J. Л. СИМОВЉЕВИЋ
J. L. SIMOVLJEVITCH

ЛОКАЛНИ ПРОКСИМИТЕТИ ПЛАНЕТОИДСКИХ ПУТАЊА И ЊИХОВА ПРИМЕНА У РАЧУНУ АПСОЛУТНИХ ПРОКСИМИТЕТА

THE LOCAL PROXIMITIES OF THE ORBITS OF ASTEROIDS AND THIER APPLICATION TO ABSOLUTE PROXIMITIES

Отисак из ГЛАСА CCCXLVI Српске академије наука и уметности,
Одељење природно-математичких наука, књ. 50

Extrait du GLAS CCCXLVI de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences mathématiques et naturelles, № 50

БЕОГРАД

1986

Глас CCCXLVI Српске академије наука и уметности,
Одељење природно-математичких наука, књ. 50 — 1986.
Glas CCCXLVI de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences mathématiques et naturelles, № 50 — 1986.

Ј. Л. СИМОВЉЕВИЋ

ЛОКАЛНИ ПРОКСИМИТЕТИ ПЛАНЕТОИДСКИХ ПУТАЊА И ЊИХОВА ПРИМЕНА У РАЧУНУ АПСОЛУТНИХ ПРОКСИМИТЕТА

(Примљено на VIII скупу, 26. X 1984. на основу реферата академика *Р. Кашанина* и *Т. Анђелића*)

Локалним проксимитетом аутор назива положаје два планетоида при њиховој минималној међусобној даљини, ако је при том положај једног тела на његовој путањи унапред задан. Одређује положај другог планетоида у локалном проксимитету са првим и показује како се ова конструкција користи у рачуну апсолутних проксимитета планетоидских путања.

Положаји два планетоида на њиховим елиптичким путањама при најмањој међусобној даљини одређени су, као што је познато, једначинама

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1}\,\vec{\rho}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2}\,\vec{\rho}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

са векторима хелиоцентричних положаја $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ у функцији ексцентричних аномалија E_1 и E_2 као јединих параметарских променљивих:

$$\vec{r}_i = a_i(\cos E_i - e_i)\,\vec{P}_i + a_i\sqrt{1 - e_i^2}\,\sin E_i\,\vec{Q}_i, \tag{2}$$

$$i = 1{,}2.$$

Задатак налажења E_1 и E_2 из система једначина (1) за два планетоида познатих путања, што одређује њихов проксимитет, очигледно није једноставан. Зато постоји више поступака и сви су у суштини поступци узастопних апроксимација. Налажење почетних вредности непознатих E_1 и E_2 представља проблем своје врсте. Прелаз на неке друге променљиве, рецимо праве аномалије, неће суштински поједноставити или скратити рачун у целини.

1. Замислимо да смо датом ексцентричном аномалијом E_1 фиксирали положај једног планетоида на његовој путањи и да тражимо положај другог када је — на својој путањи — најближи првом. Овај задатак очигледно решава било која од једначина (1), пошто је сада E_2 једина непозната. Изабраћемо као једноставнију другу једначину (1) и она ће се свести, уз коришћење (2), на

$$\alpha_2 \sin E_2 - \beta_2 \sin 2E_2 - \gamma_2 \cos E_2 = 0, \tag{3}$$

са познатим коефицијентима

$$\alpha_2 = \left(\frac{\vec{P}_2}{a_2} \vec{r}_1\right) + e_2, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} e_2^2, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - e_2^2} \left(\frac{\vec{Q}_2}{a_2} \vec{r}_1\right), \tag{4}$$

Решимо ли једначину (3) по E_2, добићемо положај другог планетоида када је он најближи првом, на датом положају одређеном са E_1. Такав проксимитет ћемо звати локалним — у односу на фиксирани положај једног од ових небеских тела.

Геометријско тумачење локалног проксимитета је очигледно. У датом положају E_1 првог планетоида постављамо раван нормалну на његовој путањи. Продор путање другог планетоида кроз ту раван одређује положај другог планетоида при локалном проксимитету.

Што се тиче решавања једначине (3) по E_2, то ћемо — с обзиром на мале ексцентричности планетоидских путања — добру почетну вредност E_2^0 добити из $\operatorname{tg} E_2^0 = \gamma_2/\alpha_2$, а овој вредности ћемо потом додавати узастопне поправке

$$\Delta E_2 = -57{,}^{\circ}296 \frac{\beta_2 \sin 2E_2 - \alpha_2 \sin E_2 + \gamma_2 \cos E_2}{2\beta_2 \cos 2E_2 - \alpha_2 \cos E_2 - \gamma_2 \sin E_2}. \tag{5}$$

За велику већину планетоида биће довољне две ове поправке из (5) и кад ексцентричне аномалије рачунамо с тачношћу од $\pm 1^{\circ} \times 10^{-5}$. Квадрант почетне вредности E_2^0 одредићемо поређењем збира $\Omega_1 + \omega_1 + E_1$ са збиром $\Omega_2 + \omega_2 + E_2^0$.

2. Овакво дефинисање локалних проксимитета наводи на идеју о њиховој примени у рачуну и апсолутних проксимитета уочених путања, на налажење њихове најмање међусобне даљине.

Замислимо, наиме, да смо на првој путањи изабрали произвољан положај E_1 и описаним поступком нашли њему најближи E_2 на другој путањи. Потом изведимо обрнут рачун: полазећи од E_2 нађимо њему најближи положај E_1' на првој путањи. Када би ексцентричне аномалије E_1 и E_2 одређивале положаје тела при апсолутном проксимитету, величине E_1 и E_1' би биле међусобно једнаке. А ако није у питању апсолутни проксимитет, постојаће извесна разлика између E_1 и E_1'. У том случају ћемо рачун наставити: са E_1' налазимо E_2', са овим E_1'' и тако даље. Наизменично прелазимо с једне путање на другу док год се ексцентричне аномалије не престану мењати. То ће бити знак да смо дошли до минималне (или максималне) међусобне даљине путања.

Овакав поступак је начелно врло једноставан и не захтева унапред познавање било каквих почетних вредности. Међутим, већ прва пробна рачунања показала су да је конвергенција методе веома спора. Захвалан сам доценту др-у М. С. Кузманоском, који је показао да је конвергенција толико спора, да је поступак неекономичан чак ако се примени и велики електронски рачунар, какав је рачунар Математичког института СР Србије у Београду.

3. Па ипак, мала промена методике рада омогућиће потпун рачун проксимитета описаним поступком. Но, морамо признати да су пресудну улогу у томе одиграли „средњи" електронски рачунари, који се последњих неколико година појављују у све савременијим типовима. Они имају довољно велик капацитет за обављање и обимнијих рачуна, начин употребе („језик") им је релативно једноставан, а резултате показују на екрану обичног телевизијског пријемника на који се прикључе. Такав један рачунар је примењен у наредном израчунавању.

Састављен је једноставан програм који је за дату ексцентричну аномалију E_1 давао одговарајућу ексцентричну аномалију E_2 по (3) и међусобну даљину планетоида при положајима E_1 и E_2. Као пример узели смо планетоиде (84) Klio и (227) Philosophia из рада [1]. Прва фаза рачуна је опште испитивање даљина планетоида за $E_1 = 0$ до $360°$, мењајући E_1 за по $10°$. Приближни положај проксимитета се одмах показао:

E_1	E_2	ρ
...	....	....
160°	285°.996	0.066 961
170	293.124	0.037 876
180	300.145	0.119 999
...	....	....

Када смо овако грубо локализовали проксимитет, даље смо могли рачунати са смањеним интервалом промена ексцентричне аномалије E_1:

E_1	E_2	ρ
165°	289°.576	0.011 794
166	290.288	0.001 614
167	290.999	0.008 801

Даље сужавање интервала промене E_1 брзо ће довести до коначних елемената проксимитета уочених планетоидских путања

$$E_1 = 166°.1356, \quad E_2 = 290°.3851, \quad \rho = 0.000\,822 \text{ a.j.},$$

какве смо нашли у [1].

Једноставност аналитичких израза по којима се рачун изводи и непотребност било какве почетне вредности препоручује овај поступак за налажење проксимитета планетоидских путања.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Л. Симовљевић, *Проксимитет путања групе небеских тела*, Глас CCXCI САНУ, Одељење прир.-мат. 37 (1974), стр. 19—30.

J. L. Simovljevitch

THE LOCAL PROXIMITIES OF THE ORBITS OF ASTEROIDS AND THEIR APPLICATION TO ABSOLUTE PROXIMITIES

S u m m a r y

For the position of an asteroid given by its eccentric anomaly E_1, the position of another asteroid, when the mutual distance of bodies is minimal, is characterized by the eccentric anomaly E_2, given by

$$\alpha_2 \sin E_2 - \beta_2 \sin 2 E_2 - \gamma_2 \cos E_2 = 0,$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\vec{P}_2}{a_2} \vec{r}_1\right) + e_2, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} e_2^2, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - e_2^2} \left(\frac{\vec{Q}_2}{a_2} \vec{r}_1\right),$$

$$r_i = a_i (\cos E_i - e_i) \vec{P}_i + a_i \sqrt{1 - e_i^2} \sin E_i \vec{Q}_i, \quad i = 1, 2.$$

The initial value of E_2 is obtained by tg $E_2^0 = \gamma_2 / \alpha_2$ and the final value follows by the application of successive corrections

$$\Delta E_2 = -57^\circ.296 \frac{\beta_2 \sin 2 E_2 - \alpha_2 \sin E_2 + \gamma_2 \cos E_2}{2 \beta_2 \cos 2 E_2 - \alpha_2 \cos E_2 - \gamma_2 \sin E_2}.$$

We call such a proximity of a pair of asteroids, with the fixed position of one of them, the local proximity.

If we calculate E_2 and $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ for $E_1 = 0^\circ, w, 2w, \ldots$ with a step w of, say, 10°, we easily recognize the approximate position of the absolute proximity of orbits. By reducing the step w we finally obtain elements of the absolute proximity of orbits for that pair of asteroids.

Faculty of Sciences, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Yugoslavia