НОВИ СЛУЧАЈЕВИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА

ЈЕДНЕ ВАЖНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГА РЕДА.

ТЕЗА

ТАДИЈЕ Ж. ПЕЈОВИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ
НА СЕДНИЦИ ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ 3. ЈАНУАРА 1923
ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА ГГ.
Д-РА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА РЕД. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА И Д-РА АНТОНА БИЛИМОВИЋА РЕД. КОНТР. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА.

БЕОГРАД, 1923
ШТАМПАРИЈА „СКЕРЛИЋ“ — КРАЉИЦЕ НАТАЛИЈЕ 12

ГОСПОДИНУ

МИХАИЛУ ПЕТРОВИЋУ

ЗАХВАЛАН

Т. ПЕЈОВИЋ

УВОД

Диференцијална једначина првога реда

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H \tag{1}$$

где је H дата функција независно промењљиве количине X, игра важну улогу у применама Математичке Анализе, у Вишој Геометрији и Рационалној Механици.

На њу се на пр. у Геометрији своде: задатак да се одреди крива линија у равни, чији ће лук бити дата функција поларног угла; одредба геодезијских линија на извесним површинама (на пр. спиралним и др.) и т. д. У Механици се на исту једначину наилази при проучавању кретања материјалне тачке у једној средини чији је отпор пропорционалан брзини кретања, а кад се тачка креће под утицајем централне силе, која не зависи од одстојања тачке;[1]) при решавању проблема Механике у равни, кад постоји функција сила̂ а еквипотенцијалне линије се своде на праве линије,[2]) и т. д.

Решавање свију таквих проблема немогућно је довршити ако се не може интегралити једначина (1). Та једначина, међу тим, спада у оне, које се данас могу интегралити само у веома органиченом броју случајева, за поједине врло специјалне облике функције H.

Отуда долази интерес проблема да се нађе што већи број случајева интеграбилитета те једначине, т. ј. што већи број функција H за које ће бити могућно наћи општи интеграл те једначине.

Тај проблем је предмет овога рада, и у овоме је дато нових прилога његовом решењу, бар у толико што је проши-

[1]) Elliot; Annales de l'Ecole Norm. Supérieure; p. 251; 1893. г.
[2]) Darboux: Leçons sur la Théorie des Surfaces; t. III., p: 85.

рена област случајева у којима се једначина (1) може интегралити.

У првом одељку изводе се некоје важније трансформације једначине (1), о којима су се бавили г. г. Appell,[1]) Elliot,[2]) Мих. Петровић[3]) и Heymann[4]), и које су нам служиле као основице за тражење нових случајева интеграбилитета једначине (1).

У другом одељку формиране су неколике инваријанте исте једначине, на начин како су их формирали г. г. Appell, Roger Liouville и доводећи их у везу са једначином (1) на начин на који су то учинили г. г. Мих. Петровић и Heymann (loc. cit.).

У трећем одељку, у коме се искоришћавају резултати наведени у првом и другом одељку, наводе се нови случајеви интеграбилитета једначине (1), т. ј. нови облици функције H за које је могуће наћи општи интеграл те једначине.

---

[1]) Sur les invariants de quelques équations differentielles; (Journal de Mathématique pures et appliq. 1889.)

[2]) Sur une équation du premier degré. (Annales de l'École Norm. Sup. 1890).

[3]) Comptes rendus. t. CXXII. № 22, 1896.

[4]) Journal für reine und angewandte Mathematik, 1898.

ПРВИ ОДЕЉАК.

Неколике трансформације једначине (1).

1. Приметимо пре свега да кад је једначина оппітега облика

$$(2) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,a_0 + 2\,a_1\,y\,\frac{dy}{dx} + a_2\,y^2 = 0\,;$$

где су коефицијенти a ма какве функције од x, она се своди на једначину

$$(1) \qquad \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H\,,$$

познатом сменом

$$(3) \qquad y = UY\,,\ \frac{dX}{dx} = M(x)\,,$$

где је

$$(4) \qquad U = e^{-\int a_1\,dx}\,,\ M(x) = \sqrt{a_2 - a_1^2}\,,$$

а H има вредност

$$H = -\frac{2\,a_0}{a_2 - a_1^2}\,e^{2\int a_1\,dx}\,.$$

Примедба. Експоненцијална функција (4) уводи један константан фактор k^2 у функцији H. Ставивши

$$H_1 = k^2\,H$$

биће

$$dX_1 = dX \text{ или } X_1 = X + h\,,$$

где се h нова произвољна константа; због тога се једначина

$$\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)^2 + Y^2_1 = H_1,$$

сменом

$$Y_1 = KY,\ X_1 = X + h,$$

своди на једначину (1).

2. Ако у једначини (1) ставимо

$$Y = \lambda z,$$

где је λ произвољна константа, па из тако добијене једначине и њене изводне једначине елиминишемо λ, добићемо хомогену једначину другог степена по z, z' и z'' облика

$$H'(z'^2 + z^2) - 2H(z'z'' + zz') = 0,$$

која сменом

$$z = e^{\int \frac{dX}{w}},$$

постаје

$$\frac{dw}{dX} = 1 - \frac{H'}{2H}w + w^2 - \frac{H'}{2H}w^3,$$

а ова сменом

$$w = Uv + V,\ \frac{du}{dX} = M(X)$$

добија облик

$$\frac{dv}{du} = v^3 + J, \tag{5}$$

где су
$$U = e^{\frac{1}{6}\int \frac{4H^3 - 3H'^2}{HH'}dX},\ V = \frac{2H}{3H'},$$

$$M(x) = -\frac{H'}{2H}U^2,\ J = -\frac{s_3}{U^3}\frac{8H^3}{H'^3},$$

а s_3 има вредност

$$s_3 = \frac{4H + 9H''}{54\ H}.$$

Ову је трансформацију први извео г. Петровић, а за тим, и на други начин г. Neymann. Ми смо је овде извели на начин који је погодан за оно што је изложено у трећем одељку.

3. Ако је дата једначина (2) и ако ставимо

$$y = \lambda z,$$

где је λ такође произвољна константа, па из тако добијене једначине и њене изводне једначине елиминишемо λ, добићемо следећу једначину

$$A_2 z'^2 + A_4 z^2 + 2 B_1 z' z'' + 2 B_2 z z'' + 2 B_3 z z' = 0, \tag{6}$$

где су A_2, A_4, B_1, B_2 и B_3 функције од x а које имају вредности

$$\begin{aligned} A_2 &= 2 a_0 a_1 - a'_0, \\ A_4 &= a_0 a'_2 - a'_0 a_2, \\ B_1 &= a_0, \\ B_2 &= a_0 a_1, \\ B_3 &= a_0 a'_1 + a_0 a_2 - a'_0 a_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Једначина (6) је специјалан случај опште хомогене једначине другог степена по z, z' и z'', коју је проучавао Appell.[1]) Он је једначину (6) трансформисао на облик

$$2 Z' Z'' + N Z^2 + 2 L Z Z' = 0 \tag{8}$$

сменом

$$z = U Z, \quad \frac{dX}{dx} = M(x),$$

где U и M имају вредности

$$U = e^{-\int \frac{B_2}{B_1} dx}, \quad M(x) = e^{\int \frac{4 B_3 - A_2}{2 B_1} dx}.$$

[1]) Loc. cit.

Коефицијенти N и L у једначини (8) имају тада вредности

$$N = -\frac{D}{M^3\ B^3_1}\ ;\ L = \frac{E_4}{M^2\ B^2_1},$$

где је D дискриминанта квадратног облика (6), а E_4 има вредност

$$E_4 = B^2_2 + B'_1\ B_2 - B_1\ B'_2 + B_1\ B_3 - A_2\ B_2$$ [1]).

4. Ако у једначини (2) ставимо $a_0 = a_2$, једначина (6) постаје

$$A_2\ z'^2 + 2 B_1\ z' z'' + 2 B_2 z z'' + 2 B_3 z z' = 0\ .$$

Ставивши у њој

$$z = e^{\int \frac{dx}{u}},$$

она постаје

$$\frac{du}{dx} = \frac{P u^2 + Q u + R}{S u + T}, \tag{9}$$

где P, Q, R, S и T изражени коефицијентима a_i имају вредности

$$\begin{aligned}
P &= 2\,(a_0\,a'_1 + a^2_0 - a'_0\,a_1)\,,\\
Q &= 4\,a_0\,a_1 - a'_0\,.\\
R &= 2\,a_0\,,\\
S &= 2\,a_0\ a_1\,,\\
T &= 2\,a_0\,.
\end{aligned}$$

Једначину (9), на коју смо свели једначину (2), Elliot[2]) је сменом

$$u = a Z + b$$

где је

$$a = e^{\int \frac{P}{S} dx}\,,\ b = -\frac{T}{S}\,,$$

---

1) Appell: loc. cit.
2) Elliot: loc. cit.

а Z нова непозната, трансформисао на облик

$$\frac{dZ}{dx} + f(x) = \frac{\varphi(x)}{Z}; \tag{10}$$

где коефицијенти f (x) и φ (x) у нашем случају имају вредности:

$$f(x) = \frac{6\, a_0\, a'_1 + 4\, a^2_0 - 3\, a'_0\, a_1 - 4\, a_0\, a^2_1}{2\, a^3_1\, e^{\int \frac{a_0}{a_1} dx}},$$

$$\varphi(x) = \frac{2\, a^2_0\, a'_1 + 2\, a^3_0 - a_0\, a'_0\, a_1 - 2\, a^2_0\, a^2_1}{2\, a^5_1\, e^{2\int \frac{a_0}{a_1} dx}}.$$

ДРУГИ ОДЕЉАК.

Инваријанте.

Познато је, да извесне диференцијалне једначине задржавају исти облик, кад се на један одређен начин промене функција и независно промењива, уводећи при том произвољне функције. Од интереса је, код тих диференцијалних једначина, образовати функције од коефицијената, које, у вези са посматраном једначином, остају непромењене једном таквом сменом, т. ј. *инваријанте диференцијалних једначина.* Теоријом инваријаната линеарних диференцијалних једначина бавили су се нарочито Laguerre[1]), Brioschi[2]), Halphen[3]) и Roger Liouville[4]). Овај последњи је нарочито испитивао инваријанте диференцијалне једначине првога реда

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3\,c_1\,y + 3\,c_2\,y^2 + c_3\,y^3\,, \tag{11}$$

а Appell[5]) инваријанте једначине (11) и инваријанте хомогених једначина другога реда и другога степена.

Ми ћемо овде рећи неколико речи о инваријантама диференцијалне једначине (1) кад је она дата у општем облику

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,a_0 + 2\,a_1\,y\,\frac{dy}{dx} + a_2\,y^2 = 0\,. \tag{2}$$

---

[1]) Comptes rendus; t. LXXVIII; p. 116 et 224.

[2]) Bulletin de la Société mathématique de France; t. VII; p: 105.

[3]) Memoires présentés par divers savants à l'Akademie des Sciences, t. XXVIII, No 1.

[4]) Comptes rendus; 6. septembre 1886; 12. septembre 1887; American Journal of Mathematics; t. X; p. 283.

[5]) Loc cit.

Једначина (2) задржаће исти облик кад се уведе нова функција η и нова независно промењива ξ везане са старим промењивим x и y релацијама

$$(12) \qquad y = u(x)\,\eta, \quad \frac{d\xi}{dx} = v(x);$$

где су $u(x)$ и $v(x)$ произвољне функције од x. Нека је нова једначина

$$(13) \qquad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1\,\eta\,\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_2\,\eta^2 = 0;$$

ми ћемо према Halphen-у *апсолутном инваријантом* једначине (2) звати једну такву функцију коефицијената a_i и њихових извода по x, која, формирана од коефицијената α_i једначине (13) и њихових извода по ξ, остаје увек непромењена, ма какве биле функције $u(x)$ и $v(x)$ трансформације (12).

Нека је

$$\varphi\left(a_0, a_1, \ldots \frac{da_0}{dx}, \frac{da_1}{dx}, \ldots\right)$$

таква једна инваријанта, па ће бити идентички

$$\varphi\left(a_0, a_1, \ldots \frac{da_0}{dx}, \frac{da_1}{dx}, \ldots\right) = \varphi\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \frac{d\alpha_0}{d\xi}, \frac{d\alpha_1}{d\xi}, \ldots\right),$$

ако $\alpha_0, \alpha_1 \ldots$ заменимо њиховим вредностима, израженим са $a_0, a_1 \ldots u(x)$ и $v(x)$.

Релативном инваријантом или просто *инваријантом* једначине (2) зваћемо такву функцију коефицијената a_i и њихових извода по x, која је, формирана од коефицијената α_i једначине (13) и њихових извода по ξ, једнака првобитној функцији, помноженој са једним фактором, који зависи само од $u(x)$ и $v(x)$; за једну такву инваријанту биће идентички

$$\varphi\left(a_0, a_1, \ldots \frac{da_0}{dx}, \frac{da_1}{dx}, \ldots\right) = P\,\varphi\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \frac{d\alpha_0}{d\xi}, \frac{d\alpha_1}{d\xi}, \ldots\right),$$

где фактор P зависи једино од функција $u(x)$ и $v(x)$.

Ако у једначини (2) извршимо смену (12), где су u(x) и v(x) ма какве функције од x, имаћемо

$$\frac{dv}{dx} = u\,v\,\frac{d\eta}{d\xi} + u'(x)\,\eta\,,$$

и једначина (2) добија облик (13), где α_i имају вредности

$$(14)\quad \alpha_0 = \frac{a_0}{u^2\,v^2}\,,\quad \alpha_1 = \frac{u' + a_1\,u}{u\,v}\,,\quad \alpha_2 = \frac{u'^2 + 2\,a_1\,u\,u' + a_2\,u^2}{u^2\,v^2}$$

и где је

$$u' = \frac{du}{dx}\,.$$

Зна се из напред изложених трансформација, да се једначина (2), сменом

$$y = U\,Y\,,\quad \frac{dX}{dx} = M(x)\,,$$

где је

$$U = e^{-\int a_1\,d\,x}\,,\quad M(x) = \sqrt{a_2 - a^2_1}\,,$$

своди на једначину (1)

$$(1)\qquad \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H\,,$$

а H је, као што је познато, дато изразом

$$H = -\frac{2\,a_0}{M^2\,U^2}\,.$$

Ако се са U_0, M_0, H_0 и X_0 означе функције састављене од коефицијената α_i и променљиве ξ, а U, M, H и X су састављене од a_i и променљиве x, имаћемо

$$U_0 = e^{-\int \alpha_1\,d\xi}\,,\quad M_0 = \sqrt{\alpha_2 - \alpha^2_1}\,,$$

$$H_0 = -\frac{2\,\alpha_0}{M^2_0\ U^2_0},\quad X_0 = \int M_0\ d\xi\,.$$

замењујући α_i изразима (14) а $d\xi$ са $v(x)\,dx$ добићемо

$$(15)\qquad \begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{u}\ U, \quad M_0 = \dfrac{1}{v}\ M \\ H_0 = H\,,\ X_0 = X\,. \end{cases}$$

Једначине (15) показују, да су U и M *релативне* а H и X *апсолутне инваријанте* једначине (2) за сваку трансформацију облика (12).

Исто тако су изводи $\dfrac{dH}{dX}, \dfrac{d^2H}{dX^2}$ *апсолутне инваријанте* исте једначине, и за исту трансформацију.

Све ове инваријанте можемо изразити помоћу коефицијената a_i.

Пошавши од ранијих образаца

$$U = e^{-\int a_1\,dx},\quad M = \sqrt{a_2 - a^2_1}$$

$$H = -\frac{2\,a_0}{M^2\,U^2},\quad \frac{dX}{dx} = M(x),$$

који дају инваријанте U, M, H и X изражене помоћу коефицијената a_i, добићемо вредности за апсолутне инваријанте $\dfrac{dH}{dX}, \dfrac{d^2H}{dX^2}\,\cdots$ изражене помоћу тих коефицијената a_i, тако да ће бити

$$\frac{dH}{dX} = \frac{\dfrac{dH}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}} = -\frac{2\,p_4}{M^4\ U^2},\quad \frac{d^2H}{dX^2} = -\frac{2\,p_6}{M^6\ U^2}$$

или у опште

$$\frac{d^n H}{dX^n} = -\frac{2\,p_{2n+2}}{M^{2n+2}\,U^2},$$

где су p_4, p_6, у опште p_{2n+2} *релативне инваријанте* дате рекурентним обрасцем

$$p_{2n+2} = p'_{2n}\, M - p_{2n}\, [2\, n\, M' - 2\, a_1\, M].$$

На пр. за $n = 1$, ставивши симетрије ради $p_2 = a_0$, имаћемо

$$p_4 = a'_0\, M - a_0\, (2\, M' - 2\, a_1\, M);$$

за $n = 2$

$$p_6 = p'_4\, M - p_4\, (4\, M' - 2\, a_1\, M),$$

где, сменивши p_4 горњим изразом, имаћемо вредност за p_6 изражену помоћу a_i

$$p_6 = M^2\, (a''_0 + 4\, a'_0\, a_1 + 2\, a_0\, a'_1 + 4\, \text{г}_0\, a^2_1) - \\ - 5\, M\, M'\, (a'_0 + 2\, a_0\, a_1) + 2\, \text{г}_0\, (4\, M'^2 - M\, M'').$$

Апсолутне инваријанте H, $\frac{dH}{dX}\ldots$ и X, које смо горе израчунали, јесу функције од x. Ако би елиминисали x из H и H′ или из H и X, добили би извесну релацију између H и H′ или H и X. Обрнуто пак, ако нам је дата каква релација између H и H′ или H и X, можемо увек ту релацију изразити помоћу коефицијената a_i и њихових извода.

Важност оваквих инваријаната је у томе, што можемо једначину (2) свести на једначину (1) тако, да функција H има облик какав се хоће, па ма какви били коефицијенти a_i. На тај начин кад знамо интегралити једначину (1), можемо увек интегралити једначину (2) са произвољним коефицијентима. О овоме ћемо говорити доцније у једном засебном раду.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК.

Случајеви интеграбилитета.

1. Једини нама до сад познати случајеви интеграбилитета једначине (1) јесу они кад је $H = \text{const}$, и $H = a e^{hX}$ где су a и h сталне количине. Г. Мих. Петровић на пр. сменом

$$Y = \sqrt{H} \sin \varphi, \quad \frac{dY}{dX} = \sqrt{H} \cos \varphi$$

своди једначину (1) на облик

$$\frac{d\varphi}{dX} = 1 - \frac{1}{2} \frac{H'}{H} \operatorname{tg} \varphi ,$$

из које се φ добија простом квадратуром у оба та случаја, што се у осталом добија и на друге просте начине.

2. У трансформацијама једначине (1) видели смо да се она може свести на једначину облика

$$\text{(5)} \qquad \frac{dv}{du} = v^3 + J,$$

где J у овом случају има вредност

$$J = - \frac{s_3}{U^3} \cdot \frac{8 H^3}{H'^3},$$

а s_3 и U дати су изразима

$$s_3 = \frac{9 H'' + 4 H}{54 H}, \quad U = e^{\frac{1}{6} \int \frac{4 H^2 - 3 H'^2}{H H'} dX}.$$

Општи интеграл једначине (5) могуће је наћи ако је $J = 0$ и у опште кад је $J = \text{const.}$

Први ће случај бити кад је $s_3 = 0$ (јер H мора бити различито од нуле), а то ће бити кад је

$$H = A \cos \frac{2}{3} X + B \sin \frac{2}{3} X, \tag{16}$$

где су A и B произвољне константе.

Према примедби на крају овог одељка једначина (1) је типа

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = \sin \frac{2}{3} X. \tag{17}$$

Према томе једначина (1) може се интегралити помоћу квадратура кад год функција H има облик (16), *што представља нов случај њеног интеграбилитета*; тако се једначина (17) своди на једначину трећег степена

$$\frac{dw}{dX} + \frac{2 v^3}{3 \sin^2 \frac{4}{3} X} = 0,$$

где се променљиве могу раздвојити.

Други случај $J = \text{const.}$ не доводи ни до каквих резултата од интереса.

3. Посматрајмо сад једначину у општем облику (2), која се до сада могла интегралити само кад су коефицијенти a_i константе.

Казали смо у одељку о трансформацијама да се једначина (2), кад је $a_0 = a_2$, извесном сменом своди на једначину (10)

$$\frac{dZ}{dx} + f(x) = \frac{\varphi(x)}{Z}, \tag{10}$$

где су

$$f(x) = \frac{6 a_0 a'_1 + 4 a^2_0 - 3 a'_0 a_1 - 4 a_0 a^2_1}{2 a^3_1 e^{\int \frac{a_0}{a_1} dx}},$$

$$\varphi(x) = \frac{2a_0^2 a_1' + 2a_0^3 - a_0 a_0' a_1 - 2a_0^2 a_1^2}{2a_1^5 e^{2\int \frac{a_0}{a_1} dx}}.$$

У једначини (10) могу се раздвојити променљиве:
1°. Ако је $f(x) = 0$.
2°. Ако је $\varphi(x) = 0$.
3°. Ако је $f(x) = \text{const.}$, $\varphi(x) = \text{const.}$ (и $f(x) = k\,\varphi(x)$) } где је
4°. Ако је $f(x) = \text{const.}$, $\varphi(x) = kx$, (и $f(x) = kx\,\varphi(x)$) }
$k = \text{const.}$

Услов 1°. изражен помоћу коефицијената a_0 и a_1 гласи

$$6a_0 a_1' + 4a_0^2 - 3a_0' a_1 - 4a_0 a_1^2 = 0,$$

и он представља по a_0 једну Bernoulli-еву диференцијалну једначину, чијим се решењем добија

$$a_0 = \frac{a_1^2}{1 + Ce^{\frac{4}{3}\int a_1 dx}}$$

и једначина (2) има облик

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2a_1^2}{1 + Ce^{\frac{4}{3}\int a_1 dx}} + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + \frac{a_1^2}{1 + Ce^{\frac{4}{3}\int a_1 dx}} y^2 = 0,$$

где је a_1 ма каква функција од x, а C произвољна константа, *што нам представља нов случај интеграбилитета једначине* (2).

Услов 1°. представља по a_1 једну Riccati-еву диференцијалну једначину, чијим се решењем, пошто се стави $a_0 = 1$, добија

$$a_1 = \frac{1 + Ce^{\frac{4}{3}x}}{1 - Ce^{\frac{4}{3}x}},$$

и једначина (2) постаје

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 + 2\,\frac{1 + Ce^{\frac{4}{3}x}}{1 - Ce^{\frac{4}{3}x}}\, y\, \frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

где је C константа; *што такође представља нов случај интеграбилитета једначине* (2).

Приметимо да се у једном и у другом случају једначина (2) своди на једначину (1) тако да функција H има облик

$$H = C \sin \frac{2}{3} X, \tag{18}$$

где је C произвољна константа. Дакле, кад год је услов 1°. задовољен функција H у једначини (1) има облик (18), што представља нов случај интеграбилитета једначине (1); али се овај може добити и из израза (16) кад се стави $A = 0$.

Услов 2°. представља такође по a_0 једну *Bernoulli*-еву, а по a_1 *Riccati*-еву диференцијалну једначину, чијим се решењем, као и напред, добијају нови случајеви интеграбилитета једначине (2), која се своди на једначину (1) тако да је $H = \text{const.}$

Услови за 3°. и 4°. не доводе ни до каквих резултата од интереса.

Ако се у једначини (2) стави $a_0 = x$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, она постаје

$$y'^2 + 2yy' + 2x = 0,$$

а ова после диференцијалења добија облик

$$y'y'' + yy'' + y'^2 + 1 = 0. \tag{19}$$

Ставивши пак у једначини (19)

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy},$$

она постаје

$$p^2 \frac{dp}{dy} + py\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0.$$

Сматрајући у овој једначини y као функцију а p као независно промењиву, она се може написати

$$\frac{dy}{dp} + \frac{p}{p^2 + 1} y + \frac{p^2}{p^2 + 1} = 0,$$

т. ј. линеарна једначина по y.

Функција H у једначини (1) у том случају имаће облик

$$H = -2Xie^{-2Xi}, \tag{20}$$

где је $i = \sqrt{-1}$, и *што нам представља нов случај интеграбилитета једначине* **(1)**.

Завршујући приметићемо да кад год се зна интегралити једначина

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X), \tag{1}$$

може се интегралити и једначина

$$\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)^2 + Y_1^2 = k\,H\,(X_1 + h),$$

где су k и h ма какве константе, јер се ова последња сменом

$$X_1 = X - h, \quad Y_1 = Y\sqrt{k}$$

своди на једначину (1). Тако, овај последњи случај (20) доводи до могућности, *да се интеграли једначина*

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = A\,(X + B)\,e^{-2Xi},$$

где су A и B произвољне константе.

NOUVEAUX CAS D'INTÉGRABILITÉ D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE IMPORTANTE.

Par M. TADIA PEYOVITCH.

Resumé.

L'objet du travail est la recherche de *nouveaux cas* d'intégrabilité de l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H \tag{1}$$

où H est une fonction donnée de la variable X. Cette équation se présente dans plusieurs problemes d'Analyse mathématique, de Géometrie Supérieure et de Mécanique rationnelle. Les cas, actuellement connus, où l'on puisse intégrer l'équation (1), sont très restreints. En utilisant la théorie des invariants des équations différentielles, et en particulieur celle relative à l'équation (1), l'auteur arrive aux *cas entièrement nouveaux,* où l'équation peut être intégrée par des quadratures.

САДРЖАЈ.