U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

SLOBODAN Č.NEŠIĆ

T I H O N O V S K A P O L U P O L J A
I
M E T R I Č K I P R O S T O R I

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD
1980.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Rezultati izloženi u ovom radu su usko povezani sa razvitkom topoloških polupolja za poslednjih dvadesetak godina.

Sovjetski matematičari M.Antonovskij, V.Boltjanskij i T.Sarymsakov su 1960. godine u radu [1] uveli topološko i tihonovsko polupolje i dalje razrađivali u radovima [2], [3] i [4] . Tihonovsko polupolje predstavlja do danas najbolje prirodno uopštenje polja realnih brojeva.

Činjenica da postoje topološki prostori koji nisu metrizabilni klasičnom metrikom nametnula je uvođenje neke opštije metrike u odnosu na koju bi takvi prostori bili opštije metrizabilni. Takvu metriku su uveli M.Antonovskij, V.Boltjanskij i T.Sarymsakov u radu [1] 1960. godine, tako što su za razmak između dve tačke prostora uzeli element topološkog polupolja.

Prvi rezultat iz teorije fiksnih tačaka za kontraktivna preslikavanja publikovao je poljski matematičar S.Banach 1922. g.(stav 1.4.1.). Jedno proširenje Banach-ovog stava na potpune metričke prostore dao je M.Marjanović u radu [1], gde uvodi (U,q,k) kontraktivno preslikavanje. Zatim Lj.Ćirić u radovima [1]- [20] oslabljuje uslov kontraktivnosti i vrši uopštenje Banach-ovog stava.

Rad se sastoji iz šest odeljaka koji su označeni sa arapskim brojevima.

U prvom odeljku su izložene definicije topološkog polupolja i metričkog prostora nad tim polupoljem koje su uveli M.Antonovskij, V.Boltjanskij i T.Sarymsakov u radu [4]. Zatim vlja uopštenje Jaggi-evog stava 1 iz rada [2] i mojeg stava 1 iz rada [3] . Paragraf 5.2. posvećen je istraživanju dovoljnih uslova za egzistenciju jedinstvenih zajedničkih fiksnih tačaka preslikavanja metričkog prostora u sebe sama koja ispunjavaju novi uslov. Ovde dokazujem četiri nova stava od kojih 5.2.1. predstavlja uopštenje Jaggi-evog stava 3 iz rada [2] i mojeg stava 1 iz rada [3] . U paragrafu 5.3. uopštavam uslov kontraktivnosti višeznačnog preslikavanja metričkog prostora u sebe sama koga je u radu [5] uveo Lj.Ćirić i ispitujem dovoljne uslove za egzistenciju fiksne tačke višeznačnog preslikavanja koje ispunjava uslov (5.3.1.). Zatim dokazujem dva stava koji predstavljaju uopštenje rezultata S.Nadler-a [1] i Lj.Ćirića [5].

U šestom odeljku su izloženi rezultati koji se odnose na ispitivanja egzistencije jedinstvenih fiksnih tačaka preslikavanja nizovno potpunog metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama. U paragrafu 6.1. uvodim novi uslov (6.1.1.) za preslikavanje metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama i dokazujem tri nova stava. Stavovi 6.1.1. i 6.1.2. predstavljaju proširenje rezultata K.Iseki-a [1], A.A.Ivanova [1], B.Fisher-a [3], Lj.Ćirića [21] i drugih. Paragraf 6.2. posvećen je istraživanju dovoljnih uslova za egzistenciju zajedničkih fiksnih tačaka niza preslikavanja metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama koja ispunjavaju novi uslov. Zatim dokazujem dva stava od kojih stav 6.2.1. predstavlja uopštenje A.Jaiswal - B.Singh-ovog stava 1 iz rada [2].

Na kraju, želim da se najsrdačnije zahvalim rukovodiocima ovog rada dr Zlatku Mamuziću i dr Lubomiru Ćiriću, profesorima Univerziteta u Beogradu, što su mi ukazali na ovu problematiku. Posebno im se zahvaljujem za moralnu podršku i trud koji su uložili u toku izrde ovog rada.

vlja uopštenje Jaggi-evog stava 1 iz rada [2] i mojeg stava 1 iz rada [2] . Paragraf 5.2. posvećen je istraživanju dovoljnih uslova za egzistenciju jedinstvenih zajedničkih fiksnih tačaka preslikavanja metričkog prostora u sebe sama koja ispunjavaju novi uslov. Ovde dokazujem četiri nova stava od kojih 5.2.1. predstavlja uopštenje Jaggi-evog stava 3 iz rada [2] i mojeg stava 1 iz rada [3] . U paragrafu 5.3. uopštavam uslov kontraktivnosti višeznačnog preslikavanja metričkog prostora u sebe sama koga je u radu [5] uveo Lj.Ćirić i ispitujem dovoljne uslove za egzistenciju fiksne tačke višeznačnog preslikavanja koje ispunjava uslov (5.3.1.). Zatim dokazujem dva stava koji predstavljaju uopštenje rezultata S.Nadler-a [1] i Lj.Ćirića [5].

U šestom odeljku su izloženi rezultati koji se odnose na ispitivanja egzistencije jedinstvenih fiksnih tačaka preslikavanja nizovno potpunog metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama. U paragrafu 6.1. uvodim novi uslov (6.1.1.) za preslikavanje metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama i dokazujem tri nova stava. Stavovi 6.1.1. i 6.1.2. predstavljaju proširenje rezultata K.Iseki-a [1], A.A.Ivanova [1], B.Fisher-a [3], Lj.Ćirića [21] i drugih. Paragraf 6.2. posvećen je istraživanju dovoljnih uslova za egzistenciju zajedničkih fiksnih tačaka niza preslikavanja metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama koja ispunjavaju novi uslov. Zatim dokazujem dva stava od kojih stav 6.2.1. predstavlja uopštenje A.Jaiswal - B.Singh-ovog stava 1 iz rada [2].

Na kraju, želim da se najsrdačnije zahvalim rukovodiocima ovog rada dr Zlatku Mamuziću i dr Lubomiru Ćiriću, profesorima Univerziteta u Beogradu, što su mi ukazali na ovu problematiku. Posebno im se zahvaljujem za moralnu podršku i trud koji su uložili u toku izrde ovog rada.

1. UVOD

1.1. TOPOLOŠKO I TIHONOVSKO POLUPOLJE

Među najznačajnija dostignuća novijeg datuma u oblasti topologije svakako treba ubrojati rezultate postignute u vezi sa topološkim polupoljima. Jedan od takvih rezultata je i potpuno rešenje problema metrizacije topoloških prostora koji su potpuno regularni.

Sovjetski matematičari M. Ja. Antonovskij, V. G. Boltjanskij i T. A. Sarymsakov su 1960. godine u radu [1] uveli topološko polupolje i dalje razrađivali u radovima [2] , [3] i [4] . Pre nego što izložimo definiciju topološkog polupolja koju su dali njeni autori u radu [4] istaknimo neke pretpostavke.

Neka skup E sadrži više od jednog elementa i neka su na skupu E definisane dve binarne operacije koje ćemo označiti sa + odnosno sa $\cdot$.

Definicija 1.1.1. Komutativan i asocijativan topološki prsten E je topološko polupolje ako je u E određen podskup K tako da je:

1. $K + \bar{K} \subset K$, $K \cdot K \subset K$.

2. Presek $\bar{K} \cap (-\bar{K})$ sadrži samo nulu.

3. $K - K = E$.

4. Ako su $a,b \in K$, tada jednačina $ax = b$ ima bar jedno rešenje u K.

Za elemente $x,y \in E$ pišemo $x \geq y$ $(x > y)$, ako je $x-y \in \bar{K}$ $(x-y \in K)$.

5. Za svaki odozgo ograničen podskup $M \subset E$ postoji gornja međa $\bigvee M$.

Moduo elementa $x \in E$, u oznaci $|x|$, definiše se ovako $|x| = (x \vee 0) + ((-x) \vee 0)$.

Neka je V okolina nule u topološkom prostoru E. Okolinu V zvaćemo zasićenom, ako iz relacije $|x| \leq y \in V$ sledi da je $x \in V$.

6. Za ma koju okolinu U nule u topološkom prostoru E postoji zasićena okolina V nule sa svojstvom da je $V \subset U$.

Element $x \in E$ zvaćemo idempotentnim, ako je $x = x^2$. Sa ∇ označimo skup svih idempotentnih elemenata u E. Tada je ∇ potprostor topološkog prostora E.

7. Neka je $M \subset \nabla$ podskup skupa ∇ sa svojstvom da je $\bigwedge M = 0$ i U proizvoljna okolina nule u topološkom prostoru E. Tada postoji konačan broj elementa $e_1, e_2, \ldots, e_k \in M$ tako da je $(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_k) \in U$.

8. Neka je U ma koja okolina nule u topološkom prostoru E. Tada postoji okolina Γ nule u potprostoru ∇ tako da je $E \cdot \Gamma \subset U$.

Dokazaću sada dva stvava koji će biti od koristi u daljem radu.

Stav 1.1.1. Ako elementi a, b i c iz skupa $\overline{K}$ ispunjavaju uslov $a+2b+2c < 1$, onda važi ova relacija

$$0 \leq (a+b+c)\,(1-b-c)^{-1} < 1.$$

Dokaz. Iz uslova $a+2b+2c < 1$ sledi da je $a+b+c < 1-b-c$. Ako stavimo da je $r = a+b+c$ i $s = 1-b-c$, onda je $r \in \overline{K}$, $s \in K$ i $r < s$.

Element $s\in K$ ima jedinstveni inverzni element s^{-1} u K. Kako je $s^{-1}\in K$ i $s-r\in K$, tada prema uslovu 1. definicije 1.1.1. dobijamo

$$(s-r)\cdot s^{-1}=s\cdot s^{-1}-rs^{-1}=1-r\cdot s^{-1}\in K,$$

odakle je

$$1-r\cdot s^{-1}>0 \quad \text{ili} \quad r\cdot s^{-1}<1,$$

što je trebalo dokazati.

Stav 1.1.2. Ako je V zasićena okolina nule u topološkom polupolju E i r ma koji elemenat iz E koji ispunjava uslov $|r|\leqslant 1$, onda je $r\cdot V\subset V$.

Dokaz. Ako je $y\in V$, onda je $|y|\in V$ (vidi T. Sarymsakov [1], stav 16.3.). Kako je $|r|\in\overline{K}$ i $|y|\in\overline{K}$ tada je $|r\cdot y|=|r|\cdot|y|\in\overline{K}$ i pri tome je $|r\cdot y|\leqslant|y|$. S obzirom da je V zasićena okolina nule u polupolju E onda mora biti $r\cdot y\in V$ i zato $r\cdot V\subset V$.

Stav 1.1.3. (T. Sarymsakov [1], str. 35.). Svako topološko polupolje ima potpolupolje, koje sadrži jedinicu polupolja i izomorfno je polju realnih brojeva.

Ovo potpolupolje zove se osa polupolja E. Ovde ćemo osu topološkog polupolja identifikovati sa poljem realnih brojeva.

U poslednje vreme sve značajniju ulogu igra tihonovsko polupolje koje su M. Antonovskij i V. Boltjanskij uveli u radu [1]. Ono predstavlja do danas najbolje uopštenje polja realnih brojeva. U definiciji tihonovskog polupolja autori su koristili ideju A. N. Tihonova o topologizaciji proizvoda topoloških prostora.

Neka je Δ proizvoljan neprazan skup. Označimo sa R^1 prostor realnih brojeva, a R^Δ skup svih realnih funkcija definisanih na skupu Δ. U skupu R^Δ definisane su operacije sabiranja i množenja:

$$(x+y)\,(q)=x(q)+y(q) \quad \text{i} \quad (x\cdot y)\,(q)=x(q)\cdot y(q)$$

za svako $x,y\in R^\Delta$ i svako $q\in\Delta$. U odnosu na uvedene algebarske operacije R^Δ je komutativno-asocijativan prsten sa jedinicom.

Neka je ε ma koji realan pozitivan broj. Stavimo da je

$$U_\varepsilon^q=\left\{x : x\in R^\Delta \quad \text{i} \quad |x(q)|<\varepsilon\right\},\ q\in\Delta$$

Sa Δ^* označimo skup svih konačnih podskupova skupa Δ . Tada za svaki konačan skup $m=\{q_1,q_2,\dots,q_k\}\in\Delta^*$ važi jednakost

$$U_\varepsilon^{\,m}=U_\varepsilon^{\,q_1}\cap U_\varepsilon^{\,q_2}\cap\dots\cap U_\varepsilon^{\,q_k}.$$

M. Antonovskij i V. Boltjanskij u radu [1] su familiju

$$\left\{x+U_\varepsilon^{\,m} : x\in R^\Delta,\ m\in\Delta^*,\ \varepsilon\in R \text{ i } \varepsilon>0\right\}$$

skupova $x+U_\varepsilon^{\,m}$ uzeli za bazu otvorenih skupova u R^Δ i na taj način uveli u R^Δ tihonovsku topologiju. Tako dobijeni topološki prostor R^Δ je Hausdorfov.

Za element $x\in R^\Delta$ kažemo da je pozitivan i pišemo $x>0$, ako je $x(q)>0$ za svako $q\in\Delta$. Sa K^Δ označimo skup svih pozitivnih elemenata prstena R^Δ . Dalje, za elemente $x,y\in R^\Delta$ pišemo $x>y$, ako je $x-y>0$. Skup $\overline{K^\Delta}$ čine sve funkcije $x\in R^\Delta$ za koje je $x(q)\geqslant 0$ za svako $q\in\Delta$. Za elemente $x,y\in R^\Delta$ pišemo $x\gg y$, ako je $x-y\in\overline{K^\Delta}$. Tada je par $(R^\Delta,\gg)$ delimično uređen skup.

Odozgo ograničen skup $M \subset R^{\Delta}$ ima jednoznačno određenu gornju među $\bigvee M$ i pri tome je

$$(\bigvee M)(q) = \sup_{x \in M}\{x(q)\} \qquad (q \in \Delta).$$

Odozdo ograničen skup $M \subset R^{\Delta}$ ima jednoznačno određenu donju među $\bigwedge M$ i pri tome je

$$(\bigwedge M)(q) = \inf_{x \in M}\{x(q)\} \qquad (q \in \Delta).$$

Skup R^{Δ} sa uvedenim algebarskim operacijama, poretkom i topologijom ispunjava sve uslove iz definicije 1.1.1 i zove se tihonovsko polupolje.

Sa $\mathcal{N}(0)$ označimo familiju svih okolina nule u tihonovskom polupolju R^{Δ}. Tada za svaku okolinu $U \in \mathcal{N}(0)$ postoji zasićena okolina U_{ε}^{m} nule tako da je $U_{\varepsilon}^{m} \subset U$.

Neka je skup Δ konačan. Okoline oblika

$$O_n = \{x : x \in R^{\Delta} \text{ i } |x(q)| < \tfrac{1}{n} \text{ za svako } q \in \Delta\}$$

kad n prolazi skupom prirodnih brojeva obrazuju prebrojivu okolinsku bazu nule u polupolju R^{Δ}.

Neka je sada Δ beskonačan skup i m element skupa Δ^{*}. Označimo sa $|m|$ broj elemenata skupa Δ koji pripadaju skupu m. Okoline oblika

$$O_m = \{x : x \in R^{\Delta} \text{ i } |x(q)| < 2^{-|m|} \text{ za svako } q \in m\}.$$

kad m prolazi skupom Δ^{*} obrazuju okolinsku bazu nule u polupolju R^{Δ}.

1.2. METRIČKI PROSTORI NAD TOPOLOŠKIM POLUPOLJIMA

Činjenica da postoje topološki prostori koji nisu metrizabilni klasičnom metrikom nametnula je uvođenje neke opštije metrike u odnosu na koju bi takvi prostori bili opštije metrizabilni. Takvu metriku prvi je uveo Đ. Kurepa 1934. godine u radu [1], gde uopštava metričku funkciju na sledeći način: s a-kom paru tačaka x i y datog skupa pridelјuje se jednoznačno određen element nekog totalno uređenog skupa koji ne mora biti realan broj. Taj element zove se apstraktni razmak tačaka x i y. Dalje uopštenje metričke funkcije izveli su istovremeno J. Colmez i A. Appert tako što su za apstraktni razmak između dve tačke prostora uzeli element parcijalno uređenog skupa. U okvir ove problematike ulaze rezultati Đ. Kurepe koji su publikovani u radovima [1] - [4] , rezultati P. Papića koji su publikovani u radovima [1] - [3] , rezultati Z. Mamuzića koji su publikovani u radovima [1] - [4] , [6] i [7] . Mamuzić je u radu [4] pokazao da se svaki okolinski prostor može rekonstruisati jednim simetričnim i jednim antisimetričnim razmakom.

Jedno uopštenje metričke funkcije izvršili su sovjetski matematičari M. Antonovskij, V, Boltjanskij i Sarymsakov 1960. godine u radu [1], tako što su za razmak između dve tačke prostora uzeli element topološkog polupolja (vidi M.Antonovskij [1]).

U ovom radu mi ćemo razmatrati metričke prostore nad topološkim polupoljima (vidi V.G.Boltjanskij [1]).

Definicija 1.2.1. Neka je X ma koji neprazan skup i E topološko polupolje. Jednoznačno preslikavanje

$$d : X \times X \to \overline{K}$$

koje ispunjava prva tri od sledećih uslova:

1° Za svako $x \in X$ je $d(x,x) = 0$,

2° Za svako $x,y \in X$ je $d(x,y) = d(y,x)$,

3° Za svako $x,y,z \in X$ je $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$,

4° Za svako $x,y \in X$ iz $d(x,y) = 0$ sledi $x=y$,

zvaćemo pseudometrikom na X nad topološkim polupoljem E, a trojku (X,d,E) pseudometričkim prostorom nad topološkim polupoljem E. Preslikavanje d koje ispunjava sva četiri navedena uslova zvaćemo metrikom na X nad topološkim polupoljem E, a trojku (X,d,E) metričkim prostorom nad topološkim polupoljem E.

Specijalno, ako je $E = R^1$ polje realnih brojeva, onda je (X,d,R^1) običan pseudometrički ili metrički prostor.

Neka je $x \in X$ i U proizvoljna okolina nule u topološkom polupolju E. Stavimo da je

$$\Omega(x,U) = \{ y : y \in X \text{ i } d(x,y) \in U \}.$$

Stav 1.2.1. (M. Antonovskij, V. Boltjanskij i T. Sarymsakov [1]). Topološki prostor (X,t) je potpuno regularan tada i samo tada kada je metrizabilan nad nekim tihonovskim polupoljem R^Δ.

Evo najpre nekoliko definicija koje su uveli M. Antonovskij, V. Boltjanskij i T. Sarymsakov u radovima [1] i [2].

Neka je (X,d,E) metrički prostor, M ma koji usmeren skup. Označimo sa $x = \{x_m\}$ niz tipa M u metričkom prostoru (X,d,E).

Definicija 1.2.2. Za niz $x = \{x_m\}$ tipa M iz prostora (X,d,E) kaže se da je konvergentan i da konvergira ka tački $a \in X$, u oznaci $\lim_{m \in M} x_m = a$, ako za ma koju okolinu U nule u topološkom polupolju E postoji element $m_U \in M$ tako da je $d(x_m,a) \in U$ za svako $m > m_U$.

Definicija 1.2.3. Za niz $\{x_m\}$ tipa M iz metričkog prostora (X,d,E) kažemo da je Cauchy-ev, ako za svaku okolinu U nule u topološkom polupolju E postoji element $m_U \in M$ tako da je $d(x_{m_1},x_{m_2}) \in U$ za svako m_1, $m_2 > m_U$.

Definicija 1.2.4. Za metrički prostor (X,d,E) kaže se da je potpun ako svaki njegov Cauchy-ev niz tipa Δ^* konvergira nekoj tački iz X.

Napomenimo da je svaki Cauchy-ev niz tipa M iz metričkog prostora (X,d,E) ekvivalentan nekom Cauchy-evom nizu tipa Δ^*.

Definicija 1.2.5. Za metrički prostor (X,d,E) kaže se da je nizovno potpun ako svaki njegov Cauchy-ev niz konvergira nekoj tački iz X.

Sovjetski matematičar R. Plykin je u radu [1] uveo pojam usmerene metrike nad tihonovskim polupoljem R^Δ.

Neka je (X,d,R^Δ) metrički prostor. Za elemente $q,q' \in \Delta$ stavimo da je $q \underset{(d)}{\geqslant} q'$, ako je $(d(x,y))(q) \geqslant (d(x,y))(q')$ za svako $x,y \in X$. Relacija $\underset{(d)}{\geqslant}$ definisana na skupu Δ je refleksivna i tranzitivna, a par $(\Delta, \underset{(d)}{\geqslant})$ je parcijalno uređen skup. Za metriku d metričkog prostora (X,d,R^Δ) kažemo da je usmerena, ako je $(\Delta, \underset{(d)}{\geqslant})$ usmeren skup.

Neka je $\|\cdot\|$ jednoznačno preslikavanje realnog linearnog prostora X u topološko polupolje E i k pozitivan element topološkog polupolja E.

Izložićemo sada definiciju paranormiranog linearnog prostora nad topološkim polupoljem, koju je uveo S. Kasahara u radu [1], kada preslikavanje $\varphi: E \to E$ ima oblik $\varphi(x) = kx$ za svako $x \in E$.

Definicija 1.2.6. Trojka $(X, \|\cdot\|, E)$ zove se paranormirani linearni prostor nad topološkim polupoljem E, a preslikavanje $\|\cdot\|$ paranorma na X nad polupoljem E ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) Za svako $x \in X$ je $\|x\| \geqslant 0$,

(2) Za svako realno r i svako $x \in X$ je $\|rx\| = |r| \; \|x\|$,

(3) Za svako $x, y \in X$ je $\|x + y\| \leqslant k \cdot (\|x\| + \|y\|)$,

gde je k pozitivan element topološkog polupolja E.

Specijalno, ako je $k = 1 \in E$ i ako je pored uslova (1), (2) i (3) ispunjen i uslov

(4) Iz $\|x\| = 0$ sledi da je $x = 0$,

onda se paranormirani linearni prostor nad polupoljem E zove slabo normirani linearni prostor nad polupoljem E.

Topološko polupolje E može se shvatiti kao normirani linearni prostor nad polupoljem E, gde je norma jednoznačno preslikavanje $x \to |x|$ polupolja E u sebe sama (vidi Burbaki[1], str.23).

1.3. UNIFORMNI PROSTORI

Neka je $\mathcal{U}$ neprazna familija nepraznih delova U kombiniranog proizvoda $P \times P = P^2$ nepraznog skupa P. Podskup $\{(x,x) : x \in P\}$ skupa P^2 zove se dijagonala skupa P^2. Za ma koja dva skupa $V, W \subset P^2$ označimo sa $V \circ W$ skup svih uredenih parova $(x,y) \in P^2$ za koje postoji neko $z \in P$ sa svojstvom da je $(x,z) \in V$ i $(z,y) \in W$.

Ako uniformna struktura $\mathcal{U}$ uniformnog prostora $(P, \mathcal{U})$ ispunjava i uslov da je presek svih skupova $V \in \mathcal{U}$ dijagonala kombiniranog proizvoda P^2, onda se uniformna struktura $\mathcal{U}$ zove uniformnom strukturom A. Weil-a, a odgovarajući uniformni prostor uniformnim prostorom A. Weil-a (vidi,na primer,Z.Mamuzić, [5],str. 9o ili Kelli[1],str.233).

Evo nekoliko definicija koje su izložili M. Antonovskij, V. Boltjanskij i T. Sarymsakov u radu [2] na strani 51.

Definicija 1.3.1. Neka je $\mathcal{U}$ uniformna struktura na P i $\{x_m\}$ niz tipa M iz P. Za niz $\{x_m\}$ tipa M kažemo da je Košijev (u strukturi $\mathcal{U}$) ako za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji element $m_V \in M$ tako da je $(x_{m_1}, x_{m_2}) \in V$ za svako $m_1, m_2 > m_V$.

Definicija 1.3.2. Za niz $\{x_m\}$ tipa M iz P kaže se da je konvergentan i da konvergira (u strukturi $\mathcal{U}$) ka $p \in P$, ako za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji element $m_V \in M$ tako da je $(p, x_m) \in V$ za svako $m > m_V$.

Neka je (P,d,R^{Δ}) pseudometrički (metrički) prostor nad tihonovskim polupoljem R^{Δ}. Za svaku okolinu U nule tihonovskog polupolja R^{Δ} stavimo

$$S(U) = \{(x,y) : x,y \in P \ \text{ i } \ d(x,y) \in U\}$$

Familija $\mathcal{F} = \{S(U) : U \in \mathcal{N}(0)\}$ je baza neke uniformne strukture (uniformne strukture Weil-a) $\mathcal{U}$ na P (S. Naimpally [1]).

Izložiću ovde dva stava koji se odnose na metrizaciju uniformnog prostora i uniformnog prostora Weil-a.

Stav 1.3.1. (T. Hicks i R. Satterwhite [1], stav 3.1.) Topološki prostor (X,t) je potpuno regularan ako i samo ako je (X,t) pseudometrizabilan nad nekim tihonovskim polupoljem R^{Δ}.

Stav 1.3.2. (M. Antonovskij, V. Boltjanskij, T. Sarymsakov [2], str. 55.). Svaki uniformni prostor Weil-a je metrizabilan nad nekim tihonovskim polupoljem R^{Δ}.

1.4. ORBITALNO NEPREKIDNA PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA

Neka je T preslikavanje prostora X u sebe sama. Za tačku $x \in X$ kažemo da je fiksna tačka preslikavanja T ako je $Tx=x$.

Neka je (X,d) metrički prostor nad poljem realnih brojeva R^1 i neka je T preslikavanje prostora X u sebe sama. Za preslikavnje T kažemo da je kontraktivno ako postoji realan broj r, $0 \leq r < 1$, tako da je

$$d(Tx,Ty) \leq r\, d(x,y)$$

za svako $x,y \in X$. Poznat Banach-ov stav o fiksnoj tački glasi (vidi,na primer, S. Aljančić [1], str. 43.) :

Stav 1.4.1. Neka je (X,d) potpun metrički prostor i $T : X \to X$ kontraktivno preslikavanje . Tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka iz X za preslikavanje T.

Ovaj stav nalazi široku primenu u algebri (Đ. Kurepa [5]) i fukcionalnoj analizi (Kolmogorov-Fomin[1]).

Neka su A i B neprazni podskupovi skupa X. Stavimo

$$D(A,B) = \inf\left\{ d(x,y) : x \in A \text{ i } y \in B\right\}.$$

S. Nadler i Lj. Ćirić su u radovima [1] odnosno [5] uveli sledeća označavanja:

Sa $BN(X)$ je označen skup svih nepraznih i ograničenih podskupova skupa X. Stavimo

$$\rho(A,B) = \sup\left\{d(x,y) : x \in A \text{ i } y \in B\right\}$$

za svako A, $B \in BN(X)$.

Sa $CL(X)$ je označen skup svih nepraznih i zatvorenih podskupova skupa X. Stavimo

$$N(A,\varepsilon)=\{x : x\in X \text{ i } d(x,a)<\varepsilon \text{ za } a\in A\},\quad \varepsilon>0,$$

i

$$H(A,B)=\inf\{\varepsilon : A\subset N(B,\varepsilon) \text{ i } B\subset N(A,\varepsilon) \text{ i } \varepsilon>0\}$$

za svako $A,B\in CL(X)$.

Sada navodimo definicije koje je u radu [2] uveo Lj. Ćirić.

Definicija 1.4.1. Neka je $T : X\to X$ preslikavanje metričkog prostora X u sebe sama. Za prostor X kažemo da je T-orbitalno potpun ako svaki Cauchy-ev niz oblika $\{T^{n_i}x : i\in N\}, x\in X$, konvergira nekoj tački iz X.

Definicija 1.4.2. Za preslikavanje $T : X\to X$ prostora X u sebe sama kažemo da je orbitalno neprekidno ako za svako $x\in X$ iz $\lim\limits_{i\to\infty} T^{n_i}x = u$ sledi $Tu = \lim\limits_{i\to\infty} TT^{n_i}x$.

Neka je $F : X\to X$ višeznačno preslikavanje. Za tačku $u\in X$ kažemo da je fiksna tačka višeznačnog preslikavanja F ako je $u\in Fu$.

Definicija 1.4.3. (Lj. Ćirić [5]). Neka je $F : X\to X$ višeznačno preslikavanje. Za metrički prostor (X,d) kažemo da je F-orbitalno potpun ako svaki Cauchy-ev niz oblika $\{x_{n_i} : x_{n_i}\in Fx_{n_i-1}\}$ konvergira u X.

2. PARANORMIRANI I SLABO NORMIRANI LINEARNI PROSTORI NAD TOPOLOŠKIM POLUPOLJIMA

Neka je $(X,\|\cdot\|,R^{\Delta})$ slabo normirani linearni prostor nad tihonovskim polupoljem R^{Δ} (vidi definiciju 1.2.6.). Stavimo $d(x,y) = \|x - y\|$ za svako $x,y \in X$. Tada je (X,d,R^{Δ}) metrički prostor na X nad polupoljem R^{Δ}. Neka je Δ^{*} skup svih konačnih podskupova skupa Δ. Na skupu X postoji usmerena metrika d^{*} nad polupoljem $R^{\Delta^{*}}$ definisana na sledeći način

$$(d^{*}(x,y))(m) = \max_{q \in m} \{(d(x,y))(q)\}$$

za svako $x,y \in X$ i svako $m \in \Delta^{*}$ topološki ekvivalentna metrici d nad polupoljem R^{Δ} (vidi M.Antonovskij, V.Boltjanskij, T.Sarymsakov [4]).

Ako je d usmerena metrika metričkog prostora (X,d,R^{Δ}), onda za tačku $x \in X$ i neprazan skup $A \subset X$ važi $x \in \bar{A}$, tada i samo tada, kada je $d(x,A) = 0$ (vidi R.Plykin [1]).

U prvom delu ovog odeljka uvodim paranormirani količnik-prostor i slabo normirani linearni proizvod-prostor nad tihonovskim polupoljem i dokazujem dva stava koji karakterišu te prostore.

2.1. PARANORMIRANI LINEARNI KOLIČNIK-PROSTOR I SLABO NORMIRANI LINEARNI PROIZVOD-PROSTOR NAD TIHONOVSKIM POLUPOLJEM

Neka je X linearni prostor i Z njegov potprostor. Stavimo da je $p(x) = x + Z$ za svako $x \in X$. Sa X/Z označimo skup svih klasa $p(x)$ kada x prolazi skupom X. U skupu X/Z su definisane operacija sabiranja i operacija množenja realnim brojem (U. Rudin [1],str.39.) na sledeći način:

$$p(x) + p(y) = p(x + y) \quad \text{i} \quad r \cdot p(x) = p(r \cdot x)$$

za svako $x,y \in X$ i svaki realan broj r. U odnosu na uvedene operacije trojka $(X/Z, +, \cdot)$ je linearni prostor,tzv. količnik-prostor linearnog prostora X. Jednoznačno preslikavanje $p : x \to p(x)$ zove se kanonično preslikavanje prostora X na prostor X/Z.

Stav 2.1.1. Neka je $(X, \|\cdot\|, R^{\Delta})$ paranormirani linearni prostor nad tihonovskim polupoljem R^{Δ} i Z njegov zatvoreni potprostor. Stavimo da je

$$\| p(x) \|^{*} = \bigwedge_{z \in Z} \{ \| x-z \| \}$$

za svako $p(x) \in X/Z$. Tada je $(X/Z, \|\cdot\|^{*}, R^{\Delta})$ paranormirani linearni prostor nad polupoljem R^{Δ}.

Neka je $(X, \|\cdot\|, R^{\Delta})$ slabo normirani linearni prostor nad polupoljem R^{Δ} i neka je $d(x,y) = \|x - y\|$ za svako $x,y \in X$. Ako je metrika usmerena, onda je $(X/Z, \|\cdot\|, R^{\Delta})$ slabo normirani linearni prostor nad polupoljem R^{Δ}.

Dokaz. Dokazaćemo da je preslikavanje $\|\cdot\|^*$ količnik-prostora X/Z u tihonovsko polupolje R^Δ paranorma na X/Z nad polupoljem R^Δ. Kako je za svako $x \in X$ skup $\{\|x - z\| : z \in Z\} \subset R^\Delta$ odozdo ograničen u R^Δ, pa zato ima jednoznačno određenu donju među $\bigwedge_{z\in Z}\{\|x - z\|\}$ i pri tome je $\|p(x)\|^* \geqslant 0$. Dakle, uslov (1) definicije 1.2.6. je ispunjen.

Dokažimo da je ispunjen uslov (2) definicije 1.2.6. Očigledno da je ovaj uslov ispunjen kada je $r = 0$. Za $r \neq 0$ prema svojstvima paranorme $\|\cdot\|$ biće:

$$|r|\,\|p(x)\|^* = |r| \bigwedge_{z\in Z}\{\|x - z\|\} = \bigwedge_{z\in Z}\{|r|\,\|x - z\|\} =$$

$$= \bigwedge_{z\in Z}\{\|r\,x - r\,z\|\} = \bigwedge_{z\in rZ}\{\|r\,x - z\|\} \geqslant \bigwedge_{z\in Z}\{\|r\,x - z\|\} = \|p(rx)\|^*$$

odnosno $|r|\,\|p(x)\|^* \geqslant \|p(rx)\|^*$. Slično se dokazuje da je $|r|\,\|p(x)\|^* \leqslant \|p(rx)\|^*$, pa je zato $\|p(rx)\|^* = |r|\,\|p(x)\|^*$ za svaki realni broj r i svako $p(x) \in X/Z$.

Dokažimo da je ispunjen uslov (3) definicije 1.2.6. Kako za $k \in K^\Delta$ i svaki skup A odozdo ograničen u R^Δ mora biti $k(\bigwedge A) = \bigwedge(kA)$, tada je

$$\|p(x) + p(y)\|^* = \|p(x+y)\|^* = \bigwedge_{z\in Z}\{\|x + y - z\|\} =$$

$$= \bigwedge_{u,v\in Z}\{\|x + y - u - v\|\} \leqslant \bigwedge_{u,v\in Z}\{k\cdot(\|x - u\| + \|y - v\|)\} =$$

$$= k\Big(\bigwedge_{u\in Z}\{\|x - u\|\} + \bigwedge_{v\in Z}\{\|y - v\|\}\Big) = k\cdot(\|p(x)\|^* + \|p(y)\|^*),$$

odnosno

$$\|p(x) + p(y)\|^* \leq k(\|p(x)\|^* + \|p(y)\|^*)$$

za svako $p(x), p(y) \in X/Z$. Znači, preslikavanje $\|\cdot\|^* : X/Z \to R^\Delta$ je paranorma na X/Z nad polupoljem R^Δ.

Dokažimo da je ispunjen uslov (4). Primetimo da je skup Z zatvoren u normiranom linearnom prostoru. Pretpostavimo da je

$$\|p(x)\|^* = \bigwedge_{z \in Z} \{\|x - z\|\} = 0.$$

Tada je $x \in \overline{Z} = Z$ i zato je $p(x) = Z$. Dakle, $(X/Z, \|\cdot\|^*, R^\Delta)$ je slabo normirani linearni prostor nad tihonovskim polupoljem R^Δ.

Definicija 2.1.1. Paranormirani linearni prostor $(X/Z, \|\cdot\|^*, R^\Delta)$ zove se paranormirani linearni količnik-prostor nad tihonovskim polupoljem R^Δ paranormiranog linearnog prostora $(X, \|\cdot\|, R^\Delta)$, a paranorma $\| \ \|^*$ zove se količnik-paranorma na X/Z nad polupoljem R^Δ.

S. Kasahara je u radu [1] pokazao da je svaki paranormirani linearni prostor $(X, \|\cdot\|, E)$ nad topološkim polupoljem E linearni topološki prostor (X, t) i da njegovu otvorenu okolinsku bazu nule obrazuju skupovi $\{x : x \in X \text{ i } \|x\| \in O_m\}$ kad m prolazi skupom Δ^*. Stoga je i svaki paranormirani linearni količnik-prostor $(X/Z, \|\cdot\|^*, R^\Delta)$ paranormiranog linearnog prostora $(X, \|\cdot\|, R^\Delta)$ nad polupoljem R^Δ linearni topološki prostor i njegovu okolinsku bazu nule obrazuju skupovi $\{p(x) : p(x) \in X/Z$ i $\|p(x)\|^* \in O_m\}$ kada m prolazi skupom Δ^*.

Neka je Δ ma koji neprazan skup i neka su X_i neprazni skupovi za svako $i \in \Delta$. Kombinirani proizvod $\prod_{i \in \Delta} X_i$ je skup svih funkcija x definisanih na skupu Δ takvih da je $x(i) \in X_i$ za svako $i \in \Delta$.

Stav 2.1.2. Neka su $(X_i, \|\cdot\|_i, R^1)$ normirani linearni prostori za svako $i \in \Delta$. Definišimo sada preslikavanje

$$\|\cdot\|: X \to \overline{K^\Delta}$$

kombiniranog proizvoda $X = \prod_{i\in\Delta} X_i$ u tihonovsko polupolje R^Δ tako da je

$$\|x\|(i) = \|x(i)\|_i$$

za svako $x \in X$ i svako $i \in \Delta$. Tada je $(X, \|\cdot\|, R^\Delta)$ slabo normirani prostor nad polupoljem R^Δ.

Dokaz. Za svako $x \in X$ je $\|x(i)\|_i \geqslant 0$ za svako $i \in \Delta$ pa je zato $\|x\| \geqslant 0$ u polupolju R^Δ. Znači, ispunjen je uslov (1) definicije 1.2.6.

Za svako $i \in \Delta$ je $\|x(i)\|_i = 0$ u R^1, tada i samo tada, kada je $x(i) = 0$ odakle sledi da je $\|x\| = 0$ u polupolju R^Δ, tada i samo tada, kada je $x = 0$. Dakle, uslov (4) definicije 1.2.6. je ispunjen.

Neka je r realan broj i $x \in X$. Kako je

$$\|r\ x\|(i) = \|r\ x(i)\|_i = |r|\,\|x(i)\|_i = (|r|\,\|x\|)(i)$$

za svako $i \in \Delta$, tada je $\|r\ x\| = |r|\,\|x\|$, što znači da je ispunjen uslov (2) definicije 1.2.6.

Za svako $x, y \in X$ i svako $i \in \Delta$ je

$$\|x + y\|(i) = \|x(i) + y(i)\|_i \leqslant \|x(i)\|_i + \|y(i)\|_i =$$

$$= \|x\|(i) + \|y\|(i) = (\|x\| + \|y\|)(i)$$

što znači da je ispunjen uslov $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ u polupolju

R^{Δ}. Prema tome, preslikavanje $\|\cdot\|: X \to R^{\Delta}$ je norma na X nad polupoljem R^{Δ}.

Definicija 2.1.2. Slabo normirani linearni prostor$(\prod_{i\in\Delta} X_i, \|\cdot\|, R^{\Delta})$ zove se slabo normirani linearni proizvod-prostor nad tihonovskim polupoljem R^{Δ} normiranih linearnih prostora $(X_i, \|\cdot\|_i, R^1)$, $i \in \Delta$.

2.2. FIKSNE TAČKE U SLABO NORMIRANIM PROSTORIMA NAD TOPOLOŠKIM POLUPOLJIMA

Neka je X konveksan podskup slabo normiranog linearnog prostora nad topološkim polupoljem. U ovom paragrafu dati su dovoljni uslovi za egzistenciju bar jedne fiksne tačke preslikavanja skupa X u sebe sama. U radu uopštavam rezultate Lj. B. Ćirića , B. E. Rhoades-a i C.S.Wong-a.

Stav 2.2.1. Neka je X zatvoren konveksan podskup slabo normiranog linearnog prostora nad topološkim polupoljem E i $T : X \to X$ preslikavanje skupa X u sebe sama koje ispunjava uslov

$$(2.2.1.)\qquad \|Tx - Ty\| \leqslant r\,\|x - y\| + s(\|x-Tx\| + \|y - Ty\|) + t(\|x - Ty\| + \|y - Tx\|)$$

za svako $x,y \in X$, gde su r,s i t nenegativni realni brojevi pri čemu je $s + t < 1$. Neka je $x_0 \in X$ i

$$(2.2.2.)\qquad x_{n+1} = (1 - c_n)x_n + c_n\,Tx_n \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

Mann-ova rekurentna formula, gde je $\{c_n\}$ niz realnih brojeva sa svojstvom da je $c_0 = 1$, $0 < c_n \leqslant 1$ za svaki prirodan broj $n \in N$ i

$$(2.2.3.)\qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = h > 0.$$

Ako niz $\{x_n\}$ konvergira ka tački $u \in X$, onda je u fiksna tačka preslikavanja T.

Dokaz. Kako je X konveksan skup, $x_0 \in X$ i T preslikavanje skupa X u sebe sama , tada iz (2.2.2.) sledi da je $x_1 \in X$,

$x_2 = (1 - c_1)x_1 + c_1 Tx_1 \in X$. Uopšte $x_n \in X$ za svaki prirodan broj $n \in N$.

Koristeći svojstva norme $\|\cdot\|$ i definiciju niza (2.2.2.) biće

$$\|x_{n+1} - Tu\| = \|(1 - c_n)(x_n - Tu) + c_n(Tx_n - Tu)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(1 - c_n)(x_n - Tu)\| + \|c_n(Tx_n - Tu)\| \leqslant$$

$$\leqslant (1 - c_n)\|x_n - Tu\| + c_n \|Tx_n - Tu\|,$$

odnosno

(2.2.4.) $$\|x_{n+1} - Tu\| \leqslant (1 - c_n)\|x_n - Tu\| + c_n \|Tx_n - Tu\|.$$

Iz uslova (2.2.1.) neposredno dobijamo

(2.2.5.) $$\|Tx_n - Tu\| \leqslant r\|x_n - u\| + s(\|x_n - Tx_n\| + \|u - Tu\|) +$$

$$+ t(\|x_n - Tu\| + \|u - Tx_n\|).$$

Za proizvoljnu okolinu U nule u topološkom polupolju E postoji zasićena okolina V nule sa svojstvom $V + V \subset U$. Kako niz $\{x_n\}$ po pretpostavci konvergira ka tački u, tada za okolinu V postoji prirodan broj n_V tako da je

$$\|x_n - u\| \in V \qquad \text{i} \qquad \|x_{n+1} - u\| \in V$$

za svako $n > n_V$. Zbog uslova (3) definicije 1.2.6. biće

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \|x_{n+1} - u\| + \|x_n - u\|$$

i zato je

(2.2.6.) $$\|x_{n+1} - x_n\| \in U$$

za svako $n > n_V$ (vidi M. Antonovskij, V. Boltjanskij, T. Sarymsakov [2], str. 20.). Prema definiciji niza (2.2.2.) dobijamo da je

$$x_{n+1} - x_n = c_n(Tx_n - x_n)$$

i zato je

$$\|Tx_n - x_n\| = \|x_{n+1} - x_n\| c_n^{-1}.$$

Kako je $0 \cdot c_n^{-1} = 0$ za svaki prirodan broj $n \in N$, tada za proizvoljnu okolinu W nule u topološkom polupolju E postoji okolina U nule tako da je

$$\|Tx_n - x_n\| \in c_n^{-1} U \subset W$$

za svako $n > n_V$. Prema tome, biće

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \tag{2.2.7.}$$

Iz nejednakosti (2.2.4.) i (2.2.5.) dobijamo

$$\|u - Tu\| \leqslant \|u - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - Tu\| \leqslant$$

$$\leqslant \|u - x_{n+1}\| + (1 - c_n) \|x_n - Tu\| + c_n \|Tx_n - Tu\| \leqslant$$

$$\leqslant \|u - x_{n+1}\| + (1 - c_n) \|x_n - Tu\| + c_n\{r \|x_n - u\| +$$

$$+ s(\|x_n - Tx_n\| + \|u - Tu\|) + t(\|x_n - Tu\| + \|u - Tx_n\|)\}.$$

Odatle, s obzirom na (2.2.3.) i (2.2.7.), biće

$$\|u - Tu\| \leqslant (1 - h)\|u - Tu\| + h(s + t)\|u - Tu\| ,$$

kada $n \to +\infty$. Stoga je

$$(1 - s - t)h \|u - Tu\| \leq 0.$$

i zbog uslova $s + t < 1$ i $h > 0$ sledi da je $Tu = u$. Dakle, u je fiksna tačka preslikavanja T.

Navodim posledice prethodnog stava:

Posledica 2.2.1. (Lj. B. Ćirić [19], st. 3.). Neka je X zatvoren konveksan podskup normiranog linearnog prostora i neka je T preslikavanje skupa X u sebe sama koje ispunjava uslov

$$(2.2.8.) \qquad d(Tx, Ty) \leq$$

$$\leq q \max \{c\, d(x,y), [d(x,Tx) + d(y,Ty)], [d(x,Ty) + d(y,Tx)]\}$$

za svako $x,y \in X$, gde je $c \geq 0$ i $0 \leq q < 1$. Ako niz

$$(2.2.9.) \qquad x_{n+1} = (1 - t)x_n + t\, Tx_n,$$

$n = 0,1,2,\ldots$, $x_o \in X$, $0 < t < 1$, konvergira u X, onda T ima fiksnu tačku.

Posledica 2.2.2. (B. E. Rhoades [1], st. 1.). Neka je X zatvoren konveksan podskup normiranog linearnog prostora, T preslikavanje skupa X u sebe sama koje ispunjava uslov (2.2.8.) na X i $c_o = 1$, $0 < c_n \leq 1$ i $\lim_{n\to\infty} c_n = h > 0$. Ako niz

$$x_{n+1} = (1 - c_n)x_n + c_n\, Tx_n, \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

gde je $x_o \in X$, konvergira u X, onda T ima fiksnu tačku.

Posledica 2.2.3. (C.S. Wong [1], stav 3.). Neka je X zatvoren konveksan podskup normiranog linearnog prostora nad poljem realnih brojeva i T preslikavanje skupa X u sebe sama koje ispunjava uslov (2.2.1.) za svako $x,y \in X$, gde su r,s i t nenegativni realni brojevi pri čemu je $r + 2s + 2t = 1$. Ako niz (2.2.9.) konvergira ka tački $u \in X$, tada je u fiksna tačka preslikavanja T.

5. PRODUŽENJE NEPREKIDNIH PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA NAD TIHONOVSKIM POLUPOLJIMA I METRIZACIJA TOPOLOŠKIH KOLIČNIK-GRUPA NAD TIHONOVSKIM POLUPOLJIMA

Za skup A metričkog prostora (X,d,R^{Δ}) kažemo da je ograničen ako je skup $\{d(x,y) : x,y \in A\}$ odozgo ograničen u polupolju R^{Δ}. Dijametar $\vartheta(A)$ ograničenog skupa $A \subset X$ je $\vartheta(A) = \bigvee \{d(x,y) : x,y \in A\}$.

Za metriku d metričkog prostora (X,d,R^{Δ}) kaže se da je ograničena, ako je prostor X ograničen. Za metriku d kaže se da je pravilna, ako je ona ograničena i usmerena.

Neka je X topološki prostor, A neprazan deo skupa X, $\mathcal{F}_x$ familija svih otvorenih okolina F tačke $x \in X$, d pravilna metrika metričkog prostora (Y,d,R^{Δ}) i $f : A \to Y$. Oscilacijom funkcije f u tački $x \in \bar{A}$ zove se donja međa skupa $\{\vartheta(f(A \cap F)) : F \in \mathcal{F}_x\}$ u oznaci

$$\omega(x,f) = \bigwedge \{\vartheta(f(A \cap F)) : F \in \mathcal{F}_x\}.$$

U ovom odeljku uopštavam definiciju uniformno neprekidnog preslikavanja na metričke prostore nad topološkim polupoljima. U prvom delu ovog odeljka uopštavam dva poznata stava u kojima se umesto metričkog prostora nad topološkim polupoljem operiše sa običnim metrički prostorom.

3.1. O PRODUŽENJU NEPREKIDNIH PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA NAD TIHONOVSKIM POLUPOLJIMA

Definicija 3.1.1. Neka su (X,d,R^{Δ}) i (Y,ρ,R^{Δ}) metrički prostori nad tihonovskim polupoljem R^{Δ}. Za jednoznačno preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je uniformno neprekidno na X ako za svaku okolinu U nule u R^{Δ} postoji okolina V nule u R^{Δ} tako da za svaki par tačaka $x,x' \in X$ iz $d(x,x') \in V$ sledi $\rho(f(x), f(x')) \in U$.

Stav 3.1.1. Neka su (X,d,R^{Δ}) i (Y,ρ,R^{Δ}) metrički prostori nad tihonovskim polupoljem R^{Δ} i neka je $f : X \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje. Ako je $\{x_m\}$ Košijev niz tipa Δ^* u metričkom prostoru (X,d,R^{Δ}), tada je $\{f(x_m)\}$ Košijev niz tipa Δ^* u metričkom prostoru (Y,ρ,R^{Δ}).

Dokaz. Kako je preslikavanje f uniformno neprekidno na X tada za svaku okolinu U nule u R^{Δ} postoji okolina V nule u R^{Δ} tako da je $\rho(f(x),f(x')) \in U$ za svaki par tačaka $x,x' \in X$ za koje je $d(x,x') \in V$. S druge strane, pošto je $\{x_m\}$ Košijev niz tipa Δ^* u X, tada za okolinu V nule u R^{Δ} postoji element $m_V \in \Delta^*$ tako da je $d(x_{m_1},x_{m_2}) \in V$ za svaki par m_1, $m_2 > m_V$ i zato je $\rho(f(x_{m_1}), f(x_{m_2})) \in U$ za svako m_1, $m_2 > m_V$, što znači da je $\{f(x_m)\}$ Košijev niz tipa Δ^* u prostoru Y.

Stav 3.1.2. Neka je (X,d,R^{Δ}) metrički prostor i S njegov podskup svuda gust u X, neka je (Y,ρ,R^{Δ}) potpun metrički prostor i neka je $f : S \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje. Tada postoji jedno jedino neprekidno preslikavanje $g : X \to Y$ koje produžuje f na X, $g = f$ na S. Sem toga, preslikavanje g je uniformno neprekidno.

Dokaz. Kako je skup S svuda gust u X, tada za ma koju tačku $x \in X \setminus S$ postoji niz tačaka s_m iz skupa S da niz $\{s_m\}$ tipa Δ^* u metričkom prostoru (X,d,R^Δ) konvergira tački x. Po pretpostavci preslikavanje $f : S \to Y$ je uniformno neprekidno i $\{s_m\}$ je Košijev niz tipa Δ^* iz S pa prema prethodnom stavu 3.1.1. niz $\{f(s_m)\}$ tipa Δ^* je Košijev niz u Y. Pošto je (Y,ρ,R^Δ) potpun metrički prostor, onda Košijev niz $\{f(s_m)\}$ tipa Δ^* u prostoru (Y,ρ,R^Δ) konvergira tački $\lim\limits_{m\in\Delta^*} f(s_m) \in Y$. Stavimo da je $g(x) = \lim\limits_{m\in\Delta^*} f(s_m)$, gde je $s_m \in S$ i $\lim\limits_{m\in\Delta^*} s_m = x$. Tada je preslikavanje g definisano na čitavom skupu X i pri tome je $g(x) = f(x)$ za svako $x \in S$.

Dokažimo da je preslikavanje $g : X \to Y$ uniformno neprekidno na X. Primetimo da je tihonovsko polupolje R^Δ regularan topološki prostor. To znači da za svaku okolinu U nule u R^Δ postoji okolina W nule u R^Δ sa osobinom da je $\overline{W} \subset U$. Kako je f uniformno neprekidno preslikavanje na S tada za okolinu W nule u R^Δ postoji okolina V nule u R^Δ tako da je $\rho(f(s), f(s') \in W$ za svaki par tačaka $s,s' \in S$ za koje je $d(s,s') \in V$.

Neka je $x,x' \in X$, $d(x, x') \in V$ i neka su $\{s_m\}$ i $\{s'_m\}$ nizovi tipa Δ^* iz S koji konvergiraju respektivno tačkama x i x'. Napomenimo da je niz $\{d(s_m, s'_m)\}$ tipa Δ^* Košijev niz u R^Δ (vid. M. Antonovskij, V. Boltjanskij, T. Sarymsakov [2], str. 34.). Takav niz u potpunom metričkom prostoru R^Δ je konvergentan i konvergira nekoj tački iz R^Δ. Pošto je metrika $d : X \times X \to R^\Delta$ neprekidno preslikavanje, tada mora biti

$$\lim_{m\in\Delta^*} d(s_m,s'_m) = d(\lim_{m\in\Delta^*} s_m, \lim_{m\in\Delta^*} s'_m) = d(x,x')\in V.$$

To znači da za okolinu V nule u R^Δ postoji element $m_V\in\Delta^*$ tako da je $d(s_m,s'_m)\in V$ za svako $m>m_V$. S obzirom da je f uniformno neprekidno preslikavanje na S, imaćemo da je $\rho(f(s_m),f(s'_m))\in W$ za svako $m>m_V$ odakle sledi da je

$$\rho(g(x),g(x') = \rho(\lim_{m\in\Delta^*} f(s_m), \lim_{m\in\Delta^*} f(s'_m)) =$$

$$= \lim_{m\in\Delta^*}\rho(f(s_m), f(s'_m))\in \overline{W}\subset U,$$

što znači da je preslikavanje g uniformno neprekidno na X.

Svako uniformno neprekidno preslikavanje metričkog prostora nad tihonovskim polupoljem u metrički prostor nad tihonovskim polupoljem je u isti mah i neprekidno.

Na kraju, s obzirom da je metrički prostor (X,ρ,R^Δ) Hausdorfov postoji jedno jedino neprekidno preslikavanje koje produžuje f na X tako da je g = f na S.

To je uopštenje poznatog stava (vidi,na primer,S. Mardešić [1], stav 25. str. 201.) u kojem se umesto metričkog prostora nad tihonovskim polupoljem operiše sa običnim metričkim prostorom .

Sledećim stavom dati su dovoljni uslovi za produženje neprekidnog preslikavanja definisanog na skupu A metričkog prostora nad tihonovskim polupoljem na skup svih tačaka $x\in\overline{A}$ čija je oscilacija jednaka nuli.

Stav 5.1.5. Neka je (X,d,R^{Δ}) metrički prostor, A neprazan deo skupa X, ρ pravilna metrika potpunog metričkog prostora (Y,ρ,R^{Δ}), $f : A \to Y$ neprekidno preslikavanje i S skup svih tačaka $x \in \overline{A}$ sa osobinom $\omega(x,f) = 0$. Tada postoji jedno jedino neprekidno preslikavanje $g : S \to Y$ koje produžuje f na S, $g = f$ na A.

Dokaz. Neka je $x \in S \setminus A$. Tada u skupu A postoji takav niz tačaka x_m da niz $\{x_m\}$ tipa Δ^* u prostoru (X,d,R^{Δ}) konvergira tački x, tj. da je $\lim_{m\in\Delta^*} x_m = x$. Za svako $m_o \in \Delta^*$ stavimo

$$A_{m_o} = \bigcup_{\substack{m > m_o \\ m\in\Delta^*}} x_m$$

Stoga za $m_1 > m_o$ $(m_1, m_o \in \Delta^*)$ imamo

$$A_{m_1} = \bigcup_{\substack{m > m_1 \\ m\in\Delta^*}} x_m \subset \bigcup_{\substack{m > m_o \\ m\in M}} x_m = A_{m_o}$$

Iz uslova $\omega(x,f) = 0$ sledi

$$\lim_{m\in\Delta^*} \vartheta(f(A_m)) = 0.$$

Zato za proizvoljnu okolinu U nule polupolja R^{Δ} postoji element $m_U \in M$ takav da je $\vartheta(f(A_{m_U})) \in U$. Za $m_1 > m_U$ i $m_2 > m_U$ je

$$f(A_{m_1}) \subset f(A_{m_U}) \qquad \text{i} \qquad f(A_{m_2}) \subset f(A_{m_U}),$$

pa je zato

$$f(x_{m_1}) \in f(A_{m_U}) \qquad \text{i} \qquad f(x_{m_2}) \in f(A_{m_U}).$$

Prema tome, mora biti

$$\rho(f(x_{m_1}), f(x_{m_2})) \in U$$

za svako $m_1, m_2 > m_U$, odakle sledi da je niz $\{f(x_m)\}$ tipa Δ^* Cauchy-ev. Kako je (Y, ρ, R^{Δ}) potpun metrički prostor, tada Cauchy-ev niz $\{f(x_m)\}$ tipa Δ^* u prostoru $(Y, \rho\, R^{\Delta})$ konvergira nekoj tački u Y. Stavimo $g(x) = \lim_{m \in \Delta^*} f(x_m)$. Tada je preslikavanje g definisano na skupu S i pri tome je $g = f$ na A.

Treba dokazati da je preslikavanje $g : S \to Y$ neprekidno u tački $x \in S \setminus A$, tj. $\omega(x,g) = 0$. Kako je $g(S \cap F) \subset \overline{f(A \cap F)}$, gde je F otvoren skup u prostoru X, tada je $\vartheta(g(S \cap F)) \leq$ $\leq \vartheta(\overline{f(A \cap F)}) = \vartheta(f(A \cap F))$ (vidi K. Kuratovskij [1], str. 433.). Dakle, biće

$$\omega(x,g) = \bigwedge\{\vartheta(g(S \cap F)) : F \in \mathcal{F}_x\} \leq$$

$$\leq \bigwedge\{\vartheta(f(A \cap F)) : F \in \mathcal{F}_x\} = \omega(x,f) = 0,$$

odakle sledi da je preslikavanje g neprekidno u tački $x \in S$.

Primer 3.1.1. Neka je R^1 polje realnih brojeva i $f: x \to \sin \frac{1}{x}$ preslikavanje skupa $R^1 \setminus \{0\}$ u skup R^1. Tada se preslikavanje f ne može produžiti neprekidno na skup R^1, jer je oscilacija $\omega(f,0) = 2$.

3.2. METRIZACIJA TOPOLOŠKE KOLIČNIK-GRUPE NAD TIHONOVSKIM POLUPOLJEM

Neka je (X,d,R^{Δ}) metrički prostor nad tihonovskim polupoljem R^{Δ}. Rastojanje nepraznih skupova $A,B \subset X$ je donja međa $\bigwedge\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\{d(x,y)\}$ u oznaci

$$D(A,B) = \bigwedge_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\{d(x,y)\}.$$

Neka je X topološka grupa (vidi L. S. Pontrjagin [1], str. 104 ili N. Burbaki [3], str. 11) i neka je R^{Δ} tihonovsko polupolje. Za metriku $d : X\times X \to \overline{K^{\Delta}}$ na X nad polupoljem R^{Δ} kaže se da je invarijantna, ako je $d(x,y) = d(ax,ay)$ za svako $a,x,y \in X$. M. Antonovskij, V. Boltjanskij i T. Sarymsakov su u radu [2] pokazali da je svaka topološka grupa invarijantno metrizabilna nad nekim tihonovskim polupoljem R^{Δ}.

Neka je H zatvorena podgrupa topološke grupe X i neka je X/H prostor levih (desnih) klasa topološke grupe X po podgrupi H. Napomenimo da je X/H potpuno regularan topološki prostor (vidi L. S. Pontrjagin [1], str. 115.) i da je zato metrizabilan nad nekim tihonovskim polupoljem R^{Δ}. Neka je (X,d,R^{Δ}) metrički prostor. Za svako xH, $yH \in XH$ stavimo

$$D(xH,yH) = \bigwedge_{\substack{a\in H\\ b\in H}}\{d(xa,yb)\}.$$

Tada je jednoznačno preslikavanje $D : X/H \times X/H \to \overline{K^{\Delta}}$ invarijantna metrika nad R^{Δ} (vidi A. Jaiswal i B. Singh, [1]) i $(X/H, D, R^{\Delta})$ metrički prostor.

Stav 3.2.1. Neka je X topološka grupa i H njena zatvorena podgrupa. Ako je invarijantna metrika d metričkog prostora (X,d,R^{Δ}) usmerena, onda je i invarijantna metrika D metričkog prostora $(X/H, D, R^{\Delta})$, takođe, usmerena.

Dokaz. Po pretpostavci $(\Delta, \underset{(d)}{\geqslant})$ je usmeren skup. Neka je $q \underset{(d)}{\geqslant} q'$ za $q,q' \in \Delta$, tj. $(d(x,y))(q) \geqslant (d(x,y))(q')$ za svako $x,y \in X$. Odatle i s obzirom da je $(\bigwedge M)(q) = \inf\limits_{x\in M}\{x(q)\}$ za svaki odozdo ograničen skup $M \subset R^{\Delta}$ i $q \in \Delta$, biće:

$$(D(xH,yH))(q) = (\bigwedge_{a,b\in H}\{d(xa,yb)\})(q) =$$

$$= \inf_{a,b\in H}\{(d(xa,yb))(q)\} \geqslant \inf_{a,b\in H}\{(d(xa,yb))(q')\} =$$

$$= (\bigwedge_{a,b\in H}\{d(xa,yb)\})(q') = (D(xH,yH))(q')$$

za svako $xH, yH \in X/H$, pa je $q \underset{(D)}{\geqslant} q'$. Za svaki par $q',q'' \in \Delta$ postoje $q \in \Delta$ sa osobinom da je $q \underset{(d)}{\geqslant} q'$ i $q \underset{(d)}{\geqslant} q''$. Prema prethodnom razmatranju biće $q \underset{(D)}{\geqslant} q'$ i $q \underset{(D)}{\geqslant} q''$ što znači da je $(\Delta, \underset{(D)}{\geqslant})$ usmeren skup. Dakle, metrika D na X/H nad R^{Δ} je usmerena.

Neka je X topološka grupa i H njena zatvorena podgrupa. Preslikavanje $f : x \to xH$ metričkog prostora (X,d,R^{Δ}) na metrički prostor $(X/H,D,R^{\Delta})$ zove se kanonično. Lako je pokazati da je preslikavanje f uniformno neprekidno na X.

Ako je H invarijantna podgrupa topološke grupe X, onda je X/H topološka grupa. Ona se zove topološka količnik-grupa topološke grupe X po invarijantnoj podgrupi H.

Stav 3.2.2. Neka je X topološka grupa i H njena kompaktna invarijantna podgrupa i neka je d usmerena metrika potpunog metričkog prostora (X,d,R^{Δ}) nad polupoljem R^{Δ}. Tada je topološka količnik-grupa G/H topološke grupe X po invarijantnoj podgrupi H potpun metrički prostor $(X/H,D,R^{\Delta})$ nad polupoljem R^{Δ}.

Dokaz. Neka je $\{A_p\}$ Košijev niz tipa Δ^* u metričkom prostoru $(X/H,D,R^{\Delta})$. Tada za svako $m \in \Delta^*$ postoji element $p_m \in \Delta^*$ tako da je $D(A_{p_1},A_{p_2}) \in O_m$ za svako $p_1,p_2 \geqslant p_m$. Stavimo da je $B_m = A_{g(m)}$ za svako $m \in \Delta^*$, gde je $g : \Delta^* \to \Delta^*$ kofinalno preslikavanje. (vidi M. Antonovskij, V. Boltjanskij, T. Sarymsakov, [4], str. 202.). Tim načinom dobijeni podniz $\{B_m\}$ tipa Δ^* je Košijev niz u X/H, tj. za svako $m \in \Delta^*$ postoji $m_1,m_2 \in \Delta^*$ tako da je $D(B_{m_1},B_{m_2}) \in O_m$ čim je $m_1,m_2 \geqslant m$.

Kako su skupovi xH za $x \in X$ kompaktni u topološkom prostoru X, tada za svaki član $B_m \in X/H$ podniza $\{B_m\}$ tipa Δ^* postoji element $x_m \in X$ sa svojstvom da je $f(x_m) = B_m$ i da je $d(x_{m_1}, x_{m_2}) \in O_m$, čim je $m_1,m_2 \geqslant m$. Stoga je $\{x_m\}$ Košijev niz tipa Δ^* u metričkom prostoru (X,d,R^{Δ}). Otuda i s obzirom da je (X,d,R^{Δ}) potpun metrički prostor sledi da niz $\{x_m\}$ tipa Δ^* konvergira nekoj tački $x \in X$, tj. $\lim\limits_{m\in\Delta^*} x_m = x$. No kanonično preslikavanje f je neprekidno na X pa zato mora biti.

$$\lim_{m\in\Delta^*} B_m = \lim_{m\in\Delta^*} f(x_m) = f(\lim_{m\in\Delta^*} x_m) = f(x) = A \in X/H.$$

S druge strane, uzimajući u obzir da je preslikavanje g kofinalno i da podniz $\{B_m\}$ tipa Δ^* konvergira tački A, tada i Košijev niz $\{A_p\}$ tipa Δ^* u prostoru $(X/H,D,R^\Delta)$ konvergira tački A. Dakle, metrički prostor $(X/H,D,R^\Delta)$ je potpun.

Definicija 3.2.1. Neka je (X,d,R^Δ) metrički prostor nad tihonovskim polupoljem R^Δ i M neprazan podskup skupa X. Za skup M kažemo da je d-konveksan nad polupoljem R^Δ, ako za svaki par tačaka $x,z \in M$ postoji $y \in M$ tako da je ispunjen uslov

$$d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$$

za $x \neq y$ i $y \neq z$.

To je uopštenje definicije iz radova P.S. Soltana i M. Lassaka u kojoj se operiše sa metričkim prostorima nad poljem realnih brojeva.

Stav 3.2.3. Neka je topološka grupa X invarijantno metrizabilna metrikom d nad tihonovskim polupoljem R^Δ i neka $M \subset X$ bude d-konveksan skup nad R^Δ. Tada je skup bM d-konveksan nad R^Δ za svako $b \in X$.

Dokaz. Neka su tačke $x,z \in M$, $y \in M$. Kako je M po pretpostavci d-konveksan skup, tada postoji $y \in M$ tako da je $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$. S druge strane, metrika d je invarijantna pa zato za tačke bx i bz iz bM postoji tačka $by \in bM$ tako da je

$$d(bx,by) + d(by,bz) = d(bx,bz),$$

što znači da je skup bM, takođe, d-konveksan nad polupoljem R^Δ.

Neka je Δ ma koji neprazan skup i neka su X_i neprazni skupovi za svako $i \in \Delta$. Kombinirani proizvod $X = \prod_{i\in\Delta} X_i$ je skup svih funkcija x definisanih na skupu Δ takvih da je $x(i) \in X_i$

za svako $i \in \Delta$.

Stav 3.2.4. Neka su (X_i, d_i, R^1) metrički prostori nad R^1 za svako $i \in \Delta$ i neka $M_i \subset X_i$ budu d_i-konveksni skupovi nad R^1.

Definišimo sada preslikavanje

$$d : X \to \overline{R^\Delta}$$

kombiniranog proizvoda $X = \prod_{i \in \Delta} X_i$ u tihonovsko polupolje R^Δ tako da je

$$(d(x,y))(i) = d_i(x(i),y(i))$$

za svako $x,y \in X$ i svako $i \in \Delta$.

Tada je kombinirani proizvod $M = \prod_{i \in \Delta} M_i$ d-konveksan skup nad polupoljem R^Δ u metričkom prostoru (X,d,R^Δ).

Dokaz. Neka su tačke $x,z \in M$, $y \in X$ i d metrika na X nad polupoljem R^Δ. Treba dokazati da iz jednačine

$$d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$$

sledi da je $y \in M$. Prema definiciji metrike d na X mora biti

$$d_i(x(i),y(i)) + d_i(y(i),z(i)) = d_i(x(i),z(i))$$

za svako $i \in \Delta$. S druge strane, skupovi M_i su d_i konveksni nad R^1 pa zato za $x(i)$, $z(i) \in M_i$ postoji $y(i) \in M_i$ za svako $i \in \Delta$, odakle sledi da je $y \in M$. Dakle, skup M je d-konveksan nad R^Δ u metričkom prostoru (X,d,R^Δ), što je trebalo dokazati.

4. FIKSNE TAČKE UNIFORMNO KONTRAKTIVNIH PRESLIKAVANJA U UNIFORMNIM PROSTORIMA

Neka je (P,d,R^{Δ}) pseudometrički prostor nad tihonovskim polupoljem R^{Δ}. Definišimo proizvod $r\cdot S(U)$ elementa $r\in K^{\Delta}\subset R^{\Delta}$ i okruženja $S(U)\subset P^2$ ovako

$$r\cdot S(U) = \left\{(x,y) : x,y\in P \quad \text{i} \quad d(x,y)\in rU\right\}$$

Neposredno se vidi da je $r\cdot S(U) = S(rU)$.

Sa Δ^* označimo skup svih konačnih podskupova skupa Δ. Za svaku okolinu U nule u tihonovskom polupolju R^{Δ} postoji okolina U_p^m $(m\in\Delta^*)$ nule sa osobinom da je $U_p^m\subset U$. Dakle, familija $\left\{U_p^m : m\in\Delta^*,\ p\in R,\ p>0\right\}$ obrazuje okolinsku bazu nule u tihonovskom polupolju R^{Δ}.

Stav 4. 1. Neka je U ma koja zasićena okolina nule u tihonovskom polupolju R^{Δ}. Za svako okruženje $S(U)$ dijagonale kombiniranog proizvoda P^2 i pozitivne elemente r_1 i r_2 polupolja R^{Δ} važi uslov

$$r_1\cdot S(U)\subset r_2\cdot S(U),$$

ako je $r_1<r_2$.

Dokaz. Neka je $(x,y)\in r_1\, S(U)$. Tada je $d(x,y)\in r_1\cdot U$ i zato je $d(x,y) = r_1 b$, gde je $b\in U$ i $b\geqslant 0$. Kako je $r_1<r_2$ i $b\geqslant 0$ onda je $r_1 b\leqslant r_2 b\in r_2\, U$. S obzirom da je okolina U nule zasićena tada mora biti $d(x,y) = r_1 b\in r_2\, U$. Zato je $(x,y)\in r_2\cdot S(U)$.

Stav 4. 2. Za svako okruženje $S(U_p^m)$ dijagonale kombiniranog proizvoda P^2 i pozitivne elemente $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tihonovskog polupolja R^Δ važi uslov

$$S(r_1 \cdot U_p^m) \circ S(r_2 \cdot U_p^m) \circ \ldots \circ S(r_k \cdot U_p^m) \subset$$

$$\subset (r_1 + r_2 + \ldots + r_k)\, S(U_p^m).$$

Dokaz. Neka je $(x,y) \in S(r_1 \cdot U_p^m) \circ S(r_2 \cdot U_p^m) \circ \ldots \circ S(r_k \cdot U_p^m)$. Tada postoji niz tačaka $x = z_o, z_1, z_2, \ldots, z_k = y$ u P sa osobinom da je $(z_{i-1}, z_i) \in S(r_i U_p^m)$ za $i = 1,2,\ldots,k$. Stoga je

$$d(z_{i-1}, z_i) \in r_i U_p^m \qquad (i=1,2,3,\ldots,k)$$

i zato je

$$(d(z_{i-1}, z_i))(q) < r_i(q)p \qquad (i=1,2,3,\ldots,k)$$

za svako $q \in m$. Koristeći relaciju trougla, imaćemo

$$(d(x,y))(q) \leqslant (d(x,z_1))(q) + (d(z_1,z_2))(q) + \ldots +$$

$$+ (d(z_{k-1},y))(q) \leqslant (r_1(q) + r_2(q) + \ldots + r_k(q))p$$

za svako $q \in m$, odakle sledi

$$d(x,y) \in (r_1 + r_2 + \ldots + r_k) U_p^m .$$

Zato je

$$(x,y) \in (r_1 + r_2 + \ldots + r_k) \cdot S(U_p^m),$$

što je trebalo dokazati.

Neka je uniformna struktura $\mathcal{U}$ uniformnog prostora $(P,\mathcal{U})$ izvedena iz metrike metričkog prostora (P,d,R^{Δ}).

Za svaki par $(x,y) \in P^2$ tačaka $x,y \in P$ stavimo $X = (x,y)$. Svakom preslikavanju $f : P \to P$ prostora P u sebe sama korespondirajmo novo preslikavanje $F : P^2 \to P^2$ tako da je $FX = (f(x), f(y))$.

Definicija 4. 1. Neka je $(P,\mathcal{U})$ uniformni prostor i $F : P^2 \to P^2$ korespodentno preslikavanje preslikavanja $f : P \to P$ prostora P u sebe sama. Preslikavanje f naziva se (r,R^{Δ})-uniformno kontraktivno ako je ispunjen uslov

(4. 1.) Iz $X \in S(U)$ sledi $FX \in r\, S(U)$,

za svako $S(U) \in \mathcal{F}$, gde je $r \in K^{\Delta}$ i $r < 1$.

Stav 4. 3. Neka je uniformni prostor Weil-a $(P,\mathcal{U})$ nizovno potpun i neka f bude (r,R^{Δ})-uniformno kontraktivno preslikavanje prostora P u sebe sama. Tada preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku u P.

Dokaz. Uzmimo jedno određeno, inače ma koje, $x_o \in P$ i definišimo niz $\{x_n\}$ iz P stavljajući

(4. 2.) $$x_n = f x_{n-1} = f^n x_o$$

za svaki prirodan broj $n \in N$.

Napomenimo da za proizvoljnu okolinu U nule u tihonovskom polupolju R^{Δ} postoji zasićena okolina U_p^m nule u R^{Δ} sa svojstvom $U_p^m \subset U$. Lako je videti da postoji pozitivan realan broj t tako da je

$$X_o = (x_o, f(x_o)) \in S(tU_p^m) = V.$$

Iz uslova (4. 1.) i definicije niza (4. 2.) imaćemo:

$$(x_1, x_2) = X_1 = FX_o \in rV,$$

$$(x_2, x_3) = X_2 = FX_1 \in r^2V,$$

$$\vdots$$

$$(x_n, x_{n+1}) = X_n = FX_{n-1} \in r^nV.$$

Neka je k prirodan broj i neka je $k > n$. Kako je

$$(x_n, x_k) \in r^nV \circ r^{n+1}V \circ \ldots \circ r^{k-1}V,$$

prema stavu 4. 2. biće

$$(x_n, x_k) \in (r^n + r^{n+1} + \ldots + r^{k-1})\ V.$$

Odatle, prema stavu 4. 1, mora biti

$$(x_n, x_k) \in r^n(1 - r)^{-1}V$$

pa je

$$(x_n, x_k) \in r^n\ t(1 - r)^{-1}\ S(U_p^m).$$

Kako je $o < r < 1$ tada se može odrediti prirodan broj n_o tako da je $r^n t(1-r)^{-1} < 1$ za svako $n > n_o$. S obzirom da je U_p^m zasićena okolina nule imaćemo

$$r^n\ t(1 - r)^{-1}\ S(U_p^m) \subset S(U_p^m) \subset S(U)$$

čim je $n > n_o$ i zato

$$(x_n, x_k) \in S(U)$$

za svako $k > n > n_o$, što znači da je $\{x_n\}$ Košijev niz. Pošto je uniformni prostor $(P,\mathcal{U})$ nizovno potpun, tada niz $\{x_n\}$ konvergira nekoj tački $z \in P$. Za ma koje okruženje $W \in \mathcal{U}$ postoji okruženje $S(U) \in \mathcal{F}$ tako da je $S(U) \circ S(U) \subset W$. Dalje, za okruženje $S(U)$ postoji prirodan broj n_o tako da je $(z, x_n) \in S(U)$ za svako $n > n_o$ i zato je

$$(f(z), x_{n+1}) = (f(z), f(x_n)) \in r\, S(U) \subset S(U),$$

što znači da je

$$(z, f(z)) \in S(U) \circ S(U) \subset W.$$

S obzirom da je $(P,\mathcal{U})$ uniformni prostor Weil-a, lako se vidi da je $f(z) = z$. Dakle, $z \in P$ je fiksna tačka preslikavanja f.

Dokažimo da je z jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f. Pretpostavimo da je i $z' \in P$ fiksna tačka preslikavanja f. Stavimo da je $Z = (z, z')$. Za proizvoljno okruženje $W \in \mathcal{U}$ postoji okruženje $S(U_p^m)$ i pozitivan realan broj t tako da je

$$Z \in S(t\, U_p^m) = V.$$

Stoga iz uslova (4. 1.) imamo

$$Z = FZ \in rV,$$

$$Z = F^2 Z \in r^2 V,$$

$$\vdots$$

$$Z = F^n Z \in r^n V.$$

Kako je $0 < r < 1$ tada se može odrediti prirodan broj n_o tako da je $r^n t < 1$ za svako $n > n_o$. S obzirom na stav 4. 1, biće

$$r^n t\ S(U_p^m) \subset S(U_p^m)$$

čim je $n > n_o$ i zato je

$$Z \in S(U_p^m) \subset W.$$

Iz uslova da je $(P,\mathcal{U})$ uniformni prostor Weil-a i da je W proizvoljno okruženje dijagonale D u P^2 sledi da je $Z \in D$ odnosno $z = z'$. Prema tome, preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku $z \in P$.

To je uopštenje S. P. Acharya-evog stava 3. 1.iz rada [1] u kojem se umesto uniformnog prostora metrizabilnog nad tihonovskim polupoljem operiše sa uniformnim prostorom metrizabilnim nad poljem realnih brojeva.

U okvir te problematike ulaze rezultati S. N. Mishra, B. E. Rhoades-a [2] i Lj. B. Ćirića [20].

5. FIKSNE TAČKE JEDNOZNAČNIH I VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA

Teorija fiksnih tačaka predstavlja danas vrlo značajnu matematičku oblast. Od posebnog interesa su ispitivanja egzistencije jedinstvenih fiksnih tačaka.

U okvir ove problematike ulaze rezultati koje je Lj. Ćirić publikovao u radovima [1] - [20] , gde oslabljuje uslov kontraktivnosti i vrši uopštenje Banach-ovog stava. Potom ulaze rezultati M. R. Taskovića i C. S. Wong-a koji su publikovani u radovima [1] odnosno [2].

U ovom odeljku uopštavam uslov kontraktivnosti preslikavanja prostora u sebe sama koga je u radovima [1] i [2] uveo D. S. Jaggi i ispitujem dovoljne uslove za egzistenciju jedinstvene fiksne tačke preslikavanja koje ispunjava novi uslov. Pored toga u ovom odeljku ispitujem dovoljne uslove za egzistenciju zajedničkih fiksnih tačaka za dva ili više preslikavanja koja ispunjavaju taj novi uslov. U radu vršim uopštenja D. S. Jaggi-evih rezultata.

Na kraju ovog odeljka poopštavam uslov kontraktivnosti višeznačnih preslikavanja koga je u radu [5] uveo Lj. Ćirić i ispitujem dovoljne uslove za egzistenciju fiksnih tačaka višeznačnih preslikavanja koja ispunjavaju novi uslov. U radu vršim uopštenja rezultata publikovanih u radovima S. Nadler-a i Lj. Ćirića.

5.1. JEDINSTVENE FIKSNE TAČKE PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA

Neka je (X,d) metrički prostor i $T : X \to X$ preslikavanje prostora X u sebe sama. Za preslikavanje T uvodim ovaj uslov

$$d(Tx,Ty) \leqslant r(x,y)\cdot d(x,y) + s(x,y)\cdot \max\{d(x,Tx);d(y,Ty)\} + \tag{5.1.1.}$$
$$+ t(x,y)\frac{d(x,Tx)\cdot d(y,Ty)}{d(x,y)}$$

za svako $x,y \in X$ i $x \neq y$, gde su $r(x,y)$, $s(x,y)$ i $t(x,y)$ nenegativni realni brojevi koji zavise od x i y tako da je

$$\sup_{x,y\in X}\{r(x,y) + s(x,y) + t(x,y)\} = q < 1 .$$

Stav 5.1.1. Ako je T orbitalno neprekidno preslikavanje koje ispunjava uslov (5.1.1.) i ako je X prostor koji je orbitalno potpun, onda postoji jedna i samo jedna fiksna tačka iz X za preslikavanje T.

Dokaz. Uzmimo jedno određeno, inače ma koje, $x_o \in X$ i definišimo niz $\{x_n\}$ iz X stavljajući

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_o \tag{5.1.2.}$$

za svaki prirodan broj $n \in N$.

Ako je $x_n = x_{n+1}$ za neko $n \in N$, onda je $x_n = Tx_n$ pa je x_n fiksna tačka preslikavanja T.

Ako je $x_{n-1} \neq x_n$ za svako $n \in N$, tada iz uslova (5.1.1.) i definicije niza (5.1.2.) sledi da je

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(Tx_{n-1},Tx_n)\leqslant$$

$$\leqslant r(x_{n-1},x_n)\cdot d(x_{n-1},x_n) + s(x_{n-1},x_n)\cdot \max\left\{d(x_{n-1},Tx_{n-1}); d(x_n,Tx_n)\right\} +$$

$$+ t(x_{n-1},x_n)\cdot \frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})\cdot d(x_n,Tx_n)}{d(x_{n-1},x_n)} .$$

Biće tada

$$(5.1.3.)\qquad d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \frac{r(x_{n-1},x_n)}{1-s(x_{n-1},x_n) - t(x_{n-1},x_n)}\cdot d(x_{n-1},x_n)$$

ili

$$(5.1.4.)\qquad d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \frac{r(x_{n-1},x_n) + s(x_{n-1},x_n)}{1-t(x_{n-1},x_n)}\ d(x_{n-1},x_n)$$

već prema tome da li je

$$\max\left\{d(x_{n-1},x_n),\ d(x_n,x_{n+1})\right\} = d(x_n,x_{n+1})$$

ili

$$\max\left\{d(x_{n-1},x_n),\ d(x_n,x_{n+1})\right\} = d(x_{n-1},x_n).$$

Kako je $q<1$ iz uslova $r(x,y) + s(x,y) + t(x,y)\leqslant q$ sledi da je

$$(5.1.5.)\qquad \frac{r(x,y)}{1-s(x,y)-t(x,y)}\leqslant q \quad \text{i} \quad \frac{r(x,y) + s(x,y)}{1 - t(x,y)} \leqslant q$$

za svako $x,y\in X$. S obzirom na (5.1.3.) i (5.1.4.) biće

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant q\ d(x_{n-1},x_n)$$

za svako $n\in N$. Zato je

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant q^n\ d(x_o,x_1)$$

za $n=1,2,3,\ldots$ Dalje, za svaki prirodan broj p, imamo

$$d(x_n,x_{n+p}) \leqslant d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \leqslant$$

$$\leqslant (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{n+p-1})\, d(x_o,x_1) <$$

$$< \frac{q^n}{1-q}\, d(x_o,x_1),$$

odakle sledi da je $\{T^n x_o,\ n \in N\}$ Cauchy-ev niz. Kako je prostor X T-orbitalno potpun, tada postoji tačka $u \in X$ tako da je

$$u = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n x_o .$$

S druge strane, T je orbitalno neprekidno preslikavanje i zato mora biti

$$Tu = \lim_{n\to\infty} TT^n x_o = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = u .$$

Znači, u je fiksna tačka preslikavanja T. Pretpostavimo sada da je i $v \in X$ fiksna tačka preslikavanja T i da je $v \neq u$. Iz uslova (5.1.1.) neposredno sledi da je

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \leqslant$$

$$\leqslant r(u,v).d(u,v) + s(u,v).\max\{d(u,Tu);\ d(v,Tv)\} +$$

$$+ t(u,v).\frac{d(u,Tu).d(v,Tv)}{d(u,v)} = r(u,v).d(u,v) < d(u,v),$$

što je nemogućno. Dakle, u je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T (vidi moj rad [2]).

Posledica 1.5.1. (D.S. Jaggi [1], st. 2.1.) Neka je (X,d) potpun metrički prostor i $T : X \to X$ neprekidno preslikavanje prostora X u sebe sama koje ispunjava uslov

$$d(Tx,Ty) \leq r\, d(x,y) + s \frac{d(x,Tx)\cdot d(y,Ty)}{d(x,y)}$$

za svako $x,y \in X$ i $x \neq y$, gde su $r,s \in [0,1)$ i $r + s < 1$. Tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka iz X za preslikavanje T.

Stav 5.1.2. Neka je (X,d) potpun metrički prostor i neka su T_i $(i = 1,2,\ldots,p)$ preslikavanja prostora X u sebe sama pri čemu je ispunjen uslov

$$d(T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}x,\ T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}y) \leq r(x,y)\cdot d(x,y) +$$

$$+ s(x,y)\cdot \max\left\{d(x,T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}x);d(y,T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}y)\right\} +$$

$$+ t(x,y)\cdot\frac{d(x,T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}x)\cdot d(y,T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}y)}{d(x,y)}$$

za svako $x,y \in X$, $x \neq y$, gde su n_i $(i = 1,2,\ldots,p)$ prirodni brojevi i $r(x,y),s(x,y)$ i $t(x,y)$ nenegativni realni brojevi pri čemu je $\sup\{r(x,y) + s(x,y) + t(x,y) : x,y \in X\} = q < 1$.

Ako je $T_iT_j = T_jT_i$ $(i,j = 1,2,\ldots,p)$ i $T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}$ orbitalno neprekidno preslikavanje, tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka zajednička za sva preslikavanja T_i.

Dokaz. Stavimo da je $T = T_1^{n_1}T_2^{n_2}\ldots T_p^{n_p}$. Prema stavu 5.1.1. preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku koju ćemo označiti sa u.

Dokažimo da je $T_iu = u$ za svako $i \in \{1,2,\ldots,p\}$. Ovde je $Tu = u$ i $T_iT_jx = T_jT_ix$ za svako $x \in X$. Tada je

$$T_i u = T_i T u = T_i(T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_p^{n_p} u) =$$

$$= T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_p^{n_p}(T_i u) = T T_i u$$

za svako $i \in \{1,2,\ldots,p\}$, što znači da su $T_i u$ za $i = 1,2,\ldots,p$ fiksne tačke preslikavanja T. S obzirom da je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T, onda mora biti $T_i u = u$ za svako $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ (vidi Murakami i Yeh[1]).

Stav 5.1.3. Neka je (X,d) metrički prostor i $T : X \to X$ neprekidno preslikavanje prostora X u sebe sama koje ispunjava uslov (5.1.1.) , gde su r,s i t konstante i M svuda gust skup u prostoru X. Ako je X prostor koji je orbitalno potpun, onda postoji jedna i samo jedna fiksna tačka iz X za preslikavanje T.

Dokaz. Dokazaćemo da preslikavanje T ispunjava uslov (5.1.1.) za svako $x,y \in X$ i $x \neq y$.

Ako je $x \in M$ i $y \in X \setminus M$ (K. Iseki[3]), onda postoji niz $\{y_n\}$ u M ($y_n \neq x$) koji konvergira ka y. Iz uslova(5.1.1.) imamo

$$d(Tx,Ty) \leqslant d(Tx,Ty_n) + d(Ty_n,Ty) \leqslant$$

$$\leqslant r\cdot d(x,y_n) + s\cdot \max\{d(x,Tx);\ d(y_n,Ty_n)\} +$$

$$+ t\cdot \frac{d(x,Tx)\cdot d(y_n,Ty_n)}{d(x,y_n)} + d(Ty_n,Ty),$$

odakle zbog neprekidnosti preslikavanja T na X dobijamo

$$d(Tx,Ty) \leqslant r\, d(x,y) + s \max\{d(x,Tx);\ d(y,Ty)\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(x,Tx)\cdot d(y,Ty)}{d(x,y)}$$

kad $n \to +\infty$.

Ako je sada $x,y \in X\setminus M$ i $x \neq y$ onda,na primer, za tačku x postoji niz $\{x_n\}$ u M koji konvergira ka x. Ponovo iz uslova (5.1.1.) imamo

$$d(Tx_n,Ty) \leqslant r\cdot d(x_n,y) + s\cdot\max\{d(x_n,Tx_n);d(y,Ty)\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(x_n,Tx_n)\cdot d(y,Ty)}{d(x_n,y)} \quad ,$$

odakle se zbog neprekidnosti preslikavanja T na X dobija

$$d(Tx,Ty) \leqslant r. d(x,y) + s\cdot\max\{d(x,Tx);\ d(y,Ty)\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(x,Tx)\cdot d(y,Ty)}{d(x,y)}$$

kad $n \to \infty$.

Prema tome, neprekidno preslikavanje T ispunjava uslov (5.1.1.) za svako x , $y \in X$ i $x \neq y$, pa prema stavu 5.1.1. postoji jedinstvena fiksna tačka iz X za preslikavanje T.

Stav 5.1.4. Neka je (X,d) potpun metrički prostor, $\{T_n\}$ niz funkcija koje preslikavaju prostor X u sebe sama i koji uniformno konvergira funkciji T. Ako svako preslikavanje T_n ima fiksnu tačku u_n i ako je T orbitalno neprekidno preslikavanje koje ispunjava uslov(5.1.1.) onda niz $\{u_n\}$ konvergira fiksnoj tački preslikavanja T.

Dokaz. Prema stavu 5.1.1. preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku, koju ćemo označiti sa u.

Neka je ε ma koji pozitivan realan broj. S obzirom da niz$\{T_n\}$ uniformno konvergira ka T, tada za dato ε postoji prirodan broj n_o tako da je

$$d(T_n x,\ Tx) < \varepsilon$$

za svako $x \in X$ čim je $n > n_o$. Pretpostavimo najpre da je $u_n \neq u$ za svako $n = 1,2,3,\ldots$ Polazeći od uslova (5.1.1.) imaćemo

$$d(u_n,u) = d(T_n u_n, Tu) \leq$$

$$\leq d(T_n u_n, Tu_n) + d(Tu_n, Tu) \leq$$

$$\leq d(T_n u_n, Tu_n) + r(u_n,u)\cdot d(u_n,u) + s(u_n,u)\{\max\, d(u_n,Tu_n);\ d(u,Tu)\} +$$

$$+ t(u_n,u).\frac{d(u_n,Tu_n)\cdot d(u,Tu)}{d(u_n,u)} =$$

$$= d(T_n u_n, Tu_n) + r(u_n,u)\cdot d(u_n,u) + s(u_n,u)\cdot d(T_n u_n, Tu_n),$$

pa zato

$$d(u_n u) \leq d(T_n u_n, Tu_n) + q\cdot d(u_n,u) + q\cdot d(T_n u_n, Tu_n),$$

odakle je

$$d(u_n,u) \leq \frac{1+q}{1-q}\, d(T_n u_n, Tu_n).$$

Prema tome, za svako $n > n_o$, biće

$$d(u_n,u) < \frac{1+q}{1-q}\,\varepsilon.$$

Kako je $q<1$, to znači da niz $\{u_n\}$ konvergira ka tački u.

Ako je $u_n = u$ za neko $n \in N$, onda se lako dokazuje da niz $\{u_n\}$ i u tom slučaju konvergira ka u.

Stav 5.1.5. Neka je (X,d) potpun metrički prostor, $\{T_n\}$ niz funkcija koje preslikavaju prostor X u sebe sama i koji konvergira ka funkciji T i neka za svako $x \in X$ niz

(5.1.6.) $\quad x_0 = x,\ x_1 = T_1x_0,\ x_2 = T_2x_1, \dots,\ x_n = T_nx_{n-1}, \dots$

ima svojstvo $x_{n-1} \neq x_n$ za $n = 1,2,3,\dots$ Pretpostavimo da postoje nenegativni realni brojevi r,s,t sa osobinom $r+s+t<1$ i konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \geqslant 0)$ tako da važi

(5.1.7.) $$d(T_nx,T_{n+1}y) \leqslant r\cdot d(x,y) + s\cdot\max\{d(x,T_nx);d(y,T_{n+1}y)\} + $$
$$+ t\cdot\frac{d(x,T_nx)\cdot d(y,T_{n+1}y)}{d(x,y)} + b_n$$

za svako $x,y \in X$, $x \neq y$ i svako $n = 1,2,3,\dots$ Ako je preslikavanje T orbitalno neprekidno, tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka iz X za preslikavanje T.

Dokaz. Uzmimo sada bilo koju tačku $x \in X$. Iz uslova (5.1.7.) i definicije niza (5.1.6.) neposredno sleduje

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(T_nx_{n-1},T_{n+1}x_n) \leqslant$$
$$\leqslant r\cdot d(x_{n-1},x_n) + s\cdot\max\{d(x_{n-1},x_n);\ d(x_n,x_{n+1})\} +$$

$$+ t\cdot d(x_n,x_{n+1}) + b_n .$$

Koristeći (5.1.5.) iz stava 5.1.1. dobijamo

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant q\, d(x_{n-1},x_n) + \frac{b_n}{1-s-t}$$

za svako $n \in N$, gde je $0 \leqslant q < 1$. Zato je

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant q^n\, d(x_o,x_1) + \frac{1}{1-s-t}(b_1q^{n-1}+b_2q^{n-2}+\ldots+b_{n-1}q+b_n)=$$

$$= q^n\, d(x_o,x_1) + \frac{c_n}{1-s-t} ,$$

gde je $(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n)\ (\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Dalje, za svaki prirodan broj p, imamo

$$d(x_n,x_{n+p}) \leqslant (\sum_{i=0}^{p-1} q^{n+i})\, d(x_o,x_1) + \frac{1}{1-s-t} \sum_{i=0}^{p-1} c_{n+i} ,$$

Kako je $0 \leqslant q < 1$ i red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergentan, tada je $\{x_n\}$ Cauchy-ev niz u prostoru X. S druge strane, prostor X je potpun i zato postoji $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Stavimo da je $Tx = \lim_{n\to\infty} T_nx$. Tada je

$$d(Tx,\ Ty) = d(\lim_{n\to\infty} T_nx,\ \lim_{n\to\infty} T_{n+1}y) = \lim_{n\to\infty} d(T_nx,\ T_{n+1}y) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\Big[r\cdot d\,(x,y) + s\cdot\max\{ d(x,T_nx);\ d(y,T_{n+1}y)\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(x,T_nx)\cdot d(y,T_{n+1}y)}{d(x,y)} + b_n\Big] \leqslant$$

$$\leqslant r\cdot d(x,y) + s\cdot \max\left\{ d(x,Tx);\ d(y,Ty)\right\} + t\cdot \frac{d(x,Tx)\cdot d(y,Ty)}{d(x,y)}.$$

Na kraju, kako je preslikavanje T orbitalno neprekidno, tada iz stava 5.1.1. sledi da preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku u prostoru X.

Napomenimo da sam za dokaz prethodnog stava koristio ideju iz rada [11] Lj. Ćirića.

Sledeći stav daje dovoljne uslove za egsistenciju jedinstvene fiksne tačke za preslikavanje kompaktnog metričkog prostora u sebe sama.

Stav 5.1.6. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i $T : X \to X$ neprekidno preslikavanje prostora X u sebe sama koje ispunjava uslov

$$(5.1.8.)\quad d(Tx,Ty) < r\cdot d(x,y) + s\cdot \max\left\{d(x,Tx);\ d(y,Ty)\right\} + $$
$$+ t\cdot \frac{d(x,Tx)\cdot d(y,Ty)}{d(x,y)}$$

za svako $x,y \in X$ i $x \neq y$, gde su r,s i t realni brojevi pri čemu je $r+s+t = 1$, $1-t > 0$ $1-s-t > 0$ i $r \leq 1$. Tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka preslikavanja T.

Dokaz. Stavimo da je

$$f(x) = d(x,Tx)$$

za svako $x \in X$. Kako je d neprekidno preslikavanje na $X \times X$ i T neprekidno preslikavanje na X, tada je f neprekidno preslikavanje na X. S obzirom da je X kompaktan metrički prostor, tada postoji bar jedna tačka $u \in X$ (B. Fisher, [2]) sa svojstvom

$$f(u) = \inf \left\{ f(x) \ : x \in X \right\}.$$

Ako je $f(u) \neq 0$, onda je $Tu \neq u$. Iz uslova (5.1.8.) neposredno sledi da je

$$f(Tu) = d(Tu, T^2u) <$$

$$< r \cdot d(u,Tu) + s \cdot \max \left\{ d(u,Tu);\ d(Tu,T^2u) \right\} +$$

$$+ t \cdot \frac{d(u, Tu) \cdot d(Tu, T^2u)}{d(u,Tu)}$$

odnosno

$$f(Tu) < r\, f(u) + s \max \left\{ f(u);\ f(Tu) \right\} + t\, f(Tu).$$

Zbo toga je

(5.1.9.) $$f(Tu) < (r + s)\, f(u) + t\, f(Tu)$$

ili

(5.1.10.) $$f(Tu) < r\, f(u) + (s + t)\, f(Tu).$$

Budući da je $r+s+t = 1$ i $1-t > 0$ iz uslova (5.1.9.) neposredno sledi da je

$$f(Tu) < \frac{r + s}{1 - t} f(u) = f(u)$$

što je nemogućno.

Budući da je $r+s+t = 1$ i $s+t < 1$ iz uslova (5.1.10.) neposredno sledi da je

$$f(Tu) < \frac{r}{1-s-t} f(u) = f(u)$$

što je nemogućno. Dakle, mora biti $Tu = u$ što znači da je u fiksna tačka preslikavanja T. Pretpostavimo da je i $v \in X$ fiksna tačka preslikavanja T i da je $v \neq u$. Iz uslova (5.1.8.) sledi da je

$$d(u,v) = d(Tu,\ Tv) <$$

$$< r \cdot d(u,v) + s \cdot \max\{d(u,Tu);\ d(v,Tv)\} + t \cdot \frac{d(u,v) \cdot d(v,Tv)}{d(u,v)} =$$

$$= r \cdot d(u,v) \leqslant d(u,v),$$

što je nemogućno. Prema tome, u je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T.

5.2. JEDINSTVENE ZAJEDNIČKE FIKSNE TAČKE PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA

Ovaj paragraf posvećen je istraživanju dovoljnih uslova za egzistenciju zajedničkih fiksnih tačaka za preslikavanja metričkog prostora u sebe sama. Ovde ću dokazati četiri nova stava od kojih prvi predstavlja uopštenje Jaggi-evog stava 4 iz rada [2] i prvog stava iz mojeg rada [3].

Stav 5.2.1. Neka je (X,d) potpun metrički prostor i neka su T_1 i T_2 preslikavanja prostora X u sebe sama koja ispunjavaju uslov

$$\begin{aligned} d(T_1x,T_2y) &\leq r(x,y)\cdot d(x,y) + \\ (5.2.1.) \qquad &+ s(x,y)\cdot \max\{d(x,T_1x);\ d(y,T_2y)\} + \\ &+ t(x,y)\cdot\frac{d(x,T_1x)\cdot d(y,T_2y)}{d(x,y)} \end{aligned}$$

za svako $x,y\in X$ i $x\neq y$, gde su $r(x,y)$, $s(x,y)$ i $t(x,y)$ nenegativni realni brojevi koji zavise od x,y tako da je

$$\sup_{x,y\in X}\{r(x,y) + s(x,y) + t(x,y)\} = q < 1.$$

Ako je T_1T_2 orbitalno neprekidno preslikavanje i ako postoji neko $x_o\in X$ tako da niz

$$(5.2.2.)\quad x_1=T_2x_o,\ x_2=T_1x_1,\ldots,\ x_{2n}=T_1x_{2n-1},\ x_{2n+1}=T_2x_{2n},\ldots$$

ima svojstvo $x_{n-1} \neq x_n$ za svaki prirodan broj n, tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka zajednička za preslikavanja T_1 i T_2.

Dokaz. Iz uslova (5.2.1.) i definicije niza (5.2.2.) neposredno dobijamo

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) = d(T_1x_{2n-1},T_2x_{2n}) \leqslant r(x_{2n-1},x_{2n})\cdot d(x_{2n-1},x_{2n}) +$$

$$+ s(x_{2n-1},x_{2n})\cdot \max\{d(x_{2n-1},T_1x_{2n-1});\ d(x_{2n},T_2x_{2n})\} +$$

$$+ t(x_{2n-1},x_{2n})\cdot \frac{d(x_{2n-1},T_1x_{2n-1})\cdot d(x_{2n},T_2x_{2n})}{d(x_{2n-1},x_{2n})},$$

odakle je

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \leqslant r(x_{2n-1},x_{2n})\cdot d(x_{2n-1},x_{2n}) +$$

$$+ s(x_{2n-1},x_{2n})\cdot\max\{d(x_{2n-1},x_{2n});\ d(x_{2n},x_{2n+1})\} +$$

$$+ t(x_{2n-1},x_{2n})\cdot d(x_{2n},x_{2n+1}).$$

Koristeći (5.1.5.) iz stava 5.1.1, biće

$$\begin{aligned} d(x_{2n},x_{2n+1}) &\leqslant q\ d(x_{2n-1},x_{2n}) \\ &\ \ \vdots \\ &\leqslant q^{2n}\ d(x_o,x_1) \end{aligned}$$

za svaki prirodan broj n, gde je $0 \leqslant q < 1$, pa je zato

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \leqslant q^{2n} d(x_o,x_1). \tag{5.2.3.}$$

Na isti način iz uslova (5.2.1.) definicije niza (5.2.2.) imamo

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \leqslant q \cdot d(x_{2n},x_{2n+1}),$$

odakle je

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \leqslant q^{2n+1}\, d(x_o,x_1). \tag{5.2.4.}$$

Iz uslova (5.2.3.) i (5.2.4.) sleduje da je $\{x_n\}$ Cauchy-ev niz u prostoru X. S druge strane, prostor X je potpun i zato niz $\{x_n\}$ konvergira nekoj tački $u \in X$. Tada i podniz $\{x_{n_k}\}$, gde je $n_k = 2k$, konvergira tački u. Kako je T_1T_2 orbitalno neprekidno preslikavanje (D.S. Jaggi, [2]) tada je

$$T_1T_2 = T_1T_2(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} x_{n_{k+1}} = u.$$

Dokažimo sada da je $T_2u = u$. Ako pretpostavimo da je $T_2u \neq u$, tada je

$$d(u,T_2u) = d(T_1T_2u,T_2u) \leqslant r(T_2u,u)\cdot d(T_2u,u) +$$

$$+ s(T_2u,u)\cdot \max\{d(T_2u,T_1T_2u);\ d(u,T_2u)\} +$$

$$+ t(T_2u,u)\frac{d(T_2u,T_1T_2u)\cdot d(u,T_2u)}{d(T_2u,u)} =$$

$$= (r(T_2u,u) + s(T_2u,u) + t(T_2u,u))\, d(T_2u,u).$$

Zato je

$$(1 - r(T_2u,u) - s(T_2u,u) - t(T_2u,u))\cdot d(T_2u,u) \leqslant 0\ ,$$

što je nemogućno, jer je $r+s+t<1$. Dakle, u je fiksna tačka preslikavanja T_2. Iz $T_1T_2u=u$ sleduje da je $T_1u=u$, što znači da je u fiksna tačka i preslikavanja T_1.

Pretpostavimo da je sada i $v \in X$ zajednička fiksna tačka preslikavanja T_1 i T_2 i da je $u \neq v$. Iz uslova (5.2.1.) imamo

$$d(u,v) = d(T_1u,T_2v) \leqslant r(u,v)\cdot d(u,v) +$$

$$s(u,v)\cdot \max\ \{d(u,T_1u);\ d(v,T_2v)\} + t(u,v)\cdot\frac{d(u,T_1u)\cdot d(v,T_2v)}{d(u,v)} =$$

$$= r(u,v)\cdot d(u,v) < d(u,v)\ ,$$

što je nemogućno. Prema tome, u je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T_1 i T_2.

Posledica 5.2.1. (D. S. Jaggi,[2], stav 4.) Neka je (X,d) potpun metrički prostor i neka su T_1 i T_2 preslikavanja prostora X u sebe sama koja ispunjavaju uslov

$$d(T_1x,T_2y) \leqslant r\ d(x,y)+s\frac{d(x,T_1x)\cdot d(y,T_2y)}{d(x,y)}$$

za svako $x,y \in X$ i $x \neq y$, gde su r i s nenegativni realni brojevi i $r+s<1$. Ako je T_1T_2 neprekidno preslikavanje na X i ako postoji neko $x_0 \in X$ tako da niz

$$x_n = \begin{cases} T_1 x_{n-1}, & \text{za n parno,} \\ T_2 x_{n-1}, & \text{za n neparno,} \end{cases}$$

ima svojstvo $x_{n-1} \neq x_n$ za svaki prirodan broj n, onda postoji jedinstvena fiksna tačka zajednička za preslikavanja T_1 i T_2.

Stav 5.2.2. Neka je (X,d) potpun metrički prostor i neka su A_i i B_i $(i=1,2,\dots,p)$ preslikavanja prostora X u sebe sama pri čemu je ispunjen uslov

$$d(A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_p^{m_p} x,\ B_1^{n_1} B_2^{n_2} \dots B_p^{n_p} y) \leqslant$$

$$(5.2.5.) \quad \leqslant r\, d(x,y) + s \max\{d(x, A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_p^{m_p} x); d(y, B_1^{n_1} B_2^{n_2} \dots B_p^{n_p} y)\} +$$

$$+ t \frac{d(x, A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_p^{m_p} x) \cdot d(y, B_1^{n_1} B_2^{n_2} \dots B_p^{n_p} y)}{d(x,y)}$$

za svako $x,y \in X$, $x \neq y$, gde su m_i i n_i $(i=1,2,\dots,p)$ prirodni brojevi i r,s i t nenegativni realni brojevi pri čemu je $r+s+t<1$. Pretpostavimo da je $A_i A_j = A_j A_i$, $B_i B_j = B_j B_i$ $(i,j = 1,2,\dots,p)$ i da je

$$A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_p^{m_p} B_1^{n_1} B_2^{n_2} \dots B_p^{n_p}$$

orbitalno neprekidno preslikavanje. Ako postoji neko $x_0 \in X$ tako da niz

$$x_n = \begin{cases} A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_p^{m_p}\, x_{n-1} & (n = 2,4,\dots), \\ B_1^{n_1} B_2^{n_2} \dots B_p^{n_p}\, x_{n-1} & (n = 1,3,\dots), \end{cases}$$

ima svojstvo $x_{n-1} \neq x_n$ za svaki prirodan broj $n \in N$, onda postoji jedinstvena fiksna tačka zajednička za sva preslikavanja A_i i B_i.

Dokaz. Stavimo da je

$$T_1 = A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_p^{m_p} \quad \text{i} \quad T_2 = B_1^{n_1} B_2^{n_2} \dots B_p^{n_p}.$$

Prema stavu 5.2.1. preslikavanja T_1 i T_2 imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku koju ćemo označiti sa u. Tada je (vidi B.Ray [1])

$$A_i u = A_i(T_1 u) = T_1(A_i u)$$

i

$$B_i u = B_i(T_2 u) = T_2(B_i u)$$

za svako $i \in \{1,2,\dots,p\}$, što znači da su $A_i u$ i $B_i u$ redom fiksne tačke preslikavanja T_1 i T_2. Ako je $A_i u \neq B_i u$ za $i \in \{1,2,\dots,p\}$ i $j \in \{1,2,\dots,p\}$, onda iz uslova (5.2.5.) sledi da je

$$d(A_i u, B_j u) = d(T_1(A_i u),\ T_2(B_j u)) \leqslant$$

$$\leqslant r\, d(A_i u,\ B_j u) < d(A_i u,\ B_j u)$$

što je nemogućno. Stoga je $A_i u = u$ i $B_i u = u$ za svako $i \in \{1,2,\dots,p\}$, odakle sledi da je u jedinstvena zajednička fiksna tačka svih preslikavanja A_i i B_i.

Stav 5.2.3. Neka je (X,d) potpun metrički prostor, $\{T_n : n=0,1,2,\dots\}$ niz funkcija koje preslikavaju prostor X u sebe sama i zadovoljavaju ove uslove:

$$d(T_o x, T_n y) \leq r\cdot d(x,y) + s\cdot \max\{d(x,T_o x);\ d(y,T_n y)\} +$$

$$(5.2.6.)\qquad + t\cdot\frac{d(x,T_o x)\cdot d(y,T_n y)}{d(x,y)}$$

za svako $n=1,2,\dots$ i svako $x,y\in X$, $x\neq y$, gde su r,s i t nenegativni realni brojevi i $r+s+t<1$. Pretpostavimo da postoji jedinstvena zajednička fiksna tačka $u\in X$ za sva preslikavanja T_n i da je preslikavanje T_o orbitalno neprekidno. Ako postoji neko $x_o\in X$ tako da niz

$$(5.2.7.)\qquad x_1=T_o x_o,\ x_2=T_1 x_1,\ x_3=T_o x_2,\dots,\ x_{2n}=T_n x_{2n-1},$$
$$x_{2n+1}=T_o x_{2n},\dots$$

ima svojstvo $x_{n-1}\neq x_n$ za svaki prirodan broj n, onda niz (5.2.7.) konvergira ka tački u.

Dokaz. Iz uslova (5.2.6.) i definicije niza (5.2.7.) neposredno sledi da je

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) = d(T_n x_{2n-1}, T_o x_{2n})\leq$$

$$\leq r\cdot d(x_{2n-1},x_{2n}) + s\cdot\max\{d(x_{2n-1},T_n x_{2n-1});\ d(x_{2n},T_o x_{2n})\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(x_{2n-1},T_n x_{2n-1})\cdot d(x_{2n},T_o x_{2n})}{d(x_{2n-1},x_{2n})} =$$

$$= r\cdot d(x_{2n-1},x_{2n})+s\cdot\max\left\{d(x_{2n-1},x_{2n});d(x_{2n},x_{2n+1})\right\}+t\cdot d(x_{2n},x_{2n+1}).$$

Koristeći (5.1.5.) iz stava 5.1.1. biće

$$d(x_{2n},x_{2n+1})\leqslant q\ d(x_{2n-1},x_{2n})$$

za svaki prirodan broj n, gde je $0\leqslant q<1$. Zato je

$$(5.2.8.)\qquad d(x_{2n},x_{2n+1})\leqslant q^{2n}\ d(x_o,x_1).$$

Na isti način iz uslova (5.2.6.) i definicije niza (5.2.7.) imamo

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leqslant q\ d(x_{2n},x_{2n+1}),$$

odakle je

$$(5.2.9.)\qquad d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leqslant q^{2n+1}\ d(x_o,x_1).$$

Iz uslova (5.2.8.) i (5.2.9.) sleduje da je $\{x_n\}$ Cauchy- ev niz u prostoru X. S druge strane, prostor X je potpun i zato niz $\{x_n\}$ konvergira nekoj tački $v\in X$. Tada i podniz $\{x_{n_k}\}$,gde je $n_k=2k$, takođe, konvergira ka tački v. Preslikavanje T_o je orbitalno neprekidno pa je zato

$$T_o v = T_o(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} T_o(x_{n_k}) = v\ ,$$

što znači da je v fiksna tačka preslikavanja T_o.

Dokažimo da je v=u. Ako pretpostavimo da je $v \neq u$, tada iz uslova (5.2.6.) imamo

$$d(v,u) = d(T_o v, T_n u) \leqslant$$

$$\leqslant r \cdot d(v,u) + s \cdot \max\{d(v,T_o v);\ d(u,T_n u)\} +$$

$$+ t \cdot \frac{d(v,T_o v) \cdot d(u,T_n u)}{d(v,u)}$$

odnosno

$$d(v,u) \leqslant r\, d(v,u) < d(v,u),$$

što je nemogućno. Dakle, niz $\{x_n\}$ konvergira ka u.

Stav 5.2.4. Neka je (X,d) potpun metrički prostor i neka su S i T neprekidna i komutativna preslikavanja prostora X u sebe sama koja ispunjavaju uslove:

(5.2.10.) $$S(X) \subset T(X),$$

(5.2.11.) $$d(Sx,Sy) \leqslant r \cdot d(Tx,Ty) +$$

$$+ s \cdot \max\{d(Tx,Sx);\ d(Ty,Sy)\} + t \cdot \frac{d(Tx,Sx) \cdot d(Ty,Sy)}{d(Tx,Ty)}$$

za svako $x,y \in X$ pri čemu je $Tx \neq Ty$ za $x \neq y$, gde su r,s i t pozitivni realni brojevi i $r + s + t < 1$. Tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka iz X zajednička za preslikavanja S i T.

Dokaz. Uzmimo jedno određeno, inače ma koje, $x_o \in X$. Prema uslovu (5.2.10.) postoji tačka $x_1 \in X$ tako da je

$Tx_1 = Sx_o$. Uopšte, postoji tačka $x_n \in X$ tako da je

(5.2.12.) $$Tx_n = Sx_{n-1} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Ako je $x_n = x_{n+1}$ za neko $n \in N$, onda je $Tx_n = Sx_n$. Kako su preslikavanja S i T komutativna tada mora biti

$$T(Tx_n) = T(Sx_n) = S(Tx_n) = S(Sx_n).$$

Pretpostavimo da je $S(Sx_n) \neq Sx_n$. Tada iz uslova (5.2.11.) imamo

$$d(Sx_n,S(Sx_n)) \leqslant r\cdot d(Tx_n,T(Sx_n)) +$$

$$+ s.\max\left\{d(Tx_n,Sx_n);\ d(T(Sx_n),S(Sx_n))\right\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(Tx_n,Sx_n)\cdot d(T(Sx_n),S(Sx_n))}{d(Tx_n,T(Sx_n))},$$

odakle sledi da je

$$d(Sx_n,S(Sx_n)) \leqslant r\ d(Sx_n,S(Sx_n)),$$

što je nemogućno. Dakle, mora biti $S(Sx_n) = Sx_n$ i $T(Sx_n) = Sx_n$, što znači da je Sx_n zajednička fiksna tačka preslikavanja S i T.

Neka je $Tx_n \neq Tx_{n+1}$ za svako $n \in N$. Tada iz uslova (5.2.11.) dobijamo

$$d(Tx_{n+1},Tx_n) = d(Sx_n,Sx_{n-1}) \leqslant$$

$$\leqslant r\cdot d(Tx_n,Tx_{n-1}) + s\cdot \max\left\{d(Tx_n,Sx_n);d(Tx_{n-1},Sx_{n-1})\right\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(Tx_n,Sx_n)\cdot d(Tx_{n-1},Sx_{n-1})}{d(Tx_n,Tx_{n-1})} =$$

$$= r\cdot d(Tx_n,Tx_{n-1}) + s\cdot \max\left\{d(Tx_n,Tx_{n+1});d(Tx_{n-1},Tx_n)\right\} +$$

$$+ t.d(Tx_n,Tx_{n+1}).$$

Biće tada

$$d(Tx_{n+1},Tx_n)\leqslant\frac{r}{1-s-t}\,d(Tx_n,Tx_{n-1})$$

ili

$$d(Tx_{n+1},Tx_n)\leqslant\frac{r+s}{1-t}\,d(Tx_n,Tx_{n-1})$$

već prema tome da li je za $n>1$ ili $d(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant d(Tx_n,Tx_{n+1})$ ili $d(Tx_n,Tx_{n+1})<d(Tx_n,Tx_{n-1})$. Koristeći (5.1.5.) iz stava 5.1.1. biće

$$d(Tx_{n+1},Tx_n)\leqslant q\;d(Tx_n,Tx_{n-1})$$

za svaki prirodan broj $n>1$, gde je $0<q<1$. Prostor X je potpun i zato niz $\{Tx_n\}$ konvergira (vidi G. Jungck [1]) nekoj tački $z\in X$. Iz uslova (5.2.12.) sledi da i niz $\{Sx_n\}$ konvergira tački z. Kako su preslikavanja S i T neprekidna tada je

$$\lim_{n\to\infty} S(Tx_n) = S(\lim_{n\to\infty} Tx_n) = Sz$$

i

$$\lim_{n\to\infty} T(Sx_n) = T(\lim_{n\to\infty} Sx_n) = Tz.$$

S druge strane, preslikavanja S i T su komutativna pa je zato $S(Tx_n) = T(Sx_n)$ za svaki prirodan broj n. Stoga je

$$Sz = Tz \tag{5.2.13.}$$

i odatle

$$T(Tz) = T(Sz) = S(Tz) = S(Sz). \tag{5.2.14.}$$

Ako je $S(Sz) \neq Sz$, tada iz uslova (5.2.11.), (5.2.13) i (5.2.14.) dobijamo

$$d(Sz,S(Sz)) \leqslant r\cdot d(Tz,T(Sz)) + s\cdot \max\{d(Tz,Sz);d(T(Sz),S(Sz))\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(Tz,Sz)\cdot d(T(Sz),S(Sz))}{d(Tz,T(Sz))} = r\cdot d(Sz,S(Sz)),$$

što je nemogućno. Dakle, mora biti $S(Sz) = Sz$ i $T(Sz) = Sz$, što znači da je Sz zajednička fiksna tačka preslikavanja S i T.

Pretpostavimo da su sada $u \in X$ i $v \in X$ zajedničke fiksne tačke preslikavanja S i T i da je $u \neq v$. Iz uslova (5.2.11.) imamo

$$d(u,v) = d(Su,Sv) \leqslant r\cdot d(Tu,Tv) + s\cdot \max\{d(Tu,Su);d(Tv,Su)\} +$$

$$+ t\cdot\frac{d(Tu,Su)\cdot d(Tv,Sv)}{d(Tu,Tv)} = r\cdot d(Tu,Tv) < d(u,v),$$

što je nemogućno. Prema tome, mora biti $u = v$ - što znači da preslikavanja S i T imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u X.

5.3. FIKSNE TAČKE VIŠEZNAČNIH PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA

U ovom paragrafu uvodim novi uslov za višeznačna preslikavanja i ispitujem dovoljne uslove za egzistenciju fiksne tačke preslikavanja koja zadovoljavaju taj novi uslov. U radu uopštavam rezultate Lj. Ćirića.

Stav 5.3.1. Neka je (X,d) metrički prostor i $F : X \to CL(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslov:

$$H(Fx,Fy) \leq$$

$$(5.3.1.) \quad \leq q \max\left\{d(x,y); \left[D^2(x,Fx) + r\, D(x,Fy)\cdot D(y,Fx)\right]^{\frac{1}{2}};\right.$$

$$\left.\left[D^2(y,Fy) + s\, D(x,Fy)\cdot D(y,Fx)\right]^{\frac{1}{2}}; \frac{1}{2}\left[D(x,Fy)+D(y,Fx)\right]\right\}$$

za neko $q \in (0,1)$ i svako $x,y \in X$, gde su r i s nenegativni realni brojevi. Ako je X prostor koji je F-orbitalno potpun, onda postoji fiksna tačka preslikavanja F

Dokaz. Neka je x_0 jedno određeno, inače ma koje, $x_0 \in X$ i $x_1 \in Fx_0$. Uzmimo da je $H(Fx_0,Fx_1) > 0$. Ako bi bilo $Fx_0 = Fx_1$ to mora biti $x_1 \in Fx_1$, što znači da je x_1 fiksna tačka preslikavanja F. Neka je b realan broj sa svojstvom $0 < b < 1$. Kako je $H(Fx_0,Fx_1) < q^{-b}\, H(Fx_0,Fx_1)$ i $x_1 \in Fx_0$, tada prema definiciji preslikavanja H (vidi 1.4.) postoji tačka $x_2 \in Fx_1$ tako da je

$$d(x_1,x_2) \leq q^{-b}\, H(Fx_0,Fx_1).$$

Neka je $H(Fx_1,Fx_2)>0$. Kako je $H(Fx_1,Fx_2)<q^{-b}\,H(Fx_1Fx_2)$ i $x_2\in Fx_1$ tada postoji $x_3\in Fx_2$ tako da je

$$d(x_2,x_3)\leq q^{-b}\,H(Fx_1,Fx_2).$$

Uopšte, postoji niz $\{x_n\}$ tačaka $x_n\in X$ tako da je

$$(5.3.2.)\quad x_{n+1}\in Fx_n \quad i \quad d(x_n,x_{n+1})\leq q^{-b}H(Fx_{n-1},Fx_n)\quad (n=1,2,\ldots)$$

Iz uslova (5.3.1.), (5.3.2.) i $D(x,B)\leq d(x,y)$ za svako $y\in B$ dobijamo:

$$d(x_n,x_{n+1})\leq q^{-b}\,H(Fx_{n-1},Fx_n)\leq$$

$$\leq q^{-b}\, q\,\max\left\{d(x_{n-1},x_n);D(x_{n-1},Fx_{n-1});D(x_n,Fx_n);\tfrac{1}{2}D(x_{n-1},x_{n+1})\right\}\leq$$

$$\leq q^{1-b}\,\max\left\{d(x_{n-1},x_n);\ d(x_n,x_{n+1});\ \tfrac{1}{2}\,d(x_{n-1},x_{n+1})\right\}.$$

Odatle, s obzirom da je $q^{1-b}<1$, (vidi Lj. Ćirić [5], stav 2.) sledi da je $\{x_n\}$ Cauchy-ev niz u prostoru X. S druge strane, prostor X je F-orbitalno potpun i zato niz $\{x_n\}$ konvergira nekoj tački $u\in X$.

Dokažimo da je $u\in Fu$. Imaćemo:

$$D(u,Fu)\leq d(u,x_{n+1})+D(x_{n+1},Fu)\leq d(u,x_{n+1})+H(Fx_n,Fu)\leq$$

$$\leq d(u,x_{n+1})+q\,\max\left\{d(x_n,u);\right.$$

$$\left.\left[D^2(x_n,Fx_n)+r\,D(x_n,Fu)\cdot D(u,Fx_n)\right]^{\frac{1}{2}};\right.$$

$$\left[D^2(u,Fu) + s\, D(x_n,Fu)\cdot D(u,Fx_n)\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{2}\left[D(x_n,Fu) + D(u,Fx_n)\right]\Big\} \leq$$

$$\leq d(u,x_{n+1}) + q \max\Big\{d(x_n,u);$$

$$\left[d^2(x_n,x_{n+1}) + r(d(x_n,u) + d(u,Fu))\cdot d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\left[D^2(u,Fu) + s(d(x_n,u) + d(u,Fu))\cdot d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{2}\left[d(x_n,u) + D(u,Fu) + d(u,x_{n+1})\right]\Big\} .$$

Stoga je

$$D(u,Fu) \leq d(u,x_{n+1}) + q\, d(x_n,u),$$

$$D(u,Fu) \leq d(u,x_{n+1}) +$$

$$+ q\left[d^2(x_n,x_{n+1}) + r(d(x_n,u) + d(u,Fu))\cdot d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$D(u,Fu) \leq \frac{1}{1-q}\left(d(u,x_{n+1}) + q\left[s(d(x_n,u) + d(u,Fu))\cdot d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$D(u,Fu) \leq \frac{1}{2-q}\left((2+q)\, d(u,x_{n+1}) + q\, d(x_n,u)\right).$$

Odatle, s obzirom da je $\lim_{n\to\infty} x_n = u$, sledi da mora biti $D(u,Fu) = 0$, što znači da je $u \in \overline{F}u = Fu$. Dakle, u je fiksna tačka višeznačnog preslikavanja F.

Posledica. 5.3.1.(Lj. Ćirić, [5], stav 2. Neka je (X,d)

metrički prostor i $F : X \to CL(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslov

$$H(Fx,Fy) \leq q \max\left\{d(x,y); D(x,Fx); D(y,Fy); \tfrac{1}{2}[D(x,Fy) + D(y,Fx)]\right\}$$

za neko $q \in (0,1)$ i svako $x,y \in X$. Ako je X prostor koji je F-orbitalno potpun, onda postoji fiksna tačka preslikavanja F.

Stav 5.3.2. Neka je (X,d) metrički prostor i $F : X \to BN(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslov:

$$\rho(Fx,Fy) \leq$$

$$(5.3.3.) \leq q \max\Big\{d(x,y); [\rho^2(x,Fx) + r^2 D(x,Fy)\cdot D(y,Fx)]^{\frac{1}{2}};$$
$$[\rho^2(y,Fy) + s^2 D(x,Fy)\cdot D(y,Fx)]^{\frac{1}{2}}; \tfrac{1}{2}[D(x,Fy) + D(y,Fx)]\Big\}$$

za svako $x,y \in X$, gde su q, r i s realni brojevi pri čemu je $0 < q < 1$, $0 \leq r < 1$ i $0 \leq s < 1$. Ako je X prostor koji je F-orbitalno potpun onda postoji jedinstvena fiksna tačka $u \in X$ preslikavanja F pri čemu je $Fu = \{u\}$.

Dokaz. Neka je $b \in (0,1)$ realan broj i neka je $T : X \to X$ jednoznačno preslikavanje tako da je

$$(5.3.4.) \qquad Tx \in Fx \quad i \quad d(x,Tx) \geq q^b \rho(x,Fx)$$

za svako $x \in X$. Iz uslova (5.3.3.) dobijamo

$$d(Tx,Ty) \leq \rho(Fx,Fy) \leq q\, q^{-b} \max\Big\{q^b d(x,y);$$
$$[(q^b \rho(x,Fx))^2 + (r\, q^b)^2 D(x,Fy)\cdot D(y,Fx)]^{\frac{1}{2}};$$
$$[(q^b \rho(y,Fy))^2 + (s\, q^b)^2 D(x,Fy)\cdot D(y,Fx)]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{2}\, q^{b}\left[D(x,Fy) + D(y,Fx)\right]\Big\}$$

za svako $x,y \in X$. Odatle i iz uslova (5.3.4.) imamo

$$d(Tx,Ty) \leqslant$$

(5.3.5.)
$$\leqslant q_1 \max\Big\{d(x,y), \left[d^2(x,Tx) + r^2 d(x,Ty)\cdot d(y,Tx)\right]^{\frac{1}{2}};$$
$$\left[d^2(y,Ty) + s^2 d(x,Ty)\cdot d(y,Tx)\right]^{\frac{1}{2}};$$
$$\frac{1}{2}\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right]\Big\}.$$

za svako $x,y \in X$, gde je $q_1 = q^{1-b}$.

Uzmimo jedno određeno, inače ma koje, $x_o \in X$ i definišimo niz $\{x_n\}$ iz X stavljajući

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_o \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Ako se x zameni sa x_{n-1} i y zameni sa x_n, onda se iz uslova (5.3.5.) dobija

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant q_1 \max\left\{d(x_{n-1},x_n);\ d(x_n,x_{n+1});\ \frac{1}{2}\, d(x_{n-1},x_n)\right\}.$$

Odatle s obzirom da je $q_1 < 1$, sledi da je $\{x_n\}$ Cauchy-ev niz u prostoru X. S druge strane, prostor X je F-orbitalno potpun i zato niz $\{x_n\}$ konvergira nekoj tački $u \in X$.

Dokažimo da je $Tu = u$. Imaćemo

$$d(u,Tu) \leqslant d(u,x_{n+1}) + d(TT^n x_o,Tu) \leqslant$$

$$\leqslant d(u,x_{n+1}) + q_1 \max\Big\{d(x_n,u);$$

$$\left[d^2(x_n,x_{n+1}) + r^2\, d(x_n,Tu)\cdot d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\left[d^2(u,Tu) + s^2\, d(x_n,Tu)\cdot d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{2}\left[d(x_n,Tu) + d(u,x_{n+1})\right]\Big\}\ ,$$

odakle sledi da je $d(u,Tu) = 0$ (vidi stav 5.3.1.), što znači da je $Tu = u$. S druge strane, iz uslova $Tx \in Fx$ dobijamo da je $u = Tu \in Fu$.

Dokažimo da je $Fu = \{u\}$. Ako bi bilo $\rho(u,Fu) > 0$ onda bi iz relacije (5.3.3.) sledilo $\rho(Fu,Fu) \leq q\,\rho(u,Fu)$, što je nemogućno. Dakle, u je fiksna tačka višeznačnog preslikavanja F. Pretpostavimo sada da je i $v \in X$ fiksna tačka preslikavanja F i da je $v \neq u$. Iz uslova (5.3.3.) dobojamo

$$d(u,v) \leq q \max\{d(u,v),\ r\, d(u,v),\ s\, d(u,v)\}$$

što je nemogućno. Prema tome, u je jedinstvena fiksna tačka višeznačnog preslikavanja F i pri tome je $Fu = \{u\}$.

Posledica 5.3.2. (Lj. Ćirić [5], stav 3). Neka je (X,d) metrički prostor i $F : X \to BN(X)$ višeznačno preslikavanje koje ispunjava uslov

$$\rho(Fx,Fy) \leq q \max\Big\{d(x,y);\ \rho(x,Fx);\ \rho(y,Fy);$$

$$\frac{1}{2}\left(D(x,Fy) + D(y,Fx)\right)\Big\}\ ,$$

gde je $x,y \in X$, $0 < q < 1$. Ako je X prostor koji je F-orbitalno potpun onda postoji jedinstvena fiksna tačka $u \in X$ preslikavanja F pri čemu je $Fu = \{u\}$.

6. FIKSNE TAČKE UOPŠTENO KONTRAKTIVNIH PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA NAD TOPOLOŠKIM POLUPOLJIMA

Japanski matematičar K. Iseki je 1965. godine u radu [1] prvi uopštio Banach-ov stav na nizovno potpune metričke prostore nad topološkim polupoljem E, ali je koeficijent kontraktivnosti r pripadao polju realnih brojeva koje je izomorfno osi topološkog polupolja.

Sledeće uopštenje Banach-ovog stava na te metričke prostore, gde je koeficijent kontraktivnosti $r \in E$, dao je Lj. Ćirić 1979. godine u radu [21] i na taj način otvorio nov pravac istraživanja u teoriji fiksnih tačaka.

U ovom odeljku uvodim novi uslov (6.1.1.) za preslikavanja metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama i ispitujem dovoljne uslove za egzistenciju jedinstvenih fiksnih tačaka preslikavanja koja zadovoljavaju taj uslov. Na taj način uopštavam rezultate K. Iseki-a i A. A. Ivanova. Dalje, vršim uopštavanja rezultata publikovanih u radovima: C. Avramescu-a [1], Lj.Ćirića [21], B.Fisher-a [1] i [3], G.Hardy-T.Rogers-a [1], K.Iseki-a [1] i [2], A.Jaiswil-B.Simgh-a [1], R.Kannan-a [1], S.Reich-a [1] i [2], I.Rus-a [1] i [2], Zamfirescu-a [1] i drugih.

6.1. JEDINSTVENE FIKSNE TAČKE PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA NAD TOPOLOŠKIM POLUPOLJIMA

Neka je D osa topološkog polupolja E, (X,d,E) metrički prostor nad topološkim polupoljem E i $T : X \to X$ preslikavanje prostora X u sebe sama. Za preslikavanje T uvodim ove uslove:

$$q\, d(Tx,Ty) + r\left[d^2(x,Tx) + b^2\, d(x,Ty)\, d(y,Tx)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$(6.1.1.) \qquad + r\left[d^2(y,Ty) + b^2\, d(x,Ty)\, d(y,Tx)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant s\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right] + t\, d(x,y)$$

za svako $x,y \in X$ pri čemu je

$$(6.1.2.) \qquad r \leqslant s + t \qquad \text{i} \qquad t + s + |s| < q + 2r,$$

gde su $b,q,r,s,t \in D$ i $b \geqslant 0$.

Stav 6.1.1. Neka je (X,d,E) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E i $T : X \to X$ preslikavanje prostora X u sebe sama. Ako su ispunjeni uslovi (6.1.1.) i (6.1.2.), onda preslikavanje T ima fiksnu tačku u X. Ako je još ispunjen i uslov

$$(6.1.3.) \qquad 2s + t < q + 2br,$$

onda preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$ i pri tome je $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = u$ za svako $x \in X$.

Dokaz. Uzmimo jedno određeno, inače ma koje, $x_o \in X$ i definišimo niz $\{x_n\}$ iz X stavljajući

(6.1.4.) $$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_o$$

za svaki prirodan broj $n \in N$. Ako se zameni x sa x_{n-1} i y sa x_n u uslovu (6.1.1.) i koristi (6.1.4.) imaćemo

$$q\ d(x_n,x_{n+1}) + r\left[d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})\right] \leqslant$$

$$\leqslant s\ d(x_{n-1},x_n) + t\ d(x_{n-1},x_n),$$

Biće tada

$$q\ d(x_n,x_{n+1}) + r\left[d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})\right] \leqslant$$

$$\leqslant s \cdot d(x_{n-1},x_n) + |s|\ d(x_n,x_{n+1}) + t\ d(x_{n-1},x_n)$$

ili

$$q\ d(x_n,x_{n+1}) + r\left[d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})\right] \leqslant$$

$$\leqslant |s|\ d(x_{n-1},x_n) + s\ d(x_n,x_{n+1}) + t\ d(x_{n-1},x_n),$$

odakle sledi

(6.1.5.) $(q + r - |s|)\ d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (s + t - r)\ d(x_{n-1},x_n)$

ili

(6.1.6.) $(q + r - s)\ d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (|s| + t - r)\ d(x_{n-1},x_n)$.

Iz uslova (6.1.2.) dobijamo

$$0 \leqslant s + t - r < q + r - |s| \quad \text{i} \quad 0 \leqslant |s| + t - r < q + r - s,$$

odakle je

$$0 \leqslant \frac{s + t - r}{q + r - |s|} < 1 \qquad \text{i} \qquad 0 \leqslant \frac{|s| + t - r}{q + r - s} < 1.$$

Ako stavimo

$$\max\left\{\frac{s + t - r}{q + r - |s|}\ ,\ \frac{|s| + t - r}{q + r - |s|}\right\} = \lambda\ ,$$

onda je $\lambda < 1$. S obzirom na (6.1.5.) i (6.1.6.) biće

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda\, d(x_{n-1}, x_n)$$

i odatle

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n\, d(x_o, x_1)$$

za $n = 1,2,\ldots$ Dalje, na osnovu relacije trougla, za svaki prirodan broj p, imamo:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$

$$\leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+p-1})\, d(x_o, x_1) <$$

$$< \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x_o, x_1).$$

Za proizvoljnu okolinu U nule u polupolju E postoji zasićena okolina W nule u polupolju E tako da je $W \subset U$. Osim toga, za okolinu W postoji okolina V nule u E tako da je

$$\frac{1}{1-\lambda}\, d(x_o, x_1)\, V \subset W$$

i za okolinu V postoji prirodan broj n_V takav da je $q^n \in V$ za svako $n > n_V$. Dakle, mora biti

$$d(x_n, x_{n+p}) \in U,$$

za svaki prirodan broj p i za svako $n > n_V$, što znači da je niz $\{x_n\}$ Cauchy-ev. Kako je metrički prostor nizovno potpun, tada postoji tačka $u \in X$ tako da je

$$u = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n x_o.$$

Ako se zameni x sa x_n i y sa u onda se iz uslova (6.1.1) dobija

$$q\, d(x_{n+1},Tu) + r\left[d^2(x_n,x_{n+1}) + b^2 d(x_n,Tu)\, d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ r\left[d^2(u,Tu) + b^2 d(x_n,Tu)\, d(u,x_{n+1})\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant s\left[d(x_n,Tu) + d(u,x_{n+1})\right] + t\, d(x_n,u).$$

Odatle i iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$ sledi

$$(q + r - s)\, d(u,Tu) \leqslant 0.$$

Zbog uslova (6.1.2.) mora biti $Tu = u$, što znači da je u fiksna tačka preslikavanja T.

Pretpostavimo sada da je i $v \in X$ fiksna tačka preslikavanja T. Ako se zameni x sa u i y sa v u uslovu (6.1.1.) biće

$$q\, d(u,v) + 2br\, d(u,v) < 2s\, d(u,v) + t\, d(u,v)$$

ili

$$(q + 2br - 2s - t)\, d(u,v) \leqslant 0.$$

Odatle zbog uslova (6.1.3.) mora biti $u = v$, što znači da je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T.

Posledica 6.1.1. (Avramescu [1], S. Reich [2], A. Rus [1] T. Zamfirescu [1], R. Kannan [1]). Neka je (X,d) potpun metrički prostor i T preslikavanje prostora X u sebe sama tako da je

$$d(Tx,Ty) \leqslant r\, d(x,y) + s\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right] + t\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]$$

za svako $x,y \in X$, gde su r,s i t nenegativni realni brojevi i $r + 2s + 2t < 1$. Tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Posledica 6.1.2. (B. Fisher [3]). Ako je T preslikavanje potpunog metričkog prostora X u sebe sama koje zadovoljava uslov

$$\rho(Tx,Ty) \leqslant a\rho(x,y)+b\left[\rho(x,Tx)+\rho(y,Ty)\right]+c\left[\rho(x,Ty)+\rho(y,Tx)\right]$$

za svako $x,y \in X$, gde je

$$0 \leqslant \frac{a+b+c}{1-b-c} < 1, \qquad b+c<1, \qquad a+2c<1, \qquad c \geqslant 0,$$

tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Posledica 6.1.3. (A. A. Ivanov [1]). Neka je (X,d) potpun metrički prostor i $T : X \to X$ preslikavanje skupa X u sebe sama tako da je

$$\alpha d(x,y) + \beta d(Tx,Ty) + \gamma\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right] +$$

$$+ \delta\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right] \geqslant 0,$$

$$\alpha + \beta + 2\gamma < \min\{0, -2\delta\} \text{ i } \beta + \gamma + \delta < 0.$$

Tada postoji fiksna tačka preslikavanja T. Ako je još ispunjen i uslov $\alpha + \beta + 2\delta < 0$, onda je fiksna tačka jedinstvena.

Posledica 6.1.4. (K. Iseki [1]). Neka je (X,d) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E i f preslikavanje prostora X u sebe sama tako da je

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\, d(x,y)$$

za svako $x,y \in X$, gde je $\alpha \in D$ sa svojstvom $0 \leqslant \alpha < 1$. Tada postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f.

Stav 6.1.2. Neka je (X,d,E) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E, $T : X \to X$ preslikavanje prostora X u sebe sama koje ispunjava uslov

$$
\begin{aligned}
& d(Tx,Ty) \leqslant r\, d(x,y) + \\
& s\left[d^2(x,Tx) + d(x,Ty)\, d(y,Tx)\right]^{\frac{1}{2}} + \\
(6.1.7.) \quad & + s\left[d^2(y,Ty) + d(x,Ty)\, d(y,Tx)\right]^{\frac{1}{2}} + \\
& + t\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right]
\end{aligned}
$$

za svako $x,y \in X$, gde su $r,s,t \in \overline{K}$ i $r + 2s + 2t < 1$. Tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka $u \in X$ preslikavanja T i pri tome je $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = u$ za svako $x \in X$.

Dokaz. Uzmimo jedno određeno, inače ma koje, $x_o \in X$ i stavimo

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_o$$

za svaki prirodan broj n.

Ako se u uslovu (6.1.7.) zameni x sa x_{n-1} i y sa x_n imaćemo

$$
\begin{aligned}
& d(x_n,x_{n+1}) = d(Tx_{n-1},Tx_n) \leqslant \\
& \leqslant r\, d(x_{n-1},x_n) + s\left[d(x_{n-1},Tx_{n-1}) + d(x_n,Tx_n)\right] + \\
& + t\left[d(x_{n-1},Tx_n) + d(x_n,Tx_{n-1})\right] = r\, d(x_{n-1},x_n) +
\end{aligned}
$$

$$+ s\ [(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})] + t\ d(x_{n-1},x_{n+1})$$

za svako $n \in N$. Koristeći nejednačinu trougla biće

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq r\ d(x_{n-1},x_n) + s\ [d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})] +$$

$$+ t\ [d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})]$$

i zato je

$$(6.1.8.)\quad (1 - s - t)\ d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (r + s + t)\ d(x_{n-1},x_n).$$

Kako je $1-s-t \in K$, tada postoji jedinstveni inverzni element $(1-s-t)^{-1}$ elementa $1-s-t$ tako da je $(1-s-t)\cdot(1-s-t)^{-1} = 1 \in E$. S obzirom na (6.1.8.) biće

$$(6.1.9.)\quad d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (r + s + t)(1 - s - t)^{-1} d(x_{n-1},x_n).$$

Ako stavimo da je

$$(6.1.10.)\qquad q = (r + s + t)(1 - s - t)^{-1},$$

onda prema stavu 1.1.1. mora biti $0 \leq q < 1$. Iz (6.1.9.) dobijamo

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq q\ d(x_{n-1},x_n)$$

i odatle

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq q^n\ d(x_o,x_1).$$

Dalje, na osnovu relacije trougla, za svaki prirodan broj p, imamo:

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) +$$

$$+ d(x_{n+1},x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \leq$$

$$\leq (q^n + q^{n+1} + \dots + q^{n+p-1}) d(x_o,x_1) <$$

$$< q^n(1-q)^{-1} d(x_o,x_1)$$

Za proizvoljnu okolinu U nule u polupolju E postoji zasićena okolina W nule u polupolju E tako da je $W \subset U$. Osim toga, za okolinu W postoji okolina V nule u E tako da je

$$(1-q)^{-1}\ d(x_o,x_1)\ V \subset W$$

i za okolinu V postoji prirodan broj n_V takav da je $q^n \in V$ za svako $n > n_V$. Dakle, mora biti

$$d(x_n,x_{n+p}) \in U,$$

za svaki prirodan broj p i svako $n > n_V$, što znači da je niz $\{x_n\}$ Košijev. Kako je metrički prostor nizovno potpun, tada postoji tačka $u \in X$ tako da je

$$u = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n x_o.$$

Iz uslova (6.1.7.) i definicije niza (6.1.4.) biće

$$\begin{aligned} d(Tu,Tx_n) &\leq r\ d(u,x_n) + \\ &+ s\left[d^2(u,Tu) + d(u,x_{n+1})\ d(x_n,Tu)\right]^{\frac{1}{2}} + \\ &+ s\left[d^2(x_n,x_{n+1}) + d(u,x_{n+1})\ d(x_n,Tu)\right]^{\frac{1}{2}} + \end{aligned} \qquad (6.1.11.)$$

$$+ t[d(u,x_{n+1}) + d(x_n,Tu)].$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$ tada iz (6.1.11.) dobijamo

$$d(Tu,u) \leqslant (s + t)\ d(u,Tu),$$

kad $n\to\infty$. Odatle zbog uslova $s + t < 1$ mora biti

$$(1 - s - t)\cdot d(Tu,u) = 0$$

i zato je $d(Tu,u) = 0$.

Znači, u je fiksna tačka preslikavanja T. Pretpostavimo da je i $v \in X$ fiksna tačka preslikavanja T.

Iz uslova (6.1.7.) neposredno sledi da je

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \leqslant$$

$$\leqslant r\ d(u,v) + 2s[d(u,Tv)\cdot d(v,Tu)]^{\frac{1}{2}} + t[d(u,Tv) + d(v,Tu)] =$$

$$= (r + 2s + 2t)\ d(u,v)$$

odnosno

$$(1 - r - 2s - 2t)\ d(u,v) \leqslant 0.$$

Zbog toga i uslova $r + 2s + 2t < 1$ sledi da je $d(u,v) = 0$, odnosno $u = v$, što znači da je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T.

Primer 6.1.1. Neka je N skup prirodnih brojeva i R^N tihonovsko polupolje. Stavimo $d(x,y) = |x - y|$ za svako $x,y \in R^N$. Tada je (R^N,d) metrički prostor nad polupoljem R^N. Definišimo preslikavanje

$$Tx = (7^{-2}x_1,\ 7^{-\frac{3}{2}}x_2, \ldots, 7^{-\frac{n+1}{n}}x_n, \ldots),$$

gde je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ element metričkog prostora R^N .
Tada preslikavanje T zadovoljava uslov (6.1.7.) za

$$r = s = t = (7^{-2}, 7^{-\frac{3}{2}}, \ldots, 7^{-\frac{n+1}{n}}, \ldots)$$

i ima jedinstvenu fiksnu tačku $TO = O$.

Ovde ćemo navesti neke posledice prethodnog stava.

Posledica 6.1.5. (B. Fisher [1], stav 4). Neka je (X,d) potpun metrički prostor i T preslikavanje prostora X u sebe sama tako da je

$$d(Tx,Ty) \leqslant b\ d(x,y) + c \max\{d(x,Tx);\ d(y,Ty)\}$$

za svako $x,y \in X$, gde su b i c nenegativni realni brojevi i $b + c < 1$. Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Posledica 6.1.6. (Lj. Ćirić [21]). Neka je (M,d,E) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E i A preslikavanje prostora M u sebe sama tako da je

$$d(Ax,Ay) \leqslant a\ d(x,y)$$

za svako $x,y \in M$, gde je $a \in \overline{K}$ i $a < 1$. Tada preslikavanje A ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Stav 6.1.3. Neka je (X,d,E) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E i T preslikavanje prostora X u sebe sama pri čemu je ispunjen uslov

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant r\ d(x,y) +$$

$$+ s\left[d^2(x,T^n x) + d(x,T^n y)\ d(y,T^n x)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$s\left[d^2(y,T^ny) + d(x,T^ny)\, d(y,T^nx)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ t\left[d(x,T^ny) + d(y,T^nx)\right]$$

za svako $x,y \in X$, gde je n prirodan broj, $r,s,t \in \overline{K}$ i $r + 2s + 2t < 1$. Tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka iz X za preslikavanje T.

Dokaz. Prema stavu 6.1.2. preslikavanje T^n ima jedinstvenu fiksnu tačku koju ćemo označiti sa u. Kako je

$$T^n u = u \qquad \text{i} \qquad T(T^n u) = T^n(Tu),$$

tada je $T^n(Tu) = Tu$, što znači da je Tu jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T^n. Dakle, mora biti $Tu = u$.

Posledica 6.1.7. (S.P.Singh, [1]). Neka je (X,d) potpun metrički prostor i T preslikavanje prostora X u sebe sama pri čemu je

$$d(T^nx,T^ny) \leqslant s\left[d(x,T^nx) + d(y,T^ny)\right]$$

za svako $x,y \in X$, gde je $0 \leqslant s < \frac{1}{2}$ i n prirodan broj. Tada postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja T.

Stav 6.1.4. Neka je (X,d,E) metrički prostor nad topološkim polupoljem E, $S \subset X$ svuda gust skup na prostoru X i $T: X \to X$ neprekidno preslikavanje prostora X u sebe sama koje ispunjava uslov (6.1.7.) za svako $x,y \in S$. Tada postoji jedinstvena fiksna tačka iz X preslikavanja T.

Dokaz. Dokazaćemo da preslikavanje T ispunjava uslov (6.1.7.) za svako $x,y \in X$.

Neka je $x \in S$ i $y \in X \setminus S$. Tada u skupu S postoji niz $\{y_m\}$ tipa M koji konvergira tački y (vidi, na primer, moj rad [1], stav 7.4.). Iz uslova (6.1.7.) imamo

$$d(Tx,Ty) \leqslant d(Tx,Ty_m) + d(Ty_m,Ty) \leqslant$$

$$\leqslant r\, d(x,y_m) + s\left[d^2(x,Tx) + d(x,Ty_m)\, d(y_m,Tx)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ s\left[d^2(y_m,Ty_m) + d(x,Ty_m)\, d(y_m,Tx)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ t\left[d(x.Ty_m) + d(y_m,Tx)\right] + d(Ty_m,Ty),$$

odakle se zbog neprekidnosti preslikavanja T na X i $\lim\limits_{m \in M} y_m = y$ dobija uslov (6.1.7.) za svako $x \in S$ i $y \in X \setminus S$.

Neka su sada $x,y \in X \setminus S$. Tada, na primer, u skupu S postoji niz $\{x_m\}$ tipa M koji konvergira tački x. Ponovo iz uslova (6.1.7.) imamo

$$d(Tx_m,Ty) \leqslant r\, d(x_m,y) +$$

$$+ s\left[d^2(x_m,Tx_m) + d(x_m,Ty)\, d(y,Tx_m)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ s\left[d^2(y,Ty) + d(x_m,Ty)\, d(y,Tx_m)\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ t\left[d(x_m,Ty) + d(y,Tx_m)\right],$$

odakle se zbog neprekidnosti preslikavanja T na X i $\lim\limits_{m \in M} x_m = x$ dobija uslov (6.1.7.) za svako $x,y \in X \setminus S$.

Prema tome, neprekidno preslikavanje T ispunjava uslov (6.1.7.) za svako $x,y \in X$ pa prema stavu (6.1.2.) postoji jedinstvena fiksna tačka iz X preslikavanja T.

6.2. JEDINSTVENE ZAJEDNIČKE FIKSNE TAČKE PRESLIKAVANJA U METRIČKIM PROSTORIMA NAD TOPOLOŠKIM POLUPOLJIMA

Ovaj paragraf je posvećen istraživanju dovoljnih uslova za egzistenciju zajedničkih fiksnih tačaka preslikavanja metričkog prostora nad topološkim polupoljem u sebe sama koja ispunjavaju novi uslov.

Stav 6.2.1. Neka je (X,d,E) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E i neka je $\{T_n\}$ niz funkcija koje preslikavaju prostor X u sebe sama i zadovoljavaju sledeće uslove:

$$
\begin{aligned}
d(T_ix,T_jy) \leqslant {} & r\, d(x,y) + \\
& + s\left[d^2(x,T_ix) + d(x,T_jy)\, d(y,T_ix)\right]^{\frac{1}{2}} + \\
& + s\left[d^2(y,T_jy) + d(x,T_jy)\, d(y,T_ix)\right]^{\frac{1}{2}} + \\
& + t\left[d(x,T_jy) + d(y,T_ix)\right]
\end{aligned}
\tag{6.2.1.}
$$

za svako $x,y \in X$, gde su $r,s,t \in \overline{K}$ i $r + 2s + 2t < 1$. Tada postoji jedna i samo jedna zajednička fiksna tačka u X za sva preslikavanja T_n.

Dokaz. Uzmimo jedno određeno, inače ma koje, $x_o \in X$ i definišimo niz $\{x_n\}$ iz X stavljajući

$$x_n = T_n x_{n-1} \qquad (n = 1,2,\ldots). \tag{6.2.2.}$$

Iz uslova (6.2.1.) i definicije niza (6.2.2.) neposredno sledi

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(T_n x_{n-1},T_{n+1}x_n) \leqslant r\, d(x_{n-1},x_n) +$$

$$+ s\left[d^2(x_{n-1},T_n x_{n-1}) + d(x_{n-1},T_{n+1}x_n)\, d(x_n,T_n x_{n-1})\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ s\left[d^2(x_n,T_{n+1}x_n) + d(x_{n-1},T_{n+1}x_n)\, d(x_n,T_n x_{n-1})\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ t\left[d(x_{n-1},T_{n+1}x_n) + d(x_n,T_n x_{n-1})\right] =$$

$$= r\, d(x_{n-1},x_n) + s\left[d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})\right] +$$

$$+ t\left[d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})\right]$$

i zato je

$$(1 - s - t)\, d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (r + s + t)\, d(x_{n-1},x_n).$$

Koristeći (6.1.10.) iz stava 6.1.2, biće

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant q\, d(x_{n-1},x_n)$$

za svaki prirodan broj n, gde je $0 \leqslant q < 1$. Stoga je

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant q^n\, d(x_o,x_1),$$

odakle sledi da je $\{x_n\}$ Cauchy-ev niz u prostoru X. S druge strane, prostor X je nizovno potpun i zato niz $\{x_n\}$ konvergira nekoj tački $u \in X$.

Dokažimo da mora biti $T_n u = u$ za svako $n = 1,2,\ldots$ Iz nejednačine trougla i uslova (6.2.1.) dobijamo

$$d(u,T_n u) \leqslant d(u,x_{m+1}) + d(x_{m+1},T_n u) =$$

$$= d(u,x_{m+1}) + d(T_{m+1}x_m,T_n u) \leqslant$$

$$\leq d(u,x_{m+1}) + r\, d(x_m,u) +$$

$$+ s\left[d^2(x_m,x_{m+1}) + d(x_m,T_n u)\, d(u,x_{m+1})\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ s\left[d^2(u,T_n u) + d(x_m,T_n u)\, d(u,x_{m+1})\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ t\left[d(x_m,T_n u) + d(u,x_{m+1})\right],$$

odakle sledi

$$d(u,T_n u) \leq (s + t)\, d(u,T_n u)$$

kad $n \to +\infty$. Time je dokazano da je $d(u,T_n u) = 0$ za $n = 1,2,\ldots$, što znači da je u zajednička fiksna tačka preslikavanja T_n za svako $n \in N$.

Pretpostavimo da je i $v \in X$ zajednička fiksna tačka svih preslikavanja T_n. Iz uslova (6.2.1.) imamo

$$d(u,v) = d(T_n u,T_n v) \leq$$

$$r\, d(u,v) + 2s\left[d(u,T_n v)\, d(v,T_n u)\right]^{\frac{1}{2}} + t\left[d(u,T_n v) + d(v,T_n u)\right] =$$

$$= (r + 2s + 2t)\, d(u,v),$$

odnosno

$$(1 - r - 2s - 2t)\, d(u,v) \leq 0.$$

Stoga je $d(u,v) = 0$ i zato je $u = v$. Prema tome, u je jedinstvena fiksna tačka svih preslikavanja T_n.

Ovde ćemo navesti neke posledice prethodnog stava.

Posledica 6.2.1. (K.Iseki [2]). Neka je (X,ρ) potpun metrički prostor i neka je $\{T_n\}$ $(n = 1,2,\ldots)$ niz funkcija koje preslikavaju prostor X u sebe sama. Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi:

$$\rho(T_i(x),T_j(y)) \leq \alpha(\rho(x,T_i(x)) + \rho(y,T_j(y)))+$$

$$+\beta(\rho(x,T_j(y)) + \rho(y,T_i(x))) + \gamma\rho(x,y),$$

za svako $x,y \in X$, gde su α,β i γ nenegativni realni brojevi i $2\alpha + 2\beta + \gamma < 1$. Tada postoji jedinstvena zajednička fiksna tačka u X za sva preslikavanja T_n.

Posledica 6.2.2. (A.Jaiswal i B.Singh [2]). Ako je (X,d) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E i $\{f_k\}$ niz funkcija koje preslikavaju prostor X u sebe sama i zadovoljavaju uslove:

$$d(f_m(x),f_n(x)) \leq \alpha d(x,y) + \beta[d(x,f_m(x)) + d(y,f_n(y))] +$$

$$+\gamma[d(x,f_n(y)) + d(y,f_m(x))]$$

za svako $x,y \in X$, gde je $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ i $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$, onda postoji jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja f_k $(k = 1, 2,\ldots)$.

Stav 6.2.2. Neka je (X,d,E) nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E, $\{T_n\}$ niz funkcija koje preslikavaju prostor X u sebe sama i koji uniformno konvergira funkciji T. Neka preslikavanje T_n ima fiksnu tačku u_n za svako $n \in N$ i neka preslikavanje T zadovoljava uslov

$$(6.2.3.)\qquad d(Tx,Ty) \leqslant r\, d(x,y) + s\big[d(x,Tx) + d(y,Ty)\big] + $$
$$+ t\big[d(x,Ty) + d(y,Tx)\big]$$

za svako $x,y \in X$, gde su $r,s,t \in \overline{K}$ i $r + 2s + 2t < 1$. Tada niz $\{u_n\}$ konvergira fiksnoj tački preslikavanja T.

Dokaz. Napomenimo da prema stavu (6.1.2.) preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku, koju ćemo označiti sa u. Iz uslova $r,s,t \in \overline{K}$ i $r + 2s + 2t < 1$ sledi da je

$$1 + 2s + 2t \in K \qquad \text{i} \qquad 1 - r - s - t \in K$$

i zato je jednoznačno određen element

$$(6.2.4.)\qquad b = (1 + 2s + 2t)(1 - r - s - t)^{-1}.$$

Za proizvoljnu okolinu U nule topološkog polupolja E postoji zasićena okolina V nule polupolja E tako da je $bV \subset U$. Za okolinu V nule postoji prirodan broj n_V takav da je

$$d(T_n x, Tx) \in V$$

za svako $x \in X$ i svako $n > n_V$.

Dalje, iz nejednačine trougla i uslova (6.2.3.) dobijamo

$$d(u_n,u) = d(T_n u_n, Tu) \leqslant$$
$$\leqslant d(T_n u_n, Tu_n) + d(Tu_n, Tu) \leqslant$$
$$\leqslant d(T_n u_n, Tu_n) + r\, d(u_n,u) + s\big\{d(u_n,Tu_n) + d(u,Tu)\big\} +$$
$$+ t\big\{d(u_n,Tu) + d(u,Tu_n)\big\} \leqslant$$

$$\leqslant d(T_n u_n, Tu_n) + r\, d(u_n,u) + s\left\{2(T_n u_n, Tu_n) + d(u_n,u)\right\} +$$

$$+ t\left\{d(u_n,u) + 2d(T_n u_n, Tu_n)\right\},$$

odakle je

$$(1 - r - s - t)\, d(u_n,u) \leqslant (1 + 2s + 2t)\, d(T_n u_n, Tu_n).$$

S obzirom na (6.2.4.) biće

$$d(u_n,u) \leqslant b\, d(T_n u_n, Tu_n)$$

i zato je

$$d(u_n,u) \in b\, V \subset U$$

za svako $n > n_V$.

Dakle, niz $\{u_n\}$ konvergira ka tački u.

L I T E R A T U R A

ACHARYA, S. P.

[1] Some results on fixed points in uniform spaces, Yokohama Math. J. 22 (1-2), 1974, 105-116.

ALJANČIĆ. S.

[1] Uvod u funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, 1963, Beograd, str. 190.

ANTONOVSKIJ, M. JA.

[1] Sistema obobšćennyh metrik na proizvolnom množestve, UMN 24:1(145), 1969, 187-188.

ANTONOVSKIJ, M. JA, BOLTJANSKIJ, V. G.

[1] Tihonovskie polupolja i nekotorye problemy obšćej topologii UMN 25 (153) 1970, str. 48.

ANTONOVSKIJ, M. JA, BOLTJANSKIJ, V. G, SARYMSAKOV, T. A.

[1] Topologičeskie polupolja, Izdateljstvo SamGU, Taškent, 1960.

[2] Metričeskie prostranstva nad polupoljami, Tr. Taškentskogo gos. un-ta im. V. I. Lenina vyp. 191, Taškent, 1961, str. 72.

[3] Topologičeskie algebry Bulja, Taškent, Izd-vo ANUzSSR, 1963.

[4] Očerk teorii topologičeskih polupolej, UMN 21, vpy. 4 (130), 1966, 185-216.

AVRAMESCU, C.

[1] Théorèmes de point fixe pour les applications contractantes et anticontractantes, „Manuscripta Math.", 6, 1972, 405-411.

BOLTJANSKIJ V. G.

[1] Aksiomy otdelimosti i metrika, DAN SSSR Tom. 197, N° 6, 1971, 1239-1242.

BURBAKI N.

[1] Topologičeskie vektornye prostranstva, Moskva, 1959, str. 410.

[2] Obšćaja topologija, Osnovnye struktury, Fizmatgiz, Moskva, 1968, str. 272.

[3] Obšćaja topologija, Topologičeskie gruppy, čisla i svjazannye s nimi gruppy i prostranstva, Fizmatgiz, Moskva, 1969, str. 392.

ĆIRIĆ Lj.

[1] Postojane i periodične tačke kontraktivnih operatora, Doktorska disertacija, Beograd, 1970, str. 110.

[2] On contraction type mappings, Math. Balkanica 1, 1971, 52-57.

[3] Generalized contractions and fixed-point theorems, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 12 (26), 1971, 19-26.

[4] A certain class of mappings in topological spaces, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 12 (26), 1971. pp. 27-30.

[5] Fixed points for generalized multi-valued contractions, Mat. Vesnik 9 (24) (1972), 265-272.

[6] Fixed point theorem for mappings with a generalized contractive iterate at a point, Publ. Inst. Math. 13 (27) (1972), 11-16.

[7] Fixed and periodic points in Kurepa spaces, Math. Balkanica 2 (1972) 13-20.

[8] Fixed and periodic points of almost contractive operators, Math. Balkanica 3 (1973), 33-44.

[9] A note on a nonlinear functional equation, Math. Balkanica 3 (1973), 45-47.

[10] On some maps with a nonunique fixed point, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 17 (31), 1974, pp. 52-58.

[11] On family of contractive maps and fixed points, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 17 (31), 1974, pp. 45-51.

[12] A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 267-273.

[13] On fixed points of generalized contractions on probabilistic metric spaces, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 18 (32), 1975, pp. 71-78.

[14] On fixed point theorems in Banach spaces, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 19 (33), 1975, pp. 43-50.

[15] Fixed and periodic points for a class of contractive operators, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 18 (32), 1975, pp. 57-69.

[16] Fixed point theorems in topological spaces, Fundamenta Math. 87 (1975), 1-5.

[17] Fixed points of weakly contraction mappings, Publ.

Inst. Math. Nouv. serie, tome 20 (34), 1976, pp. 79-84.

[18] A certain class of maps and fixed point theorems, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 20 (34), 1976, pp. 73-77.

[19] Quasi-contractions in Banach spaces, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 21 (35), 1977, pp. 41-48.

[20] On comon fixed points in uniform spaces, Publ. Inst. Math. Nouv. série, tome 24(38), 1978, pp. 39-43.

[21] Fixed and periodic points of contractive operators in Kurepa's spaces (u rukopisu).

FISHER, B.

[1] Fixed point mappings on metric spaces, Bull. Math.de la Soc. Sci.Math. de la R. S. de Roumanie, tome 20 (68), nr. 3-4, 1976.

[2] On three fixed point mappings for compact metric spaces, Indian J. Pure and Appl. Math., Vol. 8, N^{o} 4, 1977, 479-481.

[3] Fixed point mappings, Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat. Vol. 59, N$_o$5, 1975, 404-406.

GERMAN, L. F., SOLTAN, V. P.

[1] O nekotoryh svojstvah d-vypuklyh množestv, Prikladnaja matematika i programmirovanie, vyp. 10, Kišenev, "Štiinca",1973, 47-58,

HARDY, G. E,, ROGERS, T. D.

[1]A generalization of a fixed point theorem of Simeon

Reich, Can. Math. Bull., Vol. 16, No 2, p. 201-206.

HICKS, T. L., SATTERWHITE.

[1] Quasi-pseudometrics over Tikhonov semi-fields, Math. Japonica, 22, 1977, 315-321.

ISEKI, K.

[1] On Banach theorem on contraction mappings, Proc. Japan Acad. 41, 1965, 145-146.

[2] On common fixed points of mappings, Math. Sem. Notes, Vol. 2. 1974, 14-18.

[3] Generalizations of Kannan fixed point theorems, Math. Sem. Notes, Vol. 2, 1974, 18-22.

IVANOV, A. A.

[1] Neravenstva i teoremy o nepodvižnyh točkah, Math. Balkan., 4, 1974, 283-287.

JAGGI, D. S.

[1] A study of fixed-point mappings in metric spaces, Thesis, Delhi, 1977, str. 111.

[2] Some unique fixed point theorems, Indian J. Pure and Appl. Math., Vol. 8, No 2, 223-230, 1977.

JAISWAL, A., SINGH, B.

[1] Semifield metrizability, Math. Seminar Notes, Vol. 3, Kobe Univ., 1975.

[2] Fixed point theorem in metric space over topological semifields, Math. Japonicae, 21, 187-195, 1976.

JUNGCK, G.

[1] Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Monthly, 83(1976), 261-263.

KANNAN, R.

[1] Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 1968, 71-76.

KASAHARA, S.

[1] On formulations of topological linear spaces by topological semifields, Math. Seminar Notes, Vol. 1, Kobe Univ., 1973, p. 11-29.

KELLI, DŽ. L.

[1] Obšćaja topologija, Fizmatgiz, Moskva, 1968, str. 383.

KOLMOGOROV, A. N., FOMIN, S. V.

[1] Elementy teorii funkcij i funkcionalnogo analiza, Fizmatgiz, Moskva, 1968 , str. 496.

KURATOVSKIJ, K.

[1] Topologija, Tom I, izd. "Mir", Moskva, 1966, str 594.

KUREPA, Đ.

[1] Tableaux ramifiés d' ensebles. Espaces pseudodistanciés, C. R., 198, Paris, 1934, str. 1563-1565.

[2] Le probèime de Souslin et les espaces abstraits C. R. 203, 1936, 1049-1052.

[3] Un critère de distanciabilité, " Mathematica ", Cluj, 13, 1937, 59-65.

[4] Sur l'ecart abstrait, Glasnik mat. fiz. astr., 11, Zagreb, 1956, 105-132.

[5] Viša algebra II, Školska knjiga, Zagreb, 1965, 765-1380.

LASSAK, M.

[1] O razmernosti Helli dlja Dekartovyh proizvedenij metričeskih prostranstv, sb. " Mat. issledovanija ". Tom 10. vyp. 2 (36), Kišenev, " Štiinca ", 1975, 159-167.

MAMUZIĆ, Z. P.

[1] Operatori E (M), D (M) i topološke strukture na skupu E, Vesnik Društva mat. i fiz. S. R. Srbije, VII, str. 39-72, Beograd, 1955.

[2] O raznim topološkim (uniformnim) strukturama proizvedenim na skupu E preslikavanjem $f(E \times E) \subset M$ u uređeni (bilo koji) skup M, Vesnik Društva mat. i fiz. S, R. Srbije, VII, 185-216, Beograd, 1955.

[3] O apstraktnom razmaku i uniformnim strukturama, Vesnik Društva mat. i fiz. S. R. Srbije, IX, Beograd, 1957, 105-118.

[4] Note sur l'écart abstrait et les espaces (V), Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad, Serbe des sciences, Vol. XIII, Belgrade, 1959, p. 129-131.

[5] Uvod u opštu topologiju, " Matematička biblioteka ", Beograd, 1960, str. 144.

[6] Abstract distance and neighborhood spaces, Proceedings of the symposium General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra, 1961, Prague, 261-266.

[7] Some remarks on abstract distance in general topology (u rukopisu), str. 13.

MARJANOVIĆ, M.

[1] A further extension of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 19, No 2, 1968, 411-414.

MARDEŠIĆ, S.

[1] Matematička analiza, prvi dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974, str. 272.

MISHRA, S. N.

[1] On common fixed points in uniform spaces II, Indian J. Pure and Appl. Math., Vol. 9, No 1, 26-31, 1978.

MURAKAMI, H., YEH, C.

[1] Fixed point theorems in complete metric spaces, Math. Japonica, Vol. 23, No 1, 1978, 77-83.

NAIMPALLY, S. A.

[1] Contractive mappings in uniform spaces, Indag. Math., 27, 1965, No 3, 477-481.

NADLER, S. B.

[1] Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math. 30, No 2, 1969, 475-488.

NEŠIĆ, S.Č.

[1] Metrički prostori nad topološkim polupoljima, Magistarski rad, Beograd, 1972, str. 85.

[2] Nekoliko stavova o fiksnim tačkama u metričkim prostorima, Mat. Vesnik, 1980 (u štampi).

[3] Nekoliko stavova o zajedničkim nepokretnim tačkama u metričkim prostorima, Saopštenja Mašinskog fakulteta, 3, Beograd, 1980.

PAPIĆ, P.

[1] Sur une classe d'espaces abstraits, Glasnik mat. fiz.ii astr., 9 Zagreb, 1954, 197-216.

[2] Sur les espaces pseudo-distancés, Glasnik mat. fiz.i astr., 9, str. 217-228, Zagreb, 1954.

[3] Sur les espaces pseudo-distanciés complets, Glasnik mat., fiz. i astr., 11, str. 135-142, Zagreb, 1956.

PLYKIN, P. V.

[1] Hausdorfova metrika nad polupoljami, DAN UzSSR 9, Taškent, 1963, 9-12.

PONTRJAGIN, L. S.

[1] Nepreryvnye gruppy, Fizmatgiz, Moskva, 1973, str.520.

RAY, B.

[1] On common fixed points, Indian J. Pure and Appl. Math., Vol. 7, No 5, 557-563, 1976.

REICH, S.

[1] Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull. Vol. 14 (1), 1971, 121-124.

[2] Kannan s fixed point theorem, Bull. U. M. I., 4, 1971, 1-11.

RHOADES, B.

[1] Extensions of some fixed point theorems of Ćirić, Maiti and Pal, Math. Sem. Notes Kobe Univ., Vol. 6, No 1, 1978, 41-46.

[2] Fixed point theorems in a uniform space, Publ. Inst. Math. Nouv. serie, tome 25(39), 1979, pp. 153-156.

RUDIN, U.

[1] Funkcionalnyj analiz, izd."Mir", Moskva, 1975, str.443.

RUS, I. A.

[1] Some fixed point theorems in metric spaces, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste, 3, 1971, 169-172.

[2] On common fixed points, Series Mathematica-Mechanica Univ. Babes-Bolyai, 1 (1973), 31-33.

SARYMSAKOV , T. A.

[1] Topologičeskie polupolja i teorija verojatnostej, izd. "FAN" Uzbekskoj SSR, Taškent, 1969, str. 129.

SINGH, S. P.

[1] Some results on fixed point theorems, Yokohama Math. J. Vol. 18, No 2, 61-64, 1969.

SOLTAN, P. S.

[1] Teorema Helli dlja d-vypuklyh množestv, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Tom 205, No 3, Moskva, 1972, 537-539.

TASKOVIĆ, M. R.

[1] On contractive mappings in metric spaces, Comment. Math. Univ. Carol., 19, N_o 2, 1978, 409-413.

ZAMFIRESCU, T.

[1] Fix point theorems in metric spaces, Arch. Math. 23, 1972, 292-298.

WONG, C. S.

[1] Fixed points and characterizations of certain maps, Pacific J. Math., Vol. 54, No 1, 1974, 305-312.

[2] Generalized contractions, Yokohama Math. J., 1974, Vol. 22, No 1-2, p. 43-50.

REGISTAR