Ј. Л. СИМОВЉЕВИЋ
J. L. SIMOVLJEVITCH

ПРИМЕДБА О ОПШТИМ ФУНКЦИЈАМА И КОНСТАНТАМА КЕПЛЕРОВА КРЕТАЊА

NOTE ON THE GENERAL FUNCTIONS AND CONSTANTS OF THE KEPLERIAN MOTION

Отисак из ГЛАСА CCLXXXIII Српске академије наука и уметности,
Одељење природно-математичких наука књ. 35

Extrait du GLAS T. CCLXXXIII de l'Académie serbe des sciences et des arts,
Classe des sciences mathématiques et naturelles № 35

БЕОГРАД
1972

Глас CCLXXXIII Српске академије наука и уметности
Одељење природно-математичких наука, књ. 35—1972.
Glas CCLXXXIII de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences mathématiques et naturelles, № 35—1972.

Ј. Л. СИМОВЉЕВИЋ

ПРИМЕДБА О ОПШТИМ ФУНКЦИЈАМА И КОНСТАНТАМА КЕПЛЕРОВА КРЕТАЊА

(Примљено на IV скупу, 28. VI 1968, на основу реферата академика РАДИВОЈА КАШАНИНА и дописног члана ТАТОМИРА АНЂЕЛИЋА)

САДРЖАЈ

Аутор показује да се једном функцијом времена могу формално представити сви облици интеграла Кеплерова кретања и векторских елемената, у зависности од избора највише шест скаларних константи, различитих од нуле. За ефективно спровођење рачуна потребно је познавање основне променљиве као функције вектора положаја и брзине небеског тела, и као функције времена.

Немогућност експлицитног представљања координата небеског тела као функција времена, у коначном облику, била је разлог за велик број покушаја да се једначине Кеплерова кретања напишу у облику различитом од оног класичног, које су добиле у радовима Ојлера и Лагранжа. То су, у ствари, била настојања да се смање тешкоће у гломазном и компликованом рачуну апсолутних поремећаја. У ту сврху су на првом месту биле испитиване функције времена, које би могле да замене Кеплерову ексцентричну аномалију, без обзира на своје геометријско или кинематичко тумачење (Callandreau, Субботин; в. [1]). Од новијих радова поменимо [2] и [3], где се уводе општије функције времена, независно од врсте непоремећене путање.

Потребе рачуна специјалних поремећаја — и аналитичке, и нумеричке — водиле су, с друге стране, испитивању константи Кеплерова кретања и њихових комбинација, ради проналажења што погоднијих параметара за варирање; в. нпр. [4], [5].

Оба ова проблема могу се поставити и истовремено, општијим представљањем интеграла диференцијалне једначине Кеплерова кретања. Приказивањем тих релација у што генералнијем облику, помоћу подесно одабраних параметара, могло би се испитивање и функција времена и константи интеграљења учинити прегледнијим. Тим пре што су се досадашњи радови сводили, у ствари, на трансформисање познатих интеграла кретања.

Имајући све ово на уму, циљ нам је да у овом раду прикажемо један начин генерализације аналитичког рачуна непоремећена кретања небеских тела који ће се непосредно ослањати само на диференцијалну једначину кретања. Из таквог рачуна ће природно произилазити општи облик векторских константи, друкчије већ познатих из [4], а функције времена ће такође бити приказане на општи начин, ма и само формално. Приказ ћемо илустровати рачуном кретања по елипси, тим старим и на различите начине решеним проблемом небеске механике, пошто се он и данас употребљава за приказивање разних начина интеграљења одговарајућих диференцијалних једначина (нпр. [6]).

1. Интеграли диференцијалне једначине Кеплерова кретања

$$\mathbf{r}'' + \mu\, r^{-3}\, \mathbf{r} = 0\,, \qquad \mu = k^2 (M + m) \tag{1}$$

формално су представљени једначинама

$$\mathbf{r}' = \mathbf{v} = \mathbf{v}\,(t;\, \mathbf{A},\, \mathbf{B})\,, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t;\, \mathbf{A},\, \mathbf{B})\,, \tag{2}$$

где су $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ независне интеграционе константе („векторски елементи кретања“):

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}' = 0\,. \tag{3}$$

Било из (2), било непосредно из (1), изводимо

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\,(t;\, \mathbf{r},\, \mathbf{v})\,, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}\,(t;\, \mathbf{r},\, \mathbf{v}) \tag{4}$$

[одређивање елемената кретања на основи почетних услова t_0, $\mathbf{r}\,(t_0)$ и $\mathbf{v}\,(t_0)$]. Ове једначине (4) се увек могу написати, за општи векторски елемент $\mathbf{A}$, у облику

$$\mathbf{A} = \alpha\, \mathbf{r} + \beta\, \mathbf{v} + \gamma\, [\mathbf{r}\, \mathbf{v}]\,, \tag{5}$$

то јест — $\mathbf{A}$ приказати помоћу компонената у (покретном) хелиоцентричном координатном систему са осама дуж вектора $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $[\mathbf{r}\, \mathbf{v}]$. Скалари α, β и γ су функције истих почетних услова кретања (тј. t, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$), дакле времена. Из (5), (3) и (1) изводимо да ти скалари морају задовољавати диференцијалне једначине

$$\alpha' - \mu\, r^{-3}\, \beta = 0\,, \qquad \beta' + \alpha = 0\,, \qquad \gamma' = 0\,, \tag{6}$$

Прве две једначине дају

$$\beta'' + \mu\, r^{-3}\, \beta = 0\,. \tag{7}$$

Ако је β_1 партикуларни интеграл ове диференцијалне једначине и ако ставимо да је

$$\beta_2 = \beta_1 \int \beta_1^{-2}\, dt\,, \tag{8}$$

интеграли система (6) биће

$$\alpha = -k_1 \beta'_1 - k_2 \beta'_2\,, \qquad \beta = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2\,, \qquad \gamma = k_3\,, \tag{9}$$

где су k_1, k_2 и k_3 константе интеграљења.

Општи векторски елемент кретања одређен је, дакле, једном функцијом времена, β_1, и трима константама, k_1, k_2 и k_3. Различите елементе добивамо спецификацијом, прво, функције β_1, а, затим, у оквиру те „класе елемената“, фиксирањем константи k_i, $i = 1, 2, 3$. Очигледно је да бар једна од њих мора бити различита од нуле. То ће рећи да су елементи

$$\mathbf{A}_1 (\beta_{11}\,;\, k_{11}\,,\, k_{21}\,,\, k_{31}) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_2 (\beta_{12}\,;\, k_{12}\,,\, k_{22}\,,\, k_{32})$$

једнаки ако је, према (9),

$$k_{11} \beta'_{11} + k_{21} \beta'_{21} = k_{12} \beta'_{12} + k_{22} \beta'_{22}\,,$$

$$k_{11} \beta_{11} + k_{21} \beta_{21} = k_{12} \beta_{12} + k_{22} \beta_{22}\,,$$

$$k_{31} = k_{32}\,,$$

одакле можемо изразити константе k_{i1} једног система помоћу константи k_{i2} другог. Друкчије речено, једном функцијом β_1 можемо обухватити све векторске елементе Кеплерова кретања, мењајући само вредности константи k_i.

2. Из овога досада изложеног јасно се види формалност решења основног проблема. Величина β_1 није ништа друго него произвољна компонента вектора положаја небеског тела, у координатном систему у којем је једначина кретања приказана са (1). Према томе, и $(\mathbf{u}\, \mathbf{r})$, са произвољном константом $\mathbf{u}$, задовољава (7), што је врло лако проверити. Но, за ефективни рачун било би потребно познавање, на првом месту, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$; дакле познавање једног векторског интеграла (4).

Па ипак, употребили смо поступак приказан једначинама (5) — (9) стога што он омогућује да се јасно представи зависност, ма и формална, целог проблема Кеплерова кретања од једне једине функције времена. А, истовремено, да различити облици како векторских константи (4) односно (5), тако и интеграла облика (2), како ћемо касније детаљније видети, зависе само од избора константи k_i.

Зато нам је најпростије да векторске елементе разликујемо по вредностима k_i, изабравши једну основну функцију β_1. Тада помоћу два независна вектора,

$$\mathbf{A}(\beta_1;\ k_1^A,\ k_2^A,\ k_3^A) \quad \text{и} \quad \mathbf{B}(\beta_1;\ k_1^B,\ k_2^B,\ k_3^B),$$

— дакле помоћу једне функције β_1 и шест константи k_i^A и k_i^B ($i = 1, 2, 3$), од којих су најмање две различите од нуле — можемо описати Кеплерово кретање. Наравно, при томе је јасно да k_i одређују само облик, тј. врсту елемената **A** и **B**, како смо раније навели. А компоненте од **A** и **B** играју улогу скаларних константи интеграљења диференцијалне једначине кретања (1).

Међутим, као помоћно средство рачуна, можемо извести и обрнуту конструкцију: β_1 ћемо оставити неодређено, па саставити три најједноставнија „основна" непромењљива вектора $\mathbf{a}_i$, по схеми

	k_1	k_2	k_3
$\mathbf{a}_1$	1	0	0
$\mathbf{a}_2$	0	1	0
$\mathbf{a}_3$	0	0	1

Биће, дакле,

$$\mathbf{a}_1 = -\beta'_1\,\mathbf{r} + \beta_1\,\mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_2 = -\beta'_2\,\mathbf{r} + \beta_2\,\mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_3 = [\mathbf{r}\ \mathbf{v}]. \tag{10}$$

Како је, према (8), $\beta_1\beta'_2 - \beta'_1\beta_2 = 1$, то из (10) одмах налазимо да је $\mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$. Помоћу основних вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ можемо конструисати непокретни, у општем случају косоугли, хелиоцентрични координатни систем у путањској равни тела. У њему је Кеплерово кретање приказано интегралима диференцијалне једначине (1), које изводимо из (10):

$$\mathbf{r} = \beta_2\,\mathbf{a}_1 - \beta_1\,\mathbf{a}_2, \qquad \mathbf{v} = \beta'_2\,\mathbf{a}_1 - \beta'_1\,\mathbf{a}_2. \tag{11}$$

Да ли ће систем ових једначина бити довољан за описивање кретања или не, зависи од основних вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$: да ли су они независни или не.

Сменимо ли (11) у (5), где смо претходно уврстили (9), добићемо

$$\mathbf{A} = k_1\,\mathbf{a}_1 + k_2\,\mathbf{a}_2 + k_3\,[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2], \tag{12}$$

као најједноставнији начин за генерализацију векторских елемената непоремећена кретања: помоћу две усвојене векторске константе, $\mathbf{a}_1$

и $\mathbf{a}_2$, и три скалара k_i — карактеристике елемената **A**. Због те једноставности искоришћена је једначина (12) у поменуту сврху у [4], тим пре што је тај рад био посвећен искључиво поремећеном планетском кретању.

3. Интеграли (11) једначине (1) очигледно су аналитички најједноставнији, али су само посебан случај општег решења; посебан утолико што смо константама k_i унапред дали посебне вредности. Да бисмо добили решење у општем облику

$$\mathbf{r} = J\ \mathbf{A} + K\ \mathbf{B} + L[\mathbf{A}\ \mathbf{B}], \tag{13}$$

$$\mathbf{v} = J'\ \mathbf{A} + K'\ \mathbf{B} + L'[\mathbf{A}\ \mathbf{B}], \tag{14}$$

потребно је да одредимо функције времена J, K и L. Општи елементи **A** и **B** нека су представљени једначинама (12):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= k_1^A\ \mathbf{a}_1 + k_2^A\ \mathbf{a}_2 + k_3^A\ [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2], \\ \mathbf{B} &= k_1^B\ \mathbf{a}_1 + k_2^B\ \mathbf{a}_2 + k_3^B\ [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]. \end{aligned} \tag{15}$$

Затим ћемо прву једначину (11) и оне (15) унети у (13), па резултат упоредити по векторима $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$. Тако добивамо да је

$$J = J_1\ \beta_1 + J_2\,\beta_2, \qquad K = K_1\ \beta_1 + K_2\,\beta_2, \qquad L = L_1\ \beta_1 + L_2\,\beta_2,$$

са константама

$$J_1 = \frac{1}{\Delta}[k_1^B[1,2] + k_3^B(\mathbf{a}\,\mathbf{a}_2)], \qquad J_2 = \frac{1}{\Delta}[k_2^B[1,2] - k_3^B(\mathbf{a}\,\mathbf{a}_1)],$$

$$K_1 = -\frac{1}{\Delta}[k_1^A[1,2] + k_3^A(\mathbf{a}\,\mathbf{a}_2)], \qquad K_2 = -\frac{1}{\Delta}[k_2^A[1,2] - k_3^A(\mathbf{a}\,\mathbf{a}_1)],$$

$$L_1 = -\frac{1}{\Delta}[3,1], \qquad L_2 = \frac{1}{\Delta}[2,3].$$

Овде смо, ради краћег писања, увели ознаке:

$$[i, j] = k_i^A k_j^B - k_j^A k_i^B, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{a} = [3,1]\ \mathbf{a}_1 - [2,3]\,\mathbf{a}_2, \qquad \Delta = [1,2]^2 + \mathbf{a}^2.$$

Очигледно је да и ове функције J, K и L задовољавају диференцијалну једначину (7) и да су њихови изводи, потребни за (14),

$$J' = J_1 \, \beta'_1 + J_2 \beta'_2 , \qquad K' = K_1 \, \beta'_1 + K_2 \beta'_2 , \qquad L' = L_1 \, \beta'_1 + L_2 \beta'_2 .$$

На тај начин смо у једначинама (13) и (14) добили најопштији облик интеграла непоремећена кретања.

4. Што се тиче основне функције β_1, као и β'_1, β_2 и β'_2, које из ње изводимо, још једну чињеницу можемо приметити, осим онога што смо о β_1 већ навели. То је да β_1 морамо познавати и као функцију од $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, и као функцију времена. У првом облику користимо се њоме за (10), односно (12), а у другом — за (11), односно (13) и (14). Но једначина $\beta_1 = \beta_1(t)$ потребна нам је на првом месту за (8).

Одавно је већ познато неколико облика функције β_1. Тако се, на пример, још од Лагранжева времена зна да

$$xx' + yy' + zz' = rr' = (\mathbf{r}\ \mathbf{v})$$

задовољава диференцијалну једначину (7). Стога ћемо овде, ради приказа комплетног интеграљења једначине (1) на основи изложеног, у случају кретања по елипси, усвојити да је

$$\beta_1 = -(\mathbf{r}\ \mathbf{v}) , \quad \text{дакле} \quad \beta'_1 = -(v^2 - \mu\, r^{-1}) . \tag{16}$$

Тако онда прва једначина (10) даје

$$\mathbf{a}_1 = (v^2 - \mu\, r^{-1})\ \mathbf{r} - (\mathbf{r}\ \mathbf{v})\,\mathbf{v} . \tag{17}$$

Ако на основи овога израчунамо квадрат a_1^2 и искористимо трећу једначину (10), дођи ћемо до интеграла живе силе

$$v^2 = 2\mu\, r^{-1} - \varepsilon^2 , \tag{18}$$

са константом

$$\varepsilon^2 = (\mu^2 - a_1^2)\, a_3^{-2} .$$

А да бисмо дошли до $\beta_1 = \beta_1(t)$, приметићемо да је та величина, независно од овде усвојеног облика (16), периодична функција времена, која може да се анулира. То показује прва једначина (10). Стога ћемо је најједноставније представити са

$$\beta_1 = F \sin V , \qquad V' = G\, r^n , \tag{19}$$

где су F, G и n константе. Потражићемо помоћну функцију времена V; облик њена извода по времену изабрали смо по аналогији са

$U' = a_3\, r^{-2}$, што следује из треће једначине (10), ако је U угао између $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}_1$. Према томе, са (19) добивамо да је

$$\beta_1'' + \mu\, r^{-3}\, \beta_1 = F\, r^{n-2}\, \left[(\mu\, r^{-n-1} - G^2\, r^{n+2}) \sin V + G\, n\, (\mathbf{r}\ \mathbf{v}) \cos V \right].$$

Овај израз ће се анулирати за свако V (тј. за свако t) ако се r и $(\mathbf{r}\ \mathbf{v})$ одређују, помоћу V, из

$$\mu\, r^{-n-1} - G^2\, r^{n+2} = H \cos V, \qquad G\, n\, (\mathbf{r}\ \mathbf{v}) = -\, H \sin V; \qquad (20)$$

H је засад неодређена константа. Међутим, диференцирањем једне једначине (20) морамо добити ону другу; тако изводимо, уз помоћ (18) и (19), да је $n = -1$ и $G = \varepsilon$. Ако потом елиминишемо V из (20), па резултат упоредимо са a_1^2 из (17), закључујемо да је $H = a_1$, па је и $F = -\, a_1\, \varepsilon^{-1}$. Стога једначине (19) и (20) постају

$$\beta_1 = -\, a_1\, \varepsilon^{-1} \sin V, \qquad V' = \varepsilon\, r^{-1},$$

$$r = \varepsilon^{-2}\, (\mu - a_1 \cos V), \qquad (\mathbf{r}\ \mathbf{v}) = a_1\, \varepsilon^{-1} \sin V.$$

Сад помоћу треће једначине можемо интегралити другу, а резултат је

$$\mu\, V - a_1 \sin V = \varepsilon^3\, (t - T),$$

са интеграционом константом T.

Пошто тако знамо β_1 и као функцију времена,

$$\beta_1 = -\, a_1\, \varepsilon^{-1} \sin V, \quad \text{дакле и} \quad \beta'_1 = -\, a_1\, \varepsilon^2 \cos V\, (\mu - a_1 \cos V)^{-1},$$

можемо прећи на налажење β_2. Према (8) рачунамо

$$\beta_2 = \beta_1 \int \beta_1^{-2}\, dt = -\, a_1^{-1}\, \varepsilon^{-2} \sin V \int (\mu - a_1 \cos V) \operatorname{cosec}^2 V\, dV.$$

Дакле,

$$\beta_2 = a_1^{-1}\, \varepsilon^{-2}\, (\mu \cos V - a_1), \qquad \beta'_2 = -\, \mu\, a_1^{-1}\, \varepsilon \sin V\, (\mu - a_1 \cos V)^{-1}.$$

Тиме имамо све израчунато да испишемо изразе за основне интеграле (11):

$$\mathbf{r} = a_1^{-1}\, \varepsilon^{-2}\, (\mu \cos V - a_1)\, \mathbf{a}_1 + a_1\, \varepsilon^{-1} \sin V\, \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{v} = -\, \mu\, a_1^{-1}\, \varepsilon \sin V\, (\mu - a_1 \cos V)^{-1}\, \mathbf{a}_1 + a_1\, \varepsilon^2 \cos V\, (\mu - a_1 \cos V)^{-1}\, \mathbf{a}_2,$$

$$\mu\, V - a_1 \sin V = \varepsilon^3\, (t - T).$$

Исто тако, сад можемо представити β_2 и β'_2 као функције од $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$:

$$\beta_2 = a_1^{-2}(a_3^2 - \mu r), \qquad \beta'_2 = -\mu a_1^{-2} r^{-1} (\mathbf{r}\ \mathbf{v}),$$

па је други основни константни вектор

$$\mathbf{a}_2 = a_1^{-2}[\mu r^{-1}(\mathbf{r}\ \mathbf{v})\,\mathbf{r} + (a_3^2 - \mu r)\,\mathbf{v}].$$

Основни вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ нису, дакле, ништа друго, него Лапласов интеграл

$$\mathbf{a}_1 = [\mathbf{v}\ \mathbf{C}] - \mu r^{-1}\,\mathbf{r} = \mathbf{D},$$

Хамилтонов интеграл

$$D^2\,\mathbf{a}_2 = C^2\ \mathbf{v} - \mu r^{-1}\ [\mathbf{C}\ \mathbf{r}] = [\mathbf{C}\ \mathbf{D}]$$

и интеграл секторске брзине

$$\mathbf{a}_3 = [\mathbf{r}\ \mathbf{v}] = \mathbf{C},$$

док је помоћна функција времена V — ексцентрична аномалија.

5. Приказани општи изрази за интеграле кретања обухватају, како видимо, све врсте путања. Оне се могу спецификовати касније, приликом усвајања функције β_1, или у зависности од тога да ли почетни услови кретања дају да је $a_1 < \mu$ (као у нашем примеру), или $a_1 = \mu$, или $a_1 > \mu$.

Што се тиче векторских константи, на њима се на овом месту не морамо задржавати. Оне су испитане у [4], па ћемо једино приметити да из њихова општег облика (5) одмах следује

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\delta\alpha}{dt}\mathbf{r} + \frac{\delta\beta}{dt}\mathbf{v} + \frac{\delta\gamma}{dt}[\mathbf{r}\ \mathbf{v}] + \beta\ \mathbf{F} + \gamma\,[\mathbf{r}\ \mathbf{F}],$$

где је $\mathbf{F}$ поремећајно убрзање. Ако, дакле, желимо да извод општег оскулационог елемента $\mathbf{A}$ прикажемо непосредно помоћу поремећајног убрзања $\mathbf{F}$ (а не помоћу његових компоненти, као у [4]), искористићемо горњу једначину. У њој се $\mathbf{F}$ може јавити, у општем случају, у пет облика: три скаларна — $(\mathbf{r}\ \mathbf{F})$, $(\mathbf{v}\ \mathbf{F})$ и $(\mathbf{C}\ \mathbf{F})$, и два векторска — $\mathbf{F}$ и $[\mathbf{r}\ \mathbf{F}]$. Скаларни облици појављују се само у изводима функција α, β и γ, који се могу свести на изводе карактеристика. Но за општу дискусију о векторским елементима овакав поступак би био мање погодан.

Функцијама β_1 можемо давати различите облике. Начелно нас ништа не спречава да у примеру усвојено — $(\mathbf{r}\ \mathbf{v})$ прикажемо као било какву периодичну функцију неког параметра, па да допунским условима настојимо да тај параметар одредимо као функцију времена. У примеру смо видели да једначинама (19) дефинисано V може бити само ексцентрична аномалија (за $a_1 < \mu$). Подесним увођењем једног неодређеног, али константног параметра могу се добити, рецимо, Субботинове аномалије, или неке сличне. У општем случају имамо широке могућности за комбиновања и трансформације, али се јасно види да је суштина питања садржана у диференцијалној једначини (7). Стога сматрамо да се не варамо ако закључимо да се таквим поступком може доћи само до компликованијих функција времена, у поређењу са ексцентричном аномалијом. И то компликованијих било за представљање координата небеског тела, било у релацији која би требало да замени класичну Кеплерову једначину.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Simovljevitch, On anomalies in Kepler's motion, Notes et Travaux Sect. astr. Acad. Serbe Sci. III (1959), 11—21 = Глас САН CCXLII, Прир.-мат. 19 (1960), 105—122.

[2] K. Stumpff, Himmelsmechanik I, Berlin, 1959, Kap. V.

[3] S. Herrick, Universal variables, A. J. 70 (1965), 309—315.

[4] Ј. Л. Симовљевић, Генерализација векторских елемената Кеплерова кретања, докторска дисертација, Београд, 1963.

[5] Ј. Л. Симовљевић, Скаларни елементи планетског кретања, Глас САН CCLXXIV, Прир.-мат. 31 (1969), 47—58.

[6] M. Fracassini, Applicazione del metodo di Gröbner ai problemi della meccanica celeste, Contr. Oss. Astr. Milano-Merate n. s. 262 (1967).

Summary

NOTE ON THE GENERAL FUNCTIONS AND CONSTANTS OF THE KEPLERIAN MOTION

by

J. L. SIMOVLJEVITCH

Starting from the differential equation of motion (1) and writting the constants of integrations in the form (5), the general solution of problem is represented by the equations (13) and (14). The kind of

vectorial elements depends on the constant „characteristics" k_i, $i = 1, 2, 3$, equation (12); $\mathbf{a}_i$ are the simplest elements of motion (10). The general function of time is β_1, satisfying differential equation (7). For an effective evaluation of the integrals, β_1 must be known as the function of time, and as the function of initial conditions of motion ($\mathbf{r}$ and $\mathbf{v}$) too.

As an illustration we give the complete integration in the case of elliptical motion, using the Lagrangean function $s = -(\mathbf{r}\ \mathbf{v})$ as β_1. On the other hand, the periodicity of motion enables us to adopt that, in the simplest case, $\beta = F \sin V$, $F =$ const., which leads to the conclusion that only the excentrical anomaly E is the time function for which is $\beta_1 = F \sin V$, $dV/dt = G\, r^n$, $F, G, n =$ const.