UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Bojan Nikolić

PROSTORI TOPOLOGIJA

- magistarska teza -

Mentor: Dr Miloš Kurilić

Novi Sad, 2010

Predgovor

1936. godine G. Birkhoff je inicirao izučavanje skupa svih topologija T_X na proizvoljnom, ali fiksiranom skupu X. Uređen inkluzijom, skup T_X predstavlja atomarnu kompletnu mrežu sa jedinicom (diskretnom topologijom na X) i nulom (antidiskretnom topologijom na X). U posljednjih 70 godina ova mreža je intenzivno proučavana, ali određen broj problema u vezi nje i dalje ostaje otvoren.

S druge strane, na parcijalnim uređenjima se na više prirodnih načina može uvesti topološka struktura. Na taj način, snabdjeven nekom od "uređajnih topologija", mrežno uređen skup T_X i sam postaje topološki prostor, čije osobine u velikoj mjeri zavise od osobina parcijalnog uređenja iz kojeg je proistekao. Na taj način, ovako uspostavljena korespondencija između teorije mreža i topologije omogućava bolji uvid u prirodu određenih problema koji se mogu postaviti u ovim matematičkim teorijama.

Rad se sastoji od tri dijela. Prvi dio je uvodnog karaktera. Drugi dio je o mrežama i nekim karakterističnim topologijama koje se na njima mogu uvesti. Treći dio rada je posvećen ispitivanju osobina mreže T_X, novouvedene topologije $\mathcal{O}_{T_X}$ i međuodnosa ove topologije sa prethodno uvedenim topologijama. Za svaki značajniji rezultat naveden je dokaz i referenca.

Zahvalio bih dr Milanu Gruloviću i akademiku Stevanu Pilipoviću sa kojima sam sarađivao na poslediplomskom studiju, kao i dr Žarku Mijajloviću i dr Aleksandru Pavloviću koji su svojim korisnim savjetima i sugestijama unaprijedili kvalitet ovog rada.

Posebno bih se zahvalio svom mentoru, dr Milošu Kuriliću, na podršci i znanju koje mi je proteklih godina pružio.

Novi Sad, april 2010. Bojan Nikolić

Sadržaj

Dio I

Uvod

Glava 1

Skupovi

U ovoj glavi biće izloženi pojmovi, tvrđenja i notacija teorije skupova koji će se koristiti u nastavku rada. I pored navođenja aksiome izbora, ovaj rad će se oslanjati na intuitivnu predstavu o skupovima. Dokazi navedenih rezultata mogu se naći npr. u [9] i [11].

1.1 Skupovi

Skupovi će biti označavani malim i velikim slovima latinice. Umjesto riječi **skup** koristiće se i termini **kolekcija** i **familija** kao sinonimi. Formula $x \in X$ označava pripadanost objekta x skupu X, i u tom slučaju se x naziva **element skupa** X. Skupovi X i Y su jednaki, u oznaci $X = Y$, ako imaju iste elemente. Ako je svaki element skupa X istovremeno i element skupa Y, onda se kaže da je skup X **podskup** skupa Y, što se označava sa $X \subset Y$. Skup svih podskupova skupa X je **partitivni skup** skupa X, u oznaci $P(X)$. Skup bez elemenata označava se sa $\emptyset$ i naziva se **prazan skup**.

Skup $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ označava se sa $\langle x, y\rangle$ i naziva se **uređen par**. **Uređena** n**-torka** se za $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ definiše sa $\langle x_1, \dots, x_n\rangle = \langle\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$. Na osnovu definicije dokazuje se da je $\langle x_1, \dots, x_n\rangle = \langle y_1, \dots, y_n\rangle$ ako i samo ako važi $x_i = y_i$, za sve $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ako su $X_1, \dots, X_n$ skupovi, onda se skup svih n-torki oblika $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, gdje $x_i \in X_i$, za sve $i \in \{1, \dots, n\}$, označava sa $X_1 \times \cdots \times X_n$ i naziva **Descartesov proizvod** skupova $X_1, \dots, X_n$. Specijalno, ako je $X_i = X$, za sve $i \in \{1, \dots, n\}$, za Descartesov proizvod se koristi kraća oznaka X^n.

Ako su X i Y skupovi, onda se svaki podskup $\rho \subset X \times Y$ naziva **binarna**

relacija (redom skupova X i Y). Ako je pritom $X = Y$, onda se govori o relaciji na skupu X. $\langle x, y\rangle \in \rho$ se često zapisuje kao $x\rho y$.

Relacija $\rho \subset X^2$ je **relacija ekvivalencije** ako za sve $x, y, z \in X$ važi:

$x\rho x$ (refleksivnost);

$x\rho y \quad\Rightarrow\quad y\rho x$ (simetričnost);

$x\rho y \quad\wedge\quad y\rho z \quad\Rightarrow\quad x\rho z$ (tranzitivnost).

Ako je pritom x proizvoljan element skupa X, onda se skup $[x] = \{y \in X : y\rho x\}$ naziva **klasa ekvivalencije** elementa x. Skup svih klasa ekvivalencije $\{[x] : x \in X\}$ predstavlja **particiju** skupa X, i naziva se **količnički skup** označava se sa X/ρ.

Relacija $\rho \subset X^2$ je antisimetrična ako za proizvoljne elemente $x, y \in X$ važi:

$$x\rho y \;\wedge\; y\rho x \Rightarrow x = y.$$

Ako je relacija $\rho \subset X^2$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, onda je ona **relacija poretka**, a za par $\langle X, \rho\rangle$ se kaže da je **parcijalno uređen skup**. Relacija poretka obično se označava sa $\leq$.

Neka je $\langle X, \rho\rangle$ parcijalno uređen skup i $Y \subset X$ neprazan skup. Tada je element $x \in X$:

gornje ograničenje skupa Y ako je za svako $y \in Y$ ispunjeno $y \leq x$;

supremum skupa Y ako je x gornje ograničenje skupa Y i za svako gornje ograničenje y skupa Y vrijedi $x \leq y$;

maksimum skupa Y ako je x supremum skupa Y i pritom $x \in Y$;

maksimalni element parcijalno uređenog skupa $\langle X, \leq\rangle$ ako ne postoji $y \in X$ tako da je $x \leq y$ i $y \neq x$.

Ako se u gornjim definicijama relacija $\leq$ zamijeni relacijom $\geq$ dobijaju se respektivno definicije **donjeg ograničenja**, **infimuma**, **minimuma** i **minimalnog elementa**. Podskup $\mathcal{L} \subset X$ je **lanac** ako za svako $x, y \in \mathcal{L}$ važi: $x \leq y$ ili $y \leq x$.

Ako je $\langle X, \leq\rangle$ parcijalno uređen skup i ako pritom za sve $x, y \in X$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$, onda je relacija $\leq$ **linearno (totalno) uređenje** skupa X .

Relacija $\leq$ na skupu X se naziva **usmjerenje** ako je $\leq$ refleksivna i tranzitivna relacija na skupu X i za svako $x, y \in X$ postoji $z \in X$ tako da je $x \leq z$ i $y \leq z$. Uređen par $\langle X, \leq\rangle$ se naziva **usmjeren skup**.

Relacija $f \subset X \times Y$ je **funkcija** ili **preslikavanje** ako za svako $x \in X$ postoji tačno jedno $y \in Y$ tako da $\langle x, y\rangle \in f$. Tada se piše $f(x) = y$. Pritom se kaže da funkcija f preslikava skup X u skup Y, u oznaci $f : X \to Y$. Skup svih preslikavanja skupa X u skup Y označava se sa Y^X. Preslikavanje $id_X : X \to X$ dato sa $id_X(x) = x$, za sve $x \in X$, naziva se **identičko preslikavanje** skupa

X. Ako $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, onda je funkcija $g \circ f : X \to Z$ data sa $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, za sve $x \in X$, **kompozicija** preslikavanja f i g.

Funkcija $f : X \to Y$ je **injekcija** ako za svako $x_1, x_2 \in X$ iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dalje, f je **surjekcija** ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $y = f(x)$. Konačno, f je **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Neka je $f : X \to Y$. Ako postoji funkcija $g : Y \to X$, takva da je $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$, onda se za g kaže da je **inverzna funkcija** za funkciju f i piše se $g = f^{-1}$. Dokazuje se da za funkciju f postoji inverzna funkcija ako i samo ako je f bijekcija. Tada je inverzna funkcija jedinstvena, a i sama je bijekcija.

Unija, presjek i razlika skupova X i Y definišu se na sljedeći način:

$$X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\};$$

$$X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\};$$

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}.$$

Radi preglednijeg zapisa skupovi se mogu indeksirati. Neka je I neprazan skup, χ neprazna kolekcija skupova i $X : I \to \chi$. Za skup $\{X(i) : i \in I\}$ (kraći zapis $\{X_i : i \in I\}$) se kaže da je **familija skupova indeksirana skupom** I. Unija i presjek indeksirane familije skupova se uvode na sljedeći način:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x : \exists i \in I \ (x \in X_i)\}, \quad \bigcap_{i \in I} X_i = \{x : \forall i \in I \ (x \in X_i)\}.$$

Familija $\{A_i : i \in I\}$ podskupova skupa X ima **svojstvo konačnog presjeka (s.k.p.)** ako je neprazna i $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \neq \emptyset$, za svaki konačan skup $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset I$.

Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje i $A \subset X$ proizvoljan skup. Skup

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

se naziva **direktna slika** skupa A. Za $B \subset Y$, skup

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

se naziva **inverzna slika** skupa B.

Lema 1.1.1 *Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje, $A, A_1, A_2 \subset X$ i $B, B_1, B_2 \subset Y$. Tada vrijedi:*

(i) $A \subset f^{-1}[f[A]]$, $f[f^{-1}[B]] = B \cap f[X]$;

(ii) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$, $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$;
(iii) $f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2]$, $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$;
(iv) $f[A_1 \setminus A_2] \supset f[A_1] \setminus f[A_2]$, $f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$.
Ako je pritom $A_i \subset X$ i $B_i \subset Y$, $i \in I$, tada je
(v) $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$, $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} B_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$;
(vi) $f[\bigcap_{i\in I} A_i] \subset \bigcap_{i\in I} f[A_i]$, $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$.

Uz pretpostavke prethodne leme vrijedi sljedeća lema.

Lema 1.1.2 *(i) Ako je preslikavanje f injekcija onda važi*
$f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$, $f[\bigcap_{i\in I} A_i] = \bigcap_{i\in I} f[A_i]$, $A = f^{-1}[f[A]]$.
(ii) Ako je preslikavanje f surjekcija onda je $f[f^{-1}[B]] = B$.

Za skupove brojeva koristiće se standardne oznake: ω za **skup prirodnih brojeva**, a $\mathbb{R}$ za **skup realnih brojeva**.

Neka je X neprazan skup. Svako preslikavanje skupa prirodnih brojeva ω u skup X, $x : \omega \to X$ se naziva **niz** na skupu X i označava se sa $\langle x_n : n \in \omega \rangle$.

Aksioma izbora: Za svaku familiju $\{X_i : i \in I\}$ nepraznih skupova postoji bar jedna funkcija izbora, tj. funkcija $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$, takva da za svako $i \in I$ važi $x(i) \in X_i$.

Neki ekvivalenti aksiome izbora:

Lema Zorna: Ako je $\langle P, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup u kome svaki lanac ima gornje ograničenje, onda u P postoji maksimalni element.

Hausdorffov princip maksimalnosti : U svakom nepraznom parcijalno uređenom skupu postoji maksimalan lanac.

Direktan proizvod familije skupova $\{X_i : i \in I\}$, u oznaci $\prod_{i\in I} X_i$ je skup svih funkcija $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$, takvih da je $x(i) \in X_i$, za sve $i \in I$. Ako je $X_i = X$, za sve $i \in I$, tada je direktan proizvod skupova $\{X_i : i \in I\}$ ustvari skup X^I.
Još jedan ekvivalent aksiome izbora je dat u sljedećoj teoremi.

Teorema 1.1.1 *Direktan proizvod neprazne familije skupova $\{X_i : i \in I\}$, skup $\prod_{i\in I} X_i$, je neprazan ako i samo ako su svi skupovi X_i, $i \in I$, neprazni.*

Za $j \in I$, preslikavanje $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, definisano sa $\pi_j(\langle x_i : i \in I \rangle) = x_j$, naziva se **projekcija** proizvoda na skup X_j.

Lema 1.1.3 *Neka su X_i, $i \in I$ skupovi i $\emptyset \neq A_i, B_i \subset X_i$, $i \in I$. Tada vrijedi:*
(i) Ako je $A_i \subset B_i$, za sve $i \in I$, onda je $\prod_{i\in I} A_i \subset \prod_{i\in I} B_i$;

(ii) $(\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} B_i) = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$*;*

(iii) $(\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} B_i) = \emptyset$ *ako i samo ako postoji* $i \in I$ *tako da je* $A_i \cap B_i = \emptyset$*;*

(iv) $\pi_j[\prod_{i\in I} A_i] = A_j$.

Skup A je **ekvipotentan** skupu B, u oznaci $A \sim B$, ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

Lema 1.1.4 *Neka su* A, B *i* C *proizvoljni skupovi. Tada važi:*

(i) $A \sim A$*;*

(ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$*;*

(iii) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Na prvi pogled izgleda da prethodna lema govori da je $\sim$ relacija ekvivalencije, ali s obzirom da univerzum V svih skupova nije skup, to $\sim$ nije binarna relacija u uobičajnom smislu (jer ni sama nije skup). No, u opštijem smislu, zadata na klasi svih skupova, $\sim$ se može posmatrati kao relacija ekvivalencije.

Klasa svih skupova ekvipotentnih skupu A označava se sa $|A|$ i naziva **kardinalni broj** skupa A. Dakle, vrijedi $|A| = \{B : B \sim A\}$.

Za proizvoljne kardinalne brojeve $|A|$ i $|B|$ može se definisati relacija $\leq$ sa $|A| \leq |B| \overset{def}{\Leftrightarrow}$ postoji injekcija $f : A \to B$. Da je ova relacija dobro definisana, kao i to da je u pitanju relacija poretka za kardinalne brojeve dokazano je npr. u [11], a da je ovo relacija linearnog uređenja dokazano je u [9]. Pored ove relacije poretka, od značaja je posmatrati i relaciju poretka $<$, koja je za kardinalne brojeve definisana sa $|A| < |B| \overset{def}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B| \wedge A \nsim B$.

Skup A je **beskonačan** ako je ekvipotentan svom pravom podskupu, tj. ako postoji podskup $A_1 \subsetneq A$ takav da je $A_1 \sim A$. Skup A je **konačan** ako nije beskonačan. Primjer beskonačnog skupa je skup ω. Zaista, skup ω se može bijektivno preslikati na skup parnih prirodnih brojeva koji je njegov pravi podskup, pa je, na osnovu definicije, ovaj skup beskonačan.

Kardinalni broj $|\omega|$ skupa prirodnih brojeva ω označava se sa $\aleph_0$ (**alef-nula**). Skup A je **prebrojiv** ako je $A \sim \omega$, tj. ako je $|A| = \aleph_0$. Skup A je **najviše prebrojiv** ako je $|A| \leq \aleph_0$, a **neprebrojiv** ako je $|A| > \aleph_0$.

Za skup A i kardinalni broj κ, definiše se skup $[A]^{<\kappa} = \{B \subset A : |B| < \kappa\}$.

Lema 1.1.5 *Za beskonačan skup* A *vrijedi* $|[A]^{<\aleph_0}| = |A|$.

Postojanje kardinalnih brojeva većih od $\aleph_0$ garantuje sljedeća lema.

Lema 1.1.6 (Cantor) *Za proizvoljan skup A važi $|A| < |P(A)|$.*

Kardinalni broj $|P(\omega)|$ označava se sa $\mathfrak{c}$ i naziva **kontinuum**. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je primjer skupa koji ima kardinalni broj $\mathfrak{c}$.

Neka su A i B proizvoljni skupovi. **Sabiranje**, **množenje** i **stepenovanje kardinalnih brojeva** $|A|$ i $|B|$ uvodi se na sljedeći način:

$$|A| + |B| = |A' \cup B'|, \text{gdje je } \ A \sim A', B \sim B' \ \text{ i } \ A' \cap B' = \emptyset;$$

$$|A||B| = |A \times B|;$$

$$|A|^{|B|} = |A^B|.$$

Da je ovako uvedeno sabiranje, množenje i stepenovanje kardinalnih brojeva dobro definisano pokazano je npr. u [11].

Teorema 1.1.2 *Neka su $|A|$ i $|B|$ beskonačni kardinalni brojevi (tj. takvi da je $|A| \geq \aleph_0$ i $|B| \geq \aleph_0$). Tada je*

$$|A| + |B| = |A||B| = \max\{|A|, |B|\}.$$

1.2 Filteri i ultrafilteri

Neka je X neprazan skup. Neprazna kolekcija $\mathcal{F} \subset P(X)$ je **filter** ako važi:

(FI 1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(FI 2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;

(FI 3) $F \in \mathcal{F}$ i $F \subset A \subset X \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

Indukcijom se uslov (FI2) može uopštiti na konačno mnogo skupova.

Filter $\mathcal{F}$ je **glavni** ako je $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, inače je **neglavni**.

Primjer 1.2.1. Neka je X beskonačan skup. Kolekcija $\Phi_{Fr} \subset P(X)$ definisana sa

$$\Phi_{Fr} = \{X \setminus K : K \subset X \text{ je konačan skup}\}$$

zadovoljava svojstva (FI 1)-(FI 3). Ovaj filter je neglavni, jer je $\bigcap_{F \in \Phi} F = X \setminus \bigcup\{K : K \subset X \text{ je konačan skup}\} = X \setminus X = \emptyset$, i naziva se **Frechétov filter**.

Filter $\mathcal{U} \subset P(X)$ je **maksimalan filter** ili **ultrafilter** ako za svaki filter $\mathcal{F} \subset P(X)$ iz $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ slijedi $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Lema 1.2.1 *Svaki glavni ultrafilter $\mathcal{U}$ na nepraznom skupu X je oblika $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x) = \{A \subset X : x \in A\}$ za neko $x \in X$.*

Lema 1.2.2 *Filter $\mathcal{U} \subset P(X)$ je ultrafilter ako i samo ako za svaki podskup $A \subset X$ važi: $A \in \mathcal{U}$ ili $X \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Filter $\mathcal{F}$ je **prost** ako iz uslova $A \cup B \in \mathcal{F}$ slijedi $A \in \mathcal{F}$ ili $B \in \mathcal{F}$.

Lema 1.2.3 *Neka je $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter. Tada vrijedi:*
(i) $\mathcal{U}$ je prost filter;
(ii) ako skup $B \subset X$ ima neprazan presjek sa svim članovima od $\mathcal{U}$ onda $B \in \mathcal{U}$.

Iz svojstava (FI 1) i (FI 2) slijedi da je svaki filter familija sa s.k.p. S druge strane, za familiju sa s.k.p. vrijedi sljedeća lema.

Lema 1.2.4 *Svaka kolekcija podskupova nepraznog skupa X koja ima s.k.p. sadržana je u nekom ultrafilteru.*

Primjenom prethodne leme može se dokazati postojanje neglavnih ultrafiltera. Preciznije vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 1.2.1 *Na svakom beskonačnom skupu postoji neglavni ultrafilter.*

Lema 1.2.5 *Neka je X neprazan skup i $\mathcal{U}$ ultrafilter na X. Ako je $B \in \mathcal{U}$, tada je familija $\mathcal{U}|_B = \{U \cap B : U \in \mathcal{U}\}$ ultrafilter na skupu B.*

Lema 1.2.6 *Neka su X i Y neprazni skupovi i $f : X \to Y$ surjekcija. Ako je $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter na X, onda je $\mathcal{V} = \{f[U] : U \in \mathcal{U}\}$ ultrafilter na Y.*

Neka je X beskonačan skup takav da je $|X| = \kappa$. Familija $\mathcal{A} \subset P(X)$ je **nezavisna** ako za proizvoljne različite skupove $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m \in \mathcal{A}$ presjek

$$A_1 \cap ... \cap A_n \cap (X \setminus B_1) \cap ... \cap (X \setminus B_m)$$

ima kardinalnost κ.

Uočava se da definicija nezavisne familije podskupova od X ne zavisi od samog skupa X, već isključivo od njegovog kardinalnog broja. Na osnovu toga se dokazuje sljedeća lema.

Lema 1.2.7 *Neka su X i Y beskonačni skupovi i $|X| = |Y|$. Ako postoji familija $\mathcal{A}$ koja je nezavisna familija podskupova skupa X, tada postoji i familija $\mathcal{B}$ koja je nezavisna familija podskupova skupa Y za koju je $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$.*

Lema 1.2.8 *Za svaki beskonačan skup X postoji nezavisna familija podskupova od X kardinalnosti $2^{|X|}$.*

Dokaz. Neka je $|X| = \kappa$ i P familija koja se sastoji od svih uređenih parova oblika $\langle F, \mathcal{F} \rangle$, gdje je F konačan podskup od X, a $\mathcal{F}$ konačan skup konačnih podskupova od X. Na osnovu leme 1.1.5 i teoreme 1.1.2 vrijedi $|P| = \kappa$, pa je, na osnovu prethodne leme, dovoljno naći nezavisnu familiju $\mathcal{A}$ podskupova od P koja je kardinalnosti 2^κ.

Za $E \subset X$ neka je $Y_E = \{\langle F, \mathcal{F} \rangle \in P : F \cap E \in \mathcal{F}\}$ i neka je $\mathcal{A} = \{Y_E : E \subset X\}$. Ako su E i G dva različita podskupa od X, onda $Y_E \neq Y_G$ (ako npr. postoji $x \in E \setminus G$, tada za $F = \{x\}$ i $\mathcal{F} = \{F\}$ vrijedi $\langle F, \mathcal{F} \rangle \in Y_E$ i $\langle F, \mathcal{F} \rangle \notin Y_G$). Dakle, $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$.

Neka su $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ proizvoljni različiti podskupovi od X. Za svako $i \leq n$ i $j \leq m$, neka je $x_{i,j} \in X$ takav da $x_{i,j} \in A_i \setminus B_j$ ili $x_{i,j} \in B_j \setminus A_i$. Neka je F proizvoljan konačan podskup od X takav da $F \supset \{x_{i,j} : i \leq n, j \leq m\}$ (ima κ takvih skupova F). Jasno da je za sve $i \leq n, j \leq m$ ispunjeno $F \cap A_i \neq F \cap B_j$. Zbog toga za $\mathcal{F} = \{F \cap A_i : i \leq n\}$ vrijedi $\langle F, \mathcal{F} \rangle \in Y_{A_i}$, za sve $i \leq n$ i $\langle F, \mathcal{F} \rangle \notin Y_{B_j}$ za sve $j \leq m$. Dakle, presjek

$$Y_{A_1} \cap ... \cap Y_{A_n} \cap (P \setminus Y_{B_1}) \cap ... \cap (P \setminus Y_{B_m})$$

ima kardinalnost κ, što znači da je familija $\mathcal{A}$ nezavisna. $\square$

Teorema 1.2.2 (Pospíšil) *Na svakom beskonačnom skupu X postoji tačno $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltera.*

Dokaz. Neka je $|X| = \kappa$ i $\mathcal{A}$ nezavisna familija podskupova od X takva da je $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$ (postojanje ovakve familije garantuje prethodna lema). Tada se svakoj funkciji $f : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ može pridružiti familija podskupova G_f, tako da je

$$G_f = \{A : |X \setminus A| < \kappa\} \cup \{A : f(A) = 1\} \cup \{X \setminus A : f(A) = 0\}$$

Zbog nezavisnosti familije $\mathcal{A}$, familija G_f ima s.k.p., pa je, prema lemi 1.2.4, sadržana u nekom ultrafilteru $\mathcal{U}_f$. Ako je $f \neq g$, onda za neko $A \in \mathcal{A}$ vrijedi

$f(A) \neq g(A)$; neka je npr. $f(A) = 1$ i $g(A) = 0$, tada $A \in \mathcal{U}_f$ i $X \setminus A \in \mathcal{U}_g$, pa je $\mathcal{U}_f \neq \mathcal{U}_g$. Zbog toga, postoji najmanje $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltera.

Kako je svaki ultrafilter na X kolekcija podskupova skupa X, to ultrafiltera ima najviše $2^{2^{|X|}}$. Dakle, ima tačno $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltera na X. $\square$

Glava 2

Topološki prostori

U ovoj glavi biće izloženi pojmovi i tvrđenja u vezi sa topološkim prostorima koji će se koristiti u nastavku rada. Dokazi navedenih rezultata mogu se naći npr. u [2] i [11].

2.1 Osnovni topološki pojmovi

Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X koja ima svojstva:
(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;
(O2) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}$;
(O3) $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$;
naziva se **topologija** na skupu X, dok se za uređenu dvojku $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ kaže da je **topološki prostor**. Elementi topologije $\mathcal{O}$ nazivaju se **otvorenim skupovima**, dok se komplementi otvorenih skupova nazivaju **zatvorenim skupovima**. Svojstvo (O2) se može induktivno proširiti na konačno mnogo otvorenih skupova.

Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ je **diskretan** ako je $\mathcal{O} = P(X)$, a **antidiskretan** ako je $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. Sve topologije na istom skupu uređene su parcijalnim uređenjem $\subset$ i u smislu te relacije antidiskretna topologija je najmanja, a diskretna topologija najveća topologija na datom skupu.

Lema 2.1.1 *Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Tada familija $\mathcal{C}$ svih zatvorenih skupova zadovoljava sljedeće uslove:*
(C1) Prazan skup i skup X su zatvoreni;
(C2) Unija dva (pa i konačno mnogo) zatvorenih skupova je zatvoren skup;
(C3) Presjek proizvoljne familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Lema 2.1.2 *Neka je X neprazan skup i $\Phi \subset P(X)$ familija skupova koja zadovoljava uslove (C1)-(C3) iz prethodne teoreme. Tada važi:*

(i) familija $\mathcal{O} = \{X \setminus C : C \in \Phi\}$ je topologija na skupu X;

(ii) $\mathcal{C} = \Phi$, gdje je $\mathcal{C}$ familija zatvorenih skupova prostora $\langle X, \mathcal{O}\rangle$.

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je **baza topologije** $\mathcal{O}$ ako su ispunjeni uslovi:

(B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi, tj. $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$;

(B2) Svaki otvoren skup $A \in \mathcal{O}$ može da se prikaže kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$ (tj. postoji kolekcija $\{B_j : j \in J\} \subset \mathcal{B}$, takva da je $A = \bigcup_{j \in J} B_j$).

Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je **baza neke topologije** na skupu X ako je kolekcija $\{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X (tj. ako zatvorenje familije $\mathcal{B}$ u odnosu na proizvoljne unije predstavlja topologiju na skupu X).

Teorema 2.1.1 *Kolekcija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je baza neke topologije na X ako i samo ako važe sljedeći uslovi:*

(B1') $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(B2') $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \;\; \exists \{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B} \; (B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i)$.

Lema 2.1.3 *Uslov (B2') iz prethodne teoreme je ekvivalentan uslovu*

(B2") $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \;\; \forall x \in B_1 \cap B_2 \;\; \exists B_3 \in \mathcal{B} \;\; (x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$.

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor. Familija $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ je **podbaza topologije** $\mathcal{O}$ ako familija svih konačnih presjeka elemenata $\mathcal{P}$ predstavlja bazu neke topologije $\mathcal{O}$. Na osnovu definicija podbaze i baze topologije jednostavno se dokazuje sljedeća lema.

Lema 2.1.4 *Neka je X neprazan skup i familija $\mathcal{S} \subset P(X)$ takva da je $\bigcup \mathcal{S} = X$. Tada vrijedi:*

(i) Familija $\mathcal{B}$ svih konačnih presjeka elemenata familije $\mathcal{S}$ je baza neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu X, a $\mathcal{S}$ je njena podbaza;

(ii) $\mathcal{O}$ je najmanja topologija na skupu X koja sadrži kolekciju $\mathcal{S}$.

Minimalna topologija na skupu X koja sadrži familiju $\mathcal{S}$ i zadovoljava uslove prethodne leme biće označena sa $\mathcal{O}[\mathcal{S}]$.

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor i $\mathcal{C}$ familija zatvorenih skupova na X. Familija $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} \subset P(X)$ je **baza familije zatvorenih skupova** $\mathcal{C}$ ako se familija $\mathcal{C}$ može dobiti uzimanjem proizvoljnih presjeka skupova iz familije $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$. Familija $\mathcal{P}_{\mathcal{C}} \subset P(X)$

je **podbaza familije zatvorenih skupova** $\mathcal{C}$ ako se uzimanjem konačnih unija skupova iz familije $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ dobija baza familije zatvorenih skupova.

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor i $x \in X$ proizvoljna tačka. Tada se podskup $A \subset X$ naziva **okolina tačke** x ako postoji skup $U \in \mathcal{O}$ tako da $x \in U \subset A$. Skup svih okolina tačke x biće označen sa $\mathcal{N}(x)$.

Lema 2.1.5 *Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor. Podskup $A \subset X$ je otvoren skup u topologiji $\mathcal{O}$ ako i samo ako je on okolina svake svoje tačke.*

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor i neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Familija skupova $\mathcal{B}(x) \subset P(X)$ je **baza okolina tačke** x ako su ispunjeni sljedeći uslovi:

(BN1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x, tj. $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$;

(BN2) $\forall U \in \mathcal{N}(x)\ \ \exists B \in \mathcal{B}(x)\ \ B \subset U$.

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor. Podskup $A \subset X$ je **gust** ako ima neprazan presjek sa svakim članom familije $\mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$.

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor. Kardinalne funkcije

$$\chi(x, \langle X, \mathcal{O}\rangle) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ je baza okolina tačke } x\};$$

$$\chi(\langle X, \mathcal{O}\rangle) = \sup\{\chi(x, \langle X, \mathcal{O}\rangle) : x \in X\};$$

$$w(\langle X, \mathcal{O}\rangle) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ je baza topologije } \mathcal{O}\};$$

$$d(\langle X, \mathcal{O}\rangle) = \min\{|D| : D \text{ je gust podskup od } X\};$$

nazivaju se **karakter tačke** x, **karakter**, **težina** i **gustina** topološkog prostora $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ respektivno.

Lema 2.1.6 *Za svaki topološki prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ vrijedi:*

(i) $d(\langle X, \mathcal{O}\rangle) \le w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$;

(ii) $\chi(\langle X, \mathcal{O}\rangle) \le w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{B_s : s \in S\}$ baza topologije $\mathcal{O}$ koja se sastoji od nepraznih skupova, takva da je $|S| = w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$.

(i) Aksiomom izbora se može izabrati tačka $x_s \in B_s$ i na taj način dobiti skup $A = \{x_s : s \in S\}$ koji je očigledno gust u prostoru $\langle X, \mathcal{O}\rangle$. Kako je još $|A| \le |S| = w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$, to vrijedi $d(\langle X, \mathcal{O}\rangle) \le w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$.

(ii) Neka je za proizvoljnu tačku $x \in X$, data familija $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Jasno da je su članovi familije $\mathcal{B}(x)$ okoline tačke x. Ako je $V \in \mathcal{N}(x)$, tada postoji otvoren skup U takav da je $x \in U \subset V$, pa postoji skup $B_{s_0} \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_{s_0} \subset U \subset V$, odakle je $B_{s_0} \in \mathcal{B}(x)$. Dakle, familija $\mathcal{B}(x)$ ispunjava svojstva (BN1) i (BN2), pa je ona baza okolina u tački x i pritom je $|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}| = w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$. Dakle, za svako $x \in X$, vrijedi $\chi(x, \langle X, \mathcal{O}\rangle) \leq w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$, pa je ispunjeno i $\chi(\langle X, \mathcal{O}\rangle) \leq w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$. □

Lema 2.1.7 *Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije topološkog prostora $\langle X, \mathcal{O}\rangle$. Tada postoji baza topologije $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ takva da je $|\mathcal{B}_0| = w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$.*

Dokaz. Razlikuju se dva slučaja:

(i) $|\mathcal{O}| < \aleph_0$. Za $x \in X$, neka su dati skupovi $U_x = \bigcap\{U \in \mathcal{O} \ : x \in U\}$. Tada je familija $\mathcal{B}_0 = \{U_x : x \in X\}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Zaista, svaki skup U_x je kao konačan presjek otvorenih skupova, otvoren, pa je ispunjen uslov (B1). Ako je $U \in \mathcal{O}$ tada za podfamiliju $\{U_x : x \in U\} \subset \mathcal{B}_0$ ispunjeno $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, pa važi i uslov (B2). Osim toga, iz definicije baze $\mathcal{B}_0$ slijedi da je ona sadržana u bilo kojoj drugoj bazi,te na osnovu toga vrijedi $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ i $|\mathcal{B}_0| = w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$.

(ii) $|\mathcal{O}| \geq \aleph_0$. Neka je $\mathcal{B}_1$ baza topologije $\mathcal{O}$ za koju je $|\mathcal{B}_1| = w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$ i neka je $\mathcal{S} = \{\langle U, V\rangle \in \mathcal{B}_1^2 : \ \exists T_{\langle U,V\rangle} \in \mathcal{B} \ \ (U \subset T_{\langle U,V\rangle} \subset V)\}$. Familija definisana sa $\mathcal{B}_0 = \{T_{\langle U,V\rangle} : \langle U, V\rangle \in \mathcal{S}\}$ zadovoljava uslove teoreme. Zaista, iz definicije direktno slijedi da je $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$; takođe vrijedi: $|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{S}| \leq |\mathcal{B}_1^2| \leq |\mathcal{B}_1| = w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$ (pri čemu posljednja nejednakost vrijedi zbog beskonačnosti $\mathcal{O}$ i teoreme 1.1.2). Jasno je da je familija $\mathcal{B}_0$ sastavljena od otvorenih skupova, pa ona ispunjava svojstvo (B1). Za provjeravanje svojstva (B2) dovoljno je provjeriti da se svaki skup iz familije $\mathcal{B}_1$ može napisati kao unije neke podfamilije od $\mathcal{B}_0$. Kako su familije $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}_1$ baze topologije $\mathcal{O}$ to za proizvoljan skup $V \in \mathcal{B}_1$ vrijedi:

$$V = \bigcup \Big\{ W \in \mathcal{B} : W \subset V \Big\} =$$

$$\bigcup \Big\{ \bigcup \Big\{ U_W \in \mathcal{B}_1 : U_W \subset W \Big\} : W \in \mathcal{B}, W \subset V \Big\} =$$

$$\bigcup \Big\{ T_{\langle U_W, V\rangle} : W \in \mathcal{B}, W \subset V, U_W \in \mathcal{B}_1, U_W \subset W \Big\}$$

Dakle, ispunjeno je i svojstvo (B2), pa je $\mathcal{B}_0$ baza topologije $\mathcal{O}$. □

Ukoliko to ne dovodi do zabune, u narednom će se umjesto $\langle X, \mathcal{O}\rangle$, $\chi(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$, $w(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$, $d(\langle X, \mathcal{O}\rangle)$, respektivno koristiti kraći zapisi X, $\chi(X)$, $w(X)$, $d(X)$.

Ako je $\chi(X) \leq \aleph_0$, kaže se da topološki prostor X zadovoljava **prvu aksiomu prebrojivosti**. Ako je $w(X) \leq \aleph_0$, kaže se da topološki prostor X zadovoljava **drugu aksiomu prebrojivosti**. Ako je $d(X) \leq \aleph_0$, kaže se da je topološki prostor X **separabilan**.

Neka je X topološki prostor i $A \subset X$. **Unutrašnjost skupa** A (u oznaci A^o) je najveći (u smislu inkluzije) otvoren skup na X sadržan u skupu A. **Zatvorenje skupa** A (u oznaci $\overline{A}$) je najmanji (u smislu inkluzije) zatvoren skup na X koji sadrži skup A. S obzirom da je $\emptyset$ otvoren i X zatvoren skup, unutrašnjost i zatvorenje postoje za svaki skup $A \subset X$.

Osnovna veza između prethodno uvedenih operatora unutrašnjosti i zatvorenja je data u sljedećoj lemi.

Lema 2.1.8 *Neka je X topološki prostor i $A \subset X$. Tada vrijedi*

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus A^o.$$

Lema 2.1.9 *Neka je X topološki prostor i $A \subset X$. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni :*

(i) $x \in \overline{A}$;

(ii) za svako $U \in \mathcal{N}(x)$ vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.

Lema 2.1.10 *Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $A \subset X$. Tada je familija $\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A.*

Topologija $\mathcal{O}_A$ iz prethodne leme se naziva **relativna topologija** na skupu A, dok se uređeni par $\langle A, \mathcal{O}_A \rangle$, naziva **potprostor** topološkog prostora $\langle X, \mathcal{O} \rangle$. Ako je A otvoren skup u topološkom prostoru X, tada se odgovarajući potprostor naziva **otvoren potprostor**, a ako je A zatvoren skup u topološkom prostoru X, **zatvoren potprostor**.

2.2 Preslikavanja topoloških prostora

Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostori i $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je **neprekidna u tački** x_0 ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 tako da je $f[U] \subset V$. Funkcija $f : X \to Y$ je **neprekidna** ako je neprekidna u svakoj tački $x \in X$, tj. ako vrijedi:

$$\forall x \in X \;\; \forall V \in \mathcal{N}(f(x)) \;\; \exists U \in \mathcal{N}(x) \;\; f[U] \subset V.$$

Nekoliko ekvivalenata prethodne definicije neprekidnosti je dato u sljedećoj teoremi.

Teorema 2.2.1 *Neka su* $\langle X, \mathcal{O}_X\rangle$ *i* $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$ *topološki prostori i* $f : X \to Y$ *proizvoljno preslikavanje.Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) preslikavanje f *je neprekidno;*

(ii) za svaki otvoren skup $V \subset Y$*, skup* $f^{-1}[V] \subset X$ *je otvoren;*

(iii) postoji baza $\mathcal{B}$ *topologije* $\mathcal{O}_Y$*, takva da je za svaki skup* $B \in \mathcal{B}$*, skup* $f^{-1}[B] \subset X$ *otvoren;*

(iv) za svaki zatvoren skup $F \subset Y$*, skup* $f^{-1}[F] \subset X$ *je zatvoren;*

(v) za svaki skup $A \subset X$ *vrijedi* $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$*;*

(vi) za svaki skup $B \subset Y$ *vrijedi* $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\overline{B}]$.

Lema 2.2.1 *Neka su* $\langle X, \mathcal{O}_X\rangle$, $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$ *i* $\langle Z, \mathcal{O}_Z\rangle$ *proizvoljni topološki prostori, a* $f : X \to Y$ *i* $g : Y \to Z$ *neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija* $g \circ f : X \to Z$ *neprekidno preslikavanje.*

Neprekidna bijekcija f se naziva **homeomorfizam** ako je preslikavanje f^{-1} takođe neprekidno. Dva topološka prostora X i Y su homeomorfna ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$. Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X\rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **otvoreno** ako je za svaki otvoren skup $U \subset X$, skup $f[U] \subset Y$ otvoren. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **zatvoreno** ako je za svaki zatvoren skup $F \subset X$ skup $f[F] \subset Y$ zatvoren.

Teorema 2.2.2 *Neka su* $\langle X, \mathcal{O}_X\rangle$ *i* $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna bijekcija. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) f je homeomorfizam;

(ii) f je otvoreno;

(iii) f *je zatvoreno.*

Lema 2.2.2 *Ako su topološki prostori* X *i* Y *homeomorfni, tada je* $w(X) = w(Y)$, $\chi(X) = \chi(Y)$ *i* $d(X) = d(Y)$.

Neka su X i Y neprazni skupovi, $f : X \to Y$ i $A \subset X$. Preslikavanje $g : A \to Y$ dato sa $g(x) = f(x)$, za sve $x \in A$, se naziva **restrikcija preslikavanja** f na skup A i označava se sa $f\lceil A$. Preslikavanje $h : A \to f[A]$ dato sa $h(x) = f(x)$, za sve $x \in A$, se naziva **surjektivna restrikcija preslikavanja** f na skup A i označava se sa $f|A$.

Lema 2.2.3 *Neka su* $\langle X, \mathcal{O}_X\rangle$ *i* $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$ *topološki prostori i* $A \subset X$ *neprazan skup. Tada za proizvoljno preslikavanje* $f : X \to Y$ *važi:*

(i) f je neprekidno $\Rightarrow$ $f|A$ *je neprekidno;*

(ii) f je otvoreno i $A \in \mathcal{O}_X \Rightarrow f|A$ je otvoreno;
(iii) f je zatvoreno i A je zatvoren skup $\Rightarrow f|A$ je zatvoreno.

Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **potapanje** ako je surjektivna restrikcija $f|X$ homeomorfizam.

Lema 2.2.4 *Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostori i $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Tada važi:*
(i) Ako je f neprekidna otvorena injekcija, onda je f potapanje;
(ii) Ako je f neprekidna zatvorena injekcija, onda je f potapanje.

2.3 Aksiome separacije

Topološki prostor X je:

T_0 **prostor** ako za svake dvije različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup U takav da je $x \notin U \ni y$;

T_1 **prostor** ako za svake dvije različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup U takav da je $x \notin U \ni y$ (tada postoji i otvoren skup V takav da $y \notin U \ni x$);

T_2 **prostor** ili **Hausdorffov prostor** ako za svake dvije različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni i otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$;

T_3 **prostor** ili **regularan prostor** ako je T_1 prostor i ako za svaki zatvoren skup F i svaku tačku $x \in X$ koja mu ne pripada postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $F \subset V$;

$T_{3\frac{1}{2}}$ **prostor** ako je T_1 prostor i ako za svaku tačku $x \in X$ i svaki zatvoren skup F koji je ne sadrži postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ takva da je $f(x) = 0$ i $f[F] = \{1\}$.

T_4 **prostor** ili **normalan prostor** ako je T_1 prostor i ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa $F, G \subset X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U, V \subset X$ takvi da je $F \subset U$ i $G \subset V$.

Lema 2.3.1 *Topološki prostor X je T_1 prostor ako i samo ako je za svako $x \in X$, skup $\{x\}$ zatvoren.*

Lema 2.3.2 *Svaki konačan T_1 topološki prostor je diskretan.*

Topološki prostor X je **nuladimenzionalan** ako je T_2 prostor i ima bazu topologije sastavljenu od otvoreno-zatvorenih skupova.

Lema 2.3.3 *Svaki nuladimenzionalan topološki prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.*

Dokaz. Neka je X nuladimeonzionalan prostor koji ima bazu $\mathcal{B}$ sastavljenu od otvoreno-zatvorenih skupova. Neka je $F \subset X$ zatvoren skup i $x \notin F$ proizvoljan element. Tada $x \in X \setminus F$, pa postoji otvoreno-zatvoren skup $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subset X \setminus F$. Funkcija $f : X \to [0,1]$ definisana sa

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{za } y \in B \\ 1, & \text{za } y \in X \setminus B \end{cases}$$

je neprekidna, jer za bazne otvorene skupove u potprostoru $[0,1]$ (koji su oblika $[0,b)$, (a,b) i $(a,1]$, gdje je $0 \leq a < b \leq 1$) vrijedi:

$$f^{-1}[[0,b)] = B, \quad f^{-1}[(a,b)] = \emptyset, \quad f^{-1}[(a,1]] = X \setminus B;$$

pri čemu su skupovi $\emptyset, B$ i $X \setminus B$ otvoreni u prostoru X. Kako je još $f(x) = 0$ i $f[F] \subset f[X \setminus B] = \{1\}$, to je prostor X $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor. $\square$

Odnosi između različitih aksioma separacije su dati u sljedeće dvije leme.

Lema 2.3.4 *Svaki Hausdorffov prostor je T_1 prostor, i svaki T_1 prostor je T_0 prostor.*

Lema 2.3.5 *Svaki T_4 prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor, svaki $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor je T_3 prostor i svaki T_3 prostor je Hausdorffov prostor.*

2.4 Kompaktnost

Neka je X topološki prostor. Familija $\{A_i : i \in I\}$ podskupova skupa X se naziva **pokrivačem** skupa X ako je $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Familija $\{A_i : i \in J\}$, gdje $J \subset I$, se naziva **potpokrivač** datog pokrivača, ako i sama predstavlja pokrivač skupa X. Ako su svi članovi date familije otvoreni skupovi tada je u pitanju **otvoren pokrivač** topološkog prostora X.

Topološki prostor X je **kompaktan** ako se iz svakog otvorenog pokrivača tog prostora može izdvojiti konačan potpokrivač. [1]

Jasno je da je svaki konačan prostor, kao i svaki prostor sa konačnom topologijom, kompaktan.

[1] U nekim knjigama iz topologije, npr. u [2], se u definiciji kompaktnosti dodatno pretpostavlja da je posmatrani topološki prostor Hausdorffov. U ovom radu neće se podrazumjevati ta dodatna pretpostavka.

Lema 2.4.1 *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako svaka familija zatvorenih podskupova prostora X koja ima s.k.p. ima neprazan presjek.*

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor i $A \subset X$. A je **kompaktan skup** ako je potprostor $\langle A, \mathcal{O}_A\rangle$ kompaktan.

Lema 2.4.2 *Skup A je kompaktan u topološkom prostoru $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ ako i samo svaki otvoren pokrivač skupa A ima konačan potpokrivač.*

Lema 2.4.3 *Zatvoren potprostor kompaktnog prostora je kompaktan.*

Lema 2.4.4 *Neka je X Hausdorffov prostor i $A \subset X$ kompaktan skup. Tada:*
(i) ako $x \notin A$, onda postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V, takvi da $x \in U$ i $A \subset V$;
(ii) skup A je zatvoren.

Teorema 2.4.1 *Neka je $\langle X, \mathcal{O}_X\rangle$ kompaktan, a $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$ proizvoljan topološki prostor. Ako postoji neprekidna surjekcija $f : X \to Y$, onda je topološki prostor $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$ kompaktan.*

Na osnovu prethodne teoreme direktno slijedi sljedeća lema.

Lema 2.4.5 *Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup.*

Teorema 2.4.2 *Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada:*
(i) za svako $A \subset X$, $\overline{f[A]} = f[\overline{A}]$;
(ii) f je zatvoreno preslikavanje.

Na osnovu prethodne teoreme direktno slijedi sljedeća lema.

Lema 2.4.6 *Svaka neprekidna bijekcija kompaktnog prostora na Hausdorffov prostor je homeomorfizam.*

Lema 2.4.7 *Neka su na skupu X zadate topologije $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tako da je $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, pri čemu je $\langle X, \mathcal{O}_1\rangle$ je Hausdorffov, a $\langle X, \mathcal{O}_2\rangle$ kompaktan topološki prostor. Tada je $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.*

Neka je X $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor. Uređeni par $\langle Y, c\rangle$, gdje je Y kompaktan topološki prostor i $c : X \to Y$ homeomorfno potapanje takvo da je $\overline{c[X]} = Y$, se naziva **kompaktifikacija** prostora X.

Lema 2.4.8 *Ako se topološki prostor X može homeomorfno potopiti u kompaktan prostor Y, tada X ima kompaktifikaciju.*

2.5 Konvergencija mreža

Ako je X neprazan skup i $\langle \Sigma, \leq \rangle$ usmjeren skup, onda se svako preslikavanje $x : \Sigma \to X$ naziva **mreža**[2] u X i označava se sa $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$. Ako je X topološki prostor, tačka $x_0 \in X$ se naziva **granica mreže** $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u X ako vrijedi:

$$\forall U \in \mathcal{N}(x_0) \;\; \exists \sigma_0 \in \Sigma \;\; \forall \sigma \geq \sigma_0 \;\; x_\sigma \in U.$$

Tada se kaže da mreža $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ **konvergira** ka tački x_0. Skup svih granica mreže $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ se označava sa $\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$. Ako mreža $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ ima tačno jednu granicu, x_0, onda će se to zapisivati sa $\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma = x_0$.

Lema 2.5.1 *Neka je X topološki prostor, $x \in X$ i $A \subset X$ proizvoljni. Tada $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji mreža na skupu A koja konvergira ka x.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka $x \in \overline{A}$. Tada je skup $\Sigma = \{U \subset X : U \in \mathcal{N}(x)\}$ usmjeren sa relacijom $\leq$ koja je definisana sa $U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_1 \supset U_2$. S obzirom da je za svako $U \in \Sigma$ ispunjeno $U \cap A \neq \emptyset$, koristeći aksiomu izbora može se izabrati $x_U \in U \cap A$. Na taj način je dobijena mreža $\langle x_U : U \in \Sigma \rangle$ na skupu A za koju se lako provjerava da konvergira ka tački x.

($\Leftarrow$) Ako je $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža na skupu A koja konvergira ka x, tada je za svaku okolinu U tačke x ispunjeno $A \cap U \neq \emptyset$, pa, prema lemi 2.1.9, vrijedi $x \in \overline{A}$. $\square$

Teorema 2.5.1 *Neka su X i Y topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je*

$$f[\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma] \subset \lim_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma)$$

za svaku mrežu $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ na prostoru X.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $x \in \lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$. Tada za proizvoljnu okolinu V tačke $f(x)$ postoji okolina U tačke x takva da je $f[U] \subset V$. Kako $x \in \lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$, postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da je $x_\sigma \in U$ za sve $\sigma \geq \sigma_0$. Ovo implicira da je $f(x_\sigma) \in V$, za sve $\sigma \geq \sigma_0$. Zbog toga vrijedi $f(x) \in \lim_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma)$, pa je $f[\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma] \subset \lim_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma)$.

($\Leftarrow$) Neka preslikavanje f zadovoljava uslove teoreme. Da bi se pokazalo da je f neprekidna funkcija, prema teoremi 2.2.1 (dio (v)), dovoljno je dokazati da je za

[2] Odgovarajući engleski naziv je net.

svako $A \subset X$ ispunjeno $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$. Međutim, ovo slijedi na osnovu prethodne leme. $\square$

Lema 2.5.2 *Ako u topološkom prostoru $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ mreža $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ konvergira ka $x \in X$ i ako je $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, tada ta mreža konvergira ka x i u topološkom prostoru $\langle X, \mathcal{O}_1\rangle$.*

Teorema 2.5.2 *Topološki prostor X je T_2 prostor ako i samo ako svaka mreža u X ima najviše jednu granicu.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je X T_2 topološki prostor i $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ mreža u X koja ima dvije različite granice $x_1, x_2 \in X$. Tada postoje disjunktne otvorene okoline $U_1, U_2 \subset X$ tačaka x_1 i x_2 respektivno. Za $i = 1, 2$, postoje $\sigma_i \in \Sigma$ takvi da $x_\sigma \in U_i$, za $\sigma \geq \sigma_i$. Kako je skup Σ usmjeren, to postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ takav da je $\sigma_1, \sigma_2 \leq \sigma_0$ i $x_\sigma \in U_1 \cap U_2$ za $\sigma \geq \sigma_0$, odakle je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, svaka mreža u X ima najviše jednu granicu.

($\Leftarrow$) Prepostavimo da X nije Hausdorffov prostor. Tada postoje dvije različite tačke $x_1, x_2 \in X$, takve da za proizvoljnu okolinu U_1 tačke x_1 i proizvoljnu okolinu U_2 tačke x_2 vrijedi $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Skup

$$\Sigma = \{U_1 \cap U_2 : U_1 \in \mathcal{N}(x_1), U_2 \in \mathcal{N}(x_2)\}$$

se može usmjeriti relacijom $\supset$. Ako je x_σ proizvoljan element izabran iz skupa $\sigma = U_1 \cap U_2 \in \Sigma$, tada dobijamo mrežu $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ za koju je $x_1, x_2 \in \lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$, tj. koja ima više od jedne granice. $\square$

Ako je $\langle A_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ mreža podskupova nekog skupa X, onda se definišu

$$\underline{\lim}_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{\rho\geq\sigma} A_\rho,$$
$$\overline{\lim}_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma = \bigcap_{\sigma\in\Sigma} \bigcup_{\rho\geq\sigma} A_\rho.$$

Lema 2.5.3 $\underline{\lim}_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma \subset \overline{\lim}_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma$.

Dokaz. Neka je $x_0 \in \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{\rho\geq\sigma} A_\rho$. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da vrijedi:

$$\forall \rho \geq \sigma_0 \;\; x_0 \in A_\rho \tag{2.1}$$

S obzirom da je Σ usmjeren skup, za $\sigma \in \Sigma$, postoji $\rho_0 \in \Sigma$ tako da je $\sigma, \sigma_0 \leq \rho_0$, pa prema uslovu (2.1) vrijedi $x_0 \in A_{\rho_0}$, što, zajedno sa $\sigma \leq \rho_0$ implicira $x_0 \in \bigcup_{\rho\geq\sigma} A_\rho$. Ovo vrijedi za svako $\sigma \in \Sigma$, zbog čega se dobija $x_0 \in \bigcap_{\sigma\in\Sigma} \bigcup_{\rho\geq\sigma} A_\rho$. $\square$

2.6 Konvergencija filtera

Konvergencija u topološkom prostoru može biti okarakterisana i korišćenjem filtera.

Neka je X topološki prostor i $\mathcal{F} \subset P(X)$ filter. Tačka $x \in X$ je **granica filtera** $\mathcal{F}$ ako svaka okolina tačke x pripada $\mathcal{F}$. Tada filter $\mathcal{F}$ konvergira ka x (u oznaci $x \in \lim \mathcal{F}$). Tačka $x \in X$ je **tačka nagomilavanja filtera** $\mathcal{F}$ ako x pripada zatvorenju svakog člana familije $\mathcal{F}$.

Lema 2.6.1 *U topološkom prostoru X, $x \in X$ je tačka nagomilavanja filtera $\mathcal{F} \subset P(X)$ ako i samo ako svaka okolina tačke x siječe sve članove familije $\mathcal{F}$.*

Dokaz. Slijedi iz definicije tačke nagomilavanja filtera i leme 2.1.9. $\square$

Lema 2.6.2 *Svaka granica filtera je ujedno i tačka nagomilavanja tog filtera.*

Dokaz. Neka je X topološki prostor i $\mathcal{F} \subset P(X)$ filter koji konvergira ka tački $x \in X$. Tada svaka okolina tačke x siječe sve članove filtera $\mathcal{U}$ (zbog svojstva (FI1)). Prema prethodnoj lemi x je tačka nagomilavanja filtera $\mathcal{F}$. $\square$

Obrat prethodne leme vrijedi za ultrafiltere, preciznije, vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.6.3 *Svaka tačka nagomilavanja ultrafiltera je granica ovog ultrafiltera.*

Dokaz. Neka je X topološki prostor i $x \in X$ tačka nagomilavanja ultrafiltera $\mathcal{U} \subset P(X)$. Prema lemi 2.1.7 proizvoljna okolina $U \in \mathcal{N}(x)$ siječe svakog člana ultrafiltera $\mathcal{U}$, pa je, prema lemi 1.2.3, $U \in \mathcal{U}$. Dakle, $x \in \mathcal{U}$. $\square$

Može se pokazati da su dvije uvedene karakterizacije konvergencije u topološkom prostoru (preko mreža i preko filtera) ustvari ekvivalentne. Preciznije, vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 2.6.1 *Neka je X topološki prostor. Tada vrijedi:*

(i) za mrežu $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ na X, familija $\mathcal{F}(S)$ koja se sastoji od svih skupova $A \subset X$ sa osobinom da postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da $x_\sigma \in A$, za $\sigma \geq \sigma_0$, je filter na X za kojeg vrijedi $\lim S = \lim \mathcal{F}(S)$.

(ii) za filter $\mathcal{F}$ na X, skup $\Sigma = \{\langle x, A \rangle : x \in A$ i $A \in \mathcal{F}\}$ je usmjeren u odnosu na relaciju $\leq$ definisanu sa $\langle x_1, A_1 \rangle \leq \langle x_2, A_2 \rangle \Leftrightarrow A_2 \subset A_1$ i familija $S(\mathcal{F}) = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ definisana sa $x_\sigma = x$, za $\sigma = \langle x, A \rangle \in \Sigma$, je mreža na X za koju vrijedi $\lim \mathcal{F} = \lim S(\mathcal{F})$.

Dokaz. (i) Treba najprije dokazati da je familija $\mathcal{F}(S)$ filter. Kako $\emptyset \notin \mathcal{F}(S)$, to vrijedi svojstvo (FI1). Neka $A_1, A_2 \in \mathcal{F}(S)$. Tada postoje $\sigma_i \in \Sigma$, $i = 1, 2$, tako da za $\sigma \geq \sigma_i$ vrijedi $x_\sigma \in A_i$, pa iz usmjerenja skupa Σ slijedi postojanje $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da je $\sigma_1, \sigma_2 \leq \sigma_0$ tako da za $\sigma \geq \sigma_0$ vrijedi $x_\sigma \in A_1 \cap A_2$. Dakle, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}(S)$, pa vrijedi i osobina (FI2). Neka $A \in \mathcal{F}(S)$ i $A \subset A_1$. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za $\sigma \geq \sigma_0$ vrijedi $x_\sigma \in A \subset A_1$, pa $A_1 \in \mathcal{F}(S)$, tj. vrijedi i svojstvo (FI3). Za $x \in X$, uslov $x \in \lim S$ je ekvivalentan uslovu da za svaku okolinu U tačke x postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za $\sigma \geq \sigma_0$ vrijedi $x_\sigma \in U$; s obzirom na definiciju filtera $\mathcal{F}(S)$, ovo je dalje ekvivalentno uslovu da svaka okolina tačke x pripada filteru $\mathcal{F}(S)$, tj. uslovu $x \in \lim \mathcal{F}(S)$. Dakle, $\lim S = \lim \mathcal{F}(S)$.

(ii) Iz usmjerenja relacije $\subset$ dobija se da je $\leq$ usmjerenje na skupu Σ, takođe se uočava da je $S(\mathcal{F}) = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža na skupu X. Za $y \in X$, uslov $y \in \lim \mathcal{F}$ je ekvivalentan uslovu da za svaku okolinu U tačke y vrijedi $U \in \mathcal{F}$; to je dalje, za proizvoljno $x_0 \in U$, ekvivalentno sa $\sigma_0 = \langle x_0, U \rangle \in \Sigma$, pri čemu za $\sigma = \langle x, A \rangle \in \Sigma$ za koje $\sigma \geq \sigma_0$ vrijedi $x_\sigma \in A \subset U$; što je ekvivalentno sa $y \in \lim S(\mathcal{F})$. Dakle, $\lim \mathcal{F} = \lim S(\mathcal{F})$. $\square$

Prethodna teorema omogućava da se sva tvrđenja u vezi konvergencije mreža iz prethodne glave formulišu u terminima filtera. U naredne dvije leme su navedena dva takva tvrđenja koja će se koristiti u nastavku rada.

Lema 2.6.4 *Ako u topološkom prostoru $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ filter $\mathcal{F} \subset P(X)$ konvergira ka $x \in X$ i ako je $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, tada taj filter konvergira ka x i u topološkom prostoru $\langle X, \mathcal{O}_1 \rangle$.*

Lema 2.6.5 *Topološki prostor X je Hausdorffov ako i samo ako svaki filter na X ima najviše jednu granicu.*

Teorema 2.6.2 *Topološki prostor je kompaktan ako i samo ako svaki ultrafilter na tom prostoru ima tačku nagomilavanja.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je prostor X kompaktan i neka je $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter. Ako se pretpostavi da dati ultrafilter nema tačku nagomilavanja, tada za svako $x \in X$, postoji $U_x \in \mathcal{U}$, tako da $x \notin \overline{U_x}$. Tada je $\{X \setminus \overline{U_x} : x \in X\}$ otvoren pokrivač prostora X, pa zbog kompaktnosti, postoji konačan skup $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ takav da je $X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus \overline{U_{x_i}}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n \overline{U_{x_i}}$, odakle je $\bigcap_{i=1}^n \overline{U_{x_i}} = \emptyset$. Međutim, za svako $x \in X$, vrijedi da $\overline{U_x} \in \mathcal{U}$, pa dobijamo kontradikciju, jer je ultrafilter $\mathcal{U}$ familija sa s.k.p.

($\Leftarrow$) Neka svaki ultrafilter na topološkom prostoru X ima tačku nagomilavanja i neka je $\mathcal{Z} \subset P(X)$ familija zatvorenih skupova sa s.k.p. Prema lemi 1.2.4, ova familija je sadržana u nekom ultrafilteru $\mathcal{U} \subset P(X)$. Neka je $x \in X$ tačka nagomilavanja ovog ultrafiltera i $F \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$ proizvoljno. Tada je $x \in \overline{F} = F$, pa $x \in F$, za sve $F \in \mathcal{Z}$, tj. $\bigcap_{F\in\mathcal{Z}} F \neq \emptyset$. Prema lemi 2.4.1, prostor X je kompaktan. $\square$

2.7 Tihonovski proizvod

Topologija Tihonova na direktnom proizvodu skupova uvodi se kao najgrublja topologija u odnosu na koju su sve projekcije neprekidna preslikavanja. Preciznije vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 2.7.1 *Neka je I neprazan skup i $\{\langle X_i, \mathcal{O}_i\rangle : i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada vrijedi:*

(i) Kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\prod_{i\in I} X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[U_i]$, gdje je $i \in I$ proizvoljan indeks, a $U_i \in \mathcal{O}_i$ otvoren skup u prostoru X_i, je podbaza neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu $\prod_{i\in I} X_i$;

(ii) Familija svih konačnih presjeka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[U_i] : K \in [I]^{<\aleph_0} \wedge \forall i \in K \ (U_i \in \mathcal{O}_i)\}$$

je baza topologije $\mathcal{O}$.

Topologija na skupu $\prod_{i\in I} X_i$ uvedena u prethodnoj teoremi naziva se **topologija Tihonova**, dok se prostor $\langle \prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O}\rangle$ naziva **topološki proizvod** familije topoloških prostora $\{\langle X_i, \mathcal{O}_i\rangle : i \in I\}$.
S obzirom na definiciju baze topologije Tihonova, direktno se dobija sljedeća lema.

Lema 2.7.1 *Uz pretpostavke i oznake uvedene u prethodnoj teoremi važi*

$$\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[U_i] = \prod_{i\in I} V_i$$

gdje je

$$V_i = \begin{cases} X_i, & \text{za } i \in I \setminus K \\ U_i, & \text{za } i \in K. \end{cases}$$

Lema 2.7.2 *Uz pretpostavke i oznake uvedene u prethodnoj teoremi vrijedi da su projekcije* $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ *neprekidna i otvorena preslikavanja.*

Teorema 2.7.2 (Tihonov) *Proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih prostora je kompaktan prostor.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.6.2, dovoljno je dokazati da svaki ultrafilter na proizvodu datih prostora ima tačku nagomilavanja tj. granicu.

Neka su $\langle X_i, \mathcal{O}_i\rangle$, $i \in I$, kompaktni prostori, $X = \prod_{i\in I} X_i$ i $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter. Za proizvoljno $i \in I$, projekcija π_i je surjekcija, pa je, prema lemi 1.2.6, kolekcija $\mathcal{U}_i = \{\pi_i[U] : U \in \mathcal{U}\}$ ultrafilter na skupu X_i. Zbog kompaktnosti prostora X_i, prema teoremi 2.6.2, postoji tačka $x_i \in X_i$ čija je svaka okolina element ultrafiltera $\mathcal{U}_i$, tj. vrijedi:

$$\forall V \in \mathcal{N}(x_i)\ \exists U \in \mathcal{U}\ \ V = \pi_i[U]. \tag{2.2}$$

Koristeći aksiomu izbora izaberu se takve tačke $x_i \in X_i$, $i \in I$ i na taj način se dobije tačka $x = \langle x_i : i \in I\rangle$ prostora $\prod_{i\in I} X_i$. Potrebno je još provjeriti da svaka okolina W tačke x pripada ultrafilteru $\mathcal{U}$.

Neka je $W \in \mathcal{N}(x)$. Tada postoji element baze topologije $B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[V_i]$ gdje je $K \subset I$ konačan skup, a $V_i \in \mathcal{O}_i$, takav da $x \in B \subset W$. No, tada je $x_i \in V_i$, za sve $i \in K$, pa prema uslovu (2.2), postoje $U_i \in \mathcal{U}$, $i \in K$, tako da je $V_i = \pi_i[U_i]$. Dalje vrijedi

$$W \supset B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[V_i] = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[\pi_i[U_i]] \supset \bigcap_{i\in K} U_i \in \mathcal{U},$$

pa $W \in \mathcal{U}$. Dakle, ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergira ka tački x, pa je prostor $\prod_{i\in I} X_i$ kompaktan. $\Box$

Neka je na skupu $2 = \{0, 1\}$ zadana diskretna topologija i neka je I neprazan skup. Topološki proizvod 2^I naziva se **kub Cantora**.

Teorema 2.7.3 *Neka je* I *beskonačan skup. Tada za kub Cantora važi* $w(2^I) = |I|$.

Dokaz. Standardna baza topologije Tihonova na 2^I, na osnovu leme 1.1.5, ima kardinalnost $|[I]^{<\omega}| = |I|$, pa je $w(2^I) \leq |I|$. Za suprotnu nejednakost dovoljno je, prema lemi 2.1.6 dio (ii), pokazati da je $\chi(2^I) = |I|$. Kako prema istoj toj lemi vrijedi $\chi(2^I) \leq w(2^I) \leq |I|$, dovoljno je dokazati da ne može vrijediti $\chi(2^I) < |I|$.

Neka je $x = \langle x_i : i \in I\rangle \in 2^I$ proizvoljno i $\mathcal{B}(x)$ baza okolina u tački x. Tada je $\mathcal{B}(x)$ beskonačan skup i za svaku okolinu $W \in \mathcal{B}(x)$ postoji bazni otvoren skup $B_W = \prod_{i\in I} U_i$, gdje je

$$U_i = \begin{cases} 2, & \text{za } i \in I \setminus K_W \\ \{x(i)\}, & \text{za } i \in K_W \end{cases}$$

za neki konačan skup $K_W \subset I$, tako da je $x \in B_W \subset W$.

Neka je $|\mathcal{B}(x)| < |I|$ i $J = \bigcup_{W\in\mathcal{B}(x)} K_W$. Tada je $|J| = |[\mathcal{B}(x)]^{<\omega}| = |\mathcal{B}(x)| < |I|$, pa postoji $k \in I \setminus J$ i za svako W, vrijedi $k \notin K_W$. Neka je $V = \prod_{i\in I} V_i$, gdje je

$$V_i = \begin{cases} 2, & \text{za } i \neq k \\ \{x(i)\}, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Tada je skup V otvoren skup Cantorovog kuba koji sadrži tačku x, pa je $V \in \mathcal{N}(x)$. Neka je $W \in \mathcal{B}(x)$ proizvoljno. Tada tačka $x' \in 2^I$ koja je jednaka x izuzev za koordinatu k, gdje je jednaka tački u 2 koja nije jednaka $x(k)$, pripada skupu B_W (pa i skupu W), ali ne pripada skupu V, što je kontradikcija, jer je $\mathcal{B}(x)$ baza okolina. Dakle, vrijedi $\chi(2^I) = |I|$. $\square$

Na osnovu teoreme Tihonova direktno slijedi sljedeća lema.

Lema 2.7.3 *Kub Cantora 2^I je kompaktan prostor.*

Dio II

Topologije na mrežama

Glava 3

Osnovni pojmovi teorije mreža

U ovoj glavi biće izloženi pojmovi i tvrđenja teorije mreža koji će se koristiti u nastavku rada. Svi navedeni rezultati se mogu se naći npr. u [1], [5] i [12].

3.1 Mreža kao algebra i kao uređenje. Dualnost

Neka je n prirodan broj. **n-arna operacija** skupa A jeste proizvoljno preslikavanje $f : A^n \to A$. Operacije arnosti 2 nazivaju se **binarne operacije**.

Neka je A neprazan skup, a $\mathcal{F}$ neki skup operacija na A. Tada se uređen par $\langle A, \mathcal{F} \rangle$ naziva **algebra(sa nosačem A)**.

Neka je L neprazan skup, a $\wedge$ i $\vee$ dvije binarne operacije skupa L. Algebra $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ je **mreža**[1] ako za sve $x, y, z \in L$ vrijedi:

$x \wedge x = x \quad , \quad x \vee x = x$ (idempotentnost);

$x \wedge y = y \wedge x \quad , \quad x \vee y = y \vee x$ (komutativnost);

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad , \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (asocijativnost);

$x \wedge (y \vee x) = x \quad , \quad x \vee (y \wedge x) = x$ (apsorptivnost).

Parcijalno uređen skup $\langle L, \leq \rangle$ je **mrežno uređen skup** ako za svaka dva elementa $x, y \in L$ postoje $\inf\{x, y\}$ i $\sup\{x, y\}$.

Primjer 3.1.1. Svaki linearno uređen skup $\langle X, \leq \rangle$ je ujedno i mrežno uređen, jer za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi $\inf\{x, y\} = x$ i $\sup\{x, y\} = y$ u slučaju kada je $x \leq y$, odnosno $\inf\{x, y\} = y$ i $\sup\{x, y\} = x$ u slučaju kada je $y \leq x$.

[1]Odgovarajući engleski naziv je lattice. U ovom radu će se naziv mreža podjednako koristiti za engleske termine net i lattice, pri čemu će iz konteksta biti jasno o kom objektu se govori.

Primjer 3.1.2. Neka je $Eq(S)$ skup svih relacija ekvivalencije na skupu S. Za sve $\rho, \sigma \in Eq(S)$ neka je

$$\rho \wedge \sigma = \rho \cap \sigma;$$

$$\rho \vee \sigma = \bigcap \{\delta \in Eq(S) : \rho \cup \sigma \subset \delta\}.$$

Algebra $\langle Eq(S), \wedge, \vee \rangle$ ispunjava sve aksiome iz definicije mreže, i ta mreža se naziva **mreža ekvivalencija** ili **particija** skupa S.

Teorema 3.1.1 *[12] (i) Neka je $\mathcal{L} = \langle L, \leq \rangle$ mrežno uređen skup i neka su na skupu L operacije $\wedge$ i $\vee$ definisane sa:*

$$x \wedge y = \inf\{x, y\};$$

$$x \vee y = \sup\{x, y\}.$$

Tada je algebra $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ mreža.

(ii) Neka je $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ mreža i neka je na skupu L definisana binarna relacija $\leq$ sa:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Tada je $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \langle L, \leq \rangle$ mrežno uređen skup.

(iii) Preslikavanja $\mathcal{A}$ i $\mathcal{R}$ definisana pod (i) odnosno (ii) uzajamno su inverzna, tj. za sve mreže $\mathcal{L}$ vrijedi $\mathcal{A}(\mathcal{R}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ i za sve mrežno uređene skupove važi $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

Dokaz. (i) Iz odgovarajućih osobina infimuma i supremuma direktno se provjeravaju aksiome mreže.

(ii) Iz idempotentnosti operacije $\wedge$ slijedi refleksivnost, iz komutativnosti antisimetričnost, a iz asocijativnosti slijedi tranzitivnost relacije $\leq$. Treba još dokazati da za svaka dva elementa $x, y \in L$ postoje $\inf\{x, y\}$ i $\sup\{x, y\}$. U tom cilju dovoljno je dokazati da je $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, odnosno da je $\sup\{x, y\} = x \vee y$. Neka su $x, y \in L$ proizvoljni. Koristeći aksiome mreže dobija se

$$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (y \wedge x) = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y,$$

što znači da je $x \wedge y \leq x$. Slično se dobija da je $x \wedge y \leq y$, pa je $x \wedge y$ donje ograničenje za x i y. Ako je $z \in L$ takvo da je $z \leq x$ i $z \leq y$, onda je

$$z \wedge x = z = z \wedge y,$$

odakle je

$$z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z,$$

pa je $z \leq x \wedge y$. Dakle, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$. Analogno se, uz korišćenje apsorptivnosti, pokazuje da je $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

(iii) Neka je $\mathcal{L} = \langle L, \leq \rangle$ mrežno uređen skup. Treba dokazati da je $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$. Kako je $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \langle L, \wedge, \vee \rangle$, gdje je $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ i $x \vee y = \sup\{x, y\}$ onda u $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\mathcal{L})) = \langle L, \leq^* \rangle$ za proizvoljne $x, y \in L$ vrijedi:

$$x \leq^* y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow \inf\{x, y\} = x \Leftrightarrow x \leq y,$$

pa je $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$. Obratno, ako je $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ mreža, treba dokazati da je $\mathcal{A}(\mathcal{R}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$. Ako je $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \langle L, \leq \rangle$, tada iz (ii) slijedi da je

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y;$$

$$\sup\{x, y\} = x \vee y,$$

pa je $\mathcal{A}(\mathcal{R}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$. $\square$

Imajući u vidu posljednju teoremu u narednom će se podjednako koristiti mrežno uređenje $\leq$ i operacije $\wedge$, $\vee$ podrazumjevajući da su oni povezani relacijom koja je data u prethodnoj teoremi.

Mreža $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ (kojoj odgovara mrežno uređeni skup $\langle L, \geq \rangle$) naziva se **dual mreže** $\langle L, \wedge, \vee \rangle$. Kako su aksiome koje definišu mrežu simetrične u odnosu na operacije $\wedge$ i $\vee$, to za mreže važi **princip dualnosti**: Ako je $\phi(\leq, \wedge, \vee)$ neko tvrđenje koje je tačno za sve mreže i $\phi(\geq, \vee, \wedge)$ tvrđenje koje se dobija iz $\phi(\leq, \wedge, \vee)$ tako što se u njemu svuda $\leq$ zamijeni sa $\geq$, $\wedge$ sa $\vee$ i obratno, onda je i tvrđenje $\phi(\geq, \vee, \wedge)$ tačno za sve mreže.

Neka su L_1 i L_2 dvije mreže. Preslikavanje $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ je **(mrežni) homomorfizam** iz L_1 u L_2 ako za sve $x, y \in L_1$ važi:

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),$$

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

Ako je, pored toga φ injekcija, onda se φ naziva **(mrežno) potapanje** mreže L_1 u mrežu L_2. U slučaju da je φ bijekcija tada se φ naziva **(mrežni) izomorfizam** iz L_1 u L_2. Mrežni izomorfizam mreže na samu sebe naziva se **mrežni automorfizam**.

Neka je $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ mreža i $\emptyset \neq L_1 \subset L$. Tada je L_1 **podmreža** od L ako za sve $x, y \in L_1$ važi da $x \wedge y \in L_1$ i $x \vee y \in L_1$.

Primjer 3.1.3. Može da se desi da je neki podskup mreže L sam za sebe mreža, a da nije podmreža od L. Tako mreža ekvivalencija $\langle Eq(S), \subset\rangle$ nije podmreža mreže $\langle P(S^2), \subset\rangle$, jer za $\rho, \sigma \in Eq(S)$ u opštem slučaju ne mora vrijediti $\rho \vee \sigma = \rho \cup \sigma$.

3.2 Gornji i donji skupovi. Ideali

Neka je $\langle L, \leq\rangle$ mreža i $S \subset L$. Neka su dati skupovi

$$\downarrow S = \{y \in L : \exists x \in S \ \ y \leq x\} \quad \uparrow S = \{y \in L : \exists x \in S \ \ x \leq y\}.$$

Skup S je **donji skup** ako je $S = \downarrow S$, dok je **gornji skup** u slučaju da je $S = \uparrow S$. U slučaju da je $S = \{x\}$ koristiće se kraće oznake $\downarrow\{x\} = \downarrow x$ i $\uparrow\{x\} = \uparrow x$.

Lema 3.2.1 *Komplement donjeg skupa je gornji skup i komplement gornjeg skupa je donji skup.*

Dokaz. Neka je L mreža i neka je $S \subset L$ donji skup, tj. neka je $S = \downarrow S$. Jasno je da $L \setminus S \subset \uparrow(L \setminus S)$ trivijalno vrijedi. Potrebno je dokazati suprotnu inkluziju. Neka $x \in \uparrow(L \setminus S)$, to implicira postojanje elementa $y \in L \setminus S$ takvog da je $y \leq x$. Kako $y \notin S = \downarrow S$, to za svako $z \in S$ vrijedi $z \nleq y$. Ako bi vrijedilo da $x \notin L \setminus S$, tada $x \in S$, pa iz $y \leq x$ slijedi $y \in \downarrow S = S$, što je kontradikcija sa $y \in L \setminus S$. Znači, $x \in L \setminus S$, tj. $\uparrow(L \setminus S) \subset L \setminus S$. Dakle, $L \setminus S$ je gornji skup. Drugi dio leme se slično dokazuje. $\square$

Neka je L mreža. Neprazan podskup $I \subset L$ se naziva **ideal** mreže L ako ima sljedeće osobine:

(I1) $y \in I, x \in L$ i $x \leq y \Rightarrow x \in I$;

(I2) $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.

Iz definicije ideala direktno slijedi sljedeća lema.

Lema 3.2.2 *Neka je L mreža. Za dati element $x \in L$, podskup $L(x) \subset L$ dat sa $L(x) = \downarrow x = \{y \in L : y \leq x\}$ je ideal mreže L.*

Ideal iz prethodne leme naziva se **glavni ideal** mreže L. **Dual glavnog ideala** $\downarrow x$ je skup oblika $\uparrow x = \{y \in L : x \leq y\}$

Primjer 3.2.1. U konačnoj mreži svi ideali su glavni. Zaista, ako je I ideal, tada postoji $x = \sup I$, pa je $I = \downarrow x$. S druge strane, ako je S beskonačan skup, tada je skup $P_{fin}(S)$ svih konačnih podskupova od S ideal mreže $\langle P(S), \cap, \cup\rangle$ i ovaj ideal nije glavni.

Lema 3.2.3 *[12] Za proizvoljnu mrežu L, skup $\mathcal{I}(L)$ svih ideala mreže L jeste mreža u odnosu na $\subset$.*

Dokaz. Jasno je da je presjek dva ideala mreže L uvijek neprazan i da je to opet ideal od L. Prema tome, u uređenom skupu $(\mathcal{I}(L), \subset)$ za infimum dva ideala $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(L)$ vrijedi $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$. Dalje, presjek neprazne familije ideala je uvijek ideal ili je $\emptyset$. Kako je $\bigcap\{I \in \mathcal{I}(L) : I_1 \cup I_2 \subset I\} \neq \emptyset$ slijedi da za supremum ideala I_1 i I_2 vrijedi $I_1 \vee I_2 = \bigcap\{I \in \mathcal{I}(L) : I_1 \cup I_2 \subset I\}$. □

Lema 3.2.4 *[12] Neka je L proizvoljna mreža i $\mathcal{GI}(L)$ skup svih glavnih ideala mreže L. Tada:*

(i) Skup glavnih ideala $\mathcal{GI}(L)$ jeste podmreža mreže ideala $\mathcal{I}(L)$;

(ii) Mreža glavnih ideala (u odnosu na $\subset$) je izomorfna mreži L;

(iii) Svaka konačna mreža je izomorfna mreži svojih ideala.

Dokaz. (i) Za $L(x), L(y) \in \mathcal{GI}(L)$ vrijedi $L(x) \wedge L(x) = L(x) \cap L(y) = L(x \wedge y)$ i $L(x) \vee L(y) = L(x \vee y)$, pa je $\mathcal{GI}(L)$ podmreža od $\mathcal{I}(L)$.

(ii) Uzimajući u obzir (i), dobija se da je preslikavanje $\varphi : L \to \mathcal{GI}(L)$ definisano sa $\varphi(a) = L(a)$ traženi izomorfizam.

(iii) Slijedi iz (ii) i činjenice da su u konačnoj mreži svi ideali glavni. □

3.3 Specijalne klase mreža

Mreža $\langle L, \leq \rangle$ je **samodualna** ako postoji mrežni izomorfizam te mreže na dualnu mrežu $\langle L, \geq \rangle$ tj. bijekcija $\varphi : L \to L$ takva da je za sve $x, y \in L$ ispunjeno

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y), \qquad \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

Lema 3.3.1 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ samodualna mreža i φ odgovarajući mrežni izomorfizam. Tada za sve $x, y \in L$ vrijedi:*

$$x \leq y \Rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(x).$$

Dokaz. Neka $x, y \in L$ i $x \leq y$. Tada je

$$\varphi(x) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

Odavde se dobija $\varphi(y) \leq \varphi(x)$. $\square$

Neka je $\langle L, \leq\rangle$ mreža i $x, y, z \in L$. Tada element y **pokriva** x ako $x \leq y$ i $x \leq z \leq y$ povlači $z = x$ ili $z = y$.

Najmanji element mreže (ako postoji) biće označavan sa 0, dok će najveći element mreže (ako postoji) biti označavan sa 1. **Atom** je element mreže koji pokriva najmanji element mreže. Mreža je **atomarna** ako se svaki element mreže različit od 0 može prikazati kako supremum nekog skupa atoma. **Koatom** je element mreže koji je pokriven najvećim elementom. Mreža je koatomarna ako se svaki element različit od 1 može prikazati kao infimum nekog skupa koatoma.

Lema 3.3.2 *Ako je L samodualna mreža tada je skup atoma iste kardinalnosti kao skup koatoma.*

Dokaz. Neka je φ mrežni izomorfizam mreže L na njenu dualnu mrežu. Na osnovu leme 3.3.1, skup atoma mreže L se ovim izomorfizmom preslikava na skup koatoma mreže L. Kako je φ bijekcija, ova dva skupa su iste kardinalnosti. $\square$

Za mrežu $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ se kaže da je **modularna** ako za sve $x, y, z \in L$ vrijedi:

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

Za mrežu $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ se kaže da je **distributivna** ako za sve $x, y, z \in L$ vrijedi:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Važna osobina klase distributivnih mreža jeste da je samodualna, tj. mreža L je distributivna ako i samo ako je dualna mreža L^d distributivna. Preciznije, važi sljedeća lema.

Lema 3.3.3 *[12] Neka je $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ mreža. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, *za sve* $x, y, z \in L$;
(ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, *za sve* $x, y, z \in L$.

Lema 3.3.4 *Svaka distributivna mreža je modularna.*

Dokaz. Neka je $\langle L, \leq\rangle$ distributivna mreža. Tada za $x, y, z \in L$ gdje je $x \leq y$ vrijedi:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = y \wedge (x \vee z),$$

pa je L modularna mreža. $\square$

U ograničenoj mreži $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1, **komplement** elementa $x \in L$ jeste $y \in L$ takav da važi:

$$x \wedge y = 0 \text{ i } x \vee y = 1.$$

Ograničena mreža u kojoj svaki element ima najmanje jedan komplement naziva se **mreža sa komplementiranjem**. Ograničena mreža u kojoj svaki element ima jedinstven komplement naziva se **mreža sa jedinstvenim komplementiranjem** .

Lema 3.3.5 *[12] Svaka distributivna mreža sa komplementiranjem jeste mreža sa jedinstvenim komplementiranjem.*

Dokaz. Neka u distributivnoj mreži sa 0 i 1 element x ima komplemente y_1 i y_2. Tada vrijedi

$$y_1 = y_1 \wedge 1 = y_1 \wedge (x \vee y_2) = (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge y_2) =$$

$$= 0 \vee (y_1 \wedge y_2) = (x \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_2) = (x \vee y_1) \wedge y_2 = 1 \wedge y_2 = y_2.$$

□

Distributivna mreža sa komplementiranjem naziva se **Booleova mreža**.

3.4 Kompletnost i varijacije

Mreža $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ je **kompletna**, ako za svaki podskup $S \subset L$ postoje $\inf S$ i $\sup S$. Jasno je da je svaka konačna mreža kompletna.

Mreža $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ je **dcpo** (directed complete poset), ako za svaki usmjeren podskup $S \subset L$ postoji sup S.
Kako u kompletnoj mreži svaki podskup ima supremum, to vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.4.1 *Svaka kompletna mreža je dcpo.*

Neka je mreža $\langle L, \leq \rangle$ dcpo. Skup $U \subset L$ ima **svojstvo (S)** ako za svaki usmjeren skup $S \subset L$, takav da $\sup S \in U$, postoji $y \in S$ takav da za svako $x \in S$ za koje je $y \leq x$ vrijedi $x \in U$.

Neka je $\langle L, \leq \rangle$ mreža i $x, y \in L$. Kaže se da je element x **dosta-ispod** elementa y, u oznaci $x << y$, ako za svaki usmjeren skup $S \subset L$ za koji postoji $\sup S$, relacija $y \leq \sup S$ implicira postojanje elementa $s \in S$ takvog da je $x \leq s$.
Osnovne osobine relacije dosta-ispod date su u sljedećoj lemi.

Lema 3.4.2 *[5] Neka je $\langle L, \leq \rangle$ mreža i $x, y, z, u \in L$. Tada vrijedi:*
(i) $x << y \Rightarrow x \leq y$;
(ii) $u \leq x << y \leq z \Rightarrow u << z$;
(iii) $x << z$ i $y << z \Rightarrow x \vee y << z$;
(iv) Ako mreža L ima najmanji element 0, tada za svako $x \in L$ vrijedi $0 << x$.

Dokaz. (i) Neka je $x << y$. Tada je $S = \{y\}$ usmjeren skup takav da je $\sup S \leq y$, pa je $x \leq y$.

(ii) Neka je $u \leq x << y \leq z$ i $S \subset L$ usmjeren skup takav da $\sup S$ postoji i $z \leq \sup S$. Tada je $y \leq \sup S$, pa zbog $x << y$ postoji $s \in S$ takav da je $x \leq s$. S obzirom da je $u \leq x \leq s$, to vrijedi $u << z$.

(iii) Neka je $x << z$ i $y << z$ i $S \subset L$ usmjeren skup takav da $\sup S$ postoji i $z \leq \sup S$. Tada postoje $s_x, s_y \in S$ takvi da je $x \leq s_x$ i $y \leq s_y$. Kako je S usmjeren skup postoji $s \in S$ tako da je $s_x, s_y \leq s$, pa je $x, y \leq s$, što povlači $x \vee y \leq s$, tj. $x \vee y << z$.

(iv) Vrijedi jer je za svako $x \in L$ ispunjeno $0 \leq x$. □

Koristeći relaciju dosta-ispod, za $x \in L$ mogu se uvesti skupovi

$$\downdownarrows x = \{y \in L : y << x\} \ \ , \ \upuparrows x = \{y \in L : x << y\}.$$

Lema 3.4.3 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža. Tada je za svako $x \in L$, skup $\downdownarrows x \subset \downarrow x$, ideal na mreži L.*

Dokaz. Tvrđenje vrijedi jer su svojstva (I1) i (I2) iz definicije ideala ispunjena na osnovu prethodne leme (dijelovi (ii) i (iii)). □

Lema 3.4.4 *[5] Za dcpo mrežu $\langle L, \leq \rangle$ i $x, y \in L$ sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) $x << y$;
(ii) $x \in I$, za svaki ideal $I \subset L$ za koji je $y \leq \sup I$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka je $x << y$ i $I \subset L$ ideal za kojeg je $y \leq \sup I$ (svaki ideal je usmjeren skup, pa $\sup I$ postoji). Tada postoji $s \in I$ tako da je $x \leq s$, kako je I ideal, to se dobija da je $x \in I$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Neka je $S \subset L$ usmjeren skup i $y \leq \sup S$. Tada je $I = \downarrow S$ ideal i $y \leq \sup S = \sup I$, pa prema pretpostavci $x \in I = \downarrow S$, što implicira postojanje $s \in S$ takvog da je $x \leq s$. Dakle, $x << y$. □

Lema 3.4.5 *Neka je L kompletna mreža i $x, y \in L$. Ako je $x = \sup \Downarrow x$ tada vrijedi*

$$x \not\leq y \quad \Rightarrow \quad \exists s \in L\ (s << x\ \wedge s \not\leq y) \qquad (A)$$

Kompletna mreža $\langle L, \leq \rangle$ je **neprekidna** ako je za svako $x \in L$ skup $\Downarrow x$ usmjeren i $x = \sup \Downarrow x$. Za element $x \in L$ koji zadovoljava $x << x$ se kaže da je **izolovan odozdo**. Jasno je da u svakoj kompletnoj mreži L, za element $x \in L$ koji je izolovan odozdo, vrijedi $x = \sup \Downarrow x$. Na osnovu toga slijedi da je kompletna mreža u kojoj su svi elementi izolovani odozdo ujedno i neprekidna.

Primjer 3.4.1. Svaka konačna mreža je neprekidna. Zaista, neka je L konačna mreža; tada je L kompletna mreža, pa je dovoljno pokazati da je svaki element izolovan odozdo. Neka je $x \in L$ i $I \subset L$ ideal takav da $x \leq \sup I$. Svaki ideal na konačnoj mreži je glavni, pa postoji $y \in L$ tako da je $I = \downarrow y$, pa $x \leq \sup I = y$ implicira $x \in \downarrow y = I$. Prema prethodnoj lemi vrijedi $x << x$, pa je x izolovan odozdo. Dakle, mreža L je neprekidna.

Lema 3.4.6 *[5] Neka je $\langle L, \leq \rangle$ neprekidna mreža i $x, z \in L$. Ako je $x << z$ i $z \leq \sup S$ za neki usmjeren skup $S \subset L$, tada je $x << s$ za neki element $s \in S$.*

Dokaz. Neka je $S \subset L$ usmjeren skup takav da $z \leq \sup S$ i neka je $I = \bigcup\{\Downarrow s : s \in S\}$. Zbog neprekidnosti mreže L je $\sup I = \sup S$ i skup I je ideal kao unija usmjerene familije ideala. Zbog toga iz $x << z$, na osnovu prethodne teoreme, vrijedi $x \in I$, što implicira $x << s$ za neko $s \in S$. $\square$

Mreža $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ je **kompletno distributivna** ako je kompletna i ako za svaku familiju $\{x_{j,k} : j \in J, k \in K_j\}$ u L vrijedi

$$\bigwedge_{j \in J} \bigvee_{k \in K_j} x_{j,k} = \bigvee_{f \in \prod_{j \in J} K_j} \bigwedge_{j \in J} x_{j,f(j)}.$$

Teorema 3.4.1 *[5] Svaka kompletno distributivna mreža je neprekidna.*

U [5] je takođe dokazano da obrat prethodne teoreme vrijedi pod dodatnim uslovima distributivnosti i neprekidnosti duala posmatrane mreže.

Primjer 3.4.2. Neka je $S = (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ i neka je $\leq$ uobičajni poredak na $\mathbb{R}$. Kako svaki podskup (samim tim i svaki usmjereni podskup) od S ima supremum, mreža $\langle S, \leq \rangle$ je dcpo, ali kako npr. skup $(-\infty, 0) \subset S$ nema infimum, ova mreža nije kompletna. Primjer mreže koja je kompletna ali nije neprekidna dat je u primjeru 5.1.1, dok je primjer mreže koja je neprekidna ali nije kompletno distributivna dat u primjeru 5.2.1. Dakle, odnos između prethodno uvedenih varijacija kompletnosti mreža je:

dcpo $\supsetneq$ kompletne mreže $\supsetneq$ neprekidne mreže $\supsetneq$ kompletno distributivne mreže.

Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža i $\mathcal{U} \subset P(L)$ ultrafilter na toj mreži. Tada, zbog kompletnosti, postoje $\liminf \mathcal{U} = \bigvee\{\bigwedge S : S \in \mathcal{U}\}$ i $\limsup \mathcal{U} = \bigwedge\{\bigvee S : S \in \mathcal{U}\}$.

Lema 3.4.7 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža i $\mathcal{U}$ ultrafilter na toj mreži. Tada je $\liminf \mathcal{U} \leq \limsup \mathcal{U}$.*

Dokaz. Neka je $x = \bigvee\{\bigwedge S : S \in \mathcal{U}\}$ i $y = \bigwedge\{\bigvee S : S \in \mathcal{U}\}$ (takvi elementi x i y postoje i pripadaju mreži L zbog njene kompletnosti). Ako se pretpostavi suprotno, tj. da $x \nleq y$, tada postoji $T_1 \in \mathcal{U}$ tako da $x \nleq \bigvee T_1$ (u suprotnom, ako je za svako $T \in \mathcal{U}$ ispunjeno $x \leq \bigvee T$ dobija se $x \leq \bigwedge\{\bigvee T : T \in \mathcal{U}\} = y$); za ovako izabran skup T_1 postoji skup $T_2 \in \mathcal{U}$ za koji je $\bigwedge T_2 \nleq \bigvee T_1$ (u suprotnom, ako je za svako $T \in \mathcal{U}$ ispunjeno $\bigwedge T \leq \bigvee T_1$ dobija se $x = \bigvee\{\bigwedge T : T \in \mathcal{U}\} \leq \bigvee T_1$). Ukoliko bi postojala tačka $t \in T_1 \cap T_2$, tada bi vrijedilo $\bigwedge T_2 \leq t \leq \bigvee T_1$, što prema prethodnom nije moguće. Dakle, $\emptyset = T_1 \cap T_2 \in \mathcal{U}$, što je kontradikcija sa činjenicom da je $\mathcal{U}$ filter.

Dakle, vrijedi $x \leq y$, tj. $\liminf \mathcal{U} \leq \limsup \mathcal{U}$. $\square$

Glava 4

Topologije na mrežama

U ovoj glavi će se na datoj mreži $\langle L, \leq \rangle$ posmatrati neke prirodne topologije, kao i međuodnos tih topologija. Navedeni rezultati mogu se naći npr. u [1], [3], [5], [6], [10] i [19].

4.1 Gornja i donja topologija

Gornja i **donja topologija** ($\mathcal{O}_u$ i $\mathcal{O}_l$ redom) su topologije generisane komplementima glavnih ideala, odnosno komplementima duala glavnih ideala respektivno, kao podbazama topologije. Dakle, $\mathcal{O}_u = \mathcal{O}[\{L \setminus \downarrow x : x \in L\}]$ i $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}[\{L \setminus \uparrow x : x \in L\}]$. Na osnovu definicije ovih topologija primjećuje se da se familije glavnih ideala odnosno duala glavnih ideala mogu uzeti kao podbaze za familiju zatvorenih skupova.

Lema 4.1.1 *Topološki prostori $\langle L, \mathcal{O}_u \rangle$ i $\langle L, \mathcal{O}_l \rangle$ su T_0 prostori.*

Dokaz. Tvrđenje će biti pokazano za gornju topologiju, dok je za donju topologiju dokaz sličan. Neka su $x, y \in L$ dva različita elementa. Ako je $x < y$ ili ta dva elementa nisu uporediva tada otvoren skup $L \setminus \downarrow x$ sadrži y a ne sadrži x, a ako je $y < x$, otvoren skup koji ih razdvaja je $L \setminus \downarrow y$. Dakle, topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_u \rangle$ je T_0 prostor. $\square$

Kako svaki zatvoren skup koji sadrži $x \in L$ sadrži i zatvoren skup $\downarrow x$, to vrijedi $\overline{\{x\}} = \downarrow x$. Dakle, za proizvoljnu mrežu L jednočlani skupovi nisu obavezno zatvoreni, pa topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_u \rangle$ ne mora biti T_1 prostor. Slično, topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_l \rangle$ ne mora biti T_1 prostor.

4.2 Intervalna topologija

Intervalna topologija ($\mathcal{O}_{interv}$) je najgrublja topologija koja sadrži gornju i donju topologiju, tj. $\mathcal{O}_{interv} = \mathcal{O}[\mathcal{O}_u \cup \mathcal{O}_l]$. Jednostavno se pokazuje da familija zatvorenih intervala u L (skupova oblika $[x, y] = \{z \in L : x \leq z \leq y\}$) čini podbazu za familiju zatvorenih skupova u ovoj topologiji.

Konvergencija ultrafiltera u intervalnoj topologiji na kompletnoj mreži okarakterisana je sljedećom teoremom.

Teorema 4.2.1 *[10] Neka je L kompletna mreža i $\mathcal{U} \subset P(L)$ ultrafilter. Tada $\mathcal{U}$ konvergira ka $x \in L$ u intervalnoj topologiji ako i samo ako je* $\liminf \mathcal{U} \leq x \leq \limsup \mathcal{U}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergira ka $x \in L$ u intervalnoj topologiji i neka je $S \in \mathcal{U}$. Ako $\bigwedge S \not\leq x$, tada je skup $T = \{y \in L : y \not\geq \bigwedge S\}$ otvorena okolina (u intervalnoj topologiji) tačke x, pa kako ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergira ka x, vrijedi $T \in \mathcal{U}$, što je kontradikcija, jer su S i T disjunktni. Dakle, mora vrijediti $\bigwedge S \leq x$ i slično $\bigvee S \geq x$. S obzirom da je ovo tačno za sve $S \in \mathcal{U}$, to vrijedi

$$\liminf \mathcal{U} = \bigvee\{\bigwedge S : S \in \mathcal{U}\} \leq x \leq \bigwedge\{\bigvee S : S \in \mathcal{U}\} = \limsup \mathcal{U}.$$

($\Leftarrow$) Neka za $x \in L$ i ultrafilter $\mathcal{U}$ vrijedi $\liminf \mathcal{U} \leq x \leq \limsup \mathcal{U}$ i neka je $F \in \mathcal{U}$ proizvoljan bazni zatvoren skup u intervalnoj topologiji. Tada je skup F konačna unija podbaznih zatvorenih skupova tj. $F = \bigcup_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$. Tada na osnovu leme 1.2.3, dio (i), postoji $i \in I$ tako da je $[x_i, y_i] \in \mathcal{U}$, pa vrijedi $x_i = \bigwedge[x_i, y_i] \leq \liminf \mathcal{U}$ i $y_i \geq \limsup \mathcal{U}$. Kako se svaki zatvoren skup u $\mathcal{U}$ može napisati kao presjek baznih zatvorenih skupova u $\mathcal{U}$, to se dobija da svaki zatvoren skup u $\mathcal{U}$ sadrži interval $[\liminf \mathcal{U}, \limsup \mathcal{U}]$. Zbog toga za $x \in [\liminf \mathcal{U}, \limsup \mathcal{U}]$, x pripada zatvorenju svakog člana od $\mathcal{U}$, pa je x tačka nagomilavanja ultrafiltera $\mathcal{U}$. Prema lemi 2.6.3, ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergira ka x u intervalnoj topologiji. □

Teorema 4.2.2 (Frink) *[1] Za mrežu $\langle L, \leq\rangle$ sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) Topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv}\rangle$ je kompaktan;
(ii) Mreža $\langle L, \leq\rangle$ je kompletna.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka mreža $\langle L, \leq\rangle$ nije kompletna. Tada postoji skup $S \subset L$ koji nema najmanje gornje ograničenje. Neka je skup $T \subset L$ sastavljen od gornjih ograničenja skupa S i neka su u intervalnoj topologiji dati podbazni zatvoreni skupovi $[s,t]$, gdje je $s \in S$ i $t \in T$ (ako je $T = \emptyset$, posmatraju se duali glavnih ideala $\uparrow s$). Tada familija $\{[s,t] : s \in S, t \in T\}$ ima s.k.p, pošto za konačne skupove K_1, K_2 vrijedi $\bigcap_{i \in K_1, j \in K_2} [s_i, t_j] = [\bigvee_{i \in K_1} s_i, \bigwedge_{j \in K_2} t_j] \neq \emptyset$, ali ta familija ima prazan presjek, jer bi u suprotnom bilo koji element u tom presjeku morao biti supremum skupa S. Dakle, prema lemi 2.4.1, topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ nije kompaktan.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Neka je L kompletna mreža i $\mathcal{U} \subset P(L)$ proizvoljan ultrafilter. Prema lemi 3.4.7, vrijedi $\liminf \mathcal{U} \leq \limsup \mathcal{U}$, pa prema prethodnoj teoremi, ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergira u intervalnoj topologiji svakoj tački x za koju je $x \in [\liminf \mathcal{U}, \limsup \mathcal{U}]$. Dakle, $x \in [\liminf \mathcal{U}, \limsup \mathcal{U}]$ je tačka nagomilavanja datog ultrafiltera u intervalnoj topologiji, pa je, prema teoremi 2.6.2, topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ kompaktan. $\square$

Svaki jednočlan skup u intervalnoj topologiji je očigledno zatvoren, pa je, prema lemi 2.3.1, $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ T_1 prostor, ali da bi on bio Hausdorffov, potrebne su dodatne pretpostavke o mreži L.

Teorema 4.2.3 *[10] Intervalna topologija na kompletno distributivnoj mreži je Hausdorffova.*

Dokaz. Neka je L kompletno distributivna mreža i neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na toj mreži. Tada, na osnovu distributivnosti, vrijedi:

$$\liminf \mathcal{U} = \bigvee \{ \bigwedge S : S \in \mathcal{U} \} = \bigwedge \{ \bigvee \{ f[S] : S \in \mathcal{U} \} : f \in \Phi \},$$

gdje je Φ skup funkcija izbora za familiju $\mathcal{U}$ (tj. skup funkcija $f : \mathcal{U} \to L$ takvih da je za svako $S \in \mathcal{U}$ ispunjeno $f[S] \in S$). Za svaku funkciju $f \in \Phi$, skup $\{f[S] : S \in \mathcal{U}\}$ siječe svakog člana familije $\mathcal{U}$, pa prema lemi 1.2.3, dio (ii), on pripada $\mathcal{U}$. Zbog toga vrijedi

$$\liminf \mathcal{U} \geq \bigwedge \{ \bigvee U : U \in \mathcal{U} \} = \limsup \mathcal{U}.$$

Znači, $\liminf \mathcal{U} = \limsup \mathcal{U}$, pa je prema prethodnoj teoremi skup granica ultrafiltera $\mathcal{U}$ jednočlan.

Dakle, svaki ultrafilter na mreži L ima jedinstvenu granicu u odnosu na intervalnu topologiju, pa je, prema lemi 2.6.4, $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ Hausdorffov prostor. $\square$

Uz pretpostavku distributivnosti mreže L, u [17] je pokazan obrat prethodne teoreme, tj. dokazano je da je svaka distributivna kompletna mreža takva da je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ Hausdorffov, ujedno i kompletno distributivna.

4.3 Scottova topologija

Neka je na mreži $\langle L, \leq \rangle$ data familija podskupova $\mathcal{O}_\sigma$ koju čine svi gornji skupovi $U \subset L$ koji imaju svojstvo da za svaki usmjeren skup $S \subset L$ za koji postoji supremum i $\sup S \in U$, vrijedi $S \cap U \neq \emptyset$.

Lema 4.3.1 *$\mathcal{O}_\sigma$ je topologija na mreži L.*

Dokaz. Jasno da $\emptyset, L \in \mathcal{O}_\sigma$, pa vrijedi svojstvo (O1). Neka $A, B \in \mathcal{O}_\sigma$. Tada se jednostavno provjerava da $\uparrow (A \cap B) = A \cap B$, tj. $A \cap B$ je gornji skup. Neka je $S \subset L$ usmjeren skup i $\sup S \in A \cap B$. Tada $\sup S \in A$, pa je $S \cap A \neq \emptyset$ i slično, zbog $\sup S \in B$, vrijedi $S \cap B \neq \emptyset$. Tada postoje $s_1 \in S \cap A$ i $s_2 \in S \cap B$, pa zbog usmjerenja skupa S, postoji $s_0 \in S$ tako da $s_1, s_2 \leq s_0$. No, zbog $s_1 \in A$ i $s_2 \in B$ i činjenice da su A i B gornji skupovi, vrijedi $s_0 \in A \cap B$. Dakle, $S \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ i $A \cap B \in \mathcal{O}_\sigma$, pa je ispunjeno i svojstvo (O2). Konačno, neka $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}_\sigma$. Jasno da je $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \uparrow (\bigcup_{i \in I} A_i)$, pa će skup $\bigcup_{i \in I} A_i$ biti gornji ako vrijedi i suprotna inkluzija. Neka $x \in \uparrow (\bigcup_{i \in I} A_i)$. Tada postoji $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$ tako da je $y \leq x$, tj. postoji $i_0 \in I$ tako da $y \in A_{i_0}$ i $y \leq x$, pa pošto je A_{i_0} gornji skup, to vrijedi $x \in A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Neka je $S \subset L$ usmjeren skup za koji postoji supremum takav da $\sup S \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Tada postoji indeks $i_0 \in I$ tako da je $\sup S \in A_{i_0}$, pa je $S \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Kako je $S \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (S \cap A_i) \supset S \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, to vrijedi $S \cap \bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, tj. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}_\sigma$. Dakle, ispunjeno je i svojstvo (O3), pa je familija $\mathcal{O}_\sigma$ topologija. □

Topologija $\mathcal{O}_\sigma$ iz prethodne leme naziva se **Scottova topologija**.

Lema 4.3.2 *Scottova topologija je finija od gornje topologije.*

Dokaz. Neka je $\langle L, \leq \rangle$ mreža. Dovoljno je dokazati da je svaki podbazni otvoren skup u gornjoj topologiji otvoren i u Scottovoj topologiji. Neka je za proizvoljno $x \in L$, $L \setminus \downarrow x$ podbazni otvoren skup u gornjoj topologiji. Prema lemi 3.2.1, skup $L \setminus \downarrow x$ je gornji skup; neka je $S \subset L$ usmjeren skup za koji postoji supremum takav da $\sup S \in L \setminus \downarrow x$. Tada $\sup S \notin \downarrow x$, pa vrijedi $\sup S \nleq x$. Ako se pretpostavi da je $S \cap (L \setminus \downarrow x) = S \setminus \downarrow x = \emptyset$, tada za svako $s \in S$ vrijedi $s \leq x$, što implicira $\sup S \leq x$, što je kontradikcija. Dakle, vrijedi $S \cap (L \setminus \downarrow x) \neq \emptyset$, pa je skup $L \setminus \downarrow x$ otvoren u Scottovoj topologiji. □

Teorema 4.3.1 *[5] Na svakoj mreži koja je dcpo vrijedi:*

(i) skup je zatvoren u Scottovoj topologiji ako i samo ako je to donji skup koji je zatvoren u odnosu na uzimanje usmjerenih supremuma (supremuma njegovih usmjerenih podskupova);

(ii) $\langle L, \mathcal{O}_\sigma \rangle$ *je* T_0 *prostor;*

(iii) za sve $x \in L$, $\overline{\{x\}} = \downarrow x$, *pri čemu se zatvorenje posmatra u Scottovoj topologiji;*

(iv) svaki gornji skup jednak je presjeku svih otvorenih skupova (u Scottovoj topologiji) koji ga sadrže;

(v) skup je otvoren u Scottovoj topologiji ako i samo ako je to gornji skup koji ima svojstvo (S);

(vi) svaki donji skup zadovoljava svojstvo (S);

(vii) familija svih podskupova koji ispunjavaju svojstvo (S) je topologija.

Dokaz. Neka je L mreža koja je dcpo.

(i) ($\Rightarrow$) Ako je $F \subset L$ zatvoren skup u odnosu na Scottovu topologiju tada je skup $U = L \setminus F$ otvoren u ovoj topologiji. Skup U je gornji skup, pa je prema lemi 3.2.1 skup F donji skup. Ako se pretpostavi da F nije zatvoren u odnosu na uzimanje usmjerenih supremuma, tada postoji usmjeren skup $S \subset F$ takav da $\sup S \notin F$. No, tada $\sup S \in U$, pa je $U \cap S \neq \emptyset$, što je nemoguće, jer $S \subset L \setminus U$. Dakle, F je donji skup koji je zatvoren u odnosu na uzimanje usmjerenih supremuma.

($\Leftarrow$) Neka je $F \subset L$ donji skup koji je zatvoren u odnosu na uzimanje usmjerenih supremuma. Dovoljno je dokazati da je skup $L \setminus F$ otvoren u Scottovoj topologiji. Jasno je da je to gornji skup. Neka je $S \subset L$ usmjeren skup takav da $\sup S \in U$ (kako je mreža L dcpo to $\sup S$ postoji). Očigledno da $U \cap S \neq \emptyset$, jer u suprotnom bi vrijedilo $S \subset L \setminus U = F$, a to povlači $\sup S \in F$, što je nemoguće. Dakle, skup U je otvoren u Scottovoj topologiji.

(ii) $\langle L, \mathcal{O}_u \rangle$ je T_0 prostor na osnovu leme 4.1.1, pa s obzirom da je Scottova topologija finija od gornje topologije, to je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\sigma \rangle$ takođe T_0 prostor.

(iii) S obzirom da je $\downarrow x$ najmanji donji skup koji sadrži x i kako je on zatvoren u odnosu na usmjerene supremume, na osnovu (i) dobijamo $\overline{\{x\}} = \downarrow x$.

(iv) Svaki gornji skup $S \subset L$ je presjek svih skupova oblika $L \setminus \downarrow x$, gdje $x \in L \setminus S$, a prema (iii) su ovi skupovi otvoreni u Scottovoj topologiji.

(v) ($\Rightarrow$) Neka je $U \subset L$ otvoren skup u Scottovoj topologiji. Jasno da je to gornji skup ; treba pokazati da za njega vrijedi svojstvo (S). Neka je $S \subset L$ proizvoljan usmjeren skup takav da $\sup S \in U$. Tada je $S \cap U \neq \emptyset$, pa postoji

$y \in S \cap U$; za $x \in S$ tako da je $y \leq x$ očigledno vrijedi $x \in\uparrow U = U$, pa je svojstvo (S) ispunjeno.

($\Leftarrow$) Ako je $U \subset L$ gornji skup koji zadovoljava svojstvo (S) tada je za svaki usmjeren skup $S \subset L$ za koji je $\sup S \in U$ ispunjeno $S \cap U \neq \emptyset$, pa je U otvoren u Scottovoj topologiji.

(vi) Neka je $D \subset L$ donji skup i $S \subset L$ usmjeren skup takav da $\sup S \in D$. Tada je za svako $x \in S$ ispunjeno $x \in\downarrow D = D$, pa za D vrijedi svojstvo (S).

(vii) Neka je $\mathcal{O}_{(S)}$ kolekcija podskupova mreže L koji zadovoljavaju svojstvo (S). Očigledno skupovi $\emptyset, L$ ispunjavaju svojstvo (S), pa vrijedi (O1). Neka je $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{(S)}$ i $S \subset L$ usmjeren skup takav da je $\sup S \in U_1 \cap U_2$. Tada $\sup S \in U_i$, gdje $i = 1, 2$, pa postoji $y_i \in S$ takvo da za sve $x \in S$ za koje je $y_i \leq x$ vrijedi $x \in U_i$. Skup S je usmjeren, pa postoji $y \in S$ takvo da je $y_1, y_2 \leq y$, pri tome za svako $x \in S$ za koje je $y \leq x$ vrijedi $x \in U_1 \cap U_2$. Dakle, vrijedi i svojstvo (O2). Neka je $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{O}_{(S)}$ i $S \subset L$ usmjeren skup takav da $\sup S \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Tada postoji $i_0 \in I$ takav da je $\sup S \in U_{i_0}$, pa postoji $y \in S$ takvo da je za svako $x \in S$ za koje je ispunjeno $y \leq x$ vrijedi $x \in U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Dakle, ispunjeno je i svojstvo (O3), pa je kolekcija $\mathcal{O}_{(S)}$ topologija na mreži L. $\square$

Lema 4.3.3 *Ako mreža $\langle L, \leq \rangle$ ima najmanji element tada je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\sigma \rangle$ kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\{F_i : i \in I\}$ familija zatvorenih skupova sa s.k.p. Prema prethodnoj teoremi, dio (i), svi skupovi F_i, za $i \in I$, su donji skupovi, a zbog svojstva s.k.p. su i neprazni, pa najmanji element 0 pripada svakom od njih. Dakle, $0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$, pa je prema lemi 2.4.1 prostor $\langle L, \mathcal{O}_\sigma \rangle$ kompaktan. $\square$

Iz prethodne teoreme se uočava da u slučaju netrivijalne mreže L topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\sigma \rangle$ ne mora biti T_1 prostor. Ukoliko je mreža L konačna ili linearno uređena relacijom $\leq$, onda se Scottova topologija poklapa sa gornjom topologijom na L. Ako je $L = P(X)$ za neki skup X, tada se Scottova topologija podudara sa kolekcijom familija konačnog karaktera (ovo su familije $\mathcal{F}$ takve da $S \in \mathcal{F}$ ako postoji konačan skup $F \subset S$ takav da $F \in \mathcal{F}$).

Teorema 4.3.2 *[5] Neka je mreža $\langle L, \leq \rangle$ neprekidna. Tada vrijedi:*

(i) za svako $x \in L$, skup $\upuparrows x$ je otvoren u Scottovoj topologiji;

(ii) gornji skup $U \subset L$ je otvoren u Scottovoj topologiji ako i samo ako za svako $x \in U$ postoji $u \in U$ tako da je $u << x$;

(iii) za $x \in L$, skupovi oblika $\upuparrows x$ formiraju bazu Scottove topologije.

Dokaz. (i) Neka je $x \in L$ i $S \subset L$ usmjeren skup takav da $\sup S \in \Uparrow x$. Prema lemi 3.4.6, postoji $s \in S$ tako da $x << s$. Jasno je da $s \in \Uparrow x$, pa $S \cap \Uparrow x \neq \emptyset$, što znači da je $\Uparrow x$ otvoren skup u Scottovoj topologiji.

(ii) ($\Rightarrow$) Neka je $U \subset L$ otvoren u Scottovoj topologiji i neka je $x \in U$. S obzirom da je L neprekidna mreža to je $\Downarrow x$ usmjeren skup i $x = \sup \Downarrow x \in U$, pa postoji $u \in U \cap \Downarrow x \neq \emptyset$. Jasno je da vrijedi $u << x$.

($\Leftarrow$) Ako za svako $x \in U \subset L$ postoji $u \in U$ tako da je $u << x$, onda je $U = \bigcup_{u \in U} \Uparrow u$, pa je prema dijelu (i), on otvoren u Scottovoj topologiji.

(iii) Tvrđenje direktno slijedi iz dijela (ii), jer za skup U koji je otvoren u Scottovoj topologiji i $x \in U$, postoji $u \in U$ tako da vrijedi $x \in \Uparrow u \subset U$. □

4.4 Lawsonova topologija

Lawsonova topologija ($\mathcal{O}_\lambda$) je najgrublja topologija koja sadrži donju i Scottovu topologiju, tj. $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}[\mathcal{O}_l \cup \mathcal{O}_\sigma]$. Kako je Scottova topologija uvijek finija od gornje topologije, to je Lawsonova topologija uvijek finija od intervalne topologije. Zbog toga je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$ T_1 prostor.

Lema 4.4.1 *[5] Otvoreni skupovi u Lawsonovoj topologiji zadovoljavaju svojstvo (S).*

Dokaz. S obzirom da podbazu topologije $\mathcal{O}_\lambda$ čine skupovi koji su otvoreni u Scottovoj topologiji, zajedno sa skupovima oblika $L \setminus \uparrow x$, za $x \in L$, uzimanjem konačnih presjeka takvih skupova dobija se baza za Lawsonovu topologiju koju čine skupovi oblika $U \setminus \uparrow F = U \cap (L \setminus \uparrow F)$, gdje je U otvoren u Scottovoj topologiji, a F konačan skup. Prema teoremi 4.3.1, dijelovi (v) i (vi), takvi skupovi U i $L \setminus \uparrow F$ imaju svojstvo (S), pa prema istoj teoremi, dio (vii) i svaki član te baze, pa samim tim i svaki otvoren skup u Lawsonovoj topologiji ima to svojstvo. □

Teorema 4.4.1 *[5] Na svakoj mreži koja je dcpo važi:*

(i) Gornji skup je otvoren u Lawsonovoj topologiji ako i samo ako je otvoren u Scottovoj topologiji;

(ii) Donji skup je zatvoren u Lawsonovoj topologiji ako i samo ako je zatvoren u odnosu na uzimanje supremuma njegovih usmjerenih podskupova.

Dokaz. Neka je mreža L dcpo.

(i) Lawsonova topologija je finija od Scottove pa je dovoljno dokazati da je svaki gornji otvoren skup u Lawsonovoj topologiji otvoren i u Scottovoj topologiji. Neka je $U \subset L$ gornji otvoren skup u Lawsonovoj topologiji. Na osnovu prethodne leme, skup U zadovoljava svojstvo (S), pa je prema teoremi 4.3.1, dio (v), taj skup otvoren i u Scottovoj topologiji.

(ii) Donji skup $D \subset L$ je zatvoren u Lawsonovoj topologiji ako i samo ako je skup $L \setminus D$ gornji otvoren skup u Lawsonovoj topologiji, što je prema dijelu (i) ispunjeno ako i samo ako je $L \setminus D$ gornji otvoren skup u Scottovoj topologiji, ako i samo ako je D donji zatvoren skup u Scottovoj topologiji, što je prema teoremi 4.3.1, dio (i), ispunjeno ako i samo je D donji skup zatvoren u odnosu na uzimanje supremuma njegovih usmjerenih podskupova. □

Teorema 4.4.2 *[5] Za kompletnu mrežu L, topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$ je kompaktan.*

Dokaz. Neka je L kompletna mreža. Da bi se pokazala kompaktnost topološkog prostora $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$ dovoljno je dokazati da svaki otvoren pokrivač sastavljen od podbaznih otvorenih skupova u topologiji $\mathcal{O}_\lambda$ ima konačan potpokrivač. Neka je $\{U_j \in \mathcal{O}_\sigma : j \in J\} \cup \{L \setminus \uparrow x_i : i \in I\}$, gdje je $\{x_i : i \in I\} \subset L$, jedan takav otvoren pokrivač. Tada vrijedi

$$\bigcup \{L \setminus \uparrow x_k : k \in K\} = L \setminus \bigcap \{\uparrow x_k : k \in K\} = L \setminus \uparrow x.$$

gdje je $x = \sup\{x_i : i \in I\} \in L$. Ali, $x \notin L \setminus \uparrow x$, pa postoji $j_0 \in J$ i skup U_{j_0} iz navedenog pokrivača tako da je $x \in U_{j_0}$, odakle je $\uparrow x \subset U_{j_0}$. Skup $S = \{\bigvee_{i \in K} x_i : K \subset I$ je konačan$\}$ je usmjeren i $\sup S = x \in U_{j_0}$, pa kako je skup U_{j_0} otvoren u Scottovoj topologiji, to vrijedi $S \cap U_{j_0} \neq \emptyset$, tj. postoji skup $\{i_1, ..., i_n\} \subset I$, tako da je $x_{i_1} \vee ... \vee x_{i_n} \in U_{j_0}$. Kako je $\uparrow (x_{i_1} \vee ... \vee x_{i_n}) \subset U_{j_0}$ i $\uparrow (x_{i_1} \vee ... \vee x_{i_n}) = \bigcap_{i=1}^{n} \uparrow x_{k_i}$, to se dobija da

$$L \setminus U_{j_0} \subset (L \setminus \uparrow x_{i_1}) \cup ... \cup (L \setminus \uparrow x_{i_n}).$$

Dakle, $\{U_{j_0}, L \setminus \uparrow x_{i_1}, ..., L \setminus \uparrow x_{i_n}\}$ je traženi konačan potpokrivač, što znači da je prostor $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$ kompaktan. □

Sljedeća teorema daje određenu informaciju o konvergenciji u Lawsonovoj topologiji.

Teorema 4.4.3 *[6] Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža i $\mathcal{U} \subset P(L)$ ultrafilter na toj mreži. Ako je $x = \liminf \mathcal{U}$, tada ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergira ka x u prostoru $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da za svaki zatvoren skup F u Lawsonovoj topologiji takav da $F \in \mathcal{U}$, vrijedi $x \in F$. S obzirom na definiciju Lawsonove topologije tvrđenje je dovoljno provjeriti za zatvorene skupove u donjoj topologiji i zatvorene skupove u Scottovoj topologiji.

Neka je $F \subset L$ zatvoren skup u donjoj topologiji i neka $F \in \mathcal{U}$. S obzirom da duali glavnih ideala čine podbazu za zatvorene skupove u donjoj topologiji, to postoji skup I i konačni skupovi $M_i \subset L$, $i \in I$ tako da je $F = \bigcap_{i\in I} \uparrow M_i$. Odavde se dobija da za svako $i \in I$ vrijedi $\uparrow M_i \in \mathcal{U}$. Kako je za svako $i \in I$ ispunjeno $\uparrow M_i = \{\bigcup \uparrow y : y \in M_i\}$, s obzirom da je ultrafilter $\mathcal{U}$ ujedno i prost, to postoji $y \in M_i$ tako da je $\uparrow y \in \mathcal{U}$. Tada je $\bigwedge \uparrow y = y$, pa je $x = \liminf \mathcal{U} = \bigvee\{\bigwedge S : S \in \mathcal{U}\} \geq y$, što znači da za svako $i \in I$ vrijedi $x \in \uparrow y \subset \uparrow M_i$, tj. $x \in \bigcap_{i\in I} \uparrow M_i = F$.

Neka je F zatvoren skup u Scottovoj topologiji i neka $F \in \mathcal{U}$. Tada je prema teoremi 4.3.1, dio (i), F donji skup koji je zatvoren na uzimanje supremuma njegovih usmjerenih podskupova. Neka je $S \in \mathcal{U}$ proizvoljno. Tada je zbog svojstva (FI 1) ispunjeno $F \cap S \neq \emptyset$, pa postoji $y \in S \cap F$, i vrijedi $\bigwedge S \leq y \in F$, pa je $\bigwedge S \in \downarrow F = F$, a zbog zatvorenosti na uzimanje usmjerenih supremuma se dobija $x = \liminf \mathcal{U} = \bigvee\{\bigwedge S : S \in \mathcal{U}\} \in F$.

Dakle, u oba slučaja tačka x pripada zatvorenju svakog člana ultrafiltera $\mathcal{U}$, pa je x tačka nagomilavanja, tj. granica tog ultrafiltera u prostoru $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$. □

Ako je mreža L kompletno distributivna, tada je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ Hausdorffov, pa kako je $\mathcal{O}_{interv} \subset \mathcal{O}_\lambda$, to je i topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$ Hausdorffov. Na osnovu leme 2.4.7 se onda jednostavno dokazuje sljedeća teorema.

Teorema 4.4.4 *Ako je mreža kompletno distributivna, tada se intervalna i Lawsonova topologija na toj mreži poklapaju.*

Koristeći teoremu 3.4.1, uslov da Lawsonova topologija bude Hausdorffova se može u određenoj mjeri oslabiti.

Teorema 4.4.5 *[5] Ako je mreža $\langle L, \leq \rangle$ neprekidna, tada je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$ Hausdorffov.*

Dokaz. Neka su $x, y \in L$ različite tačke i neka npr. $x \not\leq y$. Tada prema uslovu (A) iz leme 3.4.5 postoji $u << x$ tako da $u \not\leq y$. Tada je $\uparrow\uparrow u$ otvorena okolina tačke x u Scottovoj (pa i u Lawsonovoj) topologiji, dok je $L \setminus \uparrow u$ otvorena okolina tačke y u donjoj (pa i u Lawsonovoj) topologiji. Jasno je da su ove dvije otvorene okoline disjunktne. Dakle, topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_\lambda \rangle$ je Hausdorffov. □

4.5 Topologija poretka

Topologija poretka ($\mathcal{O}_{order}(L)$) na kompletnoj mreži $\langle L, \leq \rangle$ je generisana sa **konvergencijom poretka**: Ultafilter $\mathcal{U} \subset P(L)$ **konvergira u smislu poretka** ka elementu $x \in L$ ako je $\liminf \mathcal{U} = \limsup \mathcal{U} = x$.

Neka je $\mathcal{C} \subset P(L)$ familija skupova definisana na sljedeći način: $A \in \mathcal{C}$ ako za skup A i svaki ultrafilter $\mathcal{U}$ na L koji sadrži skup A i koji konvergira u smislu poretka ka tački $x \in L$, vrijedi da $x \in A$.

Lema 4.5.1 *Familija $\mathcal{C}$ iz prethodnog razmatranja zadovoljava uslove (C1)-(C3).*

Dokaz. Jasno je da $\emptyset, X \in \mathcal{C}$, te vrijedi (C1). Neka su $A, B \in \mathcal{C}$ i $\mathcal{U}$ ultrafilter na L koji sadrži $A \cup B$ i koji u smislu poretka konvergira ka $x \in L$. Na osnovu leme 1.2.3, dio (i), jedan od skupova A, B pripada ultrafilteru $\mathcal{U}$ i taj skup sadrži x, pa ga sadrži i skup $A \cup B$. Dakle, $A \cup B \in \mathcal{C}$, tj. vrijedi i uslov (C2). Konačno, neka je $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{C}$ i $\mathcal{U}$ ultrafilter na L koji sadrži $\bigcap_{i\in I} A_i$ i koji u smislu poretka konvergira ka $x \in L$. S obzirom da $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{U}$, to zbog svojstva (FI3) za svako $i \in I$ vrijedi $A_i \in \mathcal{U}$. No, zbog pretpostavke, tada za svako $i \in I$ vrijedi $x \in A_i$, pa $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, tj. $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{C}$. Dakle, ispunjeno je i svojstvo (C3). $\square$

Na osnovu prethodne leme i leme 2.1.2 familija $\mathcal{O}_{order} = \{L \setminus A : A \in \mathcal{C}\}$ je topologija koja se naziva topologija poretka na mreži L i u toj topologiji familija zatvorenih skupova se poklapa sa familijom $\mathcal{C}$.

Lema 4.5.2 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža. Neprazan skup $U \subset L$ je otvoren u topologiji poretka ako i samo ako za svako $x \in U$ i ultrafilter $\mathcal{U} \subset P(L)$ koji konvergira u smislu poretka ka x vrijedi $U \in \mathcal{U}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $U \subset L$ otvoren u topologiji poretka, neka je $x \in U$ i $\mathcal{U}$ ultrafilter koji konvergira u smislu poretka ka x. Ako se pretpostavi da $U \notin \mathcal{U}$, tada za zatvoren skup $L \setminus U$ u topologiji poretka vrijedi $L \setminus U \in \mathcal{U}$, pa, prema definiciji zatvorenog skupa u ovoj topologiji, se dobija da $x \in L \setminus U$, što je kontradikcija.

($\Leftarrow$) Neka skup $U \subset L$ zadovoljava uslove teoreme i neka je $\mathcal{U} \subset P(L)$ ultrafilter koji sadrži skup $L \setminus U$ i konvergira u smislu poretka ka $y \in L$. S obzirom da $U \notin \mathcal{U}$, to se na osnovu pretpostavke dobija da $y \notin U$, tj. $y \in L \setminus U$. Dakle, skup $L \setminus U$ je zatvoren, pa je skup U otvoren u topologiji poretka. $\square$

Lema 4.5.3 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža. Ako ultrafilter $\mathcal{U}$ na L konvergira u smislu poretka ka elementu $x \in L$, onda je x granica ovog ultrafiltera i u smislu konvergencije u topološkom prostoru $\langle L, \mathcal{O}_{order}(L) \rangle$.*

Dokaz. Neka ultrafilter $\mathcal{U}$ na L konvergira u smislu poretka ka elementu $x \in L$. Na osnovu leme 2.6.3 dovoljno je dokazati da je x tačka nagomilavanja ovog ultrafiltera u topološkom prostoru $\langle L, \mathcal{O}_{order}(L)\rangle$, tj. da x pripada zatvorenju (u topologiji poretka) svakog člana ovog ultrafiltera. No, to je očigledno, jer ako je $A \in \mathcal{U}$ zatvoren skup u topologiji poretka, tada na osnovu definicije zatvorenog skupa u ovoj topologiji vrijedi $x \in A$. $\Box$

Teorema 4.5.1 *[19] Neka je $\langle L, \leq\rangle$ kompletna mreža i $\mathcal{O}$ topologija na L koja sadrži intervalnu topologiju takva da je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}\rangle$ kompaktan. Tada je $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{order}$.*

Dokaz. Ako se pretpostavi suprotno, tada postoji skup $A \subset L$ takav da $A \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_{order}$. Kako A nije otvoren u topologiji poretka, prema lemi 4.5.2, postoji $x \in A$ i ultrafilter $\mathcal{U} \subset P(L)$ koji konvergira u smislu poretka ka x tako da $A \notin \mathcal{U}$. Skup $B = L \setminus A \in \mathcal{U}$ je zatvoren u prostoru $\langle L, \mathcal{O}\rangle$, pa s obzirom da je taj prostor kompaktan, na osnovu leme 2.4.3, potprostor $\langle B, \mathcal{O}_B\rangle$ je kompaktan i prema lemi 1.2.5, familija $\mathcal{U}|_B = \{U \cap B : U \in \mathcal{U}\}$ je ultrafilter na tom potprostoru. Neka je $y \in B$ proizvoljno. S obzirom da $x \in A$ i $y \in B$, to $x \neq y$. Zbog $x = \liminf \mathcal{U} = \limsup \mathcal{U}$ vrijedi $x \nleq y$ ili $x \ngeq y$, bez gubljenja na opštosti može se pretpostaviti da $x \nleq y$. Tada postoji $z \in S = \{\bigwedge U : U \in \mathcal{U}\}$ tako da $z \nleq y$ (jer bi u suprotnom vrijedilo $x = \sup S \leq y$) i $U \in \mathcal{U}$ za koje je $z = \bigwedge U$. Kako je za $u \in U$ ispunjeno $z \leq u$, tj. $u \in {\uparrow}z$, to vrijedi da $U \subset {\uparrow}z$, odakle se dobija da ${\uparrow}z \in \mathcal{U}$. Po pretpostavci teoreme, topologija $\mathcal{O}$ sadrži intervalnu topologiju, a kako je $\uparrow z$ zatvoren skup u donjoj topologiji, to je on zatvoren i u topologiji $\mathcal{O}$, pa je skup $\uparrow z \cap B \in \mathcal{U}|_B$ neprazan zatvoren skup u potprostoru B koji ne sadrži tačku y (jer $y \notin \uparrow z$), što implicira da tačka y nije tačka nagomilavanja ultrafiltera $\mathcal{U}|_B$. Kako je $y \in B$ bilo proizvoljno, ultrafilter $\mathcal{U}|_B$ nema tačaka nagomilavanja u kompaktnom prostoru $\langle B, \mathcal{O}_B\rangle$, što je prema teoremi 2.6.2 kontradikcija. Dakle, vrijedi $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{order}$. $\Box$

S obzirom da su na kompletnoj mreži L intervalna i Lawsonova topologija kompaktne (teoreme 4.2.2 i 4.4.2) i sadrže intervalnu topologiju, na osnovu prethodne teoreme se dokazuje sljedeća teorema.

Teorema 4.5.2 *Na kompletnoj mreži topologija poretka je finija od intervalne i Lawsonove topologije.*

Na osnovu prethodne teoreme i leme 2.6.4, može se zaključiti da svaki ultrafilter na kompletnoj mreži koji konvergira ka nekoj tački u smislu konvergencije poretka, konvergira ka toj tački i u smislu konvergencije u intervalnoj i Lawsonovoj topologiji koje su zadate na toj mreži.

Teorema 4.5.3 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža takva da je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ Hausdorffov. Tada je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{order} \rangle$ kompaktan.*

Dokaz. Prema teoremi 4.2.2, prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ je kompaktan, pa kako je po pretpostavci i Hausdorffov, to svaki ultrafilter na ovom prostoru ima jedinstvenu granicu, što, prema teoremi 4.2.1, povlači da se konvergencija u intervalnoj topologiji podudara sa konvergencijom poretka. Ako se pretpostavi da postoji ultrafilter $\mathcal{U} \subset P(L)$ koji ne konvergira u prostoru $\langle L, \mathcal{O}_{order} \rangle$, tada, prema lemi 4.5.3, on ne konvergira ni u smislu poretka, pa, prema lemi 2.6.4 ne konvergira ni u prostoru $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$, što je kontradikcija sa kompaktnošću prostora $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$. Dakle, prostor $\langle L, \mathcal{O}_{order} \rangle$ je kompaktan. □

Pod uslovima prethodne teoreme se jednostavno pokazuje da je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{order} \rangle$ Hausdorffov. Tako na osnovu prethodne teoreme i leme 2.4.7 slijedi sljedeća teorema.

Teorema 4.5.4 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža takva da je topološki prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ Hausdorffov. Tada je $\mathcal{O}_{interv} = \mathcal{O}_{order}$.*

Teorema 4.5.5 *Na kompletno distributivnoj mreži intervalna, Lawsonova i topologija poretka se podudaraju.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.2.3, na kompletno distributivnoj mreži $\langle L, \leq \rangle$ je prostor $\langle L, \mathcal{O}_{interv} \rangle$ Hausdorffov, pa se na osnovu teoreme 4.4.4 i prethodne teoreme dobija $\mathcal{O}_{interv} = \mathcal{O}_{\lambda} = \mathcal{O}_{order}$. □

Dio III

Prostor topologija

Glava 5

Mreža topologija na fiksiranom skupu

U ovoj glavi posmatra se mreža svih topologija fiksiranog skupa. Osobine ove mreže, kao i nekih njenih podmreža, intenzivno su proučavane u proteklih 50 godina. Navedeni rezultati mogu se naći npr. u [4], [7], [8], [13], [15], [16] i [18].

5.1 Mreža T_X i njene osobine

Neka je X neprazan skup i T_X skup svih topologija na skupu X, tj.

$$T_X = \{\mathcal{O} \in P(P(X)) : \mathcal{O} \text{ je topologija na skupu } X\}.$$

Teorema 5.1.1 *Skup T_X formira kompletnu mrežu ako su za $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2 \in T_X$ infimum i supremum definisani sa*

$$\mathcal{O}_1 \wedge \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2;$$

$$\mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}[\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2].$$

Mreža $\langle T_X, \wedge, \vee\rangle$ ima najmanji i najveći element.

Dokaz. Za dvije topologije $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ su $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ i $\mathcal{O}[\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2]$ ponovo topologije, pa je $\langle T_X, \wedge, \vee\rangle$ mreža. To je i kompletna mreža, jer za skup $\{\mathcal{O}_i : i \in I\} \subset T_X$, najveće donje ograničenje i najmanje gornje ograničenje su dati sa

$$\bigwedge_{i\in I}\mathcal{O}_i=\bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_i,$$
$$\bigvee_{i\in I}\mathcal{O}_i=\mathcal{O}[\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i],$$

pa postoje i proizvoljni infimumi i supremumi. Najmanji element mreže svih topologija $\langle T_X,\wedge,\vee\rangle$ je antidiskretna topologija, a najveći element diskretna topologija. $\square$

Teorema 5.1.2 *[13] T_X je atomarna mreža. Ako je $|X|=n$, onda T_X sadrži 2^n-2 atoma, dok u slučaju da je X beskonačan skup, T_X sadrži $2^{|X|}$ atoma.*

Dokaz. Jasno je da su atomi mreže T_X topologije oblika $\{\emptyset,G,X\}$, gdje je $\emptyset\subsetneq G\subsetneq X$, kao i to da se svaka topologija različita od antidiskretne topologije može dobiti kao supremum određenog skupa atoma. Broj atoma je jednak broju izbora netrivijalnog podskupa $G\subset X$. Ako je $|X|=n$ taj broj je 2^n-2, dok u slučaju beskonačnog skupa X on iznosi $2^{|X|}$. $\square$

Lema 5.1.1 *Ako je $\mathcal{U}$ ultrafilter na X i $x\in X$, tako da $\mathcal{U}\neq\mathcal{U}(x)$, tada je familija $\mathcal{O}(x,\mathcal{U})=\{A\subset X : x\notin A\ \vee\ A\in\mathcal{U}\}$ topologija na skupu X.*

Topologija iz prethodne leme se naziva **ultratopologija** na X. Ultratopologija $O(x,\mathcal{U})$ je **glavna ultratopologija** ili **neglavna ultratopologija** u zavisnosti od toga da li je ultrafilter $\mathcal{U}$ glavni ili neglavni respektivno.

Teorema 5.1.3 *Na beskonačnom skupu X postoji tačno $2^{2^{|X|}}$ ultratopologija.*

Dokaz. Svaka ultratopologija je familija podskupova skupa X, tj. pripada skupu $P(P(X))$. Stoga, ima najviše $2^{2^{|X|}}$ ultratopologija. Za kompletiranje dokaza, na osnovu teoreme Pospíšila, dovoljno je definisati injekciju između skupa svih ultrafiltera na X i skupa svih ultratopologija na X. Neka je za proizvoljne različite vrijednosti $x,y\in X$ i ultrafilter $\mathcal{U}$, funkcija f definisana sa

$$f(\mathcal{U})=\begin{cases}\mathcal{O}(x,\mathcal{U}), & \text{za } \mathcal{U}\neq\mathcal{U}(x)\\ \mathcal{O}(y,\mathcal{U}), & \text{za } \mathcal{U}=\mathcal{U}(x).\end{cases}$$

Neka su $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ dva različita ultrafiltera na skupu X. Ako je jedan od njih glavni ultrafilter $\mathcal{U}(x)$, jasno da je tada $f(\mathcal{U}_1)\neq f(\mathcal{U}_2)$. Ako je $\mathcal{U}_1\neq\mathcal{U}(x)\neq\mathcal{U}_2$, određenosti radi, neka postoji $A\subset X$ takav da $A\in\mathcal{U}_1\setminus\mathcal{U}_2$ (za slučaj $A\in\mathcal{U}_2\setminus\mathcal{U}_1$ dokaz je sličan). Tada $A\in\mathcal{U}_1$, $X\setminus A\in\mathcal{U}_2$ i $A\in\mathcal{O}(x,\mathcal{U}_2)=f(\mathcal{U}_1)$.

Ako $x \in A$, tada $A \notin \mathcal{O}(x,\mathcal{U}_2) = f(\mathcal{U}_2)$.

Ako $x \notin A$, tada $A \cup \{x\} \in f(\mathcal{U}_1)$, jer $A \cup \{x\} \in \mathcal{U}_1$. Međutim, $A \cup \{x\} \notin f(\mathcal{U}_2)$, jer u suprotnom, $X \setminus A, A \cup \{x\} \in \mathcal{U}_2$, što povlači $\{x\} = (X \setminus A) \cap (A \cup \{x\}) \in \mathcal{U}_2$, što je nemoguće jer $\mathcal{U}_2 \neq \mathcal{U}(x)$.

U oba slučaja $f(\mathcal{U}_1) \neq f(\mathcal{U}_2)$, pa je f injekcija, što znači da ultratopologija na skupu X ima najmanje $2^{2^{|X|}}$. □

Lema 5.1.2 *Topološki prostor sa glavnom ultratopologijom nije T_1 prostor.*

Dokaz. Neka su $x, y \in X$ različite tačke i $\mathcal{U}(y)$ glavni ultrafilter na skupu X i neka je na tom skupu zadana glavna ultratopologija $\mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))$. Tada vrijedi $x \in X \setminus \{y\}$ i $X \setminus \{y\} \notin \mathcal{U}(y)$, pa skup $X \setminus \{y\}$ nije otvoren u prostoru $\langle X, \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))\rangle$, što znači da jednočlan skup $\{y\}$ nije zatvoren u tom prostoru. Prema lemi 2.3.1, prostor $\langle X, \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))\rangle$ nije T_1 prostor. □

Lema 5.1.3 *Topološki prostor sa neglavnom ultratopologijom je T_4 prostor.*

Dokaz. Neka je X topološki prostor sa neglavnom ultratopologijom $\mathcal{O}$. Tada postoji $x \in X$ i neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ tako da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x,\mathcal{U})$.

Neka je $y \in X$ proizvoljno. Ako je $y = x$, tada $x \notin X \setminus \{y\}$, pa je skup $X \setminus \{y\}$ otvoren, tj. skup $\{y\}$ je zatvoren. Ako je $y \neq x$, tada $X \setminus \{y\} \in \mathcal{U}$ (u suprotnom dobija se $\{y\} \in \mathcal{U}$, što je nemoguće jer $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}(y)$), pa je skup $X \setminus \{y\}$ otvoren, tj. skup $\{y\}$ je zatvoren. Dakle, svaki jednočlan skup u prostoru $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ je zatvoren, pa prema lemi 2.3.1, taj prostor jeste T_1 prostor.

Neka su F_1 i F_2 disjunktni zatvoreni skupovi u prostoru $\langle X, \mathcal{O}\rangle$. Tada jedan od njih ne sadrži tačku x, neka je to npr. skup F_1. Tada su skupovi $U_1 = F_1$ i $U_2 = X \setminus F_1$ otvoreni, disjunktni i respektivno sadrže skupove F_1 i F_2.

Dakle, topološki prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ je T_4 prostor. □

Topologija $\mathcal{O}$ na skupu X se naziva **glavna topologija** ako se može napisati kao presjek određenog skupa glavnih ultratopologija na skupu X.

Teorema 5.1.4 *[4] T_X je koatomarna mreža. Koatomi su ultratopologije. Ako je $|X| = n$, T_X sadrži $n(n-1)$ koatoma. Ako je X beskonačan T_X sadrži $2^{2^{|X|}}$ koatoma.*

Dokaz. Naprije će biti pokazano da su koatomi mreže T_X upravo ultratopologije. Neka je za proizvoljno $x \in X$ i ultrafilter $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}(x)$ data ultratopologija $\mathcal{O}(x,\mathcal{U})$

i neka je na skupu X data topologija $\mathcal{O}$ takva da je $\mathcal{O}(x,\mathcal{U}) \subset \mathcal{O}$. Ako bi postojao skup $A \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}(x,\mathcal{U})$, tada bi za njega vrijedilo $x \in A$ i $A \notin \mathcal{U}$. Tada je $X \setminus A \in \mathcal{U}$, pa je i $(X \setminus A) \cup \{x\} \in \mathcal{U}$. Dalje se dobija da $(X \setminus A) \cup \{x\} \in \mathcal{O}(x,\mathcal{U}) \subset \mathcal{O}$, odnosno, $\{x\} = A \cap ((X \setminus A) \cup \{x\}) \in \mathcal{O}$. Kako je za svako $y \neq x$, $\{y\} \in \mathcal{O}(x,\mathcal{U}) \subset \mathcal{O}$, to je $\mathcal{O}$ diskretna topologija.

U narednom će biti pokazano da je T_X koatomarna mreža. Neka je $\mathcal{O}' \in T_X$ nediskretna topologija i $\mathcal{UT}(\mathcal{O}') = \{\mathcal{O} \in T_X : \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ i $\mathcal{O}$ je ultratopologija$\}$. Jasno da je $\mathcal{O}' \subset \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{UT}(\mathcal{O}')} \mathcal{O}$. Da bi se dokazala suprotna inkluzija, neka je dat proizvoljan skup $A \subset X$ takav da $A \notin \mathcal{O}'$ (takav postoji jer $\mathcal{O}'$ nije diskretna topologija). Tada postoji $x \in A$ (A je neprazan) tako da $A \notin \mathcal{N}(x)$ u topologiji $\mathcal{O}'$ (pošto skup A nije otvoren u topologiji $\mathcal{O}'$). Neka je $\mathcal{U}$ kolekcija podskupova skupa X koja sadrži skup $X \setminus A$ (koji je takođe neprazan) zajedno sa svim $\mathcal{O}'$- okolinama tačke x. $\mathcal{U}$ je filter jer bilo koja $\mathcal{O}'$- okolina tačke x siječe skup $X \setminus A$, jednostavno se pokazuje da je to i ultrafilter. Ultratopologija $\mathcal{O}(x,\mathcal{U})$ pripada skupu $\mathcal{UT}(\mathcal{O}')$ (slijedi na osnovu same definicije $\mathcal{O}(x,\mathcal{U})$) i $A \notin \mathcal{O}(x,\mathcal{U})$ (jer $x \in A$ i $A \notin \mathcal{U}$), pa $A \notin \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{UT}(\mathcal{O}')} \mathcal{O}$. Znači, važi $\mathcal{O}' \supset \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{UT}(\mathcal{O}')} \mathcal{O}$. Dakle, $\mathcal{O}' = \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{UT}(\mathcal{O}')} \mathcal{O}$ i mreža T_X je koatomarna.

Neka je $|X| = n$. Tada su svi ultrafilteri na skupu X glavni, pa su sve ultratopologije oblika $\mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))$, gdje je $y \neq x$. Jasno da je onda broj koatoma u ovom slučaju upravo $n(n-1)$.

Neka je X beskonačan. Tada prema teoremi 5.1.3 mreža T_X sadrži $2^{2^{|X|}}$ koatoma. □

Teorema 5.1.5 *Ako je X beskonačan tada je $|T_X| = 2^{2^{|X|}}$.*

Dokaz. Kako je $T_X \subset P(P(X))$ jasno je da vrijedi $|T_X| \leq 2^{2^{|X|}}$. Kako je svaka topologija iz T_X infimum ultratopologija na X, na osnovu prethodne teoreme vrijedi i suprotna nejednakost. □

Zanimljivo je da je za razliku od prethodne teoreme dosad nije pronađena formula za određivanje broja topologija konačnog skupa. Neki pojedinačni rezultati su dobijeni. Npr. u [13] je dobijeno da za $|X| = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ili 7 vrijedi $|T_X| = 1, 4, 29, 355, 6942, 209527$ ili 9535241. Koristeći prethodne dvije teoreme u [13] je takođe dobijena procjena : Ako je $|X| = n > 1$ onda je $2^n \leq |T_X| \leq 2^{n(n-1)}$.

Teorema 5.1.6 *[16] Ako je $|X| > 2$, tada mreža T_X nije modularna, pa samim tim ni distributivna.*

Dokaz. Neka je $|X| > 2$ i neka su $x, y, z \in X$ različiti elementi. Posmatranjem topologija $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y)) \wedge \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(z))$, $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(z))$ i $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}(z,\mathcal{U}(y))$, uočava se da $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ i $(\mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_3) \wedge \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_2$ (pošto je $\mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_3$ diskretna topologija). Ali, $\mathcal{O}_1 \vee (\mathcal{O}_3 \wedge \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))$, jer $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))$ i $\mathcal{O}_3 \wedge \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))$ (svaki skup koji sadrži x sadrži i z,i svaki skup koji sadrži z sadrži i y, što daje da svaki skup koji sadrži x sadrži i y), pa kako $\mathcal{O}_2 \nsubseteq \mathcal{O}(x,\mathcal{U}(y))$ to vrijedi $(\mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_3) \wedge \mathcal{O}_2 \nsubseteq \mathcal{O}_1 \vee (\mathcal{O}_3 \wedge \mathcal{O}_2)$, pa T_X nije modularna mreža. □

Teorema 5.1.7 *[13] Ako je $|X| > 3$, onda mreža T_X nije samodualna.*

Dokaz. Za $|X| > 3$ skupovi atoma i koatoma mreže T_X su različite kardinalnosti, pa prema lemi 3.3.2, mreža T_X nije samodualna. □

Grupa mrežnih automorfizama mreže T_X ima relativno jednostavnu strukturu. U [8] je pokazano da ako skup X sadrži jedan ili dva elementa, ili je X beskonačan skup, grupa mrežnih automorfizama od T_X je izomorfna simetričnoj grupi na X; dok u slučaju da je X konačan i sadrži više od dva elementa, grupa mrežnih automorfizama od T_X je izomorfna direktnom proizvodu simetrične grupe na X sa dvoelementnom grupom.

Od svih pitanja u vezi mrežne strukture u T_X pitanje komplementiranja u mreži T_X, tj. pitanje da li za svaku topologiju $\mathcal{O} \in T_X$ postoji topologija $\mathcal{O}' \in T_X$ takva da je $\mathcal{O} \wedge \mathcal{O}'$ antidiskretna, a $\mathcal{O} \vee \mathcal{O}'$ diskretna topologija, pobudilo je najviše interesa. Steiner je u [16] dokazao da je mreža T_X komplementirana, štaviše, pokazao je da svaka topologija ima glavni komplement (komplement koji je glavna topologija). Njegov dokaz je u [16] izložen u tri dijela:

(i) Dokaz da svaka topologija na skupu X ima glavni komplement ukoliko svaka topologija u odnosu na koju je X T_1 topološki prostor, ima glavni komplement;

(ii) Dokaz da svaka topologija u odnosu na koju je skup X T_1 topološki prostor ima glavni komplement ukoliko svaka topologija u odnosu na koju je X T_1 topološki prostor bez izolovanih tačaka (to su tačke $x \in X$ za koje je skup $\{x\}$ otvoren), ima glavni komplement;

(iii) Dokaz da svaka topologija u odnosu na koju je X T_1 topološki prostor bez izolovanih tačaka, ima glavni komplement.

Iako svaka topologija u mreži T_X ima komplement koji je glavna topologija, taj komplement nije jedinstven. Štaviše, u [15] je pokazano da u slučaju da je X konačan i $|X| = n \geq 2$, svaka netrivijalna topologija na X (ona koja je različita od antidiskretne i diskretne topologije) ima najmanje $n-1$ glavnih komplemenata, dok u slučaju beskonačnog skupa X, svaka netrivijalna topologija na X ima najmanje $|X|$, a najviše $2^{|X|}$ glavnih komplemenata.

Za konačan skup X, mreža T_X je konačna, pa je na osnovu primjera 3.4.1, ona neprekidna. Međutim, ukoliko je skup X beskonačan, mreža T_X ne mora biti neprekidna, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 5.1.1. Neka je $X = \omega$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1,3,5,7,...\}, \omega\}$ atom u kompletnoj mreži T_ω i za $n \in \omega$, $\mathcal{O}_n = P(n) \cup \{\omega\}$, gdje je $P(n) = P(\{0,1,...,n-1\})$. Kako za $m \leq n$ vrijedi $\mathcal{O}_m \subset \mathcal{O}_n$, skup $S = \{\mathcal{O}_n : n \in \omega\} \subset T_\omega$ je usmjeren, pa s obzirom da $[\omega]^{<\omega} \in \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{O}_n$, to vrijedi $\sup S = \mathcal{O}[\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{O}_n] = P(\omega)$, tj. $\sup S$ je diskretna topologija. Znači, ispunjeno je $\mathcal{O} \subset \sup S$, ali pritom je za svako $\mathcal{O}_n \in S$ ispunjeno $\mathcal{O} \not\subseteq \mathcal{O}_n$, pa element $\mathcal{O}$ nije izolovan odozdo (tj. za njega ne vrijedi $\mathcal{O} << \mathcal{O}$). Kako je na osnovu leme 3.4.2 (dio (iv)) $\{\emptyset, \omega\} << \mathcal{O}$, to je $\sup \downdownarrows \mathcal{O} = \{\emptyset, \omega\} \neq \mathcal{O}$, pa mreža T_ω nije neprekidna.

Pored mreže T_X intenzivno su proučavane i neke njene podmreže, npr. mreža svih T_1 topologija na skupu X, mreža svih glavnih topologija, itd. Neki dobijeni rezultati mogu se naći npr. u [13].

5.2 Potapanje u mrežu T_X

Teorema 5.2.1 *[7] Svaka mreža sa 1 i 0 se može homomorfno potopiti u mrežu topologija nekog skupa X koristeći potapanje koje preslikava 1 i 0 date mreže respektivno u diskretnu i antidiskretnu topologiju u T_X.*

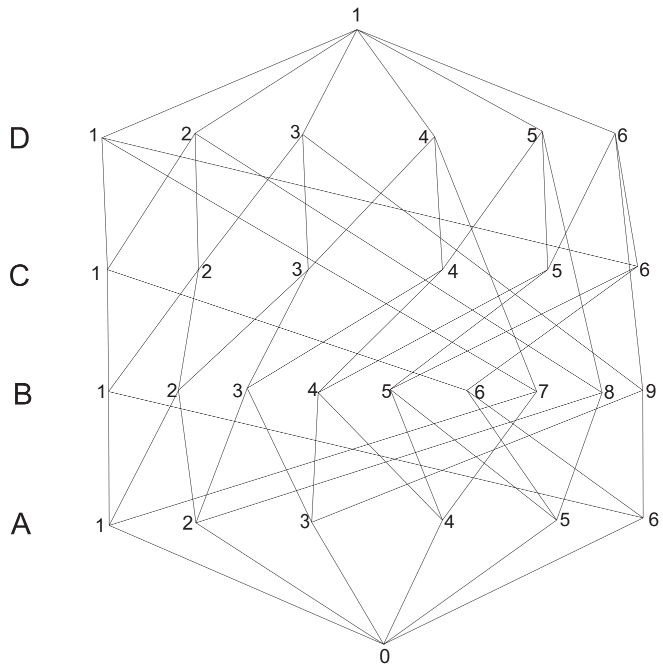
Dokaz. Za dati skup X, mreža $\langle Eq(X), \subset \rangle$ svih relacija ekvivalencije na X iz primjera 3.1.2 jeste kompletna mreža. Ako se razmotri preslikavanje koje svakoj relaciji ekvivalencije θ na skupu X dodjeli topologiju na X generisana sa klasama ekvivalencije od θ kao baznim otvorenim skupovima, tada ovo preslikavanje homomorfno potapa dual mreže $Eq(X)$ u T_X preslikavajući pritom 1 i 0 tog duala (dijagonalu i partitivni skup) u diskretnu i antidiskretnu topologiju respektivno.

Na osnovu prethodnog dovoljno je pokazati da svaka mreža ima odgovarajuće homomorfno potapanje u mrežu $Eq(X)$ za neki skup X, koje čuva 1 i 0 te mreže. Traženo potapanje dobija se uz pomoć teoreme Grätzer-Schmidta koja tvrdi da svaka algebarska mreža jeste izomorfna mreži kongruencije neke univerzalne algebre.

Neka je L mreža sa najvećim i najmanjim elementom 1 i 0. Tada se L može homomorfno potopiti u mrežu svih nepraznih ideala $\mathcal{I}(L)$ koristeći preslikavanje koje elementu $x \in L$ pridružuje glavni ideal $L(x)$. Jasno je da ovo preslikavanje preslikava 1 i 0 mreže L u 1 i 0 mreže $\mathcal{I}(L)$. Kako je $\mathcal{I}(L)$ algebarska mreža, Grätzer-Schmidtova teorema implicira da je mreža $\mathcal{I}(L)$ izomorfna sa mrežom svih kongruencija neke univerzalne algebre A. Dokaz sada slijedi iz činjenice da je mreža kongruencija od A podmreža mreže $Eq(A)$, i da sadrži 1 i 0 te mreže. $\square$

Nameće se prirodno pitanje da li se u prethodnoj teoremi skup X može izabrati tako da bude konačan ako je data mreža konačna. Ponovo, ovo pitanje se može redukovati na utvrđivanje da li data konačna mreža ima odgovarajuće potapanje u $Eq(X)$ za neki konačan skup X. Nažalost, Grätzer-Schmidtova teorema ne pomaže u vezi ovog pitanja, jer proizvodi beskonačne algebre, čak i za konačne mreže. Međutim, Pudlák i Tuma su dokazali da svaka konačna mreža može biti homomorfno potopljena u $Eq(X)$ za neki konačan skup X. Pudlák i Tuma dalje tvrde, bez dokaza, da se njihov metod može produžiti da se dobije potapanje koje čuva 1 i 0. Ova tvrdnja implicira da svaka konačna mreža može biti homomorfno potopljena u mrežu topologija nekog konačnog skupa X putem potapanja koje preslikava 1 i 0 date mreže u redom diskretnu i antidiskretnu topologiju u T_X.

Primjer 5.2.1. Mreža svih topologija na skupu $X = \{x, y, z\}$ može se predstaviti sljedećim dijagramom:



0 – antridiskretna topologija ; 1 – diskretna topologija;

D

1. $\{\emptyset, \{y\}, \{z\}, \{x,z\}, \{y,z\}, X\} = \mathcal{O}(x, \mathcal{U}(z))$;
2. $\{\emptyset, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, X\} = \mathcal{O}(x, \mathcal{U}(y))$;
3. $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z\}, X\} = \mathcal{O}(z, \mathcal{U}(y))$;
4. $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{x,z\}, X\} = \mathcal{O}(z, \mathcal{U}(x))$;
5. $\{\emptyset, \{x\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, X\} = \mathcal{O}(y, \mathcal{U}(x))$;
6. $\{\emptyset, \{x\}, \{z\}, \{x,z\}, \{y,z\}, X\} = \mathcal{O}(y, \mathcal{U}(z))$;

C

1. $\{\emptyset, \{y\}, \{z\}, \{y,z\}, X\}$;
2. $\{\emptyset, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z\}, X\}$;
3. $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, X\}$;
4. $\{\emptyset, \{x\}, \{x,y\}, \{x,z\}, X\}$;
5. $\{\emptyset, \{x\}, \{z\}, \{x,z\}, X\}$;
6. $\{\emptyset, \{z\}, \{x,z\}, \{y,z\}, X\}$;

B

1. $\{\emptyset, \{y\}, \{y,z\}, X\}$;
2. $\{\emptyset, \{y\}, \{x,y\}, X\}$;
3. $\{\emptyset, \{x\}, \{x,y\}, X\}$;
4. $\{\emptyset, \{x\}, \{x,z\}, X\}$;
5. $\{\emptyset, \{z\}, \{x,z\}, X\}$;
6. $\{\emptyset, \{z\}, \{y,z\}, X\}$;
7. $\{\emptyset, \{y\}, \{x,z\}, X\}$;
8. $\{\emptyset, \{z\}, \{x,y\}, X\}$;
9. $\{\emptyset, \{x\}, \{y,z\}, X\}$;

A

1. $\{\emptyset, \{y\}, X\}$;
2. $\{\emptyset, \{x,y\}, X\}$;
3. $\{\emptyset, \{x\}, X\}$;
4. $\{\emptyset, \{x,z\}, X\}$;
5. $\{\emptyset, \{z\}, X\}$;
6. $\{\emptyset, \{y,z\}, X\}$.

Glava 6

Topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X} \rangle$

U ovoj glavi na mreži svih topologija T_X uvedena je topologija $\mathcal{O}_{T_X}$, ispitane su neke njene osobine i odnos sa "mrežnim" topologijama proučavanim u 4. glavi. Većina navedenih rezultata predstavlja originalan doprinos posmatranoj temi.

6.1 01-podmreža Booleove mreže

Neka je $\langle \mathbb{B}, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ Booleova mreža. Skup $L \subset \mathbb{B}$ za koji vrijedi:

(BL1) $0, 1 \in L$;

(BL2) $x \wedge y \in L$, za svako $x, y \in L$;

(BL3) $x \vee y \in L$, za svako $x, y \in L$;

naziva se **01-podmreža** od $\mathbb{B}$.

Lema 6.1.1 *Ako je $\mathbb{B}$ Booleova mreža, onda vrijedi:*

(i) Presjek proizvoljne neprazne familije 01-podmreža od $\mathbb{B}$ je 01-podmreža od $\mathbb{B}$;

(ii) Za svaki skup $A \subset \mathbb{B}$ postoji minimalna 01-podmreža od $\mathbb{B}$ koja sadrži skup A.

Dokaz. (i) Neka je $\{L_i : i \in I\}$ neprazna familija 01-podmreža od $\mathbb{B}$. Za dokaz ovog tvrđenja dovoljno je dokazati da skup $L = \bigcap_{i \in I} L_i$ zadovoljava uslove (BL1)-(BL3). Kako $0, 1 \in L_i$, za sve $i \in I$, vrijedi $0, 1 \in L$ i uslov (BL1) je zadovoljen. Ako $x, y \in L$, onda za svako $i \in I$ vrijedi $x, y \in L_i$, pa vrijedi $a \wedge b \in L_i$ i $a \vee b \in L_i$. Zbog toga $a \wedge b \in L$ i $a \vee b \in L$, pa su i uslovi (BL2) i (BL3) takođe ispunjeni.

(ii) Neka je $\mathcal{L}$ familija svih 01-podmreža od $\mathbb{B}$ koje sadrže A. Familija $\mathcal{L}$ je neprazna (pošto joj pripada $\mathbb{B}$) pa, prema (i), $\bigcap \mathcal{L}$ jeste 01-podmreža od $\mathbb{B}$. Jasno, $\bigcap \mathcal{L}$ sadrži A i to je najmanja 01-podmreža od $\mathbb{B}$ sa ovim svojstvom. □

Minimalna 01-podmreža Bulove mreže $\mathbb{B}$ koja sadrži podskup $A \subset \mathbb{B}$ biće označena sa $L[A]$.

Lema 6.1.2 *Ako je $\mathbb{B}$ Booleova mreža i $A \subset \mathbb{B}$, onda je:*

$$L[A] = \{0,1\} \cup$$

$$\Big\{ \bigvee_{i=0}^{m} \bigwedge_{j=0}^{n_i} a_{ij} : m \in \omega \wedge n_0, \dots, n_m \in \omega \wedge \; \forall i \le m \;\; \forall j \le n_i \;\; a_{ij} \in A \Big\}.$$

Specijalno, ako je skup A konačan, onda je i $L[A]$ konačan skup.

Dokaz. ($\supset$) Kako je $L[A]$ 01-podmreža od $\mathbb{B}$, to vrijedi $0, 1 \in L[A]$, pa je ispunjen uslov (BL1). Neka je $m \in \omega$, $n_0, \dots, n_m \in \omega$ i $a_{ij} \in A$, za $i \le m$ i $j \le n_i$. Kako $A \subset L[A]$ i $L[A]$ zadovoljava (BL2), za svako $i \le m$ vrijedi $\bigwedge_{j=0}^{n_i} a_{ij} \in L[A]$. Konačno, kako $L[A]$ zadovoljava (BL3), slijedi da je $\bigvee_{i=0}^{m} \bigwedge_{j=0}^{n_i} a_{ij} \in L[A]$.

($\subset$) Dovoljno je dokazati da je

$$L = \{0,1\} \cup$$

$$\Big\{ \bigvee_{i=0}^{m} \bigwedge_{j=0}^{n_i} a_{ij} : m \in \omega \wedge n_0, \dots, n_m \in \omega \wedge \; \forall i \le m \;\; \forall j \le n_i \;\; a_{ij} \in A \Big\}$$

01-podmreža od $\mathbb{B}$ koja sadrži A. Jasno da vrijedi $A \subset L$; uslov (BL1) slijedi iz definicije skupa L, dok uslovi (BL2) i (BL3) slijede iz distributivnosti $\wedge$ prema $\vee$ i asocijativnosti $\vee$ respektivno. □

Lema 6.1.3 *Neka je X neprazan skup. Ako je $A_1, \dots, A_m \subset X$, tada je 01-podmreža $L[\{A_1, \dots, A_m\}]$ Booleove mreže $\langle P(X), \cap, \cup, ^c, \emptyset, X \rangle$ minimalna topologija na X koja sadrži skupove $A_1, \dots, A_m$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Kako je, prema prethodnoj lemi, $L[\mathcal{A}]$ konačna 01-podmreža od $P(X)$, i kako su svojstva (O1)-(O3) iz definicije topologije ispunjena, to je $L[\mathcal{A}]$ ujedno i topologija na X koja sadrži familiju $\mathcal{A}$. Dakle, vrijedi $O[\mathcal{A}] \subset L[\mathcal{A}]$. S druge strane, iz svojstava (O1)-(O3) topologije $O[\mathcal{A}]$ slijedi da je to jedna 01-podmreža od $P(X)$ koja sadrži familiju $\mathcal{A}$, te vrijedi i suprotna inkluzija $L[\mathcal{A}] \subset O[\mathcal{A}]$. □

Lema 6.1.4 *Neka je X neprazan skup i $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots B_n \subset X$. Onda su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) Postoji topologija $\mathcal{O}$ na skupu X koja zadovoljava uslov:

$$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{O} \not\ni B_1, \dots B_n; \tag{6.1}$$

(ii) $L[\{A_1, \dots, A_m\}] \cap \{B_1, \dots, B_n\} = \emptyset$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ako postoji topologija $\mathcal{O}$ koja zadovoljava uslov (6.1), tada, prema prethodnoj lemi, $L[\{A_1, \dots, A_m\}] \subset \mathcal{O}$. Jasno da je tada ispunjeno i $B_1, \dots, B_n \notin L[\{A_1, \dots, A_m\}]$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Prema prethodnoj lemi $\mathcal{O} = L[\{A_1, \dots, A_m\}]$ je topologija na X koja zbog pretpostavke ne sadrži skupove $B_1, \dots B_n$. Dakle, $\mathcal{O}$ je topologija koja zadovoljava uslov (6.1). □

Primjer 6.1.1. Moguće je naći skupove X i $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots B_n \subset X$ tako da postoji topologija na X koja zadovoljava uslov (6.1) iz leme 6.1.4, ali da ne postoji maksimalna topologija (u smislu relacije inkluzije) na X koja zadovoljava taj uslov.

Naime, ako je $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_1 = \{0\}$ i $B_1 = \{2\}$, onda topologije

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, X\} \\ \mathcal{O}_2 &= \{\emptyset, \{0\}, \{2, 3\}, \{0, 2, 3\}, X\} \end{aligned}$$

zadovoljavaju uslov (6.1), tj. vrijedi $A_1 \in \mathcal{O}_1 \not\ni B_1$ i $A_1 \in \mathcal{O}_2 \not\ni B_1$, ali za svaku topologiju $\mathcal{O}$ na X koja u smislu relacije inkluzije sadrži topologije $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$, vrijedi $B_1 \in \mathcal{O}$, pa takva topologija $\mathcal{O}$ ne zadovoljava uslov (6.1).

6.2 Topologija $\mathcal{O}_{T_X}$

Za disjunktne, konačne (moguće prazne) familije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ podskupova skupa X neka je skup $B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \subset T_X$ definisan sa

$$B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{O} \in T_X : \forall A \in \mathcal{A} \ \ (A \in \mathcal{O}) \wedge \forall B \in \mathcal{B} \ \ (B \notin \mathcal{O})\}.$$

Onda, prema lemi 6.1.4, $B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ ako i samo ako $L[\mathcal{A}] \cap \mathcal{B} = \emptyset$; specijalno, $B^{\emptyset}_{\emptyset} = T_X$ i $B^{\emptyset}_{\{\emptyset\}} = \emptyset$.

Teorema 6.2.1 *Neka je X neprazan skup. Tada vrijedi*

(i) Familija $\mathcal{B}_{T_X}$ svih skupova oblika $B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, gdje su $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ disjunktne, konačne familije podskupova od skupa X, je baza neke topologije, $\mathcal{O}_{T_X}$, na skupu T_X;

(ii) Topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ je nula-dimenzionalan;

(iii) Ako je skup X konačan, onda je topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ diskretan.

Dokaz. (i) Na osnovu leme 2.1.3 treba dokazati da familija $\mathcal{B}_{T_X}$ zadovoljava uslove (B1') and (B2"). Uslov (B1') je ispunjen, jer $\mathcal{B}_{T_X} \ni B^{\emptyset}_{\emptyset} = T_X$ povlači $\bigcup \mathcal{B}_{T_X} = T_X$. Pretpostavimo da $B^{\mathcal{A}_1}_{\mathcal{B}_1}, B^{\mathcal{A}_2}_{\mathcal{B}_2} \in \mathcal{B}_{T_X}$ i $\mathcal{O} \in B^{\mathcal{A}_1}_{\mathcal{B}_1} \cap B^{\mathcal{A}_2}_{\mathcal{B}_2}$. Tada $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{O}$ i $(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cap \mathcal{O} = \emptyset$ pa su familije $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ i $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ konačne i disjunktne, što povlači da $B^{\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2}_{\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2} \in \mathcal{B}_{T_X}$. Štaviše, $\mathcal{O} \in B^{\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2}_{\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2} \subset B^{\mathcal{A}_1}_{\mathcal{B}_1} \cap B^{\mathcal{A}_2}_{\mathcal{B}_2}$, pa uslov (B2") takođe vrijedi.

(ii) Prvo se dokazuje da je $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ Hausdorffov prostor. Neka su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ dva različita elementa od T_X. Ako postoji skup $A \in \mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_2$, onda su skupovi $B^{\{A\}}_{\emptyset}$ and $B^{\emptyset}_{\{A\}}$ otvoreni, disjunktni i sadrže $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ respektivno. Slično se dokazuje i u slučaju kada $A \in \mathcal{O}_2 \setminus \mathcal{O}_1$.

Za kompletiranje dokaza ovog tvrđenja, dovoljno je dokazati da su elementi baze topologije B_{T_X} zatvoreni skupovi. Neka je $B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \in B_{T_X}$ proizvoljno i $\mathcal{O} \in T_X \setminus B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$. Tada ili $A \notin \mathcal{O}$ za neko $A \in \mathcal{A}$ što povlači $\mathcal{O} \in B^{\emptyset}_{\{A\}} \subset T_X \setminus B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, ili $B \in \mathcal{O}$ za neko $B \in \mathcal{B}$ što povlači $\mathcal{O} \in B^{\{B\}}_{\emptyset} \subset T_X \setminus B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$. U oba slučaja, dobija se da je skup $T_X \setminus B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ okolina svake svoje tačke, pa je, prema lemi 2.1.5, on otvoren.

(iii) Ako je skup X konačan, tada je i skup T_X konačan. Kako je topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ Hausdorffov, on je premi lemi 2.3.4 ujedno i T_1 prostor, te je prema lemi 2.3.2 diskretan. □

Na osnovu prethodne teoreme i leme 2.3.3 direktno se dobija sljedeća teorema.

Teorema 6.2.2 *Topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.*

U narednoj teoremi biće uspostavljena veza između osnovnih kardinalnih funkcija na topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$.

Teorema 6.2.3 *(i) Za neprazan konačan skup X vrijedi*

$$d(T_X) = w(T_X) = |T_X| < 2^{2^{|X|}}.$$

(ii) Za beskonačan skup X vrijedi

$$d(T_X) \leq w(T_X) = 2^{|X|} < |T_X| = 2^{2^{|X|}}.$$

Specijalno, $d(T_\omega) \leq w(T_\omega) = \mathfrak{c} < |T_\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dokaz. (i) Na osnovu prethodne teoreme (dio (iii)), u ovom slučaju topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ je diskretan, što implicira da je $d(T_X) = w(T_X) = |T_X|$. Kako je $\{\emptyset\} \in P(P(X)) \setminus T_X$, to se dobija $T_X \subsetneq P(P(X))$, pa kako su ovi skupovi konačni, to vrijedi i nejednakost $|T_X| < 2^{2^{|X|}}$.

(ii) Nejednakost $d(X) \leq w(X)$ vrijedi prema lemi 2.1.6, dio (i).

Baza topologije $\mathcal{B}_{T_X}$ je indeksirana podskupom skupa $[P(X)]^{<\omega} \times [P(X)]^{<\omega}$, pa kako je skup $P(X)$ beskonačan, to, prema lemi 1.1.5 i teoremi 1.1.2, vrijedi $|\mathcal{B}_{T_X}| \leq |[P(X)]^{<\omega} \times [P(X)]^{<\omega}| = |[P(X)]^{<\omega}| = |P(X)| = 2^{|X|}$, pa je $w(T_X) \leq 2^{|X|}$.

Pretpostavimo da je $\kappa = w(T_X) < 2^{|X|}$. Tada, prema lemi 2.1.7, postoji baza $\mathcal{B} = \{B^{\mathcal{A}_\alpha}_{\mathcal{B}_\alpha} : \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{B}_{T_X}$ topologije $\mathcal{O}_{T_X}$ koja je kardinalnosti κ. Kako su, prema definiciji te baze, skupovi $L[\mathcal{A}_\alpha] \cup \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha < \kappa$, konačni, to vrijedi $|\bigcup_{\alpha<\kappa}(L[\mathcal{A}_\alpha] \cup \mathcal{B}_\alpha)| \leq \kappa < 2^{|X|}$, pa postoji skup $A \in P(X) \setminus \bigcup_{\alpha<\kappa}(L[\mathcal{A}_\alpha] \cup \mathcal{B}_\alpha)$. S obzirom da je $B^{\{A\}}_{\emptyset}$ neprazan, otvoren skup u $\mathcal{O}_{T_X}$ i $\mathcal{B}$ baza te topologije, to za neko $I \subset \kappa$ vrijedi $B^{\{A\}}_{\emptyset} = \bigcup_{\alpha\in I} B^{\mathcal{A}_\alpha}_{\mathcal{B}_\alpha}$. To dalje implicira postojanje $\beta \in I$ takvog da $\emptyset \neq B^{\mathcal{A}_\beta}_{\mathcal{B}_\beta} \subset B^{\{A\}}_{\emptyset}$. No, time se dobija da $L[\mathcal{A}_\beta] \in B^{\mathcal{A}_\beta}_{\mathcal{B}_\beta} \subset B^{\{A\}}_{\emptyset}$, pa je $A \in L[\mathcal{A}_\beta]$, što je kontradikcija sa izborom skupa A. Dakle, vrijedi $w(T_X) = 2^{|X|}$. Na osnovu teoreme 5.1.5 se dobija $w(T_X) < |T_X| = 2^{2^{|X|}}$. $\square$

Iz prethodne teoreme direktno slijedi sljedeća teorema.

Teorema 6.2.4 *Za beskonačan skup X, topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ ne zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.*

Pitanje 1. Da li je topološki prostor $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega}\rangle$ separabilan?

Sljedeća teorema otkriva prirodu topološkog prostora $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$.

Teorema 6.2.5 *Neka je X neprazan skup. Tada je funkcija $f : T_X \to 2^{P(X)}$ definisana sa*

$$f(\mathcal{O})[S] = \begin{cases} 1, & \text{ako } S \in \mathcal{O} \\ 0, & \text{ako } S \in P(X) \setminus \mathcal{O} \end{cases}$$

potapanje topološkog prostora $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ u Cantorov kub $2^{P(X)}$.

Dokaz. Na osnovu leme 2.2.4, dovoljno je pokazati da je surjektivna restrikcija $f|T_X : T_X \to f[T_X]$ neprekidno, otvoreno i injektivno preslikavanje.

f je injekcija, jer za različite elemente $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ od T_X postoji $S \in \mathcal{O}_1 \Delta \mathcal{O}_2$, pa prema definiciji preslikavanja f vrijedi $f(\mathcal{O}_1)[S] \neq f(\mathcal{O}_2)[S]$. Ovo znači da je restrikcija $f|T_X$ takođe injekcija.

Za $\mathcal{O} \in T_X$ vrijedi da $\mathcal{O} \in f^{-1}[\pi_S^{-1}[\{0\}]]$ ako i samo ako $f(\mathcal{O})[S] = 0$, ako i samo ako $S \notin \mathcal{O}$, ako i samo ako $\mathcal{O} \in B^{\emptyset}_{\{S\}}$. Slično se dokazuje da $\mathcal{O} \in f^{-1}[\pi_S^{-1}[\{1\}]]$ ako i samo ako $\mathcal{O} \in B^{\{S\}}_{\emptyset}$. Dakle, vrijedi

$$f^{-1}[\pi_S^{-1}[\{0\}]] = B^{\emptyset}_{\{S\}}, \qquad f^{-1}[\pi_S^{-1}[\{1\}]] = B^{\{S\}}_{\emptyset}. \tag{6.2}$$

Kako se podbaza topologije Tihonova na $2^{P(X)}$ sastoji od skupova oblika $\pi_S^{-1}[\{i\}]$ za $i = 0, 1$, funkcija f i njena surjektivna restrikcija $f|T_X$ jesu neprekidne funkcije.

S obzirom da se podbaza topologije $\mathcal{O}_{T_X}$ sastoji od skupova oblika $B^{\{S\}}_{\emptyset}$ i $B^{\emptyset}_{\{S\}}$, i kako za svako $B \subset 2^{P(X)}$ vrijedi $f[f^{-1}[B]] = B \cap f[T_X]$, to se iz uslova (6.2) dobija da

$$(f|T_X)[B^{\emptyset}_{\{S\}}] = f[B^{\emptyset}_{\{S\}}] = \pi_S^{-1}[\{0\}] \cap f[T_X],$$

$$(f|T_X)[B^{\{S\}}_{\emptyset}] = f[B^{\{S\}}_{\emptyset}] = \pi_S^{-1}[\{1\}] \cap f[T_X]$$

što znači da restrikcija $f|T_X$ preslikava svaki element pomenute podbaze na otvoren skup u potprostoru $f[T_X]$ prostora $2^{P(X)}$. Kako za svaku injekciju g vrijedi $g[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} g[A_i]$, to funkcija $f|T_X$ preslikava elemente baze $\mathcal{B}_{T_X}$ i, samim tim, sve elemente od $\mathcal{O}_{T_X}$, na otvorene skupove potprostora $f[T_X]$ prostora $2^{P(X)}$. Dakle, $f|T_X$ je otvoreno preslikavanje. $\square$

Na osnovu prethodne teoreme direktno slijedi sljedeća teorema.

Teorema 6.2.6 *Topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X} \rangle$ je homeomorfan potprostoru Cantorovog kuba $2^{P(X)}$.*

Da topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X} \rangle$ ne mora biti kompaktan za beskonačan skup X pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 6.2.1. Neka je za $n \in \omega$, familija $\{F_n : n \in \omega\} \subset T_\omega$ definisana sa $F_n = B^{\{P(n)\}}_{\{\{1,3,5,\ldots\}\}}$. Tada se na osnovu definicije te familije i teoreme 6.2.1, dio (ii), dobija da je familija $\{F_n : n \in \omega\} \subset T_\omega$ familija zatvorenih skupova. S obzirom da je za $m \leq n$ ispunjeno $P(m) \subset P(n)$, ova familija ima s.k.p., ali ima prazan presjek, jer u suprotnom, za topologiju $\mathcal{O} \in \bigcap_{n \in \omega} F_n$ vrijedi da je, za svako $n \in \omega$, ispunjeno $P(n) \in \mathcal{O}$, pa se dobija:

$$[\omega]^{<\omega} \in \mathcal{O} \text{ i } \{1,3,5,...\} \notin \mathcal{O}$$

što implicira da je $\mathcal{O} = P(\omega)$ i $\{1,3,5,...\} \notin \mathcal{O}$ dajući kontradikciju. Dakle, familija $\{F_n : n \in \omega\} \subset T_\omega$ je familija zatvorenih skupova sa s.k.p. koja ima prazan presjek, pa prema lemi 2.4.1, topološki prostor $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega}\rangle$ nije kompaktan.

Na osnovu lema 2.4.8 i 2.7.3 i teoreme i 6.2.5 dobija se sljedeća teorema.

Teorema 6.2.7 *Za beskonačan skup X, topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ ima kompaktifikaciju težine $2^{|X|}$.*

Topologija $\mathcal{O}_{T_X}$ se može, kao i svaka druga topologija iz skupa T_X, prikazati kao infimum određenog skupa koatoma mreže T_X. Drugačije rečeno, postoji određen skup ultratopologija čiji presjek daje topologiju $\mathcal{O}_{T_X}$. Sljedeća lema ukazuje da u tom skupu nema glavnih ultratopologija.

Lema 6.2.1 *Topologija $\mathcal{O}_{T_X}$ nije sadržana ni u jednoj glavnoj ultratopologiji.*

Dokaz. Topološki prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ je, prema teoremi 6.2.1, Hausdorffov, pa bi u slučaju postojanja glavne ultratopologije koja sadrži topologiju $\mathcal{O}_{T_X}$, prostor T_X u odnosu na tu topologiju takođe bio Hausdorffov. No, ovo je kontradikcija sa lemama 2.3.4 i 5.1.2. $\square$

Na osnovu prethodne leme može se zaključiti da u reprezentaciji topologije $\mathcal{O}_{T_X}$ preko koatoma mreže T_X učestvuju samo neglavne ultratopologije. Na taj način, za dalje ispitivanje topologije $\mathcal{O}_{T_X}$, od značaja su topološka svojstva koja vrijede u ovim ultratopologijama.

6.3 Konvergencija u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$

Konvergencija u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ je okarakterisana sljedećom teoremom.

Teorema 6.3.1 *Neka je X neprazan skup, $\langle \mathcal{O}_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ mreža u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$ i $\mathcal{O} \in T_X$. Onda su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\lim_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}$;

(ii) $\underline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma = \overline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka je $\lim_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}$. Ako $A \in \mathcal{O}$, onda je $B_\emptyset^{\{A\}}$ okolina od $\mathcal{O}$ u T_X, pa postoji $\sigma \in \Sigma$ tako da za svako $\rho \geq \sigma$ vrijedi $\mathcal{O}_\rho \in B_\emptyset^{\{A\}}$, tj. da $A \in \mathcal{O}_\rho$. Zbog toga $A \in \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcap_{\rho\geq\sigma}\mathcal{O}_\rho$ čime je dokazano da vrijedi:

$$\mathcal{O} \subset \underline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma. \tag{6.3}$$

Ako $A \notin \mathcal{O}$, onda je $B^\emptyset_{\{A\}}$ okolina od $\mathcal{O}$ u T_X, pa postoji $\sigma \in \Sigma$ tako da vrijedi $\mathcal{O}_\rho \in B^\emptyset_{\{A\}}$, tj. da $A \notin \mathcal{O}_\rho$, za svako $\rho \geq \sigma$. Zbog toga vrijedi: $A \in \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcap_{\rho\geq\sigma} P(X)\setminus\mathcal{O}_\rho = P(X)\setminus\limsup_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma$ čime je dokazano da vrijedi:

$$\overline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma \subset \mathcal{O} \tag{6.4}$$

Uslov (ii) sada slijedi iz uslova (6.3), (6.4) i leme 2.5.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Neka vrijedi uslov (ii) i neka je U okolina tačke $\mathcal{O}$ u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$. Tada postoji bazni otvoren skup $B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}_{T_X}$, gdje je $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_k\}$ i $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_l\}$, za $k, l \in \omega$, tako da vrijedi $\mathcal{O} \in B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \subset U$. Za $i \leq k$ vrijedi $A_i \in \mathcal{O} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcap_{\rho\geq\sigma}\mathcal{O}_\rho$, te se odabira $\sigma_i \in \Sigma$ tako da vrijedi:

$$\forall\rho \geq \sigma_i \;\; A_i \in \mathcal{O}_\rho. \tag{6.5}$$

Za $j \leq l$ vrijedi $B_j \notin \mathcal{O} = \bigcap_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{\rho\geq\sigma}\mathcal{O}_\rho$ te se odabira $\sigma'_j \in \Sigma$ tako da vrijedi:

$$\forall\rho \geq \sigma'_j \;\; B_j \notin \mathcal{O}_\rho. \tag{6.6}$$

Kako je $\langle\Sigma, \leq\rangle$ usmjeren skup, to postoji $\sigma^* \in \Sigma$ tako da $\sigma_1, ..., \sigma_k, \sigma'_1, ..., \sigma'_l \leq \sigma^*$. Dakle, prema uslovima (6.5) i (6.6), za $\rho \geq \sigma^*$ vrijedi $\mathcal{O}_\rho \in B^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \subset U$, što implicira da je $\lim_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}$. □

Na osnovu prethodne teoreme direktno slijedi sljedeća teorema.

Teorema 6.3.2 *Neka je X neprazan skup i neka je $\langle\mathcal{O}_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ mreža u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) Mreža $\langle\mathcal{O}_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ konvergira;

(ii) $\underline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma = \overline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}$, i familija $\mathcal{O}$ je topologija na skupu X.

Primjer 6.3.1. Moguće je konstruisati mrežu $\langle\mathcal{O}_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ koja ne konvergira u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$, za koju je $\underline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma = \overline{\lim}_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}_\sigma$. Neka je $X = \omega$ i, za $n \in \omega$, neka je topologija $\mathcal{O}_n$ na X definisana sa $\mathcal{O}_n = P(n) \cup \{\omega\}$.

Tada je $\langle \mathcal{O}_n : n \in \omega\rangle$ mreža (štaviše, niz) u topološkom prostoru $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega}\rangle$, tako da je za $m \leq n$ ispunjeno $\mathcal{O}_m \subset \mathcal{O}_n$. Za datu mrežu vrijedi:

$$\underline{\lim}_{n\in\omega}\mathcal{O}_n = \bigcup_{m\in\omega}\bigcap_{n\geq m}(P(n)\cup\{\omega\}) = \bigcup_{m\in\omega}(P(m)\cup\{\omega\}) = [\omega]^{<\omega}\cup\{\omega\}$$

i

$$\overline{\lim}_{n\in\omega}\mathcal{O}_n = \bigcap_{m\in\omega}\bigcup_{n\geq m}(P(n)\cup\{\omega\}) = \bigcap_{m\in\omega}([\omega]^{<\omega}\cup\{\omega\}) = [\omega]^{<\omega}\cup\{\omega\},$$

ali $[\omega]^{<\omega}\cup\{\omega\}$ nije topologija na ω, jer vrijedi:

$$\{2n : n\in\omega\} = \bigcup_{n\in\omega}\{2n\} \notin [\omega]^{<\omega}\cup\{\omega\}.$$

Dakle, prema prethodnoj teoremi, posmatrana mreža ne konvergira u topološkom prostoru $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega}\rangle$.

6.4 Odnosi između topologija na mreži T_X

S obzirom da je mreža $\langle T_X, \wedge, \vee\rangle$ kompletna, na njoj se mogu uvesti sve topologije koje su razmatrane u ovom radu (gornja, donja, intervalna, Scottova, Lawsonova). Naravno, ovo znači da sva tvrđenja u vezi ovih topologija koja su ranije dokazana u slučaju kompletnih mreža, vrijede i za mrežu T_X. Takođe je interesantno ispitivati odnos ovih topologija prema uvedenoj topologiji $\mathcal{O}_{T_X}$.

U slučaju da je skup X konačan, dobija se da je i skup T_X konačan, pa s obzirom da su intervalna, Lawsonova, topologija poretka T_1 topologije, to je na osnovu leme 2.3.2, prostor T_X u odnosu na ove topologije diskretan. Prema teoremi 6.2.1, dio (iii), takav je i prostor $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$, pa su u slučaju konačnog skupa X, sve topologije jednake. Zbog toga će se u narednom posmatrati mreža T_X, za beskonačan skup X. Akcenat u primjerima će, kao i ranije, biti bačen na kompletnu mrežu T_ω.

6.4.1 Odnos između O_{T_X} i intervalne topologije

Sljedeća teorema daje odnos između topologija $\mathcal{O}_{T_X}$ i $\mathcal{O}_{interv}$ na mreži T_X.

Teorema 6.4.1 *(i) Svaki podbazni zatvoren skup $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ u intervalnoj topologiji na mreži T_X je zatvoren i u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X}\rangle$;*

(ii) $\mathcal{O}_{interv} \subset \mathcal{O}_{T_X}$.

Dokaz. (i) Treba pokazati da je skup $T_X \setminus [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ otvoren skup u topologiji $\mathcal{O}_{T_X}$, za svaki podbazni zatvoren skup $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ u intervalnoj topologiji na mreži T_X. Neka je $\mathcal{O} \in T_X \setminus [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ proizvoljno. Tada je $\mathcal{O}_1 \not\subset \mathcal{O}$ ili $\mathcal{O} \not\subset \mathcal{O}_2$.

Ukoliko je $\mathcal{O}_1 \not\subset \mathcal{O}$, tada postoji $A \in \mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}$, pa za $B^{\emptyset}_{\{A\}} \in \mathcal{B}_{T_X}$ vrijedi $\mathcal{O} \in B^{\emptyset}_{\{A\}}$, odakle je $B^{\emptyset}_{\{A\}} \cap [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \emptyset$.

Ukoliko je $\mathcal{O} \not\subset \mathcal{O}_2$, tada postoji $B \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_2$, pa za $B^{\{B\}}_{\emptyset} \in \mathcal{B}_{T_X}$ vrijedi $\mathcal{O} \in B^{\{B\}}_{\emptyset}$, odakle je $B^{\{B\}}_{\emptyset} \cap [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \emptyset$.

U oba prethodna slučaja je, prema lemi 2.1.5, skup $T_X \setminus [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ otvoren u topologiji $\mathcal{O}_{T_X}$.

(ii) Slijedi direktno iz tvrđenja (i) i činjenice da su konačne unije i proizvoljni presjeci zatvorenih intervala u mreži $\langle T_X, \wedge, \vee \rangle$ zatvoreni skupovi u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X} \rangle$. □

6.4.2 Odnos između O_{T_X} i Scottove topologije. Odnos između O_{T_X} i Lawsonove topologije

Teorema 6.4.2 *(i) Svaki zatvoren skup u Scottovoj topologiji na mreži T_X je zatvoren i u topološkom prostoru $\langle T_X, \mathcal{O}_{T_X} \rangle$;*

(ii) $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}_{T_X}$.

Dokaz. (i) Neka je $F = \{\mathcal{O}_i \in T_X : i \in I\}$ zatvoren skup u Scottovoj topologiji. Tada je, prema teoremi 4.3.1, dio (i), skup F donji skup koji je zatvoren u odnosu na uzimanje usmjerenih supremuma. Neka je $\mathcal{O} \in T_X \setminus F$ proizvoljno. Kako je F donji skup, to za svako $i \in I$ vrijedi $\mathcal{O} \not\subseteq \mathcal{O}_i$, pa je za svako $i \in I$ moguće izabrati skup $A_i \subset X$ takav da je $A_i \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_i$. Neka je $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$.

Ako postoji $i_0 \in I$ takav da za sve $i \in I$ vrijedi $A_{i_0} \notin \mathcal{O}_i$, tada za $B^{\{A_{i_0}\}}_{\emptyset} \in \mathcal{B}_{T_X}$ vrijedi $\mathcal{O} \in B^{\{A_{i_0}\}}_{\emptyset}$ i $B^{\{A_{i_0}\}}_{\emptyset} \cap F = \emptyset$.

Neka svaki član familije $\mathcal{A}$ pripada nekoj topologiji iz skupa F. Kako je F donji skup, ovo implicira da za skup atoma $S = \{\{\emptyset, A_i, X\} : A_i \in \mathcal{A}\}$ vrijedi $S \subset F$. Skup S ne može biti usmjeren, jer s obzirom da je skup F zatvoren u odnosu na uzimanje usmjerenih supremuma, vrijedilo bi da je $\mathcal{O}' = \sup S \in F$ topologija koja sadrži familiju $\mathcal{A}$, što je kontradikcija sa izborom te familije. Zbog toga postoje indeksi $i, j \in I$ takvi da $\{\emptyset, A_i, X\} \vee \{\emptyset, A_j, X\} \notin F$, odakle se dobija da nijedna topologija iz skupa F ne sadrži istovremeno skupove A_i i A_j, pa u ovom slučaju vrijedi $\mathcal{O} \in B^{\{A_i, A_j\}}_{\emptyset} \subset T_X \setminus F$.

Dakle, u oba slučaja skup $T_X \setminus F$ je okolina svake svoje tačke, te je, prema lemi 2.1.5, on otvoren u topologiji $\mathcal{O}_{T_X}$.

(ii) Na osnovu prethodne teoreme (dio (ii)) vrijedi $\mathcal{O}_l \subset \mathcal{O}_{interv} \subset \mathcal{O}_{T_X}$, a na osnovu dijela (i) ove teoreme je $\mathcal{O}_\sigma \subset \mathcal{O}_{T_X}$. Dakle, vrijedi $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}[\mathcal{O}_l \cup \mathcal{O}_\sigma] \subset \mathcal{O}_{T_X}$. □

6.4.3 Odnos između O_{T_X} i topologije poretka

S obzirom da će se u narednom uglavnom koristiti mreže, to će se u daljnjem konvergencija poretka interpretirati na "jeziku" mreža.

Neka je $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ kompletna mreža, Σ usmjeren skup i $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ mreža u L. Tada su, kao kod ultrafiltera, zbog kompletnosti, sljedeći elementi dobro definisani:

$$\liminf_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma = \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigwedge_{\rho\geq\sigma} x_\rho,$$
$$\limsup_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma = \bigwedge_{\sigma\in\Sigma} \bigvee_{\rho\geq\sigma} x_\rho.$$

Mreža $\langle y_\tau : \tau \in T\rangle$ je **podmreža** mreže $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ ako postoji funkcija $f : T \to \Sigma$ za koju vrijede sljedeći uslovi:

(SN1) $\forall\tau \in T \;\; y_\tau = x_{f(\tau)}$;

(SN2) $\forall\sigma \in \Sigma \;\; \exists\tau \in T \;\; \forall\tau' \geq \tau \;\; f(\tau') \geq \sigma$.

Lema 6.4.1 *Neka je $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ kompletna mreža. Tada:*

(i) Za svaku mrežu $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ vrijedi

$$\liminf_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma \leq \limsup_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma.$$

(ii) Ako je $\langle y_\tau : \tau \in T\rangle$ podmreža mreže $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ onda vrijedi

$$\limsup_{\tau\in T} y_\tau \leq \limsup_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma.$$
$$\liminf_{\tau\in T} y_\tau \geq \liminf_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma.$$

Dokaz. (i) Ako $\sigma, \tau \in \Sigma$ i $\rho_0 \in \Sigma$, gdje $\sigma, \tau \leq \rho_0$, onda $\bigwedge_{\rho\geq\sigma} x_\rho \leq x_{\rho_0} \leq \bigvee_{\rho\geq\tau} x_\rho$. Zbog toga za svako $\sigma, \tau \in \Sigma$ vrijedi:

$$\bigwedge_{\rho\geq\sigma} x_\rho \leq \bigvee_{\rho\geq\tau} x_\rho. \tag{6.7}$$

Kako uslov (6.7) vrijedi za svako $\sigma \in \Sigma$, dalje se za svako $\tau \in \Sigma$ dobija da vrijedi $\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigwedge_{\rho\geq\sigma} x_\rho \leq \bigvee_{\rho\geq\tau} x_\rho$, implicirajući da je $\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigwedge_{\rho\geq\sigma} x_\rho \leq \bigwedge_{\tau\in\Sigma} \bigvee_{\rho\geq\tau} x_\rho$, tj. da je $\liminf_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma \leq \limsup_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$.

(ii) Neka je $\sigma \in \Sigma$ proizvoljno. Prema svojstvu (SN2) iz definicije podmreže, postoji $\tau_\sigma \in T$ takav da je $f(\tau') \geq \sigma$, za sve $\tau' \geq \tau_\sigma$, što implicira da je

$$\{y_{\tau'} : \tau' \geq \tau_\sigma\} = \{x_{f(\tau')} : \tau' \geq \tau_\sigma\} \subset \{x_{\sigma'} : \sigma' \geq \sigma\}$$

zbog čega je ispunjeno $\bigwedge_{\tau \in T} \bigvee_{\tau' \geq \tau} y_{\tau'} \leq \bigvee_{\tau' \geq \tau_\sigma} y_{\tau'} \leq \bigvee_{\sigma' \geq \sigma} x_{\sigma'}$. S obzirom da ovo vrijedi za svako $\sigma \in \Sigma$, to se dobija da je

$$\bigwedge_{\tau \in T} \bigvee_{\tau' \geq \tau} y_{\tau'} \leq \bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \bigvee_{\sigma' \geq \sigma} x_{\sigma'}$$

pa je prva nejednakost ispunjena. Dokaz druge nejednakosti je sličan. $\square$

Mreža $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ na kompletnoj mreži L **konvergira u smislu poretka** ka elementu $x \in L$ ako je $\liminf_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma = \limsup_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma = x$. Dalje se, kao i u slučaju ultrafiltera, definiše familija $\mathcal{C} \subset P(L)$ koju čine skupovi $A \subset L$ sa svojstvom da za svaku mrežu $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ na A, koja konvergira ka $x \in L$, vrijedi da $x \in A$. Za familiju $\mathcal{C}$ se, slično kao u lemi 4.5.1, može pokazati da je to familija zatvorenih skupova, koja generiše topologiju poretka u smislu leme 2.1.2.

Analogno lemi 4.5.3 vrijedi sljedeća lema.

Lema 6.4.2 *Neka je $\langle L, \leq \rangle$ kompletna mreža. Ako mreža $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ na L konvergira u smislu poretka ka elementu $x \in L$, onda je x granica ove mreže i u smislu konvergencije u topološkom prostoru $\langle L, \mathcal{O}_{order}(L) \rangle$.*

Dokaz. Ako se pretpostavi suprotno, tada postoji skup $U \subset L$ takav da vrijedi $x \in U \in \mathcal{O}_{order}(L)$ i

$$\forall \sigma \in \Sigma \;\; \exists \tau \geq \sigma \;\; x_\tau \in L \setminus U \tag{6.8}$$

Neka je $T = \{\tau \in \Sigma : x_\tau \in L \setminus U\}$. Ako je $\tau_1, \tau_2 \in \Sigma$ i $\tau_1, \tau_2 \leq \sigma$, tada prema uslovu (6.8), postoji $\tau \in T$ tako da je $\tau_1, \tau_2 \leq \tau$, pa je skup T usmjeren. Tada je potapanje $i_T : T \to \Sigma$ preslikavanje koje zadovoljava uslove (SN1) i (SN2) iz definicije podmreže. Zaista, uslov (SN1) je očigledno ispunjen, a ako je $\sigma \in \Sigma$, tada, prema uslovu (6.8), postoji $\tau \in T$ tako da je $\tau \geq \sigma$, pa ukoliko je $\tau' \in T$ i $\tau' \geq \tau$, onda je $i_T(\tau') = \tau' \geq \tau \geq \sigma$, pa vrijedi i uslov (SN2). Dakle, $\langle x_\tau : \tau \in T \rangle$ je podmreža mreže $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$.

Kako po pretpostavci vrijedi $\liminf_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma = \limsup_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma = x$, na osnovu leme 6.4.1, dio (ii), vrijedi $\liminf_{\tau \in T} x_\tau = \limsup_{\tau \in T} x_\tau = x$. Na taj način je dobijena mreža $\langle x_\tau : \tau \in T \rangle$ na zatvorenom skupu $L \setminus U$ koja konvergira u smislu poretka ka x, pa je $x \in L \setminus U$, što je kontradikcija. $\square$

Sljedeća lema daje karakterizaciju konvergencije poretka na kompletnoj mreži T_X.

Lema 6.4.3 *Mreža $\langle \mathcal{O}_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ u mreži T_X konvergira u smislu poretka ka $\mathcal{O} \in T_X$ ako i samo ako vrijedi*

$$\mathcal{O}[\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcap_{\rho\geq\sigma}\mathcal{O}_\rho] = \bigcap_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{O}[\bigcup_{\rho\geq\sigma}\mathcal{O}_\rho] = \mathcal{O}. \tag{6.9}$$

Dokaz. Tvrđenje slijedi na osnovu definicije konvergencije poretka i definicije operacija $\wedge$ i $\vee$ na kompletnoj mreži $\langle T_X, \wedge, \vee\rangle$. □

Iz prethodne leme se uočava da na mreži T_X skupovi $\underline{\lim}$ i $\liminf$ kao i skupovi $\overline{\lim}$ i $\limsup$ ne moraju obavezno biti jednaki.

Primjer 6.4.1. Može se konstruisati niz $\langle \mathcal{O}_n : n \in \omega\rangle$ u T_ω koji konvergira u smislu poretka, ali ne konvergira u prostoru $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega}\rangle$. Za niz $\langle \mathcal{O}_n : n \in \omega\rangle$ iz primjera 6.3.1, dobijeno je da ne konvergira u prostoru $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega}\rangle$. S druge strane, za taj niz vrijedi:

$$\mathcal{O}[\bigcup_{m\in\omega}\bigcap_{n\geq m}\mathcal{O}_n] = \mathcal{O}[\bigcup_{m\in\omega}(P(m)\cup\{\omega\})] = \mathcal{O}[[\omega]^{<\omega}\cup\{\omega\}] = P(\omega);$$

i

$$\bigcap_{m\in\omega}\mathcal{O}[\bigcup_{n\geq m}\mathcal{O}_n] = \bigcap_{m\in\omega}\mathcal{O}[[\omega]^{<\omega}\cup\{\omega\}] = P(\omega).$$

Dakle, uslov (6.9) iz prethodne leme je ispunjen, pa ovaj niz konvergira u smislu poretka.

Sljedeća lema daje određenu predstavu o odnosu topologija $\mathcal{O}_{T_\omega}$ i $\mathcal{O}_{order}(T_\omega)$ na mreži T_ω.

Lema 6.4.4 *Topologije $\mathcal{O}_{T_\omega}$ i $\mathcal{O}_{order}(T_\omega)$ na T_ω se ne podudaraju, preciznije vrijedi:*

$$\mathcal{O}_{T_\omega} \not\subset \mathcal{O}_{order}(T_\omega).$$

Dokaz. Neka je $\langle \mathcal{O}_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ proizvoljna mreža na kompletnoj mreži T_ω, koja konvergira u smislu poretka. Tada, prema lemi 6.4.2, ova mreža konvergira i u topološkom prostoru $(T_\omega, \mathcal{O}_{order})$. Ako bi vrijedilo da $\mathcal{O}_{T_\omega} \subset \mathcal{O}_{\mathrm{order}}(T_\omega)$, ovo bi, prema lemi 2.5.2, značilo da konvergencija u smislu poretka mreže $\langle \mathcal{O}_\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ povlači konvergenciju i u topološkom prostoru $(T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega})$. S obzirom na konstrukciju prethodnog primjera, ovo predstavlja kontradikciju. □

Primjer 6.4.2. Može se konstruisati niz $\langle \mathcal{O}_n : n \in \omega \rangle$ u T_ω koji konvergira u topološkom prostoru $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega} \rangle$, ali koji na istom prostoru ne konvergira u smislu poretka. Neka je $\langle \mathcal{O}_n : n \in \omega \rangle$ niz u T_ω, gdje je, $\mathcal{O}_n = \{\emptyset, \{0, n+1\}, \omega\}$, za $n \in \omega$. Kako vrijedi:

$$\bigcup_{m \in \omega} \bigcap_{n \geq m} \mathcal{O}_n = \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{n \geq m} \mathcal{O}_n = \{\emptyset, \omega\};$$

to,prema teoremi 6.3.2, implicira da ovaj niz konvergira u topološkom prostoru $\langle T_\omega, \mathcal{O}_{T_\omega} \rangle$ ka antidiskretnoj topologiji. S druge strane, za ovaj niz vrijedi:

$$\mathcal{O}[\bigcup_{m \in \omega} \bigcap_{n \geq m} \mathcal{O}_n] = \{\emptyset, \omega\} \neq \{\emptyset, \{0\}, \omega\} = \bigcap_{m \in \omega} \mathcal{O}[\bigcup_{n \geq m} \mathcal{O}_n].$$

Dakle, uslov (6.9) iz leme 6.4.3 nije ispunjen, pa ovaj niz ne konvergira u smislu poretka.

Pitanje 2. Da li vrijedi

$$\mathcal{O}_{order}(T_\omega) \subset \mathcal{O}_{T_\omega}?$$

Literatura

[1] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, Providence, Rhode Island, 1940. (Ponovljena izdanja 1948, 1967; ruski prijevodi: Nauka, Moskva, 1952, 1984.)

[2] R. ENGELKING, *General Topology*, P.W.N. Warszava 1985.

[3] M. ERNÉ, S. WECK, *Order convergence in lattices*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, Volume 10, Number 4, Fall 1980.

[4] O. FRÖHLICH, *Das Halbordnungssystem der topologischen Räume auf einer enge*, Math. Ann. 156 (1964), 79-95.

[5] G. GIERZ, K. H. HOFMANN, K. KEIMEL, J. D. LAWSON, M. MISLOVE, D. S. SCOTT, *Continuous Lattices and Domains*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[6] G. GIERZ, J. D. LAWSON, *Generalized continuous and hypercontinuous lattices*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, Volume 11, Number 2, Spring 1981.

[7] J. HARDING, A. POGEL, *Every lattice with 1 and 0 is embeddable in the lattice of topologies of some set by an embeddings which preserves the 1 and 0*, Topology Appl. 105 (1) (2000) 99-101.

[8] J. HARTMANIS, *On the lattice of topologies*, Canad. J. Math. 10 (1958), 547-553.

[9] T. JECH, *Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*, Springer, 2006.

[10] P. T. JOHNSTONE, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 3, Cambridge University Press, New York, 1983.

[11] M. KURILIĆ, *Osnovi opšte topologije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1998.

[12] R. S. MADARASZ, *Opšta teorija algebri*, Mat-Kol(Banja Luka), posebno izdanje - br.2 (2005).

[13] R. E. LARSON, S. J. ANDIMA, *The lattice of topologies: a survey*, Rocky Mountain J. Math. 5 (1975), 177–198.

[14] J. VAN MILL AND G. M. REED, *Open Problems in Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[15] P. S. SCHNARE, *Multiple complementation in the lattice of topologies*, Fund. Math. 62 (1968), 53-59.

[16] A. K. STEINER, *The lattice of topologies: Structure and complementation*, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 379–398.

[17] D. P. STRAUSS, *Topological lattices*, Proc. London Math. Soc, 18 (1968), 217-230.

[18] M. G. TKACHENKO, V. V. TKACHUK, R. G. WILSON, I. V. YASCHENKO, *No submaximal topology on a countable set is T1-complementary*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (1) (2000), 287-297.

[19] D. VAN DER ZYPEN, *Order convergence and compactness*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 45, no 4(2004) 297-300.

Indeks

Biografija

Rođen 05.06.1980. u Tuzli, BiH. Osnovnu školu i gimnaziju opšteg smjera u Zvorniku završio 1999. godine. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Banjaluci (opšti smjer) koji završava 2004. godine, stekavši zvanje diplomiranog matematičara-informatičara. U periodu 2004-2008 držao je vježbe na predmetima Poslovna matematika i Poslovna statistika na Fakultetu za poslovni inženjering i menadžment u Banjaluci. U školskoj 2006/07 radio je kao spoljni saradnik na predmetu Topologija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Banjaluci, a od februara 2009. godine je na tom fakultetu zaposlen kao asistent.

Kontakt e-mail: bonik80@gmail.com.

Novi Sad, april 2010 Bojan Nikolić

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Bojan Nikolić
AU
Mentor: Miloš Kurilić, PhD
MN
Title: Space of topologies
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English and Serbian
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2010.
PY
Publisher: Author’s reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Faculty of Science, Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6/iv+81/19/0/0/1/0)
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Set-theoretic topology
SD
Subject / Key words: Topology, lattice, topology on lattice
SKW

UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The set of all topologies T_X on an arbitrary but fixed set X under inclusion is complete lattice. This lattice can be equipped with different topologies where topological properties of obtained topological spaces are depending from the corresponding order properties of T_X. On the other hand, set T_X can be observe as a subspace of Cantor's cube $2^{2^{|X|}}$ equipped with the product topology. Properties of this topology, as well as relationships with other "order" topologies on T_X are investigated.
AB
Accepted by Scientific Board on: february 2009
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
President : Milan Grulović, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor : Miloš Kurilić, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member : Academic Stevan Pilipović, PhD, Full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member : Žarko Mijajlović, PhD, Full Professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade

Member : Aleksandar Pavlović, PhD, Docent, Faculty of Science, University of Novi Sad

DB

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Magistarska teza
VR
Autor: Bojan Nikolić
AU
Mentor: Prof. dr Miloš Kurilić
MN
Naslov rada: Prostor topologija
NR
Jezik publikacije: Srpski
JP
Jezik izvoda: Engleski i Srpski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2010.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6/iv+81/19/0/0/1/0)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Skup-teoretska topologija
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Topologija, mreža, topologija na mreži
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Skup svih topologija T_X na proizvoljnom ali fiksiranom skupu X je kompletna mreža u odnosu na inkluziju. Ova mreža može biti opremljena različitim topologijama pri čemu topološka svojstva tako dobijenih topoloških prostora zavise od odgovarajućih svojstava uređenja na T_X. S druge strane, skup T_X se može posmatrati kao potprostor Kantorovog kuba $2^{2^{|X|}}$ na kojem je uvedena topologija proizvoda. Ispitivane su osobine ove topologije, kao i odnosi sa drugim "uređajnim" topologijama.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: februar 2009
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik : dr Milan Grulović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor : dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član : Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član : dr Žarko Mijajlović, redovni profesor, Matematički fakultet, Beogradski Univerzitet

Član : dr Aleksandar Pavlović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO