Глас CCCXXIV Српске академије наука и уметности,
Одељење природно-математичких наука, књ. 47—1981.
Glas CCCXXIV de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences mathématiques et naturelles № 47—1981.

Ј. Л. СИМОВЉЕВИЋ

О ПРИМЕНИ ВЕКТОРСКИХ ЕЛЕМЕНАТА У РАЧУНУ СПЕЦИЈАЛНИХ ПОРЕМЕЋАЈА ПУТАЊА ПЛАНЕТОИДА У ПРОКСИМИТЕТУ

(Примљено на IX скупу 24. XI 1978. на основу реферата академика *Р. Кашанина* и *Т. Анђелића*)

Рачун специјалних поремећаја векторских елемената планетоидских путања прилагођен је случају када један планетоид изазива поремећаје у кретању другог, при њиховом проксимитету високог реда. Поступак је упоређен са једном раније приказаном методом и илустрован је нумеричким примером.

М. Миланковић је увео у нашу средину, и научну и наставну, систематско коришћење векторско-скаларног скупа елемената планетског кретања, који чине вектори

$$\mathbf{C}=[\mathbf{rv}] \quad \text{и} \quad \mathbf{D}=[\mathbf{vC}]-\frac{\mu}{r}\mathbf{r}, \quad \mu=k^2(1+m), \tag{1}$$

дакле двострука секторска брзина кретања тела и Лапласов интеграл диференцијалне једначине Кеплерова кретања, као и скалар T, тренутак пролаза тела кроз перихел своје елиптичке путање, повезан са ексцентричном аномалијом E Кеплеровом једначином

$$\varepsilon^3(t-T)=\mu E-D\sin E, \qquad \varepsilon^2=\frac{1}{C^2}(\mu^2-D^2). \tag{2}$$

Радовима *М. Миланковића* и *А. Билимовића* уведени су ови елементи и у рачун поремећаја, специјално секуларних, уз употребу класичне функције поремећаја R, за коју је

$$\text{grad } R=\mathbf{F},$$

а $\mathbf{F}$ је поремећајно убрзање

$$\mathbf{F}=k^2\sum_{i=1}^{n} m_i(\rho_i^{-3}\vec{\rho}_i-r_i^{-3}\mathbf{r}_i), \quad \vec{\rho}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}. \tag{3}$$

Методе рачуна специјалних поремећаја, које нумерички интеграле систем диференцијалних једначина оскулационих елемената, користе данас искључиво поремећајно убрзање (3). Примену таквог система диференцијалних једначина у рачуну специјалних поремећаја у кретању планетоида, за оскулационе елементе (1) и (2), приказао је писац ових редова у свом раду [1]. Систем диференцијалних једначина првог реда у том раду је

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt}=[\mathbf{rF}],\quad \frac{d\mathbf{D}}{dt}=[\mathbf{FC}]+[\mathbf{v}[\mathbf{rF}]],$$

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{C^2-\mu r}{D^2}(\mathbf{rF})+\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{C^2+\mu r}{D^2}(\mathbf{rv})-3\,(t-T)\right](\mathbf{vF}). \tag{4}$$

Циљ је овог рада да поменуту методу прилагоди решавању једног старог задатка небеске механике, који је у наше време постао актуалан.

1. У систематском раду на проблематици проксимитета планетоида *J. П. Лазовић* и *M. Кузманоски* су у свом последњем објављеном раду [2] донели списак нађених проксимитета високог реда планетоидских путања, и то засад само квазикомпланарних. Ово сада доказано постојање веома тесних зближавања путања планетоида чини све реалнијом стару наду астронома да из посматраних међусобних поремећајних промена путања планетоида изведу масу поремећајног тела. Такав рачун поремећаја извео је *J. П. Лазовић* у [3] и [4]. Тај класични рачун специјалних поремећаја астрономских елемената кретања прилагодио је овом случају дејства врло мале масе на врло малом растојању писац овог рада у [5] и [6]. Главне резултате тога рада искористићемо и овде, да бисмо омогућили што једноставније коришћење система (4) у рачуну специјалних поремећаја векторско-скаларних елемената (1) и (2) при проксимитету планетоида.

Прво ћемо приметити да се и овде, при међусобним даљинама планетоида мањим од рецимо, 0.00005 а.ј., вектор $m_i r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i$ може да занемари спрам вектора $m_i \rho_i^{-3}\vec{\rho}_i$. У питању је сада једно поремећајно тело, планетоид масе m_i (чија се вредност креће између 10^{-10} и, изгледа, 10^{-15} масе Сунца), а вектора хелиоцентричног положаја $\mathbf{r}_i$. Стога ћемо за „поремећајно убрзање" користити, уместо тачног израза (3), приближни

$$\mathbf{F}=wkm_i\rho_i^{-3}\vec{\rho}_i, \tag{5}$$

имајући на уму и потребе нумеричког интеграљења, као и избор јединице за време (средњи Гаусов дан). Што се тиче ефективног израчунавања овако дефинисаног „поремећајног убрзања", и ту можемо користити Лагранжев развој у ред вектора хелиоцентричног положаја поремећеног планетоида

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p+\mathbf{v}_p\tau-\frac{1}{2}\,r_p^{-3}\mathbf{r}_p\,\tau^2+\ldots \tag{6}$$

— који произилази из диференцијалне једначине Кеплерова кретања $d^2\mathbf{r}/d\tau^2=-r^{-3}\mathbf{r}$ — и исти за поремећајни, да бисмо помоћу друге једначине (3) добили да је

$$\vec{\rho}_i=\rho_{ip}+(\mathbf{v}_{ip}-\mathbf{v}_p)\tau-\frac{1}{2}(r_{ip}^{-3}\mathbf{r}_{ip}-r_p^{-3}\mathbf{r}_p)\tau^2+\dots \qquad (7)$$

Индексом p смо означили проксимитетске вредности променљивих величина, а $\tau=k(t-t_p)$ је времени интервал, рачунат у средњим Гаусовим данима, од тренутка проксимитета t_p. Овакво израчунавање $\vec{\rho}_i$ је веома брзо и ефикасно колико због кратког интервала $t-t_p$, краћег од, рецимо, 0.25 дана ($\tau<0.005$), толико и због малог износа првог и трећег члана у (7) при проксимитетима високог реда, какви су једино и интересантни. Када тако добијемо $\vec{\rho}_i$ за све тренутке интеграционе схеме, раздвојене константним временим интервалом w, „кораком'' интеграљења, рачунамо квадрате интензитета $\rho_i^2=(\vec{\rho}_i\vec{\rho}_i)$ и одатле ρ_i^{-3}, све у коначном облику.

Кратак, па и веома кратак, времени интервал приметне поремећајне акције једног планетоида на други, дакле, често веома уске границе интеграљења система диференцијалних једначина (4), сугерише нам да и овде све величине у том систему које су на десним странама једначина, можемо да сматрамо за константне, једнаке својим проксимитетским вредностима, са изузетком поремећајног убрзања $\mathbf{F}$. Тачније речено, све променљиве се мењају спорије, у мањем укупном износу, него ли што се мења $\mathbf{F}$, и то због ρ_i^{-3}. Прихватимо ли овакву претпоставку и ставимо да је

$$\mathbf{G}=\int_{t_a}^{t_b}\mathbf{F}dt, \qquad (8)$$

а са $\Delta\mathbf{C}$, $\Delta\mathbf{D}$ и ΔT означимо промене векторско-скаларних елемената $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ и T услед дејства поремећаја у временом интервалу t_b-t_a, систем (4) се своди на једноставне изразе

$$\Delta\mathbf{C}=[\mathbf{r}_p\mathbf{G}], \qquad \Delta\mathbf{D}=[\mathbf{G}\mathbf{C}]+[\mathbf{v}_p[\mathbf{r}_p\mathbf{G}]],$$

$$k\Delta T=-\frac{C^2-r_p}{D^2}(\mathbf{r}_p\,\mathbf{G})+\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{C^2+r_p}{D^2}(\mathbf{r}_p\,\mathbf{v}_p)-3k(t_p-T)\right](\mathbf{v}_p\,\mathbf{G}). \qquad (9)$$

По њима ћемо и ефективно израчунавати промене у елементима кретања, пошто обавимо нумеричко интеграљење (8) у одабраним границама t_a и t_b, симетричним у односу на тренутак проксимитета t_p.

За примену ових израза (9) потребно нам је, како видимо, познавање $\mathbf{r}_p$, $\mathbf{v}_p$ и t_p — T. Прва два вектора већ имамо, из рачуна за $\vec{\rho}_i$ у (7). Интервал t_p — T добивамо из Кеплерове једначине (2), дакле

$$k\varepsilon^3(t_p-T)=E_p-D\sin E_p,$$

са ексцентричном аномалијом E_p која одређује положај проксимитета на путањи поремећеног планетоида.

Уколико пре рачуна по (9) не располажемо векторско-скаларним елементима тела, једноставно ћемо их добити из познатих веза

$$\mathbf{C}=C\mathbf{R},\quad \mathbf{D}=D\mathbf{P},\quad C=\sqrt{p},\quad D=e=\sin\varphi$$

$$\varepsilon^2=\frac{1}{C^2}(1-D^2)=\frac{1}{a},\quad k\varepsilon^3=n=ka^{-3/2}.$$

P и **R** су јединични вектори, познате функције класичних елемената Ω, i и ω. Први одређује хелиоцентрични правац ка перихелу путање, а други је нормалан на путањској равни тела.

Јасно је да је овде у питању тзв. рачун првог реда (када су на десним странама диференцијалних једначина елементи **C**, **D** и T константни), а резултат је апроксимација стварног поремећајног дејства. Но када је то дејство мало, резултат ће бити и потпуно задовољавајући тачан. У сваком случају ће брже дати довољно приближан износ поремећаја но што то даје поступак описан у [5] и [6].

2. Показаћемо примену ове методе на једном примеру.

Мада се у [2] наводи проксимитет од свега 600 *km*, ипак ћемо овде обрадити један осетно „слабији", где је минимално растојање између планетоидских путања скоро десет пута веће. То ће бити проксимитет путања планетоида (205) *Martha* и (992) *Swasey*, такође из списка у [2], но који смо већ искористили у [5] за илустрацију тамо предложене методе рачуна специјалних поремећаја у класичним елементима кретања. Тако ћемо на истом примеру упоредити обе методе и њихове резултате.

Са подацима о проксимитету из [2] и класичним елементима из [7] израчунаћемо $\mathbf{r}_p$, $\mathbf{v}_p$, $\mathbf{r}_{ip}$ и $\mathbf{v}_{ip}$. Поремећајно тело (индекс i) нам је опет планетоид (205) *Martha*. С овим величинама израчунавамо по прва три члана у редовима (6), но показаће се да је

$$\vec{\rho}_i=\begin{cases} -0.0000\,0313-0.0001\,0233\,\tau+\ldots, \\ -0.0000\,0701+0.0568\,3298\,\tau+\ldots, \\ +0.0000\,3713-0.0108\,5231\,\tau+\ldots, \end{cases}$$

потпуно довољно у границама интеграљења $t_a=t_p-0.15$ и $t_b=t_p+0.15$ дана, уз $w=0.01$ дан, исто као и у [5]. Са овим можемо израчунати **F**, са $m_i=10^{-13}$. Резултат дајемо сажето у краткој таблици, тек толико да покажемо ред величина с којима оперишемо.

t_p+	ρ_x	ρ_y	ρ_z	ρ	U	F_x	F_y	F_z
$-0^d.15$	-287	-13964	$+6513$	15411	470	-0	-7	$+$
-0.10	-295	-9075	$+5580$	10657	1421	-0	-13	$+8$
-0.05	-304	-4187	$+4646$	6262	7006	-2	-29	$+44$
0.00	-313	$+701$	$+3713$	3792	31548	-10	$+22$	$+117$
$+0.05$	-322	$+5589$	$+2780$	6251	7043	-2	$+39$	$+20$
$+0.10$	-331	$+10477$	$+1846$	10644	1426	-0	$+15$	$+3$
$+0.15$	-339	$+15366$	$+913$	15397	471	-0	$+7$	$+0$

Компоненте поремећајног убрзања (еклиптика, 1950.0) су у јединицама десете децимале, а све остале величине — у јединицама осме децимале. При томе је $U = wkm_i \rho_i^{-3}$.

Из комплетне таблице за **F**, за по петнаест еквидистантних тренутака пре и после t_p, извешћемо нумеричким интеграљењем да је, према (8),

$$\mathbf{G} = (-72,\ +166,\ +895) \times 10^{-10}.$$

Са познатим

$$\mathbf{r}_p = (-1.16965,\ -2.58611,\ +0.29616),$$

(еклиптика, 1950.0)

$$\mathbf{v}_p = (+0.53502,\ -0.27305,\ +0.09900),$$

$$r_p = 2.85372,\quad C^2 = p = 3.00610,\quad D = e = 0.08539,$$

$$\mathbf{C} = C\mathbf{R} = (-0.17517,\ +0.27425,\ +1.70300),$$

$$E_p = 47^\circ\!\!.57000,\quad n = 0^\circ\!\!.1870390,\quad a = \varepsilon^{-2} = 3.02818,$$

израчунаћемо и

$$M_p = 43^\circ\!\!.95883,\quad t_p - T = 235^d\!\!.02541,$$

$$(\mathbf{r}_p\mathbf{G}) = -80 \times 10^{-10},\ (\mathbf{v}_p\mathbf{G}) = +5 \times 10^{-10}.$$

Са овим обрасци (9) дају

$$\Delta\mathbf{C} = (-2364, +1068,\ -\ 380) \times 10^{-10},$$

$$\Delta\mathbf{D} = (+\ 35,\ -\ 65,\ -\ 65) \times 10^{-10},$$

$$\Delta T = +0^d\!\!.0000164.$$

За ове износе ће се променити елементи **C**, **D** и T планетоида (992) *Swasey* под поремећајним дејством планетоида (205) *Martha* ако му је маса 10^{-13} масе Сунца.

3. Главни разлог што векторски елементи кретања, без обзира како их одаберемо, нису истиснули из употребе класичне астрономске елементе, свакако лежи у томе што они не дају онако јасну геометријску слику о путањи и њеном положају у простору како то дају стари елементи. Шта више, векторски елементи скоро да не дају никакву слику о путањи и њеним променама. Они су само одличне помоћне величине за рачун — и аналитички и нумерички — но онај који их користи биће често принуђен да са њих врши прелаз на класичне астрономске елементе и обрнуто. Овакав прелаз се тим пре мора извршити у овом случају, да се установе одговарајуће промене величина које јасно говоре о промени путање.

Прелаз са векторских елемената (1) и (2) на класичне скаларне, и обрнуто, добро је познат и на њему се не морамо ни мало задржавати. Но начин за извођење малих промена класичних елемената са датим малим променама векторских — мада елементаран задатак — неће се наћи у стандардним уџбеницима. Зато ћемо се на том прелазу мало задржати, тек колико је потребно да изведемо промене астрономских елемената у нашем примеру.

Из

$$\mathbf{C}=C\mathbf{R}, \quad \mathbf{D}=D\mathbf{P}, \quad (\mathbf{PP})=(\mathbf{RR})=1$$

изводимо да је

$$\Delta C=(\mathbf{R}\Delta\mathbf{C})=+35 \text{ x } 10^{-10}, \quad \Delta\mathbf{R}=\frac{1}{C}(\Delta\mathbf{C}-\mathbf{R}\Delta C)=$$

$$=(-1361, +613, -239)\text{x}10^{-10},$$

$$\Delta D=(\mathbf{P}\Delta\mathbf{D})=-13 \text{ x } 10^{-10}, \quad \Delta\mathbf{P}=\frac{1}{D}(\Delta\mathbf{D}-\mathbf{P}\Delta D)=$$

$$=(+258, -796, -773) \text{ x } 10^{-10}.$$

Са овако добивеним променама јединичних вектора **P** и **R** можемо наћи промене елемената Ω, i и ω, помоћу којих су **P** и **R** и дефинисани, на два начина. Или ћемо одмах писати да је

$$\Delta\mathbf{P}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial i}\Delta i+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\omega}\Delta\omega,$$

што ће нас, са познатим парцијалним изводима од **P**, довести до

$$[\mathbf{kP}]\Delta\Omega+\sin\omega\cdot\mathbf{R}\Delta i+\mathbf{Q}\Delta\omega=\Delta\mathbf{P},$$

$$\mathbf{k}=(0, 0, 1),$$

дакле, до система од три једначине, линеарне по непознатим поправкама $\Delta\Omega$, Δi и $\Delta\omega$. Или ћемо из

$$\Delta\mathbf{R}=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial i,}\Delta i$$

што ће се свести на

$$\Delta\Omega=(\cos\Omega\Delta R_x+\sin\Omega\Delta R_y)\operatorname{cosec} i,$$

$$\Delta i=(\sin\Omega\Delta R_x-\cos\Omega\Delta R_y)\sec i,$$

наћи $\Delta\Omega$ и Δi, па нам је онда у претходним једначинама непозната само $\Delta\omega$. Овај избор морамо препустити субјективним склоностима калкулатора, уколико ефективне нумеричке вредности коефицијената одмах не укажу на обрасце које је потребно користити.

За велику полуосу елиптичке путање и њену ексцентричност имамо

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{a} = \frac{1}{C^2}(1-D^2) \quad \text{и} \quad e = D = \sin\varphi,$$

дакле,

$$\Delta a = 2(1-D^2)^{-1}(C\Delta C - D\varepsilon^{-2}\Delta D) \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = \sec\varphi\Delta D.$$

Промену средњег дневног сидеричког кретања налазимо из

$$n = ka^{-3/2}, \quad \text{дакле} \quad \Delta n = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\Delta a.$$

Коначно, промена средње аномалије (само услед дејства поремећаја) произилази из

$$M = n(t-T) \quad \text{у облику} \quad \Delta M = (t-T)\Delta n - n\Delta T.$$

По овим једноставним обрасцима ћемо израчунати поремећајне промене класичних астрономских елемената у нашем примеру:

$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\tilde{\omega}$	$\Delta\varphi$	Δn	ΔM
$+0''.090$	$+0''.026$	$+0''.014$	$-0''.0003$,	$-0''.000004$	$-0''.012$

У [5] смо за ове промене добили

$+0''.088$	$+0''.025$	$+0''.011$	$0''.000$	$-0''.00000$	$-0''.008$

Слагање је, дакле, веома добро, како се могло и очекивати, пошто су у обе методе учињене начелно исте претпоставке и апроксимације тачних релација.

4. Сада се поставља питање о предностима ове или у [5] описане методе рачуна специјалних поремећаја при проксимитету планетоида. Пре одговора на ово питање морамо имати на уму да смо у обе методе настојали да дамо поступке који ће што пре довести до резултата, ма и само приближне вредности. Но, тамо где су поремећаји мали, то јест у већини оваквих случајева проксимитета планетоида, резултати ће бити задовољавајуће тачни. А где су поремећаји већи, само израчунавање $\mathbf{G}$ — односно S, T и w у претходном поступку из [5] — са мањим w и већим степеном тачности, довешће до приметног побољшања тачности резултата.

Ј. П. Лазовић је у [3] показао да мале промене елемената кретања планетоида у пару могу да изазову осетније промене у елементима њиховог проксимитета. То ће рећи да ће се у стварном рачуну често морати понављати рачун проксимитета и одређивати одговарајуће поремећајне промене — после сваке обрачунате акције великих планета на кретање оба планетоида у пару. Стога се овде од метода рачуна поремећаја тражи да што пре доведу до износа поремећаја — односно довољно тачне оцене тог износа.

Посматрајући тако ствари, морамо дати предност овде описаном поступку. Он је рачунски краћи и једноставнији, чак и кад вршимо накнадни прелаз са промена **C**, **D** и T на промене астрономских елемената. Шта више, док је у питању само проксимитет путања (а не и реалних небеских тела на тим путањама) — што је увек први, неизбежни и, да кажемо, одлучујући корак у целом овом раду — нас уопште не мора да интересује поремећајна промена положаја тела на путањи; нас само интересује да ли се неки елемент путање толико промени да се та промена може констатовати посматрањем са Земље. То онда значи да нам је довољно познавање само $\Delta\mathbf{C}$ и $\Delta\mathbf{D}$; једина иоле компликованија једначина из (9), она за ΔT, не мора се уопште користити.

Могли бисмо отићи чак и корак даље. Највеће поремећајне промене, бар код планетоида са квазикомпланарним путањама, могу се очекивати у лонгитуди узлазног чвора и нагибу путањске равни. А промене у тим елементима изводимо знајући само $\Delta\mathbf{C}$. Но, неће нам се исплатити рачунање **G** само за налажење $\Delta\mathbf{C}$.

Тако и у овом примеру рачуна поремећаја видимо ону, већ поменуту паралелу између векторских и класичних астрономских елемената. Захваљујући овим последњим, могли смо у [5] извршити довољно општу геометријско-кинематичку анализу механизма поремећаја при проксимитету планетоида. А векторски елементи у великој мери олакшавају и убрзавају рачун, што у оваквим случајевима није ни мало без значаја. У методи описаној у [5] добивамо одмах промене класичних елемената по цени нешто компликованијег, а свакако дужег, рачуна поремећајног убрзања, чак и са побољшањем тога дела рачуна, описаном у [6]. Овде је, напротив, израчунавање те величине најнепосредније што може бити, али зато не добивамо одмах астрономске елементе. Но како рачун поремећајног убрзања чини највећи део посла у свим оваквим апроксимативним методама, поступак описан овде је бржи у примени од оног из [5].

* *
*

Овај рад је део истраживачког пројекта Основне организације удруженог рада за математику, механику и астрономију Природно-математичког факултета у Београду, финансираног од стране Републичке заједнице науке Србије.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Л. Симовљевић: О једној варијанти рачуна специјалних поремећаја векторских елемената; *Глас САНУ CCLIV*, *Прир.-мат.* **24** (1963), 67—73.

[2] J. Lazović, M. Kuzmanoski: Minimum distances of the quasicomplanar asteroid orbits; *Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd* **8** (1978), 47—54.

[3] Јован П. Лазовић: Важније особености у кретању квазикомпланарних планетоида; докторска дисертација на Природно-математичком факултету у Београду, 1964.

[4] J. Lazović: The perturbed motion of asteroid in proximity; *Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd* **3** (1971), 29—35.

[5] J. Л. Симовљевић: Прилог рачуну поремећаја путања планетоида у проксимитету; *Глас САНУ CCCXI*, *Прир.-мат.* **44** (1979), 7—22.

[6] J. L. Simovljevitch: Further note on the calculus of perturbations of asteroid orbits during proximity; *Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd* **9** (1979), 71—74.

[7] Эфемериды малых планет, 1977.

J. L. Simovljevitch

ON THE USE OF VECTORIAL ELEMENTS IN CALCULUS OF SPECIAL PERTURBATIONS OF ASTEROID ORBITS IN PROXIMITY

Summary

A simple and short method of special perturbations is described, for the use in cases of sensible gravitational action of an asteroid upon the orbit of another one, within a very short time interval of their proximity. The orbit elements used are

$$\mathbf{C}=C\mathbf{R}=[\mathbf{r}\mathbf{v}], \qquad \mathbf{D}=D\mathbf{P}=[\mathbf{v}\mathbf{C}]-\frac{\mu}{r}\mathbf{r}, \qquad \mu=k^2(1+m)$$

and the time of perihelion passage T. The differential equations for these elements are

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt}=[\mathbf{r}\mathbf{F}], \qquad \frac{d\mathbf{D}}{dt}=[\mathbf{F}\mathbf{C}]+[\mathbf{v}[\mathbf{r}\mathbf{F}]\,],$$

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{C^2-\mu r}{D^2}(\mathbf{r}\mathbf{F})+\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{C^2+\mu r}{D^2}(\mathbf{r}\mathbf{v})-3\,(t-T)\right](\mathbf{v}\mathbf{F}),$$

as given in an earlier paper of the author. In cases of a high degree proximity of asteroids (mutual distances less, say, than 0.00005 a.u.), the perturbative acceleration

$$\mathbf{F}=k^2\sum_{i=1}^{n} m_i(\rho_i^{-3}\vec{\rho}_i-r_i^{-3}\mathbf{r}_i), \qquad \vec{\rho}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{r},$$

can be used in the form

$$\mathbf{F} = wkm_i \rho_i^{-3} \vec{\rho}_i .$$

Effective calculations of $\mathbf{F}$ are performed in the simplest way by the aid of Lagrangean development in time series of $\mathbf{r}_i$ and $\mathbf{r}$.

All the right side quantities in the above system of differential equations change themselves more slowly in comparison with the perturbative acceleration. So we can put these quantities to be constant, equal to their proximity values. If we introduce the vector

$$\mathbf{G} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}\, dt,$$

calculated by numerical integration, and if $\Delta\mathbf{C}$, $\Delta\mathbf{D}$ and ΔT are the perturbations changes in elements $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ and T, the above system of differential equations reduces to

$$\Delta\mathbf{C} = [\mathbf{r}_p \mathbf{G}], \qquad \Delta\mathbf{D} = [\mathbf{G}\mathbf{C}] + [\mathbf{v}_p [\mathbf{r}_p \mathbf{G}]],$$

$$k\Delta T = -\frac{C^2 - r_p}{D^2} (\mathbf{r}_p \mathbf{G}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{C^2 + r_p}{D^2} (\mathbf{r}_p\, \mathbf{v}_p) - k\,(t_p - T) \right] (\mathbf{v}_p\, \mathbf{G})$$

from which $\Delta\mathbf{C}$, $\Delta\mathbf{D}$ and ΔT can be calculated.

A comparison is made between this method and the author's previous simplification of the classical special perturbations method in astronomical elements of motion.