

Najpre želim da izrazim veliku zahvalnost prof. dr Božidaru Popoviću za ogromnu pomoć koju mi je svojim idejama i savetima ukazao pri izradi ovog rada. Prof. dr Jovanu Simovljeviću i prof. dr Jovanu Lazoviću takodje izražavam zahvalnost za pomoć koju su mi nesebično pružali.

Sve račune iz okvira ovog rada obavio sam u računskom centru Matematičkog Instituta, pri čemu su mi mnogo pomogli Božidar Rajković, Stevan Meš i David Kljajić, za šta im se iskreno zahvaljujem.

Autor

S A D R Ž A J

	Strana
U v o d	1
I. STATISTIČKO ISPITIVANJE VEKTORSKIH ELEMENATA PUTANJA MALIH PLANETA	6
1. Srednja ravan planetoidskih putanja	6
2. Raspodela nagiba putanjskih ravni malih planeta	11
3. Raspodela longituda uzlaznih čvorova putanja	15
4. Dvojna raspodela - po nagibu i uglu	19
5. Srednja putanja malih planeta	21
6. Raspodela perihelnih vektora po longitudi	23
7. Raspodela perihelnih vektora po nagibu prema srednjoj ravni	26
8. Dvojna raspodela perihelnih vektora - po longitudi i nagibu	28
9. Raspodela perihelnih daljina	30
II. OPŠTA STRUKTURA PLANETOIDSKOG PRSTENA	35
1. Raspodela malih planeta po srednjem dnevnom kretanju	35
2. Raspodela malih planeta po sektorskoj brzini	39
3. Struktura planetoidskog prstena u poprečnom preseku	41
4. Neke familije malih planeta	53
III. KINEMATIČKE KARAKTERISTIKE PLANETOIDSKOG PRSTENA	61
Z a k l j u č a k	65
L i t e r a t u r a	68

DO 45. 17

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mike S. Kuzmanoski

PRILOG IZUČAVANJU STRUKTURE PLANETOIDSKOG
PRSTENA

UNIVERZITET U BEOGRADU
FIZIKALNO-MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Број: Физмат. 5/1
Датум: 16. II 1981.

BEOGRAD 1980

U V O D

Pre 180 godina, 1.01.1801 godine, italijanski astronom Piaci sasvim slučajno otkrio je prvi planetoid koji je nazvan Ceres. Iako su posmatranja bila izvršena samo tokom nekoliko noći, Gaus je na osnovu njih izračunao njegovu orbitu, pri čemu je ustanovio svoju poznatu metodu određivanja eliptične putanje na osnovu tri posmatranja, koja se i u naše vreme koristi.

Samo godinu dana kasnije ljubitelj astronomije Olbers je, posmatrajući Ceresa, otkrio još jednu malu planetu koja je nazvana Palas. Već iz tog vremena, kada su bila poznata samo dva tek otkrivena planetoida, datira i prva hipoteza o njihovom postanku - Olbersova hipoteza o raspadu hipotetične planete između putanja Marsa i Jupitera. Predviđanja Olbersa, iz okvira hipoteze, o postojanju većeg broja planetoida, dobila su potvrdu 1804 godine otkrićem i trećeg planetoida od strane Hardinga. Sam Olbers je 1807 godine načinio otkriće i četvrtog po redu planetoida, čime je bilo započeto novo poglavlje u izučavanju Sunčevog sistema. Međutim, i pored upornih traganja, bilo je potrebno da prođe 38 godina pre nego što je otkrivena nova mala

planeta. Od tog vremena pa do danas, zahvaljujući većem stepenu razvoja astronomije, neprekidno se otkrivaju nove male planete i kontinuirano posmatraju ranije otkrivene. Današnjih dana broj otkrivenih planetoida iznosi oko 4000, a za preko 2000 sa velikom tačnošću određene su njihove putanje. Po nekim procenama, ukupan broj planetoida sa poluprečnikom većim od 800 metara je oko 480 000 .

Od svih numerisanih planetoida 98% imaju putanje koje se nalaze između putanja Marsa i Jupitera i čine takozvani planetoidski prsten ili planetoidski pojas. Kretanje svih planetoida vrši se u direktnom smeru. Određen njihov broj ima putanje koje se jako približavaju ili presecaju putanju Zemlje, dok nasuprot tome, putanje jedne grupe nalaze se u blizini Jupiterove putanje.

U celokupnosti putanjskih elemenata malih planeta otkriveno je niz zakonitosti njihove raspodele, zajedničke karakteristike, ali i specifičnosti pojedinih putanja. Sva raznolika dosadašnja istraživanja planetoidskog prstena na kraju dovode do pitanja kako je došlo do njegovog stvaranja i kako se dalje razvijao i menjao. Kako smo već pomenuli, pokušaji da se dâ odgovor na ovo pitanje datiraju još iz vremena otkrića prvih malih planeta. Nadalje svaka kosmogoniska hipoteza koja tretira problem nastanka Sunčevog sistema ne može da zaobidje pitanje nastanka malih planeta, pa odatle potiče i najčešći tretman nastanka malih planeta u okviru jedinstvenog procesa nastanka Sun-

čevog sistema.

U proteklom periodu stvorene su hipoteze koje problem nastanka malih planeta tretiraju sa dve polarizovane tačke gledišta; da je do njihovog stvaranja došlo raspadom jedne ili više planeta i, nasuprot tome, da je do stvaranja došlo akumulacijom malih čestica između putanja Marsa i Jupitera.

U okviru prvog gledišta postoji više varijanti koje se razlikuju samo po načinu tretiranja prirode raspada hipotetične planete. Putilin [1] svoju hipotezu bazira na rotacionoj nestabilnosti hipotetične planete (usled čega je došlo do raspada), a stvaranje velikog broja planetoida objašnjava mnogobrojnim sudarima prvobitnih delova raspadnute planete. Sultanov [2] pretpostavlja da je do raspada planete došlo u perihelu ili afelu njene putanje i da je raspodela njenih delova bila ravnomerna u svim pravcima. Ispitivanjem funkcije raspodele raspadnutih delova po raznim kombinacijama keplerovih elemenata njihovih putanja, pokazuje da je ona analogna raspodeli putanjskih elemenata numerisanih malih planeta. Međutim, ove i slične hipoteze ne nalaze dovoljnu potvrdu u brojnim rezultatima meteoritske astronomije i fotometrijskim istraživanjima malih planeta.

Od hipoteza u kojima se za polaznu osnovu uzima akumulacija čestica, kao najbolje razradjena javlja se hipoteza Safronova [3] , stvorena u Institutu za fiziku Zemlje

AN SSSR. U njoj je izneta teorija nastanka malih planeta u okviru Šmidtove koncepcije nastanka Sunčevog sistema. Po ovoj hipotezi, u fazi stvaranja proto-planeta, zbog fizičkih uslova koji su vladali u protoplanetskom oblaku, do stvaranja proto-Jupitera je došlo pre nego što je nastao proces stvaranja proto-planete u zoni planetoida. Uticaj njegove mase usporio je brzinu rasta grupacija čestica iz zone planetoidskog prstena, a kada je postao dovoljno veliki tela iz njegove blizine dobila su dodatne brzine i počela zalaziti u zonu planetoida. Usled sudara sa telima iz te zone došlo je do znatne dispersije njihovih relativnih brzina, što je nadalje rezultiralo da se sudari završavaju ne sjedinjavanjem, već rušenjem tih tela. Time je proces formiranja jedne planete u zoni planetoidskog prstena bio prekinut, a ostaci tog stadijuma su današnje male planete.

Alfen [4] u svojoj hipotezi iznosi da je do prvobitnih zgušnjavanja u proto-planetskoj maglini došlo usled neelastičnih sudara čestica, pri čemu je dolazilo do smanjenja njihovih relativnih brzina, odnosno do zbližavanja njihovih orbita. Takav proces doveo je do stvaranja strujnih potoka - rojeva čestica koje su se kretale po istim orbitama. Sažimanjem potoka došlo je do formiranja planeta. Međutim, usled smanjene gustine materije u zoni planetoidskog prstena, taj proces je tu produžen i, po Alfenu, još uvek traje. Ova hipoteza još uvek teorijski nije dovoljno zasnovana.

Od otkrića prve male planete pa do danas, saznanja o ovim specifičnim članovima Sunčevog sistema neprekidno su proširivana i dopunjavana. Za relativno veliki broj planetoida dobro je poznato njihovo kretanje, a fotometrijska istraživanja, koja se intenzivno vrše naročito poslednjih godina, dala su nam i neke njihove bitne fizičke karakteristike. Medjutim, ma koliko da su današnja znanja o malim planetama velika, ne omogućavaju da se u potpunosti sagleda struktura planetoidskog prstena u današnjem stadijumu njegovog razvoja.

I. STATISTIČKO ISPITIVANJE VEKTORSKIH ELEMENTATA PUTANJA MALIH PLANETA

Jasniju sliku o raspodeli putanja malih planeta i izgledu planetoidskog prstena u celini možemo dobiti ako se statistička ispitivanja izvrše preko vektorskih elemenata kretanja. Sledeći ovu ideju koja je izneta od strane B. Popovića [5] ovde smo izvršili takva ispitivanja pri čemu je korišćen Milankovićeov sistem vektorskih elemenata [6] : \vec{C} (vektor površina) i \vec{D} (perihelni - Laplas-Hamiltonov vektor).

1. SREDNJA RAVAN PLANETOIDSKIH PUTANJA. S obzirom na prirodu vektora površina \vec{C} , njegovim korišćenjem na najneposredniji način možemo sagledati raspored putanjskih ravni malih planeta. Priroda vektora \vec{C} takodje nam pruža mogućnost da odredimo jednu srednju ravan svih planetoidskih putanjskih ravni, koja može da predstavlja ravan simetrije planetoidskog prstena. Takva srednja ravan ispravno se može odrediti nalaženjem srednjeg vektora \vec{C}_e preko vektora površina \vec{C}_{ke} svih numerisanih malih planeta, pri čemu nam indeks e označava da se koordinate vektora odnose na ravan ekliptike.

Polazeći od putanjskih elemenata numerisanih plane-

toida, mogu se izračunati komponente vektora \vec{C}_{ke} :

$$(1) \quad \begin{aligned} C_{xke} &= C_k \sin \delta_{ke} \sin i_{ke} \\ C_{yke} &= -C_k \cos \delta_{ke} \sin i_{ke} \\ C_{zke} &= C_k \cos i_{ke} \end{aligned}$$

gde su :

$C_k = K \sqrt{a_k} \cos \varphi_k$ - intenziteti vektora C_{ke} izraženi preko velikih poluosa a_k i uglova ekscentričnosti φ_k ,

δ_{ke} - longituda uzlaznih čvorova putanja,

i_{ke} - nagibi putanjskih ravni,

$K = 0.0172021$ - Gausova konstanta.

Za računanje intenziteta C_k koristimo Gausovu konstantu

$K = \sqrt{f}$ (f - gravitaciona konstanta), a ne $\sqrt{f(1+m_k)}$, jer mase m_k malih planeta možemo smatrati zanemarljivo malim.

Komponente srednjeg vektora \vec{C}_e nalazimo kao aritmetičke sredine komponentata vektora C_{ke} numerisanih planetoida:

$$(2) \quad \begin{aligned} C_{xe} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_{xke} \\ C_{ye} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_{yke} \\ C_{ze} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_{zke} \end{aligned}$$

Korišćenjem putanjskih elemenata numerisanih malih planeta iz [7], gde su dati elementi za 2042 male planete, i sprovodeći račun po (1) i (2) došli smo do sledećih numeričkih vrednosti za komponente srednjeg vektora :

$$\begin{aligned}
 (3) \quad C_{ye} &= 0.00027971 \\
 C_{ye} &= -0.00005873 \\
 C_{ze} &= 0.02758096
 \end{aligned}$$

Intenzitet vektora \vec{C}_e je:

$$C = |\vec{C}_e| = 0.02758244$$

Za određivanje položaja srednje ravni u odnosu na ravan ekliptike, iz izraza

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \operatorname{tg} \delta_e &= -\frac{C_{xe}}{C_{ye}} \\
 \cos i_e &= \frac{C_{ze}}{C}
 \end{aligned}$$

nalazimo položaj čvorne linije i njen nagib. Iz numeričkih vrednosti za komponente srednjeg vektora nalazimo da je:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \delta_e &= 78.141 \\
 i_e &= 0.594
 \end{aligned}$$

Kako se iz ovih vrednosti vidi, srednja ravan je vrlo bliska ravni ekliptike.

Da bismo ispitali u kolikoj se meri naša srednja ravan menja sa promenom broja planetoida, odredili smo vrednosti za δ_e i i_e za različite uzorke: za prvih 100 planetoida, prvih 200 i t.d. Dobijeni rezultati prikazani su u tablici 1.

U zavisnosti od uzetog uzorka, dobili smo da nagib srednje ravni uzima vrednosti od $0.538 - 1.130$, a longitude čvora od $77.757 - 116.062$.

Tablica 1

m	δ_{be}	i_e
100	96.360	0.703
200	91.267	1.005
300	116.062	0.997
400	108.722	0.926
500	112.166	0.951
600	105.854	1.130
700	105.277	0.877
800	100.564	0.864
900	109.869	0.907
1000	95.360	0.732
1100	93.901	0.838
1200	91.674	0.692
1300	88.102	0.589
1400	89.293	0.607
1500	78.305	0.539
1600	77.757	0.561
1700	78.818	0.563
1800	86.211	0.538
1900	85.721	0.547
2000	82.931	0.573

Ovakve promene srednje ravni u zavisnosti od uze-
tog broja planetoida u odnosu na koje se odredjuje mogle
su se i očekivati. I pored tih promena, uočljivo je da

srednja ravan u dobroj meri održava svoj položaj u prostoru. Kako uzorci sa manjim brojem planetoida odgovaraju krupnijim planetoidima, zapaža se da takvi uzorci daju srednju ravan pod većim nagibom prema ravni ekliptike. Takođe je uočljiva mnogo veća stabilnost srednje ravni sa uzorcima od 1200 i više malih planeta.

Razmotrimo sada kakav položaj zauzima srednja ravan u odnosu na putanjske ravni Marsa i Jupitera i Laplasovu invarijabilnu ravan. Elemente koji određuju ove ravni uzeli smo iz [8] i za prve dve ravni odnose se na epohu 1900.0 i ekliptiku i ekvinokcije 1950.0, a za Laplasovu invarijabilnu ravan izvršili smo svodjenje sa 1850.0 (za koju su dati elementi) na ekliptiku i ekvinokcije 1950.0 .

U tablici 2 date su longituda čvorova i nagibi ovih triju ravni u odnosu na ravan ekliptike i nagibi koje one zaklapaju sa srednjom ravni.

Tablica 2

	Ω	i	i_0
Mars	49°318	1°854	1°364
Jupiter	99.865	1.307	0.787
Laplasova inv. ravan	108.200	1.642	1.168

Po ovim vrednostima može se videti da je srednja ravan jako bliska ravni Jupiterove putanje, a i odstupanja od preostale dve ravni su mala.

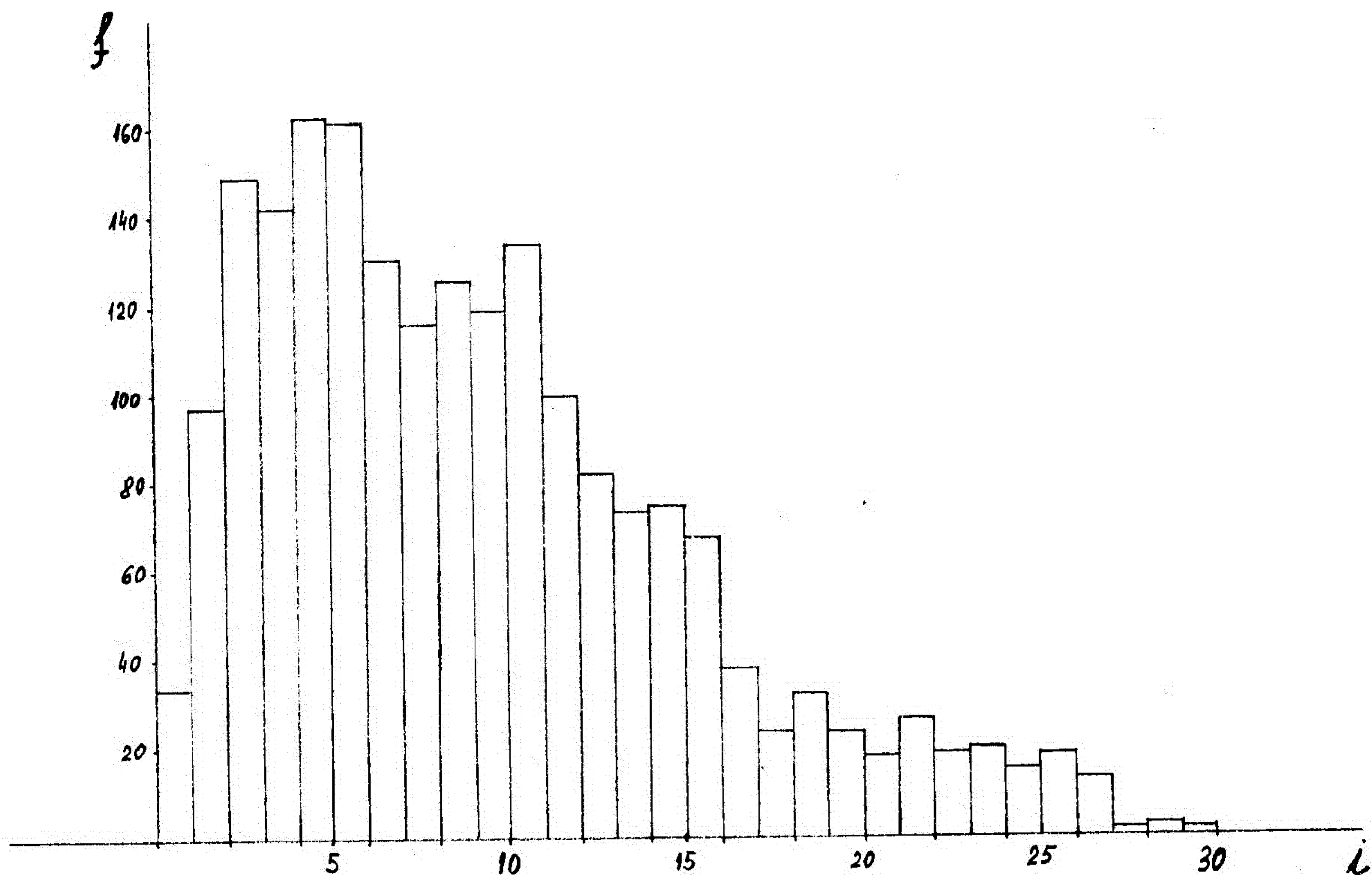
2. RASPODELA NAGIBA PUTANJSKIH RAVNI MALIH PLANETA.

U dosadašnjim statističkim ispitivanjima raspodele nagiba putanjskih ravni malih planeta prema ravni ekliptike, koja su vršena sa različitim raspoloživim brojevima numerisanih malih planeta [5, 9, 10], uočene su određene osobenosti. Posmatrano u klasnim intervalima od po 1° , pokazalo se da je broj planetoida sa nagibima njihovih putanjskih ravni do 1° mali, a za naredne dve klase dolazi do naglih skokova frekvencija. Maksimum raspodele javlja se na intervalu $5 < i < 6$. Do naglijih padova frekvencija dolazi u klasnim intervalima posle 6° , posle 11° i posle 16° , a za klase posle $i = 27^\circ$ javljaju se vrlo male frekvencije.

Da bismo videli da li se dogadjaju neke promene ako se ista ispitivanja sprovedu sa većim brojem numerisanih planetoida, izvršili smo raspodelu nagiba prema ravni ekliptike koristeći elemente iz [7] gde imamo 247 planetoida više u odnosu na korišćen broj u [10]. Frekvencije raspodele u klasama od po 1° date su u tablici 3 i na sl. 1.

Tablica 3

i°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
f	34	97	149	142	163	162	131	116	126	119		
i°	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
f	134	100	82	74	75	68	38	24	32	24	18	27
i°	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	>33
f	19	20	15	19	13	2	3	2	-	-	2	12



Sl. 1

U poredjenju sa dosadašnjim ispitivanjima ove raspodele zapaža se proširivanje maksimuma i na klasni interval za $4^{\circ} < i \leq 5^{\circ}$ i tendencija ka izdvajanju maksimuma za klasu $10^{\circ} < i \leq 11^{\circ}$. Takodje se zapažaju povećane frekvencije za nagibe $1 < i \leq 3$, dok su ostale karakteristike raspodele ostale nepromenjene.

Da bismo ista ispitivanja izvršili u odnosu na srednju ravan, uvedimo novi koordinatni sistem koji će biti definisan preko te ravni. Uzmimo da x -osa novog sistema sa pravcem ka γ -tački zaklapa ugao δ_e , y -osa je njoj normalna, a z -osa je u smeru vektora \vec{C}_e . Od ekliptičkog pravouglonog koordinatnog sistema na ovaj novi koji je vezan za srednju ravan prelazimo najpre rotacijom oko z_e -ose za ugao δ_e , a zatim rotacijom oko x -ose za ugao i_e . Srednji

vektor \vec{C}_e izražen preko njegovih komponentata u novom sistemu biće: $\vec{C}(C, 0, 0)$. Komponente svih pojedinačnih vektora površina u novom sistemu određujemo preko izraza:

$$\begin{aligned}
 C_{xK} &= C_{xKe} \cos \delta_{be} + C_{yKe} \sin \delta_{be} \\
 (6) \quad C_{yK} &= (C_{yKe} \cos \delta_{be} - C_{xKe} \sin \delta_{be}) \cos i_e + C_{zKe} \sin i_e \\
 C_{zK} &= -(C_{yKe} \cos \delta_{be} - C_{xKe} \sin \delta_{be}) \sin i_e + C_{zKe} \cos i_e
 \end{aligned}$$

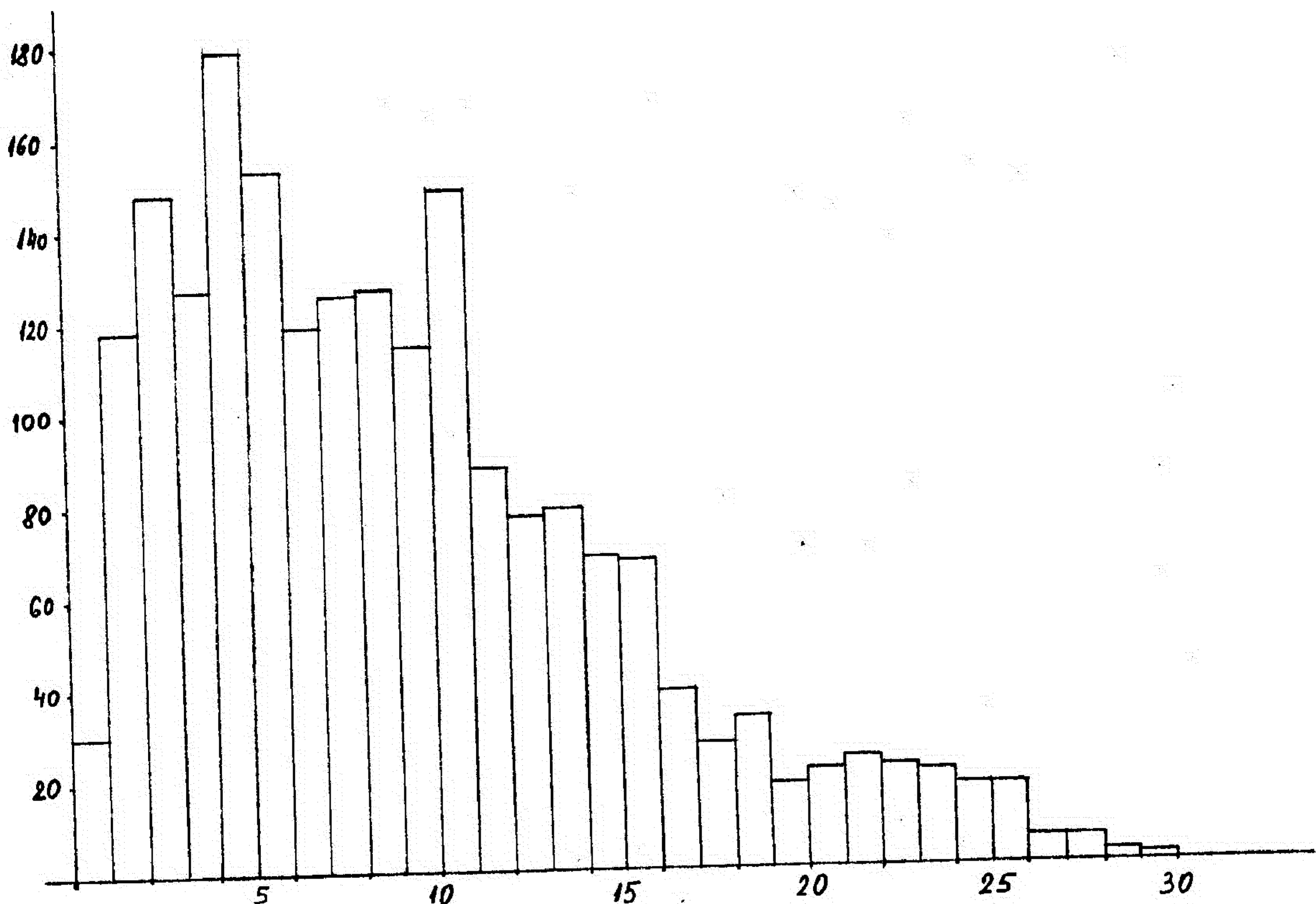
Nagibe putanjskih ravni malih planeta i_K prema srednjoj ravni računamo pomoću obrasca:

$$(7) \quad \cos i_K = \frac{\vec{C} \cdot \vec{C}_K}{|\vec{C}| |\vec{C}_K|} = \frac{C_{zK}}{C_K}$$

Grupisanjem dobijenih nagiba u klasnim intervalima od po 1° dobili smo frekvencije njihove raspodele prema srednjoj ravni koje su date u tablici 4 i predstavljene na sl. 2.

Tablica 4

i°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
f	30	118	148	127	177	153	119	126	127	114		
i°	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
f	149	88	77	79	69	68	39	28	33	18	21	24
i°	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	33
f	22	21	18	18	6	6	3	2	-	-	1	13



Sl. 2

Uporedjivanjem raspodele nagiba putanjskih ravni prema srednjoj ravni sa odgovarajućom raspodelom prema ravni ekliptike, mogu se uočiti izvesne razlike koje u prvimah nisu očekivane. Ovde smo dobili izrazit maksimum za klasu $4^{\circ} < i \leq 5^{\circ}$. Sa leve strane ovog maksimuma uočljiv je skok frekvencije za klasu $1^{\circ} < i \leq 2^{\circ}$ i pad frekvencije za planetoide sa nagibima njihovih putanjskih ravni između 3° i 4° . Takodje je uočljivo izdvajanje maksimuma za klasu sa nagibima između 10° i 11° , dok kod ostalih klasa stanje se nije bitno izmenilo. Do ovih promena je došlo pre svega zbog promene granica klasa za približno 0.6° (koliko iznosi nagib srednje ravni prema ravni ekliptike), što je izraženije za putanjske ravni čije su čvorne linije bliže čvornoj liniji srednje ravni. Izražajnije predstavljanje maksimuma

raspodele nagiba prema srednjoj ravni govori nam da je srednja ravan " prirodnija " nego što je ravan ekliptike.

3. RASPODELA LONGITUDA UZLAZNIH ČVOROVA PUTANJA

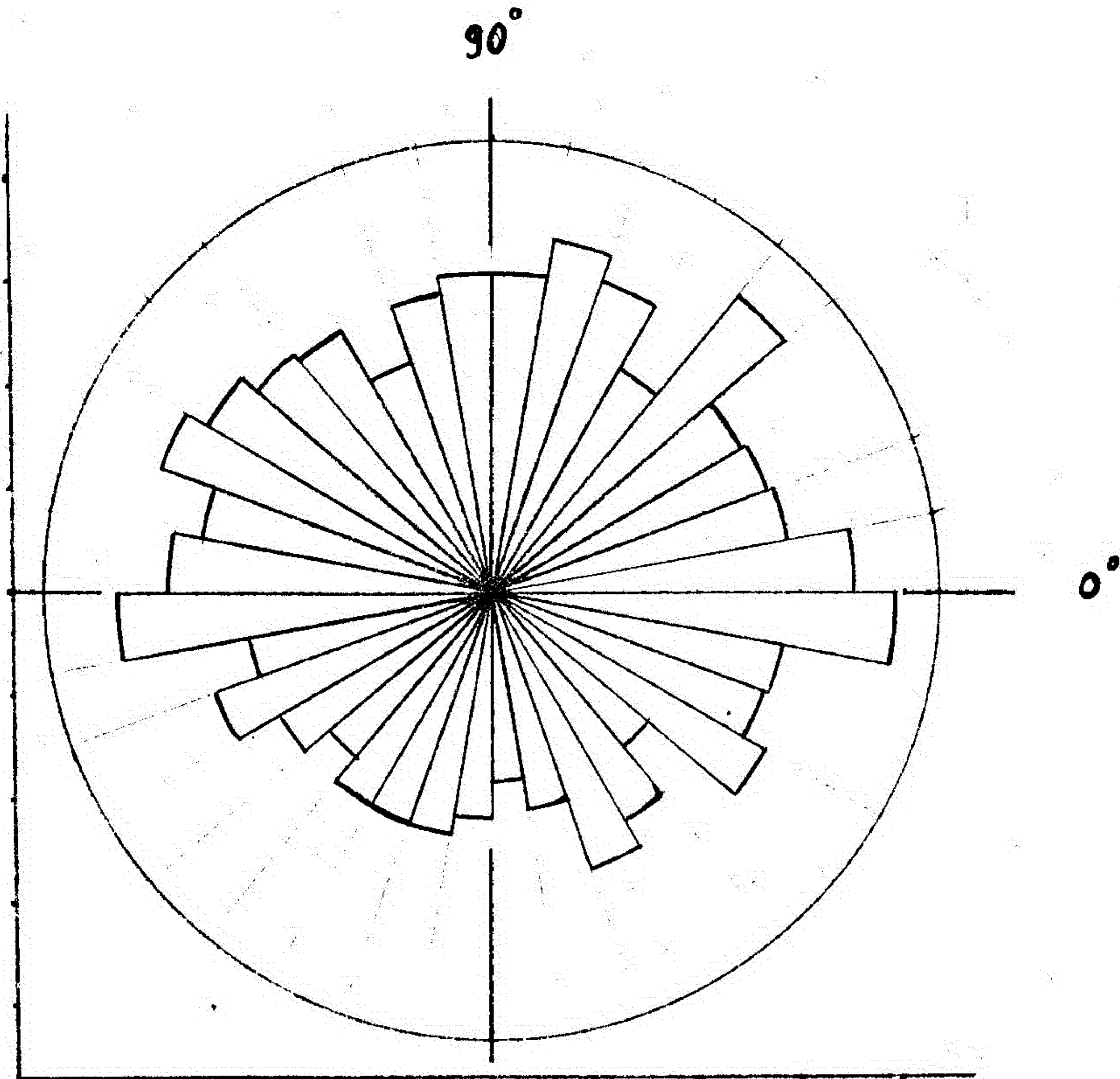
MALIH PLANETA. Statistička ispitivanja longituda uzlaznih čvorova putanja malih planeta koja su izvršena u [5, 9, 10] pokazala su da je raspodela neravnomerna, sa više maksimuma i minimuma koji su rasporedjeni bez nekog pravila. Jedino se zapaža jedan širi minimum u intervalu od 220° do 320° koji je nešto dublji izmedju 270° i 280° .

Koristeći putanjske elemente iz [7] izvršili smo raspodelu longituda uzlaznih čvorova u odnosu na ekliptiku u klasama od po 10° (tablica 5 i sl. 3) .

Tablica 5

Ω	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
f	71	58	57	56	75	50	64	68	63	63	58	47
Ω	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
f	58	59	64	68	57	63	73	47	67	47	41	47
Ω	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360
f	47	47	44	36	44	57	52	39	63	56	57	79

U poredjenju sa izvršenim raspodelama pri korišćenju manjeg broja planetoida, dobili smo razliku samo u tome što su minimumi u našem slučaju slabije izraženi, dok su ostale karakteristike u potpunosti zadržane.



Sl. 3

Koristeći vektore površina \vec{C}_k numerisanih malih planeta, možemo odrediti longituda uzlaznih čvorova planetoidskih putanja u odnosu na srednju ravan. Najpre uvedimo sferni koordinatni sistem (koji ćemo koristiti i kod ispitivanja koja su vezana za perihelni vektor) sa koordinatama ψ , θ i ρ . Ugao ψ merimo u srednjoj ravni, od x -ose, u direktnom smeru, a θ je ugao koji vektor površine zaklapa sa srednjom ravni. Koordinata ρ je intenzitet vektora površine.

Komponente vektora površina malih planeta preko sfernih koordinata možemo izraziti pomoću veza:

$$\begin{aligned}
 C_{xk} &= \rho_k \cos \psi_k \cos \theta_k \\
 C_{yk} &= \rho_k \sin \psi_k \cos \theta_k \\
 C_{zk} &= \rho_k \sin \theta_k
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Kada su u pitanju vektori površina \vec{C}_k , onda su uglovi $\theta_k = 90^\circ - i_k$, a uglovi $\psi_k = \delta_{bk} - 90^\circ$. Preko komponentata vektora odredjujemo uglove ψ_k iz:

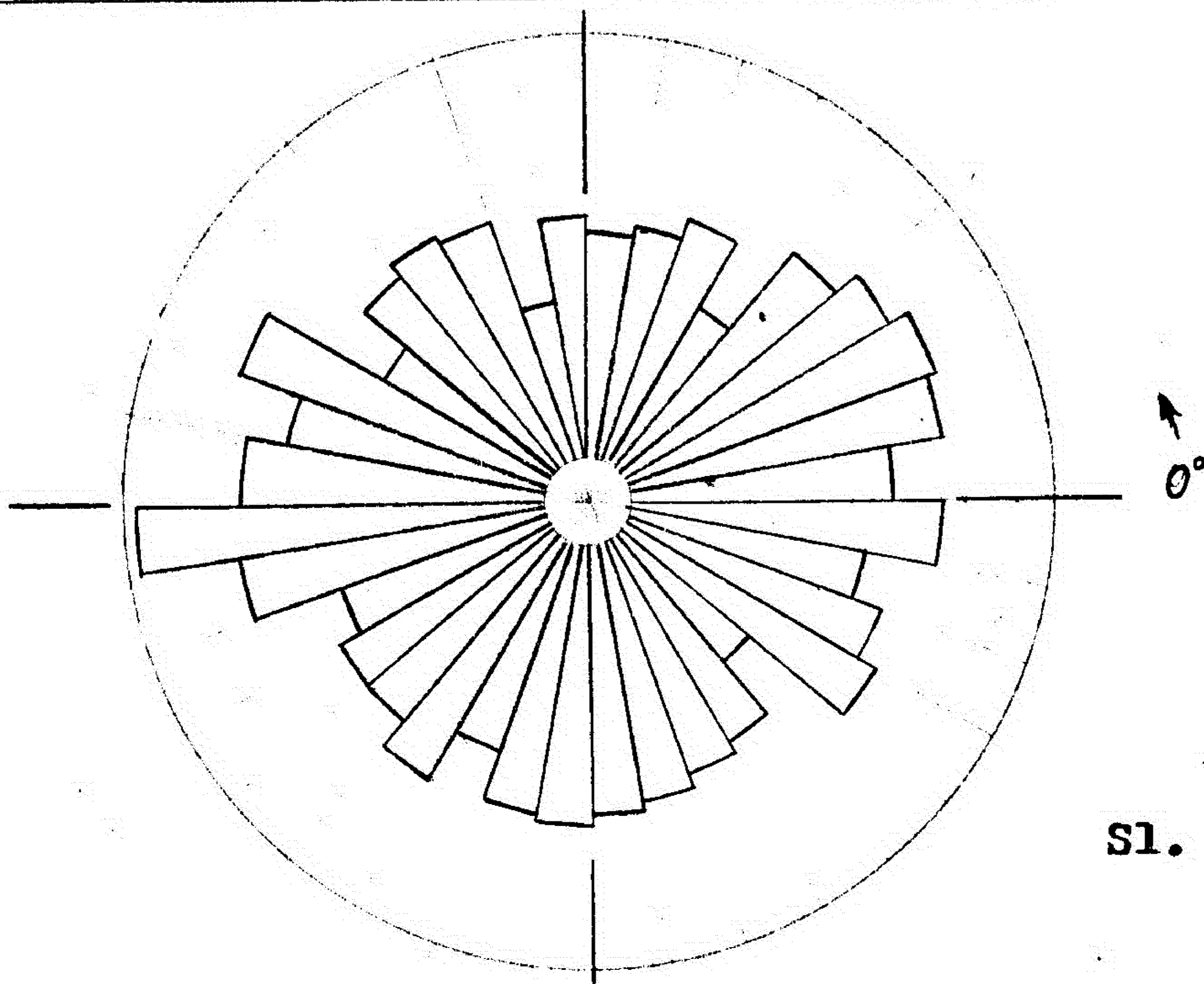
$$(9) \quad \operatorname{tg} \psi_k = \frac{C_{yk}}{C_{xk}}$$

za sve pojedinačne planetoide.

Grupisanjem uglova ψ_k (odnosno δ_{bk}) u klasama od po 10° dobili smo njihovu raspodelu koja je predstavljena u tablici 6 i na sl. 4.

Tablica 6

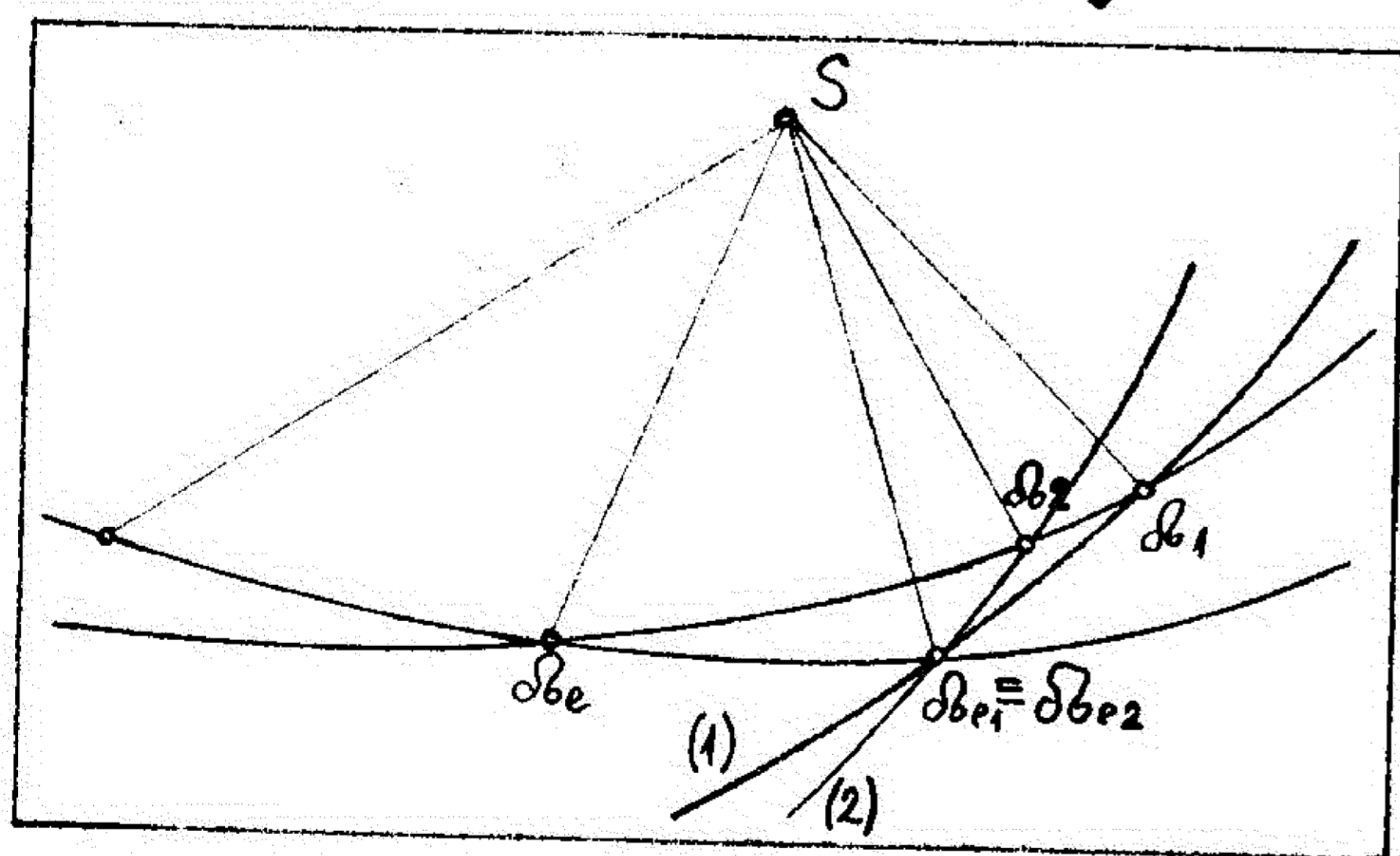
δ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
f	57	67	69	65	60	41	55	52	50	54	37	55
δ	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
f	57	55	44	69	57	65	85	65	49	53	53	59
δ	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360
f	49	59	60	59	57	55	52	38	63	58	53	66



Sl. 4

Raspodela ugla ψ pokazuje u celini veću ravnomernost u poredjenju sa raspodelom longituda uzlaznih čvorova putanja planetoida u odnosu na ravan ekliptike. Ta ravnomernost uočljiva je u grupama od po više klasa koje su odvojene приметnim padovima frekvencija u po samo jednoj klasi. Onaj široki minimum na sl. 3 ovde se skoro izgubio, a izdvojio se jedan uzani maksimum za ψ između 180° i 190° . Možda se u slučaju dalje male promene srednje ravni (sa povećanjem broja numerisanih planetoida) može očekivati još ravnomernija raspodela ugla ψ .

Ovde se pokazalo da i mala promena koordinatnog sistema može izazvati veće promene u raspodeli longituda uzlaznih čvorova. Da bi objasnili kako dolazi do takvih promena poslužimo se sl. 5.



a - ekliptika
 b - presek srednje ravni sa neb. sferom
 (1), (2) - projekcije dveju putanja na neb. sferu

Sl. 5

Dve putanje (1) i (2) u ekliptičkom sistemu neka imaju iste longituda uzlaznih čvorova δ_{e1} i δ_{e2} . U novom sistemu (srednje ravni) longituda čvorova δ_1 i δ_2 mogu se i osetnije razlikovati, naročito u kombinacijama manjih sa većim nagibima njihovih putanja. Zbog toga, donošenje

bilo kakvih zaključaka vezanih samo za raspodelu longituda uzlaznih čvorova može da nam pruži lažnu sliku.

4. DVOJNA RASPODELA - PO NAGIBU i I UGLU ψ .

Suštinsku sliku rasporeda putanjskih ravni možemo dobiti ako posmatramo dvojni frekvenciju - po nagibu i prema srednjoj ravni i uglu ψ (ili longitudi čvora δ). Grupisanjem nagibâ i_k u klasama od po 2° i uglova ψ_k u klasama od po 20° , dobili smo 234 grupa (uzete su putanjske ravni sa nagibima do 26°). Frekvencije po pojedinim grupama date su u tablici 7.

Tablica 7

$\psi^\circ \backslash i^\circ$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	26
20	9	13	19	15	13	20	11	9	3	4	2	3	2	1
40	9	21	19	19	10	19	12	8	4	1	5	3	3	1
60	6	17	17	11	11	10	5	8	4	2	2	5	0	3
80	8	10	18	14	14	9	13	7	5	2	3	0	3	1
100	10	16	19	11	13	7	7	11	0	3	3	1	2	1
120	4	16	15	18	10	10	3	7	3	2	0	2	1	1
140	10	9	17	8	25	13	9	8	4	2	3	2	0	2
160	6	9	15	12	19	8	12	7	10	3	4	3	3	2
180	8	13	21	14	13	14	14	10	2	5	2	2	3	1
200	16	17	24	30	14	8	4	11	6	6	5	5	3	1
220	9	11	19	15	14	10	10	5	1	2	1	2	1	2
240	8	16	18	19	5	14	10	4	7	4	4	1	1	1
260	9	17	23	7	15	13	8	5	2	1	2	1	2	3
280	9	18	25	7	16	14	9	9	4	3	0	3	1	1
300	9	18	12	15	12	16	10	6	1	4	2	3	4	0
320	4	19	11	10	11	11	7	7	4	0	1	4	1	0
340	6	17	17	15	17	14	6	9	4	5	2	2	3	4
360	8	18	21	5	10	26	6	6	3	2	4	1	3	6

Ova dvojna raspodela pokazuje neke osobenosti koje možemo smatrati kao jednu od karakteristika planetoidskog prstena. Frekvencije po pojedinim grupama pokazuju da je raspodela putanjskih ravni sa određenim nagibima (kolone u tablici 7) u manjoj ili većoj meri ravnomerna. Izuzetak predstavlja pojava nekoliko maksimuma i minimuma koji su ili izolovani, ili se provlače na najviše dve klase.

Sa ciljem da ispitamo da li unutar grupacija putanjskih ravni postoji neka zakonitost raspodele malih planeta i po ostalim putanjskim elementima, posmatrali smo raspodelu po srednjem dnevnom kretanju n , ekscentričnosti e i longitudi perihela \bar{u} za svaku pojedinačnu veću grupu iz tablice 7. Pokazalo se da se javljaju samo male grupe (3 do 4 planetoida) kod kojih se može uočiti iole određenija sličnost po svim putanjskim elementima. Možemo konstatovati da u savremenoj strukturi planetoidskog prstena ne postoje veće grupacije putanja koje su slične po svim putanjskim elementima.

Tablica 8

n	e	\bar{u}	n	e	\bar{u}	n	e	\bar{u}
455"	0.16	181°	727"	0.04	43°	934"	0.14	257°
626	0.18	8	736	0.21	331	965	0.14	15
628	0.15	35	767	0.06	223	970	0.13	290
634	0.10	335	774	0.14	295	1025	0.34	271
635	0.06	187	787	0.16	265	1031	0.21	242
649	0.06	8	801	0.29	340	1036	0.15	58
680	0.06	245	869	0.07	342	1042	0.10	64
689	0.07	343	873	0.16	329	1057	0.20	240
702	0.11	16	874	0.15	17	1060	0.20	218
711	0.06	340	879	0.25	262	1062	0.16	181

Radi ilustracije, u tablici 8 dati su n , e i \bar{u} (u odnosu na srednju ravan) za klasu sa uglovima ψ_k izmedju 180° i 200° i nagibima izmedju 6° i 8° , čija je frekvencija najveća (30).

5. SREDNJA PUTANJA MALIH PLANETA. Analogno određivanju srednjeg vektora \vec{C}_e , odredimo srednji perihelni vektor \vec{D}_e . Komponente perihelnih vektora D_{ke} numerisanih planetoida možemo izraziti preko putanjskih elemenata pomoću obrazaca :

$$(10) \quad \begin{aligned} D_{xke} &= D_k (\cos \delta_{ke} \cos \omega_{ke} - \sin \delta_{ke} \sin \omega_{ke} \cos i_{ke}) \\ D_{yke} &= D_k (\sin \delta_{ke} \cos \omega_{ke} + \cos \delta_{ke} \sin \omega_{ke} \cos i_{ke}) \\ D_{zke} &= D_k \sin \omega_{ke} \sin i_{ke} \end{aligned}$$

gde su:

ω_{ke} - argumenti latituda perihela

$D_k = k^2 e_k$ - intenziteti vektora \vec{D}_k izraženi preko ekscentričnosti putanja e_k .

Komponente srednjeg vektora \vec{D}_e nalazimo kao aritmetičke sredine komponenata vektora \vec{D}_{ke} :

$$(11) \quad \begin{aligned} D_{xe} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_{xke} \\ D_{ye} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_{yke} \\ D_{ze} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_{zke} \end{aligned}$$

Korišćenjem putanjskih elemenata svih numerisanih malih planeta iz [7] došli smo do sledećih numeričkih vred-

nosti za komponente srednjeg vektora \vec{D}_e :

$$(12) \quad \begin{aligned} D_{xe} &= 0.000014754 \\ D_{ye} &= 0.000000826 \\ D_{ze} &= 0.000000341 \\ D &= \sqrt{D_{xe}^2 + D_{ye}^2 + D_{ze}^2} = 0.000014781 \end{aligned}$$

Iz vrednosti komponentata srednjeg vektora \vec{D}_e vidimo da je njegov pravac u blizini pravca ka γ -tački (odstupa oko 3° od tog pravca), a ako pogledamo vrednosti za δ_e i ι_e srednje ravni, vidimo da vektor \vec{D}_e leži malo iznad nje. Zato skalarni proizvod vektora \vec{C}_e i \vec{D}_e neće biti jednak nuli, već:

$$\vec{C}_e \cdot \vec{D}_e = 0.0000000135$$

Da bismo odredili srednju "putanju" tako da leži u srednjoj ravni, pomerimo vektor \vec{D}_e tako da ga dovedemo u tu ravan. Pomeranje izvršimo u ravni koja je određena vektorima \vec{C}_e i \vec{D}_e , a popravke x , y i z (komponente vektora $\Delta\vec{D}_e$) koje treba dodati komponentama vektora \vec{D}_e nalazimo iz uslova:

$$\begin{aligned} \vec{C}_e \cdot (\vec{D}_e + \Delta\vec{D}_e) &= 0 \\ \vec{D}_e \cdot \Delta\vec{D}_e &= 0 \\ \Delta\vec{D}_e \cdot (\vec{C}_e \times \vec{D}_e) &= 0 \end{aligned}$$

Na taj način za x , y i z dobili smo vrednosti: 11, 1, -490, izražene u jedinicama devete decimale. Pri tome intenzitet vektora \vec{D}_e ostao je skoro nepromenjen (posle izvršenih popravki iznosi $D = 0.000014789$).

Argumenta latitude perihela ω_e , ekscentričnost e i veliku poluosu a srednje "putanje" nalazimo po obrascima (koji su dati u [11]):

$$(13) \quad \operatorname{tg} \omega_e = \frac{D_{ze} \operatorname{cosec} i_e}{D_{xe} \cos \delta_{be} + D_{ye} \sin \delta_{be}}$$

$$e = \frac{D}{k^2}, \quad a = \frac{k^2}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{k^2 - D^2}{C^2}$$

Korišćenjem efektivnih vrednosti dolazimo do sledećeg sistema eliptičnih elemenata srednje "putanje":

$$(14) \quad \begin{aligned} \delta_{be} &= 78.14 & a &= 2.58 \\ i_e &= 0.59 & e &= 0.05 \\ \omega_e &= 284.97 \end{aligned}$$

Ovako definisana "putanja", vrlo male ekscentričnosti, geometrički može da predstavlja nekakvu sredinu asteroidskog prstena.

6. RASPODELA PERIHELNIH VEKTORA PO LONGITUDI. Da bismo raspodelu perihelnih vektora \vec{D}_{ke} pojedinačnih planetoidskih putanja posmatrali u odnosu na srednju ravan, najpre odredimo njihove komponente u odnosu na koordinatni sistem srednje ravni. Komponente svih pojedinačnih vektora \vec{D}_{ke} u odnosu na novi koordinatni sistem nalazimo preko izraza:

$$(15) \quad \begin{aligned} D_{xk} &= D_{xke} \cos \delta_{be} + D_{yke} \sin \delta_{be} \\ D_{yk} &= (D_{yke} \cos \delta_{be} - D_{xke} \sin \delta_{be}) \cos i_e + D_{zke} \sin i_e \\ D_{zk} &= -(D_{yke} \cos \delta_{be} - D_{xke} \sin \delta_{be}) \sin i_e + D_{zke} \cos i_e \end{aligned}$$

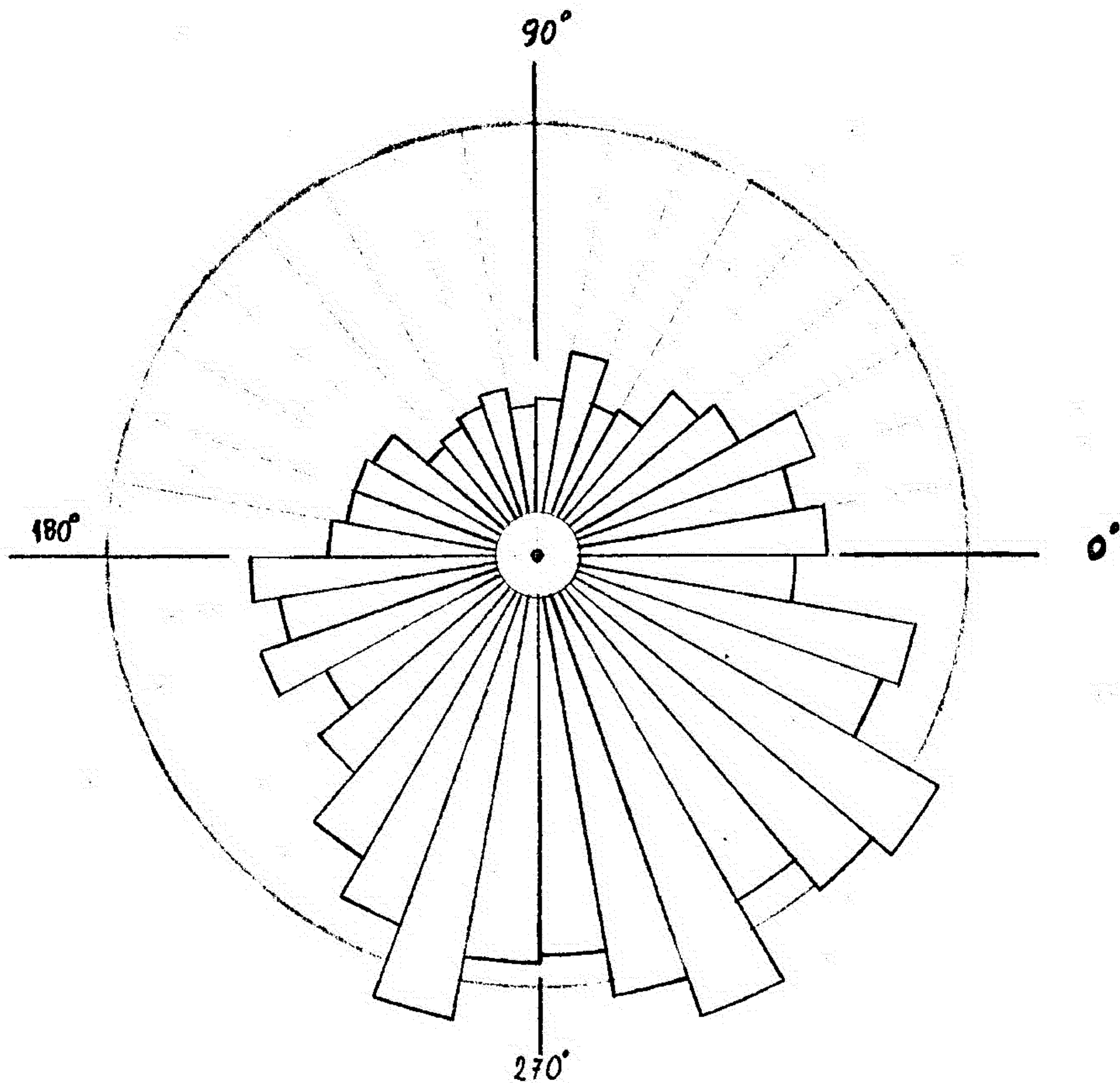
Ove komponente možemo izraziti preko sfernih koordinata pomoću formula:

$$\begin{aligned}
 D_{xk} &= \rho_k \cos \psi_k \cos \theta_k, \\
 D_{yk} &= \rho_k \sin \psi_k \cos \theta_k, \\
 D_{zk} &= \rho_k \sin \theta_k, \\
 \rho_k &= |\vec{D}_k|
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Računanjem komponentata vektora \vec{D}_k po (15), iz (16) odredjujemo uglove ψ_k koje projekcije vektora \vec{D}_k na srednju ravan zaklapaju sa x -osom. Grupisanjem uglova ψ_k po klasama od po 10° dobili smo njihovu raspodelu koja nam u stvari predstavlja raspodelu perihela putanja malih planeta po longitudi (tablica 9 i sl. 6).

Tablica 9

ψ	f	ψ	f	ψ	f
10°	59	130°	30	250°	79
20	53	140	29	260	95
30	60	150	37	270	82
40	47	160	39	280	81
50	43	170	39	290	90
60	34	180	42	300	99
70	33	190	58	310	80
80	42	200	53	320	88
90	32	210	59	330	94
100	31	220	48	340	73
110	34	230	57	350	77
120	33	240	70	360	42



Sl. 6

Raspodela pokazuje jako izraženu neravnomernost koja se sastoji u tome što je za vrednosti ugla ψ između 230° i 350° zbir frekvencija dva puta veći od zbira frekvencija za sve preostale vrednosti. Računanjem ugla ψ_j za perihel Jupitera dobili smo vrednost $\psi_j = 295^\circ$, što odgovara sredini koncentracije longituda perihela. Iz histograma na sl. 6 se vidi da je raspodela po ψ u velikoj meri simetrična u odnosu na ψ_j .

Objašnjenje neravnomernosti, odnosno koncentracije longituda perihela malih planeta oko longituda perihela Jupitera dao je još Njukomb na osnovi teorije sekularnih poremećaja. Saglasno njegovoj teoriji, srednji elementi putanja malih planeta trpe dugoperiodične poremećaje od strane velikih planeta sa periodama od nekoliko desetina hiljada

godina. Integracijom diferencijalnih jednačina dolazi se do rezultata koji daje poremećene vrednosti ekscentričnosti putanje i longituda njenog perihela. Taj rezultat moguće je zapisati u obliku:

$$(17) \quad \begin{aligned} e \cos \bar{u} &= A \cos \bar{u}_1 + p \cos \alpha \\ e \sin \bar{u} &= A \sin \bar{u}_1 + p \sin \alpha \end{aligned}$$

gde su A i \bar{u}_1 konstante integraljenja - sopstvena ekscentričnost i sopstvena longituda perihela, a p i α su neke funkcije velike poluose putanje male planete. Ispitivanja jednačina (17), koja je za savremenu raspodelu putanja izvršio Kiang [12] pokazala su da raspodela longituda perihela malih planeta ima maksimum oko 0° , a minimum oko 180° , što u odnosu na srednju ravan odgovara vrednostima od 282° i 102° . Lotmen [13] je pokazao da, u zavisnosti od sopstvene ekscentričnosti i velike poluose, longituda perihela može imati libracioni ili rotacioni karakter promene u odnosu na longitudu Jupiterovog perihela. Danielson [14] je ispitivao brzine promene longituda perihela malih planeta i zaključio da one imaju minimum u pravcu perihela Jupitera, a maksimum u suprotnom pravcu.

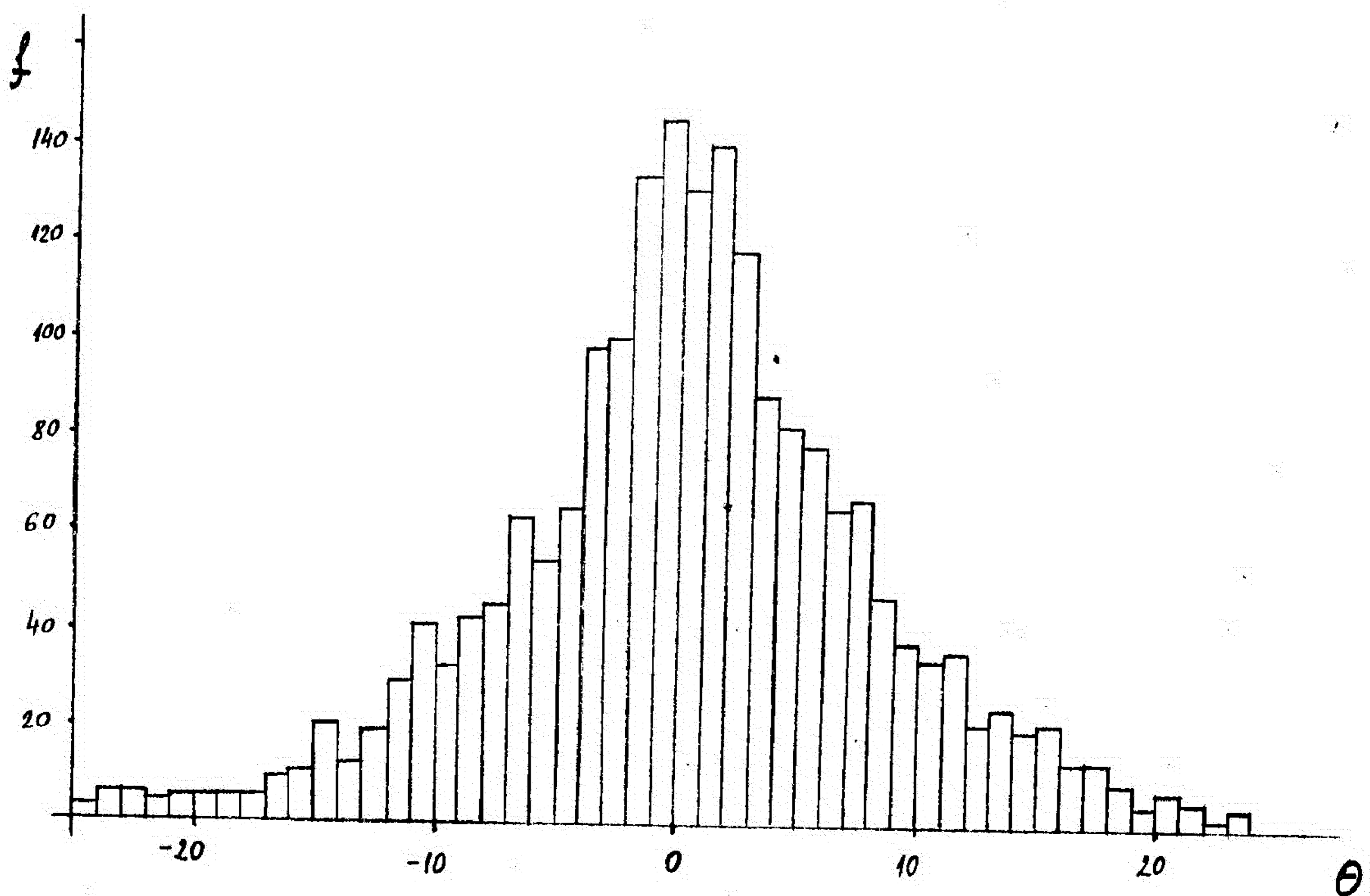
7. RASPODELA PERIHELNIH VEKTORA PO NAGIBU PREMA

SREDNJOJ RAVNI. Kompletniju sliku o raspodeli perihela malih planeta ćemo dobiti ako razmotrimo raspodelu njihovih pravaca po nagibu prema srednjoj ravni. Računanjem uglova θ_k iz (16) dobili smo uglove koje pojedinačni vektori \vec{D}_k zaklapaju sa srednjom ravni. Frekvencije raspodele ug-

Ilova θ_k u klasama od po 1° date su u tablici 10 i prikazane na sl. 7.

Tablica 10

θ	-30	-30	-29	-28	-27	-26	-25	-24	-23	-22	-21
f	3	-	1	1	1	2	3	6	6	4	5
θ	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10
f	5	5	5	9	10	20	12	19	29	41	32
θ	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1		
f	42	45	63	54	65	98	100	134	145		
θ	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
f	131	140	118	88	82	78	65	67	47		
θ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f	38	34	36	21	24	20	21	13	13	9	4
θ	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	30
f	7	5	2	3	4	-	1	1	1	1	3



Sl. 7

U ovom slučaju dobili smo raspodelu koja na prvi pogled podseća na normalnu. Medjutim, ispitivanja su pokazala da se hipoteza o normalnoj raspodeli može odbaciti sa velikom verovatnoćom.

Od ukupno 2042 planetoida, za njih 965 periheli se nalaze ispod srednje ravni, a za 1077 iznad srednje ravni. Pri tome za skoro polovinu planetoida perihelski pravci su rasporedjeni oko srednje ravni; njihovi nagibi su u granicama od -4° do $+4^\circ$ i to tako rasporedjeni da ih ima u podjednaku broju iznad i ispod srednje ravni. Povećan broj perihela malih planeta iznad srednje ravni rezultira za nagibe njihovih pravaca između 4° i 18° . Kao što vidimo, neravnomernost raspodele longituda perihela praćena je još većom neravnomernošću raspodele nagiba njihovih pravaca prema srednjoj ravni.

Računanjem ugla koji perihelski pravac Jupitera zaklapa sa srednjom ravni, dobili smo iznos $\theta_j = -0.787$, što znači da se nalazi na levoj strani maksimuma raspodele. Medjutim samo na osnovu raspodele nagiba perihelskih pravaca malih planeta ne može se sagledati kako se odnose prema pravcu Jupiterovog perihela.

8. DVOJNA RASPODELA PERIHELNIH VEKTORA - PO LONGITUDI I NAGIBU. Da bismo dobili potpuniju sliku o raspodeli perihela malih planeta, posmatrajmo dvojnju frekvenciju njihove raspodele - po longitudi i nagibu njihovih pravaca. Grupisanjem po uglu ψ u klasama od po 20° i nagibu θ u klasama od po 2° , dobili smo takvu raspodelu koja je prikazana

u tablici 11, pri čemu smo se zadržali na nagibe između -12° i $+12^\circ$.

Tablica 11

$\psi^\circ \backslash \theta^\circ$	-12	-12	-10	-8	-6	-4	-2	2	4	6	8	10	12	12
20	5	7	3	6	9	6	14	15	8	10	13	2	4	10
40	9	7	3	3	8	15	13	15	9	5	3	6	3	8
60	4	2	7	2	0	10	11	9	10	7	2	3	2	8
80	3	2	5	1	4	4	10	13	12	5	5	3	3	5
100	5	3	1	3	5	4	8	11	8	5	3	1	3	3
120	5	1	4	7	1	9	12	8	3	3	8	1	0	5
140	2	2	3	1	4	4	5	7	9	7	2	4	2	7
160	4	3	2	6	5	9	11	8	6	3	4	6	2	7
180	5	4	5	4	3	10	8	12	11	4	4	3	3	5
200	9	1	3	5	11	11	13	10	13	12	9	5	2	7
220	5	4	6	7	6	11	9	12	8	9	8	6	8	8
240	5	3	8	3	8	13	19	12	13	13	6	6	5	13
260	4	7	6	9	13	19	25	28	18	15	10	9	3	8
280	10	9	5	10	7	11	31	18	12	16	10	6	8	10
300	15	2	4	12	12	14	29	33	14	12	17	7	7	11
320	14	4	5	8	9	27	21	22	17	10	7	6	3	15
340	10	4	2	16	10	10	26	16	15	12	14	6	8	18
360	3	5	2	5	4	11	14	22	20	12	7	5	4	5

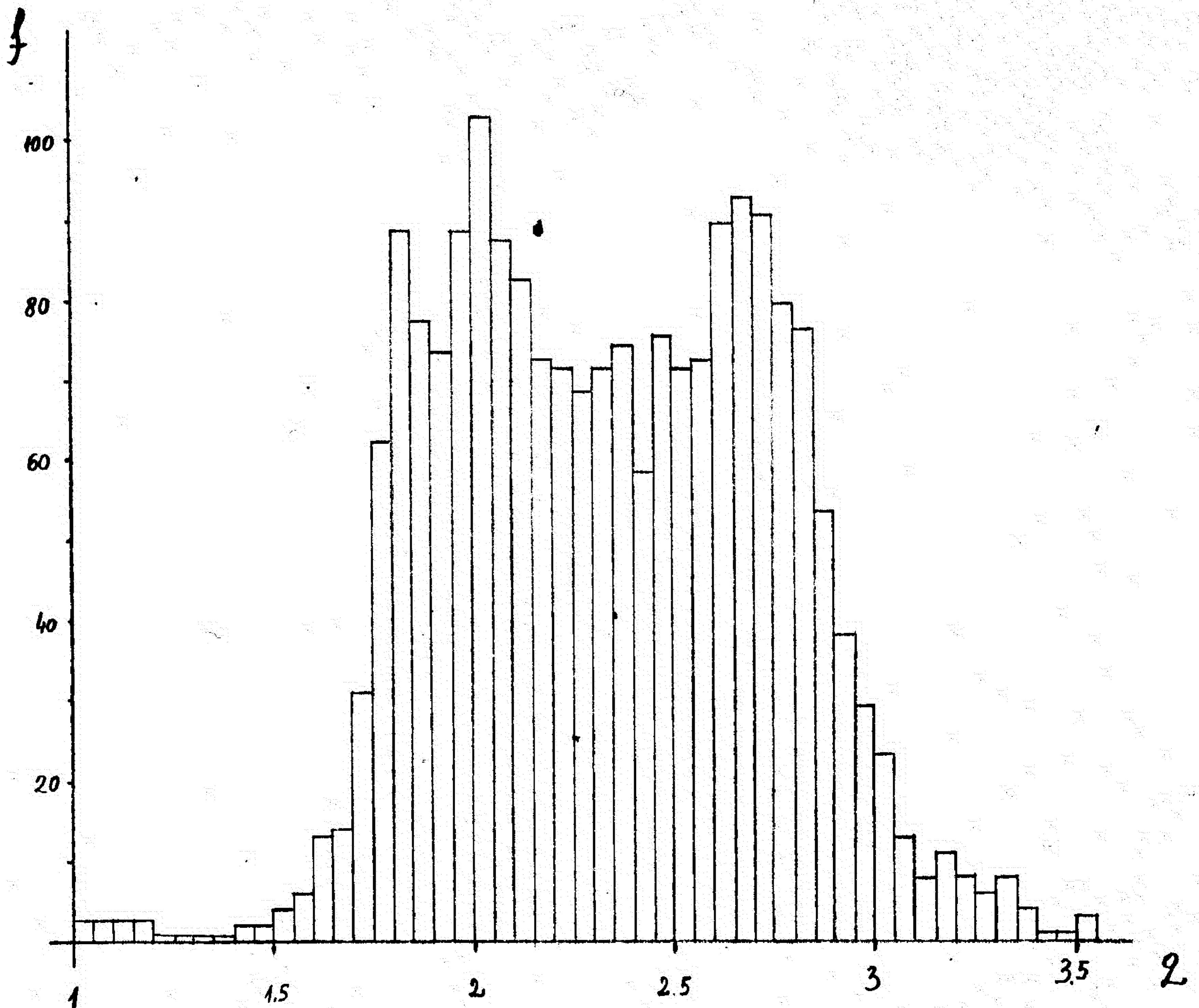
Ovu raspodelu, kako se i očekivalo, takodje odlikuje neravnomernost i koncentracija oko pravca ka perihelu Jupitera. Pri tome zapaža se da je oko longituda perihela Jupitera povećan broj perihela malih planeta ne samo u blizini

srednje ravni (gde je najizrazitije), već skoro na svim ugaonim udaljenjima od nje.

9. RASPODELA PERIHELNIH DALJINA. Prostornu raspodelu planetoidskih perihela u potpunosti možemo sagledati ako u obzir uzmemo i njihove daljine od Sunca. Računanjem perihelnih daljina

$$q_k = a_k (1 - e_k)$$

i njihovim grupisanjem u klasama koje se razlikuju za po 0.05 AU dobili smo raspodelu koja je prikazana histogramom na sl. 8 .



Sl. 8

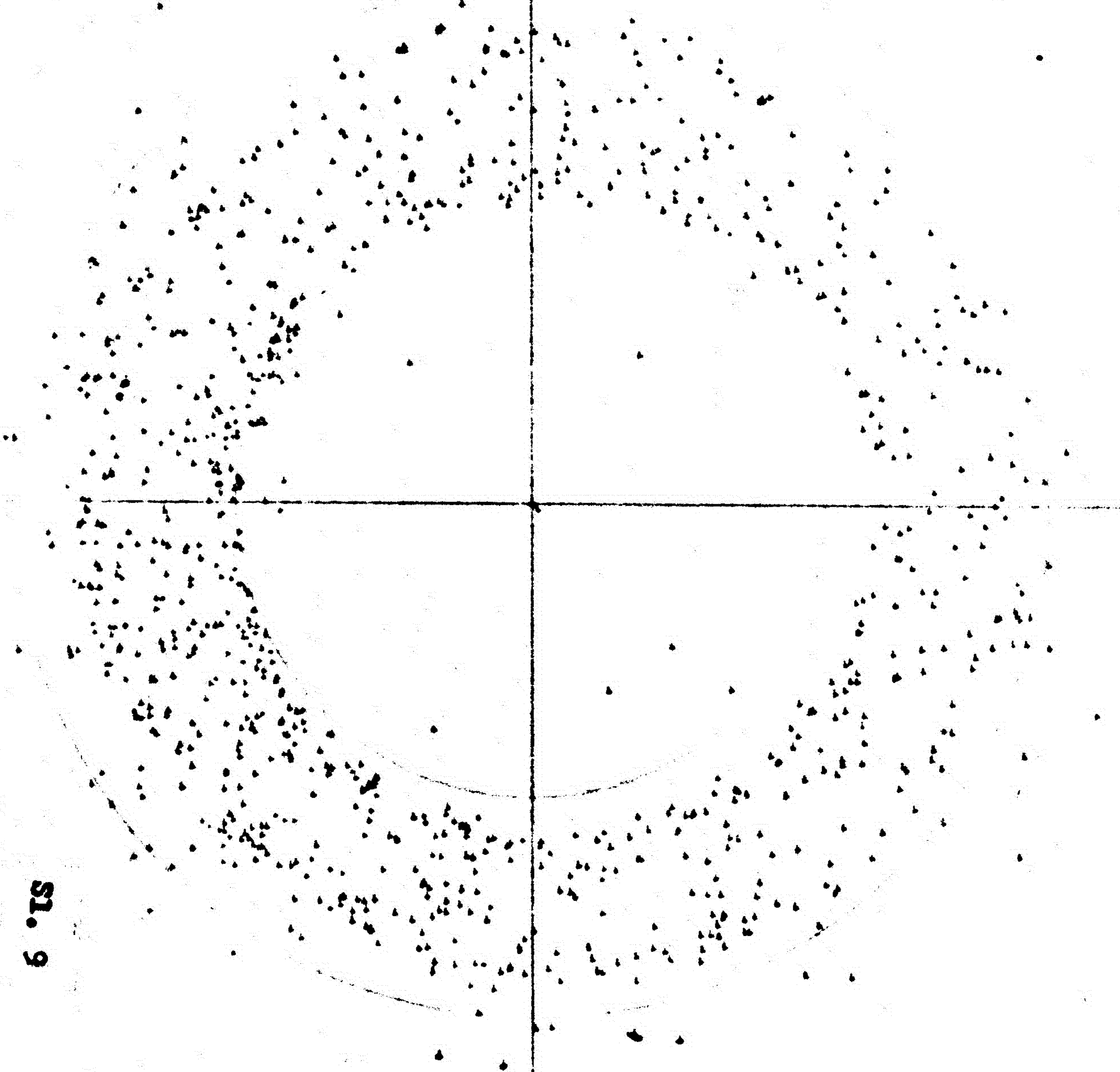
Ova raspodela ima nepravilan karakter i karakteriše se sa dva slabije izražena maksimuma; jedan u okolini 2 AU koji je nešto izraženiji i drugi kod 2.7 AU. Sa leve strane raspodele pad frekvencija je nagli i male frekvencije se javljaju kod 1.7 AU, dok sa desne strane taj pad je nešto umereniji, sa malim frekvencijama posle 3.05 AU.

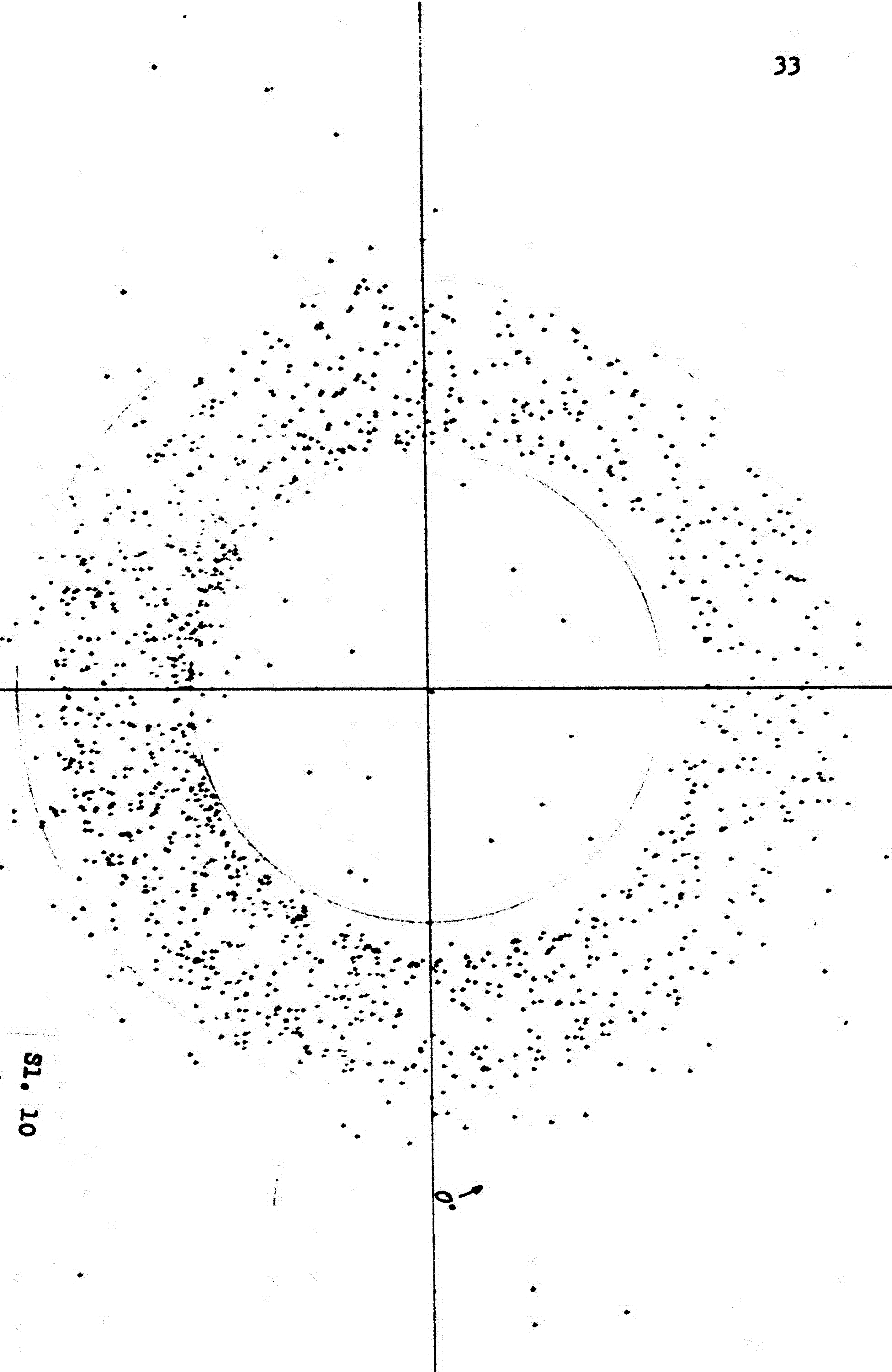
Zahvaljujući okolnosti što je raspodela perihela po nagibima njihovih pravaca pokazala njihovu koncentraciju oko srednje ravni, možemo dobro predstaviti raspored perihela po njihovim longitudama i daljinama. Na sl. 9 prikazan je takav raspored perihela malih planeta čiji pravci sa srednjom ravni zaklapaju uglove do $\pm 4^\circ$, a na sl. 10 čiji pravci odstupaju do $\pm 8^\circ$ od srednje ravni. Prvim slučajem obuhvaćeno je 959 planetoida, a drugim 1478. U oba slučaja uzimane su prave perihelne daljine (a ne njihove projekcije na srednju ravan), pa tako možemo uporediti osobenosti raspodele perihela koji više odstupaju od srednje ravni, sa osobenostima raspodele perihela koji su bliži njoj.

U ovakvim raspodelama može se zapaziti da su periheli rasporedjeni unutar jednog prstena koji sa unutrašnje strane (prema Suncu) ima oštrije granice nego sa spoljne. Broj planetoida čiji se periheli nalaze bliže Suncu (prelaze unutrašnju granicu) je vrlo mali i pokazuje se da je to više osobina za planetoide čiji perihelni pravci više odstupaju od srednje ravni. Periheli čiji su pravci bliži srednjoj ravni pokazuju veću koncentraciju, i to u širim grani-

Sl. 9

0





Sl. 10

0.1

cama, oko pravca ka perihelu Jupitera, dok su periheli koji više odstupaju od srednje ravni nešto ravnomernije raspoređeni.

Kao jedna od karakteristika ovako odredjenog prstena javlja se što su njegove granice podjednako udaljene od Sunca sa spoljne strane, dok sa unutrašnje strane to nije slučaj. Unutrašnja granica oko longitude $\psi=250^\circ$ nalazi se na daljini od oko 1.7 AU, dok na dijametralno suprotnoj strani, u širokom ugaonom intervalu, unutrašnja granica je na oko 2.1 AU.

II. OPŠTA STRUKTURA PLANETOIDSKOG PRSTENA

Imajući u vidu lokaciju planetoidskog prstena u okviru Sunčevog sistema, njegova savremena struktura sigurno je rezultat jedne duge evolucije koja se vršila pod uticajem gravitacionih i drugih sila. Ispitivanjem savremene raspodele malih planeta po njihovim putanjskim elementima i drugim veličinama koje ih karakterišu (zvezdane veličine, albedo, mase i t.d.) mogu se napraviti modeli razvoja planetoidskog prstena u kosmogoniski dugačkim vremenim intervalima. Takvi modeli mogu da dovedu do prvobitne strukture prstena, odnosno epohe stvaranja planetoida, što je u uskoj vezi sa pitanjem nastanka i razvoja Sunčevog sistema u celini. Kako je polazna osnova bilo kog modela savremena struktura prstena, ostaje neophodnost još detaljnijeg njenog upoznavanja, jer dosadašnja znanja nisu se pokazala dovoljna da bi služila za solidnu osnovu pri razmatranju tako kompleksnog pitanja.

Poznavanje savremene strukture prstena neophodno je i pri razmatranju drugih pitanja; pre svega veza planetoida i meteora, kao i pitanja (koja se već javljaju) prilikom međuplanetskih letova kosmičkih aparata.

1. RASPODELA MALIH PLANETA PO SREDNJEM DNEVNOM KRETANJU. Od 2042 numerisana planetoida preko 97 % imaju

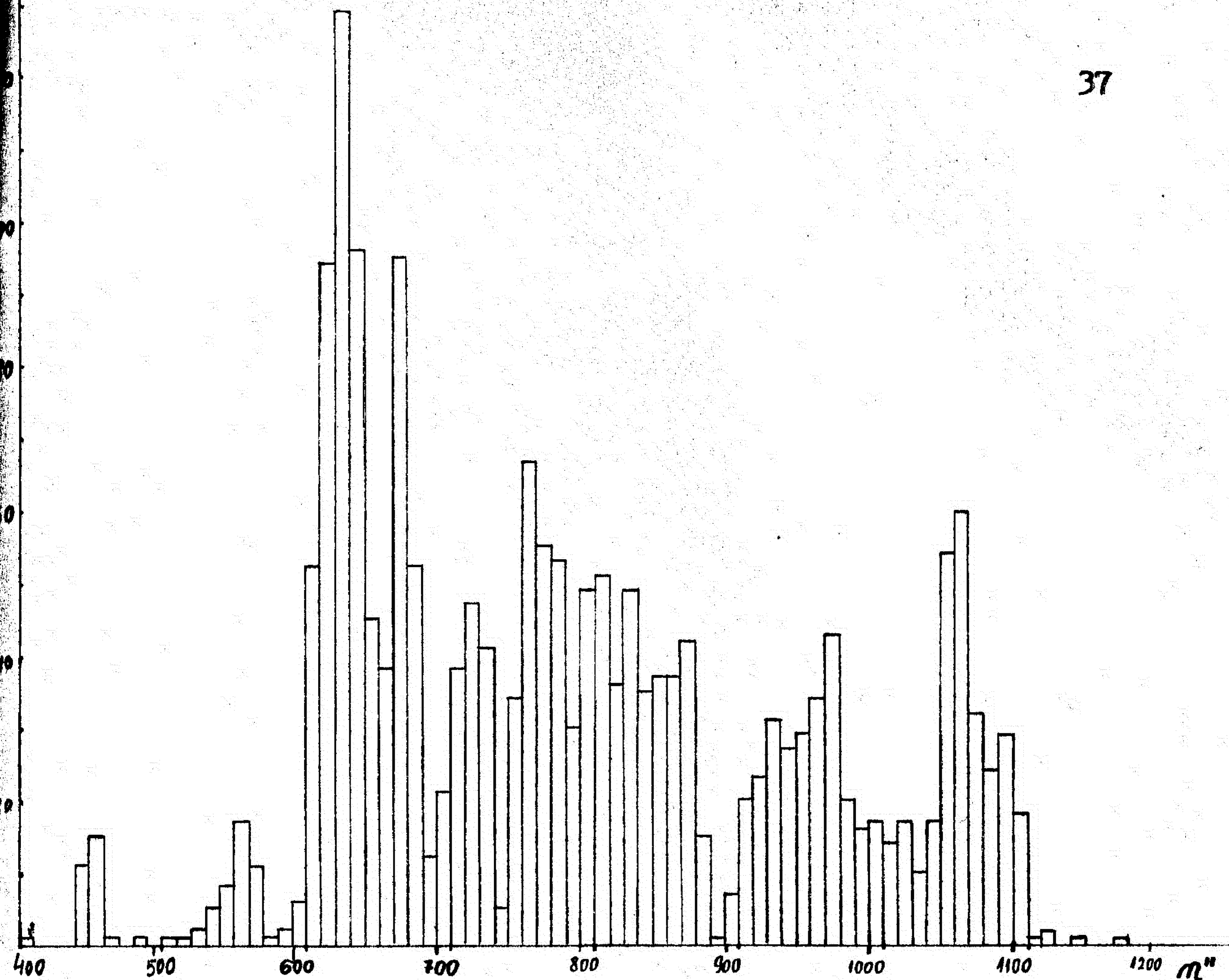
putanje sa velikim poluosama $2.06 \leq a \leq 4.09$ (odnosno srednje dnevno kretanje $1200'' > n > 400''$) i oni čine planetoidski prsten. Van tog prstena nalazi se 56 malih planeta: 23 sa srednjim dnevnim kretanjem manjim od $400''$ i 33 sa većim od $1200''$. Po Kiangu [12] prsten je podeljen na dve oblasti: unutrašnja ($2.153 \leq a \leq 2.956$) i spoljašnja ($2.964 \leq a \leq 4.282$), dok po Čebotarjevu [9,10] planetoidski prsten u odnosu na srednje dnevno kretanje može se podeliti na 5 zona, kako je prikazano u tablici 12 (broj planetoida N dat je na osnovu elemenata putanja iz [7]).

Tablica 12

ZONA	n''	a	N
A	400 - 500	4.29 - 3.69	29
I	500 - 700	3.69 - 2.95	667
II	700 - 900	2.95 - 2.50	743
III	900 - 1110	2.50 - 2.17	542
B	1110 - 1200	2.17 - 2.06	5

Raspodela malih planeta po srednjem dnevnom kretanju pokazuje neke osobenosti koje ne srećemo kod raspodela po ostalim putanjskim elementima. Ova raspodela karakteriše se jako izraženim maksimumima i minimumima koji su poredjani bez neke pravilnosti. Na sl. 11 prikazan je histogram raspodele malih planeta po srednjem dnevnom kretanju (za 2042 male planete) u klasnim intervalima od po $10''$.

U poredjenju sa istim raspodelama koje su izvršene sa manjim brojem planetoida, sve karakteristike i u našem slučaju su u potpunosti sačuvane.



Sl. 11

Minimumi, koji su jako izraženi, nazvani su Kirkvudove praznine, po D. Kirkvudu koji je prvi zapazio ovu izuzetnu karakteristiku raspodele planetoida po njihovom srednjem dnevnom kretanju. Kirkvud ne samo što je uočio ovu karakteristiku, već je i pretpostavio da su praznine uslovljene poremećajnim uticajem Jupitera u kretanju planetoida. Veza izmedju ove pojave i poremećajnog uticaja velikih planeta, i to pre svega Jupitera, proizilazi iz činjenice da se praznine javljaju na mestima gde postoji samerljivost srednjeg dnevnog kretanja malih planeta n sa srednjim dnevnim kretanjem neke od velikih planeta n' :

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ i } q - \text{celi brojevi})$$

Za ekscentričnosti planetoidskih putanja bilo je zapaženo da u blizinama samerljivosti za koje je $n < n_0$ (n_0 - tačna samerljivost sa srednjim dnevnim kretanjem Jupitera, $n_0 = n' \frac{p}{2}$) imaju veću srednju vrednost od ekscentričnosti putanja planetoida sa $n > n_0$. Usled toga javlja se tendencija ka stvaranju malih mesnih grupa za samerljivosti sa $n > n_0$ i rasturanja sa $n < n_0$. Pri tome je razlika u srednjim ekscentričnostima putanja sa jedne i druge strane samerljivosti primetnija, što god je poredak samerljivosti (razlika $p - q$) manji.

Ispitivanja Batrakova [15] sa 1616 planetoida i Olevića [16] sa 1735 planetoida pokazala su da je broj planetoida N_i , čija srednja dnevna kretanja zadovoljavaju nejednačinu $n_0 < n < n_0 + \Delta n$, jednak ili veći od broja planetoida N_a za koje je zadovoljeno $n_0 - \Delta n < n < n_0$ za sve samerljivosti izuzev za 3/1. Ova osobina zadržana je i kod istih statističkih ispitivanja koja smo izvršili sa 2042 male planete.

U raspodeli samih Kirkvudovih praznina javlja se asimetrija koja se sastoji u tome što su centri praznina pomereni ka Jupiteru u odnosu na tačne samerljivosti. Ova asimetrija javlja se i kod statističkih ispitivanja koja je izvršio Vejsel [17]. On je za samerljivosti 2/1, 3/1 i 5/2, polazeći od pretpostavke da je prvobitna raspodela malih planeta po velikoj poluosi bila ravnomerna, pokazao da je verovatnoća postojanja orbita sa manjim poluosama većá nego za orbite sa većim poluosama. Slični rezultati su dobijani i

pri numeričkom integraljenju diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja u dužim vremenim intervalima.

U brojnim radovima pokazane su još neke osobine, karakteristične za planetoide čija se dnevna kretanja nalaze u blizinama samerljivosti.

Pri pokušajima da se objasni pojava Kirkvudovih praznina polazilo se od raznih pretpostavki. Tako na primer Batrakov [15] objašnjenje traži u rešenju ograničenog problema tri tela, dok Hagihara uvodi pretpostavku da je do stvaranja praznina došlo usled međusobnih poremećaja planetoida oko njihovih proksimiteta. Pravljeni su i pokušaji da se praznine objasne samim procesom nastanka i evolucijom planetoidskog prstena. I pored višebrojnih raznovidnih hipoteza o nastanku prstena, može se smatrati da je ovaj problem još uvek otvoren.

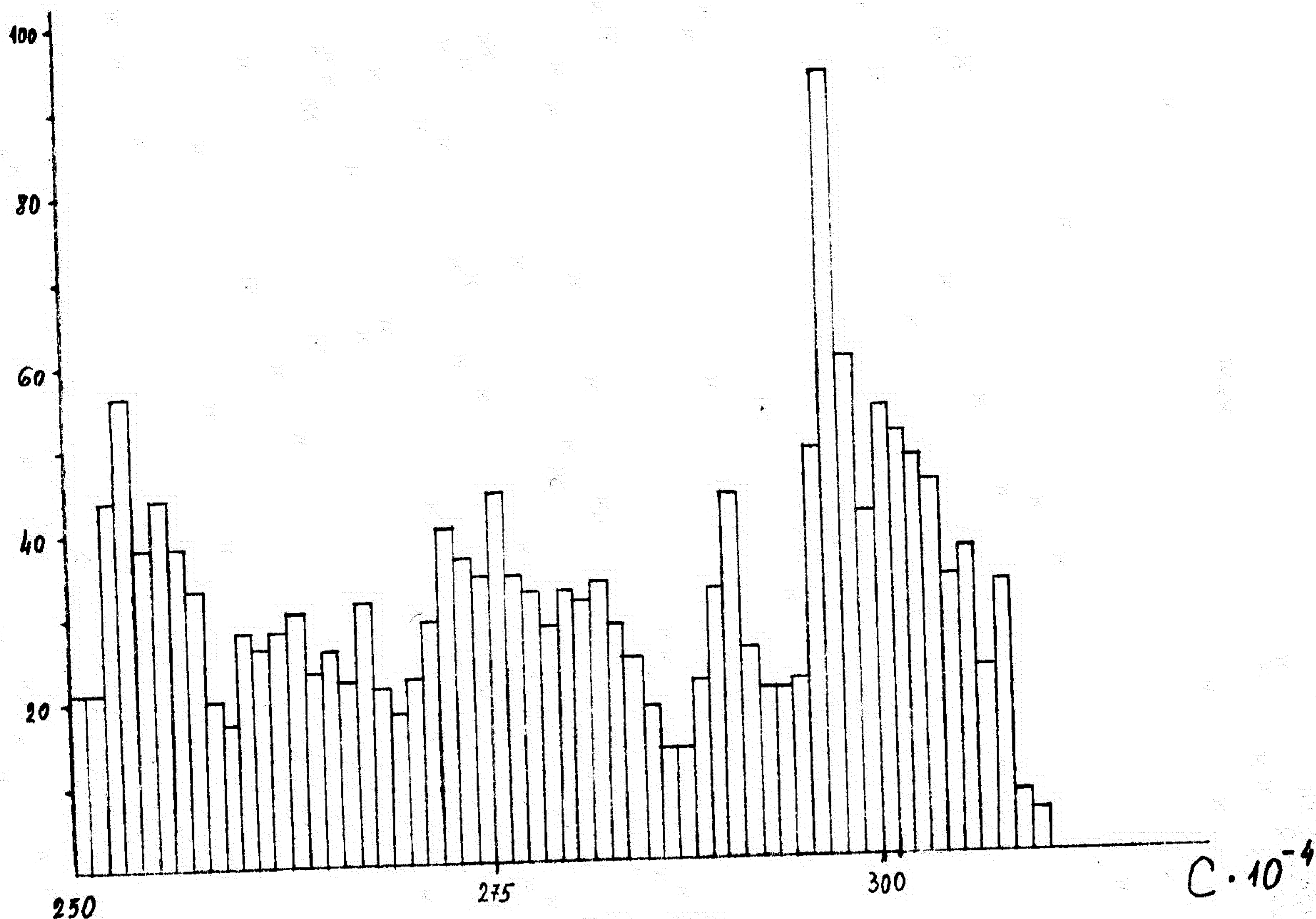
2. RASPODELA MALIH PLANETA PO SEKTORSKOJ BRZINI.

S obzirom na vezu koja postoji između intenziteta sektorske brzine C i srednjeg dnevnog kretanja n :

$$C = k \sqrt[3]{\frac{k}{n}} \cos \varphi,$$

napravimo raspodelu malih planeta po intenzitetima njihovih sektorskih brzina. Na sl. 12 prikazan je histogram ove raspodele u klasnim intervalima za C od po 0.0001.

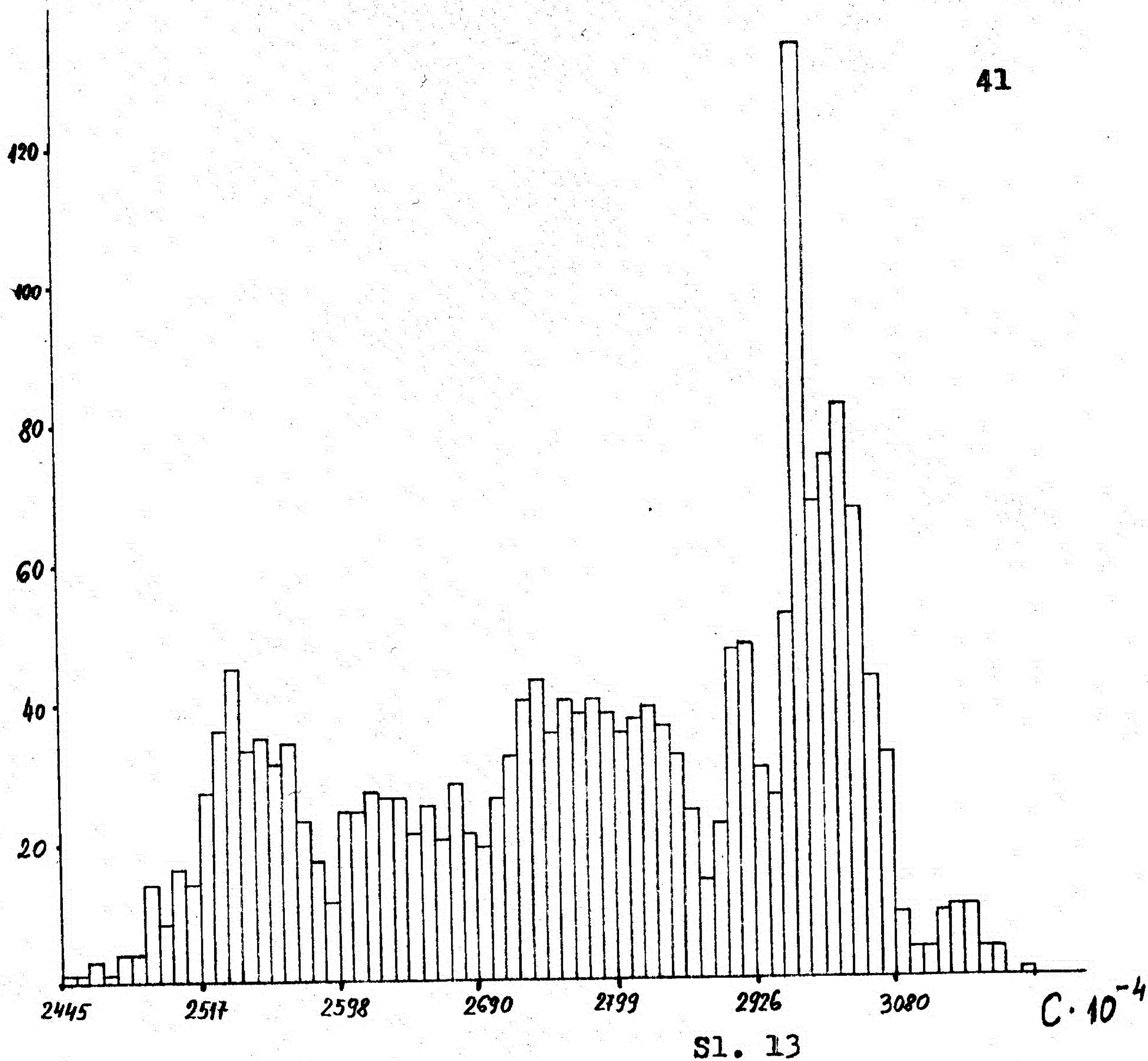
Kako se i moglo očekivati, ovde je takodje prisutna jako izražena neravnomernost raspodele koja se najviše ogleda u pojavi dva maksimuma, jedan kod $C = 0.0253$ i drugi,



Sl. 12

mного izraženiji, kod $C = 0.0297$. Očigledna je i razlika u frekvencijama sa levih i desnih strana maksimuma; sa levih strana pad frekvencija je nagli, dok sa desnih strana njihovo opadanje je stepenasto. Jako izraženih minimuma ovde skoro da nema - izraženi su mnogo slabije nego kod raspodele po n .

Da bismo mogli izvršiti direktno uporedjenje raspodele po intenzitetu sektorske brzine sa raspodelom po srednjem dnevnom kretanju, izvršimo sažimanje klasnih intervala sa leve strane, a proširivanje na desnoj, tako da raspodela po C približno odgovara desetsekundnoj raspodeli po srednjem dnevnom kretanju. Na taj način dobili smo raspodelu po C



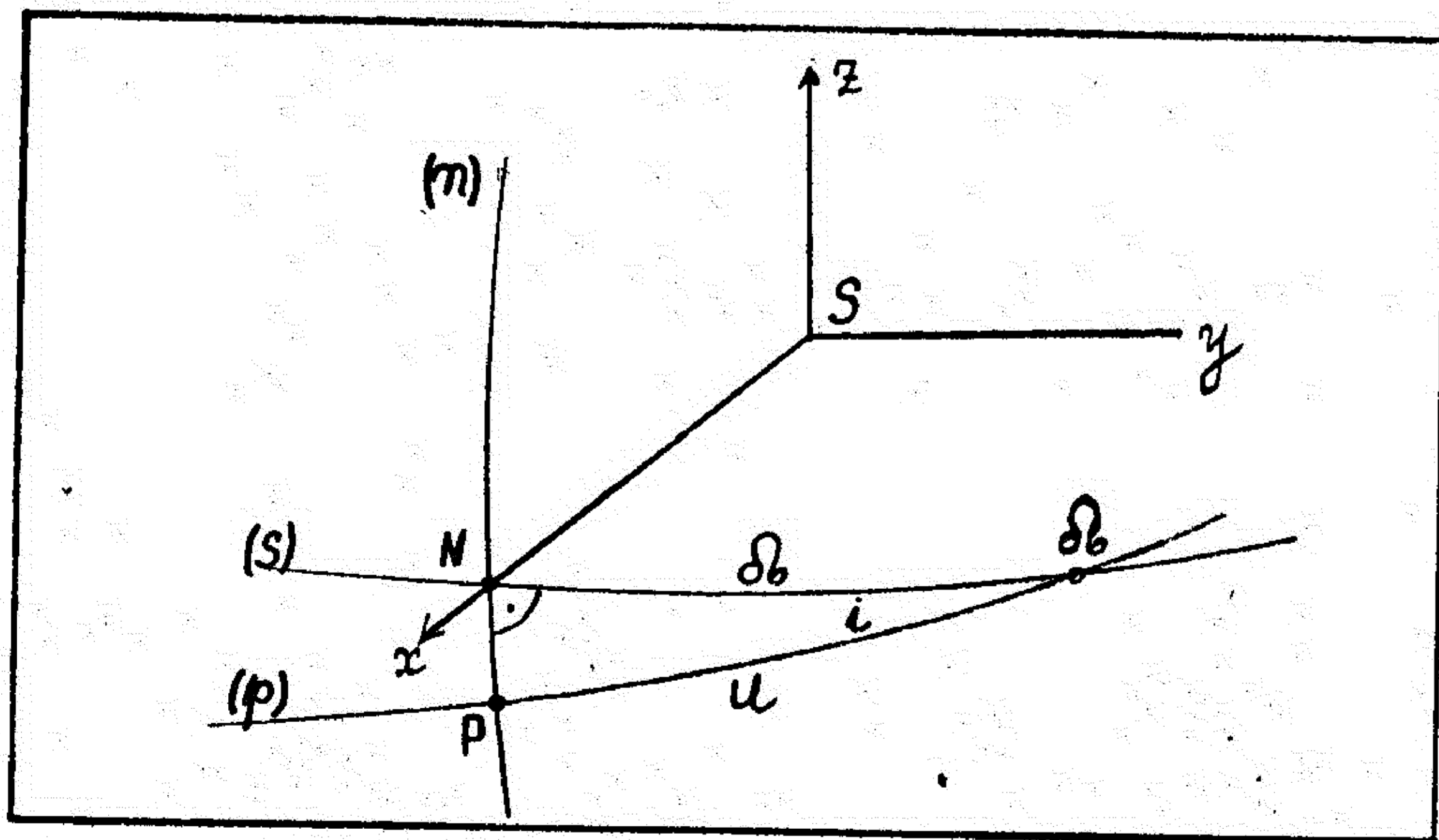
koja je prikazana na sl. 13.

Kontura raspodele po C sa tako odredjenim klasama podudara se sa grubom konturom raspodele po n . Medjutim, ovde je izostala pojava praznina, a na tim mestima zadržali su se minimumi. Očigledno je da ekscentričnost e igra tu ulogu da ovu raspodelu čini mnogo ravnomernijom u odnosu na raspodelu po n . Možda bi bilo interesantno dublje ispitati vezu izmedju C , a i e i ulogu ekscentričnosti u kretanju planetoida oko samerljivosti.

3. STRUKTURA PLANETOIDSKOG PRSTENA U POPREČNOM PRESEKU. Izgled planetoidskog prstena možemo nešto bolje

sagledati ako napravimo njegov presek sa nekom ravni koja je normalna na srednju ravan. Posmatranjem tačaka prodora pojedinačnih putanja malih planeta kroz takve normalne ravni možemo dobiti na najneposredniji način sliku stvarnog izgleda planetoidskog prstena i sagledati karakteristike raspodele putanja u pojedinim njegovim delovima.

Da bismo odredili koordinate tačaka prodora putanja, iskoristimo putanjske elemente numerisanih planetoida, preračunate u odnosu na srednju ravan. Postavimo normalnu ravan tako da prolazi kroz presečnu pravu srednje ravni i ravni ekliptike. Loci velikih krugova koji se dobijaju u preseku nebeske sfere sa: srednjom ravni (luk s), normalnom ravni (n) i putanjskom ravni (p), odredjuju sferni trougao $NP\Omega$ (sl. 14).



Iz pravouglog sfernog trougla $NP\Omega$ nalazimo stranicu u iz veze:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \delta_b \sec i$$

U odnosu na kvadrant u kome leži Ω lako odredjujemo kvadrant za u .

Preko ugla u i argumenta latituda perihela nalazimo pravu anomaliju v tačke prodora putanje male planete kroz normalnu ravan:

$$v = u - \omega$$

Pravougle koordinate x i z nalazimo po obrascima:

$$x = r (\cos \delta \cos u - \sin \delta \sin u \cos i)$$

$$z = r \sin u \sin i$$

dok je $y = 0$, s obzirom na položaj normalne ravni.

Koordinate za bilo koji željeni položaj normalne ravni dobijamo tako što ćemo izvršiti rotaciju koordinatnog sistema za željeni ugao $\Delta \delta$. Na taj način longituda uzlaznih čvorova putanja malih planeta dobijaju priraštaj $-\Delta \delta$, dok ostali putanjski elementi ostaju nepromenjeni.

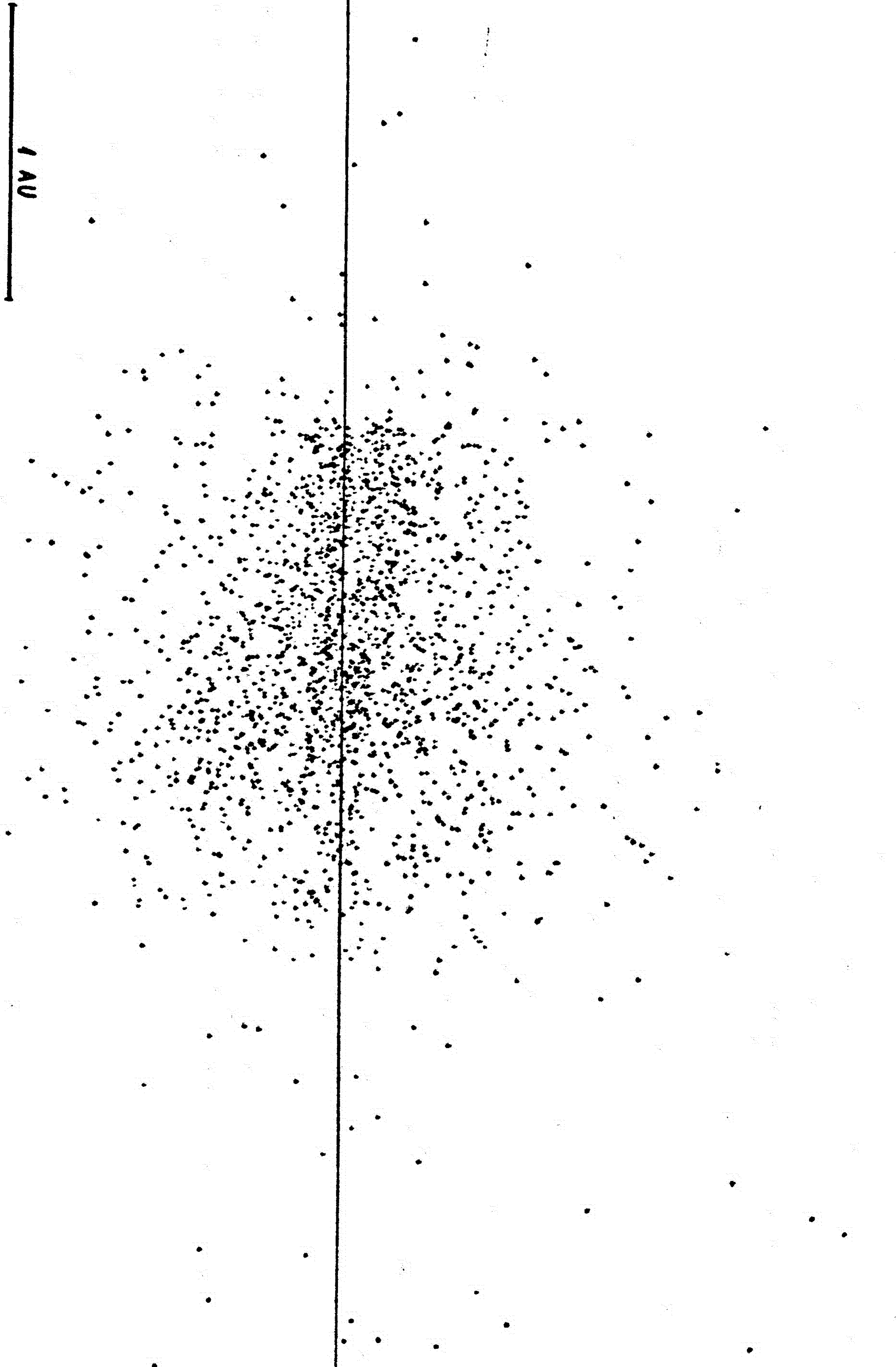
S obzirom na već ustanovljene karakteristike u raspodeli perihela putanja malih planeta, najpre postavimo normalnu ravan tako da prolazi kroz perihel Jupitera. Presek planetoidskog prstena za ovaj položaj normalne ravni prikazan je na sl. 15. Da bismo videli kako se menja izgled prstena u različitim pravcima od Sunca, izvršili smo njegove preseke na svakih 60° počev od pravca ka perihelu Jupitera (sl. 16 - 20).

Posmatranjem prstena u različitim presecima, mogu se uočiti neke karakteristike koje važe za bilo koji presek, odnosno za ceo prsten u celini. Prsten po gustini putanja možemo podeliti na 3 zone: zona sa najvećom gustinom putanja, zona sa umerenom gustinom putanja i periferna zona.

1 AU



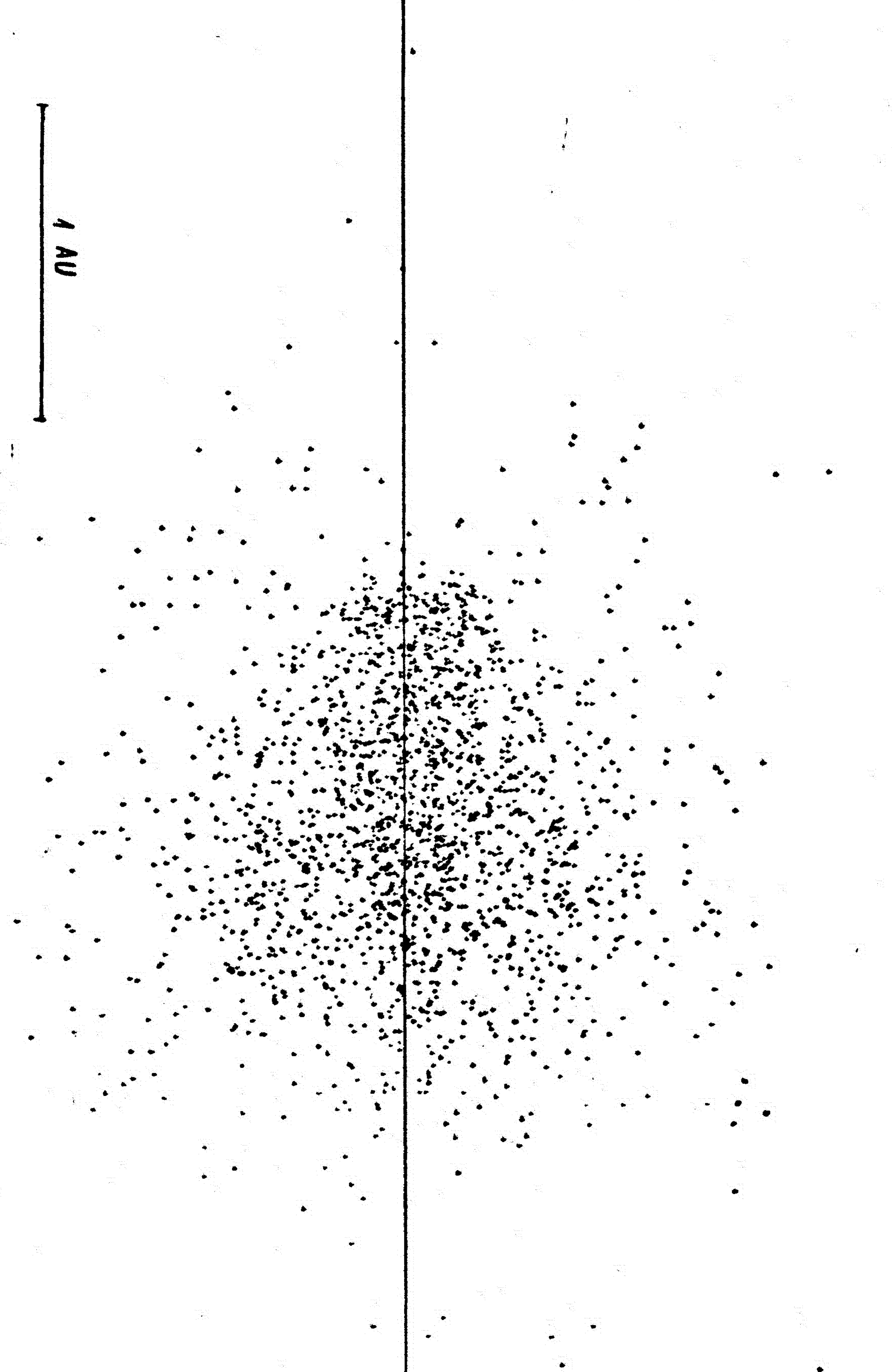
SI. 15



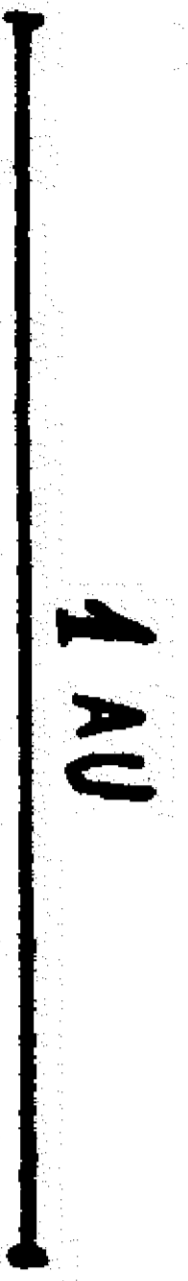
1 AU



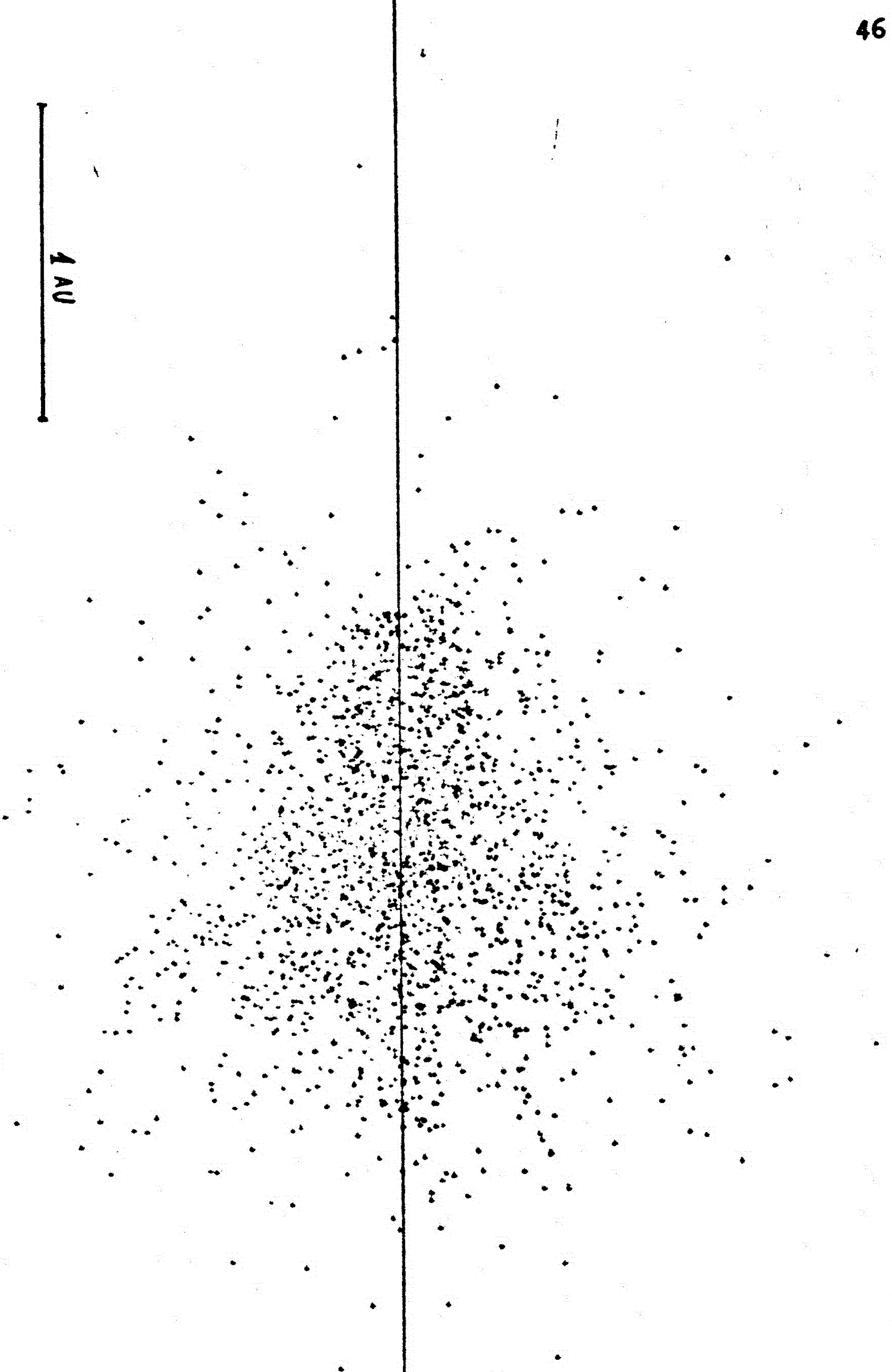
S1. 16



1 AU

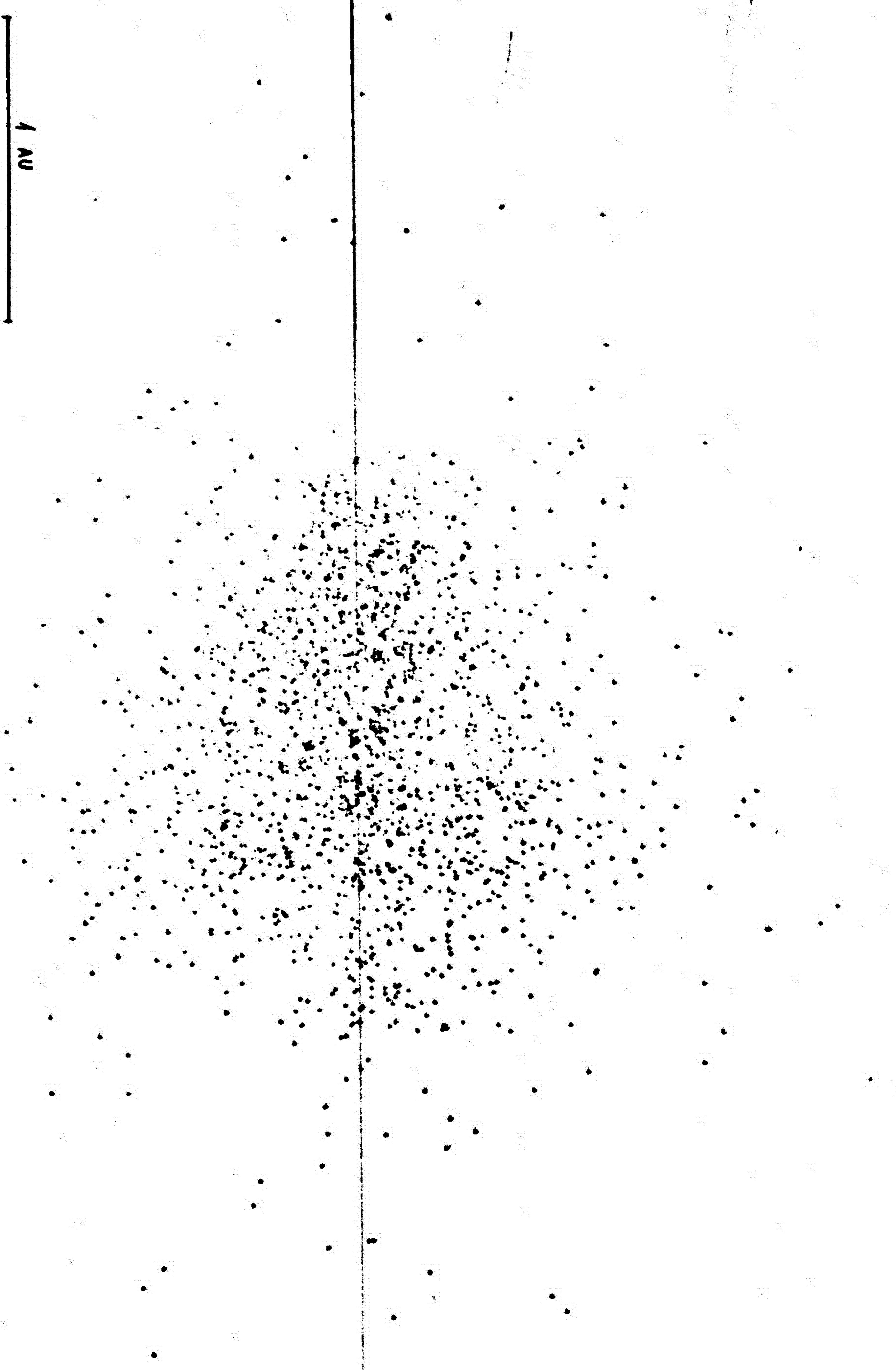


SI. 17



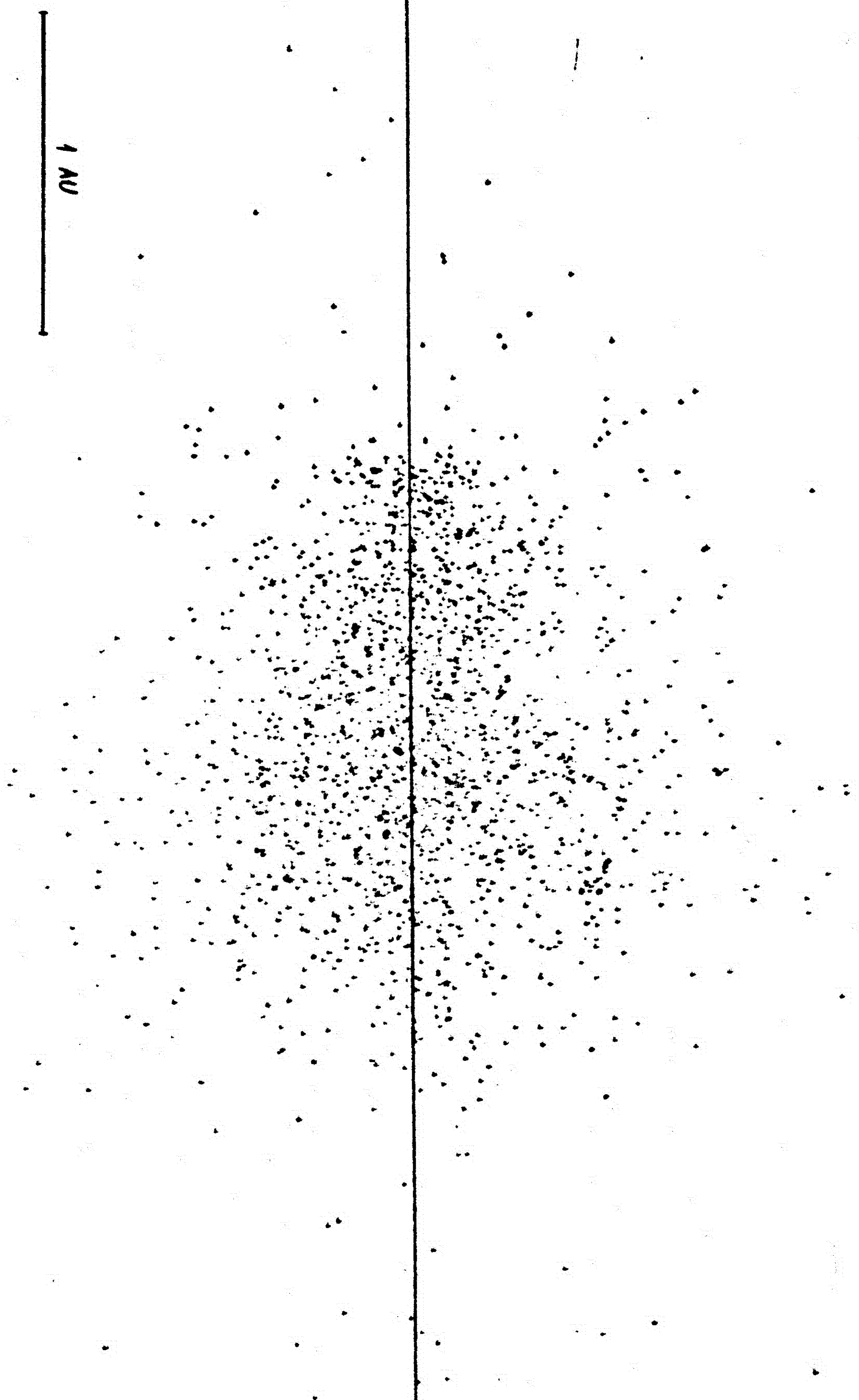
1 AU

Sl. 18



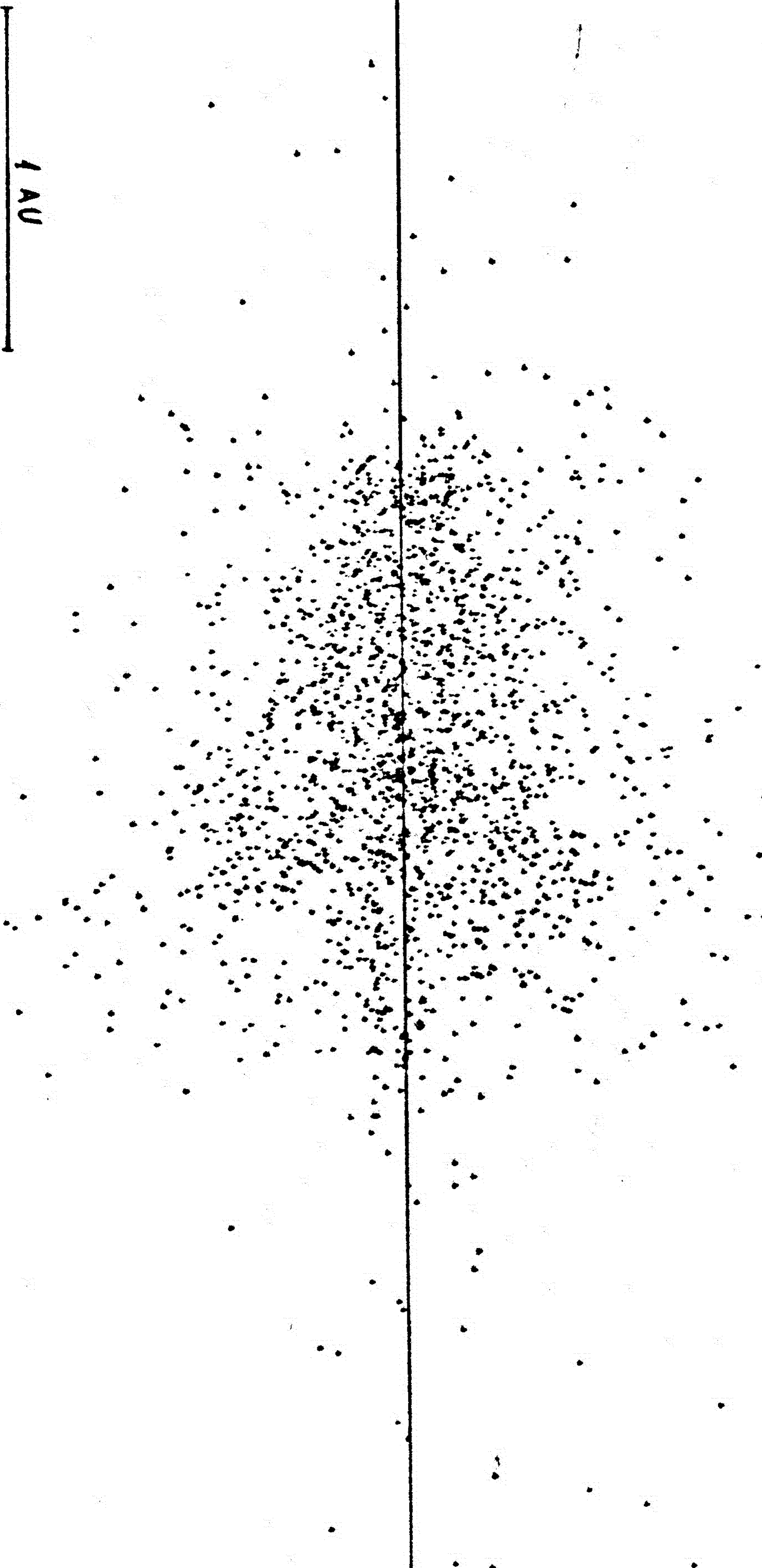
1 AU

SI. 19



1 AU

SI. 20



Planetoide sa izrazito malim i velikim poluosama isključujemo iz ovakvih globalnih razmatranja.

Posmatranjem planetoidskog prstena na ovaj način možemo izvršiti mnogo detaljnija njegova sagledavanja od onih koje je učinio Kresak [19, 20].

Raspored prodornih tačaka planetoidskih putanja za sve preseke, što znači inza prsten u celini, pokazuje neke osobenosti. S obzirom na veliki broj planetoida i osobenosti raspodela po njihovim putanjskim elementima, mogao se očekivati uglavnom haotičan raspored prodornih tačaka, sa zgušnjeljima u određenim zonama, kao posledica raspodele planetoida po srednjem dnevnom kretanju. Međutim, pokazalo se da se putanje u određenim delovima prostora grupišu na različite načine. Najčešće srećemo lančane grupacije prodornih tačaka, koje su na izvestan način povezane, a između grupacija nalaze se dosta uočljive praznine, sa jasno ocrtanim granicama, gde ne prolazi ni jedna putanja. U zoni najveće gustine srećemo i grupacije sa najvećim brojem članova. U zoni srednje gustine grupacije su manje (do desetak tačaka) i granasto raspoređene. U perifernoj zoni srećemo po neku manju grupaciju i individualne tačke koje u širem sektoru posmatrane kao da podsećaju na neku grupu koja se raspala. Samo na osnovu prodornih tačaka posmatrano, prsten izgleda kao da je u fazi rasturanja i to iz centralne zone, gde su već formirane veće grupacije, tačke u kolonama kao da napuštaju tu zonu da bi se dalje delimično ili potpuno rasturile, i to u svim pravcima sem prema Suncu.

Posmatranjem pojedinačnih preseka mogu se uočiti još neke globalne karakteristike prstena. Za položaj normalne ravni kada ona prolazi kroz perihel Jupitera, zona najveće gustine je najbolje ocrtana i to prazninama koje se međusobno nadovezuju i unekoliko je odvajaju od zone srednje gustine. Ova zona zauzima asimetričan položaj u odnosu na srednju ravan, a asimetrija se sastoji u tome što je upadljivo šira na strani prema Suncu (0.4 AU) i pomerenjena iznad srednje ravni, a sužava se prema Jupiteru (0.2 AU). Odlikuje se izvesnom simetrijom u odnosu na pravac prema perihelu Jupitera. Po dužini se prostire od 1.85 AU (sa jasno ocrtanim granicama) do 2.95 AU gde polako prelazi u zonu srednje gustine. Zona srednje gustine na strani prema Suncu je takodje uzanija i asimetrična (doseže do oko 0.6 AU iznad srednje ravni i do 0.25 AU ispod nje), da bi najveću širinu (± 0.9 AU) dostigla na oko 2.9 AU od Sunca, a zatim se ka Jupiteru sužava i po dužini doseže do oko 3.5 AU. Na ovu zonu nadovezuje se periferna zona sa malim brojem tačaka koja se po dužini prostire od 1.5 AU do 3.7 AU, a po širini do ± 1.4 AU.

Rotacijom normalne ravni za 60° u direktnom smeru, dobili smo nešto drukčiju sliku preseka planetoidskog prstena. Ovde granice zone najveće gustine nisu jasno ocrtane, a prsten ima skoro potpunu simetriju u odnosu na srednju ravan.

Na 120° od perihela Jupitera u odnosu na prethodni slučaj razlika je samo u tome što je zona sa većom gustinom na strani prema Suncu nešto uzanija.

Za položaj normalne ravni kada ona prolazi kroz afel Jupitera, posmatrano presek u celini, dobija se najpravnomerniji raspored prodornih tačaka. Ovde se javlja i najveći broj granastih grupa i to uglavnom sa manjim brojem tačaka.

Za preostala dva položaja normalne ravni, koji se međusobno malo razlikuju, karakteristično je da se ponovo javlja tendencija ka izrazižijem grupisanju u zonu najveće gustine i to već sa nekim znacima asimetrije.

Pošto struktura prodora putanja pokazuje najveće razlike u pravcima prema perihelu i afelu Jupitera, to je još jedna potvrda o nesumnjivoj ulozi poremećajnog uticaja Jupitera na strukturu planetoidskog prstena u celini.

Za svaki presek izračunali smo srednji vektor položaja $\vec{r}_s(x_s, y_s)$ prodornih tačaka, gde x_s i y_s odredjujemo kao aritmetičke sredine komponenata svih pojedinačnih vektora položaja:

$$x_s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad y_s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$

U zavisnosti od položaja normalne ravni u odnosu na položaj kada ona prolazi kroz perihel Jupitera (ugao φ), dobili smo sledeće vrednosti:

Tablica 13

φ	x_s	y_s	r_s
0°	2.5949	-0.0017	2.5949
60	2.7100	-0.0021	2.7100
120	2.8320	-0.0036	2.8320
180	2.8181	-0.0029	2.8181
240	2.6917	-0.0038	2.6917
320	2.5896	-0.0019	2.5896

Ukoliko zamislimo da su svi planetoidi približno iste mase i da se u jednom trenutku svi nađu u prodornim tačkama, onda bi vektor $\vec{\zeta}_s$ određivao težište takvog sistema. U našem slučaju vektor $\vec{\zeta}_s$ određuje nam sredinu prstena.

Kao što vidimo iz podataka, prsten nije podjednako udaljen od Sunca u svim pravcima, već je pre pravca ka Jupiterovom perihelu najbliži Suncu, a negde pre pravca ka afelu Jupitera najudaljeniji. Ovde smo dobili isti slučaj koji se javlja kod raspodele perihela malih planeta.

Male vrednosti koje smo dobili za komponentu Z_s ukazuju nam na ispravnost korišćenja srednje ravni, a to što imaju samo negativne vrednosti može da znači da su putanje sa većim poluosama tako rasporedjene, da su njihovi afeli u nešto većem broju ispod srednje ravni ili su pak potrebne još neke male korekcije da se dodje do suštinske srednje ravni.

4. NEKE FAMILIJE MALIH PLANETA. Hipoteza o stvaranju malih planeta usled raspada jednog ili više krupnih tela podstakla je da se ispravnost takve pretpostavke potraži u raspodeli putanjskih elemenata malih planeta. Hirajama je prvi uočio grupe planetoida koje odlikuje sličnost velikih poluosa njihovih putanja, ekscentričnosti i nagibi njihovih putanjskih ravni, a zatim je u svojim ispitivanjima uveo takozvane sopstvene putanjske elemente. Putanje malih planeta od trenutka stvaranja pa do sada postepeno su se menjale usled poremećajnog uticaja velikih planeta. Obračunavanjem gravitacionog efekta planeta na evoluciju planetoidskih putanja unazad, dolazi se do invarijantnih putanjskih elemenata - putanj-

skih elemenata koje su planetoidi imali blizu epohe stvaranja, koje je Hirajama nazvao sopstvenim elementima. Za njihovo odredjivanje on je iskoristio Laplas-Lagranževu trigonometrijsku teoriju vekovnih poremećaja. Rezultat integracije jednačina iz okvira te teorije može biti predstavljen u obliku:

$$\sin \varphi \cdot e^{\sqrt{t}} \bar{u} = A e^{\sqrt{t}} \bar{u}_1 + \sum_k H_k e^{\sqrt{t}} \bar{u}_k,$$

$$\sin i e^{\sqrt{t}} \bar{\omega} = B e^{\sqrt{t}} \theta_1 + \sum_k G_k e^{\sqrt{t}} \theta_k,$$

$$\bar{u}_1 = gt + \alpha,$$

$$\theta_1 = -gt + \beta,$$

gde su:

$\bar{u}, \bar{\omega}$ - longitude perihela i uzlaznog čvora putanje male planete,

A, B, α, β - konstante integraljenja,

\bar{u}_k, θ_k - funkcije putanjskih elemenata velikih planeta,

g, H_k, G_k - funkcije velike poluose male planete.

Konstante A i B od strane Hirajame bile su nazvane sopstvenom ekscentričnošću i sopstvenim nagibom, a \bar{u}_1 i θ_1 sopstvenom longitudom perihela i sopstvenom longitudom uzlaznog čvora. Sopstveni elementi poslužili su Hirajami da dopuni prvobitno nadjene grupe novim članovima i u otkrivanju novih grupa koje ranije nisu bile primećene u prostoru a, e, i . Grupe planetoida sa sličnim sopstvenim elementima nazvane su familijama i u početku ih je otkriveno 6.

Brauer [22] je, koristeći novu teoriju kretanja planeta i raspoložujući sa preko 1500 numerisanih planetoida, potvrdio postojanje 6 Hirajaminih familija i otkrio 12 novih pri čemu je koristio i konstantnost zbira $\bar{u}_1 + \theta_1$, a familija Flora bila je podeljena na 4 nove familije. Alfen [23] je otkrio da u okviru familije Flora postoje male planete kod kojih su svi sopstveni elementi dosta bliski i takve grupe nazvao je strujnim potocima. Po njegovom mišljenju, postojanje potoka znači da se stvaranje malih planeta produžilo do današnjih dana.

U definiciji familija i potoka ne postoje neki opštevažeći objektivni kriterijumi, već samo subjektivne procene autora o bliskosti sopstvenih elemenata. Prvi pokušaj uvođenja objektivnih kriterijuma izvršio je Arnold [24], koji je, koristeći Puasonov zakon, odredio skupove tačaka sa sličnim sopstvenim elementima i našao 37 familija u kojima ulazi preko 700 planetoida od oko 1700 ispitanih. Broj članova familija kreće se od 7 do 26.

Uključivanjem u razmatranje i planetoida slabog sjaja iz Palomar-Lajdenskog pregleda, otkriveno je 5 novih familija sa brojem članova između 28 i 77 [25], dok su neke ranije konstatovane familije i grupe izostale. Nadjeno je 36 potoka sa po više od tri planetoida, od kojih 13 sadrži po 7 i više članova. Pri ovome je rastojanje između parova orbita određeno preko formule:

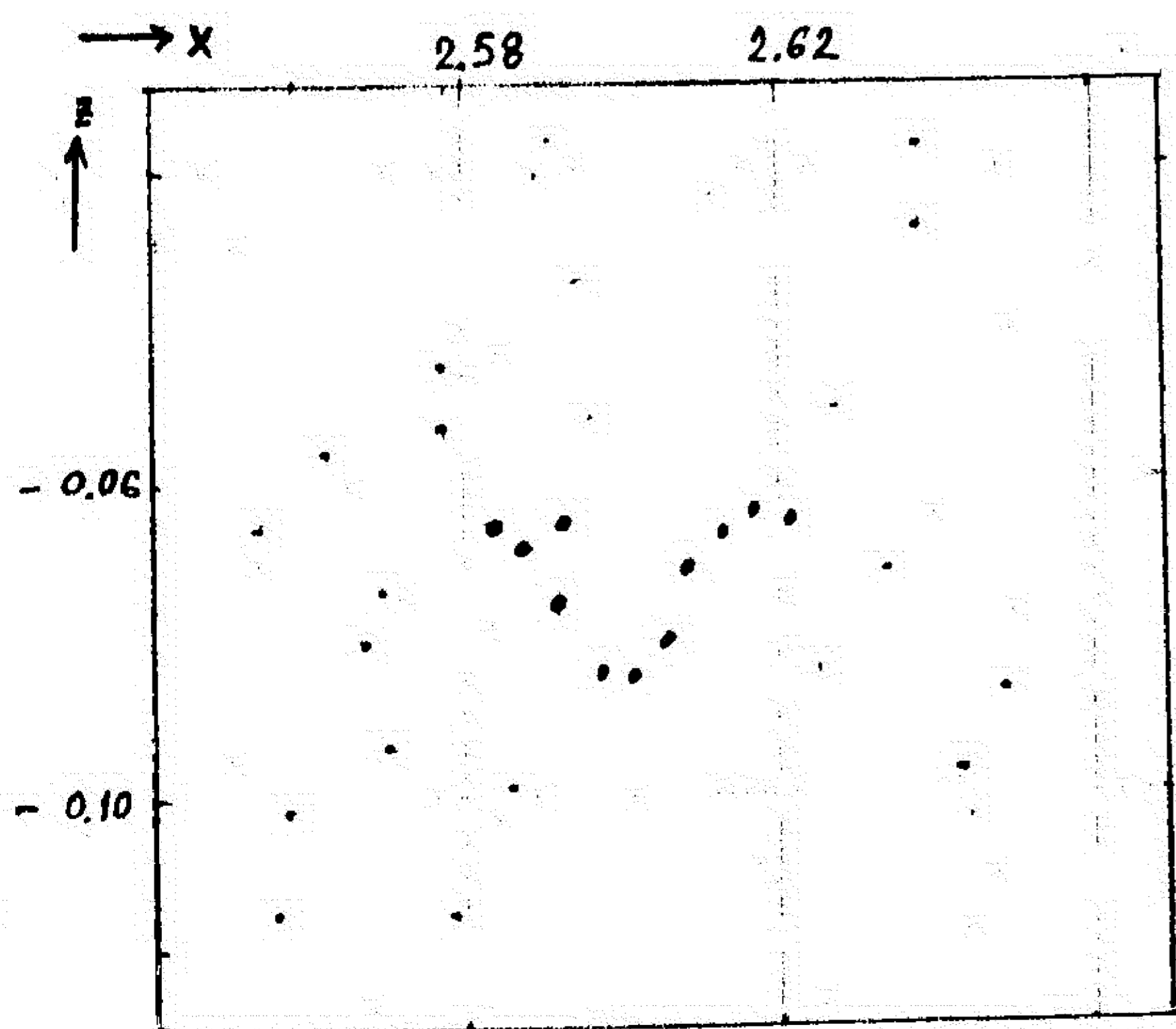
$$d^2 = (e_1 - e_2)^2 + (a_1 - a_2 + e_2 a_2 - e_1 a_1)^2 + 4 \sin^2 \frac{i_1 - i_2}{2} + 4 \sin i_1 \sin i_2 \sin^2 \frac{\delta b_1 - \delta b_2}{2} + (e_1 + e_2)^2 \sin^2 \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2}$$

Prva tri člana korišćena su za određivanje familija, a kod određivanja potoka uzimani su svi članovi.

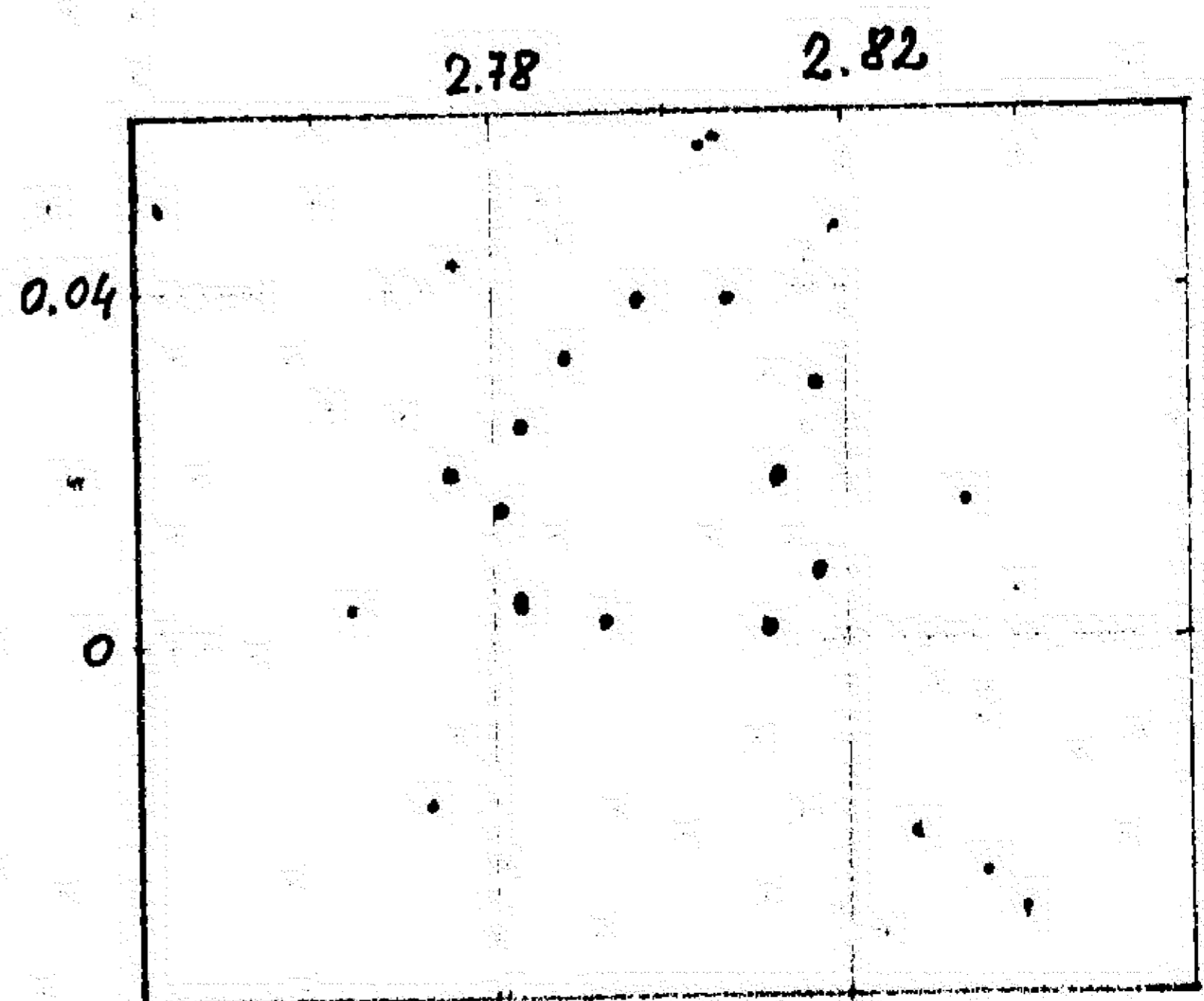
Uz određene pretpostavke o nastanku potoka, određivanjem sopstvenih elemenata može se doći do procene njihove starosti. Neka ispitivanja u tom smislu pokazala su da su potoci mlade tvorevine Sunčevog sistema, nastali pre $10^5 - 10^6$ godina.

U presecima planetoidskog prstena sa normalnim ravnima nailazi se na veće ili manje grupacije tačaka prodora putanja koje mogu da nam ukažu na neke zakonitosti raspodele keplerovih putanja u okviru prstena. Razmotrimo bliže neke od tih grupa i putanjske elemente planetoida koji čine te grupe.

Na sl. 21-26 prikazane su neke takve grupe (slučajno odabrane) za neke preseke planetoidskog prstena sa normalnim ravnima (određene uglom φ u odnosu na pravac ka perihelu Jupitera), a u tablicama 14-19 dati su putanjski elementi planetoida koji čine te grupe.

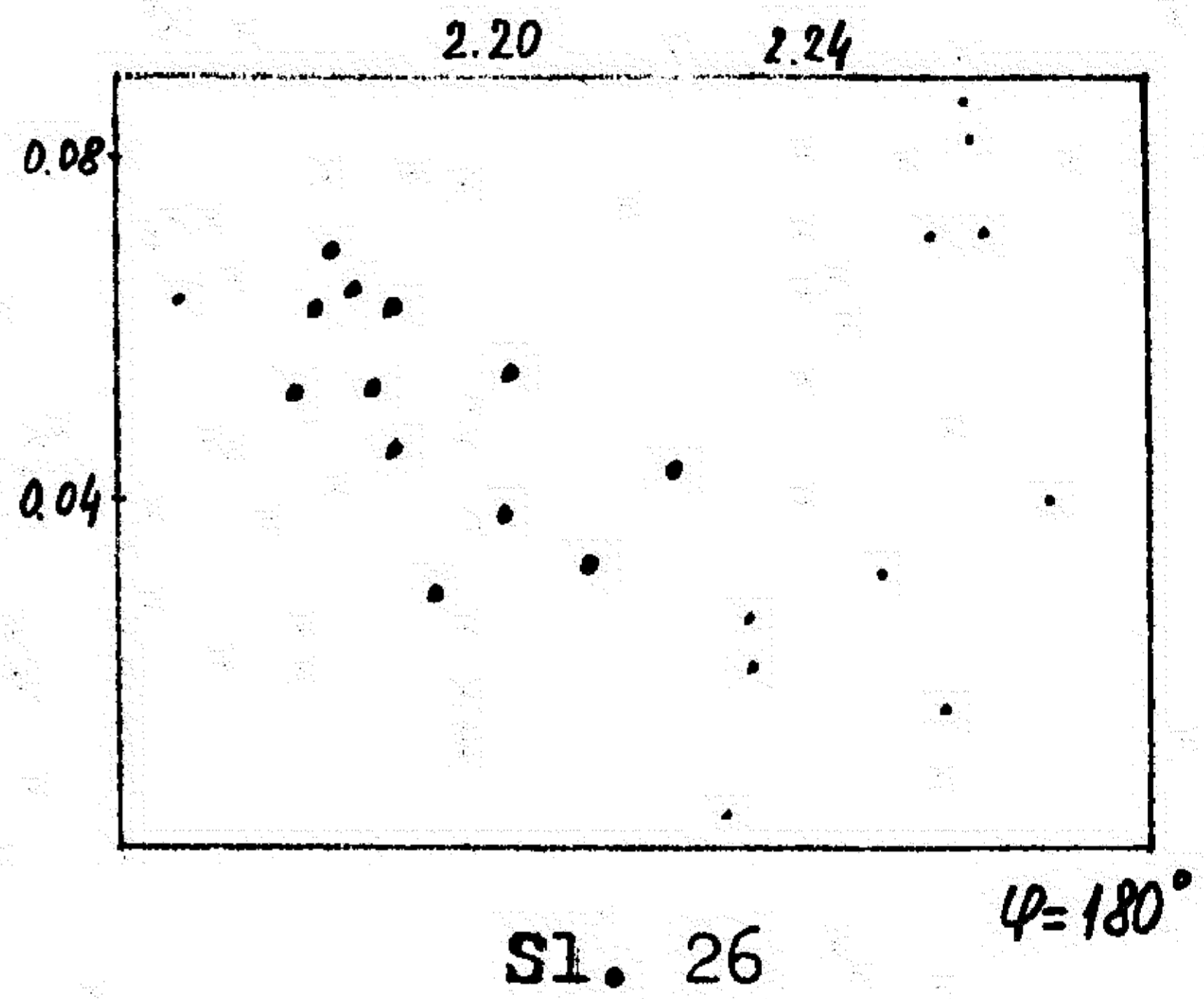
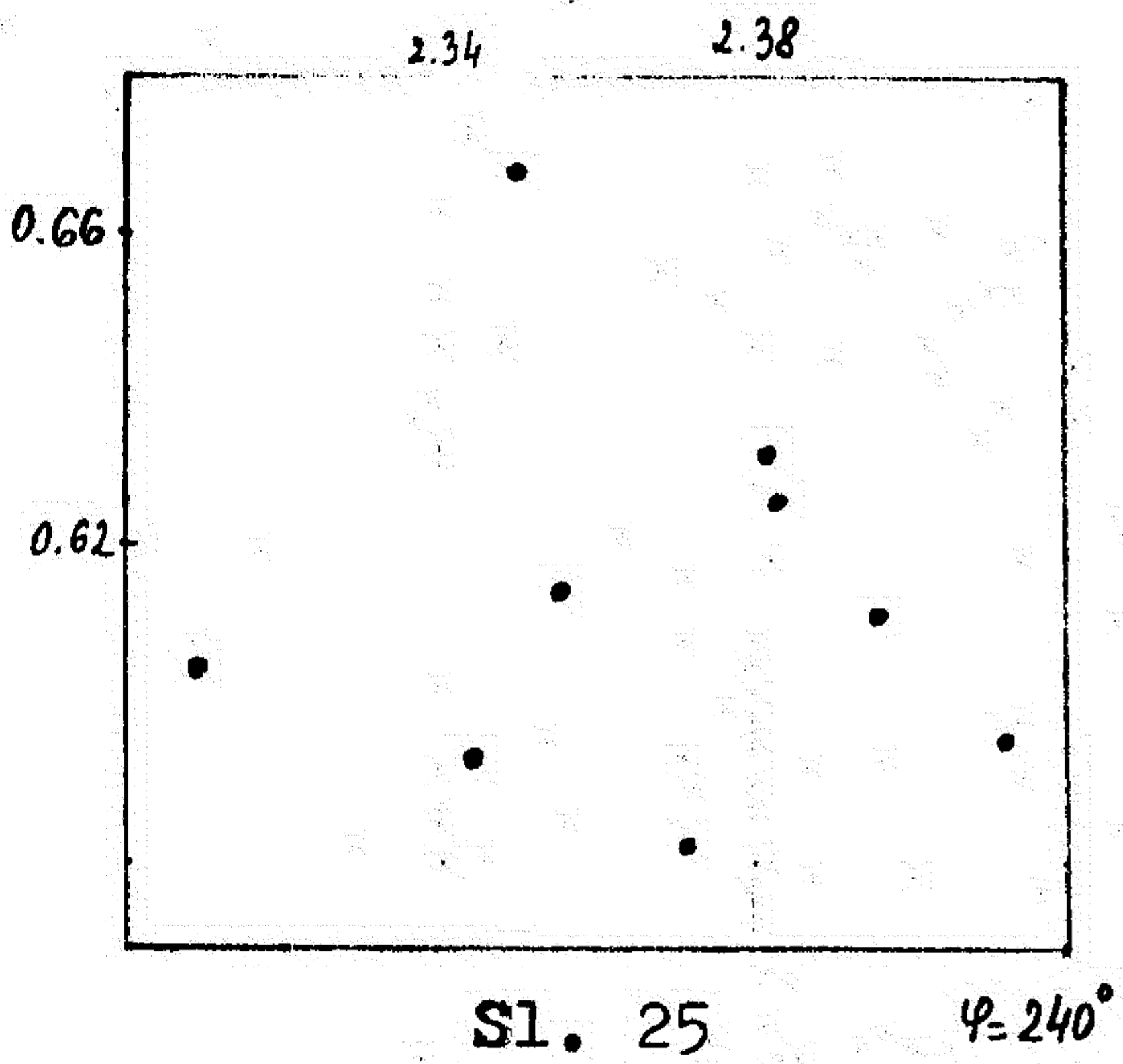
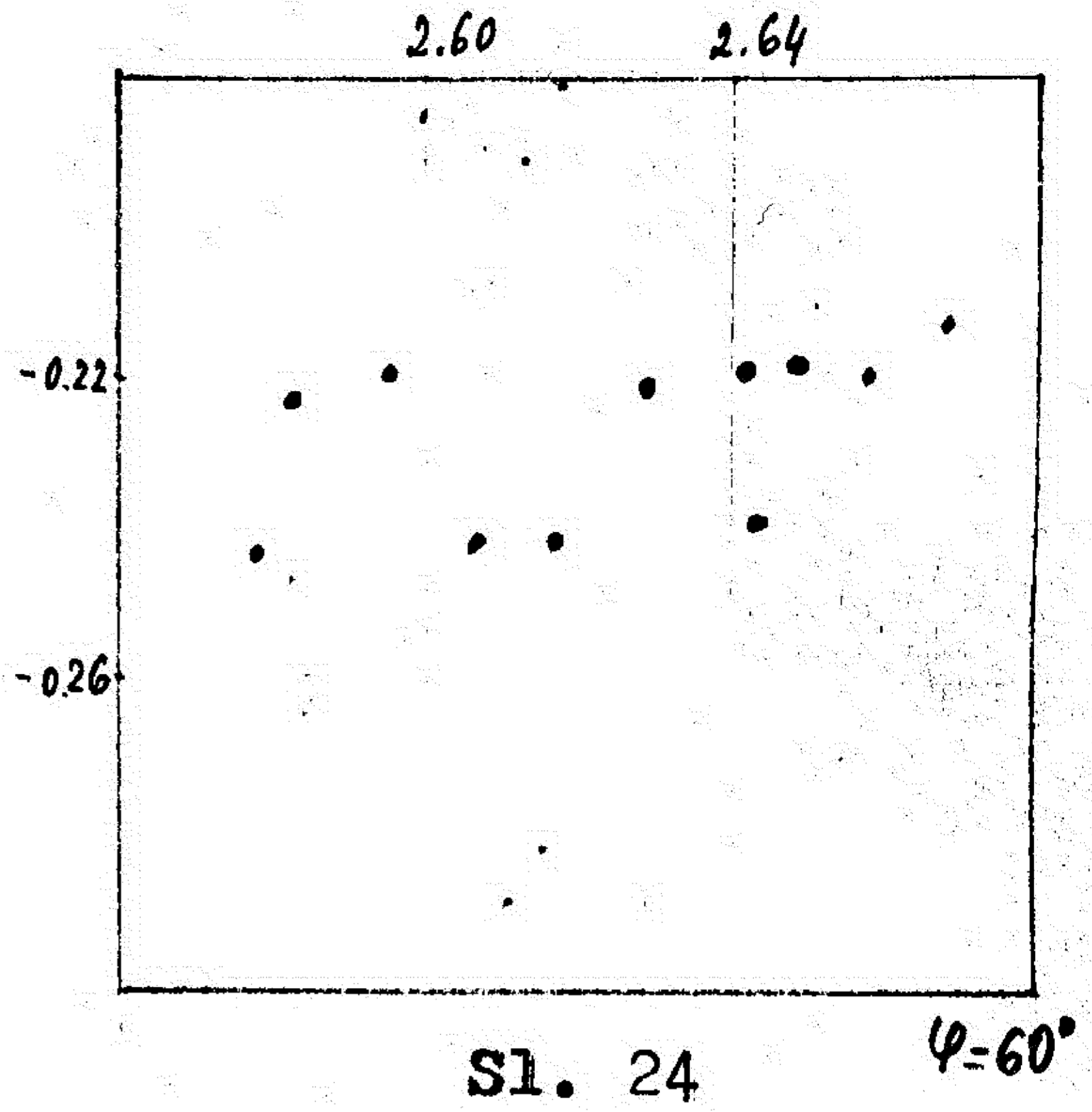
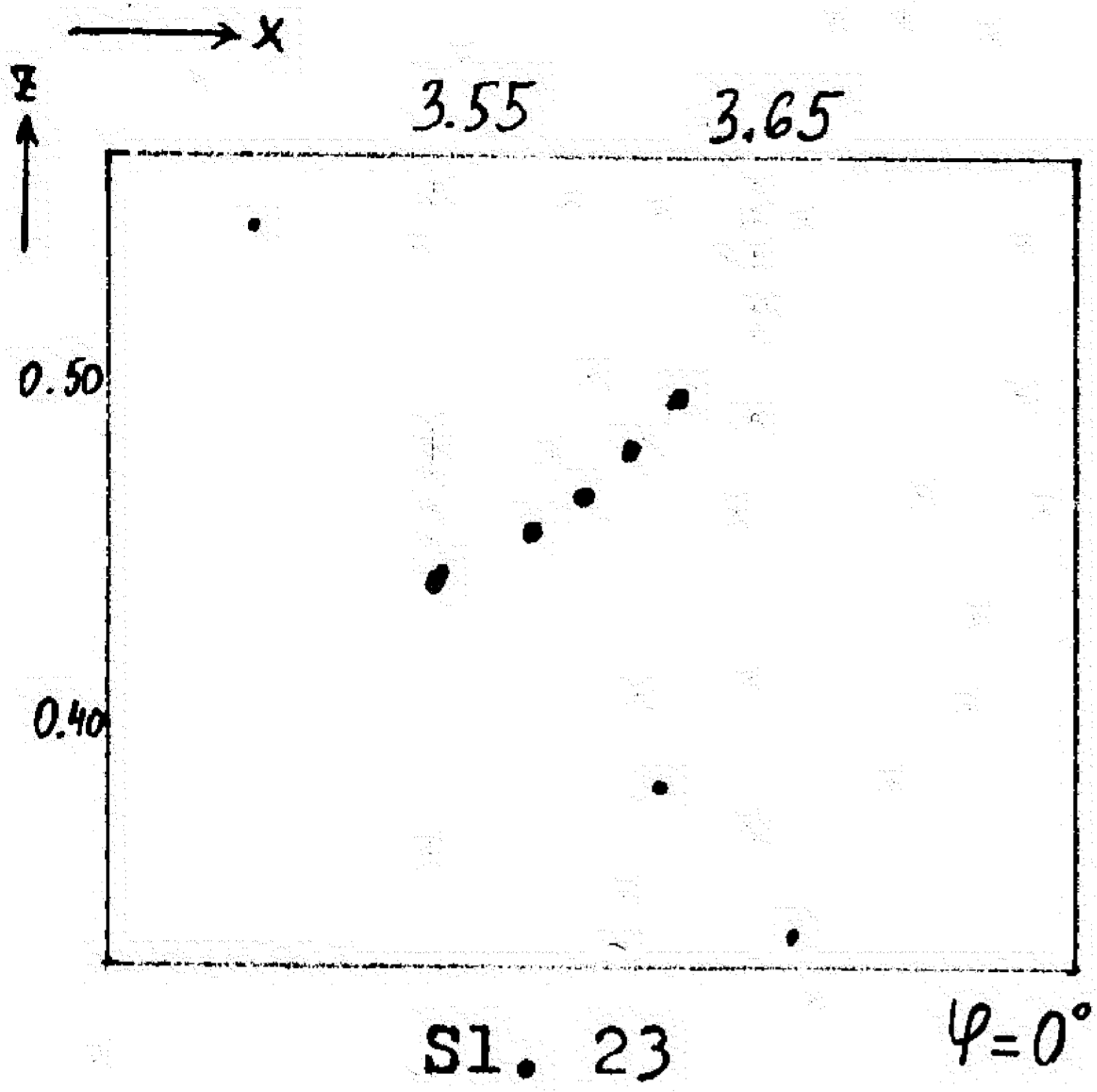


Sl. 21

 $\varphi = 0^\circ$ 

Sl. 22

 $\varphi = 0^\circ$



Tablica 14

PLANETOID	\bar{u}	ω	Ω	i	φ	n	a
70	302°	254°	48°	11.6	10°5	839"	2.614
1327	325	267	58	5.8	9.3	766	2.800
1352	39	213	186	3.7	3.8	767	2.778
106	36	334	62	4.6	10.3	631	3.162
131	222	157	65	5.0	4.0	936	2.432
62	41	275	126	2.2	9.7	639	3.134
1687	55	322	93	2.6	10.3	633	3.154
1201	7	164	203	7.0	2.2	801	2.698
110	339	282	57	6.0	4.5	785	2.734
715	346	300	46	13.8	4.8	770	2.768
1445	1	272	89	2.3	10.7	646	3.114

Tablica 15

PLANETOID	\bar{u}	ω	Ω	i	ψ	m	a
975	94°	55°	39°	2.6	2.0	744"	2.835
321	73	33	40	2.6	2.5	724	2.886
906	331	291	40	11.8	4.9	721	2.894
32	195	335	220	5.5	4.8	853	2.587
257	66	31	35	3.7	6.7	643	3.122
509	14	156	218	15.4	5.5	682	3.062
673	99	231	228	2.9	0.7	751	2.815
953	296	260	36	8.7	10.8	762	2.788
1128	296	237	59	1.0	2.7	762	2.788
1073	331	292	39	1.6	11.9	630	3.165
848	335	128	207	1.0	9.5	647	3.110
1039	188	326	222	4.5	3.5	809	2.680

Tablica 16

1859	237	254	343	7.7	6.3	619	3.202
1712	246	7	239	19.4	8.9	630	3.165
1574	157	270	247	14.4	2.7	534	3.534
1232	226	323	263	10.2	8.2	626	3.179
382	222	266	316	7.4	9.5	641	3.130

Tablica 17

403	135	250	245	9.1	5.5	751	2.815
32	195	335	220	5.5	4.8	853	2.587
2017	307	136	171	4.9	10.7	1050	2.252
378	28	156	232	7.0	7.5	767	2.776
1060	304	83	221	5.9	11.7	1060	2.237
102	357	146	211	5.1	14.5	817	2.662
2021	319	164	155	5.5	12.7	1011	2.310
306	308	166	142	7.3	8.6	979	2.358
1603	26	256	130	8.5	5.4	776	2.755
1928	337	156	181	4.5	11.4	910	2.478
1842	278	125	153	5.3	10.4	1040	2.663

Tablica 18

PLANETOID	\bar{u}	ω	Ω	i	φ	m	a
1695	357°	138°	219°	16°6	16°9	764"	2.784
246	258	95	163	15.6	6.2	802	2.695
329	223	45	178	16.0	1.4	911	2.476
218	232	61	171	15.2	6.7	815	2.667
258	2	154	208	14.3	11.7	838	2.617
1379	202	32	170	15.5	4.9	883.52	2.527
1400	321	111	210	15.6	14.3	647	3.110
1369	307	126	181	14.3	12.8	647	3.109

Tablica 19

1789	316	214	102	2.0	10.9	1077	2.214
1480	128	64	64	4.9	6.3	1086	2.202
1660	129	276	213	20.5	17.6	957	2.396
1950	122	52	70	4.2	4.8	1104	2.178
1393	241	184	57	5.8	6.1	934	2.435
291	132	331	161	1.8	5.3	1071	2.222
25	304	90	214	21.6	14.7	954	2.401
1978	322	268	54	4.3	12.4	1092	2.194
1713	316	255	61	3.8	10.6	1067	2.229
1976	209	118	91	2.4	4.3	965	2.382
1784	279	184	95	1.5	7.6	951	2.405
1218 _m	132	68	64	3.2	6.3	1042	2.263

Osnovna karakteristika ovih grupa planetoida je što njihove putanje prolaze kroz jedan uzani sektor i pri tome postoji neka odredjena pravilnost raspodele prodornih tačaka kroz normalnu ravan.

Posmatranjem prodornih tačaka, ovih i drugih grupa planetoida, kroz normalne ravni u blizini onih za koje smo

izvršili predstavljanje, zapazili smo da se tačke koje čine određenu grupu drže u toj grupi u širim sektorima (10° do 20°), a da samo poneke brzo napuštaju grupu. U nekim slučajevima dobili smo i bolja grupisanja prodornih tačaka. Kada bi se preseki prstena napravili sa normalnim ravnima veće gustine, treba očekivati mnogo veći broj ovakvih grupa pri čemu bi se mogla napraviti i određena selekcija.

Posmatranjem putanjskih elemenata zapaža se da se u okviru jedne grupe prodornih tačaka javlja uglavnom grupigrupisanje velikih poluosa oko dve vrednosti i da periheliski pravci, uz neke izuzetke, drže određenu zajedničku orijentaciju. Kod ekscentričnosti i nagiba putanja nema neke pravilnosti, a njihove vrednosti se i osetnije razlikuju međusobno, što govori da ove grupe nemaju karakteristike Hirajaminih familija.

Može se pretpostaviti da su ovi sektori ili njihove okoline, gde dolazi do većeg zbližavanja grupe putanja ili gde su putanje poredjane po nekoj pravilnosti, okoliné mesta gde je došlo do stvaranja određene grupe planetoida. Pri tome, uz pretpostavku o većoj dispersiji brzina planetoida u trenutku stvaranja, mogu se i očekivati razlike u nekim putanjskim elementima u većim iznosima. Medjutim, pretpostavka o prirodnom zajedništvu ovako složenih konstelacija prodornih tačaka zahteva dalja ispitivanja, koja neće biti ni malo lako sprovesti.

III. KINEMATIČKE KARAKTERISTIKE PLANETOIDSKOG PRSTENA

Raspodela putanja u okviru planetoidskog prstena odražava se na određen način i na raspodelu samih planetoida tokom vremena. Neravnomernost raspodele planetoida po njihovim heliocentričnim longitudama i latitudama, ustanovljena od strane Narina i dalje ispitivana od strane Kresaka [18], objašnjava se efektom selektivnosti vršenih posmatranja i poravnanjem apsidnih linija malih planeta prema apsidnoj liniji Jupitera.

Da bismo dublje sagledali kakva je raspodela planetoida tokom vremena, najpre izvršimo određivanje srednjeg vektora položaja svih planetoida za različite trenutke. Komponente srednjeg vektora određujemo kao aritmetičke sredine pravouglavih ekliptičkih koordinata x_k, y_k i z_k pojedinačnih planetoida za određeni trenutak :

$$\begin{aligned}x_s &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \\y_s &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k \\z_s &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m z_k\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir sve numerisane planetoide iz [7], odredili smo komponente srednjeg vektora za određene trenutke koji su obuhvaćeni vremenim intervalom od 78 godina.

U tablici 20 dati su: heliocentrična longituda λ_s srednjeg vektora, njegova Z_s -komponenta i intenzitet τ_s , za različite trenutke t izražene u danima u odnosu na trenutak $t = 1950.0$.

Tablica 20

t	λ_s	Z_s	τ_s	t	λ_s	Z_s	τ_s
-18300	185°	-0.0148	0.208	-3900	172°	-0.0059	0.256
-18060	188	-0.0004	0.204	-3660	187	0.0028	0.264
-17820	188	0.0061	0.205	-3420	200	0.0121	0.225
-17580	187	0.0031	0.206	-3180	198	0.0080	0.155
-17340	188	-0.0044	0.216	-2940	172	-0.0056	0.149
-14700	178	-0.0181	0.190	- 300	200	-0.0084	0.151
-14460	174	-0.0170	0.223	- 60	188	-0.0187	0.127
-14220	181	-0.0105	0.256	+180	163	-0.0104	0.154
-13980	189	-0.0029	0.250	420	167	0.0013	0.222
-13740	192	0.0036	0.245	660	177	0.0058	0.247
-11100	172	-0.0093	0.158	3300	227	0.0009	0.192
-10860	165	-0.0215	0.212	3540	214	-0.0144	0.089
-10620	173	-0.0243	0.264	3780	152	-0.0254	0.116
-10380	184	-0.0134	0.272	4020	153	-0.0171	0.214
-10140	193	0.0007	0.251	4260	167	-0.0017	0.292
- 7500	184	0.0117	0.263	6900	205	0.0026	0.271
- 7260	191	0.0105	0.238	7140	210	-0.0039	0.214
- 7020	195	-0.0027	0.216	7380	206	-0.0118	0.161
- 6780	193	-0.0192	0.189	7620	190	-0.0183	0.134
- 6540	187	-0.0274	0.173	7860	168	-0.0201	0.160

Veličina λ_s pokazuje nam oko koje heliocentrične longitude (u širim granicama) treba očekivati povećanu gustinu planetoida, Z_s kakav je globalni raspored planetoida u od-

nosu na ravan ekliptike, a ζ_s može da predstavlja neku meru gustine planetoida po njihovim longitudama (veće ζ_s - veća gustina u sektoru oko λ_s).

Sudeći po ovome i uzimajući u obzir vrednosti iz tablice 20, povećana gustina planetoida javlja se u široj okolini oko longitude $\lambda_s = 180^\circ$, odnosno oko pravca ka afelu Jupitera. Male vrednosti intenziteta srednjeg vektora ζ_s ukazuju

Tablica 21

$\lambda_s \backslash t/100$	-183	-147	-111	-75	-39	-3	33	69
15°	64	71	71	68	81	84	83	80
30	88	72	84	74	69	74	96	70
45	75	86	73	59	85	86	77	79
60	75	92	85	77	87	90	64	85
75	89	82	79	81	88	73	86	67
90	76	81	84	97	91	78	76	73
105	96	97	90	79	76	83	75	81
120	85	87	81	95	96	87	73	86
135	84	100	99	100	75	100	76	90
150	105	77	98	93	103	85	97	92
165	103	95	79	77	114	86	88	92
180	83	90	89	97	84	72	90	83
195	89	68	100	96	91	83	85	105
210	92	111	100	98	111	100	108	98
225	74	82	82	104	95	110	87	97
240	85	95	92	93	95	107	85	80
255	121	86	71	87	81	94	80	106
270	99	98	78	83	70	76	101	94
285	67	73	80	84	91	66	96	76
300	90	90	74	96	92	83	99	91
315	62	84	89	73	67	85	80	78
330	78	74	92	88	63	68	89	100
345	87	78	86	77	70	95	67	75
360	74	72	85	65	66	76	83	63

na mali stepen uvećanosti gustine. Pri ovome treba uzeti u obzir da je oko pravca Jupiterovog afela prsten u celini udaljeniji, što se takodje sadrži u veličini \mathcal{U}_5 . Sudeći po vrednostima komponente \mathcal{Z}_5 , planetoidi su tokom vremena skoro u podjednakom broju iznad i ispod ravni ekliptike, uz neprekidne male poremećaje te ravnoteže na jednu i drugu stranu.

Da bismo proverili u kolikoj je meri zastupljena asimetrija po heliocentričnim longitudama, izvršili smo prebrojavanja planetoida koji se u odredjenim trenucima nadju u odredjenim intervalima heliocentričnih longituda. U tablici 21 dati su brojevi planetoida koji u odredjenim trenucima imaju longituda u intervalima od po 15° . Iz dobijenih vrednosti se vidi da se u proseku veći broj javlja oko $\lambda_5 = 180^\circ$, ali to dolazi do izražaja tek onda ako se posmatra jedan širi sektor oko tog pravca. Ovo se može objasniti time što je u tom sektoru znažno povećan broj afela planetoidskih putanja, pa zbog sporijeg kretanja planetoida na tim delovima svojih putanja, javlja se i veći broj planetoida.

ZAKLJUČAK

Na kraju ovog rada ukratko ćemo izneti neka zapažanja i zaključke do kojih smo došli, a smatramo da mogu biti od koristi i značaja pri daljem izučavanju strukture planetoidskog prstena. To ćemo učiniti po glavama, kako smo do njih i dolazili.

I. Na samom početku odredili smo srednju ravan planetoidskih putanja, a kasnije, u nekoliko navrata, pokazala se ispravnost uvođenja takve ravni, jer ona predstavlja ravan znatne simetrije planetoidskog prstena. Kada bude dovoljno povećan broj numerisanih planetoida moći će da se odredi sa većom sigurnošću i treba očekivati bolje predstavljanje putanjskih ravni malih planeta, što se naslućuje na osnovu naših ispitivanja. Imajući u vidu položaje putanjskih ravni velikih planeta i satelitska ispitivanja rasporeda međuplanetske prašine [26, 27], pokazuje se da je srednja ravan vrlo bliska ravni simetrije rasporeda materije u Sunčevom sistemu.

Srednja putanja koju smo odredili ukazuje nam na globalnu raspodelu putanja svih malih planeta, jer je izvedena istovremenim korišćenjem svih putanjskih elemenata.

S obzirom na njenu malu ekscentričnost, treba očekivati skoro ravnomeran raspored planetoida u prstenu tokom vremena, na šta donekle ukazuju kasnija naša ispitivanja.

U raspodeli perihela planetoidskih putanja, konstatovali smo njihovu znatnu koncentraciju oko srednje ravni. Njihov povećan broj oko pravca ka perihelu Jupitera i kod većih udaljenja od srednje ravni može da ukazuje da koncentraciju perihela planetoidskih putanja ne treba objašnjavati samo uticajem Jupitera, već možda posmatrati kao rudiment prvobitne raspodele planetoida

II. Raspodela planetoida po srednjem dnevnom kretanju, iako izvršena sa većim brojem planetoida, nije pokazala nikakve nove osobenosti, već samo su se potvrdile ranije osobenosti. Raspodela intenziteta sektorskih brzina, odnosno razlike u odnosu na raspodelu po srednjem dnevnom kretanju ukazuju da ima mesta dubljem ispitivanju veze između ekscentričnosti i velikih poluosa planetoidskih putanja u blizinama Kirkvudovih praznina.

Presecima planetoidskog prstena sa normalnim ravnima sagledali smo izgled prstena i raspored putanja u različitim pravcima od Sunca. Pri tome smo na najdirektniji način zaključili da prsten ima karakterističan izgled oko pravca ka perihelu Jupitera i da dolazi do postupne njegove promene kako se ide ka Jupiterovom afelu. Pri tome pokazuje se skoro ista ekscentričnost prstena u

celini kakvu što imamo kod raspodele perihela planetoidskih putanja.

Posmatranjem prodornih tačaka putanja malih planeta kroz normalne ravni, sagledali smo raspored putanja u određenim sektorima pri čemu smo uočili određenu pravilnost - grupacije prodornih tačaka i praznine. Osobine grupa koje smo ispitali ukazuju na neke elemente njihovog eventualno prirodnog zajedništva, što već zalazi u probleme nastanka planetoida. Sudeći po putanjskim elementima članova ovih grupa, ovakva pretpostavka mogla bi se uklopiti u hipoteze koje podrazumevaju međusobne sudare planetoida.

III. Ovde smo na najneposredniji način pokazali kakav je raspored planetoida u određenim trenucima po njihovim longitudama i latitudama. Nešto povećan broj planetoida oko pravca ka Jupiterovom afelu može se objasniti raspodelom afela putanja malih planeta.

LITERATURA

1. Patilin I. I., *Malye planety*, Moskva, 1953.
2. Sultanov G. P., Teoreticheskie raspredeleniya ehlementov orbit oskolkov gipoteticheskoy planety Ol'bera, *Soob. astr. inst. im. Shternberga*, 1953, N^o 88-89, 54-59.
3. Safronov V. S., Dispersiya skorostej dvizheniya asteroidov i problema ikh proiskhozhdeniya, " *Problemy dvizheniya malykh tel Solnechnoj systemy*, Baku, 1966, 160-166.
4. Alfvén H. Structure and evolutionary history of the solar system, *Astrophys. and Sp. Sci.*, 1970, 8, N^o 3.
5. Popović B., Elazar S., Neke osobenosti statističkog rasporeda elemenata malih planeta, *Matematički vesnik*, 10(25), 1973, 249-254.
6. Milanković M., *Osnovi nebeske mehanike*, Beograd, 1955.
7. Institut teoret. astron. AN SSSR, *Ehfemeridy malykh planet na 1979*, Leningrad, 1978.
8. Duboshin G. N., *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoj mekhanike i astrodinamike*, Moskva, 1971.
9. Samojlova-Yakhontova N. S. (red.), *Malye planety*, Moskva, 1973.
10. Chebotarev G. A., Shor V. A., *Struktura pojasa asteroidov*, *Trudy inst. teor. astr. AN SSSR*, 1976, N^o 15, 60-90.
11. Simovljević J., *Osnove teorijske astronomije*, Beograd, 1977.
12. Kiang T., Bias free statistics of the orbital elements of asteroids, *Icarus*, 1966, 5, N^o 4, 437-449.
13. Lautmann D. A., Distribution of the perihelia of the asteroids, *Astron. J.*, 1963, 68, N^o 8, 539-540.

14. Danielson L., The profile of jet streams, in " Physical Studies of Minor Planets " (Ed. Gehrels), 1971, 353-361.
15. Batrakov J. V., O raspredelenii srednikh dvizhenij asteroidov vblizi soizmerimostej, Bul. Inst. teor. astr. AN SSSR, 1958, 6, N^o 9, 577-580.
16. Olević D., Sistematizacija i analiza Kirkwood-ovih praznina, Publ. Obs. astr. Beograd, 1975, N^o 20, 138-144.
17. Wiesel W. H., A statistical theory of resonance motion in the Sun-Jupiter system, Celest. Mech., 1976, 13, N^o 1, 3-37.
18. Kresak L., The asymmetry of the Asteroid Belt, Bull. Astr. Inst. Czechoslovakia, 1967, 18, N^o 1, 27-36.
19. Kresak L., Mass Content and Mass Distribution of the Asteroid System, Ibid., 1977, 28, N^o 2.
20. Kresak L., Three-dimensional distributions of the potential sources of interplanetary dust, COSPAR, 1978.
21. Brauehr D., Klemens J., Metodi nebesnoj mehaniki, per. s angl., Moskva, 1964.
22. Brouwer D., Secular variations of the orbital elements of minor planets, Astr. J., 1951, 56, N^o 1, 9-32.
23. Alfvén H., Asteroidal jet streams, Astroph. and Sp. Sci., 1969, 4, N^o 1, 84-102.
24. Arnold J. R., Asteroid families, and jet streams, Astr. J., 1969, 74, N^o 10, 1235-1242.
25. Lindblad A., Sauthworth B., A study of asteroid families and streams by computer techniques, in " Physical Studies of Minor Planets " (Ed. Gehrels), 1972, 337-352.
26. Space Research in the Federal Republic of Germany, 1977, p. 16.
27. Ibid., 1978, p. 21.