докажување на аналитичната репрезентација. Тој начин е во извесна смисла подиректен од постоеќите и овозможува, исто така декомпозиција на регуларните дистрибуции генерирани од аналитичните функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$. Дадени се уште две теореми во врска со аналитичната репрезентација: теорема 2 во која се дадени услови кога примитивната функција $F(z)$ за дадена функција $f(z)$ што е аналитична репрезентација, ќе претставува и самата аналитична репрезентација. Теорема 3 се однесува пак на низа од функции $\{f_n(z)\}$ кои се соодветни аналитични репрезентации на низа од дистрибуции $\{T_n\}$. Поточно дадени се услови кога граничната функција

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$$

ќе биде аналитична репрезентација за граничната дистрибуција $T = \lim_{n \to \infty} T_n$ (конвергенцијата е слаба).

Со помош на оваа теорема е определена аналитичната репрезентација на дистрибуцијата e^{-x^2} ; во (3 , стр.133, 134) таа репрезентација е определена со помош на Фуријова трансформација.

Во третата глава се дадени повеќе примери на аналитични репрезентации на конкретни дистрибуции. Тука пред сѐ се посматраат така наречените псевдофункции. Некои од тие примери јас не сум ги сретнал во литературата, а на пример на Кошиевата главна вредност т.е. на нејзината репрезентација е даден друг доказ.

Во четвртата глава се разработува аналитичната репрезентација на n-димензионалните дистрибуции. И тука е даден еден нов доказ за аналитичната репрезентација, кој доказ овозможува да се добијат некои формули од функциите што ја даваат аналитичната репрезентација. Доказот е спроведен за дводимензионални дистрибуции а како пример е посматрана дводимензионалната Диракова дистрибуција. Изведени се некои формули во врска со неа.

На крајот од оваа глава се посматра репрезентацијата на Фуријеови трансформации од умерени дистрибуции со носачи во таканаречени конусни области од n-димензионалниот простор. Тука во суштност е дадена една теорема која кај Бремерман ([3], 15.2) е докажана за поспецијални конуси наречени светлосни конуси. Исто така се покажува дека аналитичната репрезентација на Фуријеовите трансформации на бесконечност се однесува како полиномна функција.

Глава I

ПРОДОЛЖУВАЊЕ НА ДИСТРИБУЦИИ

1.1. Кратки сведенија

Дистрибуции на Шварц

Лоран Шварц дистрибуциите ги дефинира како линеарни непрекинати функционали определени на некој простор од "основни функции". Различни простори од функции доведуваат до различни простори од дистрибуции.

Во секој случај основните функции се комплекснозначни од n реални променливи,

$$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n,$$

R^n Евклидов n-димензионален простор. Функциите $\phi(x)$ се воопшт случај m-пати непрекинато деференцијабилни, m-цел број таков што $0 \leqslant m \leqslant +\infty$. Со (C^m) го означуваме просторот од функции кои се непрекинато диференцијабилни до m-ти ред заклучно. (C^∞) го означува просторот од бесконечно диференцијабилните функции.

Шварц посматрал простори на функции определени на диференцијабилни многуструкости. Ние овде ќе работиме само со простори од функции определени на целиот Евклидов простор R^n.

Комплементот на максималното отворено множество во R^n на кое $\phi(x$ се анулира се вика "носач" за функцијата $\phi(x)$. Носачот ќе го обележуваме со $\mathrm{supp}\phi$.

ПРОСТОР ОД ОСНОВНИ ФУНКЦИИ (D)

Со (D) го означуваме векторскиот простор од сите (C^∞) функции со компактен носач. Конвергенција во просторот (D) се определува како што следи: една низа од функции $\{\phi_j\}$ се вели дека конвергира кон нулата во просторот (D), ако постои компактно множество, кое ги содржи носачите на сите функции од низата и ако рамномерно конвергира дадената низа по било кој ред. Тоа значи дека конвергира рамномерно секоја низа $\{D^p\phi_j\}$, каде што $p=(p_1,\dots,p_n)$ е n-мулти индекс $p_i, i=1,\dots,n$, се ненегативни цели броеви и

$$D^p\phi = \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n}\phi}{\partial x_1^{p_1}\dots\partial x_n^{p_n}}$$

ПРОСТОР ОД ДИСТРИБУЦИИ (D')

Секој линеарен функционал T определен на просторот од основни функции (D), кој е непрекинат по однос на воведената конвергенција се вика дистрибуција. Тоа значи, ако низата функции $\{\phi_j\}$ конвергира кон нулата, тогаш бројната низа $\{\langle T,\phi_j\rangle\}$ конвергира, исто така, кон нулата. Со $\langle T,\phi\rangle$ ја означуваме вредноста на дистрибуцијата T врз функцијата ϕ. Просторот од сите дистрибуции определени на (D) го обележуваме со (D') и тоа е во суштност дуалниот простор за просторот (D).

За една низа од дистрибуции $\{T_j\}$ се вели дека слабо конвергира кон дистрибуцијата T, ако за дадена функција $\phi\in(D)$ бројната низа $\{\langle T_j,\phi\rangle\}$ конвергира кон бројот $\langle T,\phi\rangle$. Пишуваме во тој случај $\lim\limits_{j\to\infty} T_j = T$. За разлика од слабата постои и силна конвергенција на дистрибуции, која е определена на следниот начин: за дадена низа од дистрибуции $\{T_j\}$ велиме дека силно конвергира во просторот (D') кон нулата, ако

$$\sup_{\phi\in B}\langle T_j,\phi\rangle \to 0, \qquad j\to+\infty,$$

за секое ограничено множество B од функции. А за едно множество B од функции ќе велиме дека е ограничено, ако се исполнети следните два услова.

I. постои компактно множество кое ги содржи носачите на функциите од B,

II. $\sup\limits_{|p|\leqslant m,\phi\in B} |D^p\phi|\leqslant C_m$, константата C_m зависи само од m, $|p|=p_1+\dots+p_n\leqslant m$. Ако една низа од дистрибуции конвергира слабо, таа конвергира и силно.

НОСАЧ НА ДИСТРИБУЦИЈА

Велиме дека дистрибуцијата T се анулира на отвореното множество Ω од R^n ако вредноста на дистрибуцијата е нула за секоја функција со носач во Ω. Носач за дистрибуцијата T е комплементот на отвореното множество на кое таа се анулира. Носачот ќе го обележуваме со suppT за дадена дистрибуција T. Ако носачот на соответната дистрибуција е компактно множество тогаш се вели дека дистрибуцијата е со компактен носач.

ПРОСТОР ОД ДИСТРИБУЦИИ (E')

Нека со (E) го означиме просторот од сите бесконечно диференцијабилни функции со било каков носач. Конвергенцијата во просторот (E) е определена како што следи: една низа од функции $\{\phi_j\}$ конвергира кон нулата во просторот (E), ако таа конвергира рамномерно по било кој ред на секое компактно множество. Тоа значи, да конвергира рамномерно секоја низа $\{D^p\phi_j\}$ за даден мултииндекс p. Секоја низа од функции од просторот (D), која конвергира во (D) конвергира и во (E). Тоа покажува дека конвергенцијата во (D) е посилна отколку индуцираната конвергенција од (E).

Дуалниот простор за просторот (E) т.е. просторот од непрекинатите линеарни функционални дефинарни на (E) го означуваме со (E'). Важи следното: $(D) \subset (E)$ и дуално $(D') \supset (E')$. Шварц покажал дека просторот од дистрибуции (E') се состои, точно, од дистрибуциите од просторот (D') кои имаат компактен носач.

ПРОСТОР ОД УМЕРЕНИ ДИСТРИБУЦИИ (S')

За функцијата ϕ од просторот (C^∞) велиме дека брзо опаѓа, ако го исполнува условот,

$$|x^\lambda D^p\phi(x)| < C_{p,\lambda}; \ \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n), \ p=(p_1,\dots,p_n)$$

мултииндекси, $x^\lambda = x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$.

Просторот од сите бесконечно диференцијабилни функции кои брзо опаѓаат го обележуваме со (S). Во овој простор воведуваме конвергенција како што следи: за една низа од функции $\{\phi_j\}$ велиме дека конвергира кон нулата во просторот (S), ако конвергира рамномерно кон нулата секоја низа $\{x^{\lambda} D^p \phi_j\}$ при фиксни p и λ.

Дуалниот простор за (S), т.е. просторот од непрекинатите линеарни функционали по однос на горевоведената конвергенција го означуваме со (S′). Елементите од просторот (S′) се викаат уште умерени дистрибуции. Просторот (S) е од посебен интерес бидејќи е инваријантен по однос на Фуриеjовата трансформација. Уште повеќе, ако е дадена конвергентна низа $\{\phi_j\}$ тогаш конвергентна ќе биде и соодветната низа од Фуриеjовите трансформации. Тој факт овозможува дефиниција на Фуриеjови трансформации на умерени дистрибуции. Имено, ако $T \in (S')$, $U = F(T)$ (Фуриеjова трансформација) е определена вака

$$\langle U,\phi\rangle = \langle T,\hat{\phi}\rangle ,$$

каде $\hat{\phi}$ е Фуријеова трансформација за функцијата $\phi \in (S)$.

Очигледно важи следното:

$$(D) \subset (S) \subset (E)$$

и дуално

$$(D') \supset (S') \supset (E')$$

ПРОСТОР ОД ДИСТРИБУЦИИ (O'_α)

Елементи на просторот (O_α), α-реален број се бесконечно диференцијабилни функции $\phi(x)$, кои го задоволуваат условот

$$D^p\phi(x) = O(\|x\|^{\alpha}), \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

Пример

тоа значи постојат константи C_p и R такви што

$$|D^p\phi| \leqslant C_p\|x\|^{\alpha}, \qquad \|x\| \geqslant R.$$

Конвергенција во просторот (O_α) се воведува како што следи: за една низа од функции $\{\phi_j\}$ се вели дека конвергира кон нулата во просторот (O_α), ако низата $\{D^p\phi_j\}$, p-фиксно конвергира рамномерно на секое компактно множество и ако, освен тоа, можат да се најдат константи C_p и R_p независни од j, такви што

$$|D^p\phi_j(x)| \leqslant C_p \|x\|^\alpha \qquad \|x\| \geqslant R_p.$$

Просторот од непрекинатите линеарни функционали дефинирани на (0_α), т.е. дуалниот простор го обележуваме со $(0_\alpha')$.

Просторите (0_α) односно $(0_\alpha')$ се од посебен интерес при аналитичкото претставување на дистрибуциите.

Очигледно важат следните релации:

$$(D) \subset (S) \subset (0_\alpha) \subset (E)$$

$$(D') \supset (S') \supset (0_\alpha') \supset (E')$$

1.2. ПРОДОЛЖУВАЊЕ

Овдека ќе дадеме доволни услови за продолжување на дистрибуции $T \in (D')$ до дистрибуции од некој простор $(0_\alpha')$.

За дадена дистрибуција $T \in (D')$ ќе пишуваме $T=0(\|t\|^\beta)$ од ред m, каде β е реален број, а m е некој мулти индекс $m=(m_1,\dots,m_n)$, ако можат да се најдат константи R и C, такви што ќе важи

$$|\langle T,\phi\rangle| \leqslant C \int_{R^n} \|t\|^\beta |D^m\phi(t)|$$

за функции $\phi(t) \in (D)$ со носач во множеството:

$$\{t : t \in R^n;\ \|t\| \geqslant R\},$$

R и C се константи.

<u>Теорема 1.</u> Нека е T дистрибуција од просторот (D') и $T=0(\|t\|^\beta)$ од ред m. Дистрибуцијата T може да се продолжи до дистрибуција на некој простор (0_α), за α што го задоволува условот $\alpha+\beta+n < 0$, каде n е димензија на просторот R^n. Продолжувањето е единствено.

<u>Доказ.</u> Нека со B ја означиме единичната затворена топка во R^n, т.е.

$$B = \{t : t \in R^n,\quad \|t\| \leqslant 1\},$$

$$B_\epsilon = \{t : t \in R^n,\ d(B,t) \leqslant \epsilon\},\quad \epsilon > 0,\ d(x,y)$$

означува Евклидово растојание.

$$\overset{o}{B}_{3\epsilon} = \{t : t \in R^n,\ d(B,t) < 3\epsilon\}.$$

Функцијата

$$f(t) = \frac{d[t,(C\overset{o}{B}_{3\epsilon})_\epsilon]}{d(t,B_\epsilon)+d[t,(C\overset{o}{B}_{3\epsilon})_\epsilon]}$$

(каде $C\overset{o}{B}_{3\epsilon}$ го означува комплементот на множеството $\overset{o}{B}_{3\epsilon}$ во R^n) ги има следните особини:

1^o $f(t)$ е непрекината на R^n

2^o $0 \leqslant f(t) \leqslant 1, \qquad t \in R^n$

3^o $f(t) = 1, \qquad t \in B_\epsilon$

4^o $f(t) = 0, \qquad t \in (C\overset{o}{B}_{3\epsilon})_\epsilon.$

Што значи функцијата $f(t)$ е непрекината и има компактен носач. Носачот на функцијата $f(t)$ се содржи во комплементот на множеството $(C\overset{o}{B}_{3\epsilon})_\epsilon$. Со помош на функцијата $f(t)$ ја формираме следната функција

$$\gamma(x) = f * \rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} A \int_{R^n} f(t)\rho_\epsilon(x-t)dt,$$

каде што константата A е така избрана за да

$$\epsilon^{-n} A \int_{R^n} \rho_\epsilon(t)dt = 1.$$

$$\rho_\epsilon(t) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - \|t\|^2} & \|t\| < \epsilon \\ 0, & \|t\| \geqslant \epsilon \end{cases}$$

Функцијата $\gamma(x)$ која е конволуција на функциите f и ρ_ϵ е бесконечно диференцијабилна со носач

$$\operatorname{supp}\gamma \subseteq \operatorname{supp}f + \operatorname{supp}\rho_\epsilon$$

(особина на функции што се конволуции) ([9] ,стр.33).

Како $\operatorname{supp}f$ и $\operatorname{supp}\rho_\epsilon$ се компактни произлегува дека функцијата γ е со компактен носач. Освен тоа за $x \in R^n$ и $\|x\| \leqslant 1$ $\gamma(x) = 1$. Навистина,

$$\gamma(x) = \epsilon^{-n} A \int_{R^n} f(t)\rho_\epsilon(x-t)dt =$$

$$= \epsilon^{-n} A \int_{\|x-t\| \leqslant \epsilon} f(t)\rho_\epsilon(x-t)dt,$$

зa $\|x-t\| > \epsilon, \quad \rho_\epsilon(x-t) = 0).$

Ако $x \in B$, тогаш за $t, \|x-t\| \leqslant \epsilon$, $f(t)=1$ особина 3°, и затоа ќе биде

$$\gamma(x) = \epsilon^{-n} A \int_{\|x-t\| \leqslant \epsilon} \rho_\epsilon(x-t)dt = \epsilon^{-n} A \int_{\|t\| \leqslant \epsilon} \rho_\epsilon(t)dt = 1.$$

Сега со функцијата $\gamma(x)$ формираме една фамилија од функции $\gamma_r(x)$,

$$\gamma_r(x) = \gamma(\tfrac{x}{r}), \quad r > 0.$$

Од докажаната особина за функцијата $\gamma(x)$ следи дека $\gamma_r(x) \equiv 1$ за $x \in R^n \quad \|x\| \leqslant r$.

Нека сега, е дадена функција $\phi \in (O_\alpha)$, $\alpha + \beta + n < 0$. Функцијата $\gamma_r \phi$ припаѓа на просторот (D), зашто функцијата γ_r е со компактен носач. Ја посматраме генерализираната низа $\{ <T, \gamma_r \phi> \}, r \to +\infty$. Сега ќе покажеме дека низата $\{ <T, \gamma_r \phi> \}$ е фундаментална. Нека земеме $s > r$, $r > R$ каде R е константа избрана во согласност со асимптотските услови на дистрибуцијата T и функцијата $\phi \in (O_\alpha)$. Во тој случај имаме:

$$|<T, \gamma_s \phi> - <T, \gamma_r \phi>| = |<T, (\gamma_s - \gamma_r)\phi>| \cdot$$

Бидејќи за $t \in R^n$, $\|t\| \leqslant r, \gamma_r(t) = \gamma_s(t) = 1$ произлегува дека носачот на функцијата $(\gamma_s - \gamma_r)\phi$ се содржи во множеството $\{t : t \in R^n, \|t\| \geqslant r > R\}$, затоа добиваме

$$|<T, (\gamma_s - \gamma_r)\phi>| \leqslant C \int_{\|t\| \geqslant r} \|t\|^{\beta} |D^m (\gamma_s - \gamma_r)\phi| dt \qquad (1.1)$$

(C е константа од условот во теоремата). Според Лајбницовото правило

$$D^m\phi(\gamma_s-\gamma_r)=\sum_{p\leqslant m}\binom{m}{p}D^{m-p}\phi D^p(\gamma_s-\gamma_r),$$

каде што

$$p=(p_1,\dots,p_n),\ m=(m_1,\dots,m_n)$$

$$\binom{m}{p}=\frac{m!}{p!(m-p)!}=\frac{m_1!\dots m_n!}{p_1!\dots p_n!(m_1-p_1)!\dots(m_n-p_n)!}$$

следи понатаму

$$|D^m\varphi(\gamma_s-\gamma_r)|=\Big|\sum_{p\leqslant m}\binom{m}{p}D^{m-p}\phi D^p(\gamma_s-\gamma_r)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p\leqslant m}\binom{m}{p}|D^{m-p}\phi|(|D^p\gamma_s|+|D^p\gamma_r|). \tag{1.2}$$

Ќе покажеме дека за

$$D^p\gamma_r,\ D^p\gamma_s,\dots$$

може да се најде константа C_p, таква што

$$|D^p\gamma_r|\leqslant C_p,\ \text{за секое } r>0.$$

Навистина,

$$\gamma(x)=\epsilon^{-n}A\int_{R^n}f(t)\rho_\epsilon(x-t)dt=\epsilon^{-n}A\int_{R^n}f(t)\rho_1\left(\frac{x-t}{\epsilon}\right)dt$$

Очигледно $\epsilon^{-n}\rho_\epsilon(x-t)=O(\epsilon^{-n})$ (зашто е функцијата ρ_ϵ -непрекината и со компактен носач)

$$D_j\epsilon^{-n}\rho_\epsilon(x-t)=\frac{\partial\epsilon^{-n}\rho_\epsilon(x-t)}{\partial x_j}=O(\epsilon^{-n-1}),$$

со индукција се убедуваме дека

$$D_x^p\ \epsilon^{-n}\rho_\epsilon(x-t) = O(\epsilon^{-n-|p|}),\quad |p|=p_1+\dots+p_n,$$

Понатаму добиваме

$$D_x^p\gamma(x) = \epsilon^{-n} A f * D^p\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} A \int_{R^n} f(t)\, D^p\rho_\epsilon(x-t)dt =$$

$$= \epsilon^{-n} A \int_{R^n} f(t)\, D_x^p\ \rho_1(\frac{x-t}{\epsilon})dt =$$

$$= \epsilon^{-n} A \int_{R^n} f(t)\, D^p\rho_1(\frac{x-t}{\epsilon}).\ \epsilon^{-|p|}dt,$$

$$|D_x^p\gamma(x)| \leqslant \epsilon^{-n} A \int_{R^n} |D^p\rho_1(\frac{x-t}{\epsilon})|\,\epsilon^{-|p|}dt$$

Со смена на променливите $x-t = u\epsilon$, се добива понатаму

$$A\epsilon^{-|p|}\int_{R^n} D^p\rho_1(u)du,$$

од каде конечно се гледа дека

$$D^p\gamma = O(\epsilon^{-|p|}).$$

Како е $\gamma_r(x) = \dot{\gamma}(\frac{1}{r}\ x)$, добиваме

$$D_x^p\ \gamma_r(x) = (\frac{1}{r})^{|p|}.D_z^p\gamma(z),\quad z=\frac{1}{r}\ x,$$

ставајќи $\epsilon = 1/r$, на крај добиваме $\frac{1}{r} < \epsilon$, ако $r \to +\infty$

и затоа $|D_x^p\gamma_r(x)| < C_p$, ~~$r>0.$~~

Со замена во (1.2) се добива

$$|D^p\varphi(\gamma_s-\gamma_r)| \leqslant \sum_{p\leqslant m} \binom{m}{p} |D^{m-p}\phi| . 2C_p$$

Ако сега замениме во (1.1) имаме

$$|<T,\gamma_s\phi> - <T,\gamma_r\phi>| \leqslant C \int_{\|t\|\geqslant r} \|t\|^{\beta} \sum_{p\leqslant m} \binom{m}{p} 2C_p C_o \|t\|^{\alpha} dt,$$

константата C_o доаѓа од тоа што функцијата $\phi \in (O_\alpha)$.

Понатаму последниот интеграл е еднаков на

$$2C_oC \sum_{p\leqslant m} \binom{m}{p} C_p \int_{\|t\|\geqslant r} \|t\|^{\alpha+\beta} dt.$$

Сега го посматраме интегралот

$$\int_{\|t\|\geqslant r} \|t\|^{\alpha+\beta} dt \qquad (1.3)$$

Со воведување на поларни координати во интегралот (1.3)

$$t_1 = \rho\sin\phi_1$$
$$t_2 = \rho\cos\phi_1\sin\phi_2$$
$$\vdots$$
$$t_i = \rho\cos\phi_1\ldots\cos\phi_{i-1}\sin\phi_i \qquad (2\leqslant i\leqslant n-2)$$
$$\vdots$$
$$t_{n-1} = \rho\cos\phi_1\cos\phi_2\ldots\sin 2\phi_{n-1}$$
$$t_n = \rho\cos\phi_1\cos\phi_2\ldots\cos 2\phi_{n-1}$$

при што јакобијанот ќе биде

$$\left| \frac{\partial(t_1,\ldots,t_n)}{\partial(\rho,\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}} \right| = 2\rho^{n-1}\cos^{n-2}\phi_1\ldots\cos\phi_{n-2} ,$$

$$\phi_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad i = 1,2,\ldots,n-1,$$

$$\int\limits_{\|t\| \geq r} \|t\|^{\alpha+\beta} dt = 2 \int\limits_{\rho \geq r} \rho^{\alpha+\beta} \rho^{n-1} d\rho . C_n$$

$$C_n = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\phi_1 d\phi_1 \ldots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi_{n-2} d\phi_{n-2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi_{n-1} .$$

што значи

$$\int\limits_{\|t\| \geq r} \|t\|^{\alpha+\beta} dt = 2C_n \left. \frac{\rho^{\alpha+\beta+n}}{\alpha+\beta+n} \right|_r^{\infty} =$$

$$= - \frac{C_n}{\alpha+\beta+n} r^{\alpha+\beta+n} \qquad \alpha+\beta+n < 0 .$$

Следователно

$$|\langle T,\gamma_s\phi\rangle - \langle T,\gamma_r\phi\rangle| \leq 2C_0 \sum_{p \leq m} C_p \binom{m}{p} \frac{-C_n}{\alpha+\beta+n} r^{\alpha+\beta+n}$$

но $r^{\alpha+\beta+n} \to 0$, кога $r \to +\infty$ од каде конечно следи дека низата $\{\langle T,\gamma_r\phi\rangle\}$ е фундаментална.

По дефиниција ставаме

$$\langle T,\phi\rangle = \lim_{r \to +\infty} \langle T,\gamma_r\phi\rangle , \quad \phi \in (0_\alpha) \tag{1.4}$$

Функциооналот T дефиниран со (1.4) е очигледно линеарен. Сега ќе покажеме дека е непрекинат на просторот (0_α). Нека $\{\phi_j\}$ е низа од функции која конвергира во просторот (0_α)

кон функцијата ϕ_0. Ќе покажеме дека двојната низа $\{<T,\gamma_r\phi_j>\}$ и низата $\{<T,\phi_j>\}$ се конвергентни.

Навистина,

$$|<T,\gamma_r\phi_j>-<T,\gamma_s\phi_i>| =$$

$$=|<T,\gamma_r\phi_j>-<T,\gamma_r\phi_o> + <T,\gamma_r\phi_o>-<T,\gamma_s\phi_o>+$$

$$+<T,\gamma_s\phi_o>-<T,\gamma_s\phi_i>| \leqslant$$

$$\leqslant |<T,\gamma_r\phi_j>-<T,\gamma_r\phi_o>| \tag{1.5}$$

$$+ |<T,\gamma_r\phi_o>-<T,\gamma_s\phi_o>| \tag{1.6}$$

$$+ |<T,\gamma_s\phi_o>-<T,\gamma_s\phi_i>| \tag{1.7}$$

(1.5) може произволно мало да се направи, ако j е доволно големо, зашто низата $\{\gamma_r\phi_j\}$ конвергира во просторот (D) кон функцијата $\gamma_r\phi_o$; истиот заклучок важи за (1.7), додека пак (1.6) може да се направи произволно мало, ако r и s се доволно големи, тоа произлегува од доказот за егзистенција. Ние истовремено покажуваме дека е конвергентна и низата $\{<T,\phi_j>\}$, на пример земајќи ги фиксни i,j доволно големи и пуштајќи $r,s \to +\infty$.

Според тоа

$$\lim_{j\to\infty} <T,\phi_j> = \lim_{j\to\infty}\ \lim_{r\to\infty} <T,\gamma_r\phi_j> =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\ \lim_{j\to\infty} <T,\gamma_r\phi_j> = \lim_{r\to\infty} <T,\gamma_r\phi_o> =$$

$$= <T,\phi_o>$$

што сакавме да покажеме.

Уште останува да покажеме единственост. Но нека претпоставиме дека постојат две продолжувања T_1 и T_2. Нека $\phi\in(O_\alpha)$ тогаш

$$\langle T_1, \gamma_r\phi\rangle = \langle T_2 \cdot \gamma_r\phi\rangle$$

бидејќи $\gamma_r\phi \in (D)$. Ако пуштиме $r \to +\infty$ добиваме

$$\langle T_1, \phi\rangle = \langle T_2, \phi\rangle , \qquad \phi \in (C_\alpha)$$

т.е. $T_1 = T_2$.

Пример. Нека ја разгледаме дистрибуцијата $T = \mathrm{Pf}\, t^\beta H(t)$, каде $-2 < \beta < -1$,

$$H(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0, \end{cases}$$

Pf - означува главна вредност по Адамард.

Дистрибуцијата T е определена со следното:

$$\langle T, \phi\rangle = -\frac{1}{\beta+1}\int_0^\infty t^{\beta+1}\phi'(t)\,dt, \qquad \phi \in (D)$$

Очигледно вака определениот функционал претставува дистрибуција, зашто $t^{\beta+1}$ е локално интеграбилна.

Како е

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant -\frac{1}{\beta+1}\int_0^\infty t^{\beta+1}|\phi'(t)|dt$$

според теорема 1, за да T може да се продолжи на просторот (0_α), треба

$$\alpha+\beta+1+1 < 0, \ \alpha+\beta+2 < 0, \ \text{t.e.} \ \alpha \leqslant -1$$

или поопшто, нека е $-m < \beta < -(m-2)$ ако ставиме

$$\langle T, \phi\rangle = \frac{(-1)^{m-1}}{(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}\int_0^\infty t^{\beta+m-1}\phi^{(m-1)}(t)\,dt$$

добиваме дистрибуција, која може да се продолжи на простор (0_α) за

$$\alpha+\beta+m-1+1<0, \quad \alpha+\beta+m<0.$$

Теоремата 1 во сушност претставува обопштување на една теорема дадена во ([3], стр.82,6.4). Имено за $m=0$ се добива наведената теорема. Инаку теоремата 1 има широко практично значење што ќе го потврдиме во понатамошното излагање на конкретни примери. Особено оваа теорема е приспособена за аналитичната репрезентација на дистрибуции.

Врз основа на теорема 1 ќе дадеме уште две теореми за продолжување на умерени и периодични дистрибуции.

Теорема 2. Секоја умерена дистрибуција $T\in(S')$ може да се продолжи до дистрибуција на некој простор (0_α).

Доказ. Познато е дека за дадена умерена дистрибуција T, постои спорорастечка функција $f(t)$, таква што $T=[f(t)]^{(k)}$, (за една функција $f(t)$ велиме дека е спорорастечка, ако е непрекината и $f(t)=0(|t|^\beta)$, β - реален број). Според тоа

$$<T,\phi>=<[f(t)]^{(k)},\ \phi(t)> = (-1)^k<f,\phi^{(k)}> =$$

$$=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi^{(k)}(t)dt.$$

$$|<T,\phi>| = |(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi^{(k)}(t)dt| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ |\phi^{(k)}(t)|dt,$$

како

$$|f(t)|\leqslant C|t|^\beta \qquad |t|\geqslant R,$$

$$|<T,\phi>|\leqslant \int_{|t|\geqslant R} |t|^\beta|\phi^{(k)}(t)|dt,$$

за функции со носач во множеството $|t|\geqslant R$.

Според Теорема 1. дистрибуцијата T може да се прошири на простор (0_α) за $\alpha+\beta+1<0$.

Во следнава теорема даваме сличен резултат за периодични дистрибуции од просторот (D'). За една дистрибуција T велиме дека е периодична, ако го задоволува условот

$$T(x+\ell) = T(x), \qquad \ell>0$$

тоа значи следното

$$<T(x+\ell),\phi(x)> = <T,\phi(x-\ell)> = <T,\phi(x)>.$$

Бројот ℓ се вика периода за дистрибуцијата T.

<u>Теорема 3.</u> Секоја периодична дистрибуција T може да се продолжи до дистрибуција на простор (0_α) за $\alpha<-1$.

<u>Доказ.</u> Ако е дистрибуцијата T периодична со периода ℓ, постои периодична непрекината функција $g(t)$ со периода ℓ таква што

$$T = [c_0] + [g(t)]^{(k+2)}$$

каде c_0 е константа, а функцијата $g(t)$ е дадена со:

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_\nu e^{i\omega\nu t}}{(i\omega\nu)^{k+2}}, \quad \nu\neq 0, \quad \omega = 2\pi/\ell,$$

c_ν се Фуриејови коефицинти за дадената дистрибуција. Коефициентите c_ν го задоволуваат условот $|c_\nu|\leqslant a|t|^k$, $a>0$, к-цел број. (Познато е дека Фуриејовите коефициенти на секоја периодична дистрибуција го задоволуваат наведениот услов за некое $a>0$, и некој цел број к). ([9], стр.258, 51.2).

Ја посматраме дистрибуцијата

$$T_1 = [g(t)]^{(k+2)}$$

$$<T_1,\phi> = <[g(t)]^{(k+2)},\phi> = (-1)^{k+2} <g,\phi^{(k+2)}> =$$

$$= (-1)^{k+2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi^{(k+2)}(t)\,dt.$$

$$|<T_1,\phi>| = |(-1)^{k+2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi^{(k+2)}(t)\,dt| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\ |\phi^{(k+2)}(t)|\,dt \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{0} |\phi^{(k+2)}(t)|\,dt,$$

$|g(t)| \leqslant C$,(такво C постои зашто $g(t)$ е непрекината периодична функција). Според теорема 1 треба $\alpha+0+1 < 0$ од каде $\alpha < -1$ Аналогно се покажува и за дистрибуцијата $T_2=[c_0]$. Како

$T=T_1+T_2$, заклучуваме дека периодичната дистрибуција може да се продолжи на простор (0_α), ако е $\alpha < -1$.

Пример 2. Нека ја посматраме дистрибуцијата

$$\delta_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} [e^{i\nu t}],$$

Дадената дистрибуција е периодична со периодата 2π. Фуријеовите коефициенти за $\delta_{2\pi}$ се $c_\nu = 1/2\pi$,според тоа

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu t}}{\nu^2}, \quad \nu \neq 0$$

$$g(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}(t-\pi)^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

и периодично продолжена. Во овој случај $c_0=0$, така што $\delta_{2\pi} = [g(t)]^{(2)}$.

Теоремите 2 и 3 се однесуваат на еднодимензионален случај.

Р.Кармишел во ([5]), дава потребни и доволни услови за да една дистрибуција T биде од некој простор $(0'_\alpha)$. Цитираме два резултата:

<u>Теорема 4.</u> Нека е $T \in (O'_\alpha)$. Постојат константи M и p кои зависат само од T такви што

$$|\langle T,\phi\rangle| \leqslant M \sum_{|\gamma|\leqslant p} \sup|(1+|t_1|)^{-\alpha_1}\ldots(1+|t_n|)^{-\alpha_n} D^\gamma\phi(t)|$$

за секое $\phi \in (O_\alpha)$.

<u>Доказ.</u> ([5], теорема 1.стр.248).

<u>Теорема 5.</u> Нека е p фиксиран позитивен реален број, нека γ е мултииндекс од ненегативни цели броеви. Нека

$$T = \sum_{|\gamma|\leqslant p} D^\gamma f_\gamma(t),$$

каде за секое γ $|\gamma| \leqslant p, f_\gamma(t)$ е Лебег мерлива функција, која задоволува

$$|f_\gamma(t)| \leqslant R_\gamma(1+|t_1|)^{-\alpha_1-1-\epsilon}\ldots(1+|t_n|)^{\alpha_n-1-\epsilon},$$

$\epsilon > 0$, за секое $t \in R^n$, каде R_γ е константа што зависи од γ. Тогаш $T \in (O'_\alpha)$.

<u>Доказ.</u> ([5], теорема 2. стр.250).

Споредувајќи ја теорема 1 со последните две се уочува дека е од подруга природа. Имено, додека во теорема 5 се бара изразување на дистрибуцијата во конечен вид со помош на мерливи функции по Лебег, кои задоволуваат уште некој услов дотогаш во теорема 1 се поставуваат само извесни асимптотски услови за дистрибуцијата.

Инаку теорема 4 дава потребни услови за да дадена дистрибуција биде од (O'_α), а додека теорема 5 пружа доволни услови за да дадена дистрибуција T припаѓа на некој простор (O'_α).

Забелешка. Во поедини случаи на дистрибуции теорема 1 може дури и да се позасили. Например нека посматраме дистрибуција дефинирана вака:

$$\langle T,\phi \rangle = \int_1^\infty t^\beta \phi^{(m)}(t)\,dt \qquad (1.8)$$

Очигледно е дека $T=0(|t|^{\beta})$ и е од ред m. Според теорема 1 можеме да ја продолжиме на простор (0_{α}) за $\alpha+\beta+1<0$. Но акоземеме функција ϕ со носач во $\{t:|t|>1\}$ и извршиме парцијална интеграција, добиваме

$$\int_1^{\infty} t^{\beta}\phi^{(m)}(t)\,dt = (-1)^m \beta(\beta-1)\ldots(\beta-m+1)\int_1^{\infty} t^{\beta-m}\phi(t)\,dt$$

Помсатрајќи ја десната страна од последното равенство врз база на наведената теорема заклучуваме дека дистрибуцијата T може да се прошири на простор (0_{α}) за $\alpha+\beta-m+1<0$, што е посилно од $\alpha+\beta+1<0$.

Забелешката дава повод теорема 1 да се постави и на следниот начин:

Нека е дадена дистрибуција $T\in(D')$. За дистрибуцијата $U\in(D')$ ќе велиме дека е асимптотска грана за T, ако е исполнето следното

$$|<T,\phi>|\leqslant|<U,\phi>| \tag{1.9}$$

за оние $\phi\in(D)$ кои имаат носач во множеството $\{t:\|t\|>R\}$, R е константа. На пример за дистрибуцијата (1.8) за дистрибуција U можеме да земеме

$$U=(-1)^m\beta(\beta-1)\ldots(\beta-m+1)\int_1^{\infty} t^{\beta-m}\phi(t)\,dt$$

а константа $R=1$.

Имајќи го во предвид (1.9) теорема 1 можеме и вака да ја формулираме:

Дадена дистрибуција T од просторот (D') за која постои некоја регуларна дистрибуција

$$<U,\phi> = \int_{\|t\|\geqslant\rho} \|t\|^{\beta}\phi^{(m)}(t)\,dt, \qquad \rho>0$$

при што дистрибуцијата U е асимптотска грана за дистрибуцијата T, може да се продолжи до дистрибуција на некој простор (0_{α}) за $\alpha+\beta+n<0$.

Г л а в а II

АНАЛИТИЧКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ДИСТРИБУЦИИ

Претставувањето на дистрибуциите од просторот (D') со помош на аналитички функции може да се сфати и како една техника во дефинирањето на Шварцовите дистрибуции. Таа техника има и извесно предимство: операциите со дистрибуции се заменуваат со операции на конкретни аналитички функции. На пример дистрибуцијата T (определена на реалната права) применета на тест функцијата ϕ може само симболично (како што се прави во физиката) да се напише во вид на интеграл

$$\langle T,\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\phi(x)dx,$$

каде T(x) нема никакво независно значење. Додека при аналитичкото претставување со помош на соответна функција горниот симболичен интеграл може да се замени со обичен контурен интеграл.

Инаку аналитичкото претставување на дистрибуциите е од интерес и во физиката, техниката и теоријата на веројатност. Како на пример аналитичката репрезентација на Дираковата δ функција и нејзините изводи потоа дистрибуцијата δ_+,која има примена во квантната механика и други.

2.1. КРАТКИ СВЕДЕНИЈА

Во оваа глава ќе работиме со еднодимензионални дистрибуции. За повеќедимензионалниот случај нешто ќе разработиме во четвртата глава.

Познато е дека за дадена дистрибуција $T \in (D')$, постои комплексна функција $f(z)$ аналитична на комплексната рамнина освен на носачот од дистрибуцијата (дел од реалната права) T таква што:

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx = \langle T, \phi \rangle \qquad (2.1)$$

За секоја функција $\phi \in (D)$ ([3], стр.76, 5.9). Во сушност тоа се две функции $f^+(z)$ аналитична во горната отворена комплексна полурамнина и $f^-(z)$ аналитична во долната полурамнина. $f^+(z)$ и $f^-(z)$ се аналитички продолжувања една на друга. Секоја функција која ги има особините на $f(z)$ по однос на дистрибуцијата T се вика аналитична репрезентација за дистрибуцијата T. Очигледно, секоја цела функција може да служи како аналитична репрезентација на нултата дистрибуција. (Целите функции немаат скокови на реалната оска). Според тоа, ако $f(z)$ е аналитична репрезентација за дадена дистрибуција $T \in (D')$ тогаш и функцијата $f(z)+g(z)$ ќе биде исто така - каде $g(z)$ е цела функција. Аналитичките репрезентации на една дистрибуција се разликуваат, евентуално, за некоја цела функција.

Во општ случај, ако е дадена дистрибуција $T \in (D')$ определувањето на соответната аналитична функција не е лесно. За дистрибуција $T \in (E')$, т.е. дистрибуција со компактен носач, функцијата

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle T_t, \frac{1}{t-z} \rangle, \quad \mathrm{Im}\, z \neq 0$$

z - комплексен број; претставува аналитична репрезентација за дистрибуцијата T.*) Функцијата $\hat{T}(z)$ се вика уште Кошиева репрезентација, зашто е добиена преку јадрото на Коши

$$t \to \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{t-z},$$

кое е очигледно елемент од просторот (E). Но како Кошиевото јадро не е елемент од просторот (D) затоа не за секоја дистрибуција $T \in (D')$ постои Кошијева репрезентација.

*) ([3],)

Инаку, ако е $f(z)$ аналитична репрезентација за дистрибуцијата T, $f'(z)$ ќе биде аналитична репрезентација за изводната дистрибуција T'.

Н.Бремерман со цел да го рашири кругот на дистрибуции, кои допуштаат Кошијеви репрезентации ги воведува просторите од дистрибуции $(0')$ кои се меѓупростори за (D') и (E') и се специјално приспособени за Кошијева репрезентација. Во својата монографија ([3]) Бремерман го докажува аналитичкото претставување на дистрибуции од простори $(0_\alpha')$ преку обопштениот Кошиев интеграл и јадрото на Паусон. Постојат и други докази така на пример ([4]). Р. Кармишел посматрајќи поопшти области во n-димензионалниот комплексен простор C^n исто преку обопштениот интеграл на Коши и јадрото на Пуасон дава во некоја смисла поопшти резултати. Овдека ние даваме еден начин што се разликува од наведените и кој е во извесна смисла подиректен. Освен тоа овој начин овозможува и некоја декомпозиција на дадена дистрибуција.

2.2. АНАЛИТИЧНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА ЗА $(0_\alpha')$, $\alpha \geqslant -1$

Бидејќи $\alpha \geqslant -1$, Кошијеовото јадро

$$t \to \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-z}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0$$

припаѓа на просторот (0_α). Следователно е определена функцијата

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left< T_t, \frac{1}{t-z} \right>, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{2.3}$$

Овдека ни е целта да ги докажеме следните две формули

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x+i\epsilon) - \hat{T}(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx = \left<T,\phi\right> \tag{2.4}$$

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x+i\epsilon) + T(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx = 2\left<T,\hat{\phi}\right) \tag{2.5}$$

$$\phi \in D, \quad \hat{\phi}(t) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{ch}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)\,dx}{x-t}$$

ch- означува главна вредност на Коши, чија што егзистенција е осигурана поради диференцијабилноста на функцијата $\phi(x)$.

2.3. ДОКАЗ НА (2.4) И (2.5)

Ги посматраме интегралите

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x+i\epsilon)\phi(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x-i\epsilon)\phi(x)\,dx \tag{2.6}$$

и двата интеграла постојат зашто функциите $x \to \hat{T}(x-i\epsilon)$ $x \to \hat{T}(x-i\epsilon)$ се непрекинати, а $\phi(x)$ е со компактен носач.

Нека го разгледаме првиот интеграл од (2.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}\ (x+i\epsilon)\phi(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=0}^{N} \hat{T}(x_\nu+i\epsilon)\phi(x_\nu)\Delta x_\nu,$$

каде што

$$\sum_{\nu=0}^{N} \hat{T}(x_\nu+i\epsilon)\phi(x_\nu)\,\Delta x_\nu$$

претставува Риманова сума за дадениот интеграл

$$\sum_{\nu=0}^{N} \hat{T}(x_\nu+i\epsilon)\phi(x_\nu)\Delta x_\nu = \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{2\pi i} < T_t, \frac{\phi(x_\nu)\Delta x_\nu}{t-x_\nu-i\epsilon} > =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} < T_t, \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\phi(x_\nu)\Delta x_\nu}{t-x_\nu-i\epsilon} >$$

(зарад линеарноста на T). Функциите

$$\psi_N(t) = \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\phi(x_\nu)\Delta x_\nu}{t-x_\nu-i\epsilon}\,, \quad N=1,2,\ldots \tag{2.7}$$

(ε - функции)
очигледно припаѓаат на просторот (0_α) $\alpha \geqslant -1$. Сега ќе покажеме дека функциите (2.7) конвергираат во просторот (0α) кон функцијата

$$\psi_\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)\,dx}{t-x-i\epsilon} \tag{2.8}$$

за таа цел ќе покажеме дека множеството функции (2.7) се рамномерно ограничени и рамностепено непрекинати.

$$|\psi_N(t)| = \left| \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\phi(x_\nu)\Delta x_\nu}{t-x_\nu-i\epsilon} \right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{N} \frac{|\phi(x_\nu)|\Delta x_\nu}{|t-x_\nu-i\epsilon|} \leqslant$$

$$\frac{M \sum\limits_{\nu=0}^{N} \Delta x_\nu}{\epsilon} \leqslant \frac{M.d}{\epsilon},$$

каде

$$M = \sup_{x \in \operatorname{supp}\phi} |\phi(x)|.$$

Бидејќи носачот е компактно множество, може да се најде конечен интервал со должина d во кој ќе се содржи носачот $\operatorname{supp}\phi$. Се разбира во тој случај сумирањето станува само по оние x_ν што се наоѓаат во споменатиот интервал. Со тоа е покажана рамномерната ограниченост.

$$|\psi_N(t') - \psi_N(t)| = \left| \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\phi(x_\nu)\Delta x_\nu}{t'-x_\nu-i\epsilon} - \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\phi(x_\nu)\Delta x_\nu}{t-x_\nu-i\epsilon} \right|$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{N} \frac{|\phi(x_\nu)|\,|t'-t|\,\Delta x_\nu}{|t'-x_\nu-i\epsilon|\,|t-x_\nu-i\epsilon|} \leqslant \frac{M.}{\epsilon^{2}} |t'-t| \sum_{\nu=0}^{N} \Delta x_\nu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M.d}{\epsilon^{2}} |t'-t|\,.$$

со што е покажана и рамностепената непрекинатост.

Нека сега К е компактно множество и $t \in K$ е фиксно. Сумите (2.7) конвергираат кон (2.8) зашто се негови Риманови суми. Според теоремата на Арцела-Аскали конвергенцијата е рамномерна на компактното множество К. На сосема ист начин се покажува дека $\psi_N^{(p)}(t)$ конвергираат исто така во просторот (0_α) кон $\psi^{(p)}(t)$.

Поради непрекинатоста на дистрибуцијата $T \in (0'_\alpha)$ добиваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x+i\epsilon)\phi(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i} < T, \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\phi(x_\nu)\Delta x_\nu}{t-x_\nu-i\epsilon} > =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} < T, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)\,dx}{t-x-i\epsilon} > = < T, \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)\,dx}{t-x-i\epsilon} > \tag{2.9}$$

Нека сега ја посматраме функцијата

$$\psi_\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)\,dx}{t-x-i\epsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t-x)\,dx}{x-i\epsilon} = \delta_\epsilon^- * \phi(t)$$

каде $\delta_\epsilon^- = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{x-i\epsilon}$ е регуларна дистрибуција, а "*" означува конволуција на дистрибуцијата δ_ϵ^- и функцијата $\phi \in (D)$. Кога $\epsilon \to +0$ регуларните дистрибуции δ_ϵ^- слабо конвергираат кон дистрибуцијата

$$\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{ch} \tag{2.10}$$

т.е.

$$\lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)\,dx}{x-i\epsilon} = \frac{1}{2} < \delta, \phi > + \frac{1}{2\pi i} < \mathrm{ch}, \phi >.$$

([16], стр.739, теор.101).

δ е Дираковата дистрибуција, а ch-главна вредност на Коши.

Посматрајќи го интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x-i\epsilon)\phi(x)dx,$$

на сосема ист начин доаѓаме до дистрибуцијата

$$\delta_{\epsilon}^{+} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{x+i\epsilon}.$$

Ако пуштиме $\epsilon \to +0$, тогаш регуларните дистрибуции δ_{ϵ}^{+} слабо конвергираат кон дистрибуцијата

$$-\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{ch} \tag{2.11}$$

т.е.

$$\lim_{\epsilon \to +0} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)\,dx}{x+i\epsilon} = -\frac{1}{2} < \delta,\phi > + \frac{1}{2\pi i} < \mathrm{ch},\phi > .$$

Од друга страна функциите $\delta_{\epsilon}^{-} * \phi$ конвергираат во просторот (0α) кон функцијата

$$\frac{1}{2}\,\delta * \phi + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{ch}*\phi.$$

Навистина, функциите $\delta_{\epsilon}^{-} * \phi$ како конволуции на дистрибуциите δ_{ϵ}^{-} и дадена функција $\phi \in (D)$ се бесконечно диференцијабилни ([9], 183) и кои очигледно припаѓаат на секој простор 0_{α}, $\alpha \geqslant -1$. Но како слабата конвергенција на дистрибуции повлекува силна конвергенција, заклучуваме: ако t се менува низ некое компактно множество К, тогаш носачите за функциите $\phi_t(x) = \phi(t-x)$, ќе се содржат во компактното множество K-suppϕ, освен тоа

$$\sup_{k \leqslant m} |\phi^{(k)}(t-x)| \leqslant C_m,$$

C_m константа што зависи само од m.

Според дефиницијата за силна конвергенција ([1], стр. 14 и 15) имаме

$$\sup \delta_{\epsilon}^{-} * \phi_t = \sup_{t \in K} < \delta_{\epsilon}^{-}, \phi_t(x) >$$

тежи рамномерно кога $\epsilon \to +0$, $t \in K$ кон

$$\frac{1}{2}\,\delta*\phi+\frac{1}{2\pi i}\,ch*\phi.$$

Поради непрекинатоста на дистрибуцијата T добиваме

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{T}(x+i\epsilon)\phi(x)\,dx = <T,\lim_{\epsilon\to+0}\delta_{\epsilon}^{-}*\phi> = $$
$$= <T,\ \frac{1}{2}\,\delta*\phi+\frac{1}{2\pi i}\,ch*\phi> \qquad (2.12)$$

Потполно исто се покажува

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{T}(x-i\epsilon)\phi(x)\,dx = <T,\ -\frac{1}{2}\,\delta*\phi+\frac{1}{2\pi i}\,ch*\phi> \qquad (2.13)$$

Како $\delta*\phi=\phi$ добиваме

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\infty}^{\infty}\hat{T}(x+i\epsilon)\phi(x)\,dx = <T,\frac{1}{2}\phi> + \frac{1}{2\pi i}<T,ch*\phi> =$$

$$= <\frac{1}{2}\,T,\phi> + \frac{1}{2\pi i}\,T*(ch*\phi)^{\vee}(0) =$$

$$= <\frac{1}{2}\,T,\phi> + \frac{1}{2\pi i}\,(T*ch^{\vee})*\check{\phi}(0) =$$

$$= <\frac{1}{2}\,T,\phi> + \frac{1}{2\pi i}<T*ch^{\vee},\phi> \qquad (2.14)$$

каде $\check{\phi}(t)=\phi(-t)$ $\quad \check{T}(t)=T(-t)$.

Според тоа имаме

$$\hat{T}(x+i\epsilon)\ \to \frac{1}{2}T+\frac{1}{2\pi i}\,T*\check{ch}$$

кога $\epsilon \to +0$ (во смисла на дистрибуции).

Аналогно се покажува дека

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x - i\epsilon)\phi(x)\,dx = \left\langle -\frac{1}{2} T, \phi \right\rangle + \frac{1}{2\pi i} \langle T * \check{ch}, \phi \rangle \qquad (2.15)$$

т.е.

$$\hat{T}(x-i\epsilon) \to -\frac{1}{2}T + \frac{1}{2\pi i}\, T * \check{ch}$$

Од (2.14) и (2.15) произлегува

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x+i\epsilon) - \hat{T}(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} T, \phi \right\rangle + \frac{1}{2\pi i} \langle T * \check{ch}, \phi \rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{1}{2} T, \phi \right\rangle - \frac{1}{2\pi i} \langle T * \check{ch}, \phi \rangle =$$

$$= \langle T, \phi \rangle .$$

Со тоа е докажана формулата (2.4) Аналогно

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x+i\epsilon) + \hat{T}(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} T, \phi \right\rangle + \frac{1}{2\pi i} \langle T * \check{ch}, \phi \rangle - \left\langle \frac{1}{2} T, \phi \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \langle T * \check{ch}, \phi \rangle = 2 .\, \frac{1}{2\pi i} \langle T * \check{ch}, \phi \rangle =$$

$$= 2 .\, \frac{1}{2\pi i} (T * \check{ch}) * \check{\phi}(0) = 2 .\, \frac{1}{2\pi i}\, T * (\check{ch} * \check{\phi}(0)) =$$

$$= 2 .\, \frac{1}{2\pi i} \langle T, ch * \phi(+x) \rangle = 2 .\, \frac{1}{2\pi i} \left\langle T, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(+x-t)}{t} dt \right\rangle$$

$$= 2 .\, \frac{1}{2\pi i} \left\langle T, -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-x} dt \right\rangle .$$

Со што е покажана и формулата (2.5).

2.4. АНАЛИТИЧНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА $(0_\alpha')$ α ПРОИЗВОЛНО

Во ([3], стр.86) е покажано дека, ако е $T\in(0_\alpha')$, а бројот к-ненегативен цел така избран што $-k-1\leqslant\alpha$, т.е. функцијата

$$t \to \frac{1}{(t-z)^{k+1}}$$

припаѓа на просторот (0_α), тогаш функцијата

$$\hat{S}(z)=\frac{k!}{2\pi i}<T,\ \frac{1}{(t-z)^{k+1}}> \tag{2.16}$$

е аналитична функција на комплексната рамнина освен на носачот од дистрибуцијата T и претставува аналитична репрезентација за к-тиот извод од дистрибуцијата T, т.е.

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{S}\ (x+i\epsilon)-\hat{S}(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx=<T^{(k)},\phi>,$$

за секоја функција $\phi\in(D)$.

Во ([3], стр.86) е дадена, исто така, следнава теорема, која има големо практично значење.

<u>Теорема 1.</u> Нека функцијата $f(z)$ е аналитична за $\mathrm{Im}z\neq0$, таква што

$$\frac{d^k}{dz^k}f(z)=\hat{S}(z)$$

и

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx$$

е дистрибуција од просторот (D'). Тогаш

$$\langle T,\phi\rangle = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}(c_0+c_1x+\ldots+c_{k-1}x^{k-1})\phi(x)\,dx,$$

каде $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ се произволни константи.

Овдека даваме слична теорема која е во некоја смисла поопшта.

Теорема 2. Нека функцијата $f(z)$ аналитична за $\mathrm{Im}z\neq 0$ претставува аналитична репрезентација за дистрибуцијата $T\in(D')$ Нека $F(z)$ е примитивна функција за $f(z)$, $\mathrm{Im}z\neq 0$.

Ако за функцијата $F(z)$ постои функција $\rho(t)\in(D)$ таква што

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\,dt = 1, \qquad \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\rho(x)\,dx = C,$$

тогаш

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx = \langle S,\phi\rangle + \langle C,\phi\rangle$$

каде S е примитивна дистрибуција за T и $\phi\in(D)$.

Доказ. По услов имаме $F'(z)=f(z)$ за $\mathrm{Im}z\neq 0$. Со парцијална интеграција добиваме

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]\phi(x)dx = [F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi'(x)\,dx$$

Бидејќи е функцијата $\phi(x)$ со компактен носач имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi'(x)\,dx$$

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx=-\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi'(x)\,dx \tag{2.17}$$

Како функцијата f(z)e аналитична репрезентација за дистрибуцијата T

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx=\langle T,\phi\rangle$$

со заменување во (2.12)

$$\langle T,\phi\rangle=-\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi'(x)\,dx \tag{2.18}$$

имајќи во предвид S'=T, т.е.

$$\langle S,\phi\rangle=-\langle T,\int_{-\infty}^{x}\phi^*(t)\,dt\rangle \qquad ([9],\ str.96)$$

$$\phi(t)=\phi^*(t)+a\,\rho(t),\quad a=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\,dt, \tag{2.19}$$

ќе биде

$$\langle S,\phi\rangle=-\langle T,\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(t)\,dt\rangle=$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi^*(x)\,dx,$$

според (2.18) имајќи го во предвид (2.19) добиваме понатаму

$$\langle S,\phi\rangle=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx-$$

$$-a\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\rho(x)\,dx$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+i\epsilon)-F(x+i\epsilon)]\phi(x)\,dx-C\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,dx$$

и конечно

$$<S,\phi> + <C,\phi> = \lim_{\epsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)]\phi(x)dx$$

Во теорема 1 се бара изводот на функцијата да биде еднаков на некаква Кошијева репрезентација. Додека пак во теорема 2 се поставува еден услов за примитивната функција и не се поставува нејзиниот извод да биде некоја Кошијева репрезентација. Освен тоа, за дадена конкретна репрезентација T знаејќи го носачот suppT можно е да ја избереме функцијата $\rho(t)$ со носач таков што константата C да биде нула. Ќе ја илустрираме теорема 2 со еден пример.

Пример. Нека е дадена дистрибуцијата $T = \mathrm{Pf}\,t^{-1}H(t)$. Подоцна во глава 3 ќе покажеме дека нејзина аналитична репрезентација е функцијата

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\log(-z); \qquad -\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Регуларната дистрибуција $S=[\log tH(t)]$ е примитивна за дистрибуцијата T.

$$<[\log tH(t)]',\phi(t)> = -<\log tH(t),\phi'(t)> =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\log(t).\phi'(t)dt = -\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{\infty}\log t.\phi'(t)dt =$$

$$= -\lim_{\epsilon\to+0}\left[\log t.\phi(t)\Big|_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}dt\right] =$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}dt + \phi(\epsilon)\log\epsilon\right) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}dt + \phi(0)\log\epsilon\right) =$$

$$= <\mathrm{Pf}\,t^{-1}H(t),\ \phi(t)>$$

$$S' = T.$$

Според теорема 2 примитивната функција

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int -\frac{\log(-z)}{z}\,dz=-\frac{1}{4\pi i}\log^2(-z)$$

$\mathrm{Im}z\neq 0$, $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ ќе биде аналитична репрезентација за дистрибуцијата S, ако можеме да најдеме функција $\rho(t)\in(D)$ која го задоволува условот во теоремата.

Но очигледно носачот на дистрибуцијата S е интервалот $[0,+\infty)$, што значи, ако $\rho(t)$ ја избереме така што нејзиниот носач $\mathrm{supp}\rho$ да биде од интервалот $[0,+\infty)$ тогаш е јасно дека C=0 и следователно на теоремата функцијата

$$F(z)=-\frac{1}{4\pi i}\log^2(-z)$$

ќе биде аналитична репрезентација за дистрибуцијата

$$S=[\log tH(t)],$$

т.е.

$$\langle\log H(t),\phi(t)\rangle=-\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[\log^2(-x-i\epsilon)-\log^2(-x+i\epsilon)]\phi(x)\,dx$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[\log^2(-x-i\epsilon)-\log^2(-x+i\epsilon)]\phi(x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{0}\{[\log\sqrt{x^2+\epsilon^2}+i\arg(-x-i\epsilon)]^2-[\log\sqrt{x^2+\epsilon^2}+$$

$$+i\arg(-x+i\epsilon)]^2\}\sigma(x)\,dx-\frac{1}{4\pi i}\int_{0}^{\infty}\{[\log\sqrt{x^2+\epsilon^2}+$$

$$+i\arg(-x-i\epsilon)]^2-[\log\sqrt{x^2+\epsilon^2}+i\arg(-x+i\epsilon)]^2\}\phi(x)\,dx$$

ако пуштиме $\epsilon \to +0$, по извесно рачунање се добива

$$-\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\log^2(-x-i\epsilon) - \log^2(-x+i\epsilon)]\phi(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \log x.\phi(x)\,dx = \langle \log x.H(x), \phi(x) \rangle .$$

што покажува дека навистина $F(z)$ е аналитична репрезентација за дистрибуцијата S.

Во следнава теорема ќе дадеме една врска меѓу дадена низа од аналитични функции и соответна низа од дистрибуции. Поточно ќе докажеме кога, граничната функција на една низа од аналитични функции претставува и самата аналитична репрезентација.

Теорема 3. Дадена е низа од аналитични функции $\{f_n(z)\}$ чиј што членови $f_n(z)$ претставуваат аналитични репрезентации на соответните членови на една низа од дистрибуции $\{T_n\}$. Нека функциите $f_n(z)$ се аналитични за $\operatorname{Im} z \neq 0$ и конвергираат рамномерно на секое компактно множество кон функцијата $f(z)$. Ако интегралите

$$J_{n,\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x+i\epsilon) - f_n(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx,$$

конвергираат по ϵ респективно кон $\langle T_n, \phi \rangle$, тогаш низата од дистрибуции е конвергентна, а функцијата $f(z)$ ќе биде налитична репрезентација за граничната дистрибуција T.

Доказ. а) Од условот во теоремата произлегува дека граничната функција $f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$ е аналитична за $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Нека сега ја посматраме разликата

$$|\langle T_n, \phi \rangle - \langle T_m, \phi \rangle| = |\langle T_n, \phi \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x+i\epsilon) - f_n(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} [f_m(x+i\epsilon) - f_m(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} [f_m(x+i\epsilon) - f_m(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(x+i\epsilon)-f_n(x-i\epsilon)]\phi(x)dx-\langle T_m,\phi\rangle|$$

$$\leqslant\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(x+i\epsilon)-f_n(x-i\epsilon)]\phi(x)dx-\langle T_n,\phi\rangle\right|+$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f_m(x+i\epsilon)-f_m(x-i\epsilon)]\phi(x)dx-\langle T_m,\phi\rangle\right|$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(x+i\epsilon)-f_m(x+i\epsilon)]\phi(x)dx\right|$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(x-i\epsilon)-f_m(x-i\epsilon)]\phi(x)dx\right|.$$

Нека е зададено $\delta > 0$.

Од условот во теоремата следи дека $\epsilon > 0$ можеме да го избереме доволно мало, така што да бидат исполнети

$$|I_{n,\epsilon}-\langle T_n,\phi\rangle|<\delta$$

$$|I_{m,\epsilon}-\langle T_m,\phi\rangle|<\delta$$

Поради рамномерната конвергенција на низата функции $\{f_n(z)\}$ на компактни множества при фиксно $\epsilon > 0$ и дадена функција $\phi(x)\in(D)$, можеме да избереме индекс $N(\delta)$ така што за $m,n \geqslant N$ да важи

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(x+i\epsilon)-f_m(x+i\epsilon)]\phi(x)dx\right| =$$

$$\left|\int_{\mathrm{supp}\phi}[f_n(x+i\epsilon)-f_m(x+i\epsilon)]\phi(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[-C,C]} |f_n(x+i\epsilon)-f_m(x+i\epsilon)|\,|\phi(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant \delta \int_{[-C,C]} |\phi(x)|dx \leqslant \delta.2C.M,$$

каде што

$$M = \sup|\phi(x)| \;,\; \operatorname{supp}\phi \subseteq [-C,C],$$

а $N(\delta)$ е така избрано што $|f_n(x+i\epsilon)-f_m(x+i\epsilon)| < \delta$ за фиксно $\epsilon > 0, m,n \geqslant N$ и $x \in \operatorname{supp}\phi$. Аналогно се покажува дека

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x-i\epsilon)-f_m(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx\right| \leqslant \delta 2c.M .$$

имајќи ги во предвид горните оценки имаме

$$|<T_n,\phi> - <T_m,\phi>| < 2\delta + 4c\delta M \tag{2.20}$$

Од (2.20) следи дека дадената низа од дистрибуции $\{T_n\}$ е Кошијева. Па како просторот (D') е комплетен постои гранична дистрибуција T, т.е.

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n \tag{2.21}$$

б) Сега ќе покажеме дека граничната функција $f(z)$ е аналитична репрезентација за граничната дистрибуција T.

Нека е зададено $\delta > 0$

$$|<T,\phi> - \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx =$$

$$= |<T,\phi> - <T_n,\phi> + <T_n,\phi> - I_\epsilon|$$

$$I_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx$$

понатаму добиваме

$$|\langle T,\phi\rangle - I_\epsilon| = |\langle T,\phi\rangle - \langle T_n,\phi\rangle + \langle T_n,\phi\rangle -$$

$$- I_{n,\epsilon} + I_{n,\epsilon} - I_\epsilon| \leqslant$$

$$\leqslant |\langle T,\phi\rangle - \langle T_n,\phi\rangle| + |\langle T_n,\phi\rangle - I_{n,\epsilon}| +$$

$$+ |I_{n,\epsilon} - I_\epsilon|.$$

Го фиксираме $\epsilon > 0$, така што $\epsilon \leqslant \epsilon_0$ и $|\langle T_n,\phi\rangle - I_{n,\epsilon}| < \delta$ понатаму за така фиксирано $\epsilon > 0$, избираме индекс $N(\delta)$, таков што

$$|\langle T,\phi\rangle - \langle T_n,\phi\rangle| < \delta, \qquad n \geqslant N(\delta)$$

(зашто е $T = \lim_{n\to\infty} T_n$)
и исто така

$$|I_{n,\epsilon} - I_\epsilon| < \delta, \qquad n \geqslant N(\delta)$$

последното е можно за фиксно ϵ и дадена функција зашто $\phi(x) \in (D)$, $f_n(x+i\epsilon) - f_n(x-i\epsilon) \to f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)$ рамномерно

Имајќи ги во предвид горните оценки добиваме

$$|\langle T,\phi\rangle - I_\epsilon| < \delta+\delta+\delta = 3\delta, \qquad n \geqslant N(\delta)$$

и фиксно $\epsilon \leqslant \epsilon_0$. Но ние можеме да земеме било кое $\epsilon \leqslant \epsilon_0$. Со тоа конечно покажавме дека навистина

$$\lim_{\epsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)]\phi(x)dx = \langle T,\phi\rangle.$$

Оваа теорема, истовремено, пружа една техника за определување на гранични дистрибуции и исто така за определување на репрезентации на дистрибуции.

Ние тоа ќе го илустрираме со еден карактеристичен пример.

Пример. Ја посматраме регуларната дистрибуција $T=[e^{-t^2}]$. Бидејќи функцијата $t \to e^{-t^2}$ на бесконечност опаѓа побрзо од било која степен на $|t|$ т.е. $|e^{-t^2}| \leqslant |t|^{\alpha}$, за било кое дадено α и доволно големо t, според теорема 1 глава 1 про излегува дека дистрибуцијата T може да се продолжи на било кој простор (0_α).

Следователно дистрибуцијата $t=[e^{-t^2}]$ има Кошијева репрезентација

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} < T_t, \frac{1}{t-z} > = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-z}\, dt \tag{2.22}$$

Последниот интеграл не може да се реши со помош на методот "затворена контура" бидејќи интегралот по големиот полукруг со радиус R не тежи кон нула кога $R \to \infty$. Тој интеграл може да се реши на пр. со техниката на Фуриеовата трансформација како што е направено во ([3],стр.133).

Ние овде ќе ја определиме аналитичната репрезентација на дистрибуцијата $T=[e^{-t^2}]$ врз база на докажаната теорема 2.

Нека ги посматраме полиномите

$$P_n(t) = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \tag{2.23}$$

Соответните регуларни дистрибуции нека ги означиме со

$$T_n = [P_n(t)] \tag{2.24}$$

За дистрибуцијата T_n аналитична репрезентација претставува функцијата

$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} P_n(z), & \mathrm{Im} z > 0 \\ -\frac{1}{2} P_n(z), & \mathrm{Im} z < 0 \end{cases}$$

Ја посматраме низата од функции $\{f_n(z)\}$. Очигледно е дека формираната низа конвергира рамномерно на секое компактно множество од рамнината за $\operatorname{Im}z \neq 0$, кон функцијата

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z^2}, & \operatorname{Im}z > 0 \\ -\frac{1}{2} e^{-z^2}, & \operatorname{Im}z < 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Освен тоа

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x+i\epsilon) - f_n(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx - \langle T_n, \phi \rangle \right|$$

$$= \left| \int_{\operatorname{supp}\phi} [f_n(x+i\epsilon) - f_n(x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx - \langle T_n, \phi \rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{\operatorname{supp}\phi} f_n(x+i\epsilon)\phi(x)\,dx - \frac{1}{2} \langle T_n, \phi \rangle \right| +$$

$$\left| \int_{\operatorname{supp}\phi} -f_n(x-i\epsilon)\phi(x)\,dx - \frac{1}{2} \langle T_n, \phi \rangle \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \int_{\operatorname{supp}\phi} P_n(x+i\epsilon)\phi(x)\,dx - \int_{\operatorname{supp}\phi} P_n(x)\phi(x)\,dx \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \int_{\operatorname{supp}\phi} P_n(x-i\epsilon)\phi(x)\,dx - \int_{\operatorname{supp}\phi} P_n(x)\phi(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{\operatorname{supp}\phi} | P_n(x+i\epsilon) - P_n(x) | \, | \phi(x) | \,dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\operatorname{supp}\phi} | P_n(x-i\epsilon) - P_n(x) | \, | \phi(x) | \,dx$$

Лесно се покажува дека последните интеграли за доволно мало $\epsilon > 0$ независно од n можат да се направат произволно мали. Со тоа е конечно покажано дека се задоволени условите во теоремата. Следователно функцијата (2.25) претставува аналитична репрезентација за дистрибуцијата $T = [e^{-t^2}]$.

2.5. АНАЛИТИЧНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА УМЕРЕНИ И ПЕРИОДИЧНИ ДИСТРИБУЦИИ

Врз база на теорема 2 глава 1 и (2.16) глава 2 заклучуваме дека за дадена умерена дистрибуција $T \in (S')$ и некој цел ненегативен број к функцијата

$$\hat{S}(z) = \frac{k!}{2\pi i} < T_t, \frac{1}{(t-z)^{k+1}} >$$

претставува аналитична репрезентација за дистрибуцијата $T^{(k)}$. Понатаму со помош на теорема 1 или теорема 2 глава 2 може да се определи аналитичната репрезентација на дистрибуцијата T.

Ако дадената дистрибуција $T \in (D')$ е периодична, тогаш врз основа на теорема 3 глава 1 и (2.16) глава 2 заклучуваме дека функцијата

$$\hat{S}(z) = \frac{1}{2\pi i} < T_t, \frac{1}{(t-z)^2} > \quad , \; \mathrm{Im} z \neq 0$$

ќе биде аналитична репрезентација за изводот на дистрибуцијата T т.е. за T'. Потоа врз база на теорема 1 или теорема 2 глава 2 релативно лесно се определува аналитичната репрезентација на дистрибуцијата T.

Оваа глава ја завршуваме со изнесување, накратко, на уште една техника за определување аналитичните репезентации на умерените дистрибуции, поточно, на нивните Фуријови трансформации.

Како што спомнавме во 1.1, ако дистрибуцијата $T \in (S')$ тогаш за неа може да се определи дистрибуција F(T) која се вика Фуриј̈ова трансформација. Дистрибуцијата F(T) е определена со следното равенство

$$<F(T),\phi> = <T,F(\phi)> \quad , \quad \phi \in (S)$$

За дадена умерена дистрибуција T постои спорорастечка функција $f(t)$ и цел ненегативен број m, таков што

$$T = [f]^{(m)}$$

Нека ставиме

$$\hat{F}(T,z) = (-iz)^m \hat{F}(t,z)$$

каде што

$$\hat{F}(f,z) = \begin{cases} \int_0^\infty f(t)e^{itz}dt, & \mathrm{Im}z > 0 \\ -\int_{-\infty}^0 f(t)e^{itz}dt, & \mathrm{Im}z < 0. \end{cases}$$

Функцијата $\hat{F}(f,z)$ се вика трансформација на Фурје-Карлеман.

Таа е аналитична функција во долната односно во горната отворена комплексна рамнина. Освен тоа во ([3], стр.128) е покажано дека функцијата

$$\hat{F}(T,z) = (-iz)^m \hat{F}(t,z)$$

претставува аналитична репрезентација за дистрибуцијата $F(T)$.

Г л а в а III

ПРИМЕРИ НА АНАЛИТИЧНИ РЕПРЕЗЕНТАЦИИ

1° Дистрибуцијата $T_1 = \mathrm{Pf}\, t^{\beta} H(t)$ каде $-2 < \beta < -1$, $H(t)$ Хевисајдовата функција, а Pf ја означува главната вредност по Адамард; дефинирана е на следниот начин

$$\langle T_1, \phi\rangle = -\frac{1}{\beta+1}\int_0^{\infty} t^{\beta+1}\phi'(t)\,dt, \quad \phi\in(D) \quad ([9]\quad)$$

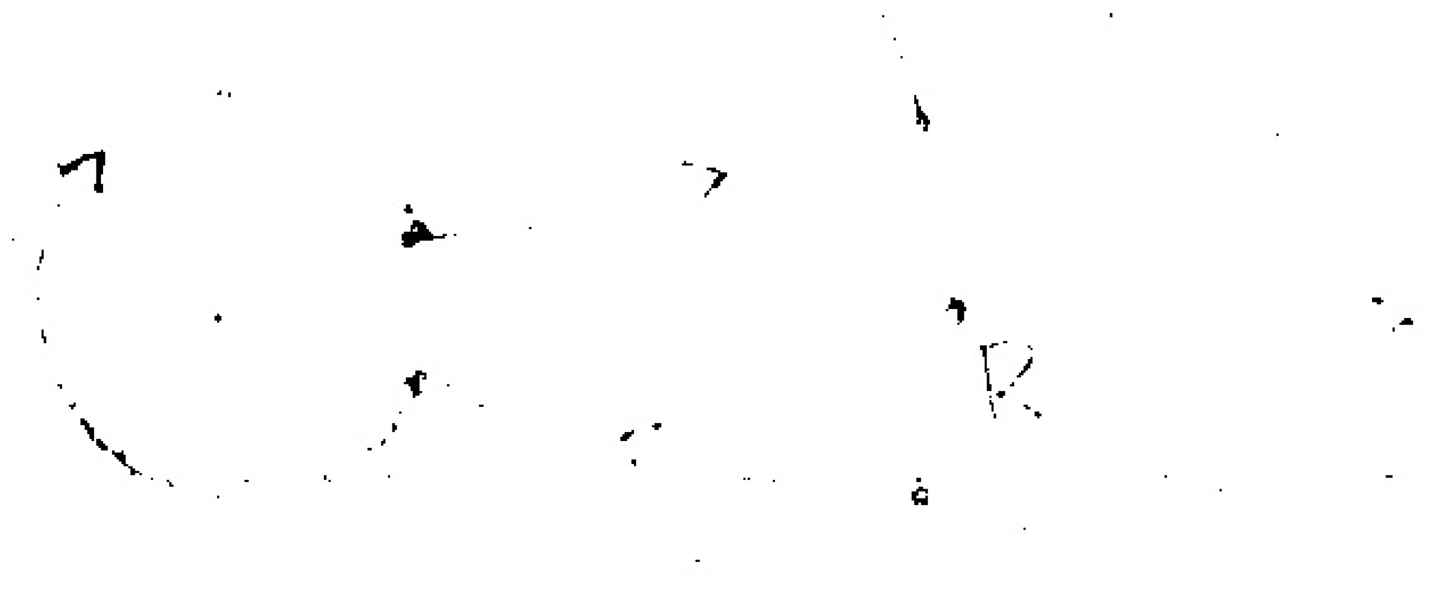
Во првата глава (т.1) покажавме дека $T_1 \in (0_\alpha)$ за $\alpha \leqslant -1$. Според тоа дистрибуцијата T_1 има Кошиева репрезентација.

$$\hat{T}_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\cancel{\frac{1}{\beta+1}}\left\langle T_{1,t}, \frac{1}{t-z}\right\rangle, \quad \operatorname{Im} z \neq 0$$

ако замениме добиваме

$$\hat{T}_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\beta+1}\int_0^{\infty}\frac{t^{\beta+1}\,dt}{(t-z)^2}.$$

Со решавање на последниот интеграл на пр. со методот на остатоци по следнава контура:



се добива

$$\hat{T}_1(z) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\beta+1}\ \frac{e^{-(\beta+2)\pi i}}{\sin(\beta+2)\pi}\ z^{\beta}\ , \quad -\pi < \arg z \leq \pi .$$

за $\beta = -\frac{3}{2}$

$$\hat{T}_1(z) = z^{-3/2}, \quad -\pi < \arg z \leq \pi .$$

2^{o} Ја посматраме дистрибуцијата T_2 определена на следниот начин

$$< T_2, \phi > = \lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{\epsilon}^{1} \frac{\phi(t)}{t} dt + \phi(0) \log \epsilon \right), \qquad \phi \in (D)$$

Вака определениот функционалн претставува дистрибуција ([15] стр.57 и натаму) со носач интервалот $[0,1]$. Следователно $T_2 \in (E')$ и затоа има Кошијева репрезентација

$$\hat{T}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} < T_{2,t}, \frac{1}{t-z} > =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{\epsilon}^{1} \frac{dt}{t(t\mp z)} - \frac{1}{z} \log\epsilon \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to +0} \left(\frac{1}{z} \log(1-z) - \frac{1}{z} \log(\epsilon-z) + \frac{1}{z} \log\epsilon - \frac{1}{z} \log\epsilon \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z} \log(1-z) - \frac{1}{z} \log(-z)\right],$$

$$\hat{T}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z}[\log(1-z) - \log(-z)], \quad -\pi < \arg z \leq \pi .$$

3^{o}. $T_3 = T_2 + [t^{-1}H(t-1)] = \mathrm{Pf}\frac{H(t)}{t}$

Ако регуларната дистрибуција $[t^{-1}H(t-1)]$ се примени на тест функција $\phi \in (D)$ се добива

$$<[t^{-1}H(t-1)],\ \phi(t)> = \int_1^{\infty} \frac{\phi(t)}{t}\,dt$$

или

$$|<[t^{-1}H(t-1)],\ \phi(t)>| \leqslant \int_1^{\infty} t^{-1}|\phi(t)|dt$$

според теорема 1 глава 1 за $\alpha+1-1 < 0$ може да се прошири на простор (0_α). Како е $\alpha < 0$ горната регуларна дистрибуција има Кошијова репрезентација, па следователно и дистрибуцијата T_3

$$\hat{T}_3(z) = \hat{T}_2(z) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dt}{t(t-z)} =$$

$$= \hat{T}_2(z) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to+\infty} [\frac{1}{z}\log(b-z) - \frac{1}{z}\log(1-z) - \frac{1}{z}\log b] =$$

$$= \hat{T}_2(z) + \frac{1}{2\pi i}[-\frac{1}{z}\log(1-z)] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\log(-z), \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

4° $T_4 = \mathrm{Pf}\,\dfrac{H(-t)H(t+1)}{|t|}$,

дефинирана е со следното:

$$<T_4,\phi> = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\phi(t)}{-t}dt + \phi(0)\log\epsilon\right)$$

Вака определениот функцонал претставува дистрибуција (аналогно на T_2) со носач интервалот $[-1\ ,0]$. Следователно дистрибуцијата T_4 е со компактен носач и затоа допушта Кошијева репрезентација

$$\hat{T}_4(z) = \frac{1}{2\pi i} < T_{4,t}, \frac{1}{t-z} > =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dt}{-t(t-z)} - \frac{1}{z} \log\epsilon \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to +0} \left(\frac{1}{z} \log\epsilon - \frac{1}{z} \log 1 - \frac{1}{z} \log(-\epsilon - z) + \frac{1}{z}\log(-1-z)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{z} \log\epsilon \right) = \frac{1}{2\pi i} \left[- \frac{1}{z} \log(-z) + \frac{1}{z} \log(-1-z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} \left[\log(-1-z) - \log(-z)\right], \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

5° $T_5 = T_4 + \left[\frac{H(-t-1)}{|t|}\right],$

Како во пример 3° се покажува дека регуларната дистрибуција $\left[\frac{H(-t-1)}{|t|}\right]$ има Кошијова репрезентација. Следователно ќе има и дистрибуцијата T_5.

$$\hat{T}_5(z) = \hat{T}_4(z) + \frac{1}{2\pi i} < \frac{H(-t-1)}{|t|}, \frac{1}{t-z} > =$$

$$= \hat{T}_4(z) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \to -\infty} \left(\int_{b}^{-1} \frac{dt}{-t(t-z)} \right) =$$

$$= \hat{T}_4(z) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \to -\infty} \left[- \frac{1}{z} \log(-b) - \frac{1}{z}\log(-1-z) + \frac{1}{z}\log(b-z)\right]$$

$$\hat{T}_4(z) + \frac{1}{2\pi i}\left[- \frac{1}{z}\log(-1-z) + \frac{1}{z} i\pi\right], \qquad \operatorname{Im} z > 0$$

$$\hat{T}_4(z) + \frac{1}{2\pi i} \left[- \frac{1}{z}\log(-1-z) - \frac{1}{z} i\pi\right], \qquad \operatorname{Im} z < 0$$

или конечно

$$\hat{T}_5(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \dfrac{1}{z} \left[i\pi - \log(-z)\right], & \operatorname{Im} z > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \dfrac{1}{z}\left[-i\pi - \log(-z)\right], & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

6° $T_6 = \mathrm{ch}\, t^{-1}$,

ch - Кошијева главна вредност

$$\langle T_6,\phi\rangle = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\phi(t)}{t}\,dt + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}\,dt\right) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left(-\int_{-\infty}^{-1}\frac{\phi(t)}{-t}\,dt - \int_{-1}^{-\epsilon}\frac{\phi(t)}{-t}dt + \int_{\epsilon}^{1}\frac{\phi(t)}{t}\,dt + \int_{1}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t}dt\right)$$

од каде произлегува

$$T_6 = T_3 - T_5,$$

што значи Кошијевата главна вредност претставува дистрибуција, која допушта Кошијова репрезентација

$$\hat{T}_6(z) = \hat{T}_3(z) - \hat{T}_5(z),$$

ако замениме добиваме

$$\hat{T}_6(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2z}, & \mathrm{Im}z>0 \\ \dfrac{1}{2z}, & \mathrm{Im}z<0 \end{cases}$$

Друг доказ за Кошијевата главна вредност е даден на пример во ([3],стр.94 и 95).

7° $T_7 = \mathrm{Pf}\, t^{-k}\, H(t)H(1-t)$, $k \geqslant 1$

Дистрибуцијата T_7 е определена на следниот начин

$$\langle T_7,\phi\rangle = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{\epsilon}^{1}\frac{\phi(t)}{t^k} + \sum_{\nu=0}^{k-2}\frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!}\cdot\frac{\epsilon^{\nu-k+1}}{\nu-k+1} + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\log\epsilon\right)$$

Вака определениот функционал претставува дистрибуција со носач интервалот $[0,1]$. ([15],стр.47 и натаму). Според тоа дистрибуцијата T_7 има Кошијова репрезентација. Но аналитичната репрезентација може да се определи поаѓајќи од изводот,

$$[Pft^{-k}H(t)H(1-t)]' = -k\,Pft^{-k-1}H(t)H(1-t) + $$
$$+ (-1)^k \frac{1}{k!}\ \delta^{(k)} \qquad (3.1)$$

каде е δ -Дираковата дистрибуција.

(3.1) е дадено на пример во ([15], стр.57 и натаму).

Поаѓајќи од (3.1) произлегува дека на еден индуктивен начин можат да се определуваат аналитичните репрезентации за различно к.

На пример за к=1.

$$[Pft^{-1}H(t)H(1-t)]' = -\ Pft^{-2}H(t)H(1-t)-\delta'$$

бидејќи аналитичната репрезентација за Дираковата дистрибуција е

$$\hat{\delta}(z) = -\frac{1}{2\pi i z},$$

следователно репрезентацијата за $Pft^{-2}H(t)H(1-t)$ ќе биде

$$f(z] = \frac{-1}{2\pi i}[\frac{1}{z}(\log(1-z)-\log(-z))]' - \frac{1}{2\pi i}\ (-\frac{1}{z})'$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\ [-\frac{1}{z}+1-\frac{1}{z}\ \log(1-z) + \frac{1}{1-z}]$$

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

8^{o}. На секоја дистрибуција T со компактен носач одговара функција аналитична на целата комплексна рамнина освен на носачот од дистрибуцијата, која на бесконечност тежи кон нула.

Природно е да се постави прашање дали важи и обратно: зададена функција $f(z)$ аналитична на целата комплексна рамнина освен на дадено компактно множество од реалната оска и која го задоволува условот $f(z) \to 0$, кога $z \to \infty$ дали постои дистрибуција T чија што репрезентација е дадената функција.

Одговорот е негативен. Функцијата $e^{1/z}-1$ е контра пример: $e^{1/z}-1$ тежи кон 0 кога $z \to \infty$ и е аналитична освен во нулата. Ако би постоела дистрибуција $T \in (E')$ со репрезентација функцијата $e^{1/z}-1$,тогаш T треба за носач да го има почетокот т.е. една изолвана точка. Во тој случај дистрибуцијата T ќе биде линеарна комбинација од Дираковата δ-функција и нејзините изводи. Следователно нејзината аналитична репрезентација ќе биде

$$\hat{T}(z) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{a_\nu}{z^\nu}.$$

Од друга страна имаме

$$e^{1/z} - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{-\nu}$$

Од каде заклучуваме дека не постои таква дистрибуција.

Овој пример е земен од ([2]).

Следниве два примера се аналитични репрезентации на дистрибуции, кои се Фуријови трансформации од ушерени дистрибуции

9^{o} $T = [H(t)\log t]$,

H(t)-Хевисајдовата функција.

За Фуријовата трансформација F(T), функцијата

$$\hat{F}(T) = \begin{cases} \int_0^\infty \log t e^{itz} dt, & \mathrm{Im} z > 0 \\ 0 & , \mathrm{Im} z < 0 \end{cases}$$

претставува аналитична репрезентација. Но како

$$\int_0^\infty \log t e^{itz} dt = \int_0^\infty \log t e^{-t(-iz)} dt =$$

$$= -\frac{\gamma + \log(-iz)}{+iz}, \qquad \gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \log x dx = 0{,}5772\ldots$$

произлегува дека

$$\hat{F}(T)(z) = \begin{cases} -\dfrac{\gamma+\log(-iz)}{+iz}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ 0 \quad , & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

10°. $T = \mathrm{Pf}\,\dfrac{H(t)}{t}$,

За нејзината Фуријова трансформација $F(T)$, аналитична репрезентација ќе биде функцијата

$$\hat{F}(T)(z) = \begin{cases} -\log(-iz)-\gamma, & \operatorname{Im} z > 0 \\ 0 \quad , & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Со примена на Формулата (2.5) од 2.2. за конкретни дистрибуции се постигнува определување на некои лимеси.

Пример. Нека ја посматраме дистрибуцијата T_3 како што видовме нејзината аналитична репрезентација е

$$\hat{T}_3(z) = + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z}\,[\log(-z)-\log(1-z)]$$

Според формула (2.5) од 2.2. добиваме

$$\lim_{\epsilon\to+0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{x+i} \log(1-x-i\epsilon) - \frac{1}{x+i\epsilon} \log(-x-i\epsilon) +$$

$$+ \frac{1}{x-i\epsilon} \log(1-x+i\epsilon) - \frac{1}{x-i\epsilon} \log(-x+i\epsilon)]\phi(x)\,dx =$$

$$= -2 \lim_{\epsilon \to +0} \left[\int_{\epsilon}^{1} \frac{\hat{\phi}(x)}{x} dx + \log\epsilon . \hat{\phi}(0) \right];$$

$$\hat{\phi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx,$$

по извесно рачунање се добива

$$\lim_{\epsilon \to +0} \left[\int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-x} dt + \log\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right] =$$

$$= - < \frac{\log|1-x|}{x}, \phi(x) > - \frac{1}{2} < \log^2|x|, \phi'(x) > .$$

Други примери на аналитични репрезентации на конкретни дистрибуции се дадени во ([3], глава 7).

Глава IV

АНАЛИТИЧНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА ДИСТРИБУЦИИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

Меѓу аналитичната репрезентација на еднодимензионалните и аналитичната репрезентација на повеќедимензионалните дистрибуции има разлика. Додека при еднодимензионалните дистрибуции посматравме две области во комплексната рамнина C^1: горната отворена комплексна полурамнина и долната отворена комплексна полурамнина и две функции едната аналитична во горната полурамнина и другата аналитична во долната полурамнина дотогаш при n-димензионалните дистрибуции се потребни 2^n области во комплексниот простор C^n и исто толку функции аналитични во соодветните 2^n -области. Друга разлика е таа што сингуларитетите на аналитичните функции при n-димензионалниот случај не се содржат во носачот од разгледуваната дистрибуција.

Најнапред даваме краток приказ на резултатите од H.Bremermann за аналитичното претставување, на n-димензионалните дистрибуции.

4.1. Функции на R^n како гранични вредности на n-хармониски функции

Основна улога играат јадрото на Коши

$$(2\pi i)^{-n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j-z_j}$$

и јадрото на Пуасон

$$K(t,z) = \operatorname{sign} y \, \frac{y_1\cdots y_n}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|t_j-z_j|^2}$$

$$\operatorname{sign} y = (\operatorname{sign} y_1)\ldots(\operatorname{sign} y_n)$$

$$y=(y_1,\ldots,y_n);\ y_1\neq 0,\ldots,y_n\neq 0$$

$$z=(z_1,\ldots,z_n).$$

Лема 1. Нека $f(t_1,t_2,\dots,t_n)$ е ограничена мерлива функција на просторот R^n . Тогаш функцијата

$$f^*(z_1,\dots,z_n) = (\text{signy})\ \frac{y_1\dots y_n}{n} \int_{R^n} f(t_1,\dots,t_n)$$

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|t_j-z_j|^2}\ dt_1 dt_2\dots dt_n$$

при $y_1 \neq 0,\dots,y_n \neq 0$ претставува n-хармониска функција при што

$$\sup_{z\in C^n} |f^*(z)| \leqslant \sup_{x\in R^n} |f(x)|$$

Доказ. ([3] стр.201).

Ако е функцијата $f(t_1,\dots,t_n)$ рамномерно непрекината и ограничена тогаш ја имаме следната теорема.

Теорема 2. Нека е $f(t)$ рамномерно непрекината и ограничена функција на R^n.Тогаш функцијата $f^*(z)$може да се продолжи до рамномерно непрекината функција $F(z)$ на целиот простор C^n, така што на R^n да се совпаѓа со $f(t)$.

Доказ.([3], стр.203).

4.2. ПРОСТОРИ $(0_{\alpha_1},\dots,\alpha_n)$И $(0'_{\alpha_1},\dots,\alpha_n)$

Елементи на просторот $(0_{\alpha_1},\dots\alpha_n)$ се функции ϕ од просторот (C^∞) кои го задоволуваат условот

$$D^p\phi(t_1,\dots,t_n) = O(|t_1|^{\alpha_1}\dots|t_n|^{\alpha_n})$$

за секое $p=(p_1,\dots,p_n)$. Тоа значи за даден мултииндекс p може да се најде константа K_p таква што

$$|D^p\phi(t_1,\dots,t_n)| \leqslant K_p((1+|t_1|)^{\alpha_1}\dots(1+|t_n|)^{\alpha_n}).$$

Конвергенција се воведува како и при еднодимензионалниот случај. Имено, за дадена низа $\{\phi_\nu\}$ на функции од просторот$(0_{\alpha_1},\dots,\alpha_n)$ се вели дека конвергира во тој простор ако за даден мултииндекс $p=(p_1,\dots,p_n)$ може да се најде константа K_p, таква што

$$|D^p\phi_\nu(t_1,\dots,t_n)| \leqslant K_p((1+|t_1|)^{\alpha_1}\dots(1+|t_n|)^{\alpha_n})$$

и низата $\{D^p\phi_\nu\}$ конвергира рамномерно на секое компактно множество. Просторот од непрекинатите линеарни функционали дефинирани на просторот $(0_{\alpha_1},\dots,\alpha_n)$ го означуваме со $(0'_{\alpha_1},\dots,\alpha_n)$

Така на пример, ако е зададен простор $O_\alpha(R^n)$ при што $\alpha_1,\ldots,\alpha_n < 0$ во тој случај е јасно дека функциите од просторот (O_α) се анулираат на бесконечност т.е. за $\varphi(x) \in (O_\alpha)$ и дадено $\varepsilon > 0$ постои компактно множество К надвор од кое $|\varphi(x)| < \varepsilon$. Според тоа $O_\alpha \subset C_0(R^n)$. $C_0(R^n)$ е просторот од непрекинатите функции на R^n кои се анулираат на бесконечност. Ако дадена низа од функции $(\varphi_\nu(x))$ конвергира во просторот O_α, јасно дека таа конвергира и во просторот $C_0(R^n)$. Следователно секој непрекинат линеарен функционал дефиниран на просторот C_0 ќе биде дефиниран и на просторот (O_α).

Како секој непрекинат линеарен функционал на просторот (C_0) претставува определена комплексна регуларна Борелова мера произлегува дека сите комплексни Борелови мери се дистрибуции од просторот (O_α).

Конечно тоа значи дека секоја комплексна Борелова мера има Кошиева репрезентација (Јадрото на Коши

$$(t_1,\ldots,t_n) \to (2\pi i)^{-n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j - z_j}, \qquad \operatorname{Im} z_j \neq 0$$

очигледно припаѓа на просторот C_0).

4.3. n- ХАРМОНИСКО ПРОДОЛЖУВАЊЕ НА ФУНКЦИИ ОД $(0_o,\dots,o)$

Лема 3. Нека е $\phi\in(0_o,\dots,o)$ Тогаш при $\max\{\delta_1\dots\delta_n\}\to 0$ функцијата

$$f^*(x_1+i\delta_1,\dots,x_n+i\delta_n)$$

конвергира во просторот $(0_o,\dots,o)$ кон $f(x_1,\dots,x_n)$.

Доказот директно следи од Теорема 2 и фактот што

$$D^p f^* = (D^p f)^*.$$

4.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ДИСТРИБУЦИИ ОД ПРОСТОРОТ $(0_o',\dots,o)$

Теорема 4. Нека дистрибуцијата T припаѓа на просторот $(0_o,\dots,o)$, $\phi\in(0_o,\dots,o)$ и $T^*(z) = \langle T_t, K(t,z)\rangle$.
Тогаш функцијата $T^*(z)$ е n-хармониска за $y_1\neq 0,\dots,y_n\neq 0$ и

$$\langle T^*(x_1+i\delta_1,\dots,x_n+i\delta_n),\ \phi(x_1,\dots,x_n)\rangle =$$

$$= \langle T, \phi^*(x_1+i\delta_1,\dots,x_n+i\delta_n)\rangle,$$

$$\lim_{\substack{\max\{\delta_1,\dots,\delta_n\}\to 0\\ \delta_1\neq 0,\dots,\delta_n\neq 0}} \langle T^*(x_1+i\delta_1,\dots,x_n+i\delta_n),\phi\rangle =$$

$$= \langle T,\phi\rangle$$

Доказ. ([3] стр.206).

Очигледно, ако $T\in(E')$, тогаш $T\in(0_o',\dots,o)$ следователно горната теорема важи за дистрибуции од просторот (E').

4.5. РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА СО АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ

Го посматраме просторот $(0_{-1},\dots,_{-1})$. Јадрото на Коши

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j-z_j},$$

за $\operatorname{Im} z_j\neq 0$, $j=1,\dots,n$ е елемент од просторот $(0_{-1},\dots,_{-1})$ затоа постои функцијата

$$\hat{T}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle T_t , \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j - z_j} \right\rangle ,$$

$T \in (O'_{-1,\dots,-1})$, $T^*(z)$ може да се претстави вака

$$T^*(z) = \hat{T}(z_1,\dots,z_n) - \hat{T}(\bar{z}_1,\dots,z_n) + \dots +$$

$$+ (-1)^n \hat{T}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n) .$$

каде што знакот се определува според бројот на коњугираните променливи. Како во горното разложување на Паусоновото јадро фигурираат 2^n комплексни функции заклучуваме дека за аналитично претставување на n -димензионална дистрибуција потребни се 2^n функции и исто толку области во C^n.

Р.Кармишел во ([4],) посматра поопшти области од колку што се октантите во (R^n).

Нека B е отворена област во просторот R^n. Со T_B ја означуваме областа во n -димензионалниот комплексен простор C^n чии што точки се $z = (z_1,\dots,z_n) = x+iy$ каде $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$ а $y = (y_1,\dots,y_n) \in B$. Областа T_B се вика цилиндрична област со основа B. Ако основата B претставува конус тогаш ќе пишуваме T_Γ и областа во тој случај ќе ја викаме цилиндрична радијална. Г е конус т.е. област од R^n со следните особини: (I) $0 \notin \Gamma$ и (II) ако $y_1, y_2 \in \Gamma$ тогаш и $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \Gamma$. Да забележиме дека Г е отворено конвексно множество. Затворачот на отворен конус е затворен конус. Ако е Г - отворен конус тогаш множеството $\Gamma^* = \{x \in R^n;\ x\cdot t \geq 0, t \in \Gamma\}$ е затворено. По специјално кога Γ^* има непразна внатрешност, Γ^* претставува затворен конус и во тој случај се вели дека Г е остар конус. Конусот Γ^* се вика коњугован или дуален за конусот Г. За $n = 1$ отворени конуси се полуправите $\{x \in R^1;\ x > 0\}$ и $\{x \in R^1;\ x < 0\}$, а $\Gamma^* = \{x \in R^1, x \geq 0\}$ или $\{x \in R^1;\ x \leq 0\}$ За $n = 2$ отворени конуси се аглести области затворени меѓу две полуправи, кои излегуваат од координатниот почеток и аголот меѓу кои е помал или еднаков на π. Таков конус ќе биде остар само тогаш кога аголот е помал π. Остар конус Г се вика самокоњугован ако $\bar{\Gamma} = \Gamma^*$. (на пр. $\Gamma = \{y \in R^n;\ y_1,\dots,y_n > 0\}$ е само коњугован.

Нека T_Γ биде цилиндрична радијална област во C^n со основа конусот Г. Нека $f(z)$ е функција од комплексна променлива $z \in T_\Gamma$ и нека U е дистрибуција од некој определен простор. Ако

$f(z) \to U$ во слабата топологија на посматраниот простор од дистрибуции, кога $y = \operatorname{Im} z \to 0$ (т.е. $y_j \to 0, j=1,\dots,n$), $y \in \Gamma$ ќе велиме дека дистрибуцијата U е гранична вредност за функцијата $f(z)$. Тоа поточно значи дека $\langle f(x+iy), \varphi(x)\rangle \xrightarrow{\text{слабо}} \langle U, \varphi(x)\rangle$ за секоја функција $\varphi(x)$ од посматраниот простор на основни функции.

Во ([4], 3.) Кармишел прво зема простор O_α $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ $\alpha_j \geq 0$, $j=1,\dots,n$. Покажува дека функцијата

$$K(z-t) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i (z-t)\cdot\eta}\, d\eta \qquad \text{(Кошиево јадро)}$$

каде $z = x+iy$ е произволна но фиксирана точка од T_Γ, припаѓа на просторот O_α ([4], т. 1).

Нека сега $U \in O'_\alpha$ а z е фиксирана точка од T_Γ. Го дефинираме обопштениот Кошиев интеграл со

$$C(U;z) = \langle U_t, K(z-t)\rangle .$$

Функцијата $C(U;z)$ е аналитична во областа T_Γ ([4], т. 2). Функцијата $C(U;x+iy)$ за фиксно $y \in \Gamma$ очигледно претставува регуларна Шварцова дистрибуција. Ако $C(U;x+iy)$ се примени на функција $\varphi(x) \in D$ се добива

$$\langle C(U;z), \varphi(x)\rangle = \langle U, \langle K(z-t), \varphi(x)\rangle\rangle$$

$z \in T_\Gamma$. Понатаму, ако е $J_{\Gamma^*}(\eta)$ карактеристична функција за дуалниот конус Γ^* тогаш $\langle K(z-t), \varphi(x)\rangle \to$ $\to F^{-1}[J_{\Gamma^*}(\eta) F(\varphi)(\eta); t]$ во O_α кога $y = \operatorname{Im} z \to 0$, $y \in \Gamma$. По ова лесно се покажува дека:

$$\langle C(U;z), \varphi(x)\rangle \to \langle U, F^{-1}[J_{\Gamma^*} F(\varphi)]\rangle, \quad ([4], \text{т.} 3)$$

кога $y = \operatorname{Im} z \to 0$, $y \in \Gamma$.

И конечно ако $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ се отворени конуси такви што

$$E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j^* \quad и \quad \Gamma_j^* \cap \Gamma_k^*, \; j \neq k, \; j=1,\dots,m; \; k=1,\dots,m,$$

се множества со Лебегова мера нула покажува дека

$$\langle U, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \Gamma}} \left\langle \left\langle U, \int_{\Gamma_j^*} e^{2\pi i (z-t)\cdot\eta} d\eta \right\rangle, \varphi(x) \right\rangle$$

$\varphi(x) \in D$. ([4], т. 4).

Тоа е Кошиевата репрезентација за дистрибуцијата U по однос на дадените конусни области. Ако $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ се 2^n - октанти од R^n тогаш горната репрезентација е точно репрезентацијата на Бремерман.

Сега накратко ќе изнесеме како Кармишел добива репрезентација на $U \in O_\alpha$ како гранична вредност на обопштен Пуасонов интеграл. Пуасоновото јадро $Q(z;t)$ што одговара на областа T_Γ е функцијата

$$Q(z;t) = \frac{|K(z-t)|^2}{K(2iy)}, \qquad z \in T_\Gamma.$$

Пуасоновото јадро $Q(z;t)$ како функција од променливата t припаѓа на просторот (O_α) ([4], т.5) Инаку јадрото на Пуасон ги има следниве три битни особини кои се од голем интерес при оперирањето со него. Тоа се

$$Q(z;t) \geq 0; \quad \int_{R^n} \frac{|K(x+iy)|^2}{K(2iy)} dx = 1; \quad y \in \Gamma \qquad и$$

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \Gamma}} \int_{\|x\| > \eta} \frac{|K(x+iy)|^2}{K(2iy)} dx = 0, \quad ([18], \quad)$$

Нека сега $U \in O_\alpha$ и $\varphi \in D$ тогаш

$$\langle P(U;z), \varphi(x) \rangle = \langle U, \langle Q(z;t), \varphi(x) \rangle \rangle$$

$z \in T_\Gamma$. $\quad P(U;z) = \langle U_t; Q(z;t) \rangle$.

$P(U;z)$ се вика Пуасонов интеграл. Понатаму покажува дека

$$\langle Q(z;t), \varphi(x)\rangle \to \varphi(t) \quad \text{во} \quad O_x$$

кога $y = \operatorname{Im} z \to 0, y \in \Gamma$. ([4], т.5). На крај покажува дека

$$\langle P(U;z), \varphi(x)\rangle \to \langle U, \varphi\rangle$$

кога $y = \operatorname{Im} z \to 0, \ y \in \Gamma$ ([4], т. 6).

Ако конусите во Кошијевата репрезентација се 2^n-те октанти од просторот R^n тогаш интегралот на Пуасон може да се изрази преку Кошијевите интеграли по сите октанти. Така што во тој случај претставувањето преку Пуасоновиот интграл не претставува суштински, ништо ново во однос на претставбувањето преку Кошиевиот интеграл. Но во општ случај Пуасоновиот интеграл не може да се напише како конечна сума од Кошијеви интеграли.

Ние овде даваме еден доказ што е различен од наведените за аналитичната репрезентација на n-димензионални дистрибуции. Овој доказ ни овозможува уште да знаеме кон кои дистрибуции конвергираат регуларните дистрибуции добиени од 2^n - комплексни функции, кои ја даваат аналитичната репрезентација на дадената дистрибуција.

4.6. ДОКАЗ НА АНАЛИТИЧНАТА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА

Разгледуваме простор

$$(O_\alpha),\quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\quad \alpha_1=\dots=\alpha_n=-1.$$

При дадена дистрибуција $T\in(O_\alpha')$ ја посматраме комплексната функција

$$\hat{T}(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}<T_t,\frac{1}{(t_1-z_1)\dots(t_n-z_n)}> \tag{4.1}$$

$$t=(t_1,\dots,t_n),\; z=(z_1,\dots,z_n),\; \operatorname{Im} z_i\neq 0 \quad i=1,\dots,n.$$

Аналогно на еднодимензионалниот случај се покажува дека функцијата $\hat{T}(z)$ е аналитична по секоја променлива z_i поодделно. Според теоремата на Хартогс произлегува дека комплексната функција (4.1) е аналитична функција од n-променливи во областа $\operatorname{Im} z_i\neq 0$, $i=1,\dots,n$. За поедноставно ќе посматраме дводимензионални дистрибуции.

Нека $T\in(O_\alpha')$, $\alpha=(-1,-1)$

$$\hat{T}(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}<T_t,\frac{1}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}>$$

$$t=(t_1,t_2),\; \operatorname{Im} z_1\neq 0,\; \operatorname{Im} z_2\neq 0.$$

Во четирите октанти од просторот C^2 ги посматраме следните функции:

$$\hat{T}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2);\ \hat{T}(x-i\epsilon_1,y+i\epsilon_2);$$
$$\hat{T}(x+i\epsilon_1,y-i\epsilon_2);\ \hat{T}(x-i\epsilon_1,y-i\epsilon_2) \tag{4.2}$$

$\epsilon_1,\epsilon_2 > 0$, i- имагинарна единица. Четрите функции под (4.2)се непрекинати и определуваат регуларни дистрибуции од просторот (D'). Да ја земеме првата дистрибуција $\hat{T}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2)$. Ако ја примениме на функција $\phi\in(D)$, добиваме

$$<\hat{T}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2),\ \phi(x,y)> = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2)\phi(x,y)\,dxdy$$

(го пишуваме интегралот како граница на Риманови суми)

$$= \lim_{N,K} \sum_{j,k}^{N,K} \hat{T}(x_j+i\epsilon_1,y_k+i\epsilon_2)\phi(x_j,y_k)\Delta x_j\Delta y_k =$$

$$= \lim_{N,K} \sum_{j,k}^{N,K} \frac{1}{(2\pi i)^2} < T_t,\ \frac{\phi(x_j,y_k)\Delta x_j\Delta y_k}{(t_1-x_j-i\epsilon_1)(t_2-y_k-i\epsilon_2)} >=$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{N,K} <T_t,\ \sum_{j,k}^{N,K} \frac{\phi(x_j,y_k)\Delta x_j\Delta y_k}{(t_1-x_j-i\epsilon_1)(t_2-y_k-i\epsilon_2)} >$$

(заради линеарноста на T).

Сега ги посматраме функциите

$$\psi_{N,K}(t_1,t_2) = \sum_{j,k}^{N,K} \frac{\phi(x_j,y_k)\Delta x_j \Delta y_k}{(t_1-x_j-i\epsilon_1)(t_2-y_k-i\epsilon_2)} \tag{4.3}$$

Кога N,K се менуваат низ множеството од природните броеви се добива преброиво множество од функции за кои ќе покажеме дека се униформно ограничени и рамностепено непрекинати на секое компактно множество од R^2.

$$|\psi_{N,K}(t_1,t_2)| = \left| \sum_{j,k}^{N,K} \frac{\phi(x_j,y_k)\Delta x_j \Delta y_k}{(t_1-x_j-i\epsilon_1)(t_2-y_k-i\epsilon_2)} \right|$$

Бидејќи е функцијата $\phi(x,y)$ со компактен носач постои квадрат

$$[-L,L]\times[-L,L],\ L>0$$

во кој се содржи носачот од функцијата $\phi(x,y)$. Затоа сумирањето го правиме само по оние x_j, y_k што се наоѓаат во наведениот квадрат. Според тоа имаме

$$|\psi_{N,K}(t_1,t_2)| \leqslant \sum_{j,k}^{N,K} \frac{|\phi(x_j,y_k)|\Delta x_j \Delta y_k}{|t_1-x_j-i\epsilon_1|\,|t_2-y_k-i\epsilon_2|}$$

$$\leqslant M \sum_{j,k}^{N,K} \frac{\Delta x_j \Delta y_k}{\sqrt{(t_1-x_j)^2+\epsilon_1^2}\ \sqrt{(t_2-y_k)^2+\epsilon_2^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M 4L^2}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2},$$

$$M = \sup_{(x_j,y_k)} |\phi(x_j,y_k)|.$$

Со тоа ја покажавме рамномерната ограниченост.

$$|\psi_{N,K}(t_1',t_2') - \psi_{N,K}(t_1,t_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j,k}^{N,K} |\phi(x_j,y_k)|\Delta x_j \Delta y_k \left| \frac{1}{(t_1'-x_j-i\epsilon_1)(t_2'-y_k-i\epsilon_2)} - \right.$$

$$- \frac{1}{(t_1-x_j-i\epsilon_1)(t_2-y_k-i\epsilon_2)}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{j,k} \Delta x_j \Delta y_k \Big| \frac{t_2't_1' - t_2t_1 + i\epsilon_1(t_2'-t_2) + y_k(t_1' - t_1) + i\epsilon_2(t_1'-t_1) x_j(t_2'-}{(t_1'-x_j-i\epsilon_1)(t_2'-y_k-i\epsilon_2)(t_1-x_j-i\epsilon_1)(t_2-y_k-i\epsilon_2)}$$

$$\leqslant \frac{4L^2M|t_2't_1'-t_2t_1|}{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2} + \frac{4L^2M\epsilon_1|t_2'-t_2|}{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2} +$$

$$\leqslant \frac{4L^2M|\epsilon_2|t_1'-t_1|}{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2} + \frac{|x_j||t_2'-t_2|}{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2} + \frac{|y_k||t_1'-t_1|}{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4L^2M}{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2} \Big[|t_2't_1' - t_2t_1| +$$

$$+\epsilon_1 |t_2' - t_2| + \epsilon_2 |t_1' - t_1| +$$

$$+ L|t_2' - t_2| + L|t_1' - t_1| \Big]$$

од каде следи рамностепената непрекинатост на функциите $\psi_{N,K}$ на дадено компактно множество.

За фиксни t_1, t_2 Римановите суми $\psi_{N,K}(t_1,t_2)$ конвергираат кон интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x,y)dxdy}{(t_1-x-i\epsilon_1)(t_2-y-i\epsilon_2)} \quad \text{koga } N,K \to \infty$$

Според теоремата на Арцела-Асколи конвергенцијата е рамномерна на дадено компактно множество. На потполно ист начин се убедуваме во конвергенцијата на изводите $D^p\psi_{N,K}$. Па како функциите под (4.3) се од просторот $(0_{-1},\dots,_{-1})$ следи дека конвергенцијата е во смисол на просторот $(0_{-1,-1},\dots,_{-1})$ кон функцијата

$$\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x,y)\,dx\,dy}{(t_1-x-i\epsilon_1)(t_2-y-i\epsilon_2)} \tag{4.4}$$

Очигледно функциите $\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ за различни $\epsilon_1,\epsilon_2 > 0$ се елементи на просторот $(0_{-1},\dots,{-1})$. Нека ги посматраме функциите, $\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}$. Со смена на променливите $t_1-x=u$, $t_2-y=v$:

$$\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(t_1-u,t_2-v)\,du\,dv}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}$$

Функцијата $\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t_1,t_2)$ е конволуција на регуларната дистрибуција

$$\left(\frac{1}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}\right)$$

и функцијата $\phi(x,y)$. Како таква функцијата припаѓа на просторот(E). Сега ќе покажеме дека функциите $\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ конвергираат во просторот $(0_{-1},\dots,{-1})$ кога $\epsilon_1,\epsilon_2 \to 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(t_1-u,t_2-v)\,du\,dv}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t_1-u,t_2-v)-\phi(t_1,t_2)\,du\,dv}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}+$$

$|u|>1\,|v|>1$

$$+\ \phi(t_1,t_2)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{du\,dv}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}$$

Имајќи ја во предвид теоремата за средна вредност за функции од повеќе променливи произлегува дека првиот интеграл од последните ~~два~~ 3 конвергира кога $\epsilon_1,\epsilon_2 \to 0$. Бидејќи

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{du\,dv}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}=\int_{-1}^{1}\frac{du}{u-i\epsilon_1}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{dv}{v-i\epsilon_2}$$

па заради конвергенцијата на едноструките интеграли следи дека конвергира двојниот интеграл кога $\epsilon_1,\epsilon_2 \to 0$.

Освен тоа

$$\lim_{\epsilon_1\to+0}\ \lim_{\epsilon_2\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(t_1-u,t_2-v)\,du\,dv}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}=$$

$$=\lim_{\epsilon_1\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u-i\epsilon_1}\,[i\pi\delta_v\phi(t_1-u,t_2-v)+$$

$$+\mathrm{ch}v^{-1}\,\phi(t_1-u,t_2-v)]=$$

$$=(i\pi)^2\delta_u\otimes\delta_v\phi(t_1-u,t_2-v)+i\pi\,\mathrm{ch}u^{-1}\otimes\delta_v\,\phi(t_1-u,t_2-v)$$

$$+i\pi\delta_u\otimes\,\mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u,\ t_2-v)+$$

$$+\,\mathrm{ch}u^{-1}\otimes\,\mathrm{ch}v^{-1}\,\phi(t_1-u,t_2-v)$$

Според тоа покажавме дека функциите $\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t_1,t_2)$ кога $\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$ конвергираат кон функцијата

$$\psi(t_1,t_2)=(i\pi)^2\delta_u\otimes\delta_v\phi(t_1-u,t_2-v)+$$

$$+i\pi\,\mathrm{ch}u^{-1}\otimes\delta_v\phi(t_1-u,\ t_2-v)+i\pi\delta_u\otimes\,\mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u,t_2-v)$$

$$+\mathrm{ch}u^{-1}\otimes\mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u,t_2-v) \qquad (4.5)$$

"$\otimes$" означува тензорски производ на дистрибуции, δ-Дираковата еднодимензионална дистрибуција и $\mathrm{ch}u^{-1}$ - Кошијева главна вредност.

Со докажаното ние во сушност покажавме дека регуларните дистрибуции

$$\frac{1}{(u-i\epsilon_1)(v-i\epsilon_2)}\ .$$

слабо конвергираат кон дистрибуцијата

$$(i\pi)^2\delta_u \otimes \delta_v + i\pi \mathrm{ch}u^{-1} \otimes \delta_v + i\pi\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1} +$$
$$+\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1}.$$

Но како слабата конвергенција на дистрибуции повлекува силна конвергенција произлегува како и при еднодимензионалниот случај (глава 2) дека функциите $\psi_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ конвергираат во просторот $(0_{-1,\ldots,-1})$ кон функцијата (4.5). Така конечно покажавме дека регуларната дистрибуција $\hat{T}(x+i\epsilon_1,\ y+i\epsilon_2)$ ја задоволува следната релација

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2)\phi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$=\langle T, \frac{1}{4}\,\delta_u \otimes \delta_v\phi(t_1-u,t_2-v)\rangle +$$

$$+\langle T, \frac{1}{4\pi i}\,\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \delta_v\phi(t_1-u,t_2-v)\rangle +$$

$$+\ \langle T, \frac{1}{4\pi i}\,\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u,t_2-v)\rangle +$$

$$+\langle T, \frac{1}{(2\pi i)^2}\,\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u,t_2-v)\rangle \qquad (4.6)$$

Потполно исто се покажува

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(x-i\epsilon_1,y-i\epsilon_2)\phi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \langle T, \frac{1}{4}\,\delta_u \otimes \delta_v\phi(t_1-u,t_2-v)\rangle +$$

$$+\ \langle T, -\frac{1}{4\pi i}\,\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \delta_v\phi(t_1-u,\ t_2-v)\rangle +$$

$$+\ \langle T, \frac{-1}{4\pi i}\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u,\ t_2-v)\rangle +$$

$$+\langle T, \frac{1}{(2\pi i)^2}\,\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u,t_2-v)\rangle \qquad (4.7)$$

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2 \to 0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} -\hat{T}(x-i\epsilon_1, y+i\epsilon_2)\phi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \langle T, +\frac{1}{4}\,\delta_u \otimes \delta_v \phi(t_1-u, t_2-v)\rangle +$$

$$+ \langle T, +\frac{1}{4\pi i}\,\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u, t_2-v)\rangle +$$

$$+ \langle T, \frac{1}{4\pi i}\,\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \delta_v\phi(t_1-u, t_2-v)\rangle +$$

$$+ \langle T, -\frac{1}{(2\pi i)^2}\,\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u, t_2-v)\rangle \tag{4.8}$$

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2 \to +0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} -T(x+i\epsilon_1, y-i\epsilon_2)\phi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \langle T, +\frac{1}{4}\,\delta_u \otimes \delta_v \phi(t_1-u, t_2-v)\rangle +$$

$$+ \langle T, -\frac{1}{4\pi i}\,\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\phi(t_1-u, t_2-v)\rangle$$

$$+ \langle T, +\frac{1}{4\pi i}\,\delta_v \otimes \mathrm{ch}u^{-1}\phi(t_1-u, t_2-v)\rangle +$$

$$+ \langle T, -\frac{1}{(2\pi i)^2}\,\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1}\,\phi(t_1-u, t_2-v)\rangle \tag{4.9}$$

Со собирање на (4.6), (4.7), (4.8) и (4.9) добиваме

$$\lim_{\epsilon_1\ \epsilon_2 \to} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x+i\epsilon_1, y+i\epsilon_2) - \hat{T}(x-i\epsilon_1, y+i\epsilon_2) -$$

$$-\hat{T}(x+i\epsilon_1, y-i\epsilon_2) + \hat{T}(x-i\epsilon_1, y-i\epsilon_2)]\phi(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \langle T, \phi\rangle .$$

Според тоа функциите:

$$f_1(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}<T,\ \frac{1}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}>$$

аналитична за $\mathrm{Im}z_1>0$, $\mathrm{Im}z_2>0$

$$f_2(z_1,z_2)=-\frac{1}{(2\pi i)^2}<T,\ \frac{1}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}>$$

аналитична за $\mathrm{Im}z_1<0$, $\mathrm{Im}z_2>0$

$$f_3(z_1,z_2)=-\frac{1}{(2\pi i)^2}<T,\ \frac{1}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}>$$

аналитична за $\mathrm{Im}z_1>0$, $\mathrm{Im}z_2<0$

$$f_4(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}<T,\ \frac{1}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)}>$$

аналитична за $\mathrm{Im}z_1<0$, $\mathrm{Im}z_2<0$ претставуваат аналитична репрезентација за дистрибуцијата T.

Нека ја посматраме регуларната дистрибуција

$$T_{\epsilon_1,\epsilon_2}=\hat{T}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2),\quad \epsilon_1,\epsilon_2>0$$

$$<T,\delta_u\otimes\delta_v\phi(t_1-u,t_2-v)>=$$

$$=<T,\ (\delta_u\otimes\delta_v)*\phi(t_1,t_2)>=$$

$$=T*[(\delta_u\otimes\delta_v)*\phi]^{\vee}(0,0)=$$

$$=T*[(\delta_u\otimes\delta_v)^{\vee}*\phi^{\vee}](0,0)=$$

$$=[T*(\delta_u\otimes\delta_v)^{\vee}]*\phi^{\vee}(0,0)=$$

$$=<T*(\delta_u\otimes\delta_v)^{\vee},\ \phi(t_1,t_2)>$$

Имајќи во предвид (4.6) се добива

$$\hat{T}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2) \to \frac{1}{4} T*(\delta_u \otimes \delta_v)^{\vee} + \frac{1}{4\pi i} T*(\mathrm{ch}\,u^{-1} \otimes \delta_v)^{\vee} + \frac{1}{4\pi i} T*(\delta_u \otimes \mathrm{ch}\,v^{-1})^{\vee} + \frac{1}{(2\pi i)^2} T*(\mathrm{ch}\,u^{-1} \otimes \mathrm{ch}\,v^{-1})^{\vee}, \tag{4.10}$$

кога $\epsilon_1,\epsilon_2 \to 0$ ("*" означува конволуција, $\phi^{\vee}(x)=\phi(-x)$, $\check{T}(x)=T(-x)$).

Аналогни формули се добиваат и за дистрибуциите

$\hat{T}(x-i\epsilon_1,y+i\epsilon_2)$, $\hat{T}(x-i\epsilon_1,y-i\epsilon_2)$, $\hat{T}(x+i\epsilon_1,y-i\epsilon_2)$.

$$\hat{T}(x-i\epsilon_1,y+i\epsilon_2) \to -\frac{1}{4} T*(\delta_u \otimes \delta_v)^{\vee} - \frac{1}{4\pi i} T*(\delta_u \otimes \mathrm{ch}\,v^{-1})^{\vee} + \frac{1}{4\pi i} T*(\delta_v \otimes \mathrm{ch}\,u^{-1})^{\vee} + \frac{1}{(2\pi i)^2} T*(\mathrm{ch}\,u^{-1} \otimes \mathrm{ch}\,v^{-1})^{\vee} \tag{4.11}$$

$$\hat{T}(x+i\epsilon_1,y-i\epsilon_2) \to -\frac{1}{4} T*(\delta_u \otimes \delta_v)^{\vee} + \frac{1}{4\pi i} T*(\delta_u \otimes \mathrm{ch}\,v^{-1})^{\vee} - \frac{1}{4\pi i} T*(\delta_v \otimes \mathrm{ch}\,u^{-1})^{\vee} + \frac{1}{(2\pi i)^2} T*(\mathrm{ch}\,u^{-1} \otimes \mathrm{ch}\,v^{-1})^{\vee} \tag{4.12}$$

$$\hat{T}(x-i\epsilon_1,y-i\epsilon_2) \to \frac{1}{4} T*(\delta_u \otimes \delta_v)^{\vee} - \frac{1}{4\pi i} T*(\mathrm{ch}\,u^{-1} \otimes \delta_v)^{\vee} - \frac{1}{4\pi i} T*(\mathrm{ch}\,v^{-1} \otimes \delta_u)^{\vee} + \frac{1}{(2\pi i)^2} T*(\mathrm{ch}\,u^{-1} \otimes \mathrm{ch}\,v^{-1})^{\vee} \tag{4.13}$$

Пример. Нека T е Дираковата дводимензионална дистрибуција δ.

$$\hat{\delta}(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left\langle \delta, \frac{1}{(t_1-z_1)(t_2-z_2)} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{1}{z_1 \cdot z_2}$$

Сингуларните точки за функцијата $\hat{\delta}(z_1,z_2)$ се наоѓаат во унијата на дводимензионалните области:

$$\{(z_1,z_2),\ z_1=0\},\quad \{(z_1,z_2),\ z_2=0\}.$$

Од друга страна носачот на дистрибуцијата δ се состои само од една точка (0,0). Според тоа множеството од сингуларните точки не се совпаѓа со носачот како што е при еднодимензионалниот случај. Но тој факт при повеќе димензионалните репрезентации не е врзан со изборот на определената репрезентација. Аналитична функција од n-комплексни променливи $n>1$ не може да има сингуларни точки. Воопшто е точно следното тврдење: ако е функцијата $f(z)$ аналитична надвор од ограниченото множество A и $n>1$ тогаш $f(z)$ може аналитички да се продолжи на множеството A.

Следователно, ако дистрибуцијата T има компактен носач, невозможно е, само на тој носач да се содржат сингуларните точки на функциите кои се аналитички продолжувања една на друга во 2^n-октанти од просторот C^n и кои функции даваат аналитичка репрезентација за дистрибуцијата T.

Ако ја примениме формулата (4.10) на Дираковата дводимензионална дистрибуција δ добиваме:

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\hat{\delta}(x+i\epsilon_1,y+i\epsilon_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\frac{1}{(x+i\epsilon_1)(y+i\epsilon_2)}$$

(лимесот се зема во смисол на дистрибуции)

$$=\frac{1}{4}\delta*(\delta_u\otimes\delta_v)^{\check{}}+\frac{1}{4\pi i}\delta*(\delta_u\otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\delta*(\delta_v\otimes \mathrm{ch}u^{-1})+\frac{1}{(2\pi i)^2}\delta*(\mathrm{ch}u^{-1}\otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}}=$$

$$=\frac{1}{4}(\delta_u\otimes\delta_v)^{\check{}}+\frac{1}{4\pi i}(\delta_u\otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi i}(\delta_v\otimes \mathrm{ch}u^{-1})^{\check{}}+\frac{1}{(2\pi i)^2}(\mathrm{ch}u^{-1}\otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}} \qquad (...14)$$

(да се потсетиме дека $T*\delta=\delta*T=T$)

Применувајќи ги формулите (11), (12) и (13) се добива

$$\hat{\delta}(x-i\epsilon_1,y+i\epsilon_2) \to -\frac{1}{4}(\delta_u \otimes \delta_v)^{\check{}} -$$

$$-\frac{1}{4\pi i}(\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}} + \frac{1}{4\pi i}(\delta_v \otimes \mathrm{ch}u^{-1})^{\check{}} +$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}(\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}} \qquad (4.15)$$

$$\hat{\delta}(x+i\epsilon_1,y-i\epsilon_2) \to -\frac{1}{4}(\delta_u \otimes \delta_v)^{\check{}} +$$

$$+\frac{1}{4\pi i}(\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}} - \frac{1}{4\pi i}(\delta_v \otimes \mathrm{ch}u^{-1}) +$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}(\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}} \qquad (4.16)$$

$$\hat{\delta}(x-i\epsilon_1,y-i\epsilon_2) \to \frac{1}{4}(\delta_u \otimes \delta_v)^{\check{}} - \frac{1}{4\pi i}(\delta_u \otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}}$$

$$-\frac{1}{4\pi i}(\delta_u \otimes \mathrm{ch}u^{-1})^{\check{}} + \frac{1}{(2\pi i)^2}(\mathrm{ch}u^{-1} \otimes \mathrm{ch}v^{-1})^{\check{}} \qquad (4.17)$$

Оваа глава ја завршаваме со уште еден вид на аналитичната репрезентација на дистрибуции што се Фуријови трансформации.

4.7. АНАЛИТИЧНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА НА ФУРИЈОВИ ТРАНСФОРМАЦИИ ОД ДИСТРИБУЦИИ

На крајот од втората глава забележавме дека за дадена умерена дистрибуција T, постоиспорорастечка функција f таква што $T=[f]^{(m)}$ при тоа функцијата

$$\hat{F}(T,z) = (-iz)^m \ \hat{F}(t,z)$$

$$\hat{F}(f,z) = \begin{cases} \int_0^\infty f(t)e^{itz}dt, & \mathrm{Im}z>0 \\ -\int_{-\infty}^0 f(t)e^{itz}dt, & \mathrm{Im}z<0 \end{cases}$$

претставува аналитична репрезентација за Фуријовата трансформација F(T) од дистрибуцијата T, т.е.

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{F}(T,x+i\epsilon)-\hat{F}(T,x-i\epsilon)]\phi(x)\,dx =$$

$$=\langle F(T),\phi\rangle$$

за сите $\phi \in (D)$.

Овој еднодимензионален случај може да се пренесе на соодветен начин, и на дистрибуции од повеќе променливи.

За функцијата $f(t_1,\ldots,t_n)$ велиме дека е спорорастечка, ако е непрекината и го задоволува условот

$$f(t) = O(|t_1|^{\alpha_1}\ldots|t_n|^{\alpha_n})$$

за некои реални $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Трансформацијата на Карлеман-Фурје за f(t) се определува на следниот начин

$$\hat{F}(f,z) = \begin{cases} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} f(t)e^{it.z}dt \\ Imz_1>0,\ldots,Imz_m>0 \\ -\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} f(t)e^{it.z}dt \\ Imz_1<0,\ Imz_2>0,\ldots,Imz_n>0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\ldots\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{it.z}\ dt \\ Imz_1<0,\ldots,Imz_n<0 \end{cases}$$

$z=(z_1,\ldots,z_n)$, $t=(t_1,\ldots,t_n)$,

$t.z=t_1z_1+\ldots+t_nz_n$.

Според тоа трансформацијата на Карлеман-Фурје за функции од n-независно променливи зададена е со 2^n функции определени и аналитични соответно во 2^n области од просторот C^n. Јасно е дека секоја спорорастечка функција $f(t_1,\dots,t_n)$ определува умерена регулирана дистрибуција. Нејзината Карлеман-Фурје трансформација $\hat{F}(t,z)$ претставува аналитична репрезентација за дистрибуцијата $F(t)$ (3 , стр.217, 14.9).

Од друга страна секоја умерена дистрибуција T е извод на некоја спорорастечка функција, т.е. ако е дадена дистрибуција $T \in (S')$ постои спорорастечка функција f , таква што

$$T = \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n}}{\partial t_1^{p_1}\dots\partial t_n^{p_n}} f$$

Во тој случај комплексната функција

$$(-iz_1)^{p_1}\dots(-iz_n)^{p_n}\,\hat{F}(t,z)$$

е аналитична репрезентација за дистрибуцијата $F(T)$.

Во следното ќе разгледуваме репрезентација на дистрибуции кои се Фуриеови трансформации на умерени дистрибуции. Поточно ќе стане збор за умерени дистрибуции со носачи во конусни области од Евклидовиот простор.

Теорема. Нека $T \in (S')$ носачот на T се содржи во даден остар конус Γ, $\alpha(t)$ е функција од класата (C^∞) со носач во Г, $0 \le \alpha(t) \le 1$, $\alpha(t) \equiv 1$ на носачот од Т. Тогаш $f(z) = \langle T_t, \alpha(t)\, e^{i t\cdot z}\rangle$ е аналитична во областа T_{Γ^*}. Таа функција како гранична вредност ја има Фуриеовата трансформација $F(T)$ на дистрибуцијата T во следниот смисол:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\Gamma^*}} \int_{R^n} \langle T_t, \alpha(t)\, e^{i t\cdot(x+iy)}\rangle\, \varphi(x)\, dx = \langle F(T), \varphi\rangle$$

За било која $\varphi(x) \in (S)$.

Доказ. Точни се следните релации $\langle F(T), \varphi\rangle = \langle T, F(\varphi)\rangle = \langle T, \alpha(t)\, F(\varphi)\rangle$. Функцијата $\alpha(t)\, e^{-t\cdot y}$ конвергира во просторот (S) кон $\alpha(t)\, F(\varphi)$. Тука е во суштност битно $\underset{y\in\Gamma^*}{t\cdot y > 0}$ зошто во тој случај $t\cdot y>0$ за оние t за кои што $\varphi(t)\neq 0$. Следователно

$$\langle F(T),\varphi\rangle = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\Gamma^*}} \langle T_t, \alpha(t)\, e^{-t\cdot y} F(\varphi)\rangle .$$

Понатаму

$$\langle T_t,\alpha(t)\, e^{-t\cdot y} F(\varphi)\rangle = \langle T_t, \alpha(t)\int_{R^n}\varphi(x)\, e^{it\cdot(x+iy)}dx\rangle$$

Како што работевме во втората глава го апроксимираме

$$\int_{R^n}\varphi(x)\, e^{it\cdot(x+iy)}\, dx$$

Со Риманови суми. Тие суми, исто така, конвергираат во просторот (S) и затоа можеме да го промениме редот на интегрирањето и на дистрибуцијата T и да прејдеме на лимес. Го добиваме следното

$$\langle T_t,\alpha(t)\, e^{-t\cdot y} F(\varphi)\rangle = \int_{R^n}\langle T_t,\alpha(t)\, e^{it\cdot z}\rangle\varphi(x)\,dx .$$

Уште треба да покажеме дека функцијата $f(z)=\langle T_t,\alpha(t)\, e^{it\cdot z}\rangle$ е аналитична во T_{Γ^*}. Но тоа лесно се покажува

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \lim_{h_j\to 0}\langle T_t,\ \alpha(t)\, e^{itz}\,\frac{e^{it_jh_j}-1}{h_j}\rangle$$

ако $h_j\to 0$ $\alpha(t)\, e^{it\cdot z}\,\dfrac{e^{it_jh_j}-1}{h_j}$

конвергираат во просторот (S) кон $\alpha(t)\, it_j\, e^{it\cdot z}$. Од тука заклучуваме дека постојат парцијалните изводи на функцијата $f(z)$ па според теоремата на Хартогс следи дека функцијата $f(z)$ е аналитична во областа T_{Γ^*}. Сега ќе покажеме дека на бесконечност $f(z)$ се однесува како некоја степен на $|z|$. Навистина,

$$|f(z)| = |\langle T_t, \alpha(t)\, e^{it\cdot z}\rangle| \leq a \sup_t (1+\|t\|)^{s+1} |D^p(\alpha(t)\, e^{it\cdot z})|$$

$$\leq a \sup_t (1+\|t\|)^{s+1} \Big|\sum_{\lambda\leq p} i^\lambda z^\lambda e^{it\cdot z} D^{p-\lambda}\alpha(t)\Big| \leq$$

$$\leq a \sup_t \sum_{\lambda\leq p} |z|^\lambda e^{-t\cdot y} D^{p-\lambda}\alpha(t)\,(1+\|t\|)^{s+1} \leq aC \sum_{\lambda\leq p} |z^\lambda| ,$$

каде C е константа, а $z^\lambda = z_1^{\lambda_1}\cdots z_n^{\lambda_n}$, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$,

$$|z|^\lambda = |z_1|^{\lambda_1}\cdots|z_n|^{\lambda_n} \leq |z|^{\lambda_1}\cdots|z|^{\lambda_n} =$$

$= |z|^{|\lambda|}$ затоа понатаму $|f(z)| \leq C \sum_{\lambda\leq p} |z|^{|\lambda|}$.

Од посебен интрес, нарочно, во квантната механика се следните конусни области:

$$\Gamma^+ = \{(x_0,\ldots,x_n)\in R^{n+1},\ x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 > 0,\ x_0 > 0\}$$

се вика светлосен конус на идното и

$$\Gamma^- = \{(x_0,\ldots,x_n)\in R^{n+1},\ x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 > 0,\ x_0 < 0\}$$

светлосен конус на минатото. Со светлосните конуси сврзани се следните области во комплексниот простор C^{n+1} Цилиндер на идното T_{Γ^+} и цилиндер на минатото T_{Γ^-} Претходната теорема во ([3],15.2) е докажана за овој вид конусни области. Ние истата теорема ја поставивме за поопшти конусни области и направивме една оценка на функцијата $f(z) = \langle T_t, \alpha(t)\, e^{it\cdot z}\rangle$.
Областа $\Gamma^+\cup\Gamma^-$ се вика светлосен конус. Од претходното заклучуваме дека Фуријеовата трансформација на умерена дистрибуција со носач во конусот Γ^+ е гранична вредност на аналитична функција во T_{Γ^+}, а додека Фуријеовата трансформација на дистрибуција со носач во Γ^- е гранична вредност на аналитична фунција во областа T_{Γ^-}. На тој начин, Фуријеовата трансформација на дистрибуција со носач во

светлосниот конус има за репрезентација пар аналитични функции. Такви аналитични репрезентации се викаат функции на Вајтман.

Ако $F(t)$ е спорорастечка функција со носач во светлосниот конус, тогаш

$$\int_{\Gamma^+} F(t)\, e^{i t\cdot z}\, dt\ , \quad -\int_{\Gamma^-} F(t)\, e^{i t\cdot z}\, dt$$

претставуваат пар на функциите на Вајтман за Фуриеовата трансформација на функцијата $F(t)$.

Како што е познато дека умерена дистрибуција претставува извод од конечен ред на некоја спорорастечка функција $F(t)$. Парот функции на Вајтман се добива со множење на

$$\int_{\Gamma^+} F(t)\, e^{i t\cdot z}\, dt \quad и \quad -\int_{\Gamma^-} F(t)\, e^{i t\cdot z}\, dt$$

со $(-iz)^p = (-iz_0)^{p_1} \cdots (-iz_n)^{p_n}$ каде што $p = (p_0, \ldots, p_n)$

$$T = D^p F(t)$$

На крај ќе спомeнеме уште една репрезентација на Фуриеови трансформации од умерени дистрибуции со носачи во светлосен конус. Тоа е репрезнтацијата на Владимиров. ([3], 15.4).

Нека T е умерена дистрибуција, тогаш

$$\Box_z^s \langle T_t, \alpha(t)\, e^{i t\cdot z} \rangle = \langle F(T)_\xi, \Box_\xi^s K(\xi - z) \rangle ,$$

каде $\xi \in R^{n+1}$, $z \in T_{\Gamma^+}$, α

$$\Box_z = \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\ ; \quad \Box_z^s$$

Значи дадениот оператор $\Box_z$ применет s-пати.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beltramie E., Wohlers M., Distributions and boundary values of analytic functions, Academic Press, New York and London, 1966.

[2] Bremermann H. J., Durand L. On analytic continuation, multiplication and Fourier transformation of Schwartz distributions, J. Math. Phys., 2 (1961) 240-258.

[3] Бремерман Г. (Эчетечитанн И.) Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, издательство "Мир" Москва 1968

[4] Carmichael R.D., Representations of distributions in D' as boundary values of functions in tube domains, Glasnik Mat., ser.III 7 (27) (1972) 213-228.

[5] Carmichael R.D., Representations of distributions in D' as boundary values of functions in tube domains II, Glasnik Mat., ser. III 8 (28) (1973), 247-258.

[6] Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных, Издательство иностранной литературы, Москва 1963

[7] Cristescu R., Marinescu G., Aplications of the theory of distributions, John Wiley & Sons, London, 1973.

[8] Владимиров В.С (и други) Сборник задач по уравнениям математической физики, издательство "Наука", Москва 1974

[9] Jantscher L., Distributionen, Walter de Gruyter, Berlin,1971

[10] Lighthill M., An Introduction to Fourier analysis, and generalized functions, Cambridge university Press, London, 1960

[11] Гельфанд И., Шилов Г. Обобщенные функции вып.1 и вып.2, Физматгиз, М., 1958.

[12] Речковски П., Une remarque sur une representation analytique des distributions, ДМФ на СРМ, XXVI, 1976.

[13] Tillmann H.G. Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische functionen, Math.Zeit., 77 (1961), 106-124.

[14] Treves F., Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Acad. Press, New York 1967

[15] Zemanian A., Distributions theory and transform analysis, McGraw-Hill Book Company New York, 1965

[16] Шварц Л. Анализ I, Издательство "Мир", Москва 1972

[17] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann Paris, 1966.

18 Stein E.M.,and Weiss G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton U.Press, Princeton,N.J., 1971.