Do 253

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Математички факултет

Златко Ћатовић

СИМПЛЕКТИЧКИ ИНТЕГРАТОРИ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У НЕБЕСКОЈ МЕХАНИЦИ

докторска дисертација

Београд, 1997

САДРЖАЈ

ПРИЛОЗИ УЗ ДРУГУ ГЛАВУ

ПРИЛОГ 2А
- Листинг програма за симплектичку интеграцију (MS FORTRAN 5.1).

ПРИЛОГ 2Б
-Графици интеграције проблема два тела (Сунце и Земља).
-Приказане су релативне грешке у путањским елементима.

ПРИЛОГ 2В
-Графици интеграције проблема пет тела.
-Сунце + Земља + Марс + Јупитер + Сатурн
-Приказане су релативне грешке у првим интегралима и то:
-у интегралу енергије, у интегралу угаоног момента и пројекције
-положаја и брзине барицентра на екваторску раван.

ПРИЛОГ 2Г
-Резултати поређење РА15 и СИ8В.
-Графици интеграције проблема два тела (Сунце и Земља).

ПРИЛОГ 2Д
-Резултати поређење РА15 и СИ8В.
-Графици интеграције проблема три тела (Сунце, мала планета и Јупитер)
-Поенкареови пресеци. Хаотичне путање.

ПРИЛОЗИ УЗ ТРЕЋУ ГЛАВУ

ПРИЛОГ 3А
-Листинзи програма за линеарне вишекорачне методе (MS FORTRAN 5.1).
-Листинг програма за конструисање коефицијената симетричних ЛВМ
-пример имплицитне методе од десет корака (MATHEMATICA 2.2).

ПРИЛОГ 3Б
-Графици интеграције проблема два тела (Сунце и Земља).
-Приказане су релативне грешке у путањским елементима.

ПРИЛОГ 3В
-Графици интеграције проблема пет тела.
-Сунце + Земља + Марс + Јупитер + Сатурн
-Приказане су релативне грешке у првим интегралима и то:
-у интегралу енергије, у интегралу угаоног момента и пројекције
-положаја и брзине барицентра на екваторску раван.

УВОД

Симплектичко - нумеричка интеграција обичних диференцијалних једначина Хамилтоновог типа је релативно нова област, како у делу конструисања и анализе тих метода, тако и у делу њихове примене. Наиме, пракса је показала да се први интеграли (угаоног момента,[1] енергије и барицентра) механичког система током интеграције симплектичким методама много боље одржавају него при интеграцији неким класичним методама. Стога су симплектичке методе нашле примену у небеској механици, а посебно када су у питању проблеми са дугим временским скалама. Поред тога треба имати у виду да примена, односно коришћење, оваквог "нумеричког алата", поред механике и физике, све више налази своје место и у неким другим природним наукама, као што су хемија, молекуларна биологија па чак и психологија. Актуелност и перспектива ових метода су биле главни мотив за избор овакве теме за израду докторске дисертације.

С обзиром да је оваква тема везана за рачунарске ресурсе којима се располагало, приликом израде дисертације полазило се од тог ограничавајућег фактора. Рачунари су постали незаобилазни алат у прављењу било какве науке. То је посебно евидентно у небеској механици.

У првој глави изложена је дефиниција симплектичких трансформација уопште, а затим и идеја симплектичко - нумеричке трансформације и неке њене опште особине, као и проблеми који се јављају при практичној реализацији. Друга глава обрађује неконвенционалне симплектичке интеграторе, које је у највећем броју конструисао Јошида [55]. Представљен је начин на који су ове методе конструисане, као и алгоритам којим се примењују заједно са листингом програма који је коришћен при тестирању. Резултати тестова на неколико примера из небеске механике (проблем два тела као потпуно интеграбилни проблем, проблем пет тела као неинтеграбилан проблем са првим интегралима и проблем кретања мале планете у резонанци у средњем кретању са Јупитером) су дати у прилогу 2. У трећој глави детаљно је изложена теорија везана за линеарне вишекорачне методе, као и услови под којима ове методе могу да дефинишу симплектичке трансформације. Представљена је техника којом се могу конструисати симетричне вишекорачне методе. Потом су конструисане класе тих метода, са бројем корака до 10, а дати су и конкретни примери из сваке класе. Листинзи програма као и резултати тестова наведени су у прилогу 3.

[1] Угаони момент, у нотацији која је код нас уобичајена, представља момент импулса.

ГЛАВА ПРВА

СИМПЛЕКТИЧКИ ИНТЕГРАТОРИ

1.1 Увод

Велики број задатака небеске механике се своди, формално математички гледано, на задатак решавања система обичних диференцијалних једначина са почетним условима, тј. на Кошијев задатак. При томе се, у највећем броју случајева, тај систем једначина може написати у Хамилтоновом облику:

$$\frac{d\mathrm{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}}; \qquad \frac{d\mathrm{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}} \tag{1.1}$$

где је p импулс, а q положај репрезентативне тачке у фазном простору. Функција $H(\mathrm{p},\mathrm{q})$ је Хамилтонова функција, која представља укупну механичку енергију система. Једначине класичног проблема N-тела, основног проблема небеске механике, се могу написати у облику (1.1). Параметризоване Постњутновке једначине (у литератури познате као ППН једначине) се такође могу написати у облику (1.1) (види [4]). Хамилтонови динамички системи поседују низ специфичних особина које их издвајају међу осталим динамичким системима. Тако се, на пример, говори о симплектичкој структури фазног простора, фазном току Хамилтоновог система, интегралим инваријантама, симплектичким трансформацијама итд. (види [1]). Интересантно је да су два појма - фазни ток и симплектичке трансформације - у последње време актуелизована у вези са нумеричким методама за решавање (1.1) (види [46],[56]).

Дефиниција 1. Фазни ток Хамилтоновог динамичког система (1.1) је пресликавање $\phi_{h,H}$ из фазног простора у самог себе такво да је

$$\begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{q} \end{pmatrix}_{t=t_0} \xrightarrow{\phi_{h,H}} \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{q} \end{pmatrix}_{t=t_0+h} \tag{1.2}$$

где је $h \in R$ параметар тока - односно време.

На тај начин видимо да фазни ток, задат пресликавањем $\phi_{h,H}$ представља решење система диференцијалних једначина (1.1). Другим речима, ако у једначини

$$(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \phi_{h,H}(\mathrm{p}^0,\mathrm{q}^0) \tag{1.3}$$

време сматрамо променљивом, а $(\mathrm{p}^0,\mathrm{q}^0)$ (почетне услове) фиксним, онда је са (1.2) представљено решење (1.1).

Дефиниција 2. Симплектичка трансформација (пресликавање) је свако пресликавање фазног простора у самог себе које одржава његову симплектичку структуру.

Појам симплектичке структуре који се помиње у горњој дефиницији је одређен на следећи начин. Нека је Ω домен функције H, тј. скуп тачака $(\mathrm{p},\mathrm{q}) = (p_1,\ldots,p_d,q_1,\ldots,q_d)$ у оријентисаном Еуклидском простору R^{2d}. Даље, нека је $\Sigma \subset \Omega$ ограничени скуп за који је дефинисано пресликавање $\phi_{h,H}(\Sigma)$. Сумирањем површина Σ_i, добијених у пресеку Σ са равнима

(p_i, q_i) долазимо до броја $m(\Sigma)$. Смисао горње дефиниције је да за свако симплектичко пресликавање имамо $m(\phi_{h,H}(\Sigma)) = m(\Sigma)$ (види [1]). Каже се да симплектичка трансформација или пресликавање чува површину у фазном простору. Постоје два формализма којима се, на релативно једноставан начин, може проверити симплектичност једне трансформације. Први, "језик" диференцијалних форми, природно одговара Хамилтоновим динамичким системима. Наиме, ако се проверава симплектичност пресликавања $(\mathrm{p}^*, \mathrm{q}^*) = \phi_{h,H}(\mathrm{p}, \mathrm{q})$, тада се показује (види [1]) да је чување површине еквивалентно са $d\mathrm{p}^* \wedge d\mathrm{q}^* = d\mathrm{p} \wedge d\mathrm{q}$. Други приступ којим се може проверити симплектичност пресликавања $\phi_{h,H}$, које се може схватити и као координатна трансформација, је преко Јакобијеве матрице. Наиме, детерминанта те матрице за свако пресликавање које чува површину мора бити 1. Може се доказати следећа теорема коју наводимо (за доказ види [1]).

Теорема 1. Фазни ток Хамилтоновог система је симплектичка трансформација (пресликавање).

Главна последица ове теореме је да фазни ток представља трансформацију фазног простора у самог себе, која "чува површину" у фазном простору. **Идеја о симплектичкој нумеричкој интеграцији се заснива на употреби симплектичких трансформација.**

1.2 Симплектичност нумеричких метода

Једнокорачна нумеричка метода за интеграцију система (1.1) је задата трансформацијом

$$(\mathrm{p}^{n+1}, \mathrm{q}^{n+1}) = \psi_{h,H}(\mathrm{p}^n, \mathrm{q}^n), \tag{1.4}$$

где је h корак интеграције, $(\mathrm{p}^{n+1}, \mathrm{q}^{n+1})$ решење (1.1) у тренутку $t_{n+1} = (n+1)h$, а $(\mathrm{p}^n, \mathrm{q}^n)$ решење (1.1) у тренутку $t_n = nh$.
Да ли је могуће конструисати такве нумеричке методе $\psi_{h,H}$ које урачунавају Хамилтонијанску природу динамичког система који интеграле? Другим речима **да ли је могуће конструисати $\psi_{h,H}$ тако да задаје симплектичку трансформацију блиску фазном току $\phi_{h,H}$?** Одговор на оба питања је потврдан. То је могуће за посебну класу метода, названих симплектичким интеграторима, о којима ће бити више речи у другој глави. Могуће је конструисати и вишекорачне методе које представљају симплектичке трансформације. О њима нешто више у трећој глави. Такође је могуће конструисати и симплектичке Рунге - Кута методе. Услови које њихови коефицијенти треба да задовољавају да би се постигла симплектичност су објављени у радовима ([45] и [34]). Интересантна последица тог резултата је да само имплицитне Рунге - Кута формуле задовољавају поменуте услове симплектичности. Нагласимо да према нашем досадашњем увиду у литературу из ове области услови за симплектичност нумеричких метода заснованим на разним екстраполационим алгоритмима (као што је на пример познати алгоритам за екстраполацију рационалним функцијама Бурлих - Штоера) нису "откривени".
Примена нумеричких метода је увек коначни судија о њиховом општем квалитету. С тога се намеће још једно питање: **Какве практичне предности или недостатке имају симплектички интегратори у поређењу са конвенционалним интеграторима?** О томе нешто више у другој глави, где су анализирани резултати неких тестова.
С обзиром да је главна сврха овог рада примена нумеричких метода и то на проблеме небеске механике, морамо да приметимо да, када имамо конструисану симплектичко-нумеричку методу $\psi_{h,H}$, његова примена, односно практична реализација, ће бити неко пресликавање

$$(\mathrm{p}^{n+1}, \mathrm{q}^{n+1}) = \psi'_{h,H}(\mathrm{p}^n, \mathrm{q}^n), \tag{1.5}$$

блиско пресликавању $\psi_{h,H}$, али, не и истоветно са тим пресликавањем. Практична реализација симплектичко - нумеричке методе $\psi'_{h,H}$ чак, у општем случају, неће бити симплектичко пресликавање. Међутим, ово "нарушавање симплектичности" при реализацији нумеричких метода није велико (тј. грешке заокруживања, које су главни узрок за то нису велике), а у већини случајева могуће је оценити ред величине његовог износа. Симплектичка интеграција је нова област. Она поново заузима пажњу истраживача почетком деведесетих година, после резултата који су публиковани у радовима [44],[7],[35],[18],[19],[20] почетком осамдесетих. Интересантно је да су за ову област заинтересовани математичари који се баве нумеричком анализом, симплектичком геометријом и топологијом, затим нуклеарни физичари и астрономи - посебно они који се баве небеском механиком. Два врло детаљна прегледна чланка, у вези са овом области су наведена у списку литературе под бројевима [46] и [56].

1.3 Опште особине симплектичких интегратора

Једна детаљна анлиза различитих типова грешака при практичној реализацији нумеричких метода за решавање диференцијалних једначина небеске механике је дата у раду [36]. Уопштено говорећи, може се рећи да разлику између тачног фазног тока $\varphi_{h,H}$ и симплектичко - нумеричког тока $\psi_{h,H}$ узрокују **грешке одсецања** док разлику између симплектичко - нумеричког метода $\psi_{h,H}$ и његове практичне реализације $\psi'_{h,H}$ изазивају **грешке заокруживања**. Поред тога што фазни ток (или временска еволуција) аутономног Хамилтоновог система,[1] задатог једначинама (1.1), одржава **симплектичку структуру** система, он одржава и **укупну механичку енергију.**[2] Језиком проблема N-тела могли би рећи да се угаони момент система, као и његова укупна механичка енергија, одржавају током кретања, или да постоје два прва интеграла једначина (1.1): интеграл угаоног момента и интеграл енергије. Стога је погодно захтевати да се и приликом нумеричке интеграције, са одређеном тачношћу, ова два интеграла одржавају.

Већина конвенционалних нумеричких метода "не води рачуна" ни о једном од ова два захтева. У примени, посебно када се ради о дугим интервалима времена за интеграцију, то води ка нумеричкој нестабилности и дивергенцији. Симплектичко - нумеричке методе одржавају тачно (до на грешке заокруживања)[3] симплектичку структуру, али не и интеграл енергије. Поставља се питање да ли је могуће конструисати симплектичко - нумеричке методе тако да се и одржање енергије "природно укључи" у методу до нивоа грешака одсецања? На жалост судећи према доказу изнетом у [23] одговор је негативан. Наиме, у том раду аутори су показали да у општем случају симплектички метод $\psi_{h,H}$ не може тачно да одржава енергију (осим у тривијалним случајевима када се $\psi_{h,H}$ поклапа са $\varphi_{h,H}$ или се своди на његову временску репараметризацију). **Истовремено одржање симплектичке структуре и енергије при интеграцији Хамилтоновог динамичког система представља неиспуњив захтев.** Међутим, симплектички интегратори су и у погледу одржања енергије показали предност у односу на конвенционалне интеграторе. У прилог овом тврђењу иде и резултат објављен у [54], који овде наводимо у облику теореме:

Теорема 2. Симплектичко пресликавање $\psi_{h,H}$ **тачно** (подразумевајући и симплектичку структуру и енергију) описује фазни ток (временску еволуцију) Хамилтоновог динамичког система $\tilde{H}$ који је близак полазном Хамилтоновом динамичком систему H и може се представити (формално - за било који Хамилтонијан) у облику степеног реда по h

$$\tilde{H} = H + hH_1 + h^2H_2 + h^3H_3 + \dots \tag{1.6}$$

---

[1] То је онај Хамилтонов систем чији Хамилтонијан не зависи експлицитно од времена.

[2] Вредност енергије H се не мења током временске еволуције система.

[3] При томе треба нагласити да се симплектички ток $\psi_{h,H}$ већ разликује од фазног тока $\varphi_{h,H}$ за грешке одсецања.

где је

$$H_1 = \frac{1}{2} H_p H_q, H_2 = \frac{1}{12}(H_{pp} H_q^2 + H_{qq} H_p^2), H_3 = \frac{1}{12} H_{pp} H_{qq} H_p H_q, \dots \tag{1.7}$$

У ствари $\psi_{h,H}$ тачно одржава $\tilde{H}$.

Очигледно је да за довољно мали корак h ред (1.6) конвергира, па стога дискретни фазни ток $\psi_{h,H}$ представља фазни ток који увек остаје близу изоенергетске површи $H = const$. Ово значи да неће бити секуларне промене енергије (која је типична за конвенционалне интеграторе) проузроковане грешком одсецања.[4] Због тога су симплектички интегратори нашли своју примену и у небеској механици, посебно када су у питању дуги интервали интеграције.

На крају овог увода нагласимо да је симплектичка интеграција нова област, која се динамично развија. Једна од најновијих примена је произашла из чињенице да је симплектичко - нумерички ток $\psi_{h,H}$ **симплектички поремећај**[5] полазног фазног тока $\phi_{h,H}$. Уколико би фазни ток $\phi_{h,H}$ био тзв. интеграбилан проблем - преко елементарних функција - онда то отвара врата за примену КАМ теорије (Колмогоров - Арнолд - Мозер) која третира Хамилтонове системе који су "мало" поремећени интеграбилни Хамилтонови системи. Овај прилаз је добио име **анализа разлика уназад** и привлачи све већу пажњу истраживача у последње време ([47] и [48]). Монографија [47] је до сада вероватно најкомплетнији преглед резултата из ове области.

[4] Међутим, треба приметити да се смањењем корака (уколико је то неопходно да би се обезбедила конвергенција (1.6)) повећава број рачунских операција, а тиме расту грешке заокруживања.

[5] Овај концепт је интуитивно јасан, ако се има у виду блискост $\tilde{H}$ и H, под условима Јошидине теореме [54].

ГЛАВА ДРУГА

НЕКОНВЕНЦИОНАЛНИ СИМПЛЕКТИЧКИ ИНТЕГРАТОРИ

2.1 Увод

Назив неконвенционални долази од чињенице да симплектички алгоритми побројани и анализирани у овој глави нису "дорада" постојећих метода за нумеричку интеграцију диференцијалних једначина. Они су настали независно од конвенционалних метода. Идеја о приближној симплектичкој интеграцији се појавила, по свему судећи, по први пут у раду [14], где су представљени први симплектички алгоритми. Поново је анализирана у [44] где су изведени симплектички алгоритми за сепарабилне Хамилтонијане (облика $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + P(\mathbf{q})$), а у [7] су изведене имплицитни алгоритми за опште Хамилтонијане. У раду [40], показано је како се могу конструисати експлицитни симплектички алгоритми произвољног реда. Коначно у [55] је показано како је познате експлицитне симплектичке алгоритме могуће "слагати - компоновати" да би се добиле симплектичке шеме вишег реда. У том раду су изведени конкретни алгоритми шестог реда (укупно три) и осмог реда (укупном пет). Овај приступ је у [22] и [8] проширен и на имплицитне симплектичке шеме. У [8] је дат алгебарски код за креирање фортранског изворног кода, за произвољни облик Хамилтонијана.
У следећем параграфу изложен је укратко формални поступак који омогућава извођење експлицитних симплектичких интегратора, произвољног реда. Даље су представљени коефицијенти за експлицитне симплектичке интеграторе четвртог, шестог и осмог реда (укупно девет "метода"). Коначно, анализирани су и упоређени сви набројани интегратори на неким примерима из небеске механике. Проблем два тела, као потпуно интеграбилан проблем, треба да обезбеди дубљи увид у тачност експлицитних симплектичких интегратора. Проблем пет тела (Сунце и четири планете), као пример неинтеграбилног проблема (али стабилног), показује како се понашају ови интегратори у случају динамички компликованијих система. Генерална тежња, чак и у фази тестирања је била да се интеграле "дуги" интервали времена, како би се и емпиријски оправдала очекивања у вези са тачности симплектичких интегратора. Позната Еверхартова метода, иначе веома популарна код астронома због широког круга проблема на које се може успешно применити, представља заправо[1] имплицитна Рунге - Кута метода са Гаус - Радау избором размака између чворова интеграције. Имајући све то у виду, уврстили смо ову методу у групу симплектичких метода (што је како ће се касније видети било потпуно оправдано) које тестирамо. Друга метода која је издвојена из групе Јошидиних интегратора је СИ8В због разлога наведених касније у овој глави. Обрађена су два тест примера. Први пример је интеграбилни проблем (проблем два тела, у нашем случају Сунце - Земља). Други пример је кретање фиктивне мале планете у резонанци 5:2 (средње кретање) са Јупитером, при различитим почетним ексцентричностма. При интеграцијама смо се трудили да обухватимо што дуже интервале времена како би се и у пракси показала предност симплектичких интегратора с обиром на константне грешке одсецања, а и да би се видело какав је утицај грешака заокруживања. Први пример, као аналитички решив задатак, даје могућност поређења грешака у лонгитуди које су највеће код дугих интеграција. С обзиром да хаотична динамика у кретању мале планете долази до изражаја баш у резонанцама (види нпр. [53], [21]), другим

[1] Према речима самог аутора његова метода је повезана са имплицитним Рунге - Кута методама које је формулисао Бучер (види [16], [17]).

примером смо желели да прикажемо да симплектички интегратори и као алат за анализирање хаотичне динамике, имају перспективу.

Сви рачуни су спроведени у аритметици покретног зареза са шеснаест значајних цифара (двострука тачност).[2] У свим тестовима циљ је био да се иде на што дуже интервале времена.[3] Имплицитне шеме за интеграцију овде нису разматране. С обзиром на појачано интересовање истраживача за ову област и потребе небеске механике (ППН једначине), може се закључити да се област имплементације симплектичких алгоритама тек захуктава.

2.2 Конструисање симплектичких интегратора

Хамилтонов систем једначина можемо концизно написати у следећем облику [4]

$$\frac{dZ}{dt} = \{Z, H(Z)\}, \tag{2.1}$$

где витичасте заграде означавају Поасонове заграде $\{A, B\} = A_q B_p - A_p B_q$, а $Z = (\mathrm{p}, \mathrm{q})$. Увођењем оператора диференцирања D_B са $D_B := \{A, B\}$ једначина (2.1) се може написати у облику:

$$\dot{Z} = D_H Z. \tag{2.2}$$

Са $\dot{Z}$ је означен први извод по времену. Формално, експоненцијална функција оператора D_H се може писати у облику реда (види нпр. [40])

$$e^{D_H} \overset{\text{деф.}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[D_H]^m}{m!} \tag{2.3}$$

Оператор e^{D_H} се назива Лијева трансформација функције H. Лијеве трансформације формирају групу. Формално, решење система обичних диференцијалних једначина (2.2) се може писати (с обзиром управо на облик (2.2)) у облику

$$Z(h) = e^{hD_H} Z(0). \tag{2.4}$$

За Хамилтонијан који има сепарабилан облик $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + P(\mathbf{q})$, што јесте случај са проблемом N-тела, с обзиром на линеарност оператора D_H, имамо $D_H = D_T + D_P$. Сада се (2.4) може написати у облику

$$Z(h) = e^{h(D_T + D_P)} Z(0). \tag{2.5}$$

Показује се (види нпр. [55]) да је експоненцијалну функцију у (2.5) (која представља Лијеву трансформацију оператора $h(D_T + D_P)$) могуће написати у облику:

$$e^{h(D_T + D_P)} = \prod_{i=1}^{k} e^{c_i h D_T} e^{d_i h D_P} + O(h^{m+1}), \tag{2.6}$$

за дати цео број m (целобројна величина k је једнозначно одређена за дато m). То значи да је Лијеву трансформацију оператора $h(D_T + D_P)$ могуће написати у облику производа Лијевих

---

[2] Треба напоменути да новије верзије фортранских компајлера омогућавају и четвороструку тачност у рачунским операцијама што значи да грешке заокруживања при раду са таквим компајлерима знатно мање.

[3] Ефективну дужину интервала тих интеграција одређивали су рачунарски ресурси са којима смо у том тренутку располагали.

[4] Проблем конструисања симплектичких интегратора се формално најједноставније решава језиком Лијевих алгебри. (види нпр. [57]).

трансформација $c_i h D_T$ и $d_i h D_P$ са тачношћу $O(h^{m+1})$, где константе (c_i, d_i) треба одредити. Ако симплектичко пресликавање (2.5) заменимо симплектичким пресликавањем:

$$\tilde{Z}(h) = \left[\prod_{i=1}^{k} e^{c_i h D_T} e^{d_i h D_P}\right] Z(0), \tag{2.7}$$

имамо могућност да експлицитно одредимо $\tilde{Z}$ у функцији Z. Наиме, једначина (2.7) се своди на следећи систем алгебарских једначина (види нпр. [40])

$$p_i \quad = p_{i-1} + h d_i \frac{\partial P}{\partial q}(q_i), \qquad i = 1 \ldots k, \tag{2.8}$$

$$q_i \quad = q_{i-1} + h c_i \frac{\partial T}{\partial p}(p_{i-1}) \tag{2.9}$$

При томе је $Z = (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ (почетни услови) а $\tilde{Z} = (\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k)$ (приближно решење са тачности реда величине h^m система обичних диференцијалних једначина (2.2)). **Дакле иако је (2.4) само формална, једначина (2.7) је експлицитно израчунљива, а при томе обе дефинишу симплектичке трансформације.**

На тај начин постаје јасно да коефицијенти $(c_i, d_i), i = 1, \ldots, k$ дефинишу нумеричку методу (симплектички интегратор) за решавање обичних диференцијалних једначина облика (2.2). Јошида ([55]) је показао да, уколико се жели да интегратори (c_i, d_i) буду симетрични у односу на време (тј. да имају особину временске реверзибилности), њихов ред мора да буде паран број. Користећи се формулом Бејкер - Кемпбел - Хаусдорфа он је успео да конструише три методе шестог реда (са укупно шеснаест коефицијената, тј. $m = 6, k = 8$) и пет метода осмог реда (са по тридесетдва коефицијента $m = 8, k = 16$). Без дубљег упуштања у технику којом је дошао до тих резултата, на овом месту наводимо вредности констаната (c_i, d_i) за све симплектичке методе (види табеле).

Табела 1а. Интегратор четврог реда $m = 4, k = 4$

i	c_i	d_i
1	6.756035959798288E-001	-1.756035959798288E-001
2	-1.756035959798288E-001	6.756035959798288E-001
3	1.351207191959658E+000	-1.702414383919315E+000
4	1.351207191959658E+000	0.000000000000000E+000

Табела 1б. Први интегратор шестог реда (у даљем тексту интегратор 6А) $m = 6, k = 8$

i	c_i	d_i
1	.39225680523878000E+00	.51004341191845850E+00
2	-.47105338540975660E+00	.68753168252518090E-01
3	.68753168252518090E-01	-.47105338540975660E+00
4	.51004341191845850E+00	.39225680523878000E+00
5	.78451361047756000E+00	.23557321335935700E+00
6	-.11776799841788700E+01	.13151863206839060E+01
7	-.11776799841788700E+01	.23557321335935700E+00
8	.78451361047756000E+00	.00000000000000000E+00

Табела 1в. Други интегратор шестог реда (у даљем тексту интегратор 6Б) $m = 6, k = 8$

i	c_i	d_i
1	.71992408398839000E+00	.72205442492378590E+00
2	-.10640122700653240E+01	.12203376115314810E+00
3	.12203376115314810E+00	-.10640122700653240E+01
4	.72205442492378590E+00	.71992408398839000E+00
5	.14398481679767800E+01	.42606818707918000E-02
6	-.21322852220014400E+01	.23763527443077360E+01
7	-.21322852220014400E+01	.42606818707918000E-02
8	.14398481679767800E+01	.00000000000000000E+00

Табела 1г. Трећи интегратор шестог реда (у даљем тексту интегратор 6В) $m = 6, k = 8$

i	c_i	d_i
1	.72389128119965000E+00	-.34812637695304500E+00
2	-.10712532270105700E+01	.11954883227639650E+01
3	.11954883227639650E+01	-.10712532270105700E+01
4	-.34812637695304500E+00	.72389128119965000E+00
5	.14477825623993000E+01	-.21440353163053900E+01
6	.15288622842492200E-02	.23894477832436820E+01
7	.15288622842492200E-02	-.21440353163053900E+01
8	.14477825623993000E+01	.00000000000000000E+00

Табела 1д. Први интегратор осмог реда (у даљем тексту интегратор 8А) $m = 8, k = 16$

i	c_i	d_i
1	.52121310434995500E+00	.14313162592035250E+01
2	.98897311891537840E+00	.12988836271454840E+01
3	.12164287159851350E+01	-.12270808589511610E+01
4	-.20314077826031050E+01	-.16983261840452110E+01
5	-.16983261840452110E+01	-.20314077826031050E+01
6	-.12270808589511610E+01	.12164287159851350E+01
7	.12988836271454840E+01	.98897311891537840E+00
8	.14313162592035250E+01	.52121310434995500E+00
9	.10424262086999100E+01	.18202063097071400E+01
10	.15773992812361700E+00	.24400273261673500E+01
11	-.71698941970812000E-02	-.24469918237052400E+01
12	-.16158237415009700E+01	-.17808286265894520E+01
13	-.16158237415009700E+01	-.24469918237052400E+01
14	-.71698941970812000E-02	.24400273261673500E+01
15	.15773992812361700E+00	.18202063097071400E+01
16	.10424262086999100E+01	.00000000000000000E+00

Табела 1ђ. Други интегратор осмог реда (у даљем тексту интегратор 8Б) $m = 8, k = 16$

i	c_i	d_i
1	.74409614601461000E+00	-.42522792949056500E+00
2	.27620166934780000E+00	-.29155067911599280E-02
3	-.14465510537023340E+01	.14478689195210460E+01
4	.14451324786403950E+01	-.15386047235397910E+01
5	-.15386047235397910E+01	.14451324786403950E+01
6	.14478689195210460E+01	-.14465510537023340E+01
7	-.29155067911599280E-02	.27620166934780000E+00
8	-.42522792949056500E+00	.74409614601461000E+00
9	.14881922920292200E+01	-.23386481510103500E+01
10	.28910514897059500E+01	-.28968825032882700E+01
11	.37803958836019200E-02	.28919574431584900E+01
12	-.16924858777011600E-02	-.30755169612018820E+01
13	-.16924858777011600E-02	.28919574431584900E+01
14	.37803958836019200E-02	-.28968825032882700E+01
15	.28910514897059500E+01	-.23386481510103500E+01
16	.14881922920292200E+01	.00000000000000000E+00

Табела 1е. Трећи интегратор осмог реда (у даљем тексту интегратор 8В) $m = 8, k = 16$

i	c_i	d_i
1	.31451532510521650E+00	.99919005718957150E+00
2	.15238115813844000E+00	.29938547587066000E+00
3	-.78055914816249630E-02	-.16192186604054350E+01
4	-.62383861289802160E+00	.98539084848119350E+00
5	.98539084848119350E+00	-.62383861289802160E+00
6	-.16192186604054350E+01	-.78055914816249630E-02
7	.29938547587066000E+00	.15238115813844000E+00
8	.99919005718957150E+00	.31451532510521650E+00
9	.62903065021043300E+00	.13693494641687100E+01
10	-.10645871478918300E+01	.16633580996331500E+01
11	-.16789692825964000E+01	-.15594680382144700E+01
12	.31179081241842700E+00	.16589908845439600E+01
13	.31179081241842700E+00	-.15594680382144700E-01
14	-.16789692825964000E+01	.16633580996331500E+01
15	-.10645871478918300E+01	.13693494641687100E+01
16	.62903065021043300E+00	.00000000000000000E+00

Табела 1ж. Четврти интегратор осмог реда (у даљем тексту интегратор 8Г) $m = 8, k = 16$

i	c_i	d_i
1	.45742212311487000E+00	.58426879139798450E+00
2	-.59557945014712540E+00	-.80154643611436150E+00
3	.88994925112725840E+00	-.11235547676365030E-01
4	-.92890519179175250E+00	.90562646008949150E+00
5	.90562646008949150E+00	-.92890519179175250E+00
6	-.11235547676365030E-01	.88994925112725840E+00
7	-.80154643611436150E+00	-.59557945014712540E+00
8	.58426879139798450E+00	.45742212311487000E+00
9	.91484424622974000E+00	.25369333656622900E+00
10	-.14448522368604800E+01	-.15824063536824300E+00
11	.19381391376227600E+01	-.19606102329754900E+01
12	.10279984939198500E+00	.17084530707869980E+01
13	.10279984939198500E+00	-.19606102329754900E+01
14	.19381391376227600E+01	-.15824063536824300E+00
15	-.14448522368604800E+01	.25369333656622900E+00
16	.91484424622974000E+00	.00000000000000000E+00

Табела 1з. Пети интегратор осмог реда (у даљем тексту интегратор 8Д) $m = 8, k = 16$

i	c_i	d_i
1	.65150082880007000E+00	.70549606265191940E+00
2	-.97005374558511550E+00	-.10213688848304290E+01
3	-.33278908071102180E-01	.12279356339365560E+01
4	.12752815786189400E+01	-.13355125655208400E+01
5	-.13355125655208400E+01	.12752815786189400E+01
6	.12279356339365560E+01	-.33278908071102180E-01
7	-.10213688848304290E+01	-.97005374558511550E+00
8	.70549606265191940E+00	.65150082880007000E+00
9	.13030016576001400E+01	.10799046770369900E+00
10	-.20480979588739300E+01	.53601892130728500E-02
11	-.71918005355277200E-01	.25277892732283900E+01
12	.22773884009490600E-01	-.26937990150511710E+01
13	.22773884009490600E-01	.25277892732283900E+01
14	-.71918005355277200E-01	.53601892130728500E-02
15	-.20480979588739300E+01	.10799046770369900E+00
16	.13030016576001400E+01	.00000000000000000E+00

2.3 Примена и поређење симплектичких интегратора

У овом параграфу ће бити анализирани резултати које дају симплектички интегратори примењени на проблем два тела (Сунце + Земља) и на проблем пет тела (Сунце + Земља + Марс + Јупитер + Сатурн). Сви рачуни су рађени са шеснаест значајних цифара, у аритметици покретног зареза. Листинг фортранског програма, коришћеног за нумеричку интеграцију, дат је у прилогу 2А. Додатни програми за рачун првих интеграла и класичних астрономских елемената нису посебно излистани због тога што представљају стандардне процедуре у небеској механици.

Слични тестови су већ рађени и овде наводимо неке радове у вези са тим који су објављени:[29][5] [25][6] [26],[7] [42][8]). Међутим, треба нагласити да, барем према нашем досадашњем увиду у литературу из ове области, нису у пракси анализирани Јошидини интегратори осмог реда (има их пет!), вероватно зато што захтевају пуно више компјутерског времена за интеграцију. Овакво, интерно,[9] поређење, у оквиру два поменута примера небеске механике, даје нам могућност да проценимо њихове компаративне предности и слабости са чисто практичног аспекта.

(a) Сунце + Земља

У случају проблема два тела (Сунце + Земља) интеграција је обављена у барицентричном координатном систему. То значи да је интеграљено дванаест обичних диференцијалних једначина првог реда. Тиме добијамо могућност да тестирамо и интеграле барицентра, којих има шест скаларних. Међутим у многим ситуацијама у пракси ово не би било оправдано с обзиром да се тиме повећава број једначина, а тиме и рачунских операција, што, посебно на дугим интервалима времена, повећава грешке заокруживања. Корак за интеграцију је $h = 3.65422$дана чиме се интеграли 100 тачака у току једног периода. Графици на странама 2Б-1 до 2Б-18 показују да релативне грешке[10] у великој полуоси a и ексцентричности e показују правилне периодичне промене са периодом од једне године (колики је период обиласка Земље око Сунца!). Ова "периодичност" се јавља код свих променљивих типа акција, а и код укупне механичке енергије (Хамилтонијана). Та појава је уочена и теоријски протумачена у раду [29]. Релативна грешка у нагибу путањске равни i (који је такође канонска променљива типа акције у проблему два тела) и лонгитуди узлазног чвора Ω хаотично су распоређене око нуле.[11] Релативне грешке аргумента перихела мереног од узлазног чвора и средње аномалије M расту линеарно са временом (тј. имају секуларни тренд) што је уочено и теоријски анализирано, поново у раду [29].

Ове интеграције обухватају период од 100 год.($\equiv$ 100 револуција у овом случају) и показују да грешке заокруживања у том интервалу не утичу значајно на резултате. Једну интересантну особину симплектичких интегратора смо уочили, а у вези са интегралима барицентра. С обзиром да су и једначине и почетни услови барицентрични, значи да током кретања нема померања барицентра. Међутим могу се очекивати и нека одступања, ако се има у виду да се ради о приближној интеграцији. Ако се апсолутна грешка барицентра по координатама

---

[5] У овом раду су упоређени симплектички интегратори четвртог и шестог реда са одговарајућим методама типа Рунге - Кута (као представницима једнокорачних метода) и са Стремеровом методом (као представником вишекорачних метода).

[6] У овом раду је коришћен Кендијев симплектички алгоритам [6] четвртог реда за интеграцију путања фиктивних тела у гравитационом пољу Сунца и четири велике планете. Интервал ове интеграције је био 22.5 милиона година, а број фиктивних тела (мале планете) је преко 1000. Ови рачуни су урађени на рачунару типа Cray који има рачунску брзину од преко 100 милиона рачунских операција у секунди.

[7] У овом раду су тестирани симпектички алгоритми четвртог и шестог реда на примерима проблема два тела и ограниченог проблема три тела.

[8] У овом раду су симплектички интегратори примењени на један задатак механике флуида "кретање четири вртлога"

[9] Детаљније поређење симплектичких интегратора Јошиде са Еверхартовом методом је дато, такође, у овој глави.

[10] Под релативним грешкама овде се подразумевају изрази типа $\delta I = (I - I_0)/I_0$ где је I неки интеграл, а I_0 његова вредност на почетку интеграције.

[11] То је за очекивати ако се има на уму да симплектички интегратори одржавају симплектичку структуру тачно и да "симплектичка структура" у овом случају има очигледну геометријску интерпретацију - кретање се одвија у сталној равни.

(рачуна се положај барицентра на сваком кораку интеграције) нанесе на раван Оху (екваторска раван са почетком у барицентру) онда се испоставља да се све грешке хаотично распоређују у квадрату, чије странице имају већу или мању дужину, зависно од корака интеграције. У случају корака $h = 3.65422$дана и интегратора $6A$,[12] на пример, добијамо да су дужине тих страна одређене крајевима интервала $[-5 \times 10^{-13}, 5 \times 10^{-13}]$. Грешке барицентра (и положаја и брзине пројектоване на раван Oxy) приказане су на графицима 2Б-19 и 2Б-20 за интеграторе 6А и 8В (као типичне примере). Ако узмемо у обзир да је цео рачун спроведен са 16 значајних цифара, онда у наведеном случају закључујемо да тачност резултата не може бити већа од 12 цифара[13] и у брзини и у положају. Наравно, треба нагласити да због других утицаја[14] број тачних цифара може бити само још мањи.[15] **На тај начин интеграција барицентричних, али не и хелиоцентричних једначина, може обезбедити додатну оцену тачности рачуна.**[16] На крају напоменимо да је, уопштено гледано, интегратор 6А показао најбоље резултате међу интеграторима шестог реда, док је интегратор 8В показао најбоље резултате међу интеграторима осмог реда.

(б) Сунце + Земља + Марс + Јупитер + Сатурн

У случају интеграције путања пет тела Сунчевог система поново су интеграљене барицентричне једначине (то значи тридесет диференцијалних једначина првог реда). Праћене су релативна грешка у укупној механичкој енергији и угаоном моменту, као и "померање" барицентра. Резултати које дају поједини симплектички интегратори су представљени на графицима 2В-1 до 2В-18. Релативна грешка у енергији поново показује периодичне промене (и то са најмање две периоде; једна врло кратка - реда неколико година и једна врло дуга - реда десет хиљада година). Грешке у енергији имају распон који се смањује са повећањем реда методе. Резултати у вези са наведеним закључком су приказани у табели 2. Што се угаоног момента тиче (који управо изражава симплектичку структуру у нашем случају) поново сви интегратори, без обзира на ред, показују исту тачност. Исто се може рећи и за интеграле барицентра. Међутим, овога пута грешке у интегралима барицентра су нешто веће и изгледа да показују и неке систематске трендове. Ове грешке су вероватно проузроковане грешкама заокруживања услед знатно већег обима рачуна у односу на претходни проблем. Међутим као и у претходном случају, праћењем "кретања" барицентра можемо проценити границе глобалне тачности.
И у овом експерименту најбоље резултате међу интеграторима шестог реда је показао интегратор 6А, док се међу онима осмог реда најбоље показао 8В.

2.4 Неки општи закључци у вези са изведеним тестовима

На основу овог интерног поређења симплектичких интегратора могу се извести и неки општи закључци, значајни при њиховој примени.
Прво, пракса показује да је тачност у енергији код интегратора шестог реда највећа за случај 6А (из непознатог разлога, а као што је већ назначено напред). Тачност овог интегратора је око 50 пута већа од тачности код остала два интегратора.
Друго, пракса показује да је тачност у енергији код интегратора осмог реда највећа за случај 8В (опет из непознатог разлога). Тачност овог интегратора је око 700 пута већа од тачности

[12] Исти резултати се добијају и помоћу осталих интегратора.
[13] Ово свакако није тврђење општег карактера већ закључак који намеће пракса.
[14] Тачност почетних услова, грешке одсецања, грешке у параметрима.
[15] Овде треба нагласити да се сада ради о тачности у оквиру датог модела.
[16] Овде треба напоменути да, с обзиром да је број барицентричних једначина већи од одговарајућег броја хелиоцентричних једначина, њихова интеграција се може неповољно одразити на тачност а кроз грешке заокруживања. Ово је посебно важно имати на уму код дугих временских интервала за интеграцију.

интегратора 8Б, а око 7 пута од интегратора 8Д. Поред тога, треба напоменути (види графике 2Б-13 и 2Б-15) да у случају два тела који је овде дат, ове грешке показују периодичну промену, не као код свих осталих интегратора, већ су и периоде и амплитде другачије распоређене. Једна интересантна особина везана је за грешке у аргументу перихела. Код свих интегратора ове грешке, поред периодичне компоненте, имају и оштар секуларни тренд. Код интегратора 8В (график 2В-14) тај тренд је значајно блажи него код свих осталих интегратора. Поново му је по тачности најближи 8Д (график 2В-16). **Дакле, грешке у енергији и лонгитуди су убедљиво најмање код интегратора 8В.**

Овде се природно поставља питање: Зашто је и међу интегарторима шестог[17] и међу интегра-торима осмог реда један убедљиво тачнији од свих осталих?

Треће, с обзиром на њихову нумеричку стабилност, због константности грешака одсецања, симплектички интегратори Јошиде се могу ефикасно користити за интеграције на дугим интервалима времена.

Напоменимо да ови интегратори имају две особине које унеколико ограничавају њихову примену:

Прво, да би користили експлицитну шему за интеграцију дату једначинама (2.7) Хамилтонова функција (тј. модел кретања небеских тела у овом случју) мора имати сепарабилан облик $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + P(\mathbf{q})$. У супротном случају одговарајућа шема за интеграцију је имплицитна (потребно је решавати додатно још један систем алгебарских једначина да би се дошло до решења). Ова осбина отежава примену Јошидиних интегратора на систем ППН једначина.

Друго, промена корака у току интеграције води у пракси ка нумеричкој нестабилности и хаотичности ([54], [5]) што је за очекивати с обиром на начин на који су ови интегратори конструисани (за дато и фиксирано h Хамилтонова функција се развија у ред). Ова особина онемогућује примену Јошидиних интегратора у случајевима када је потребно мењати корак током интеграције да би се одржала задата тачност, као што су на пример случајеви тесних пролаза (проксимитета) код малих планета.

Број рачунања десних страна једначина које се интеграле је, у случају интегратора четврог реда 4, шестог реда 8, а осмог реда 16. То чини интегратор четвртог реда око 2.20 пута бржим од интегратора осмог реда, а око 1.75 пута бржим од интегратора шестог реда. Коначно, интегратор шестог реда је око 1.65 пута бржи од интегратора осмог реда.[18]

интегратор	два тела	пет тела	два тела
	$\left[\frac{\Delta E}{E}\right]$	$\left[\frac{\Delta E}{E}\right]$	$\left[\frac{\Delta \omega}{\omega}\right]$
4	$\approx 4.0 \times 10^{-7}$	$\approx 4.0 \times 10^{-7}$	≈ 0.3100000
6А	$\approx 1.3 \times 10^{-10}$	$\approx 1.1 \times 10^{-9}$	≈ 0.0001700
6Б	$\approx 7.0 \times 10^{-9}$	$\approx 5.0 \times 10^{-8}$	≈ 0.0080000
6В	$\approx 7.0 \times 10^{-9}$	$\approx 7.0 \times 10^{-8}$	≈ 0.0080000
8А	$\approx 5.0 \times 10^{-11}$	$\approx 3.5 \times 10^{-9}$	≈ 0.0000240
8Б	$\approx 2.2 \times 10^{-10}$	$\approx 5.0 \times 10^{-9}$	≈ 0.003100
8В	$\approx 3.0 \times 10^{-13}$	$\approx 1.0 \times 10^{-11}$	≈ 0.0000045
8Г	$\approx 4.0 \times 10^{-12}$	$\approx 2.2 \times 10^{-10}$	≈ 0.0000065
8Д	$\approx 6.0 \times 10^{-11}$	$\approx 3.5 \times 10^{-9}$	≈ 0.0000900

Табела 2. Релативна тачност појединих интегратора

У последњих пет година неки аутори су утврдили да се "симплектичност" нумеричких метода

[17] У раду [29] је уочено да је интегратор 6А бољи од 6Б и 6В, а ово питање је постављено, такође без одговора.

[18] Ове оцене брзина су изведене на основу примене интегратора на PC-платформи.

за решавање Хамилтонових система може остварити и код познатих једнокорачних и вишекорачних метода. О овоме као и општем поређењу различитих метода биће речи у наредној глави.
Резултати поређења представника Јошидиних симплектичких интегратора, анализираних у овом параграфу, са познатим Еверхартовим алгоритмом су представљени у следећим параграфима.

2.5 Поређење СИ8В и РА15

Тестирање познатог Еверхартовог алгоритма РА15[19] и симплектичког интегратора СИ8В (као најбољег представника "Јошидиних интегратора") на примеру барицентричних једначина система Сунце - Земља, треба да да нешто дубљи увид у тачност и ефикасност поменутих метода. У овом примеру се дакле интеграли дванаест диференцијалних једначина првог реда, на интервалу времена од око 86000 година. Корак интеграције је био $h = 10.957266$[20] дана. Графици на странама 2Г-1 и 2Г-2 приказују грешке првих интеграла у поменутим интеграцијама. Са стране 2Г-1 се види да је грешка у енергији код РА15 далеко мања (за око два реда величине) и врло стабилна током целе интеграције. Грешка у енергији код СИ8В показује правилне периодичне промене као што је већ наглашено у овој глави. На страни 2Г-1 је такође приказана релативна грешка у интензитету угаоног момента. Оба интегратора су показала одличне резултате, али РА15 показује благи секуларни тренд, док се СИ8В држи још стабилније. Интеграли барицентра поново су послужили за додатано поређење тачности интеграције два интегратора. На страни 2Г-2 приказне су грешке пројекција положаја и брзине центра масе на раван Oxy. Што се положаја центра масе тиче РА15 се показао нешто бољим, али и код СИ8В грешке су истог реда величине. Судећи по интензитету ових грешака, не би требало више од дванаест цифара у координатама положаја сматрати тачним на крају интеграције. Интересантно је да су грешке код вектора брзине центра масе знатно мање и хаотично распоређене у квадрату (види слику 2Г-2) код оба интегратора. Судећи према томе четрнаест цифара у координатама вектора брзине се могу сматрати тачним.
Погледајмо сада каква се слика о тачности поменутих интегратора добија када се анализирају грешке у путањским елементима. Графици на странама 2Г-3 и 2Г-4 приказују ове грешке. За велику полуосу и ексцентричност могло би се рећи оно што је напред речено за енергију. Грешке код РА15 су два до три реда величине мање, али оба интегратора показују одличну стабилност. Што се грешака у нагибу путањске равни и лонгитуди узлазног чвора тиче оне су подједнако мале код оба интегратора (ова два елемента одређују положај путањске равни у простору). Грешке у аргументу перихела мереном од узлазног чвора код СИ8В расту линеарно са временом, а код РА15 оне остају врло мале целим током интеграције. На крају, што се епохе пролаза кроз перихел тиче ситуација је обрнута, сада у корист СИ8В.

	$[\Delta\omega]$	$[\Delta\tau]$
РА15	$\approx -3.^\circ 6 \times 10^{-7}$	≈ 235дана
СИ8В	$\approx 4.^\circ 9$	≈ 1дан

Табела 3. Неке (апсолутне) грешке РА15 и СИ8В на крају интеграције

[19] РА15 је скраћеница за Еверхартов алгоритам Радау - 15

[20] Овај корак, с обзиром на јединице у којима је интеграција спроведена, омогућује да се током једног периода интеграли 33.333333 положаја на путањи. Могуће је изабрати и већи и мањи корак, у зависности од тачности која се тражи и ресурса којима се располаже.

Табела 3 приказује неке интересантне показатеље који одређују грешку у лонгитуди на крају интеграције.
На основу ових тестова можемо рећи да што се тачности тиче, РА15 и СИ8В су равноправни. Што се брзине тиче СИ8В је далеко ефикаснији од РА15. Показало се да је СИ8В између 100 и 700 пута бржи од РА15, у зависности од теста. Треба имати у виду да РА15 има имплементиран алгоритам за корекцију корака према унапред задатој тачности док СИ8В ради са сталним кораком. Ова чињеница их у неку руку чини неравноправним, али не умањује важност горње анализе.

2.6 Фиктивна мала планета у резонанци 5:2 са Јупитером

Кретање мале планете у резонанци са Јупитером је један од проблема небеске механике који је до сада често разматран. При дугим интервалима времена путање малих планета у резонанци, у зависности од почетне ексцентричности, показују тенденцију ка регионима високе ексцентричности, а тиме и динамика њиховог кретања постаје "хаотична". Анализа овог кретања, с обзиром да се ради о неинтеграбилном проблему, је до сада остваривана уз помоћ разних алата - почевши од квалитативне анализе, преко разних техника за усредњавање по краткопериодичним поремећајима па до нумеричке интеграције. Ова последња техника, с обзиром на брз развој рачунарске технике постаје све актуелнија, како у примени тако и у развоју алата - метода за нумеричку интеграцију које су погодне за разне задатке.
Као и до сада "општа тачност" је оцењивана посматрањем првих интеграла - енергије, угаоног момента и барицентра. С обзиром на битну разлику у брзини РА15 и СИ8В овде ћемо приказати неке елементе хаотичне динамике кретања мале планете у резонанци, добијене интеграцијом помоћу СИ8В. Интеграције обухватају милион година што одговара времену од око 80000 Јупитерових периода. Корак интеграције је $h = 32.871798$ дана. При таквим условима РА15 би морао да ради неколико месеци, док СИ8В тај исти посао уради за 9 сати на платформи Pentium-PRO/200 MHz. Остаје наравно закључак из претходног параграфа да је РА15 изузетно захвалан за интеграцију путања у краћим интервалима времена и када је потребно адаптирати корак према траженој тачности. Што се дугих интервала интеграције тиче СИ8В, а исто важи и за остале Јошидине интеграторе, је далеко ефикаснији.
Но вратимо се хаотичној динамици. Интеграљена су четири "случаја" фиктивне мале планете у резонанци 5:2 са Јупитером у средњем кретању. Ради се заправо о четири различите почетне ексцентричности мале планете $e_1 = 0.01, e_2 = 0.1, e_3 = 0.2, e_4 = 0.3$. Графици са грешкама у првим интегралима при овим интеграцијама су приказани на странама 2Д-1 до 2Д-8. При свим ексцентричностима грешке у енергији и угаоном моменту остају у истим границама. Незнатна разлика се уочава за $e = 0.2$ (види стране 2Д-6 и 2Д-7 у прилогу 2Д). Ово важи и за "кретање"барицентра. Реч кретање у претходној реченици је под наводницима, због тога што се не мисли на стварно кретање барицентра у простору које је последица динамичког модела, већ се мисли на кретање проузроковано грешкама у нумеричкој интеграцији једначина тог модела. При свим интеграцијама (напомињемо да се сада ради о интервалу времена од 1.2×10^5 год) грешке у положају барицентра достижу око 5×10^{-10} што значи да у овј интеграцији има смисла сматрати девет цифара положаја "динамички тачним". На страни 2Д-9 су приказане путање мале планете при поментим ексцентричностима. Уочено је да се са порастом почетне ексцентричности повећава и тенденција ка хаотичној динамици. Један од важних индикатора хаотичне динамике су Поенкареови пресеци. Поенкареови пресеци представљају дводимензионе графике чије су осе $\sqrt{2\sqrt{\mu a}(1-\sqrt{(1-e^2)}}\cos\tilde{\omega}$ и $\sqrt{2\sqrt{\mu a}(1-\sqrt{(1-e^2)}}\sin\tilde{\omega}$.

Они су приказани на страни 2Д-10, за наша четири случаја. Сличне тестове је радио и Шидлиховски (види [53]) да би упоредио технике мапирања са резултатима добијеним интеграцијом симплектичким методама. У том раду он се користио симплектичким интеграторима шестог реда, а једначине кретања су биле хелиоцентричне. Упоређујући његове закључке у вези са достизањем критичне ексцентричности, можемо рећи да се постиже добро слагање. При почетној ексцентричности $e = 0.3$ врло брзо се достиже и критична ексцентричност која представља границу изнад које долази до пресека са Марсовом путањом.

На основу ових тестова можемо закључити, да уз ограничења која су поменута, симплектички интегратори представљају одличан алат за анализу резонантних и хаотичних кретања мале планете на дугим интервалима времена. Реч дугим у претходној реченици има релативно значење и ту дужину ефективно одређују рачунарски ресурси са којима се располаже. Као што је већ наглашавано у претходној глави, области развоја и примене симплектичких интегратора се тек захуктавају.

Анализа и поређење различитих симплектичких алгоритама се може продубљивати и проширивати новим методама. Ту се мисли на развој нових симплектичких метода, и конвенционалних (Рунге - Кута, вишекорачне, екстраполационе, хибридне, ...) и нековенционалних (како Јошидине методе за сепарабилне Хамилтонијане још виших редова од 8, затим имплицитне Јошидине методе за несепарабилне Хамилтонијане), затим и на њихову примену при решавању различитих задатака небеске механике (односно Хамилтонове механике).

ГЛАВА ТРЕЋА

ЛИНЕАРНЕ ВИШЕКОРАЧНЕ МЕТОДЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У НЕБЕСКОЈ МЕХАНИЦИ

3.1 Увод

Линеарна вишекорачна метода (ЛВМ), од k корака, за приближно решавање Кошијевог задатка:

$$y' = f(x;y); \qquad y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

је дат следећом формулом

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \tag{3.2}$$

где су (α_j, β_j) коефицијенти методе ($\alpha_j, \beta_j \in R, j = 0, \ldots, k; f_{n+j} = f(x_{n+j}; y_{n+j})$); h корак интеграције, а $n \in N$ је дата целобројна величина која одређује тачку у чијој околини се спроводи интеграција. Претпоставља се да је $\alpha_k \neq 0$ (услов да би метода била k-корачна) и да је $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$. Ако једначину (3.2) поделимо са α_k, коедфицијент уз y_{n+k} постаје јединица чиме добијамо нормирану верзију једначине (3.2). Са обзиром да је, у општем случају, f нелинеарна функција аргумената, y_n то је, у општем случају (3.2) нелинеарна диференцна једначина. За методу (3.2) кажемо да је експлицитна ако је $\beta_k = 0$ и да је имплицитна ако је $\beta_k \neq 0$. Да би одредили y_{n+k} методом (3.2) потребно је знати претходних $k - 1$ вредности тражене функције $y_n, \ldots, y_{n+k-1}$. Током интеграције то свакако није проблем, али на самом почетку поступка нумеричке интеграције те вредности је потребно одредити неком другом методом.

Линеарна вишекорачна метода, од k корака, за приближно решење Кошијевог задатка

$$y'' = g(x;y); \qquad y(x_0) = y_0 \tag{3.3}$$

је дата следећом формулом

$$\sum_{j=0}^{k} \gamma_j y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^{k} \delta_j g_{n+j}, \tag{3.4}$$

где су γ_j, δ_j коефицијенти методе. Аналогно методама (3.2) за једначине првог реда важе претпоставке за коефицијенте γ_0, δ_0 и γ_k. Приметимо да метода (3.4) не даје први извод y' током интеграције, па се он мора одређивати или нумеричким диференцирањем решења y или нумеричком интеграцијом другог извода y''.
Коефицијенти вишекорачних метода се могу одређивати на различите начине: коришћењем равоја у Тејлорове редове,[1] коришћењем нумеричке интеграције, директним коришћењем интерполације, или применом нумеричког диференцирања.[2] У литератури се најчешће срећe

[1] Овај приступ се понекад зове и метода неодређених коефицијената

[2] Сваки од наведених приступа је детаљно образложен у књизи Ламбера [32].

приступ преко нумеричке интеграције. Тим начином су изведене Адамсове (за једначине првог реда) и Стремерове методе (за једначине другог реда). У наредном параграфу биће нешто више речи о овој групи метода. Неке предности симетричних ЛВМ у односу на остале су уочене релативно недавно и о њима ће касније бити нешто више речи. **Услови, потребни да би ЛВМ имала својства симплектичке трансформације су откривени недавно, ([15]) и тој класи ЛВМ-а ће у каснијим параграфима бити посвећено више пажње.**

3.2 Кратак историјски преглед

Тачно решење Кошијевог задатка (3.1) се формално може написати у облику:

$$y(x+k) - y(x) = \int_x^{x+k} f(t, y(t))dt \tag{3.5}$$

за било које произвољно изабране тачке x и $x+k$ на интервалу интеграције $[a, b]$. Ако подинтегралну функцију у (3.5) заменимо са неким обликом јединственог интерполационог полинома $P(x)$ са чворовима $[x_n, f_n = f(x_n, y_n)]$ онда је, за дато k могуће израчунати $y(x+k)$. У зависности од вредности x и $x+k$ разликујемо неколико различитих типова вишекорачних метода за једначине првог реда који су наведени у Табели 1.

метода	x	x+k
Adams - Bashforth	x_n	x_{n+1}
Adams - Moulton	x_{n-1}	x_n
Nyström	x_{n-1}	x_{n+1}
Milne - Simpson	x_{n-2}	x_n

Табела 1.

Означимо са $P(x)$ јединствени интерполациони полином на интервалу $(x_n, \ldots, x_{n-k})$. Тада Њутнова формула интерполације има облик

$$P(x) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \begin{pmatrix} -s \\ m \end{pmatrix} \nabla^m f_n, \tag{3.6}$$

где је $s = \frac{x - x_n}{h}$, а k целобројна величина која представља број чворова интерполације, а $\nabla^m f_n$ представља таблицу разлика функције f.

Адамс - Башфорт (Adams-Bashforth)[3] -ова формула, с обзиром на Табелу 1, може се написати у облику

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x)dx = h \sum_{m=0}^{k} A_m \nabla^m f_n \tag{3.7}$$

где су коефицијенти A_m дати са:

$$A_m = (-1)^m \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \begin{pmatrix} -s \\ m \end{pmatrix} dx = (-1)^m \int_0^1 \begin{pmatrix} -s \\ m \end{pmatrix} ds \tag{3.8}$$

Важно је уочити да коефицијенти A_m не зависе од функције f. Они, за дати степен интерполационог полинома k, представљају Адамс-Башфортову методу одговарајућег реда. Ако се у

[3] Адамс - Башфортова формула је објављена у раду [3]

формули (3.7) уместо разлика $\nabla^m f_n$ користе вредности функције f у чворним тачкама, онда се та формула може написати у облику:

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{m=0}^{k} \beta_{km} f_{n-m}, \tag{3.9}$$

где су нови коефицијенти β_{km} повезани са A_m помоћу следеће везе:

$$\beta_{km} = (-1)^m \sum_{m=0}^{k} \binom{j}{m} A_j \quad \begin{matrix} k = & 0, 1, & \ldots, \\ m = & 0, 1, & \ldots, k \end{matrix} \tag{3.10}$$

Из (3.10) се види да је k коефицијент који одређује број корака, а неми индекс m пребројава те кораке. У табелама 2. дати су коефицијенти (у разломљеном облику табела 2а, а у децималном облику табела 2б) Адамс - Башфортових формула[4] за степене интерполационог полинома $k \in [0, 10]$.

m	0	1	2	3	4	5	6
β_{0m}	1						
$2\beta_{1m}$	3	-1					
$12\beta_{2m}$	23	-16	5				
$24\beta_{3m}$	55	-59	37	-9			
$720\beta_{4m}$	1901	-2774	2616	-1274	251		
$1440\beta_{5m}$	4227	-7923	9982	-7298	2877	-475	
$60480\beta_{6m}$	198721	-447288	705549	-688256	407139	-134472	19087

Табела 2а.

m	β_{7m}	β_{8m}	β_{9m}	β_{10m}
10				0.28018960
9			-0.28697545	-3.0888714
8		0.29486800	2.8776470	15.486179
7	-0.30422454	-2.6631685	-12.994285	-46.617036
6	2.4451637	10.701468	34.807405	93.647220
5	-8.6121280	-25.124736	-61.283642	-131.89142
4	17.379654	38.020414	74.179321	133.01914
3	-22.027753	-38.540361	-62.646299	-96.269050
2	18.054539	26.310843	36.641959	49.250491
1	-9.5252067	-11.884151	-14.466930	-17.268826
0	3.5899554	3.8848234	4.1717988	4.4519884

Табела 2б.

Адамс - Мултонова (Adams - Moulton)[5] -формула је следећег облика:

$$y_n - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} P(x)dx = h \sum_{m=0}^{k} M_m \nabla^m f_n, \tag{3.11}$$

где су коефицијенти M_m дати са:

$$M_m = (-1)^m \frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \binom{-s}{m} dx = (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds. \tag{3.12}$$

[4] Ови коефицијенти су израчунати помоћу програма за алгебарску манипулацију MATHEMATICA v2.2

[5] Адамс - Мултонова формула је објављена у раду [38]

Слично претходном случају, ако се уместо коначних разлика $\nabla^m f_n$ искористе вредности функције f у чворним тачкама, онда се формула (3.11) може написати у облику:

$$y_n - y_{n-1} = h\sum_{m=0}^{k} \beta^*_{km} f_{n-m}, \tag{3.13}$$

где су нови коефицијенти β^*_{km} повезани са M_m помоћу следеће формуле:

$$\beta^*_{km} = (-1)^m \sum_{m=0}^{k} \binom{j}{m} M_j \quad \begin{matrix} k = & 0, 1, \ldots, \\ m = & 0, 1, \ldots, k \end{matrix} \tag{3.14}$$

Коефицијенти β^*_{km} за $k \in [0, 10]$ су дати у табели 3. Из формуле (3.13) се види да су Адамс - Мултонове формуле имплицитне[6]. Формуле тог типа најчешће се зову коректор формуле и да би биле употребљиве потребна је нека прогноза[7] за $y_n^{(0)}$. Та прогноза се, пак, најчешће остварује коришћењем одговарајуће вишекорачне експлицитне методе, која се у том случају зове предиктор формула. Решење $y_n^{(l)}$ се поправља у l простих итерација док се не постигне задата тачност. Може се показати да овај поступак конвергира ка тачном решењу диференцне једначине (3.11) y_n које је јединствено (види [28] стр.195). О алгоритмима за примену имплицитних вишекорачних метода ће бити нешто више речи у наредним параграфима.

m	0	1	2	3	4	5	6
β^*_{0m}	1						
$2\beta^*_{1m}$	1	1					
$12\beta^*_{2m}$	5	8	-1				
$24\beta^*_{3m}$	9	19	-5	1			
$720\beta^*_{4m}$	251	646	-264	106	-19		
$1440\beta^*_{5m}$	475	1427	-798	482	-173	27	
$60480\beta^*_{5m}$	19087	65112	-46461	37504	-20211	6312	-863

Табела 3а.

m	β^*_{7m}	β^*_{8m}	β^*_{9m}	β^*_{10m}
10				-0.00678585
9			0.00789255	0.07575105
8		-0.00935654	-0.08038952	-0.38575277
7	0.01136739	0.08621969	0.37035163	1.1846536
6	-0.09384094	-0.35582396	-1.0187985	-2.4438270
5	0.34308036	0.86704641	1.8615082	3.5715424
4	-0.73203538	-1.3869929	-2.3814547	-3.8064832
3	1.0479646	1.5419307	2.2049052	3.0192072
2	-1.0069196	-1.2689027	-1.5530346	-1.8583979
1	1.1561591	1.2310113	1.3020443	1.3699028
0	0.30422454	0.29486800	0.28697545	0.28018960

Табела 3б.

Што се тиче Адамсових метода, експлицитних и имплицитних, две ствари падају одмах у очи. **Прво**, коефицијенти код имплицитних метода су већи (по модулу) од коефицијената одговарајућих експлицитних метода. Са тачке гледишта примене ових метода ово значи да ће грешке заокруживања бити мање код експлицитних метода. **Друго**, и грешке одсецања ће

[6] Непозната y_n се на сваком кораку интеграције јавља и на десној страни је значина $f_n = f(x_n, y_n)$.

[7] Види нпр. књигу [28]

бити мање, јер су оне (као што ће касније бити показано) пропорционалне вредностима ових коефицијената.

Адамс - Башфорт и Адамс - Мултон методе су овде приказане као инструктивни примери. На аналоган начин лако се могу одредити и коефицијенти за Нистромову (Nyström) и Милн - Симпсонову (Milne - Simpson) методу (види Табелу 1). Такође се мењањем вредности за x и $x+k$ у Табели 1. могу лако дефинисати друге методе. Адамсове методе су врло једноставне у примени. Њихова примена, међутим, захтева опрезност и претходно испитивање особина методе (услови поретка, стабилност, конвергенција и неке друге карактеристике о којима ће бити нешто више речи касније у параграфу 3.3). Резултати тестирања неких од ових метода на примерима небеске механике (примери су исти као они из друге главе) дати су у параграфу 3.5. Листинзи програма припремљених за ове тестове (урађених за ФОРТРАНСКЕ компајлере) су дати у прилогу 3А. Иако су програми прилагођени за тестове из области небеске механике лако се могу прерадити за друге типове диференцијалних једначина.

Што се тиче линеарних вишекорачних метода и њихове примене на обичне диференцијалне једначине другог реда разликујемо два случаја. Од једначине облика

$$y'' = q(x, y, y') \tag{3.15}$$

сменом $u' = v$ и $v' = q(x, u, v)$ добијамо систем обичних диференцијалних једначина првог реда. Овај облик једначина срећемо и у небеској механици. На пример, једначине параметризованог постњутновског формализма (ППН), су облика (3.15). Ове једначине су прилагођене за проучавање динамике Сунчевог система, као и тестирању различитих теорија гравитације. Када су обичне диференцијалне једначине другог реда облика

$$y'' = g(x, y) \tag{3.16}$$

онда се одговарајућа вишекорачна формула за приближну интеграцију (3.16) може написати у облику[5]

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{m=0}^{k} S_m \nabla^m y_n, \tag{3.17}$$

где су коефицијенти S_m дати изразом:

$$S_m = (-1)^m \int_0^1 (1-s)\left[\begin{pmatrix} -s \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ m \end{pmatrix}\right] ds. \tag{3.18}$$

Ако се у формули (3.17) разлике $\nabla^m f_n$ изразе преко вредности функције f у чворовима интерполације, онда та формула добија облик

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{m=0}^{k} \delta_{km} f_{n-m}, \tag{3.19}$$

$$\delta_{km} = (-1)^m \sum_{m=0}^{k} \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} S_j \quad \begin{matrix} k = & 0, 1, & \dots, \\ m = & 0, 1, & \dots, k. \end{matrix} \tag{3.20}$$

Једначине (3.17) или (3.19) дефинишу **Стремерову (Strömer)** методу. Она је експлицитна, а први пут је примењена од самог аутора при израчунавању путања наелектрисаних честица у магнетном пољу (радови [51], [52], [9]). Коефицијенти δ_{km} за $k \in [0, 10]$ су дати у табели 4.

[5] Детаљна анализа извођења ове формуле може се наћи у књигама [28] и [2].

m	0	1	2	3	4	5	6
δ^*_{0m}	1						
$2\delta^*_{1m}$	1	0					
$12\delta^*_{2m}$	13	-2	1				
$12\delta^*_{3m}$	14	-5	4	-1			
$240\delta^*_{4m}$	299	-176	194	-96	19		
$240\delta^*_{5m}$	317	-266	374	-276	109	18	
$60480\delta^*_{6m}$	84199	-92922	158973	-155852	92193	-30426	4315

Табела 4а.

m	δ_{7m}	δ_{8m}	δ_{9m}	δ_{10m}
10				0.06107265
9			-0.06314032	-0.67386693
8		0.06549576	0.63375965	3.3820289
7	-0.06820437	-0.59217041	-2.8652260	-10.193944
6	0.54877646	2.3826576	7.6864539	20.511710
5	-1.9353671	-5.6031294	-13.558824	-28.949132
4	3.9115079	8.4962109	16.451905	29.277162
3	-4.9640708	-8.6318331	-13.935629	-21.264347
2	4.0608135	5.8946947	8.1677502	10.916019
1	-2.0138393	-2.5378053	-3.1060692	-3.7167957
0	1.4603836	1.5258794	1.5890198	1.6500924

Табела 4б.

Ковелова (Cowell) метода је имплицитна метода за једначине другог реда облика (3.16)[9]

$$y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = h^2 \sum_{m=0}^{k} C_m \nabla^m g_n, \tag{3.21}$$

где су коефицијенти C_m дати изразом:

$$C_m = (-1)^m \int_{-1}^{0} (-s) \left[\begin{pmatrix} -s \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+2 \\ m \end{pmatrix} \right] ds \tag{3.22}$$

Коначно, ако се разлике $\nabla^m g_n$ изразе преко вредности функције g у чворовима интерполације, онда имамо

$$y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = h^2 \sum_{m=0}^{k} \delta^*_{km} g_{n-m}, \tag{3.23}$$

$$\delta^*_{km} = (-1)^m \sum_{m=0}^{k} \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} C_j \quad \begin{array}{ll} k = & 0, 1, \ldots, \\ m = & 0, 1, \ldots, k. \end{array} \tag{3.24}$$

Коефицијенти δ_{km} за $k \in [0, 10]$ су излистани у табели 5. Потпуно аналогно случају диференцијалних једначина првог реда и у овом случају се лако могу формулисати друге методе.

[9] Ова метода је први пут представљена у раду [9] и тада је употребљена за рачун путање Хејлијеве (Halley) комете.

m	0	1	2	3	4	5	6
δ^*_{0m}	1						
$2\delta^*_{1m}$	0	1					
$12\delta^*_{2m}$	1	10	1				
$12\delta^*_{3m}$	1	10	1	0			
$240\delta^*_{4m}$	19	204	14	4	-1		
$240\delta^*_{5m}$	18	209	4	14	-6	1	
$60480\delta^*_{6m}$	4315	53994	-2307	7948	-4827	1578	-221

Табела 5а.

m	δ^*_{7m}	δ^*_{8m}	δ^*_{9m}	δ^*_{10m}
10				-0.00206778
9			0.00235532	0.02303315
8		-0.0027086	-0.02390653	-0.11695673
7	0.0031415	0.0248104	0.10960207	0.35773594
6	-0.0256448	-0.1014859	-0.29933311	-0.73356738
5	0.0920635	0.2437456	0.54051642	1.0615975
4	-0.1897652	-0.3793678	-0.67613867	-1.1103729
3	0.2413691	0.3930512	0.59089837	0.83903224
2	-0.1041171	-0.1799581	-0.26474978	-0.35779998
1	0.9147487	0.9364176	0.95761547	0.97829329
0	0.0682044	0.0654957	0.06314043	0.06107265

Табела 5б.

3.3 Услови поредка, стабилност и конвергенција вишекорачних метода

Основни захтев да би нека ЛВМ била прихватљива је да решење y_n конвергира ка теоријском решењу y када корак h тежи нули. Овај интуитивни концепт постаје знатно строжији ако конвергенцију дефинишемо на следећи начин (види [32])

Дефиниција 1. ЛВМ је **конвергентна** ако, за диференцијалне једначине које задовољавају Липшицов услов, имамо да је

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} y_n = y(x_n) \tag{3.25}$$

важи за све $x \in [a,b]$, и за сва решења $\{y_n\}$ линеарне диференцне једначине (3.2), задовољавајући при томе почетне услове $y_\mu = \eta_\mu(h)$, при чему $\lim_{h\to 0}\eta_\mu(h) = \eta$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

У овој дефиницији је узето у обзир да је непогодно сматрати да n остаје исто док $h \to 0$. Такође је вођено рачуна да конвергенција мора бити обезбеђена за све почетне вредности $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$.

Следећи концепт, погодан за оцену ЛВМ, је њен **ред**. Услов који ЛВМ треба да задовољи да би била реда p је дат теоремом 1. ЛВМ (3.2) дефинише један линеарни диференцни оператор $\mathcal{L}$ облика:

$$\mathcal{L}[y(x);h] = \sum_{j=0}^{k}[\alpha_j y(x+jh) - h\beta y'(x+jh)] \tag{3.26}$$

Теорема 1. Метода (3.2) има поредак (ред) p тада када су испуњени следећи услови

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^l = l \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.27}$$

Доказ: Ако функције $y(x + kh)$ и $y'(x + kh)$ заменимо са одговарјућим развојима у Тејлоров ред добијамо:

$$\mathcal{L}[y(x); h] = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j \sum_{l \geq 0} \frac{j^l}{l!} h^l y^{(l)}(x) - h\beta_j \sum_{m \geq 0} \frac{j^m}{m!} h^m y^{(m+1)}(x) \right] =$$

$$y(x) \sum_{j=0}^{k} \alpha_j + \sum_{l \geq 0} \frac{j^l}{l!} h^l y^{(l)}(x) \left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^l - l \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{l-1} \right], \tag{3.28}$$

одакле следе услови (3.26). □

Фундаменталну улогу у проучавању услова поретка, стабилности и конвергенције ЛВМ имају тзв. карактеристични полиноми ЛВМ:

$$\rho(\xi) = \alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1} \xi^{k-1} + \ldots + \alpha_0$$

$$\sigma(\xi) = \beta_k \xi^k + \beta_{k-1} \xi^{k-1} + \ldots + \beta_0 \tag{3.29}$$

која је позната из теорије диференцних једначина. С обзиром на (3.28), линеарни оператор $\mathcal{L}$ можемо написати у облику:

$$\mathcal{L}[y(x); h] = \rho(e^h) - h\sigma(e^h), \tag{3.30}$$

где је са e означена основа природних логаритама и уведена је смена $\xi = e^h$ (или $h = log(\xi)$). С обзиром на ову смену теорема 1 се може написати у следећем облику (који се често среће у литератури):

$$\rho(e^h) - h\sigma(e^h) = O(h^{p+1}), \quad h \to 0.$$

Дефиниција 2. ЛВМ (3.2) је **конзистентна** ако је њен ред $p \geq 1$.

Из услова (3.27) следи да је конзистентност ЛВМ еквивалентна са испуњеношћу следећа два услова:

$$\rho(1) = 0; \quad \rho'(1) = \sigma(1) \tag{3.31}$$

На основу првог услова (3.31) је јасно да ће конзистентна метода увек имати један корен једнак $+1$. Тај корен се, према нотацији коју је увео Ламбер (види [32]), зове главни корен, а остали корени првог полинома (3.29) се зову помоћни корени. Распоред корена карактеристичних полинома (3.29), како ћемо касније видети, игра кључну улогу у одређивању стабилности одговарајуће ЛВМ. **Константа грешке** ЛВМ реда p (у ознаци C) је њихова карактеристика која нам омогућава да упоређујемо различите ЛВМ истог реда. Из формуле (3.27) је очигледно да за ЛВМ реда p, константе уз изводе $y^{(l)}(x)$ су једнаке нули све до редног броја $p + 1$. Тада линеарни диференцни оператор $\mathcal{L}$ може да се напише у облику:

$$\mathcal{L}[y(x); h] = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x) + O(h^{p+2}) \tag{3.32}$$

где је C_{p+1} дато са:

$$C_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!}\left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^{p+1} - (p+1)\sum_{j=0}^{k} \beta_j j^p\right]. \tag{3.33}$$

Ред p ЛВМ (3.2) је прва, груба, мера његове тачности. Константа C_{p+1} такође на извесан начин карактерише његову тачност, али с обзиром да се члан у коме се она налази множи и са одговарајућим изводом функције y, то и оцена тачности помоћу ове константе није поуздана. Може се показати (види нпр. [27]) да величина

$$C = \frac{C_{p+1}}{\sigma(1)} \tag{3.34}$$

представља добру оцену тачности одговарајуће ЛВМ. Због тога се она најчешће у литератури и зове **константа грешке**.

Дефиниција 3. ЛВМ (3.2) је **нула-стабилан** ако ни један корен његовог првог карактеристичног полинома $\varrho(\xi)$ нема модуо већи од 1 и ако је сваки корен са модулом једнаким 1 (главни корен) прост.
Ова се дефиниција често зове и корени услов.

ЛВМ која је нула-стабилна се често зове и D-стабилан[10] или само стабилан, али како се реч стабилан у литератури често односи на неколико различитих типова стабилности, то ћемо, следећи пример Ламбера, увек назначавати о којој врсти стабилности је реч.

Теорема 2. Потребан и довољан услов за конвергенцију ЛВМ (3.2) је да је она конзистентна и нула-стабилна.

Доказ ове теореме, који је иначе прилично компликован, може се наћи у Хенрицијевој монографији [28].
На овом месту свакако треба нагласити да је конвергенција минималан услов који треба да задовољава ЛВМ да би била "употребљива". ЛВМ које нису конзистентне и нула-стабилне немају никакве практичне вредности.
Следећа Далкуистова теорема (позната и као прва Далкуистова баријера [12]) има фундаменталну улогу у проучавању ЛВМ. Она међутим нема већи практични значај.

Теорема 3. Ни једна нула-стабилна метода са бројем корака k не може имати ред већи од $k+1$ када је k непаран број, или $k+2$ када је k паран број.

За доказ ове теореме такође погледати монографију [28].
Конзистентност и нула-стабилност представљају минимум потребних услова да би нека ЛВМ била прихватљива, али што се тиче њене примене на конкретне једначине, остаје неколико питања од значаја која нису одговорена:

- а) У случају када p (ред методе) прелази 1, како бирати додатне "почетне услове" y_k, $k = 1, 2, \ldots, k-1$?

- б) Како бирати корак h, погодан за захтевану тачност и ефикасност?

- в) У случају када се ради о имплицитној ЛВМ, којом се методом решава систем нелинеарних једначина?

- г) Каква је тачност нумеричког решења?

[10] D-стабилан је скраћеница за Далкуистову стабилност, (види [10] и [11]).

Прво питање не ствара веће потешкоће. Додатни "почетни услови" се обезбеђују применом неког једнокорачног метода (у нашем случају додатни "почетни услови" су рачунати помоћу симплектичког интегратора 8B). Питања б) и г) су тесно повезана и производе додатне потешкоће у вези са применом ЛВМ. Наиме, иако је конвергенција нумеричког решења ка тачном решењу Кошијевог задатка (3.1) обезбеђена за $h \to 0$, са практичне тачке гледишта то може бити без значаја, јер у пракси покушавамо да обезбедимо прихватљивост нумеричког решења за фиксирано h. Испитивање ових питања води ка дефиницијама нових типова стабилности и у вези са тим испитивању другог карактеристичног полинома ЛВМ $\sigma(\xi)$, и десних страна једначина система (3.1). Теорија стабилности ЛВМ, уопште, је веома добро разрађена, а њен детаљан приказ може се пронаћи у монографијама [32], [28], [24]. У овом параграфу ћемо само навести основне резултате и њихове изворе. Питање в) захтева проучавање парова предиктор - коректор формула, који у суштини представљају нову класу метода. О том проблему и различитим модовима примене предиктор - коректор формула биће нешто више речи у даљем тексту.

Кључну улогу у проучавању стабилности ЛВМ (у литератури се за ову теорију могу срести следећи називи: слаба стабилност, нумеричка стабилност или условна стабилност) игра тзв. **полином стабилности** дефинисан са

$$P_a(\xi, \bar{h}) = \varrho(\xi) - \bar{h}\sigma(\xi) = 0, \tag{3.35}$$

где $\bar{h} = h\lambda$, а $\lambda = \partial f/\partial y = const.$[11] Навешћемо неколико дефиниција које уводе појмове од значаја за разумевање стабилности ЛВМ и избора корака h.

Дефиниција 4. ЛВМ (3.2) је **апсолутно стабилна** за дато $\bar{h} = h\lambda$ ако сви корени полинома стабилности r_s задовољавају услов $|r_s| < 1$ и **апсолутно нестабилна** за дато $\bar{h}$ у обрнутом случају.

Дефиниција 5. **Интервал апсолутне стабилности** је интервал (α, β) такав да за $\bar{h} \in (\alpha, \beta)$ имамо да је ЛВМ (3.2) апсолутно стабилна.

Дефиниција 6. ЛВМ (3.2) је **релативно стабилна** за дато $\bar{h} = h\lambda$ ако сви корени полинома стабилности r_s задовољавају услов $|r_s| < |r_1|, s = 2, \dots, k$, и **релативно нестабилна** за дато $\bar{h}$ у обрнутом случају.

Дефиниција 7. **Интервал релативне стабилности** је интервал (α, β) такав да за $\bar{h} \in (\alpha, \beta)$ имамо да је ЛВМ (3.2) релативно стабилна.

Ове дефиниције, као и цела теорија слабе стабилности, имају упориште у примени ЛВМ на линеарну једначину $y' = \lambda y$ и поређењу нелинеарних једначина са том једначином.[12] Методе за налажење интервала ралативне и апсолутне стабилности су анализиране у [32] (стр. 77-82). Током примене и тестирања неких ЛВМ на једначине небеске механике трудили смо се да пре тога анализирамо ЛВМ (пре свега услове поретка и нула - стабилност), а затим и оцене интервала стабилности за избор корака интеграције. Такве оцене ЛВМ пре њиховог тестирања у пракси су од огромног значаја, због великог броја ЛВМ који су познати а и

[11] Ово је претпоставка, која поједностављује анализу стабилности одговарајуће ЛВМ, а која наравно није истинита. Међутим у пракси је могуће оценити λ и поменуту анализу искористити у формулисању ЛВМ са променљивим кораком (види [24], [31]). Оваква претпоставка води практично ка примени ЛВМ (3.2) на линеарну једначину са константним коефицијентима. Та идеја је добро позната из теорије стабилности решења диференцијалних једначина, где се решења нелинеарних пореде са решењима одговарајућих линеарних једначина. У овом случају идеја се проширује тако што се анализира приближно решење добијено са ЛВМ нелинеарне и одговарајуће линеаризоване једначине.

[12] Што се тиче система јеначина све дефиниције се проширују без потешкоћа. Тада је "референтни систем" за испитивање одговарајуће ЛВМ линеарни систем са константним коефицијентима, а улогу параметра λ који је важан при избору корака тада "игра" вектор сопствених вредности система.

великог броја које је могуће конструисати. На пример испоставља се да имплицитне методе скоро увек имају мању константу грешке и шири интервал апсолутне стабилности. Дакле, пуно су захвалнији за примену са те тачке гледишта. Међутим, с обзиром да су имплицитни, те да стога током интеграције треба додатно решавати систем алгебарских једначина, њихова примена није једноставна као код експлицитних метода. Олакшавајућа околност је та да примена простих итерација за решавање поменутог алгебарског система при интеграцији имплицитном методом увек конвергира (види [28] стр.195). Треба свакако додати да парови експлицитних и имплицитних метода представљају у основи нове методе, те да су и њихове стабилносне особине одређене друкчијим полиномом стабилности (види [32] стр.97). Наводимо у табелама 6а и 6б параметре за Адамс-Башфортову и Адамс-Мултонову методу, а за кораке $k = 1, 2, 3, 4$ подаци су преузети из [28] страна 85. (p је ред методе C_{p+1} је константа грешке, а $(\alpha, 0)$ је интервал апсолутне стабилности.)

Адамс-Башфорт (експлицитни)

k	1	2	3	4
p	1	2	3	4
C_{p+1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$
α	-2	-1	$-\frac{6}{11}$	$-\frac{3}{10}$

Табела 6а.

Адамс-Мултон (имплицитни)

k	1	2	3	4
p	2	3	4	5
C_{p+1}	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$\frac{-3}{160}$
α	$-\infty$	-6	-3	$-\frac{90}{49}$

Табела 6б.

Све дефиниције и теореме, пробројане због изузетне важности у овом параграфу, важе за диференцијалну једначину првог реда. Међутим, без већих потешкоћа оне се проширују на системе једначина и на једначине другог реда (види [32], [28]).

Имплицитне ЛВМ дају решење Кошијевог задатка (3.1), имплицитно садржано у једном систему алгебарских једначина. Зато се приликом њихове примене јавља додатна потешкоћа - решавање поменутог алгебарског система, који је облика:

$$y_{n+k} - h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} (h\beta_j f_{n+j} - \alpha_j y_{n+j}). \tag{3.36}$$

Као што је већ наглашено, метод простих итерација увек конвергира ка решењу y_{n+k}. Ово питање је веома значајно приликом имплементацију ЛВМ. У пракси се изводи онолико итерација колико је потребно да би се постигла неједнакост $|y_{n+k}^{(l+1)} - y_{n+k}^{(l)}| < \varepsilon$, где је ε неки унапред задати праг толеранције. Вредност $y_{n+k}^{(l+1)}$ се сматра довољно тачном апроксимацијом решења y_{n+k}. Како је у овом прилазу коректор формула примењена само једном, то се он често зове **корекција до на конвергенцију**. У овом **моду** примене не зна се колико итерација је потребно да би се достигла конвергенција, а стабилносне особине предиктора нису важне. Потребно је само да h буде изабрано тако да h буде у оквиру интервала апсолутне или бар релативне стабилности.

У алтернативном приступу укупан број итерација је унапред фиксиран. Овим се постиже смањење броја рачунања десних страна једначине (1.1). За разлику од претходног мода примене, овде се коректор формула примењује више од једног пута (означимо тај фиксирани број са m). Ако са P означимо предикцију, са C корекцију, а са E одређивање десне стране (рачунање функције f), тада би једна примена коректор формуле могла да се симболички представи са ознаком PEC. Ако коректор формулу примењујемо два пута ($m = 2$), тада одговарајући мод примене може да се пише као PECEC или $P(EC)^2$. Ови модови примене имају посебна стабилносна својства која зависе и од предиктора и од коректора (за детаљну анализу види [32], стр. 85). У пракси m готово никада не прелази 2.

Најтежи корак у имплементацији ЛВМ је избор корака h. Неки најпопуларнији алгоритми за имплементацију ЛВМ кој се користе се аутоматски мењају корак и редом (нпр. Гиров и Корхов алгоритам [24], [31]).[13] Избором корака се практично контролише *грешка одсецања, стабилност* и *конвергенција* конкретног алгоритма за примену. Са друге стране, питање избора корака h је тесно везано за оцену извода $\partial f/\partial y$,[14] а у случају система једначина за налажење сопствених вредности λ_i матрице $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{y}$. Корак h мора бити изабран тако да важи $\bar{h} > h\lambda_i$ за све сопствене вредности λ_i.

3.4 Симплектичке ЛВМ

Појмови интервала апсолутне и релативне стабилности играју кључну улогу у одређивању корака којим се постиже стабилна нумеричка интеграција. Једна друга врста (не)стабилности, позната под називом путањска нестабилност,[15] је испитана од стране Ламбера и Вотсона (види [33]) и довела је поменуте ауторе до "открића" симетричних ЛВМ за једначине другог реда и концепта **интервала периодичности** који теоријски, донекле, расветљавају неке предности симетричних над класичним ЛВМ. Симетричне, експлицитне интеграторе високих редова (за диференцијалне једначине другог реда) недавно (види [43]) су конструисали Квинлан и Тримејн. Идеје Ламбера и Вотсона је теоријски проширио Мур (види [39]) на диференцијалне једначине првог реда. У овом раду конструисали смо и тестирали, у складу са Муровим резултатима, ЛВМ за диференцијалне једначине првог реда, експлицитне и имплицитне, до броја корака десет.

Дефиниција 8. Полином $\varrho(\xi)$ је антисиметричан (AC), ако његови коефицијенти задовољавају следеће услове: $\alpha_j = -\alpha_{k-j}, k = 0, 1, \ldots, k$.

Дефиниција 9. Полином $\sigma(\xi)$ је симетричан (C), ако његови коефицијенти задовољавају следеће услове $\beta_j = \beta_{k-j}, j = 0, 1, \ldots, k$.

Дефиниција 10. Метода (3.2) је AC:C, ако је њен први карактеристични полином антисиметричан, а други карактеристични полином симетричан.

Дефиницију појма интервала периодичности, који је уведен у [33], а који је сличан појму интервала апсолутне стабилности, наводимо овде под бројем 12. Пре тога је потребно дефинисати полином периодичности, чијим испитивањем се долази до интервала периодичности

Дефиниција 11. Полином периодичности, придружен методи (ϱ, σ), је полином типа

$$P_p(\xi, \bar{h}) = \xi \bar{r}(-\xi^2) - \bar{h}\bar{s}(-\xi^2)$$

[13] Крохов алгоритам који се базира на Адамсовим интеграторима се користи и у JPL интеграцији једначина кретања великих планета Сунчевог система (види [41], [49]).

[14] Овде још једном треба нагласити да се све особине и дефиниције "лако" проширују за скучај система једначина. (види [32], стр.220-225).

[15] Феномен касније назван путањска нестабилност први су уочили Стифел и Бетис (види [50]), проучавајући Стремер - Ковелове методе реда већег од два. Интегралећи кружне путање они су уочили да нумерички интеграљене путање спирално падају ка центру. Са друге стране ако се за рачун користи позната Нумеровљева метода, овај проблем исчезава. Испоставило се да за вредности $\bar{h}$ у одређеном интервалу - интервалу периодичности - главни корени Нумеровљеве методе су периодичне функције (тог $\bar{h}$), док код Стремер - Ковелових метода то није случај. Управо одатле и долази назив интервали периодичности.

где су помоћни полиноми $\bar{r}(\xi)$ и $\bar{s}(\xi)$ дефинисани са

$$\bar{r}(\xi^2) = (1-\xi)^k \varrho(\frac{1+\xi}{1-\xi}), \qquad \bar{s}(\xi^2) = (1-\xi)^k \sigma(\frac{1+\xi}{1-\xi}).$$

Дефиниција 12. Метода (3.2) има интервал периодичности $(-h_0, h_0)$ ако за свако $\bar{h} \in (-h_0, h_0)$, корени r_s полинома периодичности $P_p(r, \bar{h})$ задовољавају следеће услове $r_1 = e^{i\theta(\bar{h})}$, $r_2 = e^{-i\theta(\bar{h})}$, $|r_s| \leq 1, s = 3, \ldots, k$ где је $\theta(\bar{h}) \in R$.

Очигледно је, као и у случају интервала апсолутне стабилности, да је пожељна што већа ширина интервала периодичности. Дефиниција 11 даје и ефективни критеријум за налажење интервала периодичности. Наиме, нуле полинома периодичности треба да буду реалне и различите за све вредности $\bar{h}$ у оквиру интервала периодичности (види [39]). Може се доказати следећа важна теорема (види [33] за диференцијалне једначине другог реда и [39] за диференцијалне једначине првог реда):

Теорема 4. Нека метода (ϱ, σ) има ненулти интервал периодичности. Тада је (ϱ, σ) АС:С метода (ако се ради о ЛВМ за диференцијалне једначине првог реда, а С:С ЛВМ ако се ради о диефернцијалним једначинама другог реда.

Приметимо још да интервали периодичности нису идентични са интервалима апсолутне стабилности. Пример метода за које је ово очигледно је Ковелова метода реда већег од 2. Наиме, те методе имају ненулти интервал апсолутне стабилности, али, с обзиром да нису симетричне, имају нулти интервал периодичности. Други пример, везан за ЛВМ за једначине првог реда, је позната Симпсонова метода. Она је двокорачна, четвртог реда, има интервал периодичности $\bar{h} \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, има нулте интервале апсолутне и релативне стабилности.
У поменутом раду Ламбер и Вотсон су анализирали ЛВМ за једначине другог реда и формулисали неколико конкретних, експлицитних С:С метода, од којих једна шестокорачна има ред 8 и интервал периодичности $(0, 1.019)$. У раду [39], Мур је проширио идеју Ламбера и Вотсона на једначине првог реда и показао да је предуслов путањске стабилности да метода буде типа АС:С. У том раду је тестиран један експлицитна четворокорачна метода шестог реда (коју је формулисао Хенрици [28]), а која има интервал периодичности $(-1.705, 1.705)$. На тест примеру интеграције регуларизованих диференцијалних једначина кретања сателита у високој атмосфери овај аутор је показао супериорност симетричног над Адамс - Мултоновим методом истог реда. На овом месту напоменимо да АС:С методе за једначине првог реда имају "уграђену" особину **временске реверзибилности**. Наиме замена h са $-h$ у (3.36) је еквивалентна замени вектора $\mathbf{y}_n, \ldots, \mathbf{y}_{n+k}$ са $\mathbf{y}_{n+k}, \ldots, \mathbf{y}_n$ што представља интеграцију "у супротном смеру". С обзиром да је временска реверзибилност барем пожељна особина сваког интегратора и с обзиром да се интеграција уназад понекад користи за оцену тачности интеграције, неки аутори АС:С методе зову **симетричним** методама (види [15]).

Прича о симплектичким ЛВМ се наставља на причу о симетричним ЛВМ. У раду [43], Квинлан и Тримејн су, као што је већ наглашено, конструисали неколико експлицитних, С:С ЛВМ за једначине другог реда и израчунали њихове интервале периодичности. Према тестовима (проблем два тела) које су извели грешка у лонгитуди код њихових симетричних метода расте линеарно са временом, а не квадратно као код Стремерових метода. Поред тога, ови интегратори су показали добре особине у одржању интеграла енергије и угаоног момента. Са тим у вези неки аутори (види [56] и [30]) ове методе сврставају у врсту симплектичких интегратора. Строге услове које ЛВМ треба да задовољи да би била симплектичко пресликавање, блиско временском току хамилтоновог система, поставили су Еирола и Санз Серна [15]. Они су доказали следећу, важну, теорему.

Теорема 5. Претпоставимо да је нека ЛВМ симетрична (АС:С). Тада одговарајућа ЈедноНожна метода (ЈНМ) примењена на неки Хамилтонов систем представља симплектичко пресликавање или симплектички интегратор.

Напомена: Једноножне методе је формулисао Далквист у [13]. Идеја је следећа, ако је нека ЛВМ дата са

$$\varrho(E)\mathbf{y}_n = h\sigma(E)\mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \tag{3.37}$$

онда је одговарајући ЈНМ дат са

$$\varrho(E)\mathbf{y}_n = h\mathbf{f}(\sigma(E)\mathbf{y}_n), \tag{3.38}$$

где E означава оператор померања дефинисан са $E^k\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n+k}$. Курзивом су означени вектори, што значи да се дефиниције односе на системе једначина.
Путањска стабилност, и симплектичност АС:С (или симетричних ЛВМ) и одговарајућих ЈНМ су нас мотивисале да конструишемо АС:С методе, експлицитне и имплицитне, до броја корака десет. Имало би смисла ићи и на више редове али, како пракса указује, не више од петнаест. При конструисању АС:С метода мора се, наравно, водити рачуна о њиховој конзистентности и нула-стабилности, као и распореду корена првог карактеристичног полинома. Дакле да би нека ЛВМ била прихватљива за тестирање у пракси потребно је да задовољи следеће услове:

- $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0, \alpha_k > 0$,
- $\varrho(\xi), \sigma(\xi)$ немају заједничке факторе,
- Метода (ϱ, σ) је конзистентна, тј. $\varrho(1) = 0, \varrho'(1) = \sigma(1)$,
- Метода (ϱ, σ) је нула-стабилна, тј. корени $\varrho(\xi)$ леже на или унутар јединичног круга комплексне равни.

При конструкцији АС:С ЛВМ мора се водити рачуна и о горе наведеним захтевима. Лако се види да захтев да ϱ буде АС је на извесан начин ограничавајући. Наиме, сви његови корени морају[16] да леже на јединичном кругу комплексне равни. То унеколико слаби услов нула-стабилности. Ламбер у својој монографији показује (види [32] стр. 84) да АС:С ЛВМ су или апсолутно нестабилни за свако $\bar{h}$ или су апсолутно стабилни само за $\bar{h} < 0$. Ово је недостатак који се не може избећи. Дакле, захтев за ненултим интервалима периодичности искључује ненулте интервале апсолутне стабилности и обрнуто. Међутим, с обзиром на чињеницу да стабилност при имплементацији, поготову у алгоритмима са променљивим кораком и редом, није недостижна, можемо рећи да АС:С ЛВМ имају перспективу.
Сада је сасвим јасно на који начин се конструишу АС:С ЛВМ за обичне диференцијалне једначине првог реда.

- Прво се конструише антисиметрични полином $\varrho(\xi)$ такав да му сви корени буду на јединичном кругу комплексне равни.
- Затим се конструише симетрични полином $\sigma(\xi)$ тако да његови коефицијенти максимализују ред одговарајуће експлицитне или имплицитне методе.
- На крају смо израчунали интервале периодичности за све методе. То је заправо она вредност $\bar{h}$ за коју полином периодичности има све реалне и различите корене

[16] Позната је особина АС и С полинома да је распоред корена сметричан у односу на јединицу, тј. ако је ξ корен, онда је и $1/\xi$ такође корен полинома ϱ. С обзиром на нула - стабилност, за АС:С ЛВМ то значи да сви корени ϱ мораје да буду на јединичном кругу.

Наводимо у табелама 7а-7и коефицијенте (са слободним параметрима) експлицитних и имплицитних АС:С ЛВМ на овај начин конструисаних. Поред тога за неке фиксиране вредности слободних параметара су дате конкретне АС:С ЛВМ и њихови интервали периодичности. Дакле, за сваки број корака k прво су дати коефицијенти за експлицитне и имплицитне методе изражени преко слободних параметара, па затим у табели која следи исти коефицијенти али за конкретне, назначене вредности слободних параметара. Поменути слободни параметри су бирани тако да корени првог карактеристичног полинома на јединичном кругу комплексне равни буду максимално размакнути. Они наравно могу бити бирани и на друге начине, на пример тако да константа грешке буде минимална, а интервал периодичности што шири. Међутим, са порастом броја корака, расте и број слободних параметара тако да су овакви задаци врло тешко решиви. За алгебарску манипулацију користили смо компјутерску алгебру MATHEMATICA v2.2. Листинг програма којим су рачунати коефицијенти за имплицитну методу од десет корака, као пример, је дат у прилогу 3А. Остали листинзи, с обзиром на њихов број (још укупно деветнаест) и међусобну сличност, нису наведени. Малом адаптацијом ових програма могу се одређивати класе метода са још већим бројем корака.

број корака = 2

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$1/3$
1	0	2	$4/3$
2	1	0	$1/3$
C_p		$C_3 = 1/3$	$C_5 = -1/90$
$h \in (-h_0, h_0)$		$(h_0)_e = 1$	$(h_0)_i = \sqrt{3}$

Табела 7а: Имплицитна метода је позната као Симпсоново правило, експлицитна као правило средње вредности.

број корака = 3

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$(5 + \cos\varphi)/12$
1	$(1 + 2\cos\varphi)$	$1 - \cos\varphi$	$(7 - 13\cos\varphi)/12$
2	$-(1 + 2\cos\varphi)$	$1 - \cos\varphi$	$(7 - 13\cos\varphi)/12$
3	1	0	$(5 + \cos\varphi)/12$
C_p		$C_3 = (5 + \cos\varphi)/6$	$C_5 = -(19 + 11\cos\varphi)/360$

Табела 7б-1.

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$3/8$
1	0	$3/2$	$9/8$
2	0	$3/2$	$9/8$
3	1	0	$3/8$
C_p		$C_3 = 3/4$	$C_5 = -3/80$
$h \in (-h_0, h_0)$		$(h_0)_e = 0.78663978$	$(h_0)_i = 4/3$

Табела 7б-2. За вредност $\varphi = 120^O$ добија се Симпсоново правило 3/8 (имплицитна метода).

број корака = 4

0	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
k	-1	0	$(14+\cos\varphi)/45$
1	$2\cos\varphi$	$2(4-\cos\varphi)/3$	$2(32-17\cos\varphi)/45$
2	0	$-4(1+2\cos\varphi)/3$	$2(4-19\cos\varphi)/15$
3	$-2\cos\varphi$	$2(4-\cos\varphi)/3$	$2(32-17\cos\varphi)/45$
4	1	0	$(14+\cos\varphi)/45$
D_p		$D_5 = \frac{-(14+\cos\varphi)}{45}(D_6 = 0!)$	$D_7 = \frac{-(16+5\cos\varphi)}{1890}$

Табела 7в-1: Имплицитна метода, у горњој табели је дата и у монографији Ламбера ([32], стр. 39. - коефицијенти развоја у ред су означени са D_p зато што је развој извршен у околини тачке $x = 2$ а не 0 што је уобичајено), и у монографији Хенричија ([28], стр. 235. - поред тога та метода је коришћена у Муровом раду, за $\cos\varphi = 4/5$ као пример АСС методе).

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$14/45$
1	0	$8/3$	$64/45$
2	0	$-4/3$	$8/15$
3	0	$8/3$	$64/45$
4	1	0	$14/45$
D_p $h \in (-h_0, h_0)$		$D_5 = 14/45(D_6 = 0!)$ $(h_0)_e = 0.43301270$	$D_7 = -16/1890$ $(h_0)_i = 1.44337567$

Табела 7в-2. $\varphi = 90^{\circ}$.

број корака = 5

k	α_k
0	-1
1	$1+2(\cos\varphi+\cos\vartheta)$
2	$-2(1+\cos\varphi+\cos\vartheta+\cos\varphi\cos\vartheta)$
3	$2(1+\cos\varphi+\cos\vartheta+\cos\varphi\cos\vartheta)$
4	$-(1+2(\cos\varphi+\cos\vartheta))$
5	1

Табела 7г-1. α коефицијенти за методе од 5 корака.

k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	0	$(262+11\cos\varphi\cos\vartheta+38(\cos\varphi+\cos\vartheta))/720$
1	$(22-\cos\varphi\cos\vartheta-10(\cos\varphi+\cos\vartheta))/12$	$(178-31\cos\varphi\cos\vartheta-238(\cos\varphi+\cos\vartheta))/240$
2	$(2+13\cos\varphi\cos\vartheta-14(\cos\varphi+\cos\vartheta))/12$	$(322+401\cos\varphi\cos\vartheta-382(\cos\varphi+\cos\vartheta))/360$
3	$(2+13\cos\varphi\cos\vartheta-14(\cos\varphi+\cos\vartheta))/12$	$(322+401\cos\varphi\cos\vartheta-382(\cos\varphi+\cos\vartheta))/360$
4	$(22-\cos\varphi\cos\vartheta-10(\cos\varphi+\cos\vartheta))/12$	$(178-31\cos\varphi\cos\vartheta-238(\cos\varphi+\cos\vartheta))/240$
5	0	$(262+11\cos\varphi s+38(\cos\varphi+\cos\vartheta))/720$
	$C_5 = \frac{(262+38(\cos\varphi+\cos\vartheta)+11\cos\varphi\cos\vartheta)}{360}$	$C_7 = \frac{(-1054-542(\cos\varphi+\cos\vartheta)-191\cos\varphi\cos\vartheta)}{30240}$

Табела 7г-2. β коефицијенти за експлицитне и имплицитне методе од 5 корака.

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$1037/2880$
1	1	$89/48$	$743/960$
2	$-3/2$	$-5/48$	$887/1440$
3	$3/2$	$-5/48$	$887/1440$
4	-1	$89/48$	$743/960$
5	1	0	$1037/2880$
C_p		$C_5 = 1037/1440$	$C_7 = -115/3456$
$h \in (-h_0, h_0)$		$(h_0)_e = 0.26364867$	$(h_0)_i = 0.98932946$

Табела 7г-3. $\varphi = 60^{\circ}, \vartheta = 120^{\circ}$

број корака = 6

k	α_k
0	-1
1	$2(\cos\varphi + \cos\vartheta)$
2	$-(1 + 4\cos\varphi\cos\vartheta)$
3	0
4	$1 + 4\cos\varphi\cos\vartheta$
5	$-2(\cos\varphi + \cos\vartheta)$
6	1

Табела 7д-1. (α коефицијенти за методе од 6 корака.

k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	0	$(278 + 5\cos\varphi\cos\vartheta + 16(\cos\varphi + \cos\vartheta))/945$
1	$(2(74 - \cos\varphi\cos\vartheta - 14(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/45$	$(4(40 - 2\cos\varphi\cos\vartheta - 19(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/105$
2	$(4(-43 + 17\cos\varphi\cos\vartheta - 32(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/45$	$(62 + 167\cos\varphi\cos\vartheta - 272(\cos\varphi + \cos\vartheta))/105$
3	$(4(34 + 19\cos\varphi\cos\vartheta - 4(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/15$	$16(188 + 293\cos\varphi\cos\vartheta - 83(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/945$
4	$(4(-43 + 17\cos\varphi\cos\vartheta - 32(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/45$	$(62 + 167\cos\varphi\cos\vartheta - 272(\cos\varphi + \cos\vartheta))/105$
5	$(2(74 - \cos\varphi\cos\vartheta - 14(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/45$	$(4(40 - 2\cos\varphi\cos\vartheta - 19(\cos\varphi + \cos\vartheta)))/105$
6	0	$(278 + 5\cos\varphi\cos\vartheta + 16(\cos\varphi + \cos\vartheta))/945$
	$C_7 = \frac{(278+16(\cos\varphi+\cos\vartheta)+5\cos\varphi\cos\vartheta)}{945}$	$C_9 = \frac{(-188-52(\cos\varphi+\cos\vartheta)-23\cos\varphi\cos\vartheta)}{28350}$

Табела 7д-2. β коефицијенти за експлицитне и имплицитне методе од 6 корака

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$41/140$
1	0	$33/10$	$54/35$
2	0	$-21/5$	$27/140$
3	0	$39/5$	$68/35$
4	0	$-21/5$	$27/140$
5	0	$33/10$	$54/35$
6	1	0	$41/140$
C_p		$C_7 = 41/140$	$C_9 = -9/1400$
$h \in (-h_0, h_0)$		$(h_0)_e = 0.11438431$	$(h_0)_i = 0.69951944$

Табела 7д-3. $\varphi = 60^{\circ}, \vartheta = 120^{\circ}$

број корака = 7

k	α_k
0	-1
1	$1+2A$
2	$-(3+2A+4B)$
3	$3+8C+4A+4B$
4	$-(3+8C+4A+4B)$
5	$3+2A+4B$
6	$-(1+2A)$
7	1

Табела 7ђ-1. α коефицијенти за методе од 7 корака.

k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	0	$(4975+191C+527A+271B)/15120$
1	$(461-11C-131A-19B)/180$	$(13849-1879C-13639A-2951B)/15120$
2	$(-121+31C-89A+119B)/60$	$(529+353C-655A+1201B)/560$
3	$(311-401C-161A+191B)/90$	$(27373-68323C-29683A+30733B)/15120$
4	$(311-401C-161A+191B)/90$	$(27373-68323C-29683A+30733B)/15120$
5	$(-121+31C-89A+119B)/60$	$(529+353C-655A+1201B)/560$
6	$(461-11C-131A-19B)/180$	$(13849-1879C-13639A-2951B)/15120$
7	0	$(4975+191C+527A+271B)/15120$
	$C_7=\frac{(4975+527A+271B+191C)}{7560}$	$C_9=\frac{(-10913-4897A-3233B-2497C)}{453600}$

Табела 7ђ-2. β коефицијенти за експлицитне и имплицитне методе од 7 корака. Коришћене су следеће ознаке.

$A=\cos\varphi+\cos\vartheta+\cos\chi$

$B=\cos\varphi\cos\vartheta+\cos\vartheta\cos\chi+\cos\varphi\cos\chi$

$C=\cos\varphi\cos\vartheta\cos\chi$

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$9679/30240$
1	1	$941/360$	$30649/30240$
2	-1	$-361/120$	$-143/1120$
3	1	$431/180$	$24013/30240$
4	-1	$431/180$	$24013/30240$
5	1	$-361/120$	$-143/1120$
6	-1	$941/360$	$30649/30240$
7	1	0	$9679/30240$
C		$C_7=9679/15120$	$C_9=-18593/907200$
$h\in(-h_0,h_0)$		$(h_0)_e=0.25510215$	$(h_0)_i=0.75233908$

Табела 7ђ-3. $\varphi=45^{\circ}, \vartheta=90^{\circ}, \chi=135^{\circ}$.

број корака = 8

k	α_k
0	-1
1	$2A$
2	$-2(1+2B)$
3	$2(A+4C)$
4	0
5	$-2(A+4C)$
6	$2(1+2B)$
7	$-2A$
8	1

Табела 7е-1. α коефицијенти за методе од 8 корака. Коришћене су следеће ознаке:
$A = \cos\varphi + \cos\vartheta + \cos\chi$
$B = \cos\varphi\cos\vartheta + \cos\vartheta\cos\chi + \cos\varphi\cos\chi$
$C = \cos\varphi\cos\vartheta\cos\chi$.

k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	0	$(1832-5C-278A-16B)/3780$
1	$(2(1832-5C-278A-16B))/945$	0
2	$(4(-193+4C-80A+38B))/105$	$(5876+109C-4826A+1256B)/945$
3	$(2(1112-167C-62A+272B))/105$	$(8(-704-367C+347A+640B))/945$
4	$(8(-2293-1172C-752A+332B))/945$	$(1016-701C-806A+176B)/70$
5	$(2(1112-167C-62A+272B))/105$	$(8(-704-367C+347A+640B))/945$
6	$(4(-193+4C-80A+38B))/105$	$(5876+109C-4826A+1256B)/945$
7	$(2(1832-5C-278A-16B))/945$	0
8	0	$(1832-5C-278A-16B)/3780$
	$C_9 = \frac{(3982+188A+52B+23C)}{14175}$	$C_9 = \frac{(-11552+4922A+448B+167C)}{56700}$

Табела 7е-2. β коефицијенти за експлицитне и имплицитне методе од 8 корака.

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$92/189$
1	0	$736/189$	0
2	0	$-848/105$	$5248/945$
3	0	$1952/105$	$-8192/945$
4	0	$-19672/945$	$464/35$
5	0	$1952/105$	$-8192/945$
6	0	$-848/105$	$5248/945$
7	0	$736/189$	0
8	1	0	$92/189$
C_p		$C_9 = 3956/14175$	$C_9 = -2944/14175$
$h \in (-h_0, h_0)$		$(h_0)_e = 0.02949311$	$(h_0)_i = 0.05481343$

Табела 7е-3. $\varphi = 45^{\circ}, \vartheta = 90^{\circ}, \chi = 135^{\circ}$.

број корака = 9

k	α_k
0	-1
1	$1+2A$
2	$-2(2+A+2B)$
3	$2(2+3A+2B+4C)$
4	$-2(3+8D+3A+4B+4C)$
5	$2(3+8D+3A+4B+4C)$
6	$-2(2+3A+2B+4C)$
7	$2(2+A+2B)$
8	$-(1+2A)$
9	1

Табела 7ж-1. α коефицијенти за методе од 9 корака. Уведене су следеће ознаке:

$A = \cos\varphi + \cos\vartheta + \cos\chi + \cos\psi$

$B = \cos\varphi\cos\vartheta + \cos\vartheta\cos\chi + \cos\varphi\cos\chi + \cos\varphi\cos\psi + \cos\vartheta\cos\psi$

$C = \cos\varphi\cos\vartheta\cos\chi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi + \cos\vartheta\cos\chi\cos\psi$

$D = \cos\varphi\cos\vartheta\cos\chi\cos\psi$

k	$(\beta_k)_e$
0	0
1	$(24337-191D-4975A-527B-271C)/7560$
2	$(-40121+1879D-13849A+13639B+2951C)/7560$
3	$(3343-353D-529A+655B-1201C)/280$
4	$(-13997+68323D-27373A+29683B-30733C)/7560$
5	$(-13997+68323D-27373A+29683B-30733C)/7560$
6	$(3343-353D-529A+655B-1201C)/280$
7	$(-40121+1879D-13849A+13639B+2951C)/7560$
8	$(24337-191D-4975A-527B-271C)/7560$
9	0
	$C_9 = \frac{(138337+10913A+4897B+3233C+2497D)}{226800}$

Табела 7ж-2. β коефицијенти за експлицитне методе од 9 корака.

k	$(\beta_k)_i$
0	$(138337+2497D+10913A+4897B+3233C)/453600$
1	$(491861-28939D-374891A-65899B-38891C)/453600$
2	$(8987+4067D-15317A+22907B+6043C)/11340$
3	$(96389-40111D-72659A+57749B-127259C)/28350$
4	$(548449+2067169D-744799A+924769B-899359C)/226800$
5	$(548449+2067169D-744799A+924769B-899359C)/226800$
6	$(96389-40111D-72659A+57749B-127259C)/28350$
7	$(8987+4067D-15317A+22907B+6043C)/11340$
8	$(491861-28939D-374891A-65899B-38891C)/453600$
9	$(138337+2497D+10913A+4897B+3233C)/453600$
	$C_{11} = \frac{(-519617-200641A-122561B-90817C-73985D)}{29937600}$

Табела 7ж-2. β коефицијенти за имплицитне методе од 9 корака.

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	26451/89600
1	1	14713/4480	109103/89600
2	0	$-31649/4480$	$-2599/2240$
3	0	41949/4480	6147/5600
4	-1	$-18293/4480$	2227/44800
5	1	$-18293/4480$	2227/44800
6	0	41949/4480	6147/5600
7	0	$-31649/4480$	$-2599/2240$
8	-1	14713/4480	109103/89600
9	1	0	26451/89600
C_p		$C_9 = 26451/44800$	$C_{11} = -27057/1971200$
$h \in (-h_0, h_0)$		$(h_0)_e = 0.05145176$	$(h_0)_i = 0.35645548$

Табела 7ж-4. $\varphi = 30^{\circ}, \vartheta = 60^{\circ}, \chi = 120^{\circ}, \psi = 150^{\circ}$.

број корака $= 10$

k	α_k
0	-1
1	$2A$
2	$-(3+4B)$
3	$4(A+2C)$
4	$-2(1+8D+2B)$
5	0
6	$2(1+8D+2B)$
7	$-4(A+2C)$
8	$3+4B$
9	$-2A$
10	1

Табела 7з-1. α коефицијенти за методе од 10 корака. Уведене су следеће ознаке.

$A = \cos\varphi + \cos\vartheta + \cos\chi + \cos\psi$

$B = \cos\varphi\cos\vartheta + \cos\vartheta\cos\chi + \cos\varphi\cos\chi + \cos\varphi\cos\psi + \cos\vartheta\cos\psi$

$C = \cos\varphi\cos\vartheta\cos\chi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi + \cos\vartheta\cos\chi\cos\psi$

$D = \cos\varphi\cos\vartheta\cos\chi\cos\psi$

k	$(\beta_k)_e$
0	0
1	$(2(31462 - 23D - 3982A - 188B - 52C))/14175$
2	$(4(-41983 + 167D - 11552A + 4922B + 448C))/14175$
3	$(8(72274 - 701D - 1819A + 9484B - 5494C))/14175$
4	$(4(-206341 + 23189D - 38624A + 13634B - 35264C))/14175$
5	$(4(57898 + 13903D - 358A + 7708B - 4348C))/2835$
6	$(4(-206341 + 23189D - 38624A + 13634B - 35264C))/14175$
7	$(8(72274 - 701D - 1819A + 9484B - 5494C))/14175$
8	$(4(-41983 + 167D - 11552A + 4922B + 448C))/14175$
9	$(2(31462 - 23D - 3982A - 188B - 52C))/14175$
10	0
	$C_{11} = \frac{(126422+4984A+1220B+496C+263D)}{467775}$

Табела 7з-2. β коефицијенти за експлицитне методе од 10 корака.

k	$(\beta_k)_i$
0	$(126422 + 263D + 4984A + 1220B + 496C)/467775$
1	$(4(203068 - 1037D - 78163A - 6152B - 2098C))/467775$
2	$(49078 + 11293D - 433528A + 234868B + 27152C)/155925$
3	$(8(162904 - 9026D - 44929A + 98224B - 62914C))/155925$
4	$(2(-12748 + 57707D - 75032A + 38072B - 84272C))/17325$
5	$(8(264764 + 379571D - 62177A + 199160B - 124778C))/155925$
6	$(2(-12748 + 57707D - 75032A + 38072B - 84272C))/17325$
7	$(8(162904 - 9026D - 44929A + 98224B - 62914C))/155925$
8	$(49078 + 11293D - 433528A + 234868B + 27152C)/155925$
9	$(4(203068 - 1037D - 78163A - 6152B - 2098C))/467775$
10	$(126422 + 263D + 4984A + 1220B + 496C)/467775$
	$C_{13} = \frac{(-5580692 - 1213468 * A - 451832B - 225208C - 133787D)}{1277025750}$

Табела 7з-2. β коефицијенти за имплицитне методе од 10 корака.

k	α_k	$(\beta_k)_e$	$(\beta_k)_i$
0	-1	0	$8247/30800$
1	0	$893/200$	$13763/7700$
2	1	$-9259/700$	$-5183/4400$
3	0	$12377/350$	$6221/1925$
4	-1	$-42593/700$	$-71111/15400$
5	0	$10429/140$	$27017/3850$
6	1	$-42593/700$	$-71111/15400$
7	0	$12377/350$	$6221/1925$
8	-1	$-9259/700$	$-5183/4400$
9	0	$893/200$	$13763/7700$
10	1	0	$8247/30800$
C_p		$C_{11} = 8247/30800$	$C_{13} = -339947/84084000$
$h \in (-h_0, h_0)$		$(h_0)_e = 0.00361730$	$(h_0)_i = 0.04265799$

Табела 7з-3. $\varphi = 30^{\circ}, \vartheta = 60^{\circ}, \chi = 120^{\circ}, \psi = 150^{\circ}$.

3.5 Примена разних ЛВМ на задатке небеске механике

Због великог броја метода за нумеричку интеграцију које су тестиране, у овом параграфу ћемо их представити и анализирати резултате тестова - интерног поређења тих метода. Коефицијенти за Адамс - Башфортову и Адамс - Мултонову методу, као представници експлицитних и имплицитних метода за једначине првог реда, су дати у претходним параграфима. Такође су дати и коефицијенти за популарну Стремерову и Ковелову методу, као представника експлицитне и имплицитне методе за једначине другог реда.

У прилогу 3А су дати листинзи програма за експлицитне и имплицитне (у моду $P(EC)^kE$) ЛВМ. Коефицијенти методе се учитавају из независне датотеке, тако да су ови програми коришћени за Адамсове интеграторе и симетричне интеграторе. У прилозима 3Б и 3В су дати резултати тестова као и у претходној глави.

Тестиране су АС:С и Адамсове методе од 4,5,6 и 7 корака. Параметри (ред, константа грешке, интервали периодичности) ових метода су наведени у табелама 7 (за АС:С методе). Нестабилност АС:С метода, због неповољног распореда корена првог карактеристичног полинома, утиче да са повећањем броја корака, односно реда, интеграција врло брзо постаје нестабилна. При овоме треба имати у виду да је облик једначина коришћен при интеграцији "неповољан" за АС:С методе. Наиме, ради се о нерегуларизованим једначинама, а познато је (види [39]) да ове методе најбоље резултате дају када се примењују на регуларизоване једначине елиптичког кретања. Заправо методе су и прилагођене за такве "услове" интеграције. Међутим, с обзиром на општост досадашњег правца рада, и овде су, као тест пример, коришћене барицентричне једначине кретања. Имајући ово у виду, јасно је и зашто су тестови изведени на "кратком" интервалу времена (5год.), односно интервалу у току кога АС:С методе раде стабилно за задати корак од $h = 3.652422$ дана. Тестиране су имплицитне методе, а за предиктор формулу увек је коришћен Башфортов експлицитни интегратор одговарајућег броја корака. Овде још треба додати да АС:С методе, које су дате у табелама 7, јесу представници класа одговарајућих метода, али не и најбоље методе из тих класа. При њиховој конструкцији је вођено рачуна о само једној ствари - да корени првог карактеристичног полинома, који се сви налазе на јединичном кругу, буду између себе максимално размакнути. Тиме није минимализована константа грешке, нити је максимализована ширина интервала периодичности, што би били природни, али технички врло тешко остварови захтеви.

(а) Сунце + Земља

Графици на странама 3Б-1 и даље показују грешке (исто као и у претходној глави) у путањским елементима добијене АС-С методом и Мултоновом методом. Једно опште запажање у вези са свим интеграцијама: Мултонове методе показују "секуларни" тренд у грешкама велике полуосе и ексцентричности, док код АС:С метода тог тренда нема. Њихова слабост је у томе што, када постану нестабилне, грешке нагло расту, али поново симетрично у односу на нулу. Ови ефекти су нарочито јасно изражени код метода са мањим бројем корака (нпр. 4 и 5). Сличан ефекат се уочава и код грешке аргумента перихела мерене од узлазног чвора и лонгитуде узлазног чвора. Грешке нагиба путањске равни, код Мултонових метода су врло стабилне (не мењају се током интеграције), као и код АС:С метода, мада је интервал у коме се грешке крећу шири.

(а) Сунце + Земља + Марс + Јупитер + Сатурн

Графици на странама 3В-1 и даље показују грешке првих интеграла енергије, угаоног момента и пројекције положаја барицентра на раван Oxy. Грешке у првим интегралима енергије и угаоног момента код Мултонових метода секуларно расту док тог ефекта код АС:С метода нема. Што се грешака пројекције положаја центра масе тиче поново постоји систематски тренд код Мултонових интегратора. Ово наводи на закључак да симетричне методе и ако нису симплектичке показују, истина у релативно кратким интервалима времена, добре особине у погледу одржавања симплектичке структуре. Овакав закључак се намеће не само на основу резултата тестова приказаних у прилогу већ и на основу многобројних резултата тестова који су урађени током рада на дисертацији, али овде нису наведени због техничких разлога.

ЗАКЉУЧАК

С обзиром на разноврсност симплектичко - нумеричких алгоритама, на самом почетку израде дисертације рад је био усмерен ка испитивању већ постојећих симплектичких метода на примерима небеске механике, а касније су развијене неке методе које су потом детально анализиране и тестиране у пракси.

Главни допринос ове тезе би се, укратко говорећи, састојао у следећем: Конструисане су класе симетричних вишекорачних метода за обичне диференцијалне једначине првог реда са бројем корака од 2 до 10. Овакве методе према резултатима Мура (види [39]) показују једну пожељну особину која је названа путањска стабилност. За одабране вредности слободних параметара, а за све класе метода, су потом конструисане конкретне вишекорачне методе, одређени су крајеви њихових интервала периодичности, па су потом те методе поређене са Башфорт - Мултоновим (односно Адамсовим) методама са одговарајућим бројем корака. Резултати тих тестова говоре да нове методе, с обзиром на 'уграђену' симетричност, боље одржавају прве интеграле током интеграције. Са друге стране, због слабијих стабилносних карактеристика (сви корени првог карактеристичног полинома се налазе на јединичном кругу комплексне равни - чиме је апсолутна стабилност практично искључена) интеграција на дужим интервалима времена је стабилнија код класичних вишекорачних метода. Међутим, ако се узме у обзир да су једначине које су интеграљене барицентричне, тј. нерегуларизоване, овакав резултат би се могао сматрати и очекиваним.[1]

Овде треба нагласити да симетричне вишекорачне методе не представљају[2] и симплектичке трансформације. Симетричне методе су заправо прва станица ка путу до симплектичких вишекорачних метода. Наиме, како је и назначено у трећој глави, а према доказу датом у [15] ако је нека ЛВМ симетрична онда је одговарајућа једно - ножна метода симплектичка. Овај важан резултат, као и чињеница да симетричне метода са већим бројем корака нису конструисане су били додатни мотив да се у овом раду позабавимо конструисањем симетричних метода.

Следећи корак, у будућем раду, ће свакако бити анализа симплектичких - једно - ножних метода и њихава примена у небеској механици. Поред тога и проширење симплектичких алгоритама на друге класе нумеричких метода, као што су на пример методе засноване на екстраполацији, такође представља још једну смерницу за будући рад.

Користим ову прилику да се захвалим колегама са Катедре за астрономију Математичког факултета у Београду, а нарочито ментору проф. др Микеу Кузманоском и колегиници проф. др Нади Пејовић за несебичну подршку током израде тезе. Захваљујем се и члановима комисије, проф. др Јовану Лазовићу и проф. др Драгомиру Симеуновићу на корисним примедбама и сугестијама у припреми коначне верзије рада.

[1] Наиме симетричне методе су конструисане посебно за регуларизоване једначине те су и за тај случај посебно погодне. Ово наравно не значи да се оне не могу користити и другим случајевима, већ само да се та главна компаративна предност у другим случајевима губи. Међутим с обзиром да је веома мали број једначина у небеској механици могуће регуларизовати то унеколико умањује опште 'перформансе' симетричних метода.

[2] За доказ видети [15].

Литература

[1] Арнолд,В.И.: 1987. "Математические Методы Класческой Механики" *Наука*, Москва.
[2] Арушанаян,О.Б., Залёткин,С.Ф.: 1990. "Численное Решение Обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране" Издателство Московского Универзитета.
[3] Bashforth,F. and Adams,J.C.: 1883. "Theory of Capillary Action" *Cambrdige University Press.*
[4] Brumberg,V.A.: 1991. "Essential Relativistic Celestial Mechanics" *Adam Hilger*, London.
[5] Calvo,M.P.,Sanz-Serna,J.M.: 1993. "The Development of Variable -Step Symplectic Integrators with Application to the Two-Body problem" *SIAM J.Sci.Comput.* **14**, pp. 936 – 952.
[6] Candy,J.,Rozmus,W.: 1991. "A Symplectic Algorithm for Separable Hamiltonian Problems" *J.Comp.Phys.* **92**, pp. 230 – 256.
[7] Chanell,P.J. 1983. "Symplectic Integration Algorithms" *Los Alamos National Laboratory Report* AT-6ATN 83-9.
[8] Chanell,P.J., Scovell,C. 1989. "Symplectic Integration of Hamiltonian Systems" *Nonlinearity* 3, pp. 231 – 259.
[9] Cowell,P.H. and Crommelin,A.C.D.: 1910. "Investigation of motion of Halley's comet from 1759 to 1910" *Appendix to Greenwich Observations from 1909, Edinburgh*, pp. 84.
[10] Dahlquist,G.: 1956. "Convergency and Stability in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations" *Math. Scand.* **4**, 33 – 53.
[11] Dahlquist,G.: 1959. "Stability and Error Bounds in the Numerical Integration of the Ordinary Differential Equations" *Kungl. Tekniska Hogskolans Handlingar* No. 130.
[12] Dahlquist,G.: 1963. "A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods" *BIT* **3**, pp. 27 – 43.
[13] Dahlquist, G.: 1983. "On One-Leg Multistep Methods" *SIAM J. Numer. Anal.* **6**, pp. 1130 – 1138.
[14] De Vogelaere,: 1956. "Methods of Integration Which Preserve the Contact Transformation Property of the Hamiltonian Equations" *Report 4*, Departement of Mathemaics, University of Notre Dame.
[15] Eirola, T., Sanz-Serna, J.M.: 1992. "Conservation of Integrals and Symplectic Strukture in the Integration of Differential Equations by Multistep Methods" *Numer. Math.* **61**, pp. 281 – 290.
[16] Everhart, E.: 1974. "Implicit Single - Sequence Methods for Integrating Orbits" *Cel. Mech.* **10**, pp. 35.
[17] Everhart, E.: 1984. "An Efficient Integrator that uses Gauss - Radau Spacings" *preprint.*
[18] Feng Kang: 1985. "On difference Schemes and Symplectic Geometry" *in Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations"*, **ed. Feng Kang** Science Press, Bejing, pp. 42 – 58.
[19] Feng Kang: 1986*a*. "Difference Schemes for Hamiltonian Formalism and Symplectic Geometry" *J. Comput. Math.* 4, pp. 279 – 289.
[20] Feng Kang: 1986*b*. "Symplectic Geometry and Numerical Methods in Fluid Dynamics" *in Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics (Lecture Notes in Physics 264)* **eds. F.G.Zhuang and Y.L.Zhu**. Springer, Berlin, pp. 1 – 7.
[21] Ferraz-Mello, S. and Klafke, J.C.: 1992. "A model for study of very-high-eccentricity asteroidal motion. The 3:1 Resonance" *in Chaos, resonance, and collective dynamical phenomena in the solar system*, **ed. Ferraz-Mello**.
[22] Forest,E., Brengtsson,J., Reusch,M.F. 1991. "Application of Yoshida-Ruth Techniques to Implicit Integration and Multi-Map Explicit Integration" *Phys.Lett. A* **158**, pp. 99 – 101.
[23] Ge, Z. and Marsden, J.E.: 1988. "Lie-Poisson-Hamilton-Jacoby Theory and Lie-Poisson integrators" *Phys. Lett. A* **133**, 134 – 139.

[24] Gear,W.C.: 1971. "Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations" *Pretince-Hall, Inc. New Jersey.*

[25] Gladman,B.,Duncan,M.: 1990. "On the Fates of Minor Bodies in the Outer Solar System" *The Astron.J.* 100, pp. 1680 – 1693.

[26] Gladman,B.,Duncan,M.,Candy,J.: 1991. "Symplectic Integrators for Long Term Integrations in Celestial Mechanics" *Cel.Mech.* **52**, pp. 221 – 240.

[27] Hairer,E., Norsett, S.P., Wannerr, G.: 1993. "Solving Ordinary Differential Equations I. Non-stiff Problems" *Spinger Verlag.*

[28] Henrici,P.: 1962. "Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations" *John Wiley & Sons; London, New York.*

[29] Kinoshita,H.,Yoshida,H. and Nakai,H.: 1991*a*. "Symplectic Integrators and Their Application to Dynamical Astronomy" *Cel.Mech.* **50**, pp. 59 – 71.

[30] Kinoshita, H., Nakai H.: 1991*b*. "New Methods for Long-Time Numerical Integration of Planetary orbits" *Proc. IAU Symp.* **152**.

[31] Krogh,F.T.: 1969. "A Variable Step, Variable Order Multistep Method for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations" *in Information Prrocessing 68* **Vol.1 ed. A.J. Morrell** *North Holland Publishing Company, Amsterdam* pp. 194 – 199.

[32] Lambert,J.D.: 1973. "Computational Methods in Ordinaary Differential Equations" *John Wiley & Sons; London, New York, Sydney, Toronto.*

[33] Lambert,J.D., Watson,I.A.: 1976. "Symmetric Multistep Methods for Periodic Initial Value Problems" *J.Inst. Maths. Applics.* **18**, pp. 189 – 202.

[34] Lasagni, F.M.: 1988. "Canonical Runge-Kutta methods" *Z. Angew. Math. Phys.* **39**, pp. 952.

[35] Menyuk,C.R. 1984. "Some Properties of Discrete Hamiltonian Method" *Physica D* **11**, pp. 109 – 129.

[36] Milani,A., Nobilli,A. 1988. "Integration Error Over a Very Long Time Span" *Cel. Mech.* **43**, pp. 1 – 34.

[37] Milne,W.E.: 1953. "Numerical Solution of Differential Equations" *John Wiley & Sons; London, New York.*

[38] Moulton,F.R.: 1926. "New Methods in Exterior Balistics" *University of Chicago Press.*

[39] Moore, P.: 1978. "Orbitally Stable Multistep Methods" *Cel. Mech.* **17**, pp. 281 – 279.

[40] Neri,F. 1987. "Lie Algebras and Canonical Integration" *Technical Report* University of maryland, Departement of Physics.

[41] Newhall,X.X., Standish,Jr.E.M. and Williams,J.G.: 1983. "DE 102: a Numerically Integrated Ephemeris of the Moon and Planets spanning Fourty-four Centuries" *Astron. Astrophys.* **125**, pp. 150 – 167.

[42] Pullin,D.I.,Saffman,P.G.: 1991. "Long Time Symplectic Integration: the Example of Four Vortex Motion" *Proc.R.Soc.* **432**, pp. 481 – 494.

[43] Quinlan,G.D., Tremain,S.: 1990. "Symmetric Multistep Methods for the Numerical Integration of Planetary Orbits" *The Astron. Jour.* **100**, pp. 1695 – 1700.

[44] Ruth,R.D.: 1983. "A Canonical Integration Technique" *IEEE Trans.Nucl.Sci.* **NS-30**, pp. 2669 – 2671.

[45] Sanz-Serna, J.M.: 1988. "Runge-Kutta schemes for hamiltonian systems" *BIT* **28**, pp. 877.

[46] Sanz-Serna,J.M.: 1991. "Symplectic Integrators for Hamiltonian Problems: an overview" *Acta Numerica*, **1**, pp. 243 – 286.

[47] Sanz-Serna,J.M., Calvo,M.P.: 1994*a*. "Numerical Hamiltonian Problems" *Chapman & Hall*, London.

[48] Sanz-Serna,J.M.: 1994*b*. "Backward Error Analysis of Symplectic Integrators" *Applied Mathematics and Computation Reports*, **Report 1994/1**, Universidad de Valladolid.

[49] Standish,E.M., Newhall,X.X., Williams,J.G. and Folkner,W.M.: 1995. "Jet Propulsion Laboratory IOM 314.10-127".

[50] Stiefel, E., Bettis, D. G.: 1969. *Num. Math* **13**, pp. 154 – 175.

[51] Strömer,C.: 1907. "Sur les trajectories des corpuscules électrisés" *Arch. Sci. Phys. Nat. Genéve* **24**, pp. 5 – 18, 113 – 158, 221 – 247.

[52] Strömer,C.: 1921. "Methode d'integration num érique des équatins différentielles ordinaires" *C.R. Congr. Inter. Math., Strausbourg* pp. 243 – 257.

[53] Šidlichovský, M.: 1993. "Chaotic behaviour of Trajectories for the Asteroidal: Resonances" *Cel. Mech. and Dyn.* **56**, pp. 143.

[54] Yoshida,H.: 1990*a*. "Conserved Quantities of Symplectic Integrators for Hamiltonian Systems" *Physica D.*

[55] Yoshida,H. 1990*b*. "Construction of Higher Order Symplectic Integrators" *Phys. Lett.* A **150**, pp. 262 – 268.

[56] Yoshida,H. 1993. "Recent Progress in the Theory and Applications of Symplesctic Integrators" *Proceedings of the Second Alexander von Humboldt Colloquium on Celestial Mechanics:* Ramsau, Austria. pp. 21 – 43.

[57] Varadarajan, V.S.: 1974. "Lie Groups.Lie Algebras and Their Representation" *Pretince Hall, Engelwood Cliffs.*

ПРИЛОГ 2А

ЛИСТИНГ ПРОГРАМА ЗА СИМПЛЕКТИЧКУ ИНТЕГРАЦИЈУ

(MS FORTRAN 5.1)

```
      program sy-v
      implicit real*8(a-h,o-z)
      external duq,dist
      common /bl1/ nk,c(16),d(16)
      common /bl2/ nb,rm(0:10),q(1:3,0:10),v(1:3,0:10)
      common /bl3/ fu(1:3,0:10,0:10)
      open(1,file='mpar',status='old',access='sequential')
      open(2,file='bary-v.dat',status='old',access='sequential')
      open(3,file='mase.dat',status='old',access='sequential')
      open(4,file='outbar-v.dat',status='new',access='sequential')
      data g/0.01720209895d0/
      g = g*g
c
      call gettim(ih0,im0,is0,iss0)
      write(*,*) ' Vreme sa lokalnog sata na pocetku racuna:'
      write(*,'(25x,i2.2,1h:,i2.2,1h:,i2.2,1h.,i2.2)') ih0,im0,
     *is0,iss0
      ct0=ih0+im0/60.+(is0+iss0/100.)/3600.
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' RACUN JE U TOKU !!'
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' '
c
      read(1,*) time,timemax,tau,nb,index
      read(1,*) ns,iv,nk
      read(2,*) ((q(j,i),v(j,i), j=1,3), i=0,nb)
      read(3,*) (num,rm(i), i=0,nb)
      write(4,*) nb,int((timemax-time)/(index*tau))
      time0 = time
      write(4,*) (time - time0)/365.2422
c write(4,*) time
      write(*,*) (time - time0)/365.2422
c write(*,*) time
      do 1 i=0,nb
      write(4,100) (q(j,i),v(j,i),j=1,3)
      rm(i) = 1./rm(i)
1 continue
c......Initialising series c(i) and d(i).............................
      if (ns.eq.4) then
      open(3,file='sym4.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      elseif (ns.eq.6) then
      if (iv.eq.1) then
```

```
      open(3,file='sym6A.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      elseif(iv.eq.2) then
      open(3,file='sym6B.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      else
      open(3,file='sym6C.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      endif
      else
      if(iv.eq.1) then
      open(3,file='sym8A.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      elseif(iv.eq.2) then
      open(3,file='sym8B.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      elseif(iv.eq.3) then
      open(3,file='sym8C.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      elseif(iv.eq.4) then
      open(3,file='sym8D.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      else
      open(3,file='sym8E.dat',status='old',access='sequential')
      read(3,*) (c(i),c(i+1),i=1,nk,2)
      read(3,*) (d(i),d(i+1),i=1,nk,2)
      endif
      endif
c.................. Main program ......................................
      wstep = time + index*tau
      tau1 = tau*g
 10   time = time + tau
      do 40 k=1,nk-1
      do 20 i=0,nb
      do 20 j=1,3
      call s1(k,i,j,tau)
 20   continue
      do 25 i=0,nb
      do 25 l=i+1,nb
      do 25 j=1,3
      fu(j,i,l) = (q(j,i) - q(j,l))/dist(i,l)**3
```

```
      fu(j,l,i) = -fu(j,i,l)
25    continue
      do 30 i=0,nb
      do 30 j=1,3
      call s2(k,i,j,tau1)
30    continue
40    continue
      do 50 i=0,nb
      do 50 j=1,3
      call s1(nk,i,j,tau)
50    continue
      if (time.ge.wstep) then
      write(4,*) (time - time0)/365.2422
c     write(4,*) time
      write(*,*) (time - time0)/365.2422
c     write(*,*) time
      do 60 i=0,nb
      write(4,100) (q(j,i),v(j,i),j=1,3)
60    continue
      wstep = wstep + index*tau
      else
      endif
      if (time.gt.timemax) goto 70
      goto 10
70    call gettim(ih1,im1,is1,iss1)
      write(*,*) ' Vreme sa lokalnog sata na kraju racuna:'
      write(*,'(25x,i2.2,1h:,i2.2,1h:,i2.2,1h.,i2.2)') ih1,im1,
     *is1,iss1
      ct1 = ih1 + im1/60. + (is1 + iss1/100.)/3600.
      write(4,*) ' Ukupno vreme rada (u min.)  :'
      write(4,*) ' '
      write(4,101) (ct1 - ct0)*60.
      write(*,*) ' Ukupno vreme rada (u min.)  :'
      write(*,*) ' '
      write(*,101) (ct1 - ct0)*60.
99    format(10x,f12.2)
100   format(6(2x,f22.14))
101   format(10x,f15.6)
      stop
      end
c.......Mapping S1 (for coordinates)...........................
      subroutine s1(k,i,j,tau)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      common /bl1/ nk,c(16),d(16)
      common /bl2/ nb,rm(0:10),q(1:3,0:10),v(1:3,0:10)
c
      q(j,i) = q(j,i) + tau*c(k)*v(j,i)
c
```

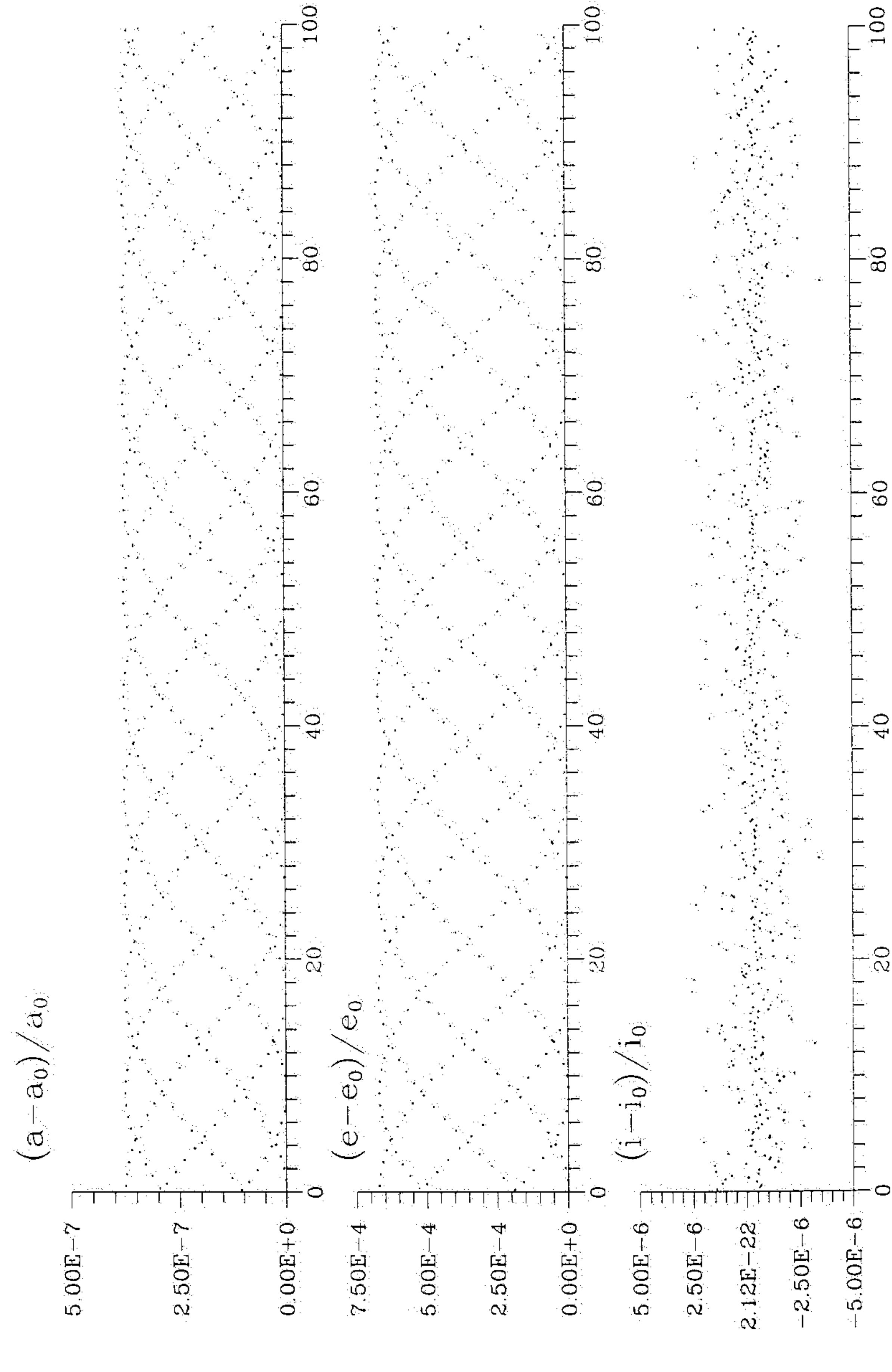
```
      return
      end
c.........Mapping S2 (for impulses)...............................
      subroutine s2(k,i,j,tau)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      external duq,dist
      common /bl1/ nk,c(16),d(16)
      common /bl2/ nb,rm(0:10),q(1:3,0:10),v(1:3,0:10)
      common /bl3/ fu(1:3,0:10,0:10)
c
      v(j,i) = v(j,i) - tau*d(k)*duq(j,i)
c
      return
      end
c........Right hand sides for impulses (barycentric)...........
      function duq(j,i)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      common /bl2/ nb,rm(0:10),q(1:3,0:10),v(1:3,0:10)
      common /bl3/ fu(1:3,0:10,0:10)
c
      duq=0.d0
      do 10 l=0,nb
      duq = duq + rm(l)*fu(j,i,l)
10    continue
c
      return
      end
c.........Distance between two bodies..........................
      function dist(i,l)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      common /bl2/ nb,rm(0:10),q(1:3,0:10),v(1:3,0:10)
c
      dist = dsqrt((q(1,i) - q(1,l))**2+(q(2,i) - q(2,l))**2+
     *(q(3,i) - q(3,l))**2)
c
      return
      end
```

ПРИЛОГ 2Б

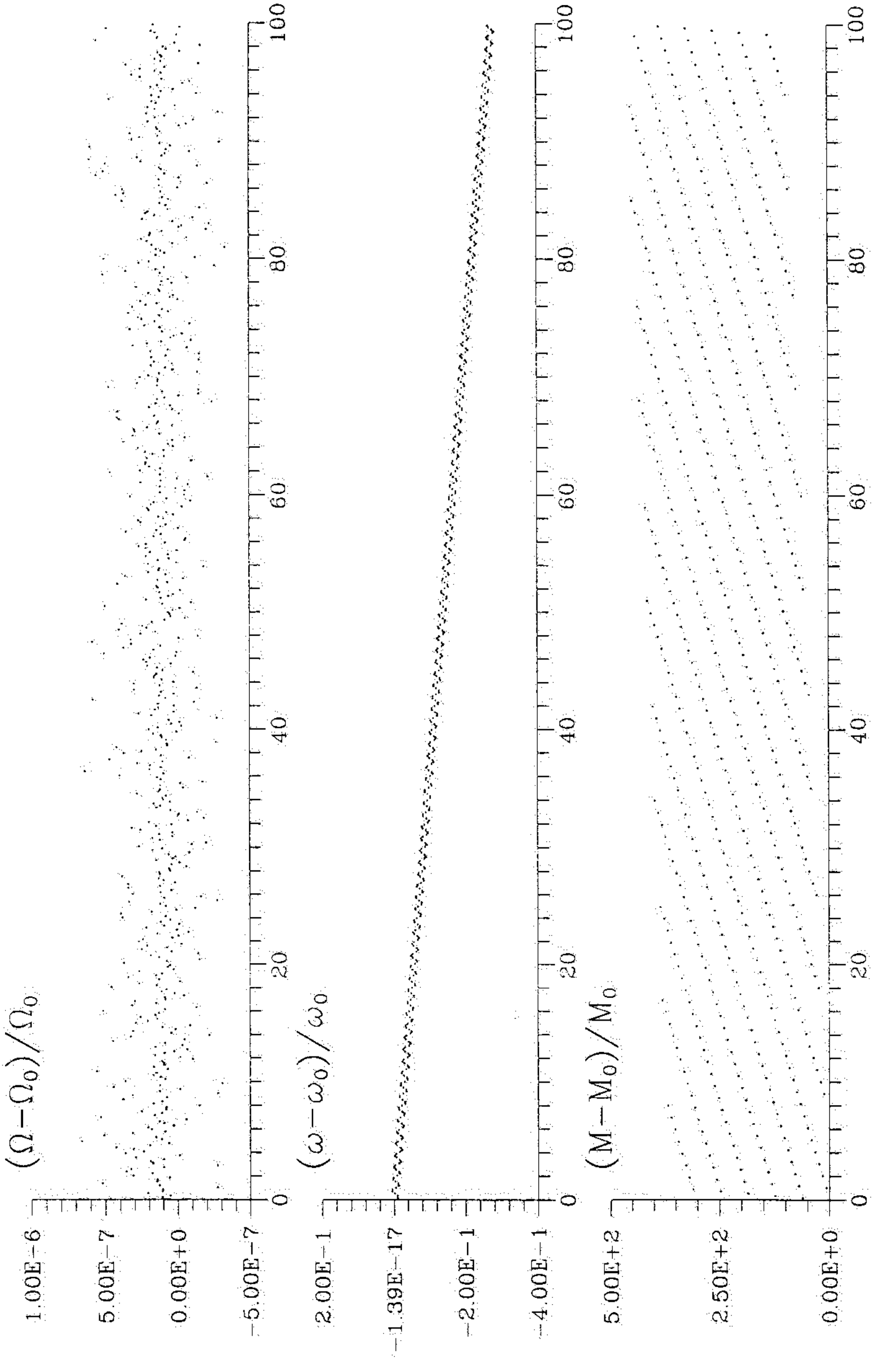
ГРАФИЦИ ИНТЕГРАЦИЈЕ ПРОБЛЕМА ДВА ТЕЛА (СУНЦЕ + ЗЕМЉА)

Приказане су релативне грешке у путањским елементима.

2Б-1 (интегратор четвртог реда)

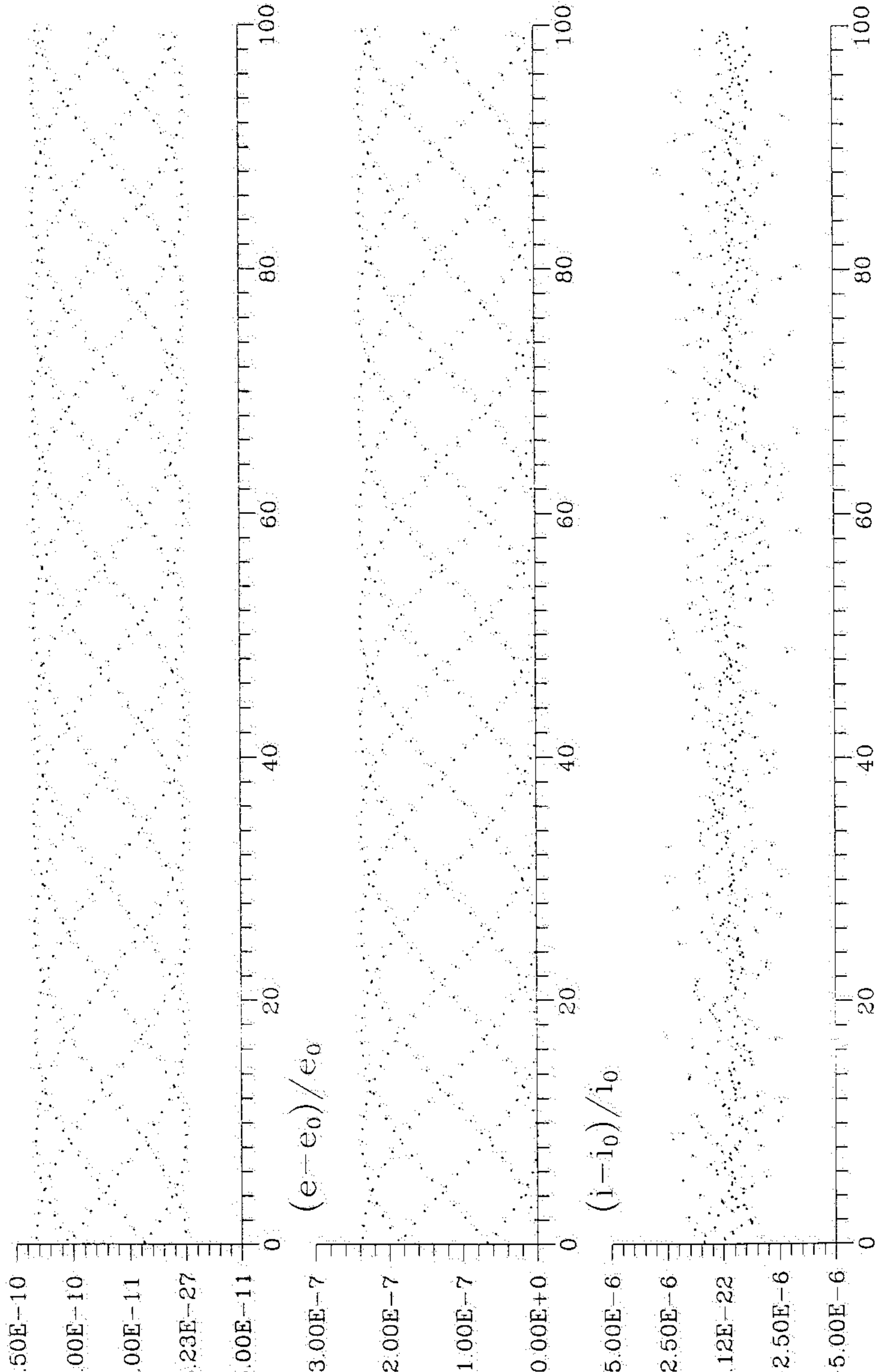


2Б-2

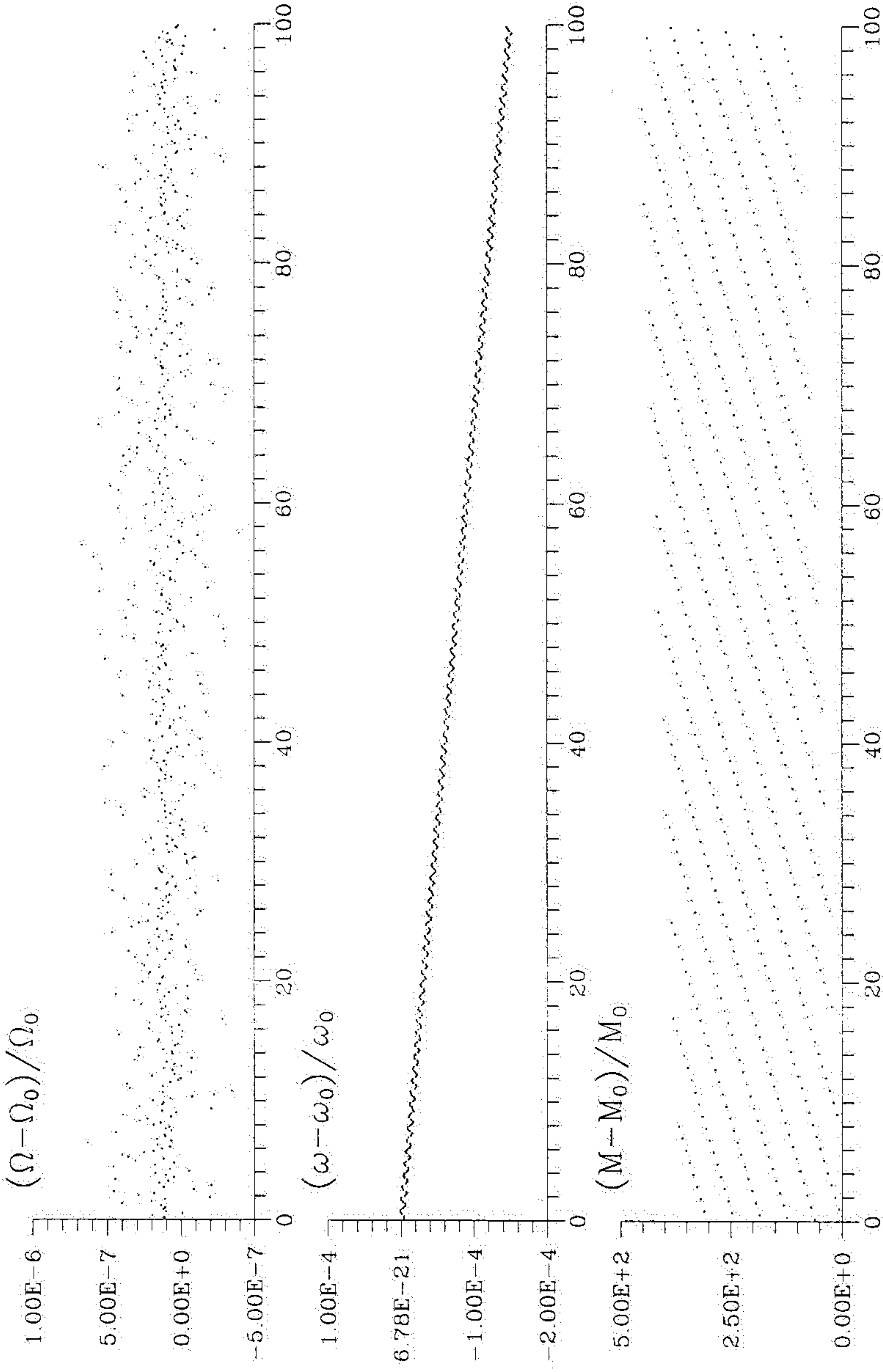


$(\Omega-\Omega_0)/\Omega_0$
1.00E-6
5.00E-7
0.00E+0
-5.00E-7
$(\omega-\omega_0)/\omega_0$
2.00E-1
-1.39E-17
-2.00E-1
-4.00E-1
$(M-M_0)/M_0$
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

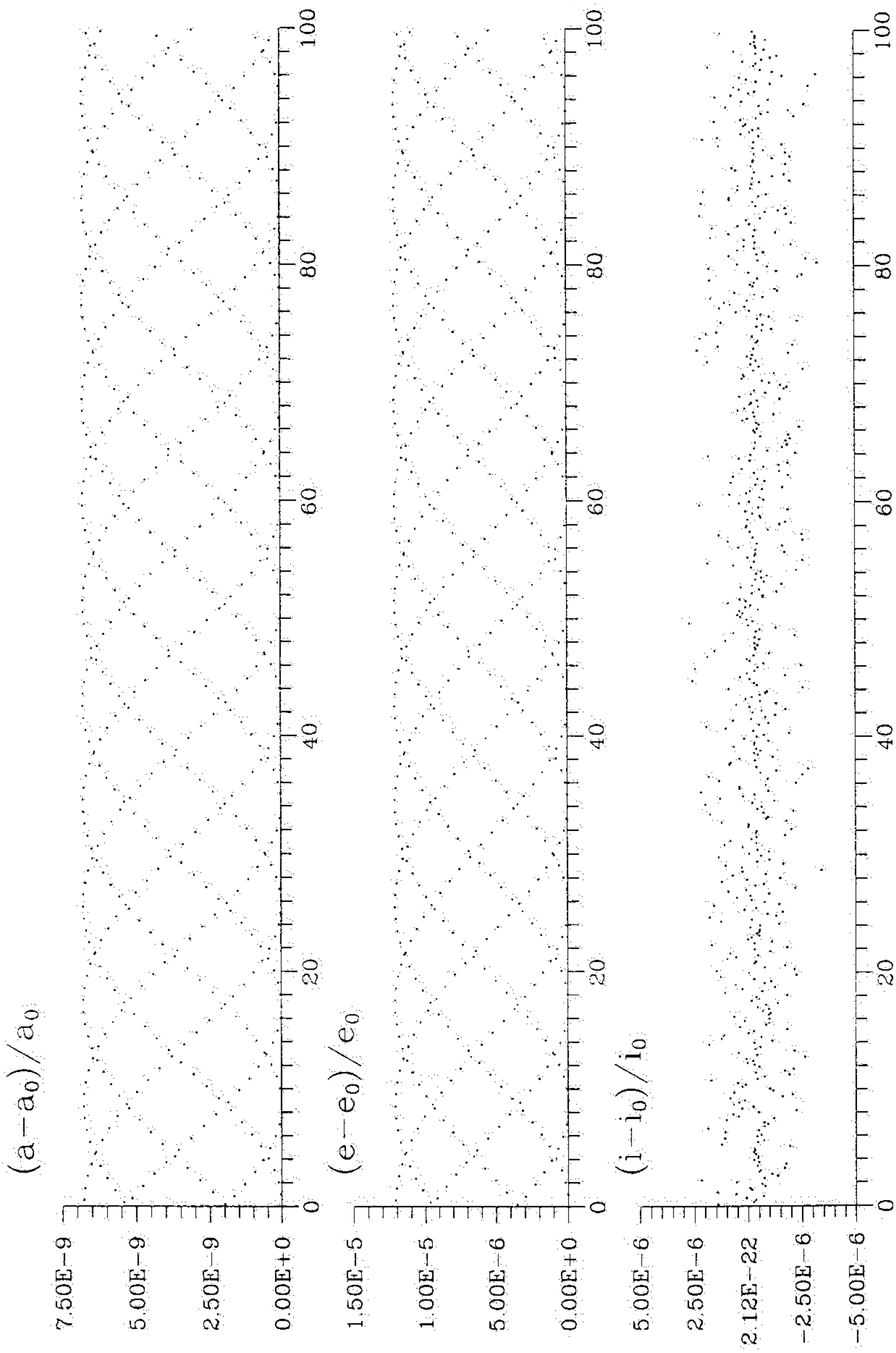
2Б-3 (интегратор шестог реда 6А)



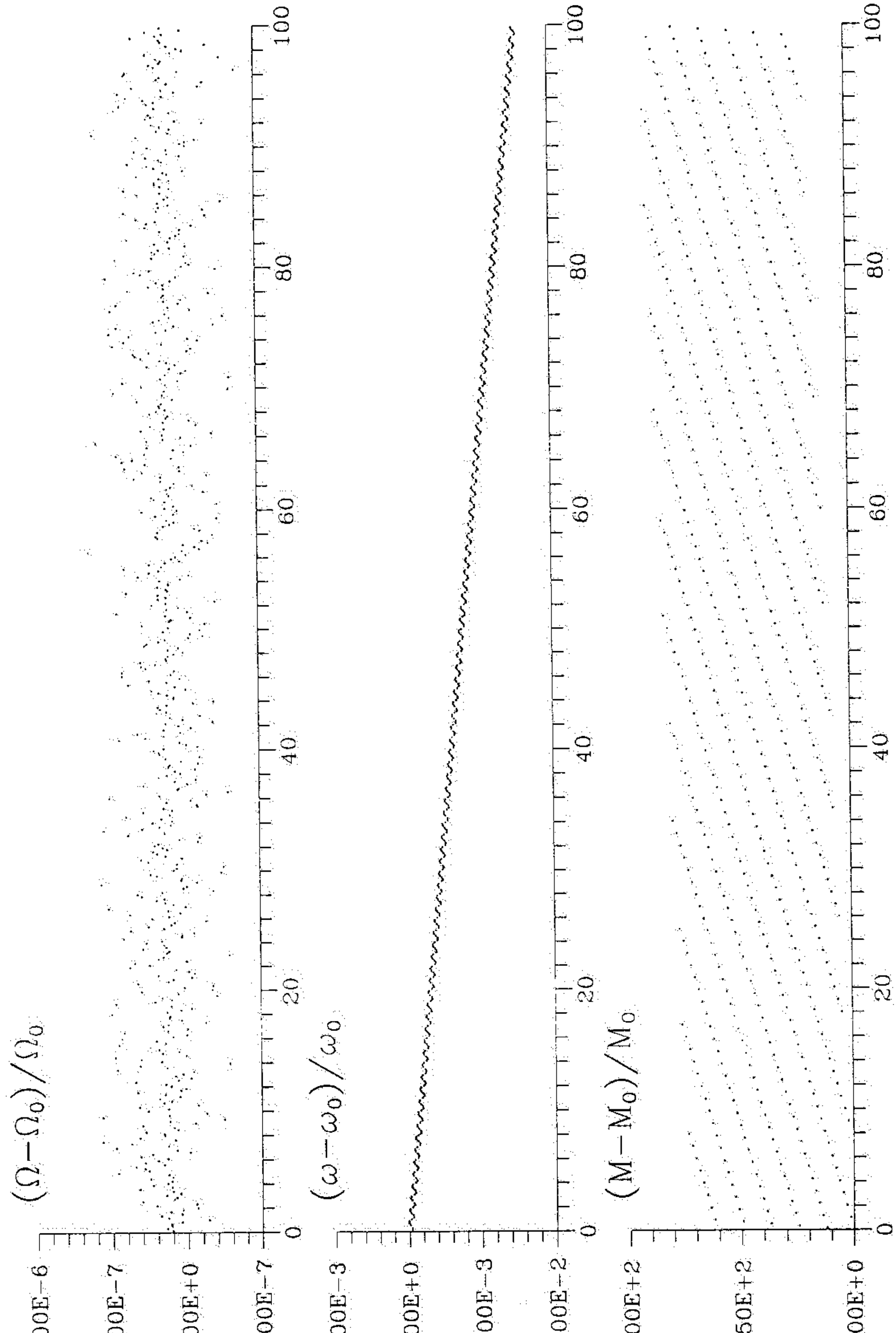
2Б−4


(Ω−Ω0)/Ω0
1.00E−6
5.00E−7
0.00E+0
−5.00E−7
(ω−ω0)/ω0
1.00E−4
6.78E−21
−1.00E−4
−2.00E−4
(M−M0)/M0
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

2Б−5 (интегратор шестог реда 6Б)

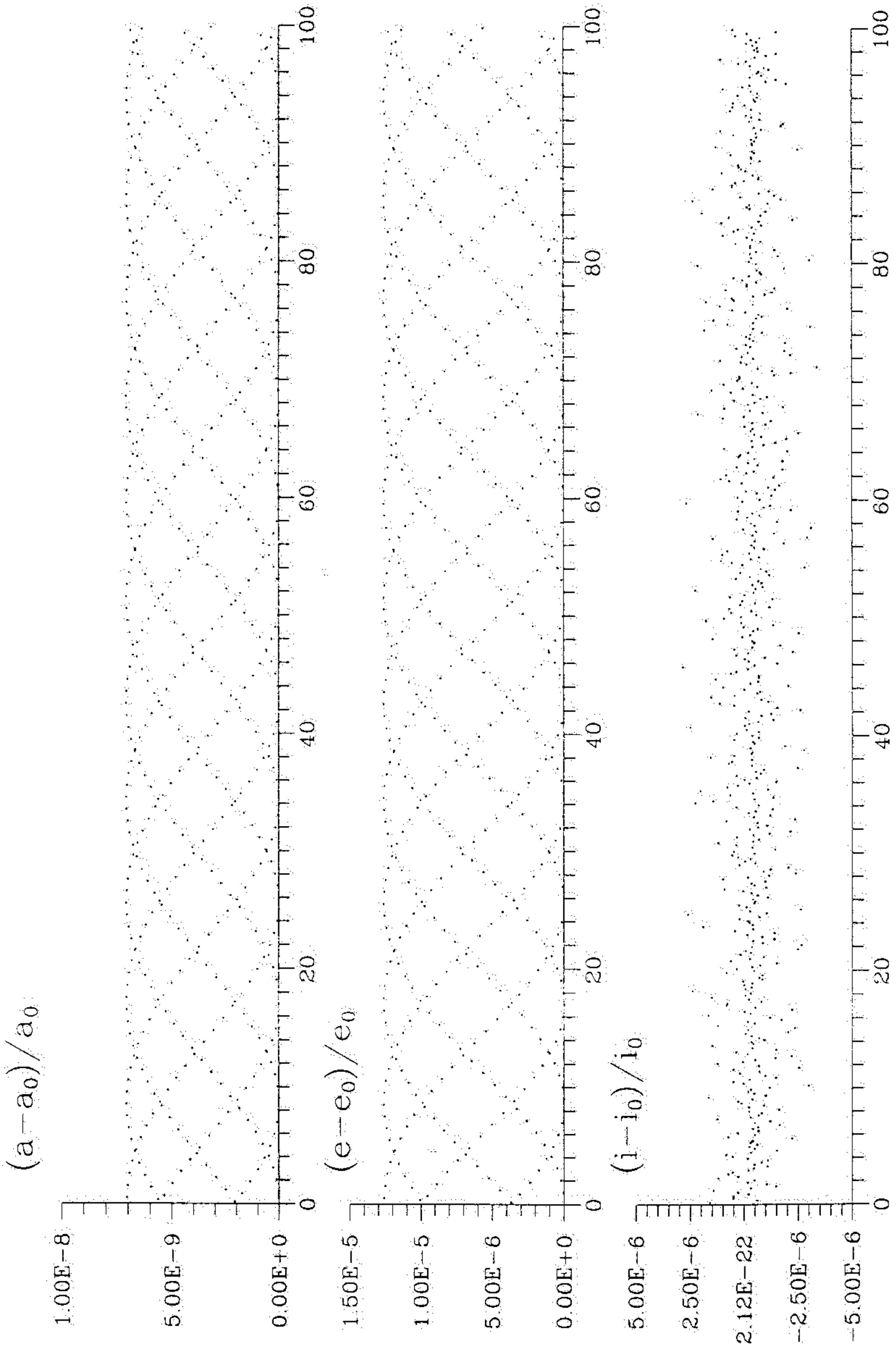


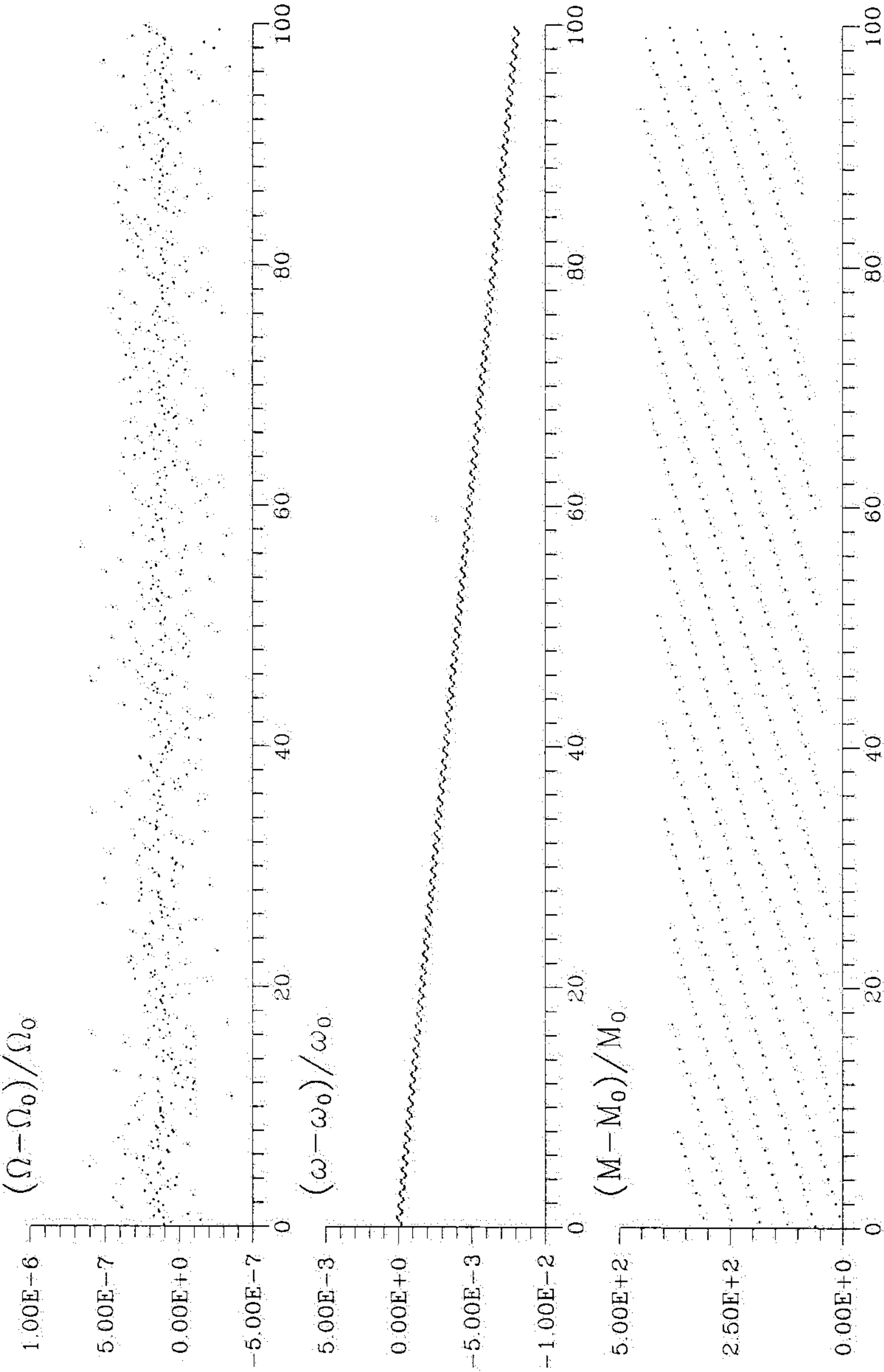
2Б-6



$(\Omega-\Omega_0)/\Omega_0$
1.00E-6
5.00E-7
0.00E+0
-5.00E-7
$(\omega-\omega_0)/\omega_0$
5.00E-3
0.00E+0
-5.00E-3
-1.00E-2
$(M-M_0)/M_0$
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

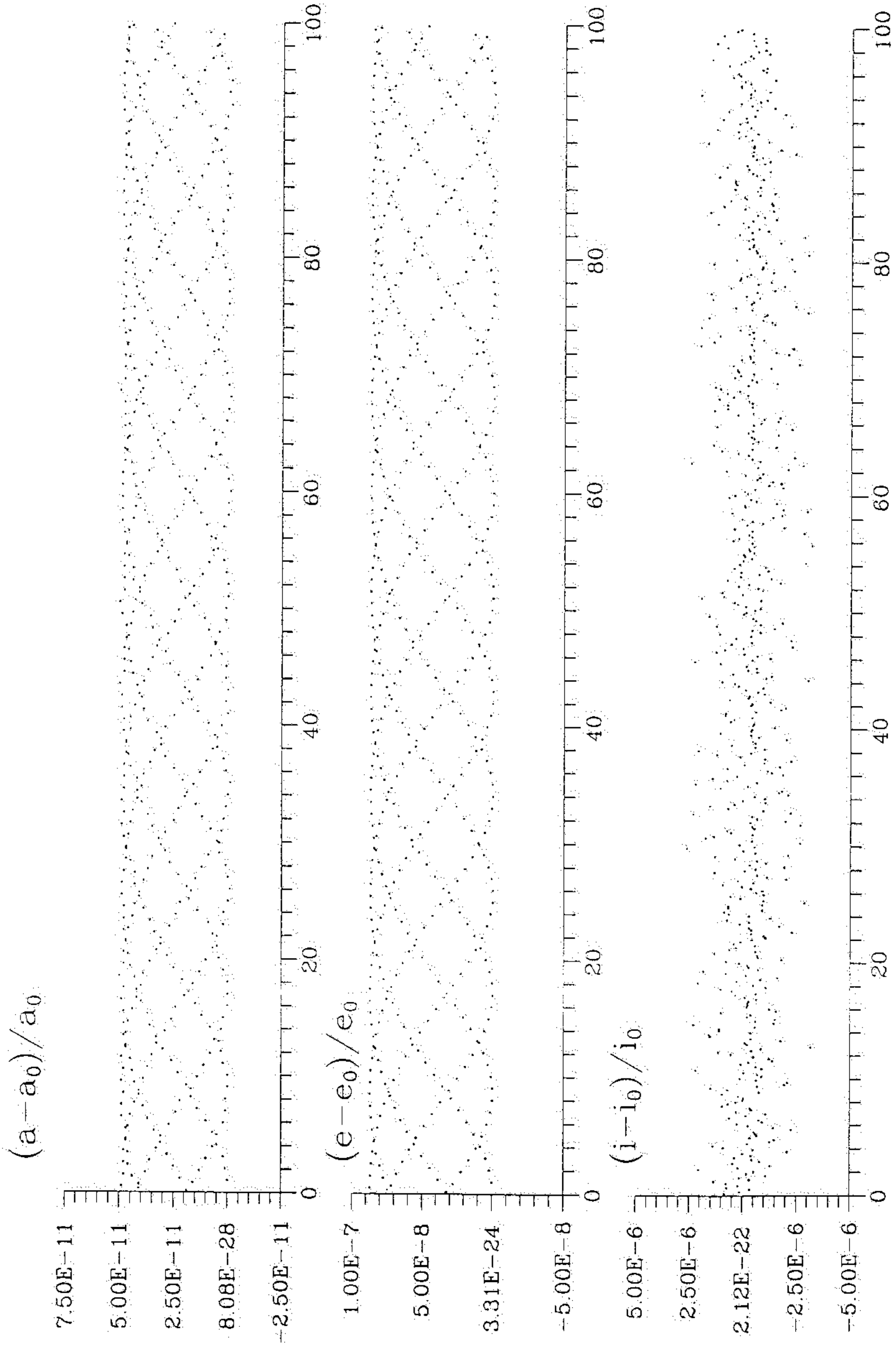
2Б−7 (интегратор шестог реда 6В)



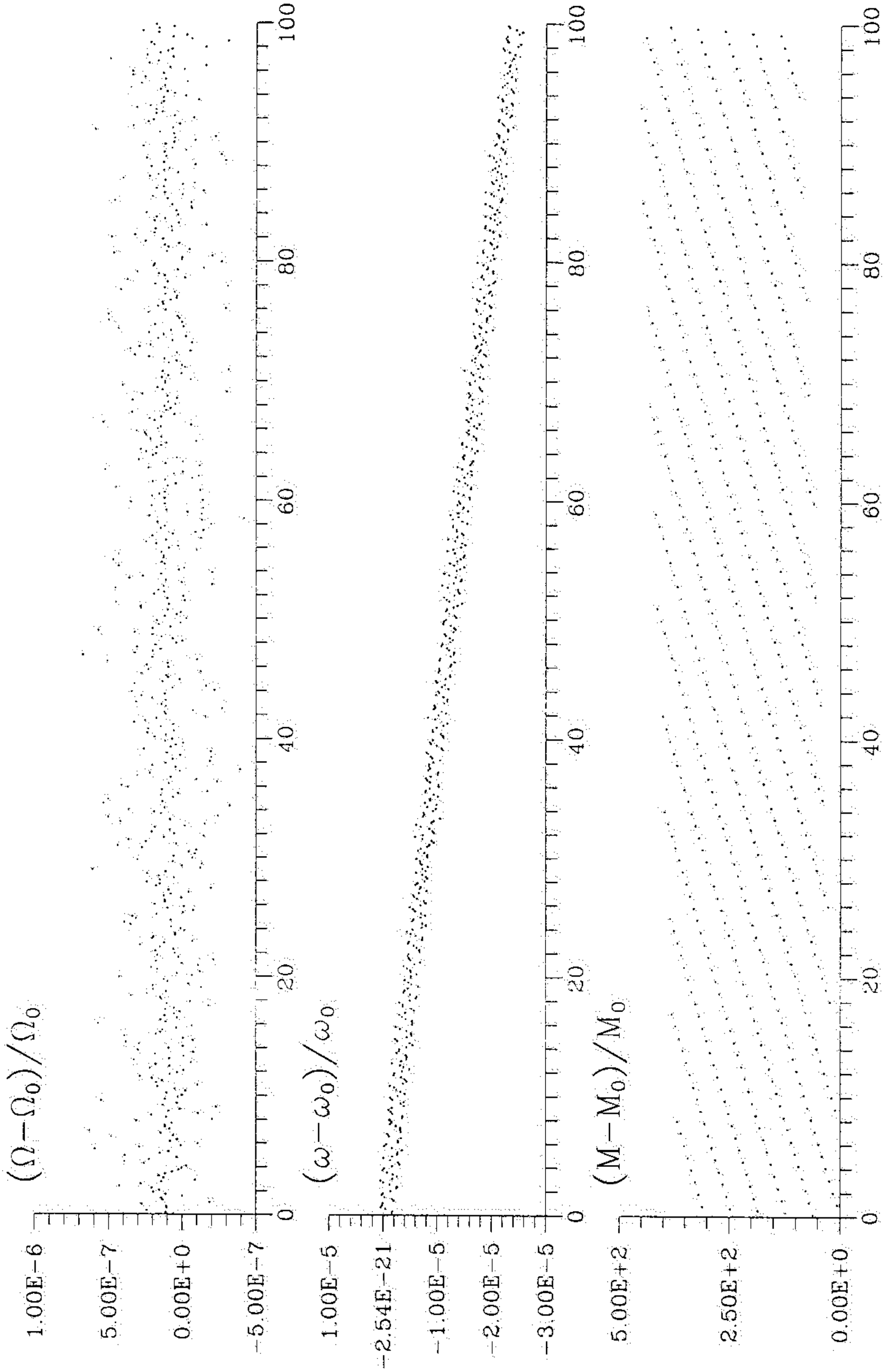


$(\Omega-\Omega_0)/\Omega_0$
1.00E-6
5.00E-7
0.00E+0
-5.00E-7
$(\omega-\omega_0)/\omega_0$
5.00E-3
0.00E+0
-5.00E-3
-1.00E-2
$(M-M_0)/M_0$
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

2Б-9 (интегратор осмог реда 8А)

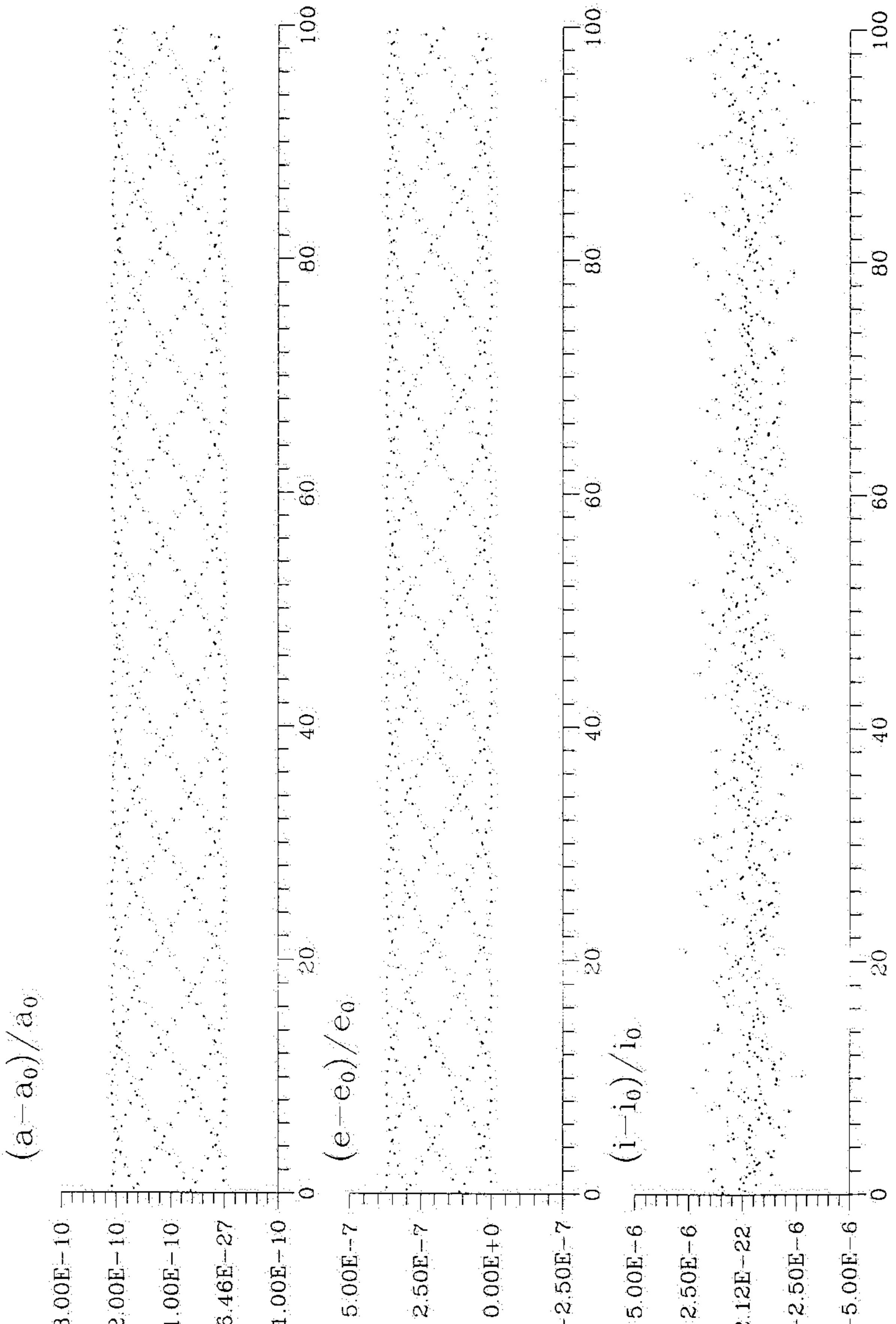


2Б-10

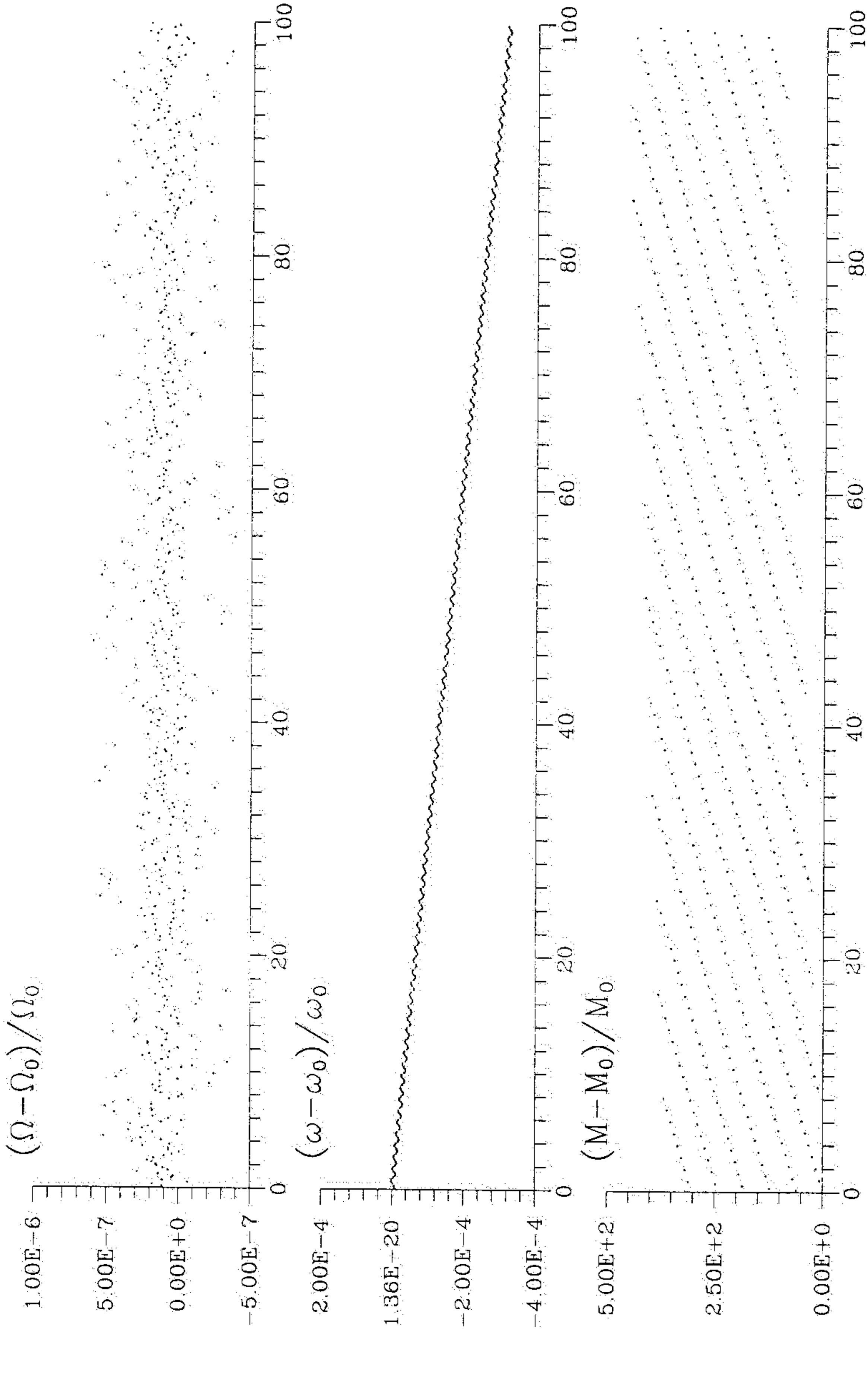


(Ω−Ω0)/Ω0
1.00E-6
5.00E-7
0.00E+0
-5.00E-7
(ω−ω0)/ω0
1.00E-5
-2.54E-21
-1.00E-5
-2.00E-5
-3.00E-5
(M−M0)/M0
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

2Б−11 (интегратор осмог реда 8Б)

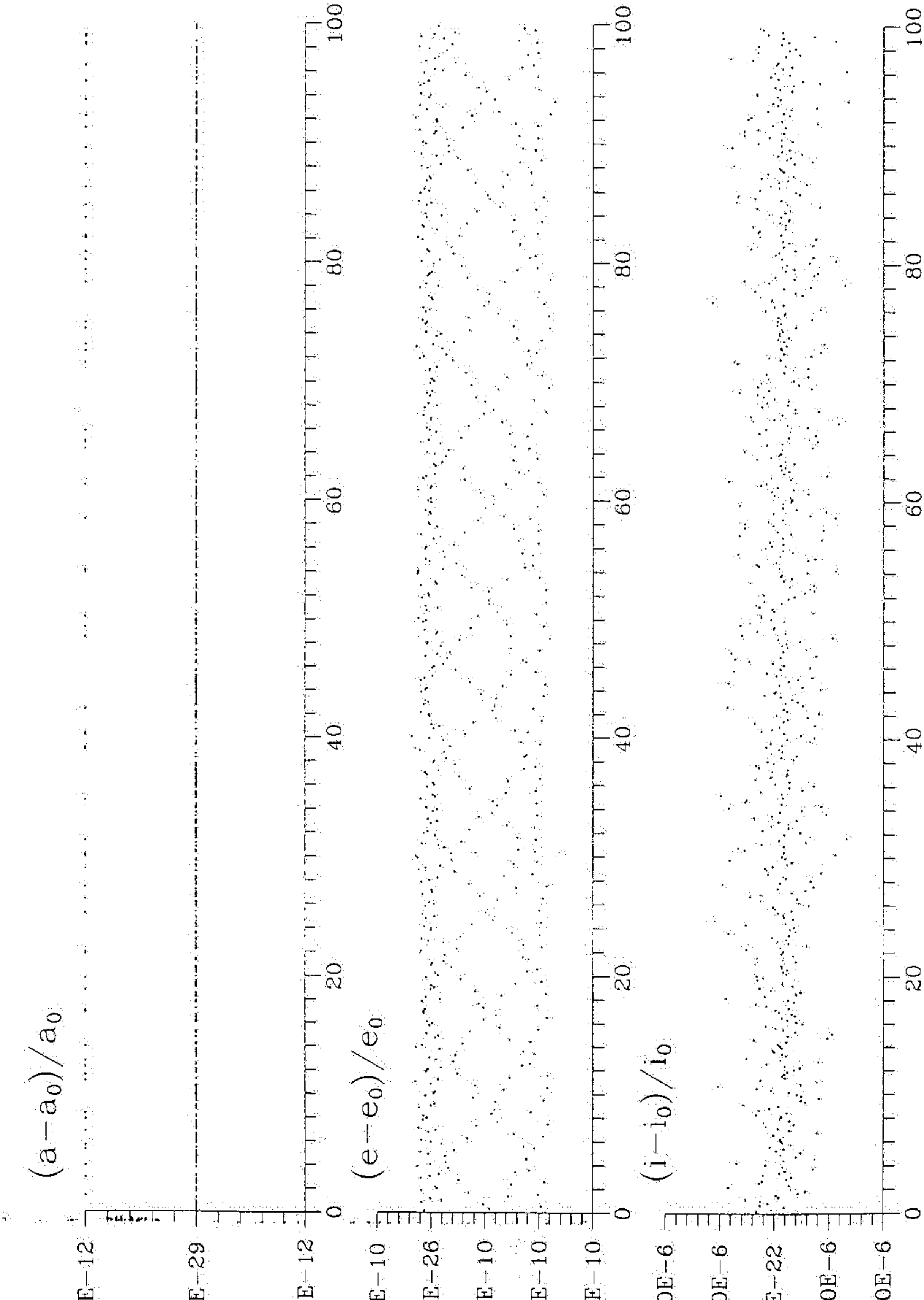


2Б-12

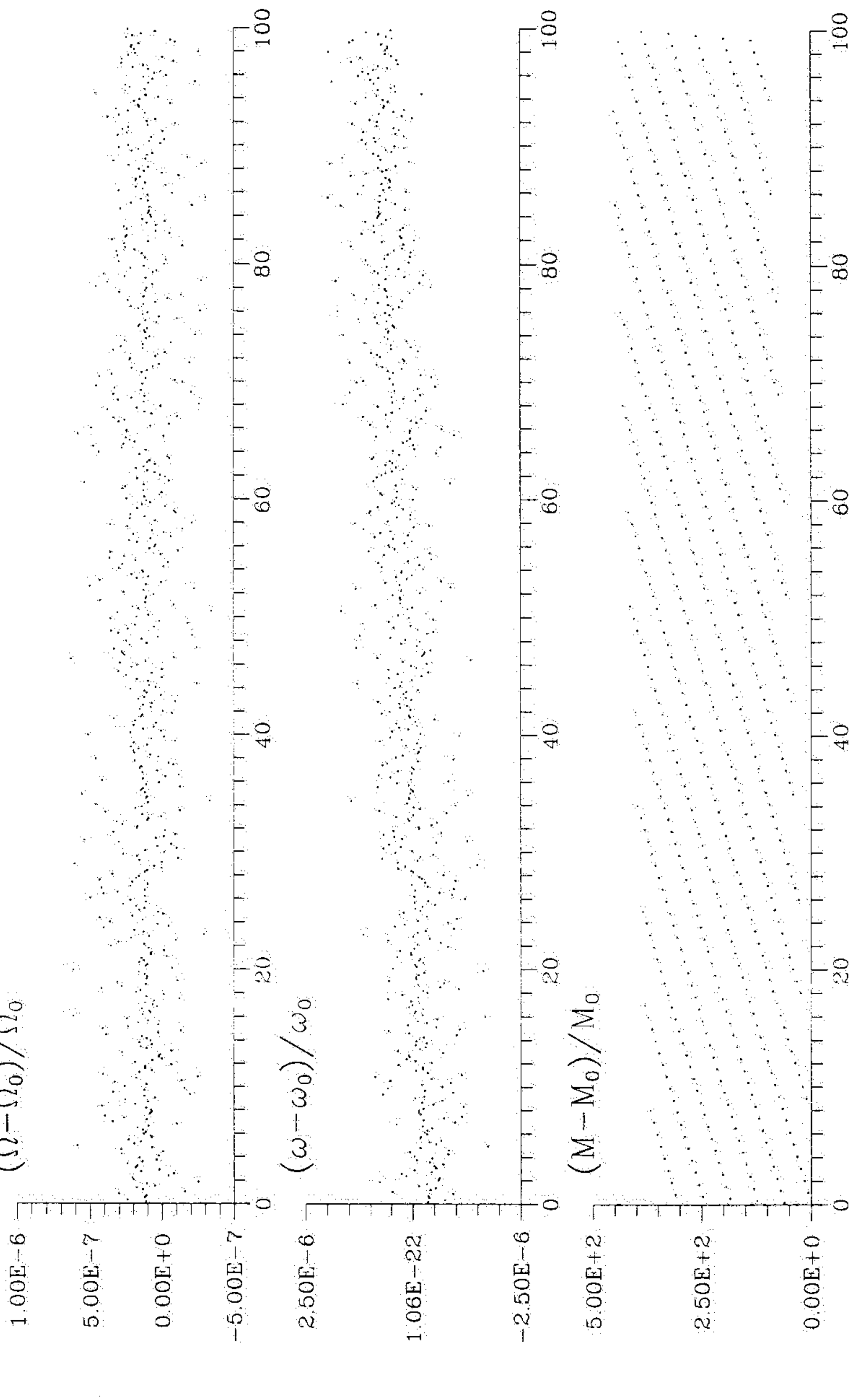


$(\Omega-\Omega_0)/\Omega_0$
1.00E-6
5.00E-7
0.00E+0
-5.00E-7
$(\omega-\omega_0)/\omega_0$
2.00E-4
1.36E-20
-2.00E-4
-4.00E-4
$(M-M_0)/M_0$
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

2Б−13 (интегратор осмог реда 8В)

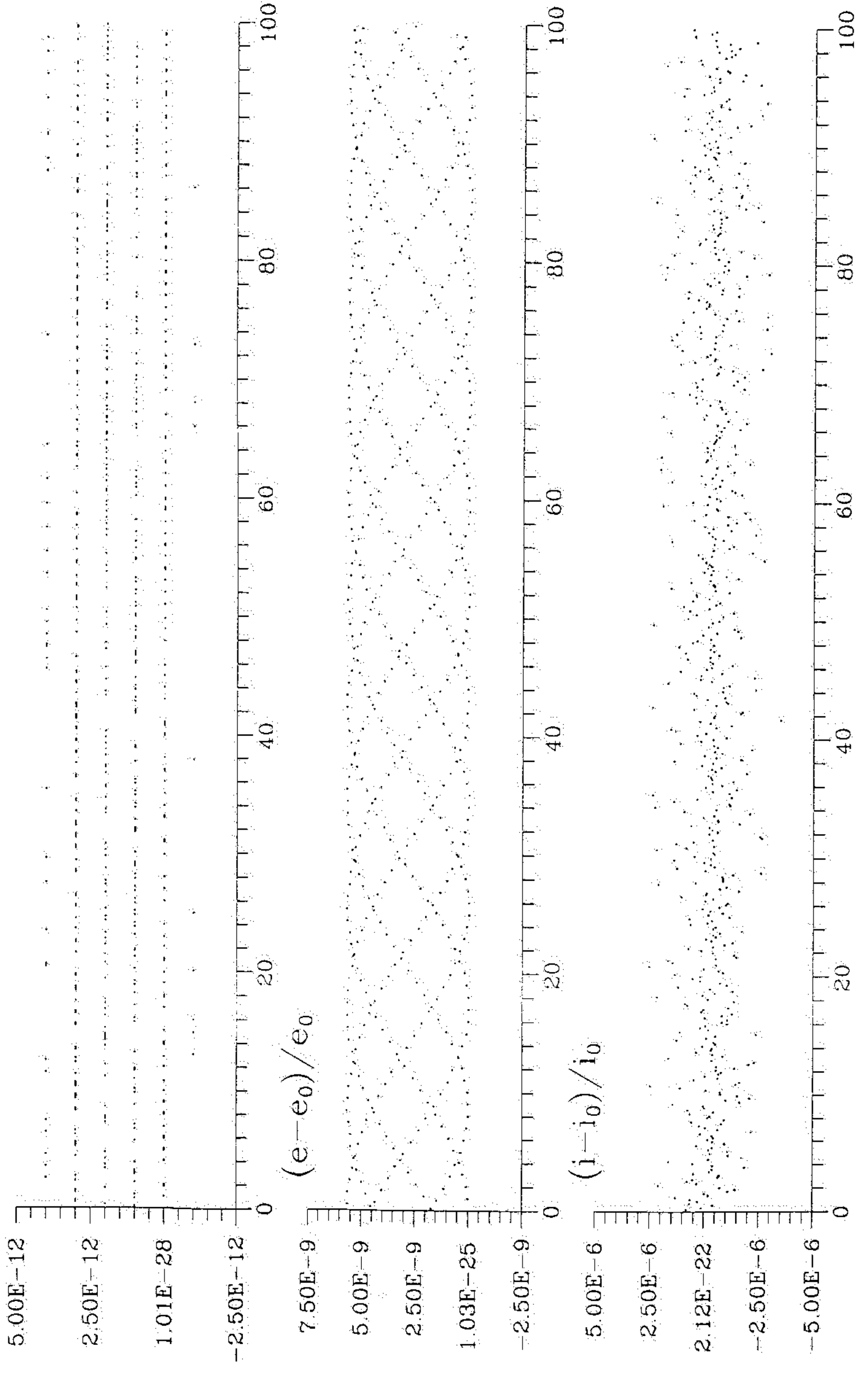


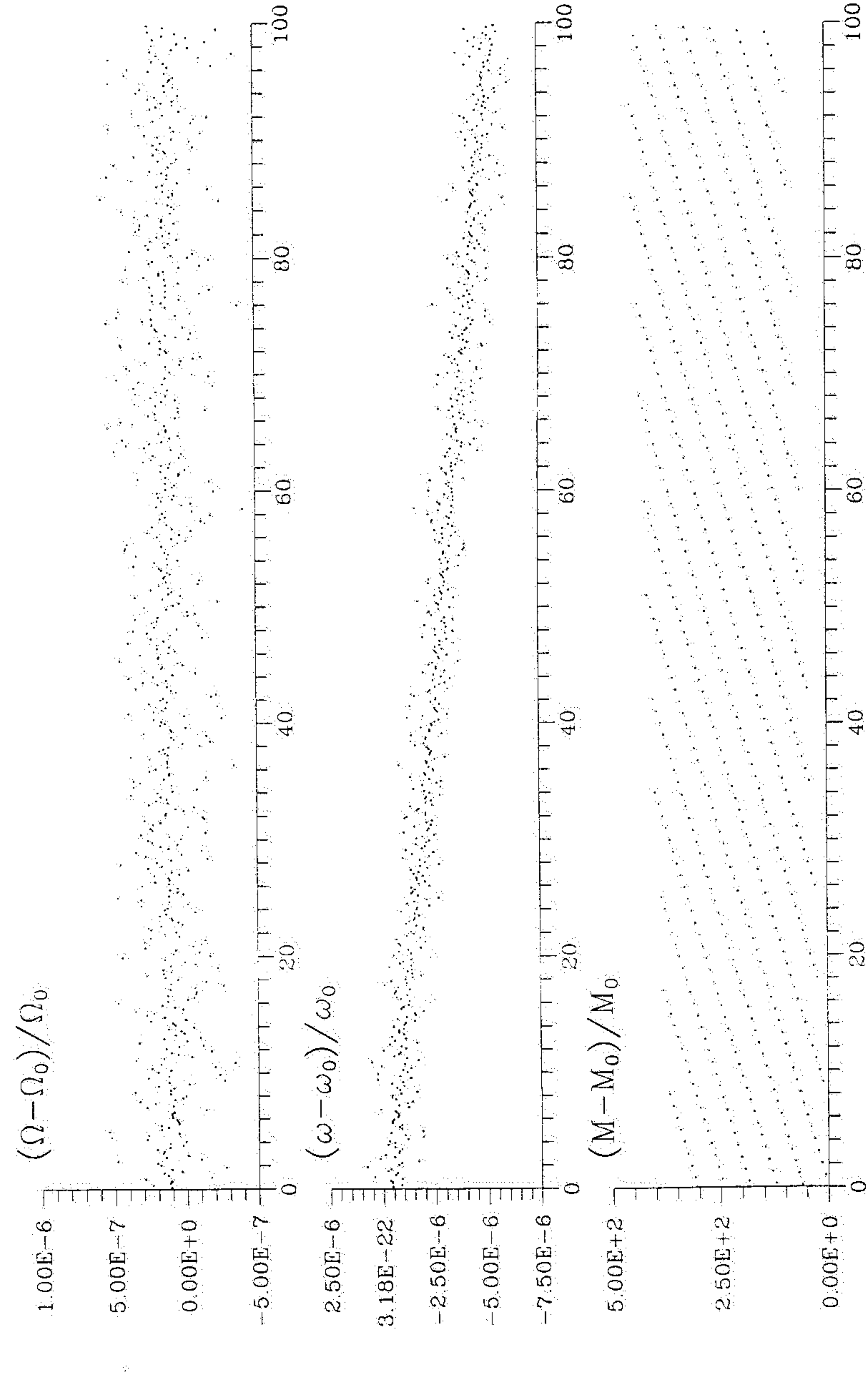
2Б−14



(Ω−Ω₀)/Ω₀
1.00E−6
5.00E−7
0.00E+0
−5.00E−7
0
20
40
60
80
100
(ω−ω₀)/ω₀
2.50E−6
1.06E−22
−2.50E−6
0
20
40
60
80
100
(M−M₀)/M₀
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

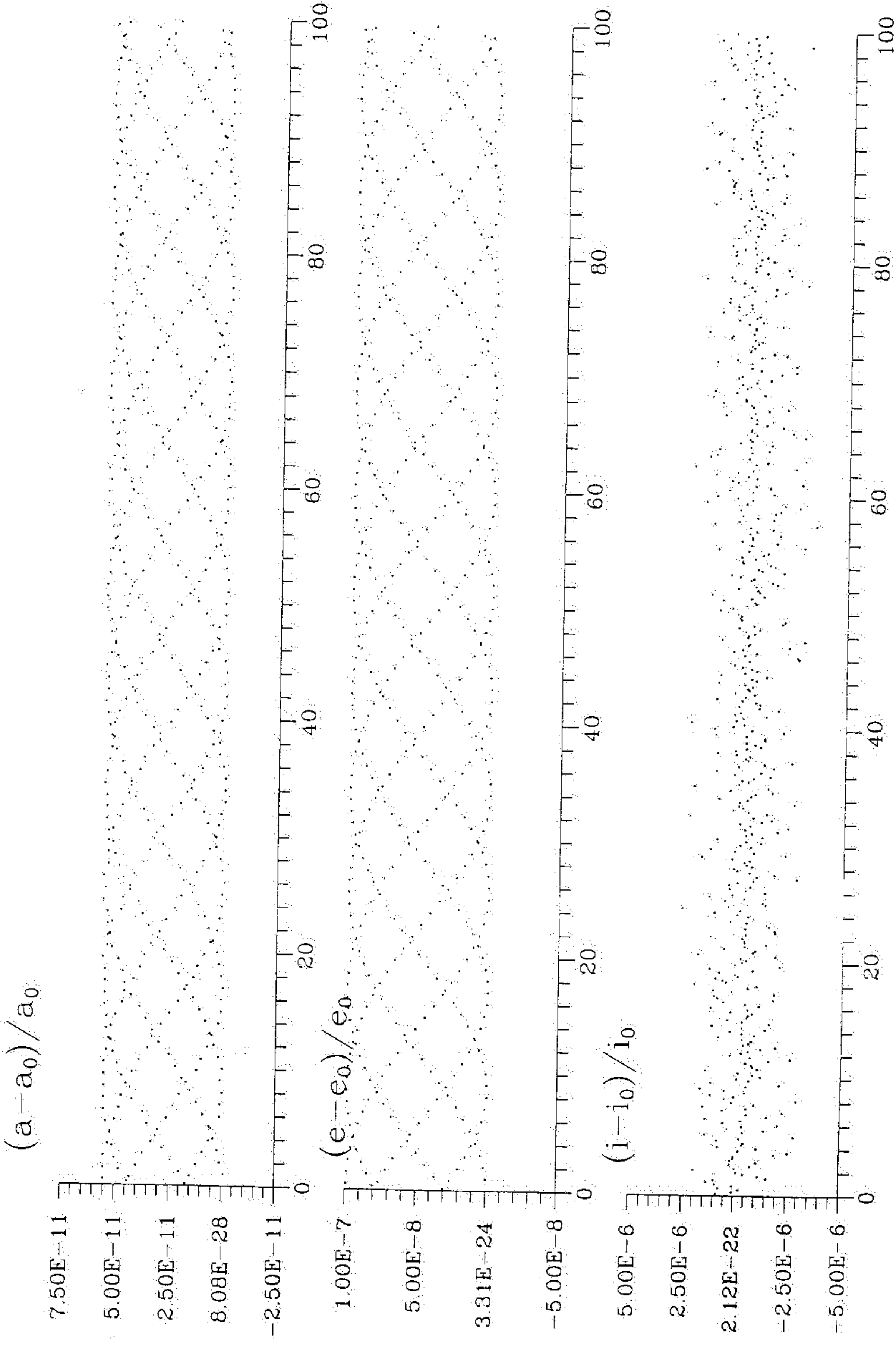
2Б−15 (интегратор осмог реда 8Г):



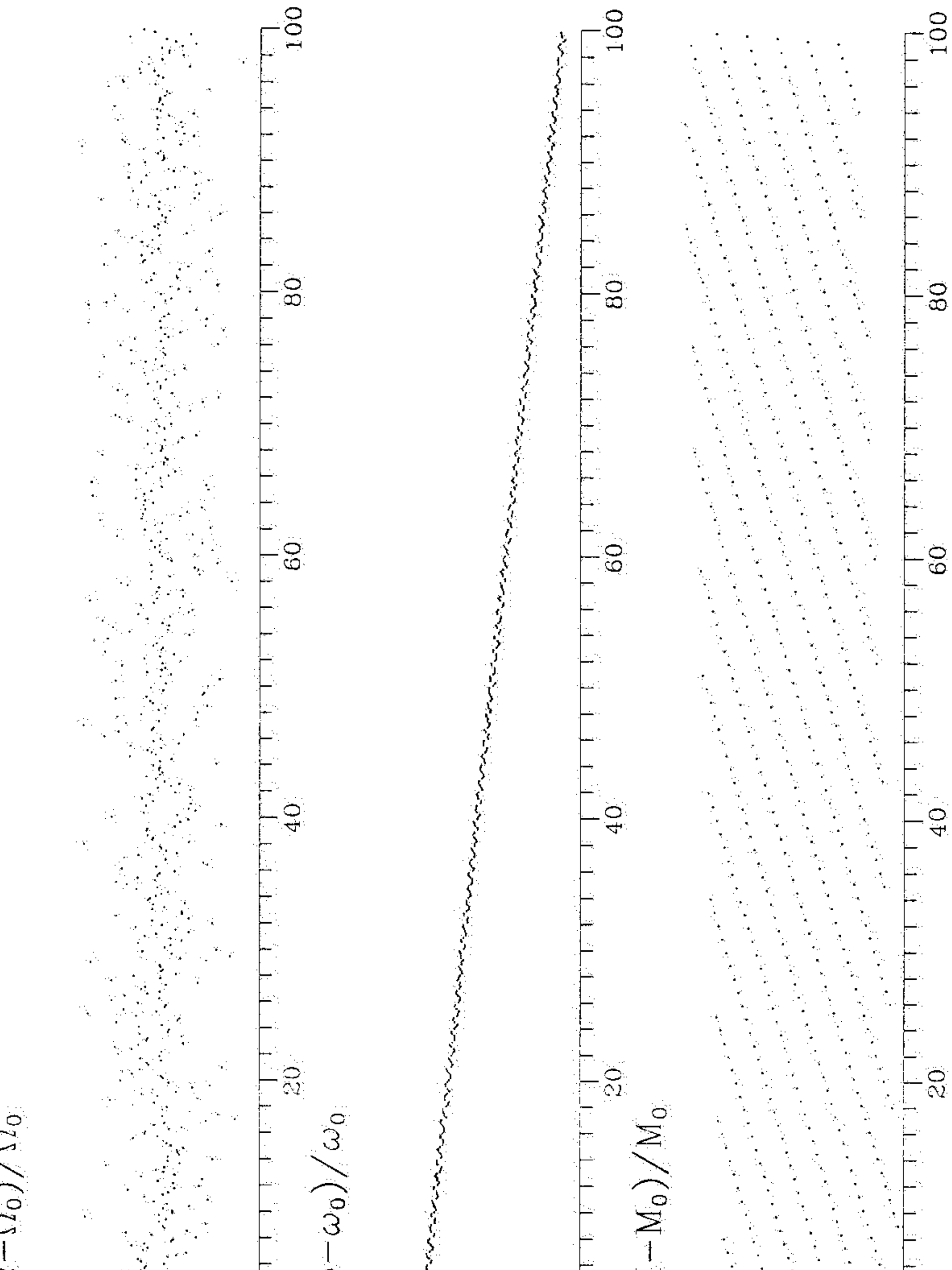


$(\Omega-\Omega_0)/\Omega_0$
1.00E-6
5.00E-7
0.00E+0
-5.00E-7
$(\omega-\omega_0)/\omega_0$
2.50E-6
3.18E-22
-2.50E-6
-5.00E-6
-7.50E-6
$(M-M_0)/M_0$
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

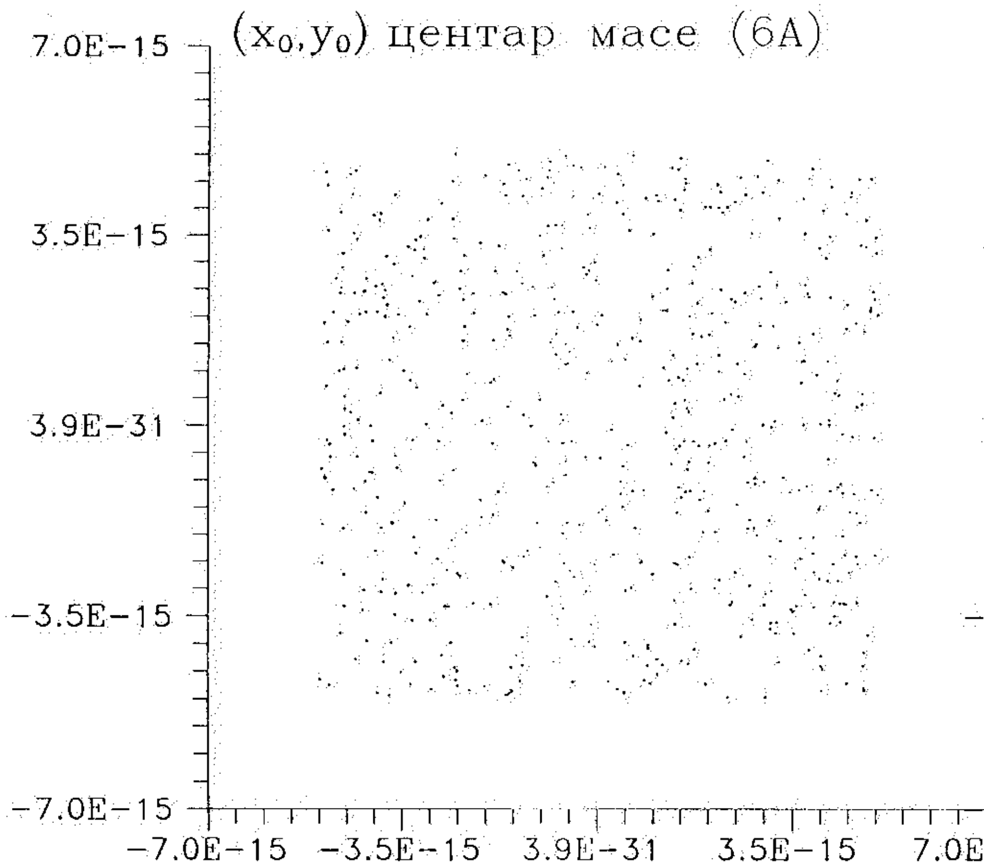
2Б-17 (интегратор осмог реда 8E)

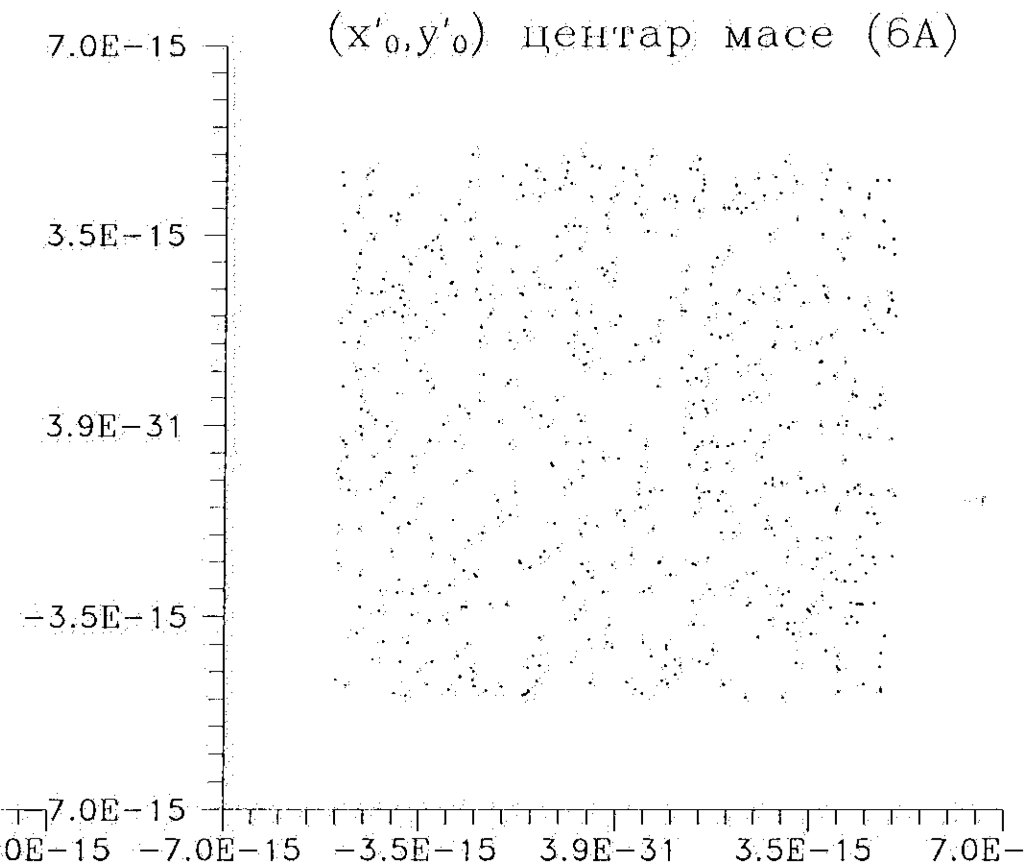


2Б−18

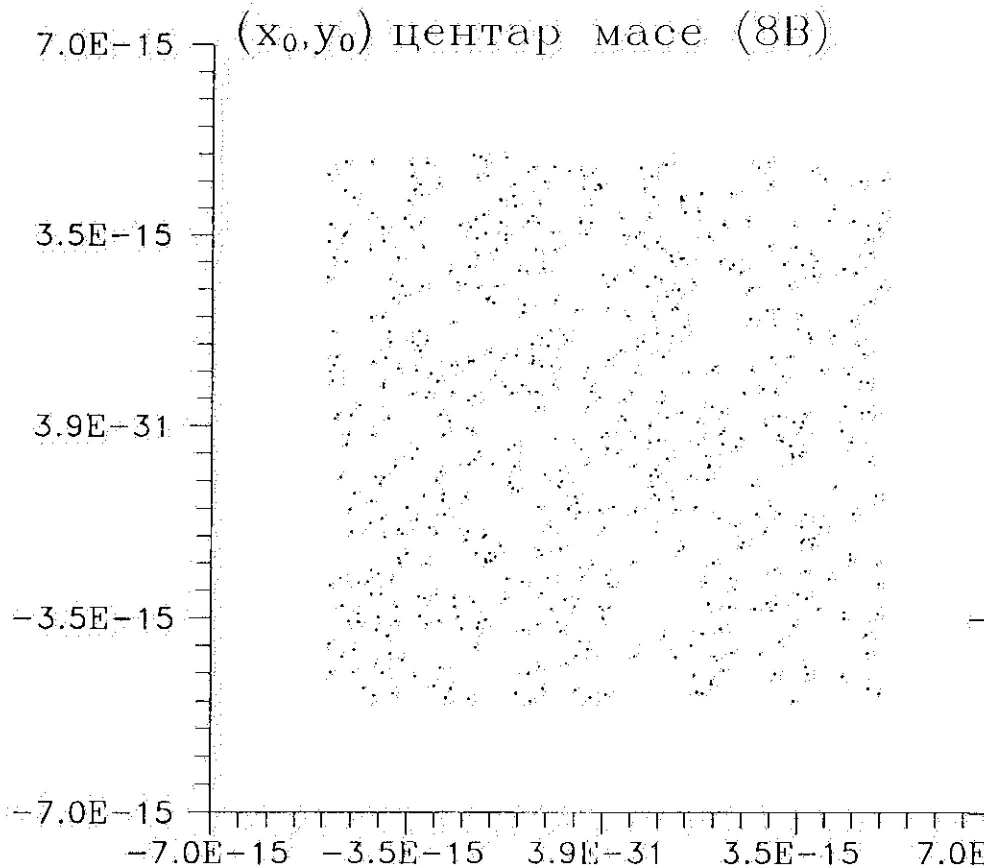


(Ω−Ω0)/Ω0
1.00E−6
5.00E−7
0.00E+0
−5.00E−7
(ω−ω0)/ω0
5.00E−5
3.39E−21
−5.00E−5
−1.00E−4
(M−M0)/M0
5.00E+2
2.50E+2
0.00E+0
0
20
40
60
80
100

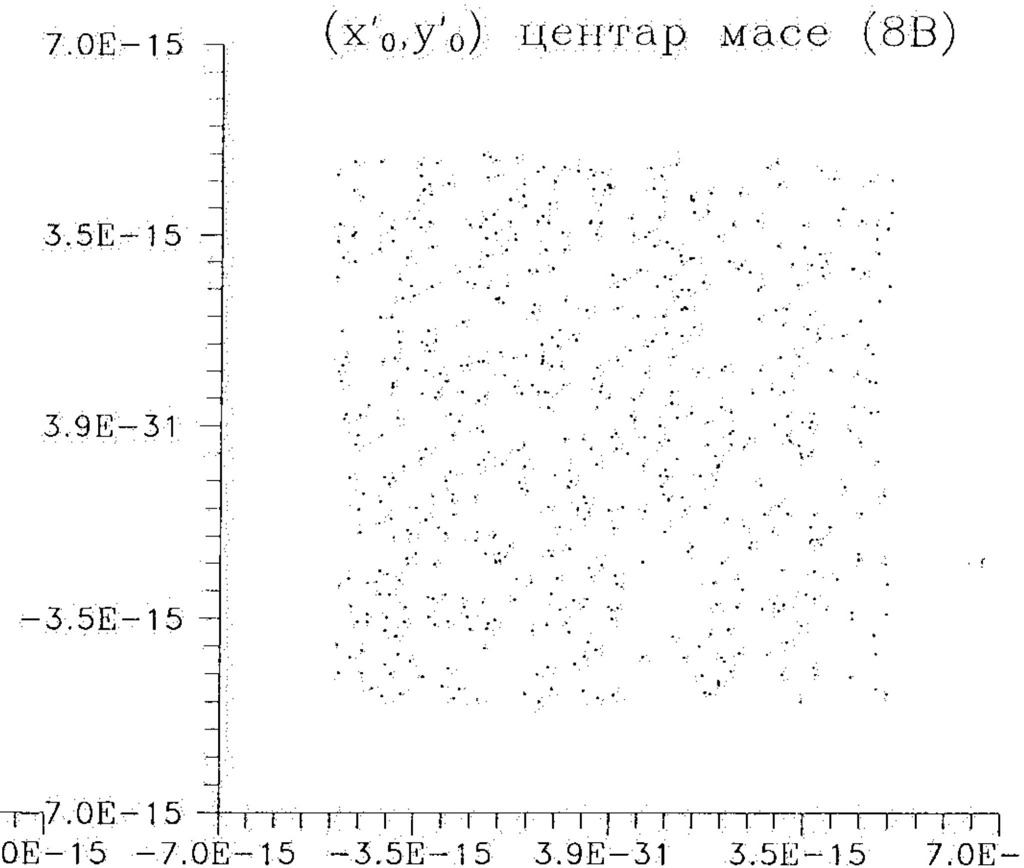

(x₀,y₀) центар масе (6A)
7.0E−15
3.5E−15
3.9E−31
−3.5E−15
−7.0E−15
7.0E−15


(x'₀,y'₀) центар масе (6A)
7.0E−15
3.5E−15
3.9E−31
−3.5E−15
−7.0E−15
7.0E−1

2Б-20



(x₀,y₀) центар масе (8B)
7.0E-15
3.5E-15
3.9E-31
-3.5E-15
-7.0E-15
-7.0E-15
-3.5E-15
3.9E-31
3.5E-15
7.0E-15



(x'₀,y'₀) центар масе (8B)
7.0E-15
3.5E-15
3.9E-31
-3.5E-15
-7.0E-15
-7.0E-15
-3.5E-15
3.9E-31
3.5E-15
7.0E-1

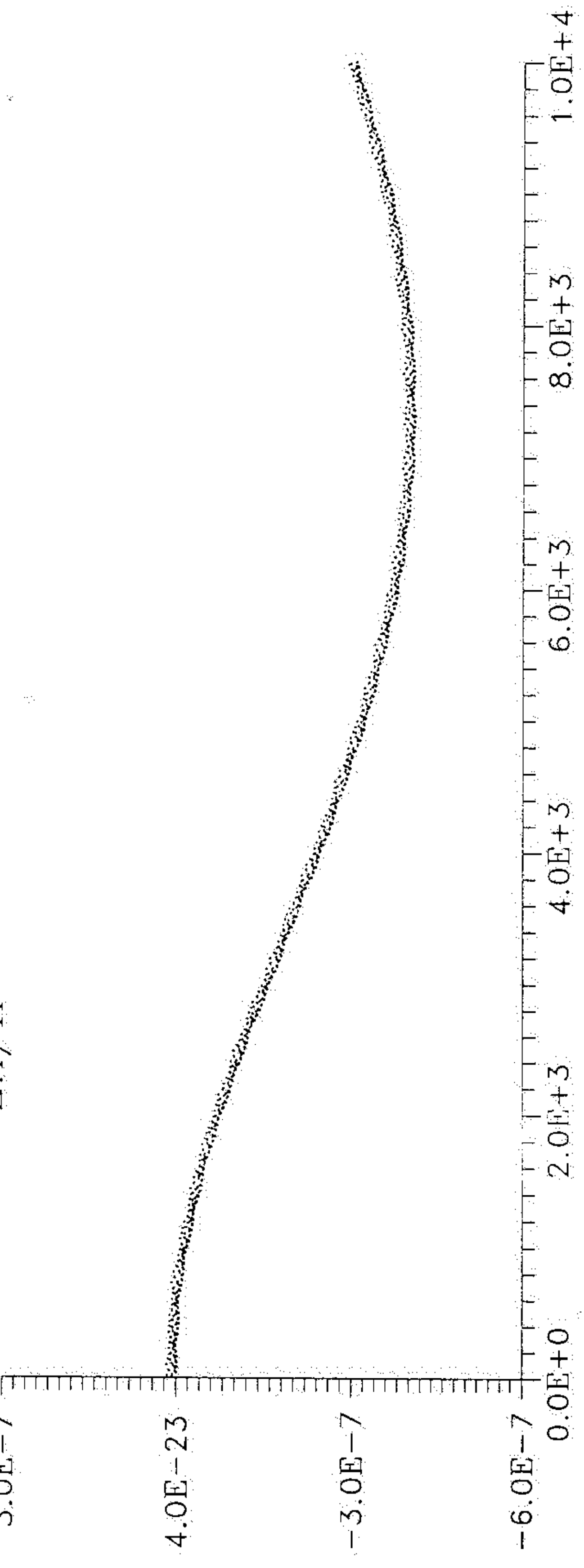
ПРИЛОГ 2В

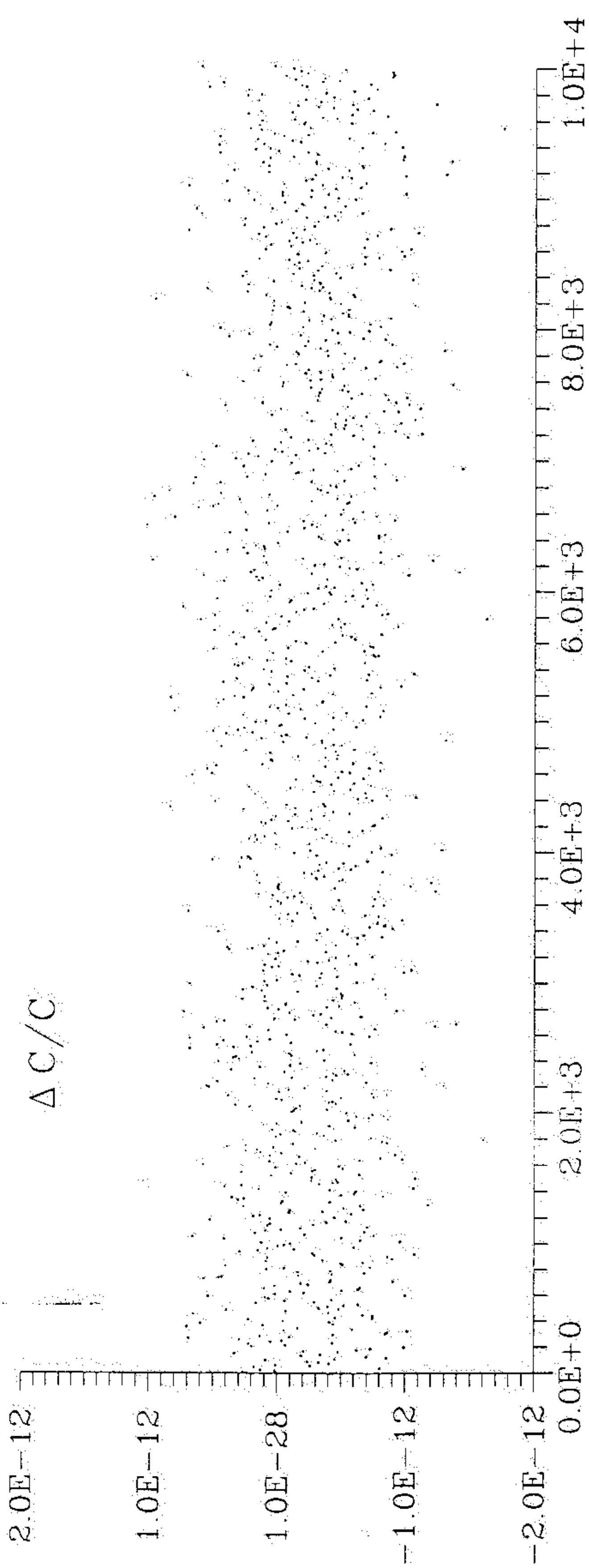
ГРАФИЦИ ИНТЕГРАЦИЈЕ ПРОБЛЕМА ПЕТ ТЕЛА

(Сунце + Земља + Марс + Јупитер + Сатурн)

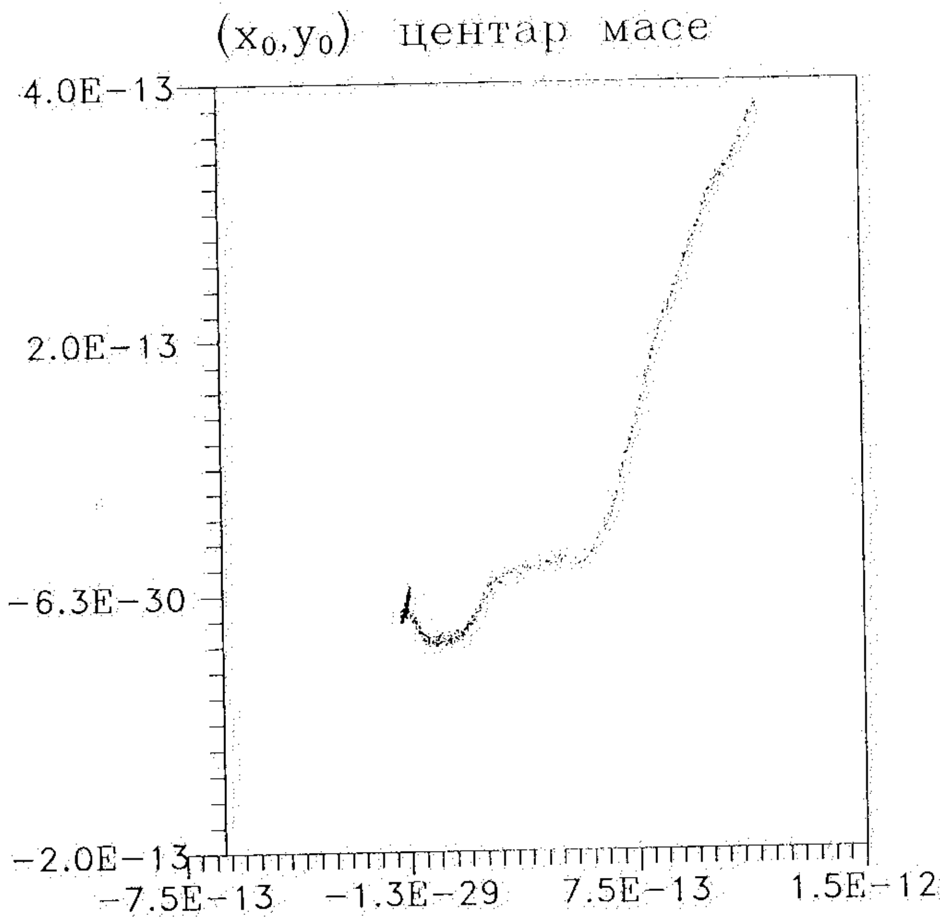
Приказане су релативне грешке у првим интегралима и то: у интегралу енергије, у интегралу угаоног момента и пројекције положаја и брзине барицентра на екваторску раван.

2B-1 (интегратор четвртог реда)

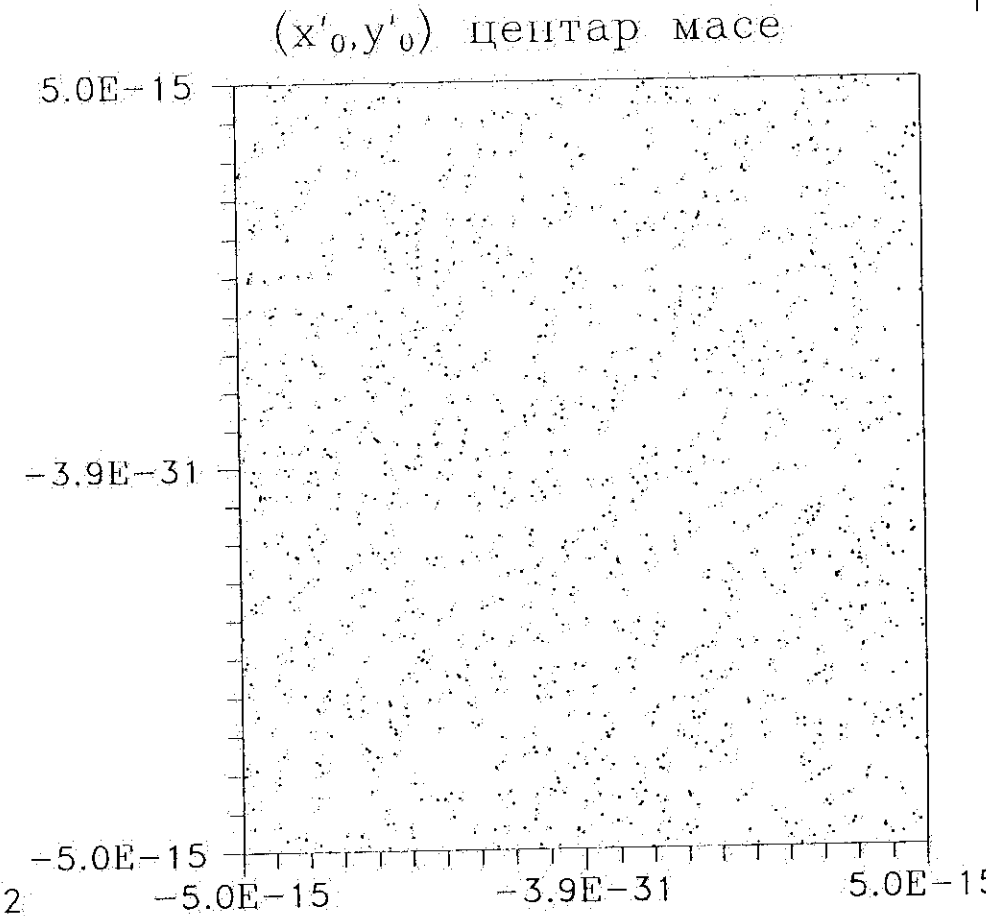




2B-2

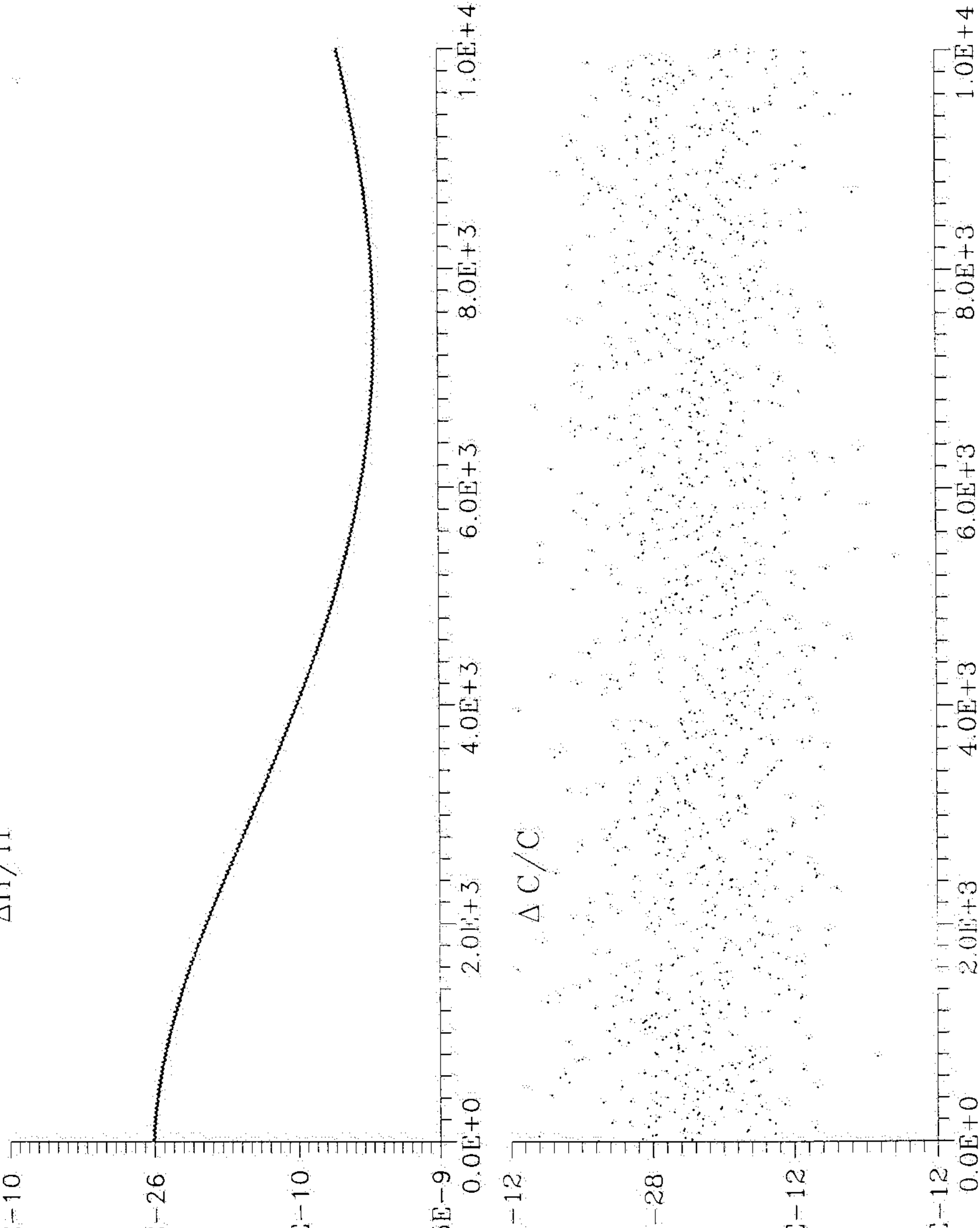


(x₀,y₀) центар масе
4.0E-13
2.0E-13
-6.3E-30
-2.0E-13
-7.5E-13
-1.3E-29
7.5E-13
1.5E-12

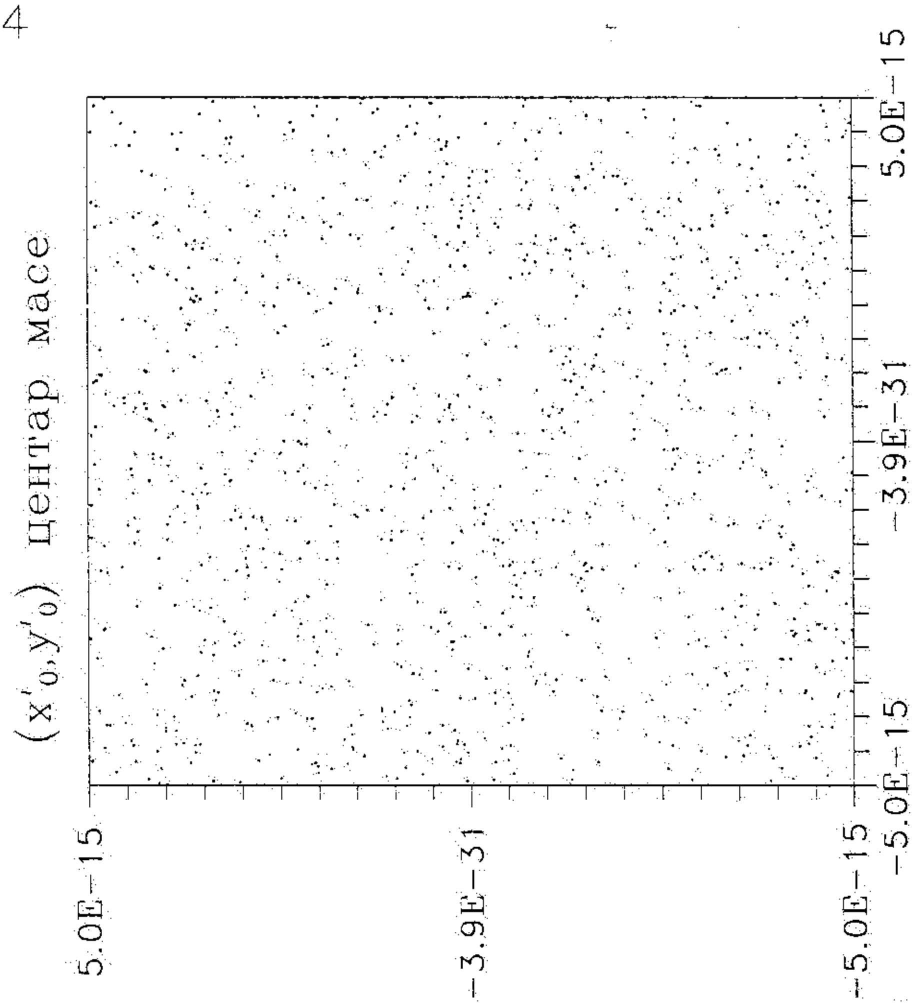


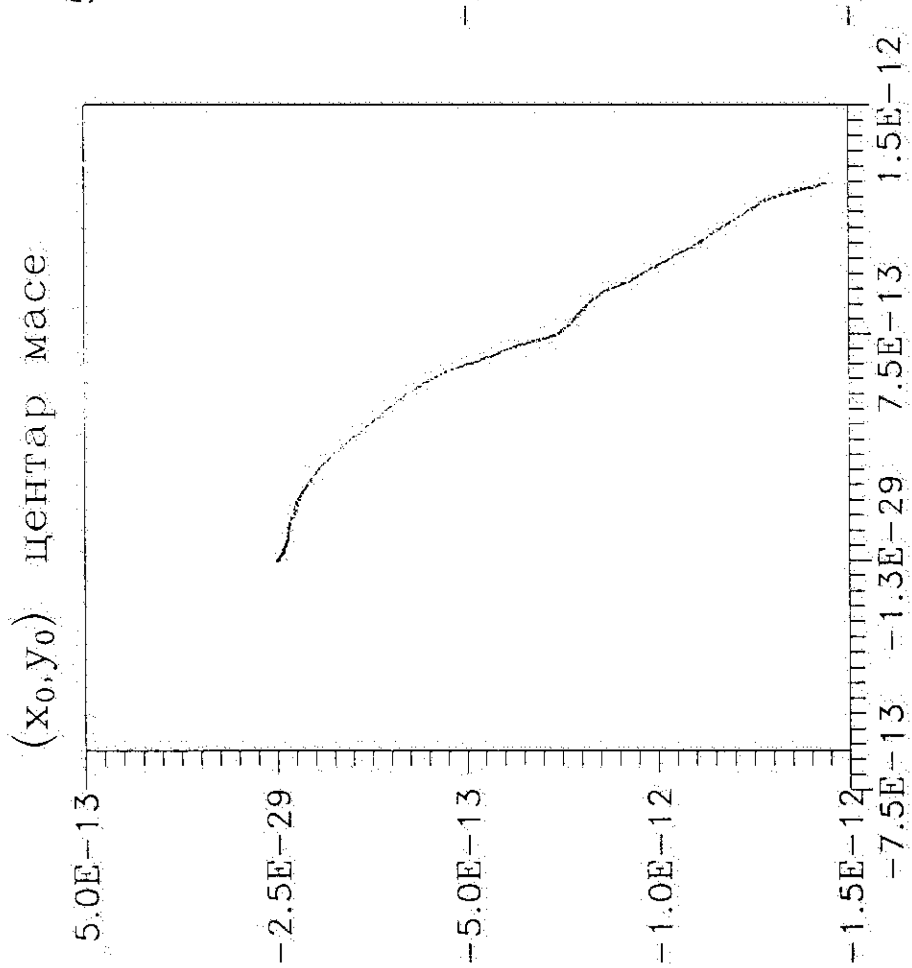
(x'₀,y'₀) центар масе
5.0E-15
-3.9E-31
-5.0E-15
-5.0E-15
-3.9E-31
5.0E-15

2B-3 (интегратор шестог реда 6A)

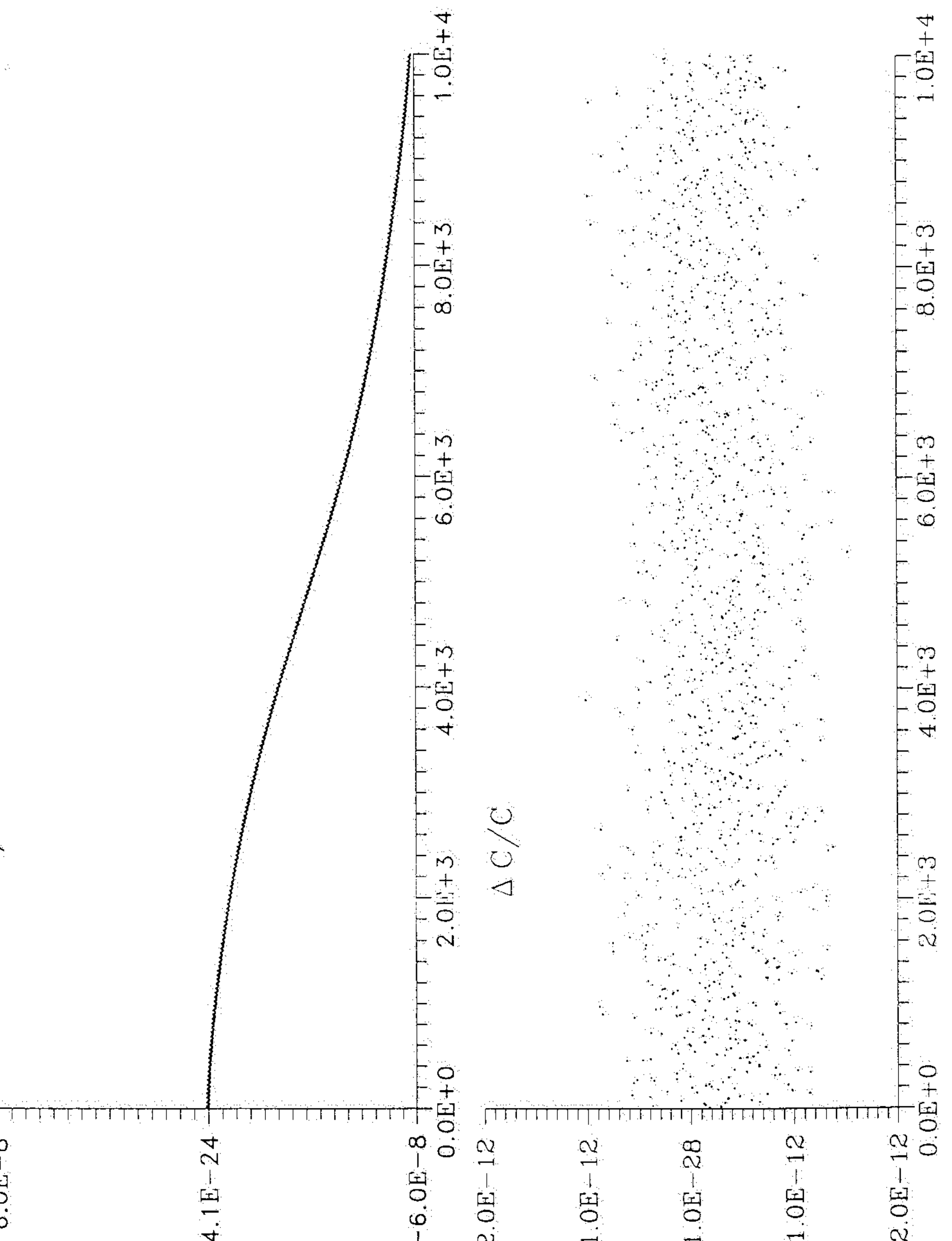


2B−4

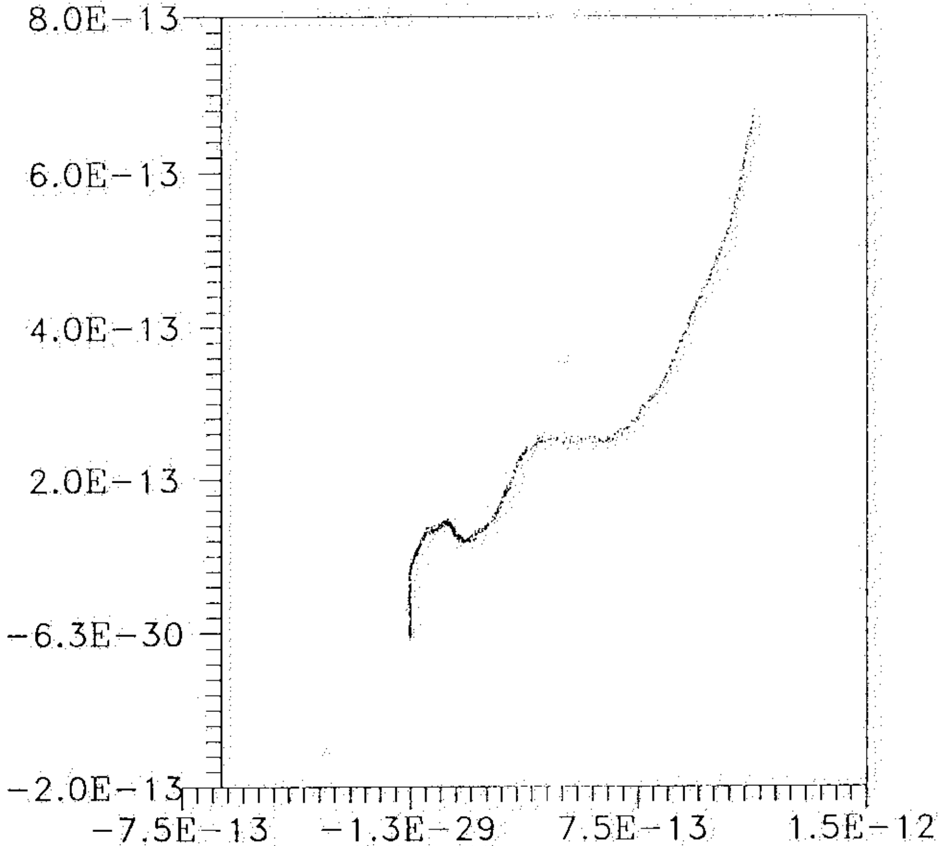

(x'0,y'0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15


(x0,y0) центар масе
5.0E−13
−2.5E−29
−5.0E−13
−1.0E−12
−1.5E−12
−7.5E−13
−1.3E−29
7.5E−13
1.5E−12

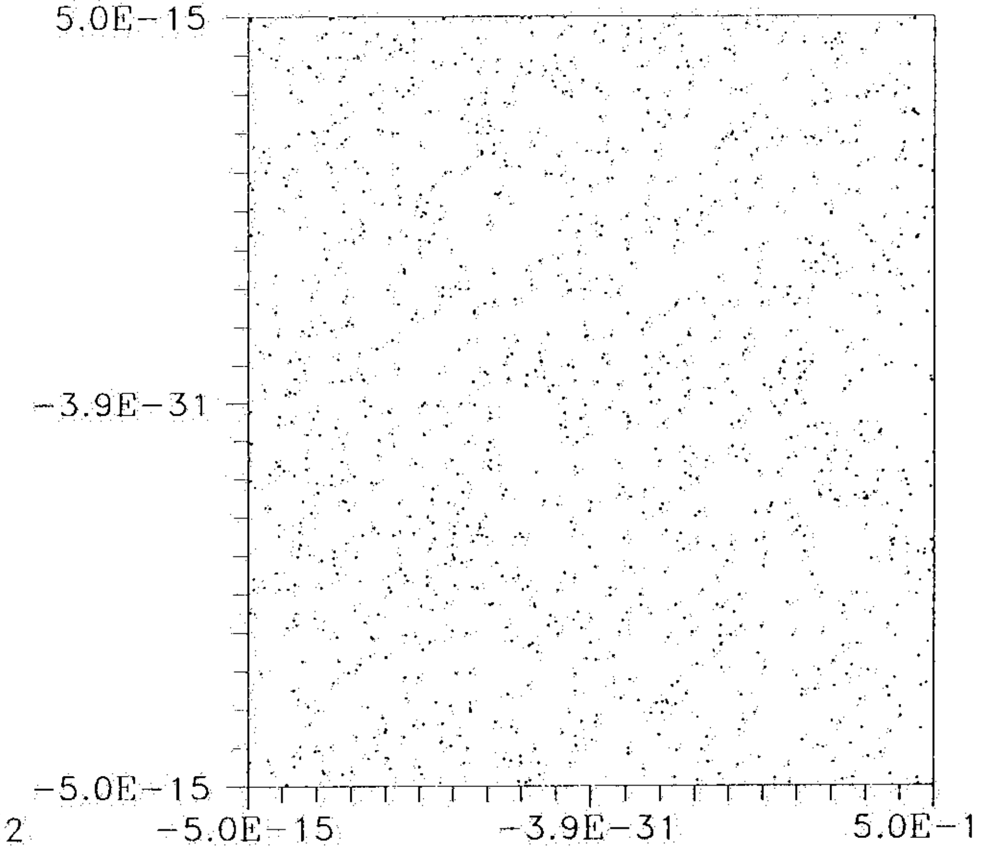
2B−5 (интегратор шестог реда 6Б)



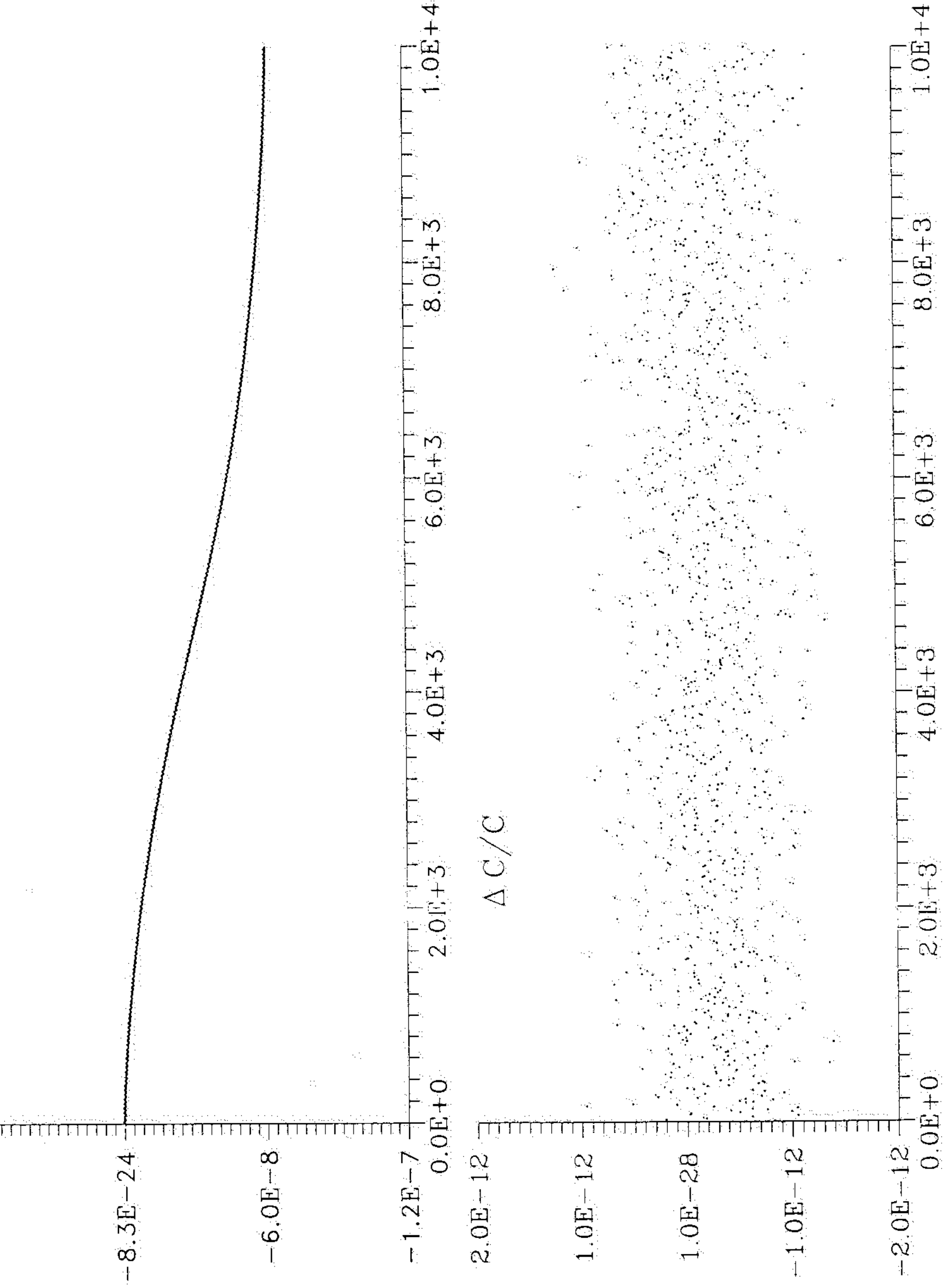
(x_0, y_0) центар масе



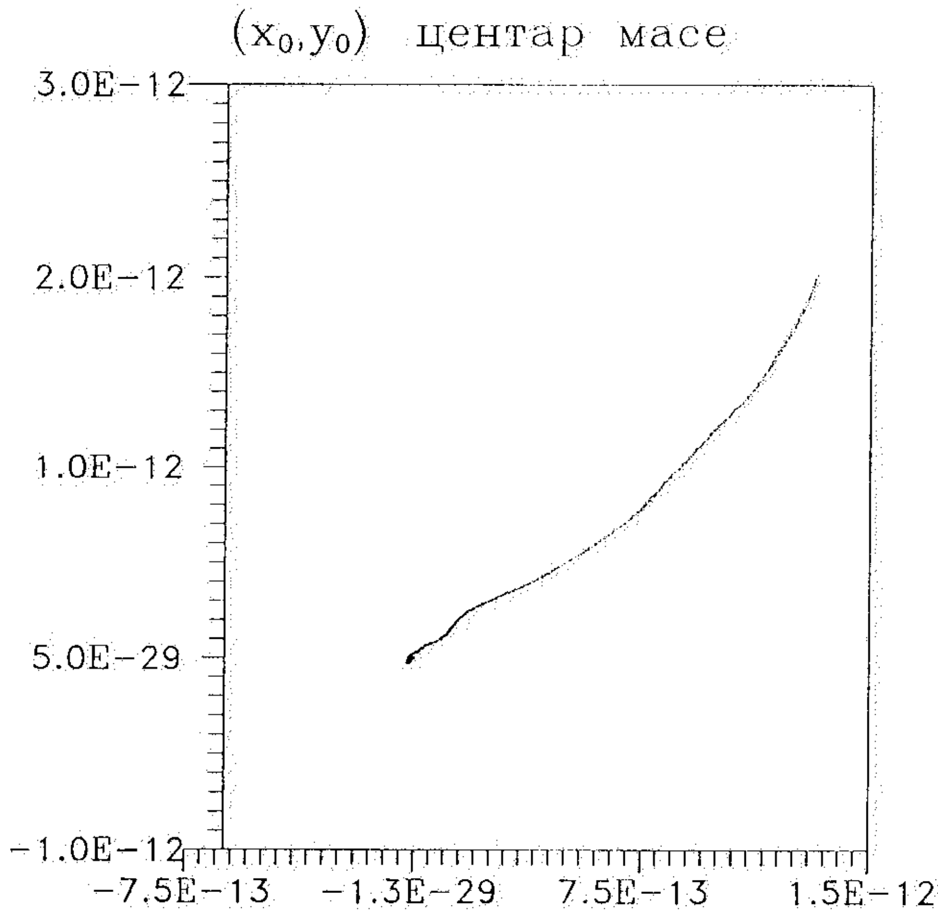
(x'_0, y'_0) центар масе



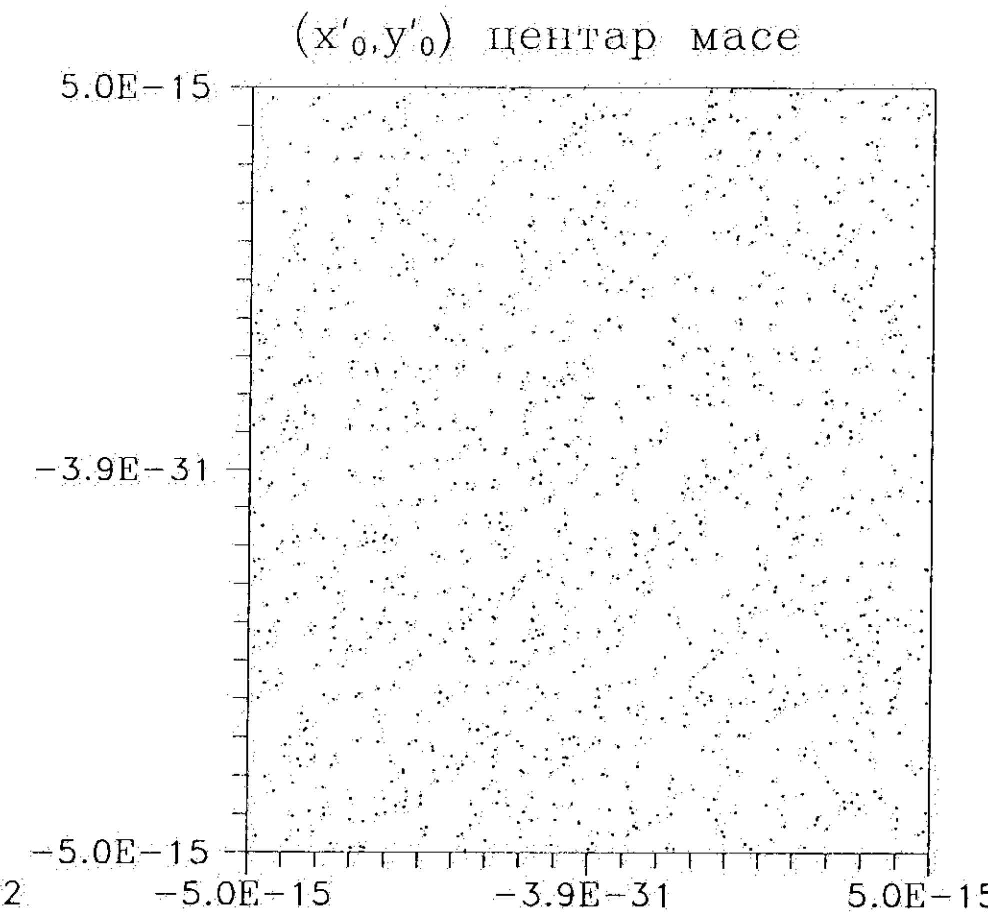
2B−7 (интегратор шестог реда 6B)



2B-8

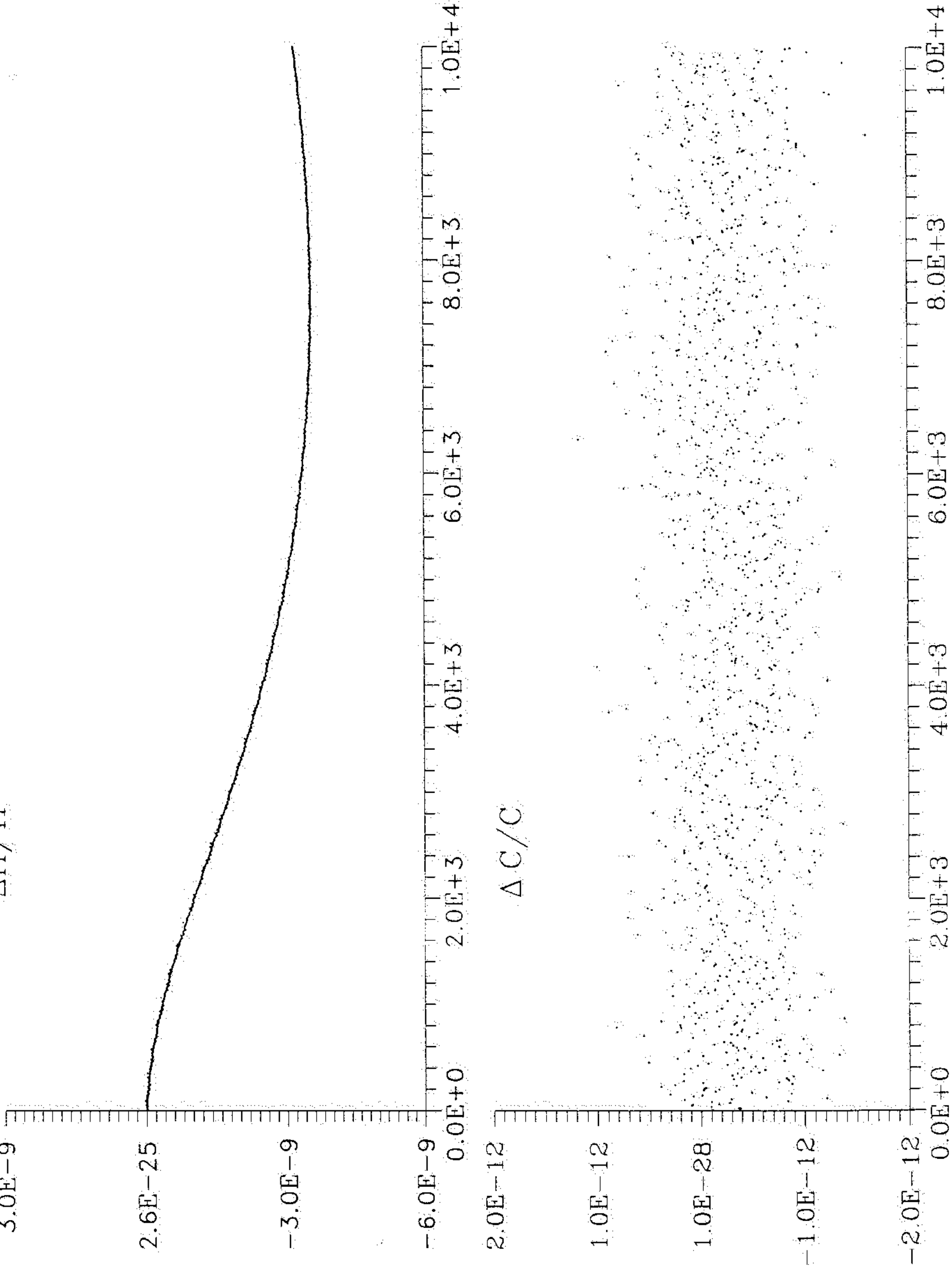


(x₀,y₀) центар масе
3.0E-12
2.0E-12
1.0E-12
5.0E-29
-1.0E-12
-7.5E-13
-1.3E-29
7.5E-13
1.5E-12

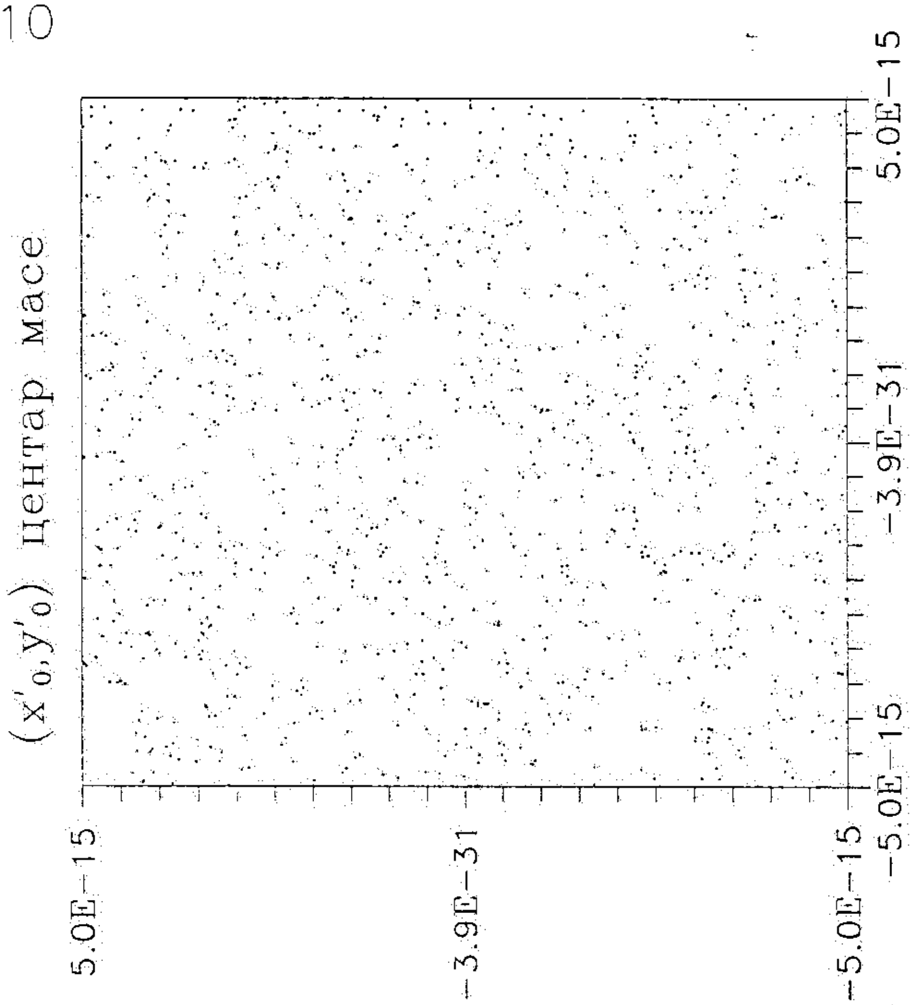


(x'₀,y'₀) центар масе
5.0E-15
-3.9E-31
-5.0E-15
-5.0E-15
-3.9E-31
5.0E-15

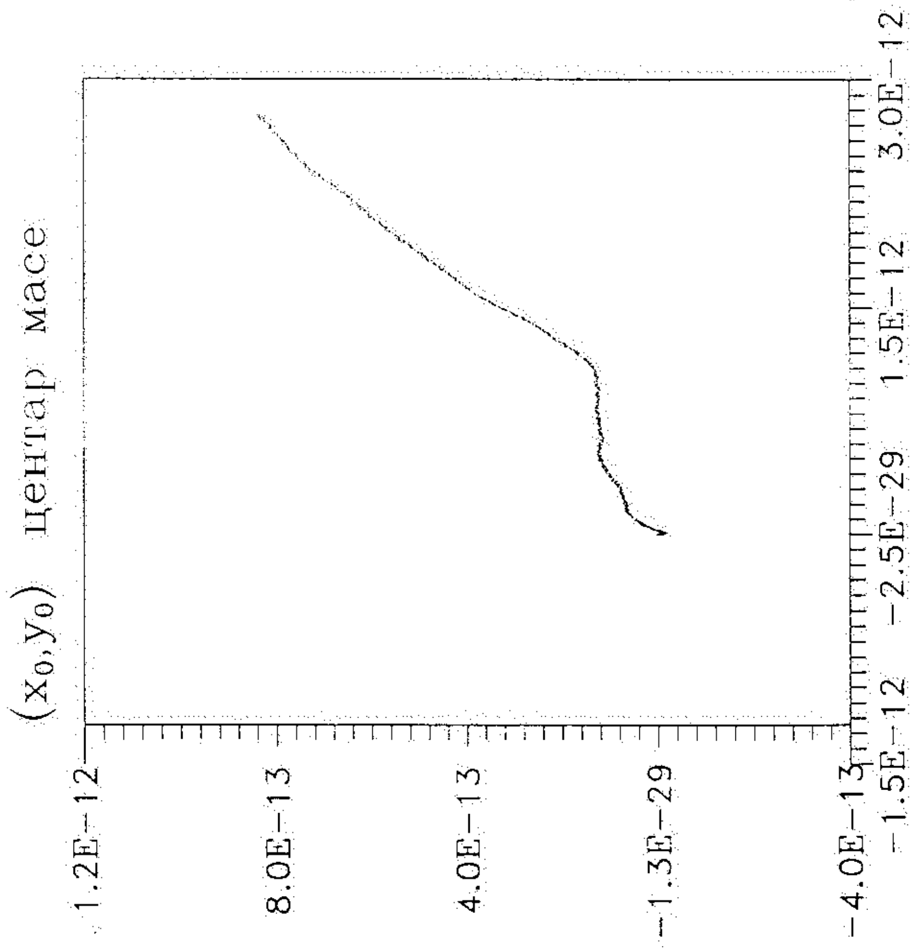
2B−9 (интегратор осмог реда 8А)



2B−10

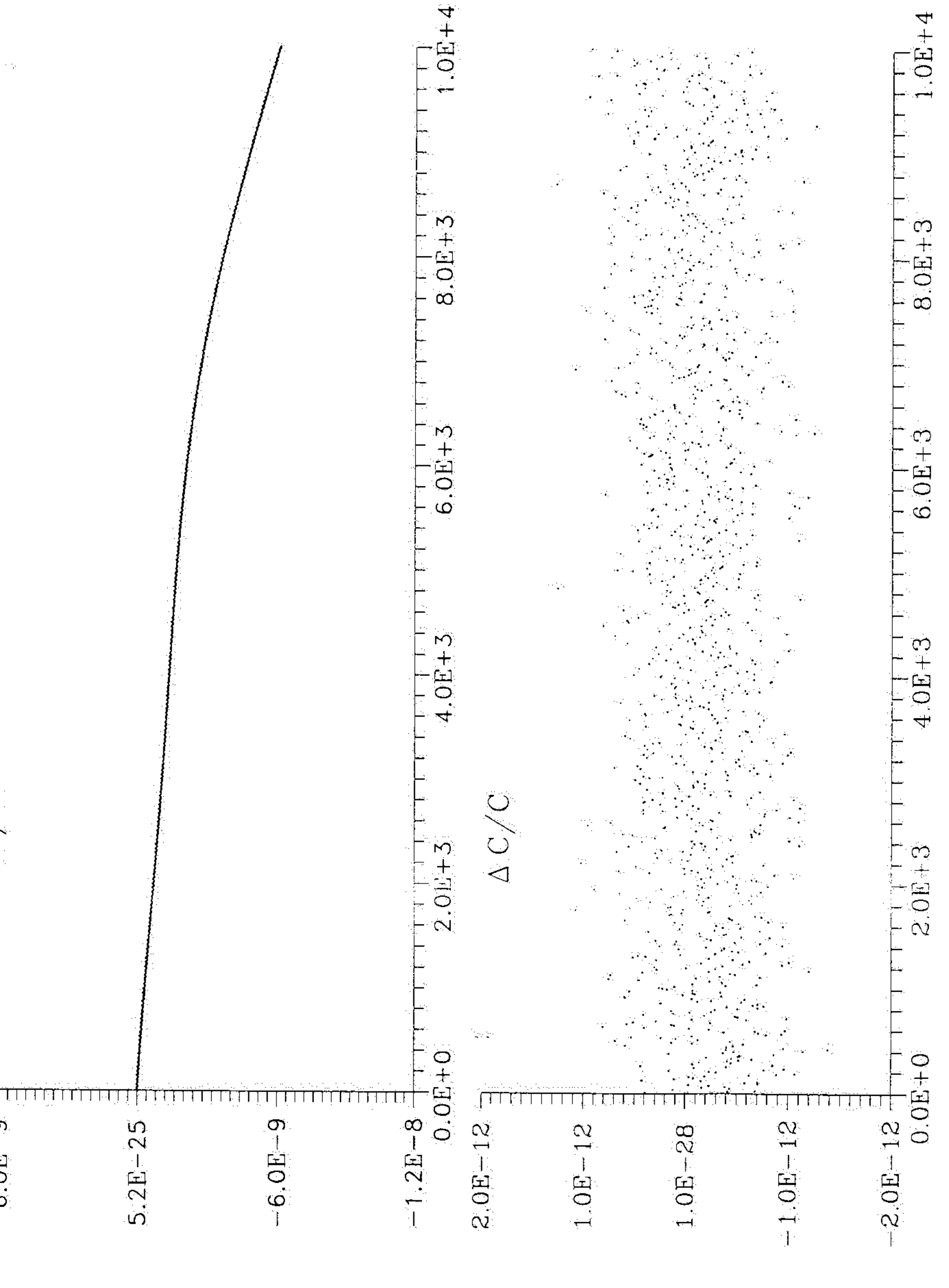


(x'_0,y'_0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
−5.0E−15
−3.9E−31
5.0E−15

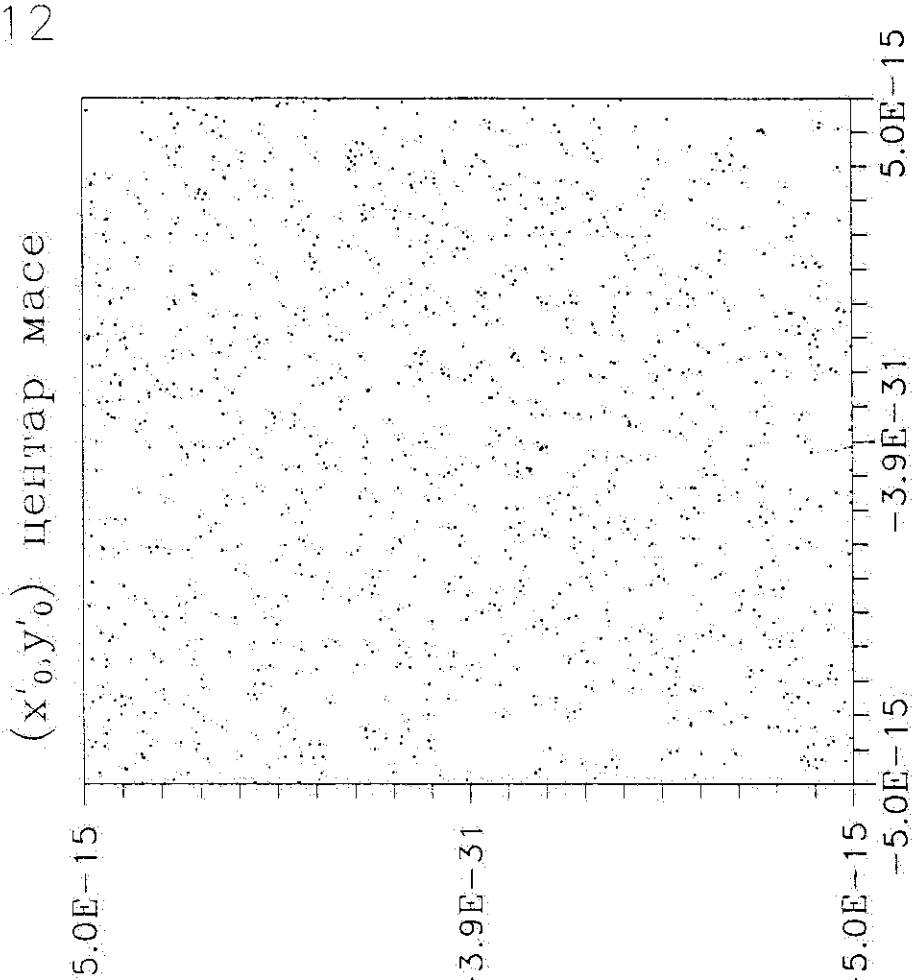


(x_0,y_0) центар масе
1.2E−12
8.0E−13
4.0E−13
−1.3E−29
−4.0E−13
−1.5E−12
−2.5E−29
1.5E−12
3.0E−12

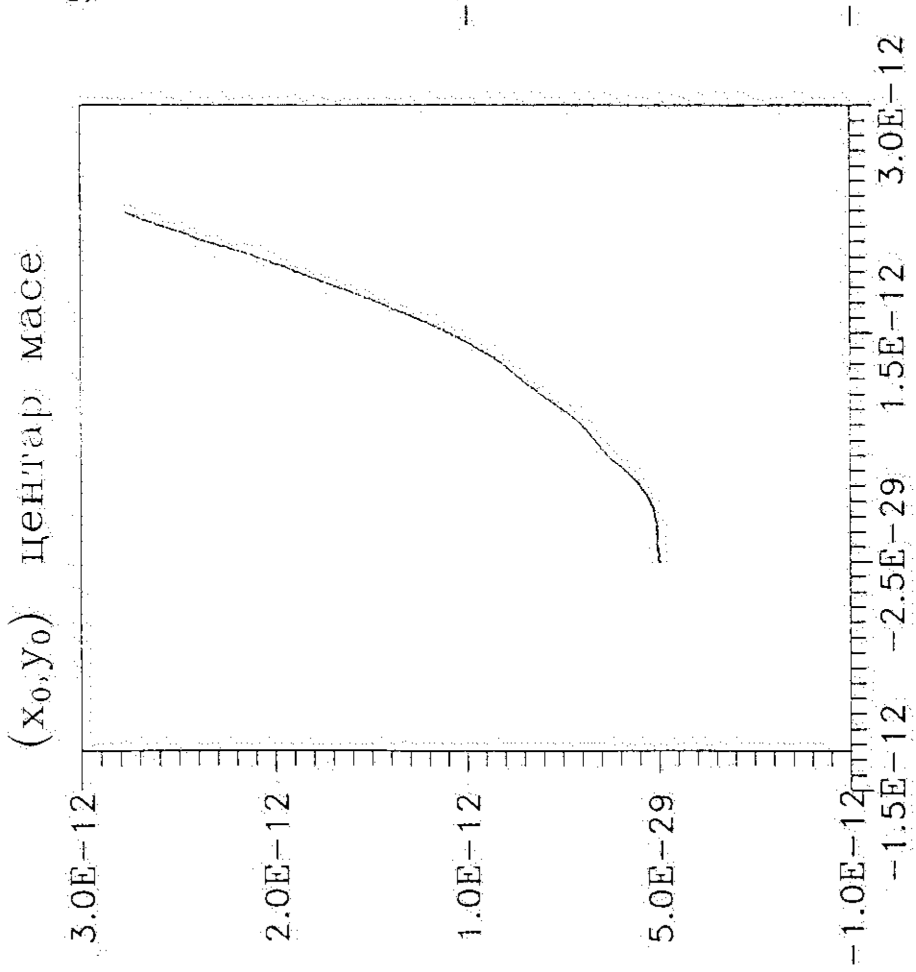
2B−11 (интегратор осмог реда 8Б)



2B−12

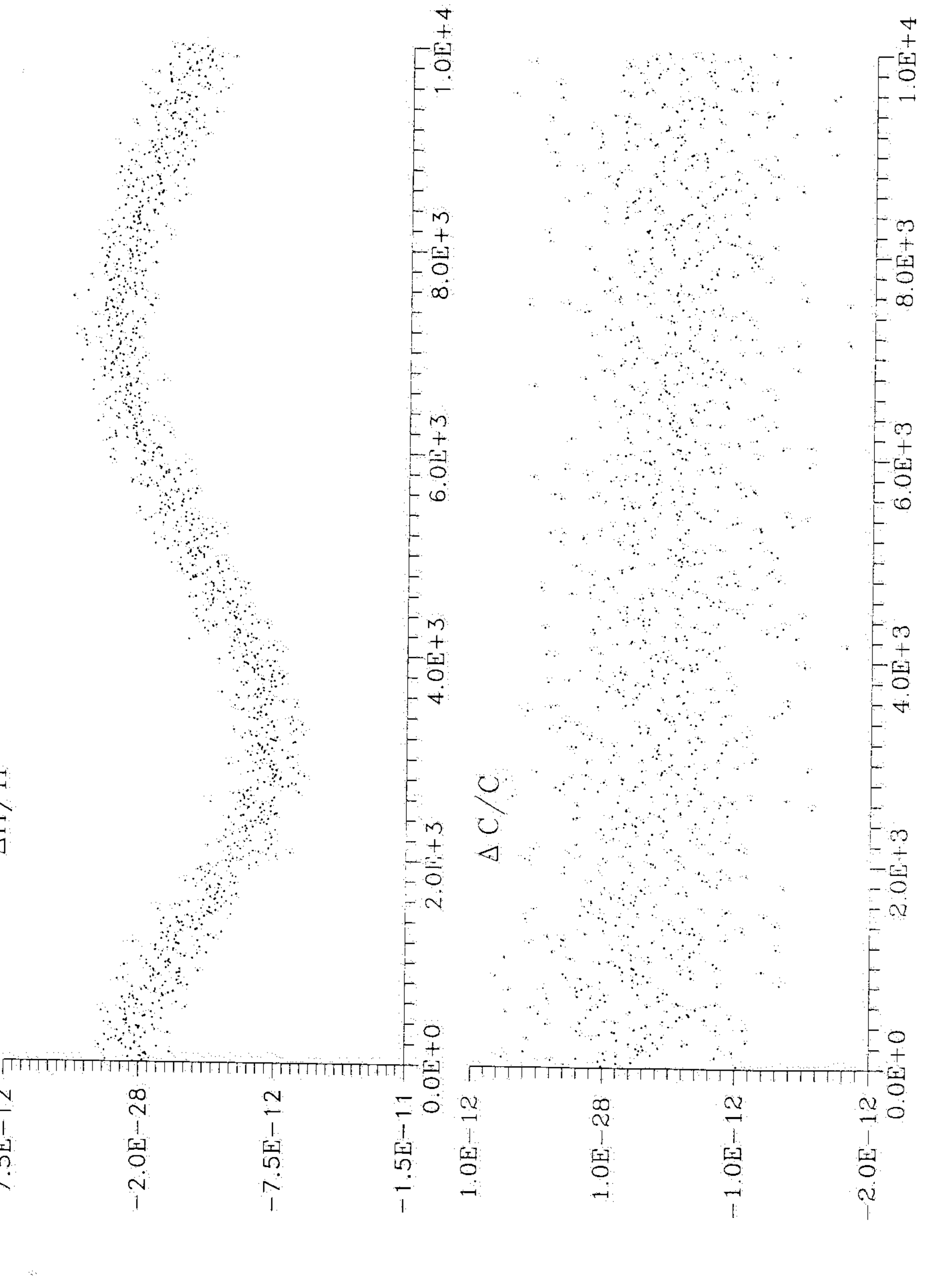


(x'0,y'0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15

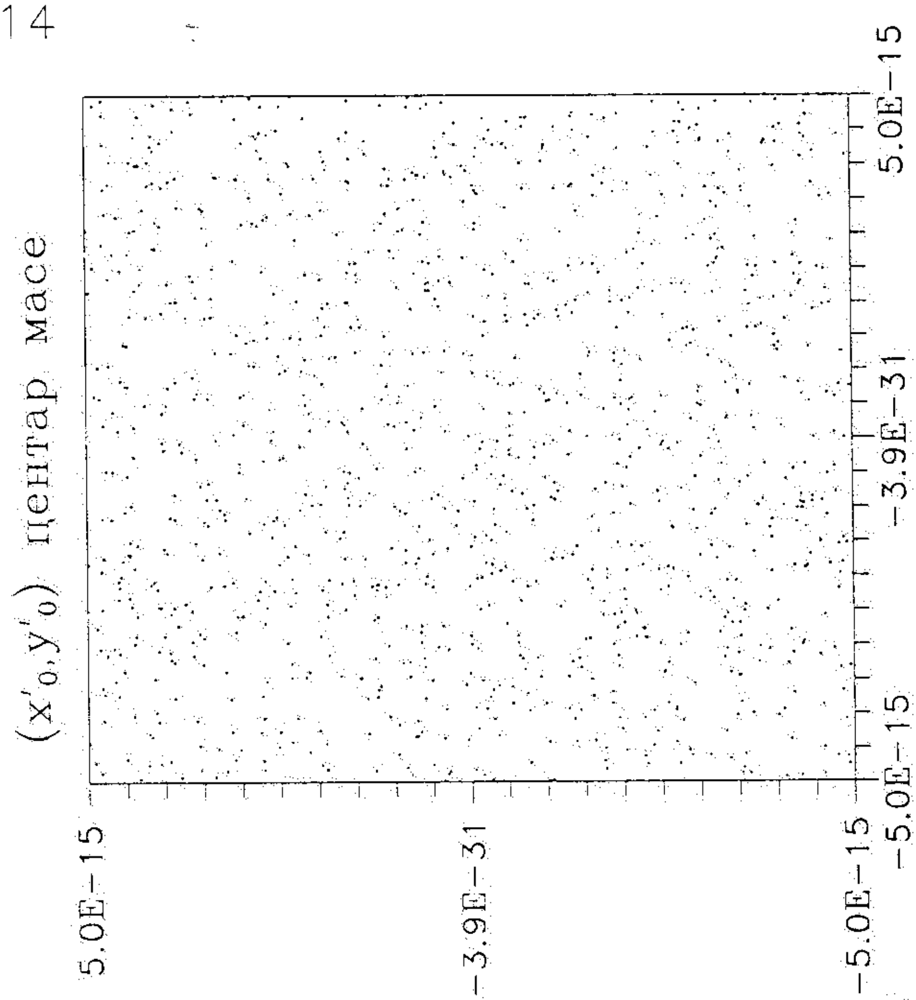


(x0,y0) центар масе
3.0E−12
2.0E−12
1.0E−12
5.0E−29
−1.0E−12
3.0E−12
1.5E−12
−2.5E−29
−1.5E−12

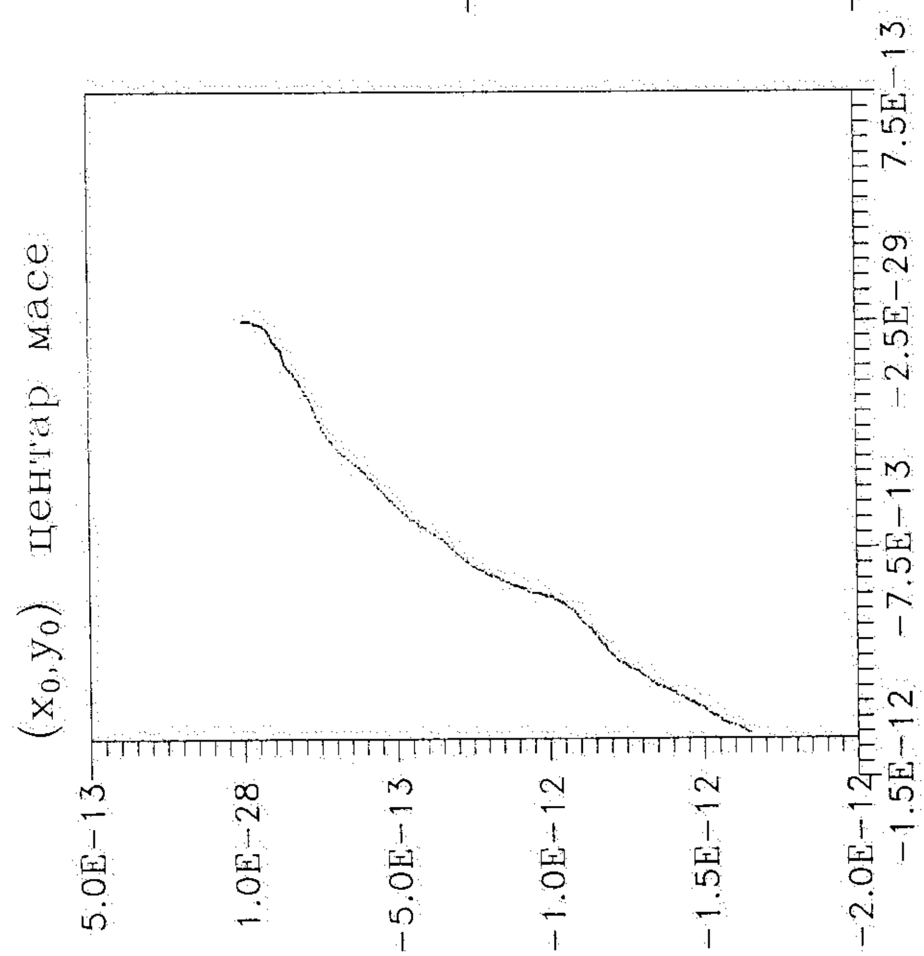
2B-13 (интегратор осмог реда 8B)



2B−14

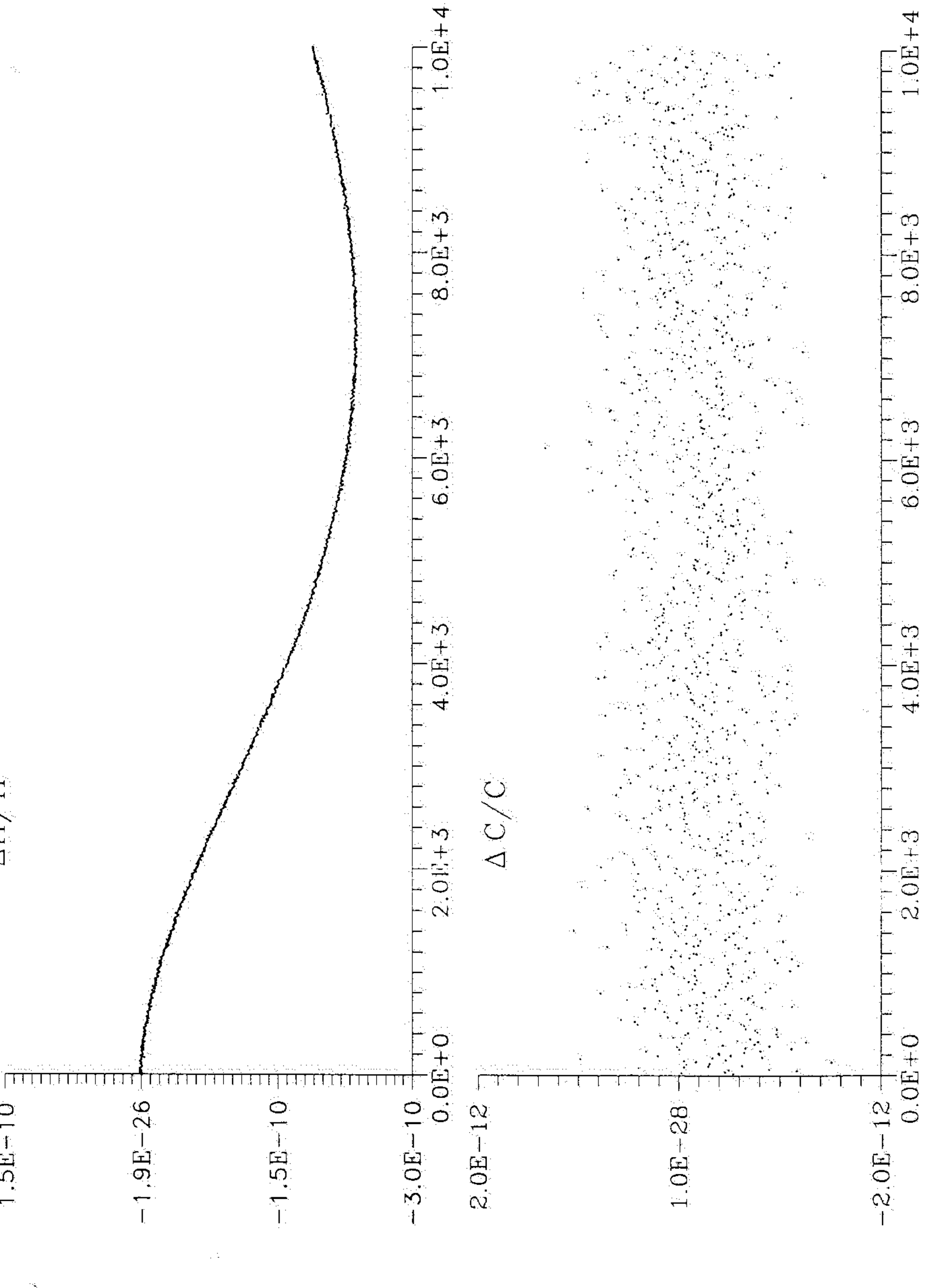


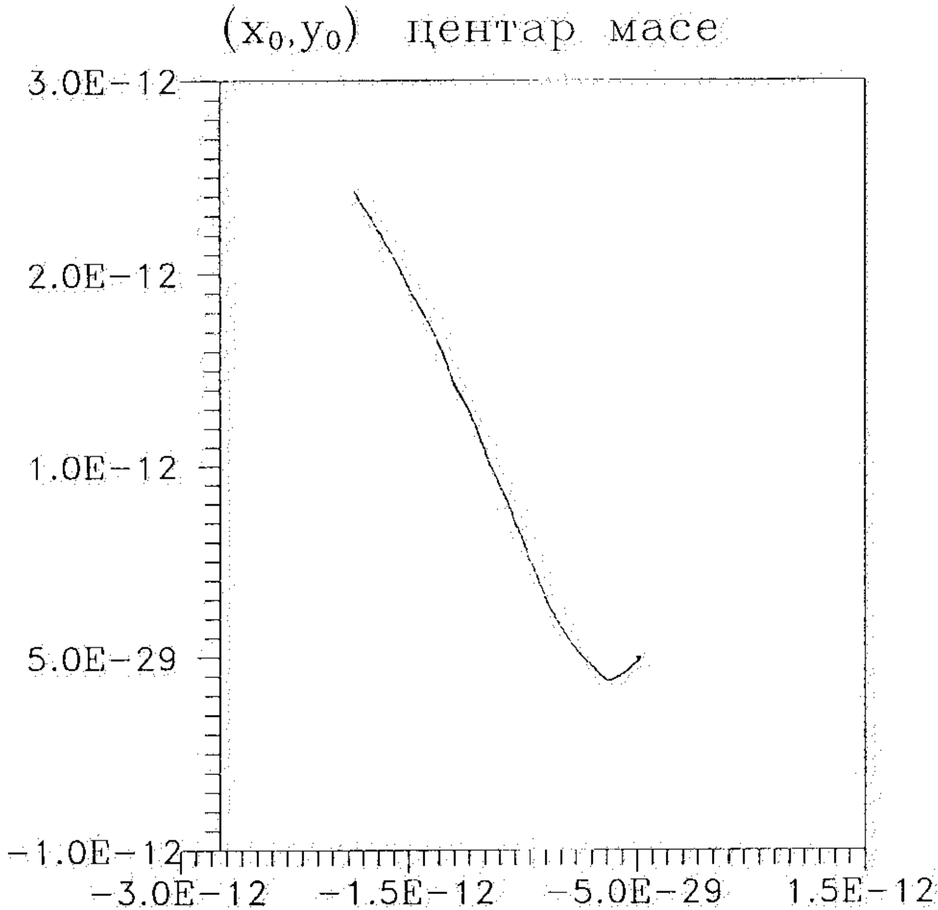
(x'0,y'0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15



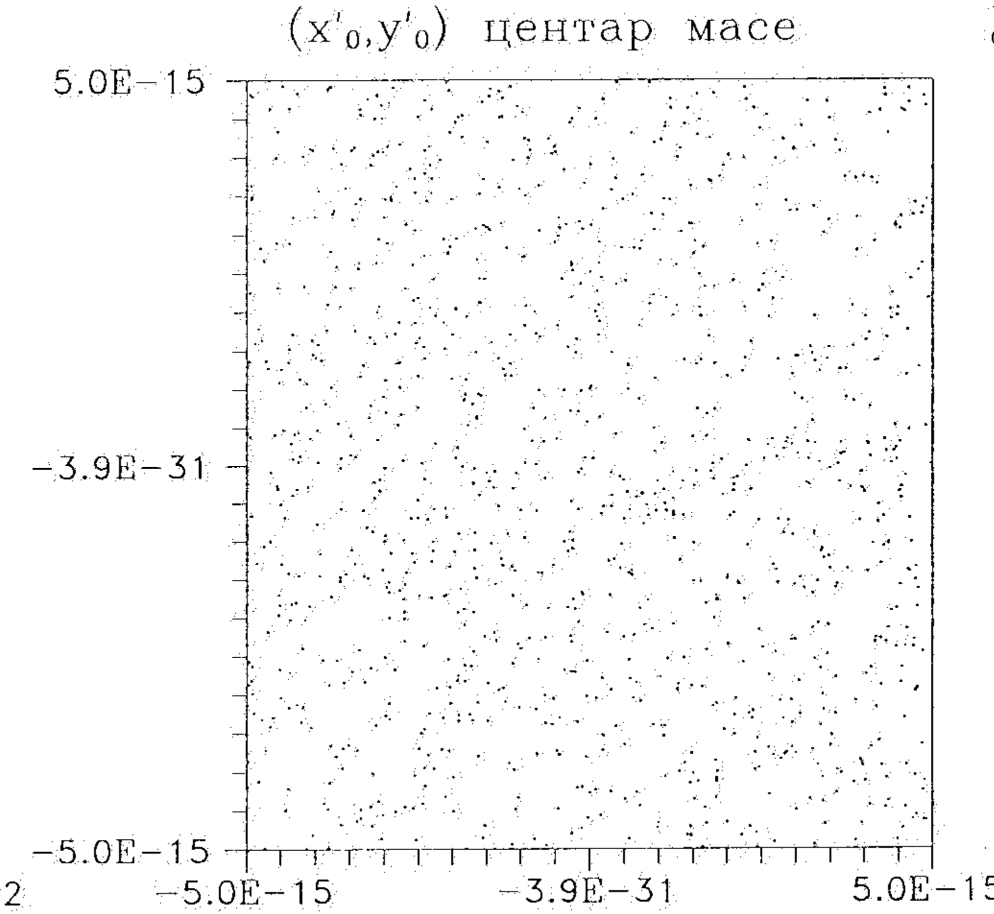
(x0,y0) центар масе
5.0E−13
1.0E−28
−5.0E−13
−1.0E−12
−1.5E−12
−2.0E−12
7.5E−13
2.5E−29
−2.5E−13
−7.5E−13
−1.5E−12

2B−15 (интегратор осмог реда 8Г)



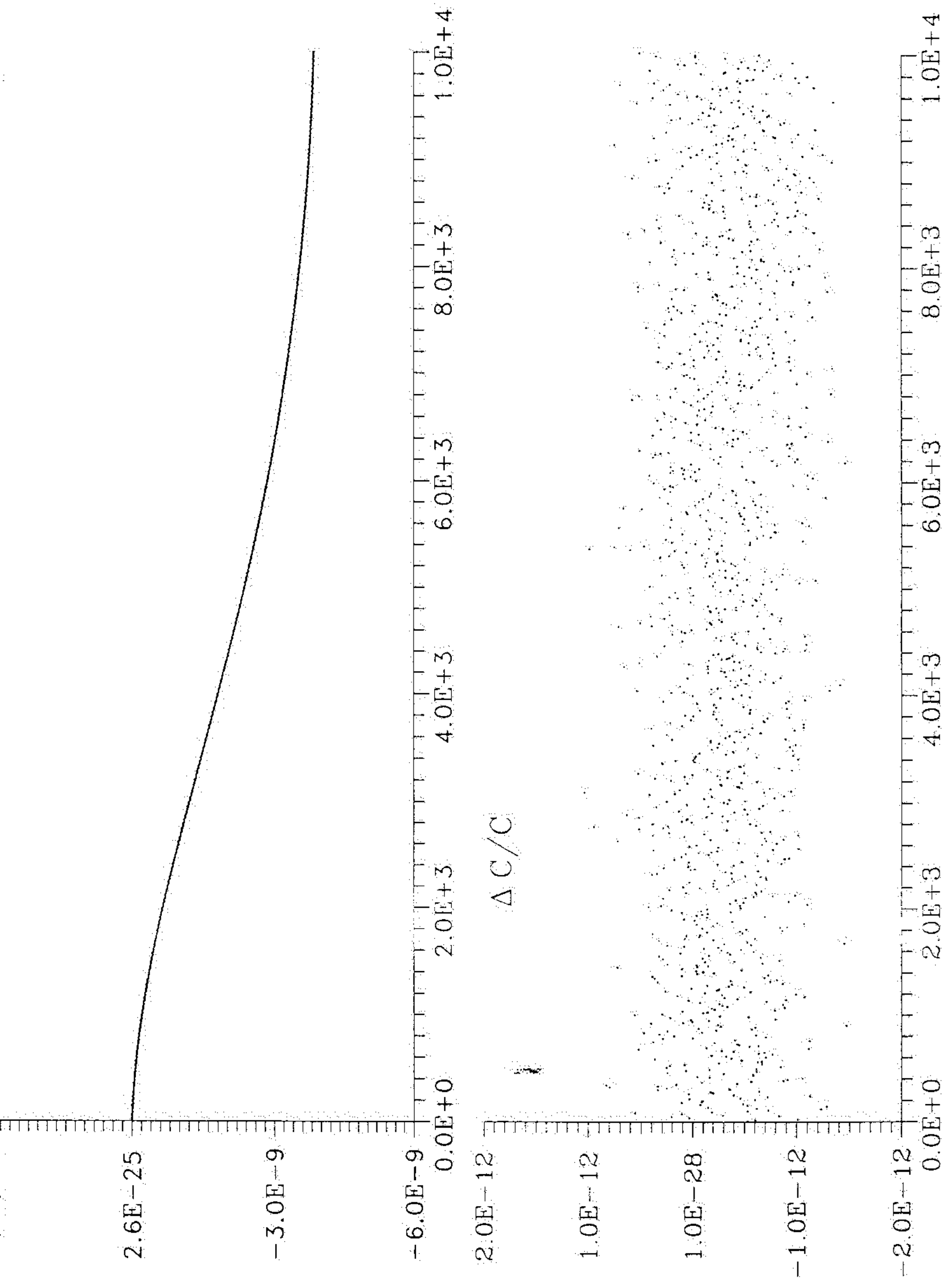


(x_0, y_0) центар масе
3.0E−12
2.0E−12
1.0E−12
5.0E−29
−1.0E−12
−3.0E−12
−1.5E−12
−5.0E−29
1.5E−12

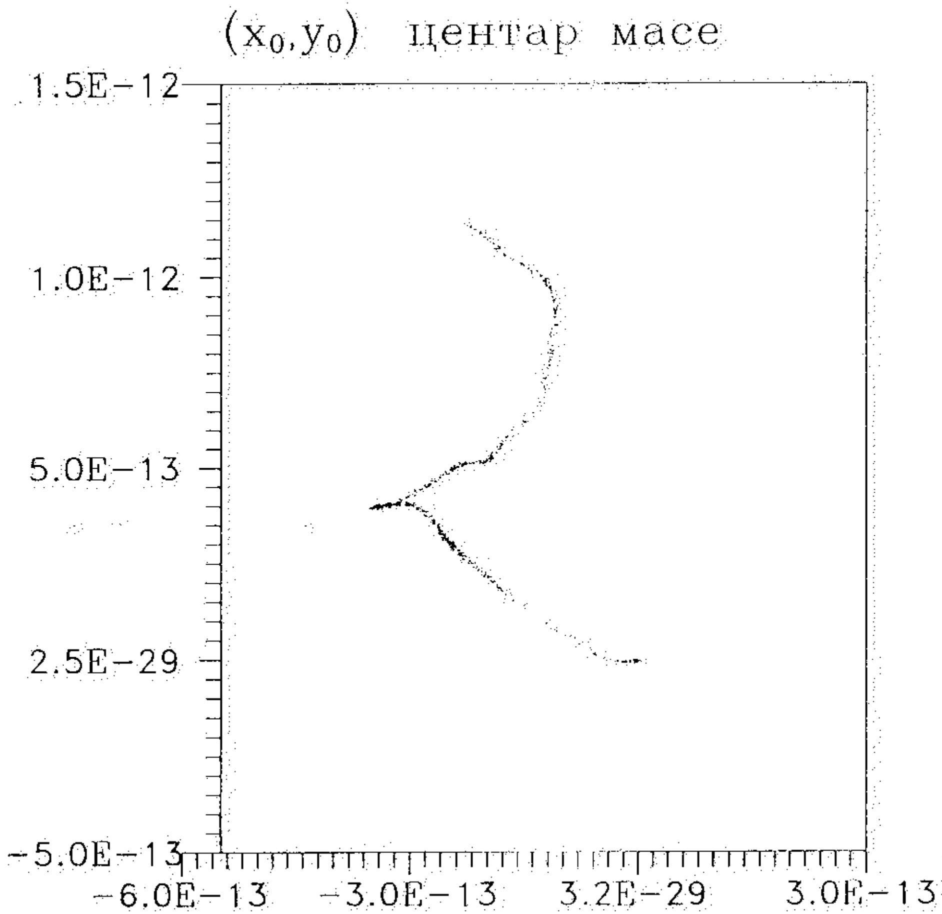


(x'_0, y'_0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
−5.0E−15
−3.9E−31
5.0E−15

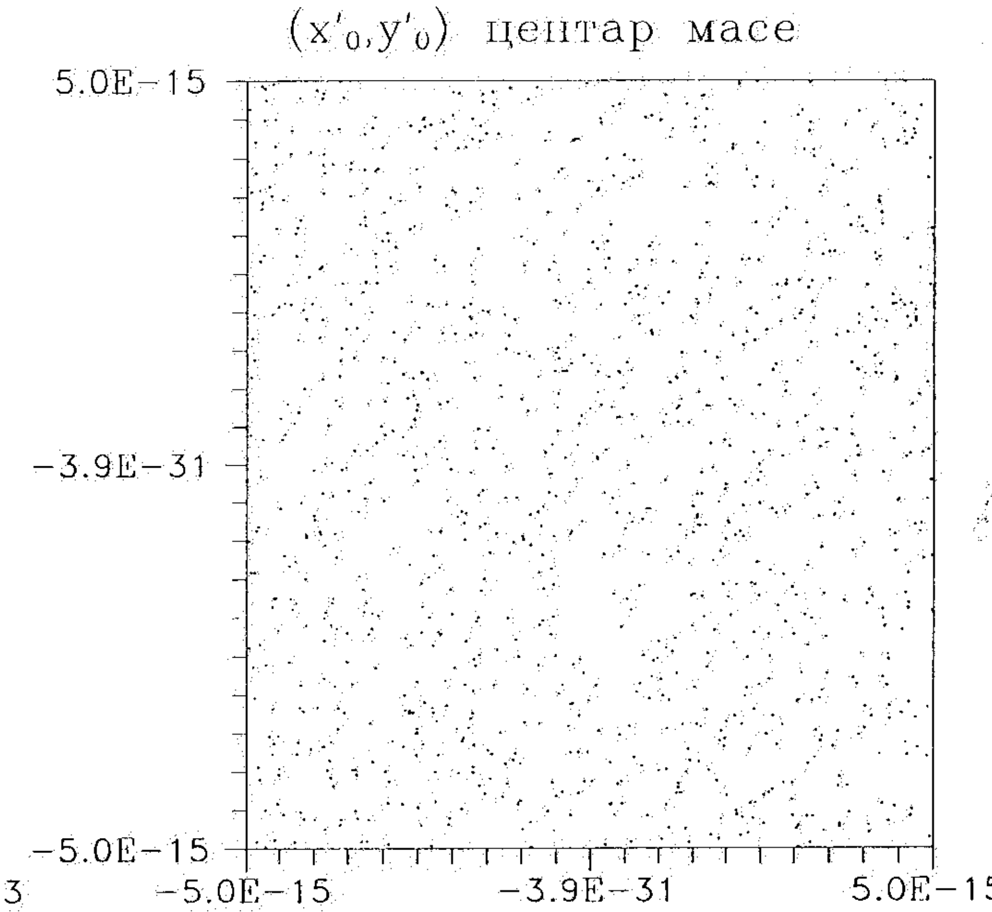
2B-17 (интегратор осмог реда 8E)



2B-18



(x₀,y₀) центар масе
1.5E-12
1.0E-12
5.0E-13
2.5E-29
-5.0E-13
-6.0E-13
-3.0E-13
3.2E-29
3.0E-13



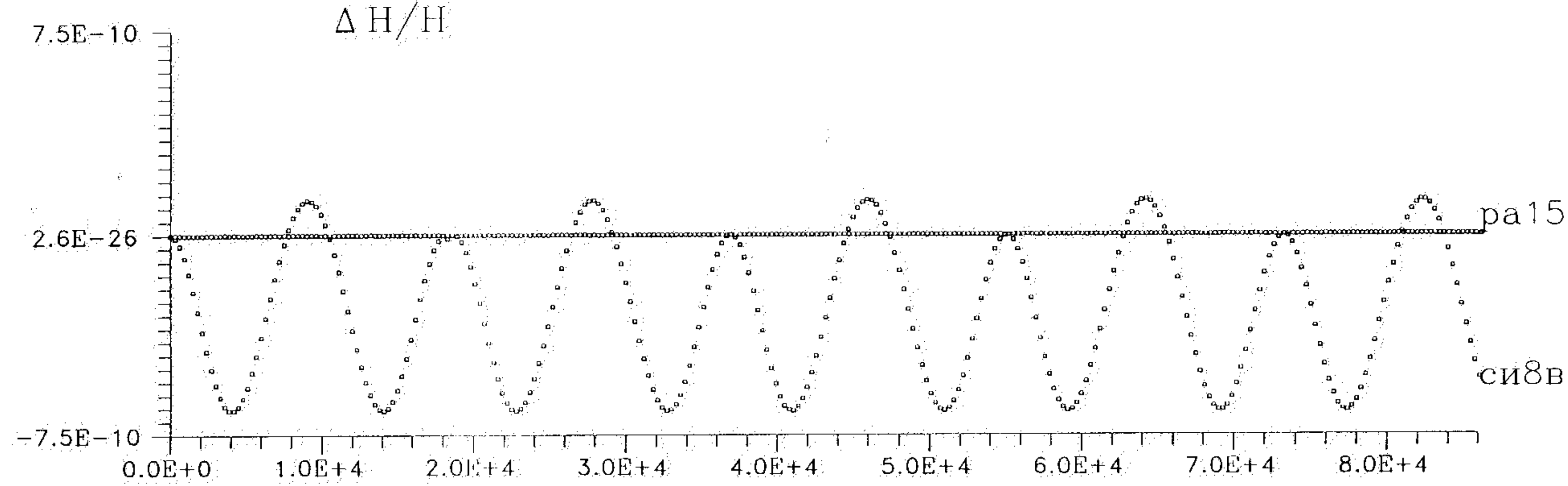
(x'₀,y'₀) центар масе
5.0E-15
-3.9E-31
-5.0E-15
-5.0E-15
-3.9E-31
5.0E-15

ПРИЛОГ 2Г

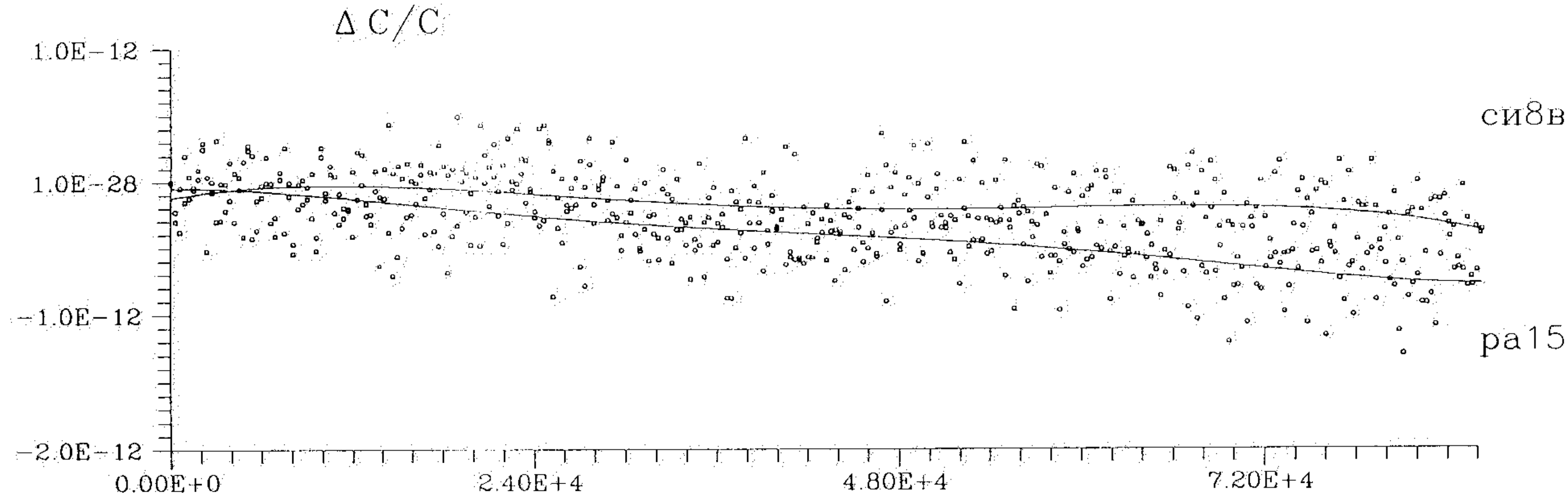
РЕЗУЛТАТИ ПОРЕЂЕЊА РА15 и СИ8В

Графици интеграције проблема два тела (Сунце + Земља).

2Г-1

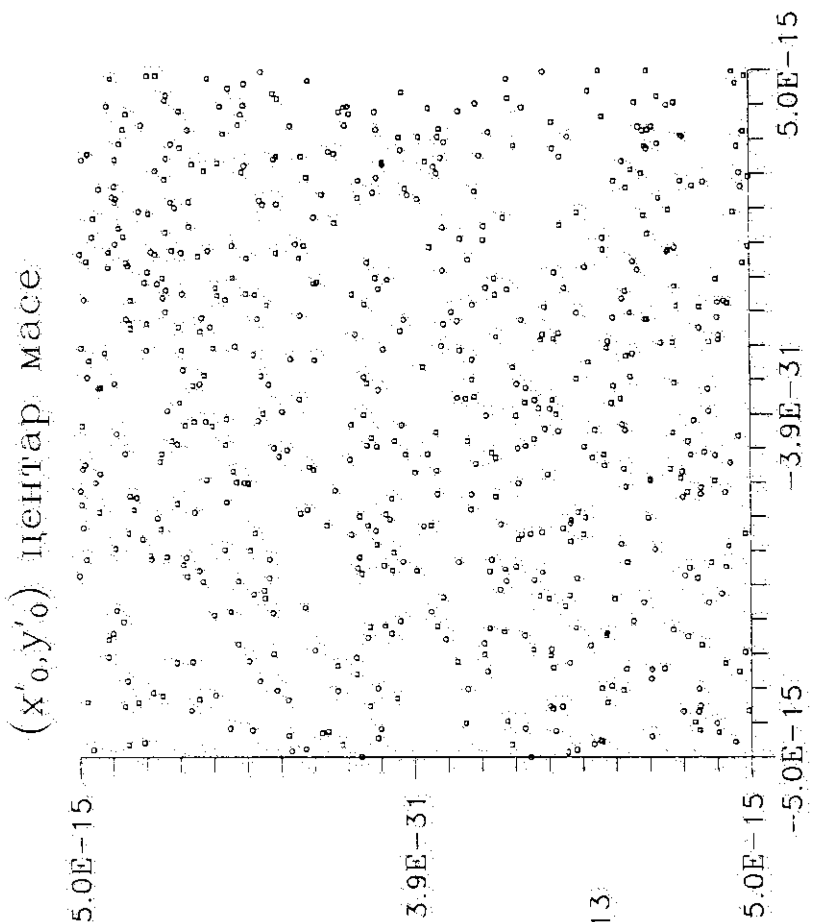


ΔH/H
7.5E-10
2.6E-26
-7.5E-10
0.0E+0
1.0E+4
2.0E+4
3.0E+4
4.0E+4
5.0E+4
6.0E+4
7.0E+4
8.0E+4
ра15
си8в

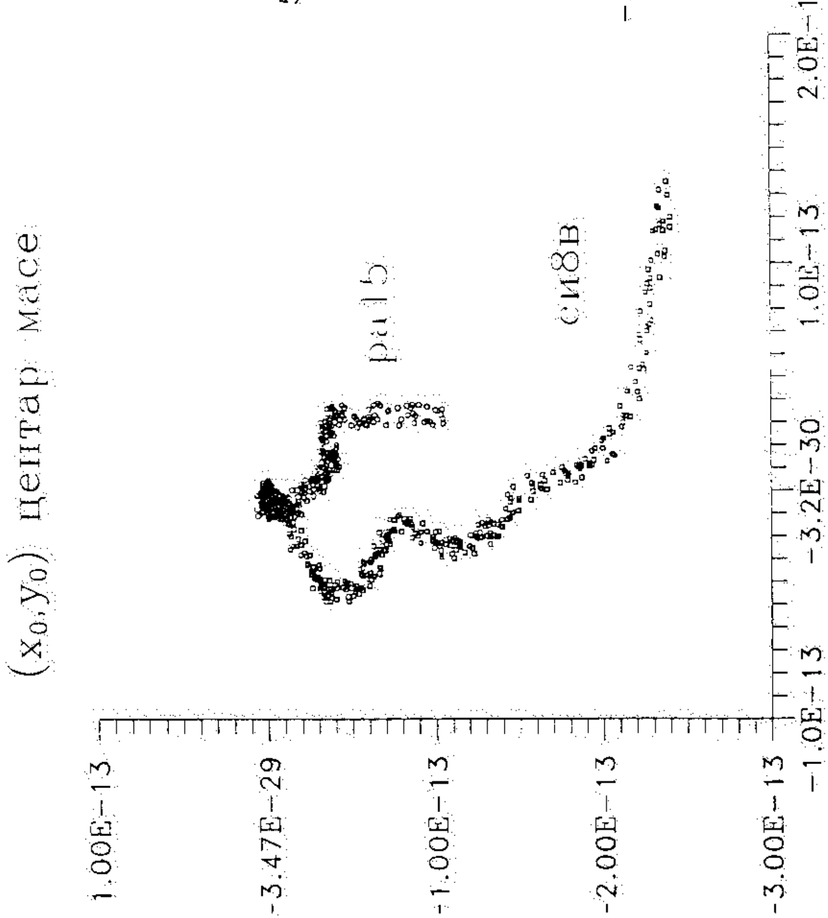


ΔC/C
1.0E-12
1.0E-28
-1.0E-12
-2.0E-12
0.00E+0
2.40E+4
4.80E+4
7.20E+4
си8в
ра15

2Г−2

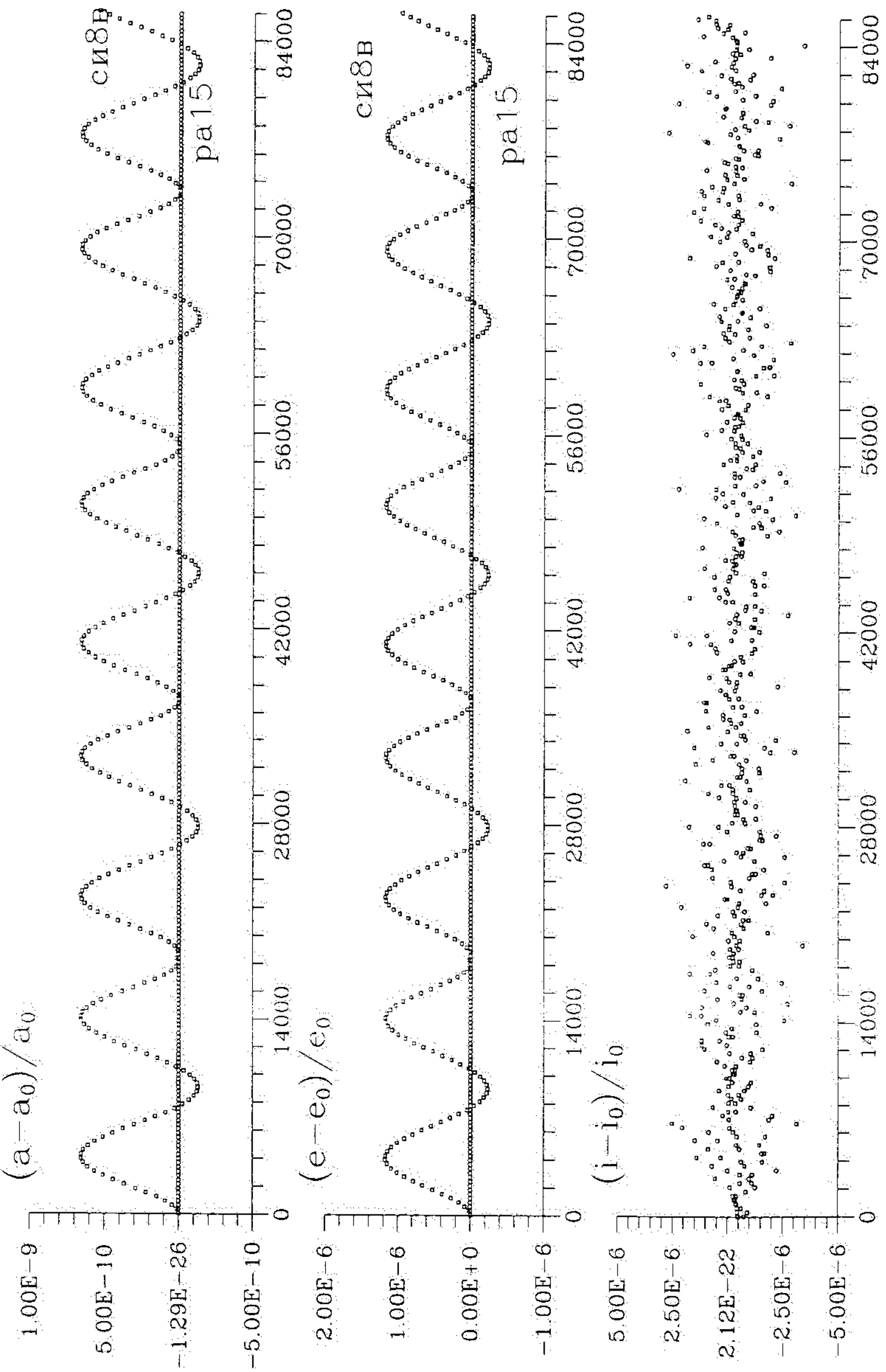


(x'0,y'0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
−5.0E−15
−3.9E−31
5.0E−15



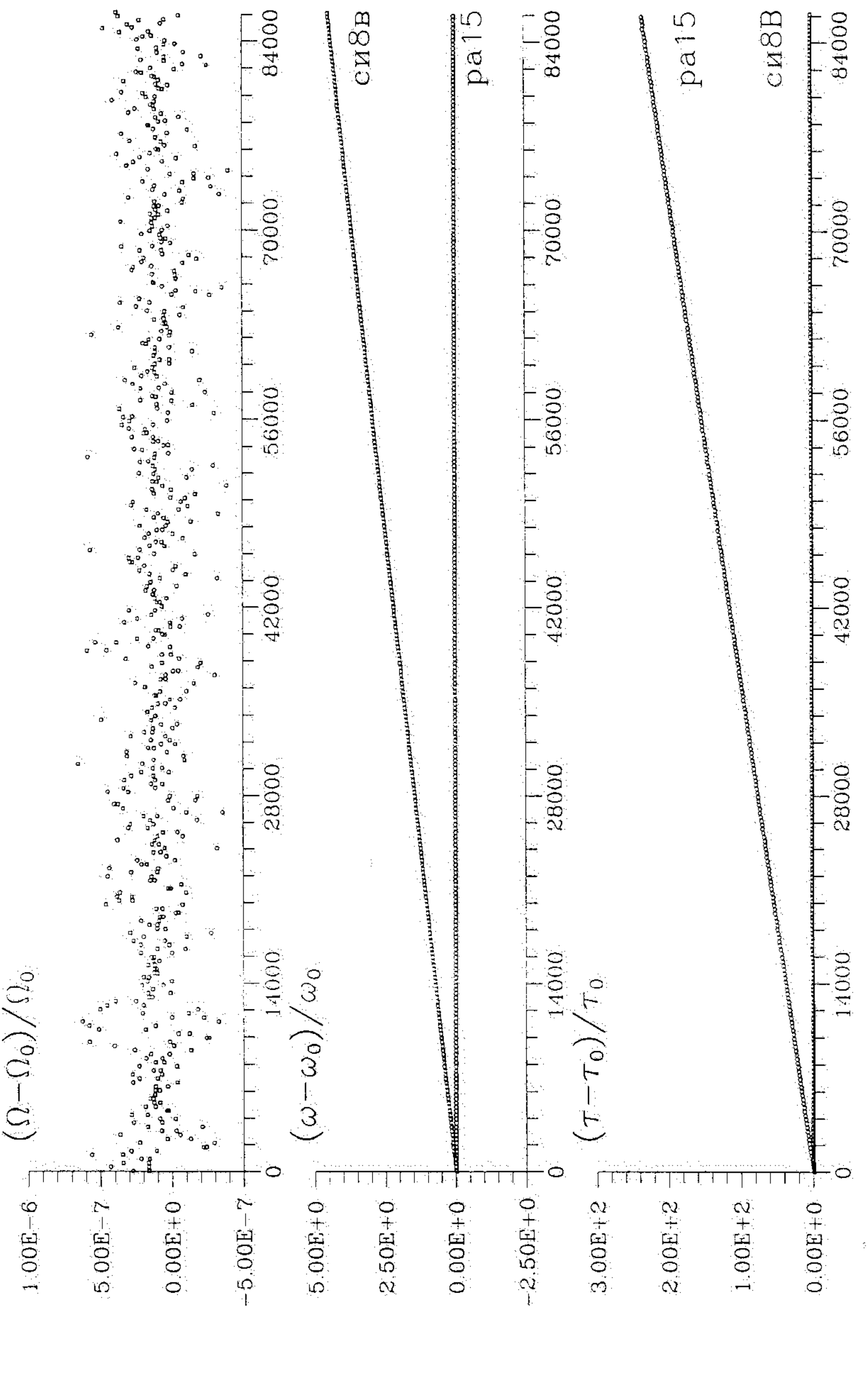
(x0,y0) центар масе
рад 5
си8в
1.00E−13
−3.47E−29
−1.00E−13
−2.00E−13
−3.00E−13
−1.0E−13
−3.2E−30
1.0E−13
2.0E−13

2Г−3



$(a-a_0)/a_0$
си8в
pa15
1.00E−9
5.00E−10
−1.29E−26
−5.00E−10
$(e-e_0)/e_0$
си8в
pa15
2.00E−6
1.00E−6
0.00E+0
−1.00E−6
$(i-i_0)/i_0$
5.00E−6
2.50E−6
2.12E−22
−2.50E−6
−5.00E−6
0
14000
28000
42000
56000
70000
84000

2Г−4



$(\Omega-\Omega_0)/\Omega_0$
1.00E−6
5.00E−7
0.00E+0
−5.00E−7
$(\omega-\omega_0)/\omega_0$
5.00E+0
2.50E+0
0.00E+0
−2.50E+0
си8в
pa15
$(\tau-\tau_0)/\tau_0$
3.00E+2
2.00E+2
1.00E+2
0.00E+0
pa15
си8В
0
14000
28000
42000
56000
70000
84000

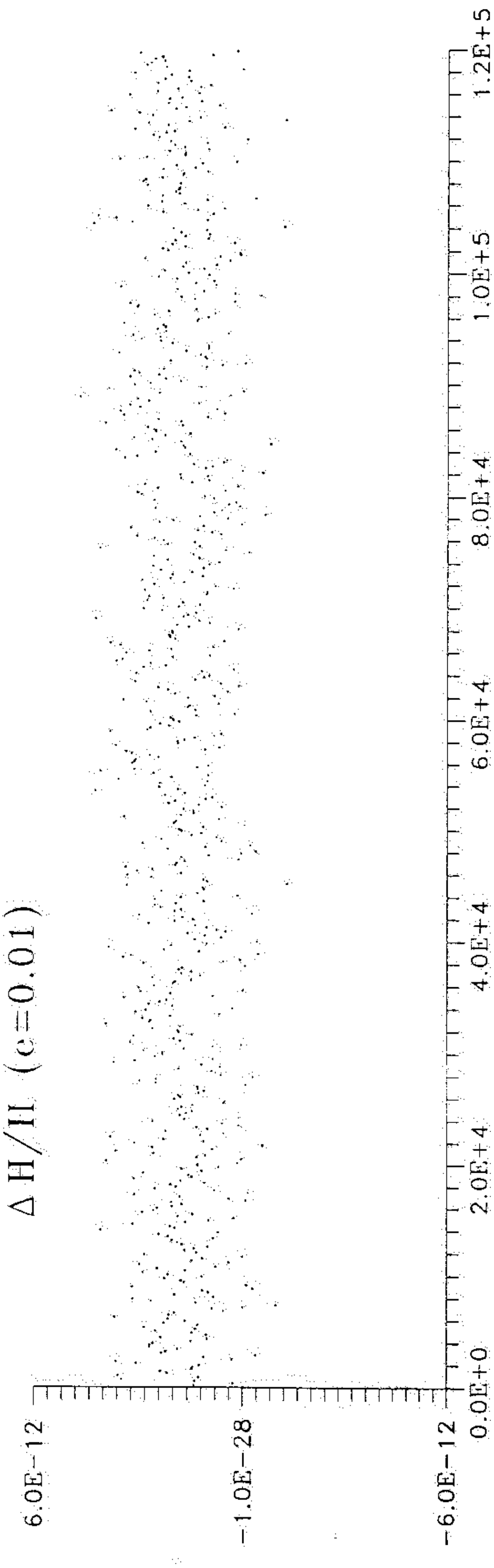
ПРИЛОГ 2Д

РЕЗУЛТАТИ ПОРЕЂЕЊА РА15 и СИ8В

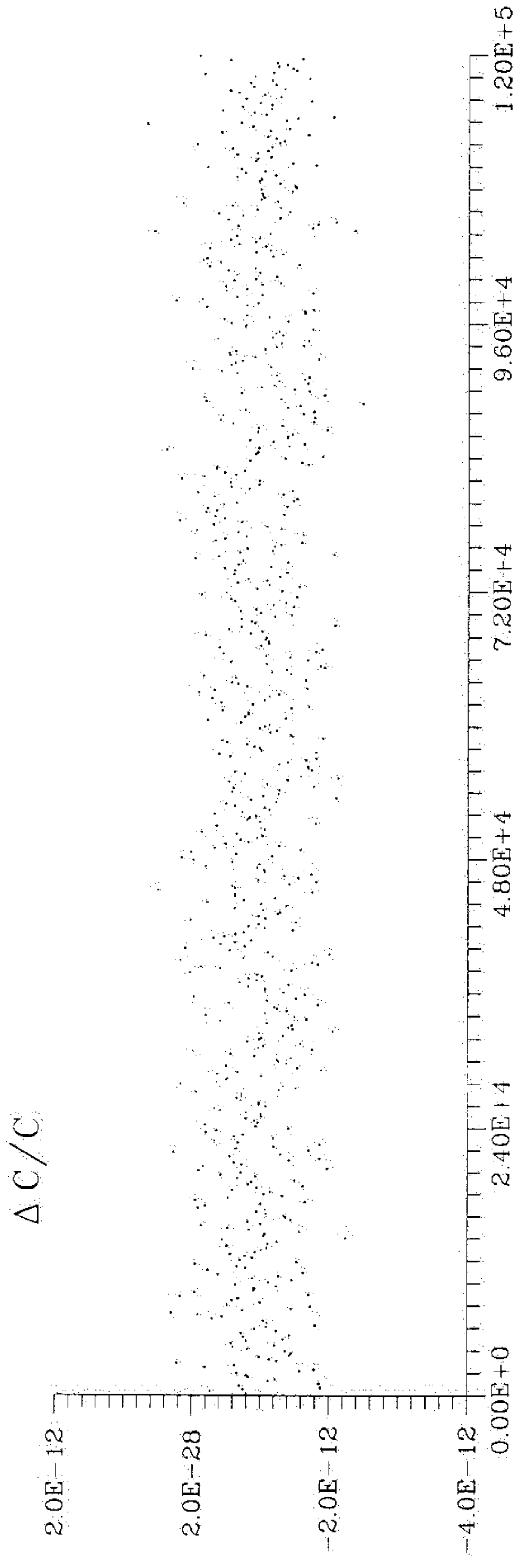
Графици интеграције проблема три тела (Сунце, мала планета и Јупитер)

Поенкареови пресеци. Хаотичне путање.

2Д−1



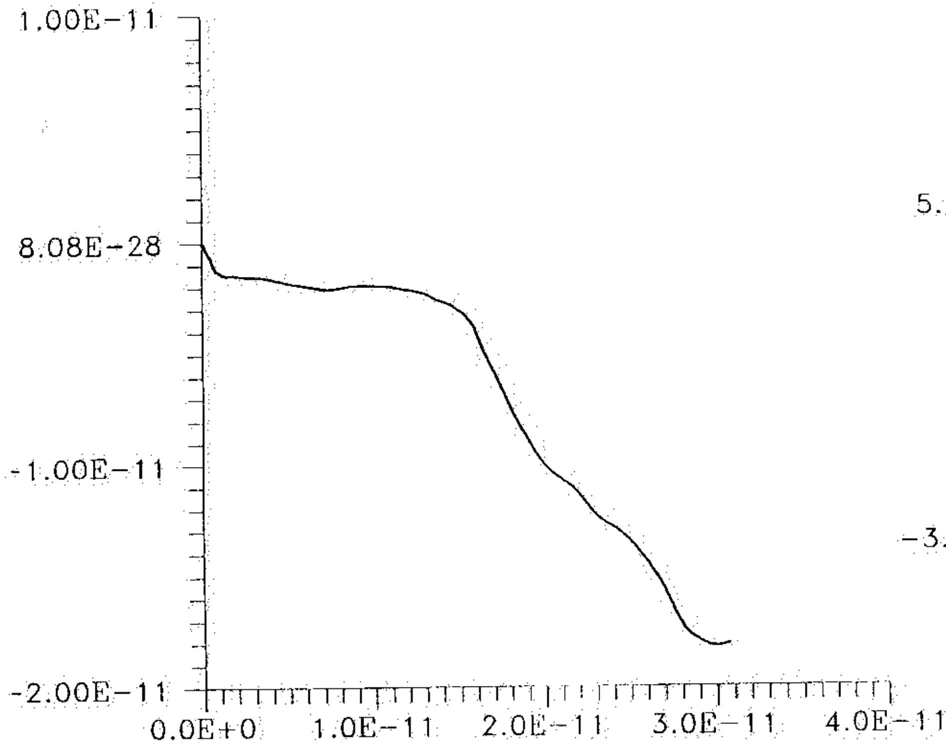
ΔH/H (e=0.01)
6.0E−12
−1.0E−28
−6.0E−12
0.0E+0
2.0E+4
4.0E+4
6.0E+4
8.0E+4
1.0E+5
1.2E+5



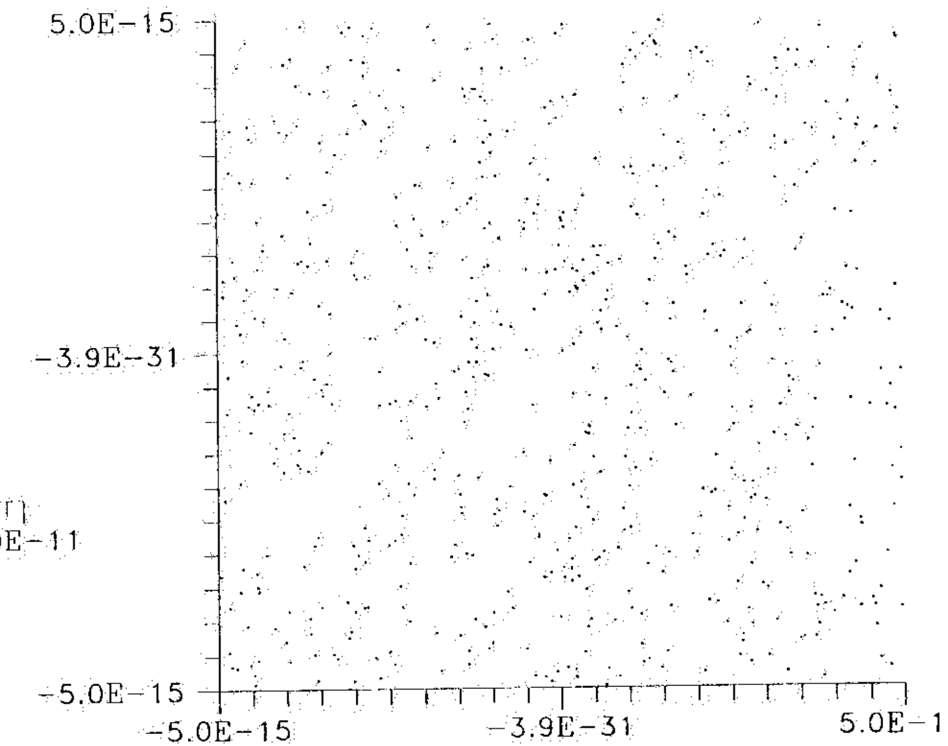
ΔC/C
2.0E−12
2.0E−28
−2.0E−12
−4.0E−12
0.00E+0
2.40E+4
4.80E+4
7.20E+4
9.60E+4
1.20E+5

2Д−2

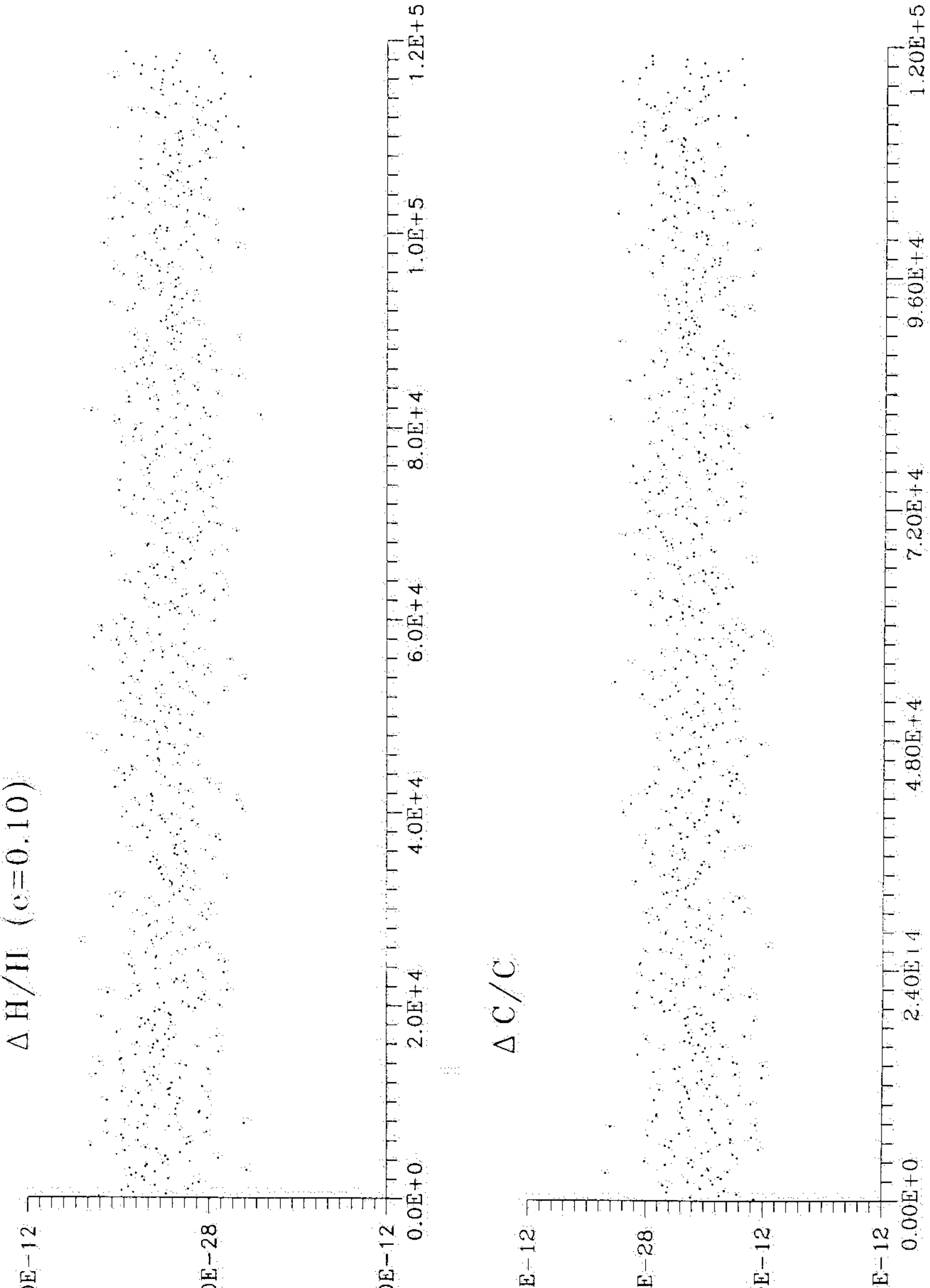
(x₀,y₀) центар масе



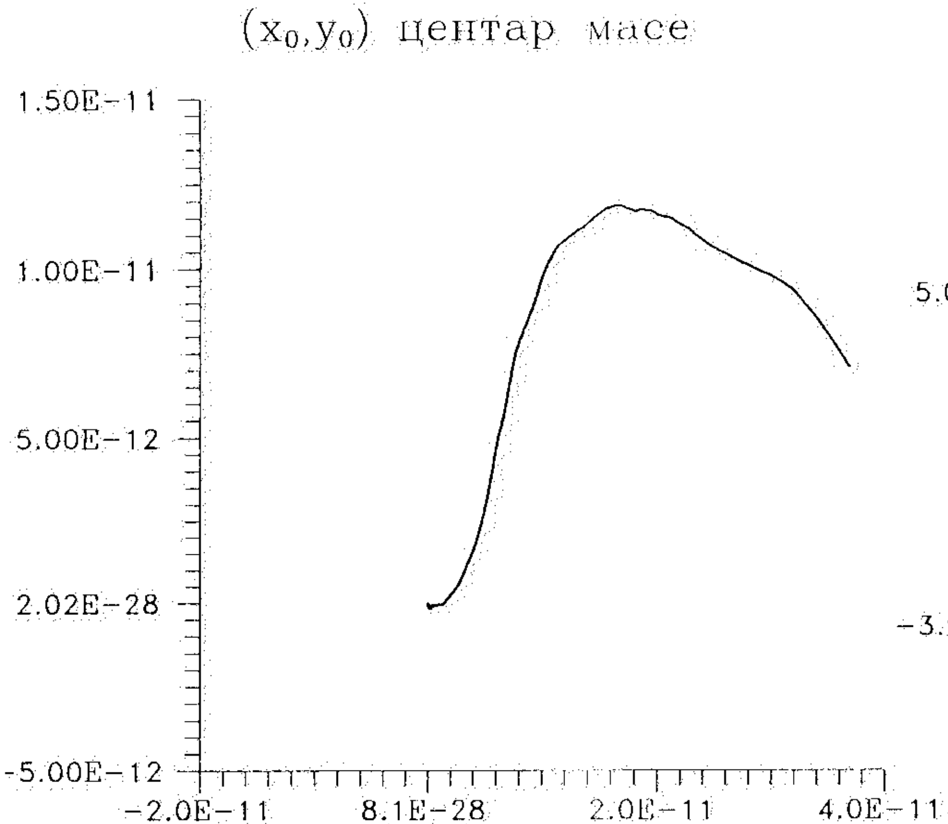
(x'₀,y'₀) центар масе



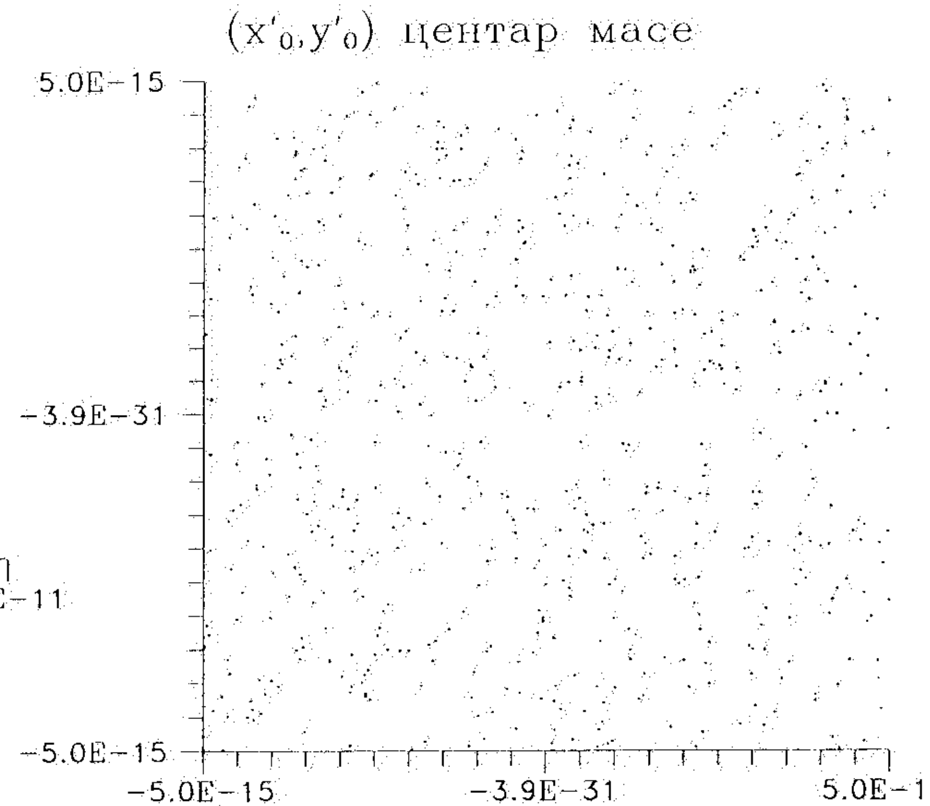
2Д-3


Δ H/H (c=0.10)
6.0E-12
-1.0E-28
-6.0E-12
0.0E+0
2.0E+4
4.0E+4
6.0E+4
8.0E+4
1.0E+5
1.2E+5
Δ C/C
2.0E-12
2.0E-28
-2.0E-12
-4.0E-12
0.00E+0
2.40E+4
4.80E+4
7.20E+4
9.60E+4
1.20E+5

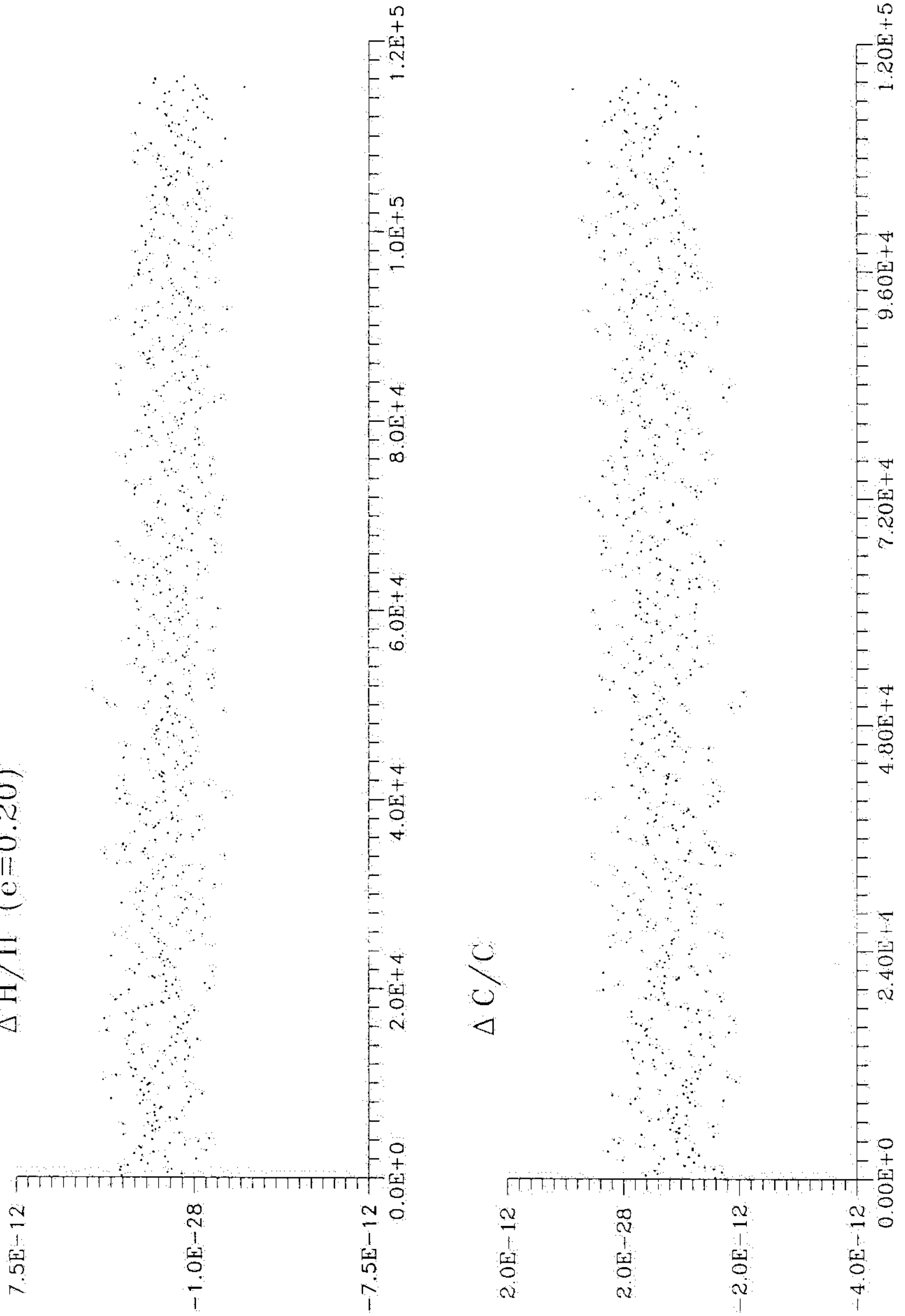
2Д-4



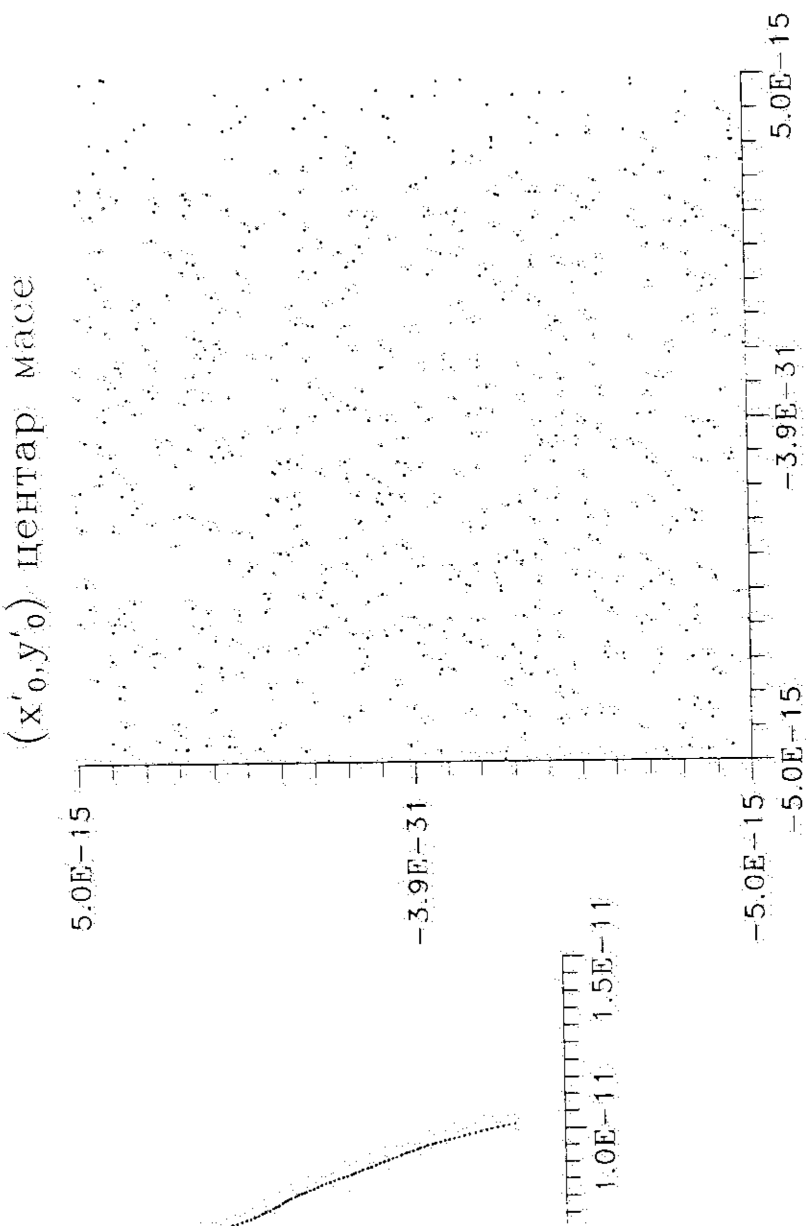
(x_0, y_0) центар масе
1.50E-11
1.00E-11
5.00E-12
2.02E-28
-5.00E-12
-2.0E-11
8.1E-28
2.0E-11
4.0E-11

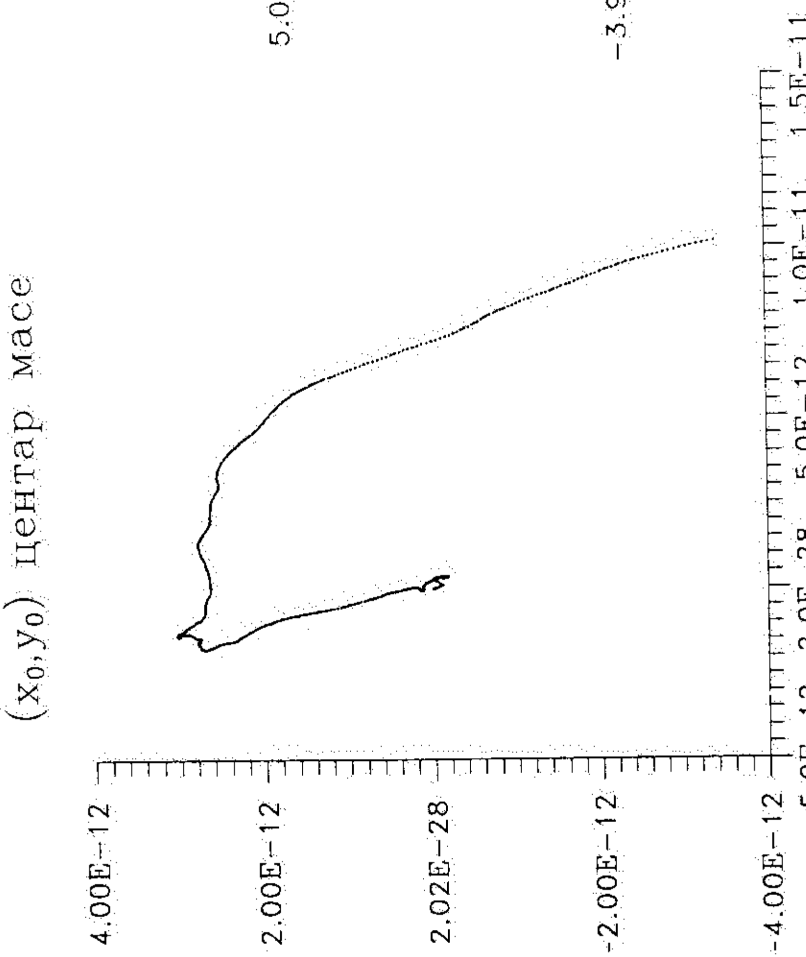


(x'_0, y'_0) центар масе
5.0E-15
-3.9E-31
-5.0E-15
-5.0E-15
-3.9E-31
5.0E-15

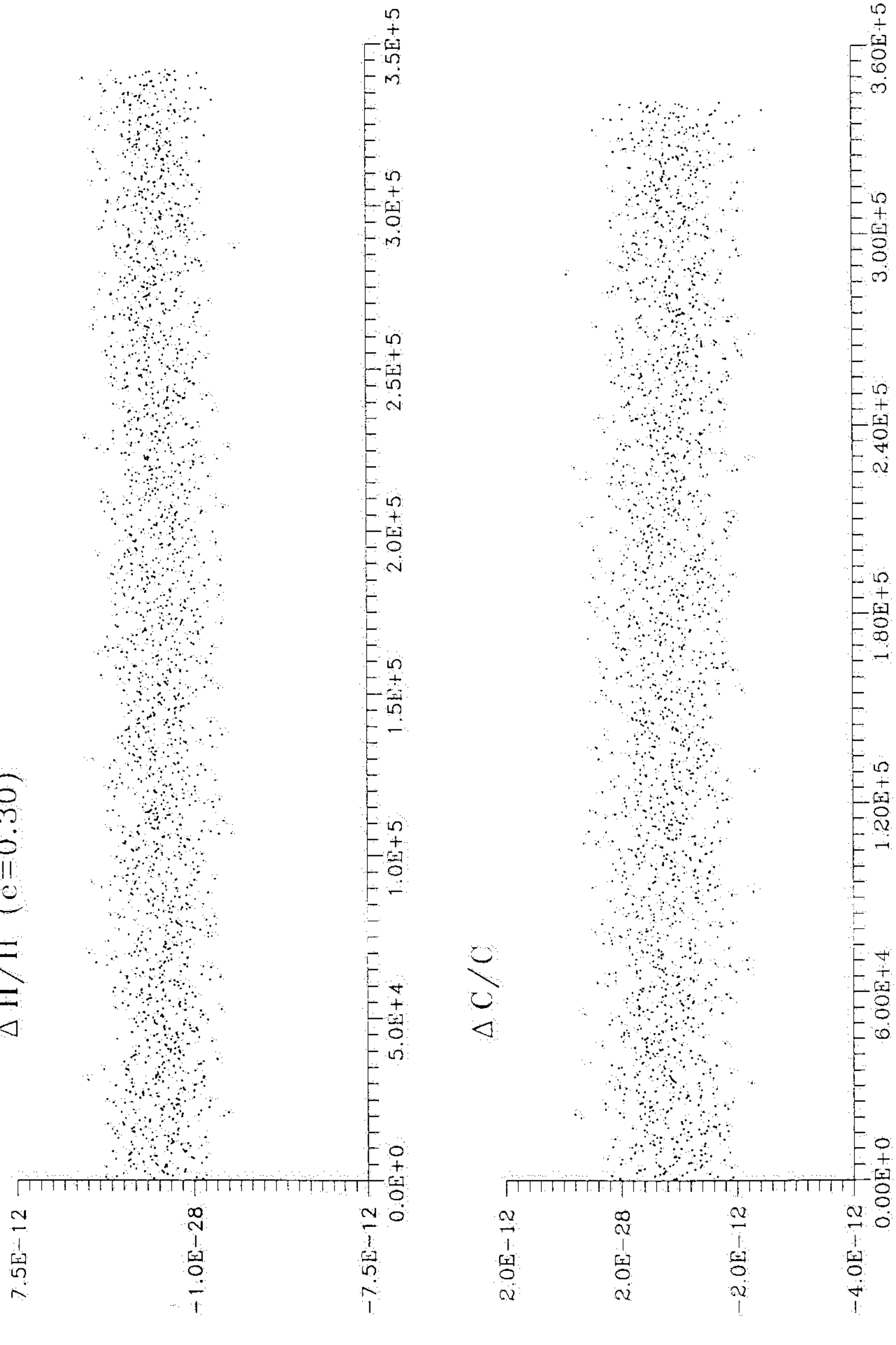

Δ H/H (e=0.20)
7.5E−12
−1.0E−28
−7.5E−12
0.0E+0
2.0E+4
4.0E+4
6.0E+4
8.0E+4
1.0E+5
1.2E+5
Δ C/C
2.0E−12
2.0E−28
−2.0E−12
−4.0E−12
0.00E+0
2.40E+4
4.80E+4
7.20E+4
9.60E+4
1.20E+5

2Д−6


(x'0,y'0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
−5.0E−15
−3.9E−31
5.0E−15

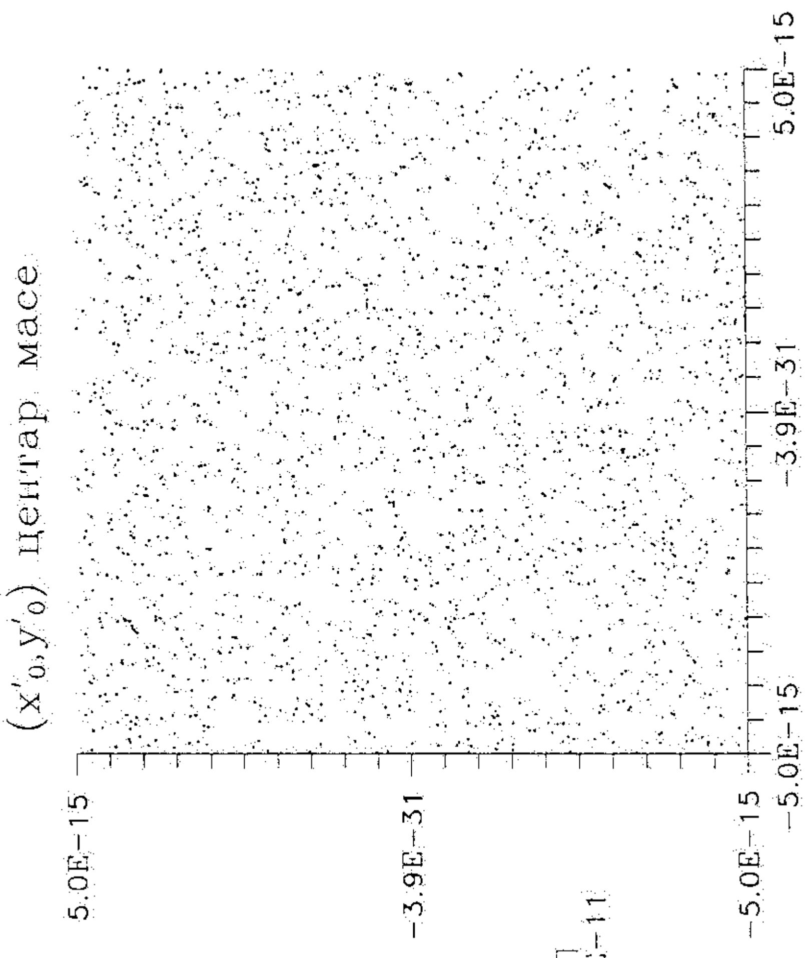

(x0,y0) центар масе
4.00E−12
2.00E−12
2.02E−28
-2.00E−12
-4.00E−12
−5.0E−12
2.0E−28
5.0E−12
1.0E−11
1.5E−11

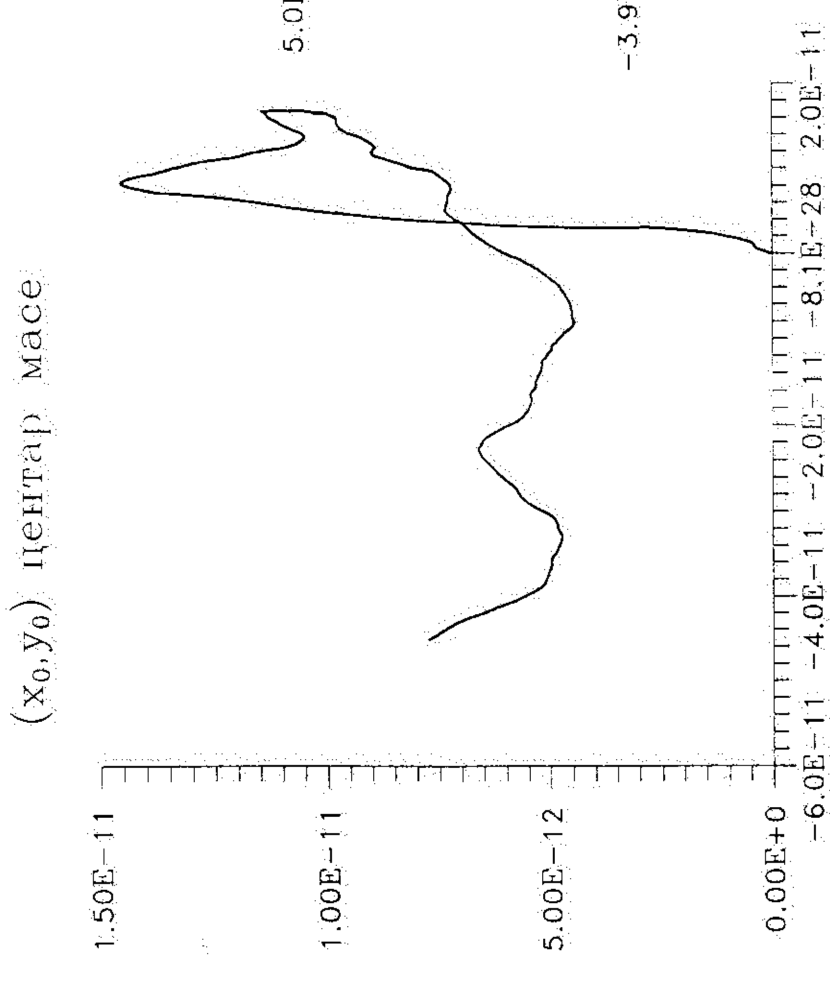
2Д-7



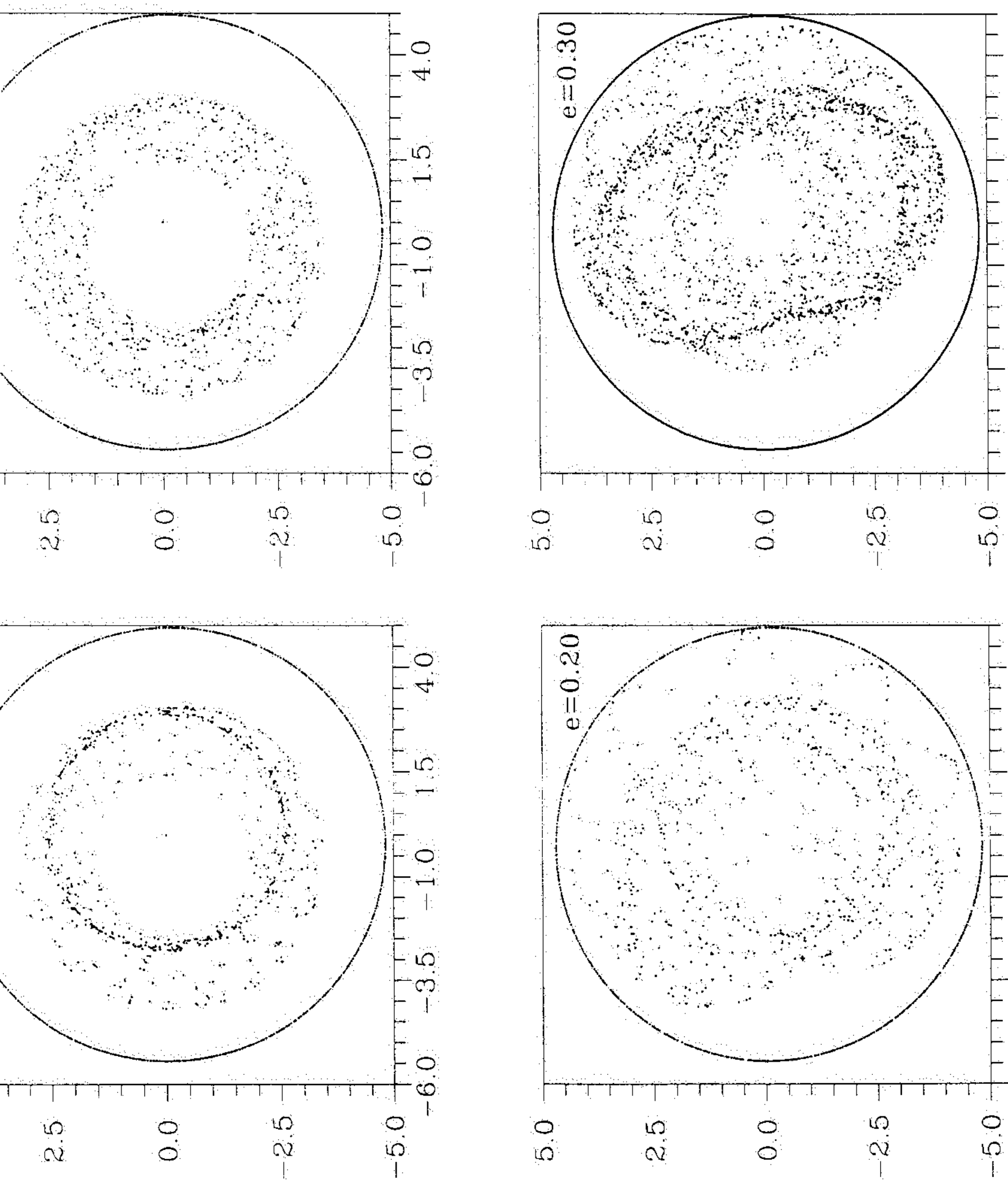
ΔH/H (e=0.30)
7.5E-12
-1.0E-28
-7.5E-12
0.0E+0
5.0E+4
1.0E+5
1.5E+5
2.0E+5
2.5E+5
3.0E+5
3.5E+5
ΔC/C
2.0E-12
2.0E-28
-2.0E-12
-4.0E-12
0.00E+0
6.00E+4
1.20E+5
1.80E+5
2.40E+5
3.00E+5
3.60E+5

2Д−8

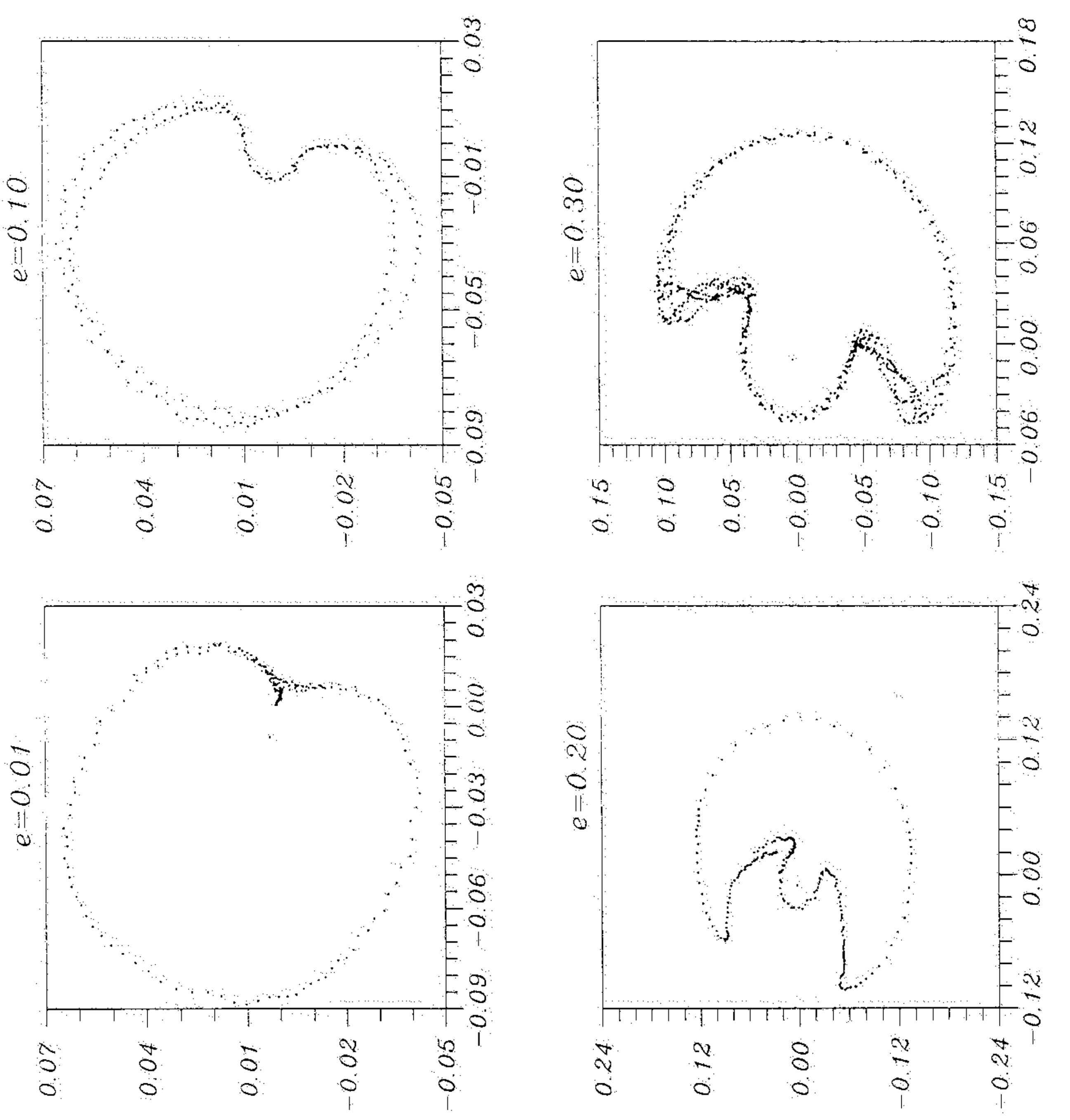

(x'0,y'0) центар масе
5.0E−15
−3.9E−31
−5.0E−15
−5.0E−15
−3.9E−31
5.0E−15


(x0,y0) центар масе
1.50E−11
1.00E−11
5.00E−12
0.00E+0
−6.0E−11
−4.0E−11
−2.0E−11
−8.1E−28
2.0E−11

2Д−9



2Д-10



e=0.01
e=0.10
e=0.20
e=0.30
0.07
0.04
0.01
-0.02
-0.05
-0.09
-0.06
-0.03
0.00
0.03
-0.05
-0.01
0.24
0.12
0.00
-0.12
-0.24
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
-0.06
0.06
0.12
0.18

ПРИЛОГ 3А

ЛИСТИНЗИ ПРОГРАМА ЗА ЛИНЕАРНЕ ВИШЕКОРАЧНЕ МЕТОДЕ (MS FORTRAN 5.1)
ЛИСТИНГ ПРОГРАМА ЗА КОНСТРУИСАЊЕ КОЕФИЦИЈЕНАТА СИМЕТРИЧНИХ ЛИНЕАРНИХ ВИШЕКОРАЧНИХ МЕТОДА (пример имплицитне методе од десет корака) (MATHEMATICA v.2.2)

```
      programe mu-1e
      implicit real*8(a-h,o-z)
c Explicit, K-step method for integration of sistem of N+1(=10) ordinary
c differential equations.
      external funk,dist
      common /bl1/ gama,nb,kstep,
     * q(1:6,0:10,0:17),rm(0:10),fm(0:10,0:10,0:17)
      dimension alpha(0:20),beta(0:20),a(1:6,0:10),b(1:6,0:10),
     * time(0:17)
      open(1,file='coef1e',status='old',access='sequential')
      open(2,file='input',status='old',access='sequential')
      open(3,file='mase',status='old',access='sequential')
      open(4,file='outbar-v.dat',status='new',access='sequential')
      open(5,file='mpar',status='old',access='sequential')
      data gama/0.01720209895d0/
      gama = gama*gama
      read(1,*) kstep
      read(1,*) (num,alpha(i),beta(i),i=0,kstep - 1)
      alpha(kstep) = 1.d0
      beta(kstep) = 0.d0
      do 1 i=0,kstep
      sualpha = sualpha + alpha(i)
1     continue
      write(*,984) 0,sualpha,subeta,sualpha-subeta
      do 3 j=1,kstep + 1
      helpj = j*1.d0
      sualpha = 0.d0
      subeta = 0.d0
      do 2 i=0,kstep
      helpi = i*1.d0
      sualpha = sualpha + alpha(i)*(helpi**helpj)
      subeta = subeta + beta(i)*(helpi)**(helpj - 1.d0)
2     continue
      subeta = helpj*subeta
      write(*,984) j,sualpha,subeta,(sualpha - subeta)/sualpha
3     continue
984   format(i4,3e25.18)
      read(5,*) time0,nb,step,timemax,index
      do 4 i=0,nb
      read(3,*) num,rm(i)
      rm(i) = 1./rm(i)
4     continue
      write(4,*) nb,int((timemax-time0)/(index*step)) - kstep + 1
      l=0
5     read(2,*) time(l)
      if(l.ge.kstep - 1) write(4,998) (time(l)-time0)/365.2422
```

3A-2

```
      do 10 j=0,nb
      read(2,*) (q(i,j,l),i=1,6)
      if(l.ge.kstep - 1) write(4,999) (q(i,j,l),i=1,6)
10    continue
      if(l.eq.(kstep - 1)) goto 15
      l = l + 1
      go to 5
c
15    call gettim(ih0,im0,is0,iss0)
      write(*,*) ' Vreme sa lokalnog sata na pocetku racuna:'
      write(*,'(25x,i2.2,1h:,i2.2,1h:,i2.2,1h.,i2.2)') ih0,im0,
     *is0,iss0
      ct0=ih0+im0/60.+(is0+iss0/100.)/3600.
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' RACUN JE U TOKU !!'
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' '
c
      time(kstep) = time(kstep - 1) + step
      wstep = time(kstep - 1) + index*step
c.......................................................................
      call f-sym(0)
c.......................................................................
35    do 45 j=0,nb
      do 40 i=1,6
      a(i,j) = 0.
      b(i,j) = 0.
40    continue
45    continue
c..MULTISTEP............................................................
      do 60 j=0,nb
      do 55 i=1,6
      do 50 l=0,kstep - 1
      a(i,j) = a(i,j) + alpha(l)*q(i,j,l)
      b(i,j) = b(i,j) + beta(l)*rh(i,j,l)
50    continue
      q(i,j,kstep) = (step)*b(i,j) - a(i,j)
55    continue
60    continue
c.......................................................................
      if(time(kstep).ge.wstep) then
      write(*,997) wstep
      write(4,998) (wstep - time0)/365.2422
      do 76 j=0,nb
      write(4,999) (q(i,j,kstep),i=1,6)
76    continue
      wstep = wstep + index*step
```

```
      else
      endif
      if(time(kstep).gt.timemax) goto 106
      time(kstep) = time(kstep) + step
      do 90 l=0,kstep - 1
      do 85 j=0,nb
      do 80 i=1,6
      q(i,j,l) = q(i,j,l+1)
 80   continue
 85   continue
      time(l) = time(l+1)
 90   continue
c.............................................................................
      call f-sym(1)
c.............................................................................
      do 105 l=0,kstep - 1
      do 100 j=0,nb
      do 95 m=0,nb
      fm(j,m,l) = fm(j,m,l+1)
 95   continue
 100  continue
 105  continue
      goto 35
      c
 106  call gettim(ih1,im1,is1,iss1)
      write(*,*) ' Vreme sa lokalnog sata na kraju racuna:'
      write(*,'(25x,i2.2,1h:,i2.2,1h:,i2.2,1h.,i2.2)') ih1,im1,
      *is1,iss1
      ct1=ih1+im1/60.+(is1+iss1/100.)/3600.
      write(*,*) 'ukupno vreme racuna '
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ct1 - ct0
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' '
c
 997  format(f20.1)
 998  format(e20.10)
 999  format(6f22.16)
      stop
      end
c ....Right hand sides..............................
      function funk(i,j,l)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      common /bl1/ gama,nb,kstep,
      * q(1:6,0:10,0:17),rm(0:10),fm(0:10,0:10,0:17)
      summ = 0.
      funk = 0.
      do 10 m=0,nb
```

```
      if(m.eq.j) goto 10
      summ = summ + fm(j,m,l)*(q(i,m,l) - q(i,j,l))
10    continue
      funk = summ
      return
      end
c....Force function.....................................
      function force(j,m,l)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      external dist
      common /bl1/ gama,nb,kstep,
     * q(1:6,0:10,0:17),rm(0:10),fm(0:10,0:10,0:17)
      force = gama*rm(j)*rm(m)/dist(j,m,l)**3
      return
      end
c....Distance between bodies.............................
      function dist(j,m,l)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      common /bl1/ gama,nb,kstep,
     * q(1:6,0:10,0:17),rm(0:10),fm(0:10,0:10,0:17)
      dist = dsqrt((q(1,j,l) - q(1,m,l))**2 +
     * (q(3,j,l) - q(3,m,l))**2 +
     * (q(5,j,l) - q(5,m,l))**2)
      return
      end
c....Right hand sides....................................
      function rh(i,j,l)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      external funk,dist
      common /bl1/ gama,nb,kstep,
     * q(1:6,0:10,0:17),rm(0:10),fm(0:10,0:10,0:17)
      if(i.eq.1.or.i.eq.3.or.i.eq.5) then
      rh = q(i+1,j,l)
      else
      rh = funk(i-1,j,l)/rm(j)
      endif
      return
      end
      subroutine f-sym(icont)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      external funk,dist
      common /bl1/ gama,nb,kstep,
     * q(1:6,0:10,0:17),rm(0:10),fm(0:10,0:10,0:17)
      if(icont.eq.0) then
c..SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,0:kstep-1) RIGHT UPPER BLOCK .........
      do 15 l=0,kstep - 1
      do 10 j=0,nb
      do 5 m=j + 1,nb
```

```
      fm(j,m,l) = force(j,m,l)
 5    continue
 10   continue
 15   continue
c...SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,0:kstep-1) LEFT LOWER BLOCK ..........
      do 30 l=0,kstep - 1
      do 25 j=0,nb
      do 20 m=j + 1,nb
      fm(m,j,l) = fm(j,m,l)
 20   continue
 25   continue
 30   continue
      else
c...SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,kstep) RIGHT UPPER BLOCK ..........
      do 40 j=0,nb
      do 35 m=j + 1,nb
      fm(j,m,kstep) = force(j,m,kstep )
 35   continue
 40   continue
c...SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,0:kstep-1) LEFT LOWER BLOCK ..........
      do 50 j=0,nb
      do 45 m=j + 1,nb
      fm(m,j,l) = fm(j,m,l)
 45   continue
 50   continue
      endif
      return
      end
```

```
      fm(j,m,l) = force(j,m,l)
    5 continue
   10 continue
   15 continue
c..SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,0:kstep-1) LEFT LOWER BLOCK ..........
      do 30 l=0,kstep - 1
      do 25 j=0,nb
      do 20 m=j + 1,nb
      fm(m,j,l) = fm(j,m,l)
   20 continue
   25 continue
   30 continue
      else
c..SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,kstep) RIGHT UPPER BLOCK ..........
      do 40 j=0,nb
      do 35 m=j + 1,nb
      fm(j,m,kstep) = force(j,m,kstep )
   35 continue
   40 continue
c..SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,0:kstep-1) LEFT LOWER BLOCK ..........
      do 50 j=0,nb
      do 45 m=j + 1,nb
      fm(m,j,l) = fm(j,m,l)
   45 continue
   50 continue
      endif
      return
      end
```

```
      programe mu-1i
      implicit real*8(a-h,o-z)
c Implicit, K-step method for integration of sistem of N+1(=10) ordinary
c differential equations.
      external funk,dist
      common /bl1/ gama,nb,kstep,q(1:6,0:10,0:16),rm(0:10),
      * fm(0:10,0:10,0:16)
      common /bl2/ alphae(0:20),betae(0:20),alphai(0:20),betai(0:20),
      * a(1:6,0:10),b(1:6,0:10),time(0:16),step
      open(1,file='coef1e',status='old',access='sequential')
      open(2,file='coef1i',status='old',access='sequential')
      open(3,file='input',status='old',access='sequential')
      open(4,file='mase',status='old',access='sequential')
      open(5,file='outbar-v.dat',status='new',access='sequential')
      open(6,file='mpar',status='old',access='sequential')
      data gama/0.01720209895d0/
      gama = gama*gama
      read(1,*) kstep
      read(1,*) (num,alphae(i),betae(i),i=0,kstep - 1)
      read(2,*) kstep
      read(2,*) (num,alphai(i),betai(i),i=0,kstep - 1)
      alphae(kstep) = 1.d0
      betae(kstep) = 0.d0
      read(6,*) time0,nb,step,timemax,index
      do 4 i=0,nb
      read(4,*) num,rm(i)
      rm(i) = 1./rm(i)
4 continue
      write(5,*) nb,int((timemax-time0)/(index*step))
      l=0
5 read(3,*) time(l)
      write(5,998) (time(l)-time0)/365.2422
      do 10 j=0,nb
      read(3,*) (q(i,j,l),i=1,6)
      write(5,999) (q(i,j,l),i=1,6)
10 continue
      if(l.eq.(kstep - 1)) goto 15
      l = l + 1
      go to 5
c
15 call gettim(ih0,im0,is0,iss0)
      write(*,*) ' Vreme sa lokalnog sata na pocetku racuna:'
      write(*,'(25x,i2.2,1h:,i2.2,1h:,i2.2,1h.,i2.2)') ih0,im0,
      *is0,iss0
      ct0=ih0+im0/60.+(is0+iss0/100.)/3600.
      write(*,*) ' '
```

```
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' RACUN JE U TOKU !!'
      write(*,*) ' '
      write(*,*) ' '
c
      time(kstep) = time(kstep - 1) + step
      wstep = time(kstep - 1) + index*step
c...EVALUATION(0)..........................................................
      call f-sym(0)
c...PREDICTION.............................................................
35    call multi(0)
      icorr = 1
c...EVALUATION(icorr)......................................................
      call f-sym(1)
c...CORRECTION(icorr)......................................................
65    call multi(icorr)
c...EVALUATION(icorr)......................................................
      call f-sym(icorr)
c..........................................................................
      icorr = icorr + 1
      if(icorr.le.2) goto 65
111   if(time(kstep).ge.wstep) then
      write(*,997) wstep
      write(5,998) (wstep - time0)/365.2422
      do 112 j=0,nb
      write(5,999) (q(i,j,kstep),i=1,6)
112   continue
      wstep = wstep + index*step
      else
      endif
      if(time(kstep).gt.timemax) goto 135
      time(kstep) = time(kstep) + step
      do 120 l=0,kstep - 1
      do 115 j=0,nb
      do 113 i=1,6
      q(i,j,l) = q(i,j,l+1)
113   continue
115   continue
      time(l) = time(l+1)
120   continue
      do 130 l=0,kstep - 1
      do 129 j=0,nb
      do 128 m=0,nb
      fm(j,m,l) = fm(j,m,l+1)
128   continue
129   continue
130   continue
      goto 35
```

```
c
135 call gettim(ih1,im1,is1,iss1)
    write(*,*) ' Vreme sa lokalnog sata na kraju racuna:'
    write(*,'(25x,i2.2,1h:,i2.2,1h:,i2.2,1h.,i2.2)') ih1,im1,
    *is1,iss1
    ct1=ih1+im1/60.+(is1+iss1/100.)/3600.
    write(*,*) 'ukupno vreme racuna '
    write(*,*) ' '
    write(*,*) ct1 - ct0
    write(*,*) ' '
    write(*,*) ' '
c
997 format(f20.1)
998 format(e20.10)
999 format(6f22.16)
    stop
    end
c ....Right hand sides.................................
    function funk(i,j,l)
    implicit real*8(a-h,o-z)
    common /bl1/ gama,nb,kstep,q(1:6,0:10,0:16),rm(0:10),
    * fm(0:10,0:10,0:16)
    summ = 0.
    funk = 0.
    do 10 m=0,nb
    if(m.eq.j) goto 10
    summ = summ + fm(j,m,l)*(q(i,m,l) - q(i,j,l))
10 continue
    funk = summ
    return end
c.......Force function................................
    function force(j,m,l)
    implicit real*8(a-h,o-z)
    external dist
    common /bl1/ gama,nb,kstep,q(1:6,0:10,0:16),rm(0:10),
    * fm(0:10,0:10,0:16)
    force = gama*rm(j)*rm(m)/dist(j,m,l)**3
    return
    end
c.......Distance between bodies.......................
    function dist(j,m,l)
    implicit real*8(a-h,o-z)
    common /bl1/ gama,nb,kstep,q(1:6,0:10,0:16),rm(0:10),
    * fm(0:10,0:10,0:16)
    dist = dsqrt((q(1,j,l) - q(1,m,l))**2 +
    * (q(3,j,l) - q(3,m,l))**2 +
    * (q(5,j,l) - q(5,m,l))**2)
    return
```

```
      end
c.......Right hand sides................................
      function rh(i,j,l)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      external funk,dist
      common /bl1/ gama,nb,kstep,q(1:6,0:10,0:16),rm(0:10),
     * fm(0:10,0:10,0:16)
      if(i.eq.1.or.i.eq.3.or.i.eq.5) then
      rh = q(i+1,j,l)
      else
      rh = funk(i-1,j,l)/rm(j)
      endif
      return
      end
      subroutine f-sym(icont)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      external funk,dist
      common /bl1/ gama,nb,kstep,q(1:6,0:10,0:16),rm(0:10),
     * fm(0:10,0:10,0:16)
      if(icont.eq.0) then
c.....SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,0:kstep-1) RIGHT UPPER BLOCK ........
      do 15 l=0,kstep - 1
      do 10 j=0,nb
      do 5 m=j + 1,nb
      fm(j,m,l) = force(j,m,l)
5     continue
10    continue
15    continue
c.....SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,0:kstep-1) LEFT LOWER BLOCK ........
      do 30 l=0,kstep - 1
      do 25 j=0,nb
      do 20 m=j + 1,nb
      fm(m,j,l) = fm(j,m,l)
20    continue
25    continue
30    continue
      else
c.....SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,kstep) RIGHT UPPER BLOCK ........
      do 40 j=0,nb
      do 35 m=j + 1,nb
      fm(j,m,l) = force(j,m,l)
35    continue
40    continue
c.....SEQUENCE OF FUNCTIONS fm(0:nb,0:nb,kstep) LEFT LOWER BLOCK ........
      do 50 j=0,nb
      do 45 m=j + 1,nb
      fm(m,j,l) = fm(j,m,l)
45    continue
```

```
 50 continue
    endif
    return end
    subroutine multi(icorr)
    implicit real*8(a-h,o-z)
    external funk,dist
    common /bl1/ gama,nb,kstep,q(1:6,0:10,0:16),rm(0:10),
    * fm(0:10,0:10,0:16)
    common /bl2/ alphae(0:20),betae(0:20),alphai(0:20),betai(0:20),
    * a(1:6,0:10),b(1:6,0:10),time(0:16),step
    do 45 j=0,nb
    do 40 i=1,6
    a(i,j) = 0.
    b(i,j) = 0.
 40 continue
 45 continue
    if(icorr.eq.0) then
    do 60 j=0,nb
    do 55 i=1,6
    do 50 l=0,kstep - 1
    a(i,j) = a(i,j) + alphae(l)*q(i,j,l)
    b(i,j) = b(i,j) + betae(l)*rh(i,j,l)
 50 continue
    q(i,j,kstep) = (step)*b(i,j) - a(i,j)
 55 continue
 60 continue
    else
    do 70 j=0,nb
    do 69 i=1,6
    do 68 l=0,kstep - 1
    a(i,j) = a(i,j) + alphai(l)*q(i,j,l)
    b(i,j)= b(i,j) + betai(l)*rh(i,j,l+1)
 68 continue
    q(i,j,kstep) = (step)*b(i,j) - a(i,j)
 69 continue
 70 continue
    endif
    return
    end
```

```
n:=10;t:=0;q:=11;
Expand[Simplify[Expand[(u-1)*(u+1)*(u-(Cos[f]+I*Sin[f]))*(u-
(Cos[f]-I*Sin[f]))*(u-(Cos[g]+I*Sin[g]))*(u-(Cos[g]-I*Sin[g]))*
(u-(Cos[h]+I*Sin[h]))*(u-(Cos[h]-I*Sin[h]))*
(u-(Cos[o]+I*Sin[o]))*(u-(Cos[o]-I*Sin[o]))]]]
```

$$
\begin{aligned}
&-1 - 3 u^{2} - 2 u^{4} + 2 u^{6} + 3 u^{8} + u^{10} + 2 u\, Cos[f] + 4 u^{3} Cos[f] - 4 u^{7} Cos[f] - \\
&2 u^{9} Cos[f] + 2 u\, Cos[g] + 4 u^{3} Cos[g] - 4 u^{7} Cos[g] - 2 u^{9} Cos[g] - \\
&4 u^{2} Cos[f]\, Cos[g] - 4 u^{4} Cos[f]\, Cos[g] + 4 u^{6} Cos[f]\, Cos[g] + \\
&4 u^{8} Cos[f]\, Cos[g] + 2 u\, Cos[h] + 4 u^{3} Cos[h] - 4 u^{7} Cos[h] - 2 u^{9} Cos[h] - \\
&4 u^{2} Cos[f]\, Cos[h] - 4 u^{4} Cos[f]\, Cos[h] + 4 u^{6} Cos[f]\, Cos[h] + \\
&4 u^{8} Cos[f]\, Cos[h] - 4 u^{2} Cos[g]\, Cos[h] - 4 u^{4} Cos[g]\, Cos[h] + \\
&4 u^{6} Cos[g]\, Cos[h] + 4 u^{8} Cos[g]\, Cos[h] + 8 u^{3} Cos[f]\, Cos[g]\, Cos[h] - \\
&8 u^{7} Cos[f]\, Cos[g]\, Cos[h] + 2 u\, Cos[o] + 4 u^{3} Cos[o] - 4 u^{7} Cos[o] - \\
&2 u^{9} Cos[o] - 4 u^{2} Cos[f]\, Cos[o] - 4 u^{4} Cos[f]\, Cos[o] + 4 u^{6} Cos[f]\, Cos[o] + \\
&4 u^{8} Cos[f]\, Cos[o] - 4 u^{2} Cos[g]\, Cos[o] - 4 u^{4} Cos[g]\, Cos[o] + \\
&4 u^{6} Cos[g]\, Cos[o] + 4 u^{8} Cos[g]\, Cos[o] + 8 u^{3} Cos[f]\, Cos[g]\, Cos[o] - \\
&8 u^{7} Cos[f]\, Cos[g]\, Cos[o] - 4 u^{2} Cos[h]\, Cos[o] - 4 u^{4} Cos[h]\, Cos[o] + \\
&4 u^{6} Cos[h]\, Cos[o] + 4 u^{8} Cos[h]\, Cos[o] + 8 u^{3} Cos[f]\, Cos[h]\, Cos[o] - \\
&8 u^{7} Cos[f]\, Cos[h]\, Cos[o] + 8 u^{3} Cos[g]\, Cos[h]\, Cos[o] - \\
&8 u^{7} Cos[g]\, Cos[h]\, Cos[o] - 16 u^{4} Cos[f]\, Cos[g]\, Cos[h]\, Cos[o] + \\
&16 u^{6} Cos[f]\, Cos[g]\, Cos[h]\, Cos[o]
\end{aligned}
$$

```
a[0]:=-1;
a[1]:=2*(p+r+s+v);
a[2]:=-(3+4*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v));
a[3]:=4*((p+r+s+v)+2*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v));
a[4]:=-2*(1+2*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)+8*p*r*s*v);
a[5]:=0;
a[6]:=2*(1+2*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)+8*p*r*s*v);
a[7]:=-4*((p+r+s+v)+2*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v));
a[8]:=(3+4*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v));
a[9]:=-2*(p+r+s+v);
a[10]:=1;
b[10]:=b[0];b[9]:=b[1];b[8]:=b[2];b[7]:=b[3];b[6]:=b[4];
c:=Sum[a[k],{k,0,n}];
d:=Sum[(k-t)*a[k],{k,0,n}]==Sum[b[k],{k,0,n}];
Table[{0==Simplify[c],Simplify[d]}]
e:=(1/l!)*Sum[((k-t)^l)*a[k],{k,0,n}]==(1/(l-1)!)*
Sum[((k-t)^(l-1))*b[k],{k,0,n}];
Table[Simplify[e],{l,2,q,1}]
```

```
{True, 32 (-1 + p) (-1 + r) (-1 + s) (-1 + v) ==
  2 b[0] + 2 b[1] + 2 b[2] + 2 b[3] + 2 b[4] + b[5]}
{160 (-1 + p) (-1 + r) (-1 + s) (-1 + v) ==
  5 (2 b[0] + 2 b[1] + 2 b[2] + 2 b[3] + 2 b[4] + b[5]),
 (16 (88 - 35 p - 35 r + 32 p r - 35 s + 32 p s + 32 r s - 79 p r s - 35 v +
      32 p v + 32 r v - 79 p r v + 32 s v - 79 p s v - 79 r s v + 76 p r s v)) /
                                                          25 b[5]
 3 == 50 b[0] + 41 b[1] + 34 b[2] + 29 b[3] + 26 b[4] + -------,
                                                             2
 (80 (33 - 35 p - 35 r + 32 p r - 35 s + 32 p s + 32 r s - 29 p r s - 35 v +
      32 p v + 32 r v - 29 p r v + 32 s v - 29 p s v - 29 r s v + 26 p r s v)) /
  3 == (5 (200 b[0] + 146 b[1] + 104 b[2] + 74 b[3] + 56 b[4] + 25 b[5])) / 6,
 (4 (6616 - 5761 p - 5761 r + 4936 p r - 5761 s + 4936 p s + 4936 r s -
      4141 p r s - 5761 v + 4936 p v + 4936 r v - 4141 p r v + 4936 s v -
      4141 p s v - 4141 r s v + 3376 p r s v)) / 15 ==
  (10000 b[0] + 6562 b[1] + 4112 b[2] + 2482 b[3] + 1552 b[4] + 625 b[5]) / 24,
 (4 (5848 - 4783 p - 4783 r + 3808 p r - 4783 s + 3808 p s + 3808 r s -
      2923 p r s - 4783 v + 3808 p v + 3808 r v - 2923 p r v + 3808 s v -
      2923 p s v - 2923 r s v + 2128 p r s v)) / 9 ==
  (5 (4000 b[0] + 2362 b[1] + 1312 b[2] + 682 b[3] + 352 b[4] + 125 b[5])) / 24,
 (2 (525588 - [illegible]
      [illegible]
      205339 p r v + 295072 s v - 205339 p s v - 205339 r s v + 131776 p r s v))
   / 315 == (1000000 b[0] + 531442 b[1] + 262208 b[2] + 118378 b[3] +
     50752 b[4] + 15625 b[5]) / 720,
 (2 (119968 - 85255 p - 85255 r + 57472 p r - 85255 s + 57472 p s + 57472 r s -
      35989 p r s - 85255 v + 57472 p v + 57472 r v - 35989 p r v + 57472 s v -
      35989 p s v - 35989 r s v + 20176 p r s v)) / 63 ==
  (2000000 b[0] + 956594 b[1] + 419456 b[2] + 165146 b[3] + 59264 b[4] +
     15625 b[5]) / 1008, (44446336 - 29255521 p - 29255521 r + 18004096 p r -
     29255521 s + 18004096 p s + 18004096 r s - 10083481 p r s - 29255521 v +
```

```
   18004096 p v + 18004096 r v - 10083481 p r v + 18004096 s v -
   10083481 p s v - 10083481 r s v + 4907776 p r s v) / 11340 ==
(100000000 b[0] + 43046722 b[1] + 16777472 b[2] + 5771362 b[3] + 1745152 b[4] +
   390625 b[5]) / 40320, (8337536 - 5064521 p - 5064521 r + 2832896 p r -
   5064521 s + 2832896 p s + 2832896 r s - 1412081 p r s - 5064521 v +
   2832896 p v + 2832896 r v - 1412081 p r v + 2832896 s v - 1412081 p s v -
   1412081 r s v + 594176 p r s v) / 2268 ==
(200000000 b[0] + 77484098 b[1] + 26843648 b[2] + 8074658 b[3] + 2067968 b[4] +
   390625 b[5]) / 72576, (3952718848 - 2208459925 p - 2208459925 r +
   1118566912 p r - 2208459925 s + 1118566912 p s + 1118566912 r s -
   494287399 p r s - 2208459925 v + 1118566912 p v + 1118566912 r v -
   494287399 p r v + 1118566912 s v - 494287399 p s v - 494287399 r s v +
   179301376 p r s v) / 1247400 ==
(10000000000 b[0] + 3486784402 b[1] + 1073742848 b[2] + 282534298 b[3] +
   61514752 b[4] + 9765625 b[5]) / 3628800
```

```
Simplify[Solve[{2*b[0]+2*b[1]+2*b[2]+2*b[3]+2*b[4]+b[5]==
32*(p-1)*(r-1)*(s-1)*(v-1),
50*b[0]+41*b[1]+34*b[2]+29*b[3]+26*b[4]+(25/2)*b[5]==
(16/3)*(88-85*(p+r+s+v)+82*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
79*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+76*p*r*s*v),
200*b[0]+146*b[1]+104*b[2]+74*b[3]+56*b[4]+25*b[5]==
32*(38-35*(p+r+s+v)+32*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
29*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+26*p*r*s*v),
10000*b[0]+6562*b[1]+4112*b[2]+2482*b[3]+1552*b[4]+625*b[5]==
(32/5)*(6616-5761*(p+r+s+v)+4936*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
4141*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+3376*p*r*s*v),
4000*b[0]+2362*b[1]+1312*b[2]+682*b[3]+352*b[4]+125*b[5]==
(32/15)*(5848-4783*(p+r+s+v)+3808*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
2923*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+2128*p*r*s*v),
1000000*b[0]+531442*b[1]+262208*b[2]+118378*b[3]+50752*b[4]+15625*b[5]==
(32/7)*(525568-401605*(p+r+s+v)+295072*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
205339*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+131776*p*r*s*v),
2000000*b[0]+956594*b[1]+419456*b[2]+165146*b[3]+59264*b[4]+15625*b[5]==
32*(119968-85255*(p+r+s+v)+57472*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
35989*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+20176*p*r*s*v),
100000000*b[0]+43046722*b[1]+16777472*b[2]+5771362*b[3]+1745152*b[4]+
390625*b[5]==
(32/9)*(44446336-29255521*(p+r+s+v)+18004096*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
10083481*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+4907776*p*r*s*v),
200000000*b[0]+77484098*b[1]+26843648*b[2]+8074658*b[3]+2067968*b[4]+
390625*b[5]==
32*(8337536-5064521*(p+r+s+v)+2832896*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
1412081*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+594176*p*r*s*v),
10000000000*b[0]+3486784402*b[1]+1073742848*b[2]+282534298*b[3]+61514752*b[4]+
9765625*b[5]==
(32/11)*(3952718848-2208459925*(p+r+s+v)+1118566912*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
494287399*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+179301376*p*r*s*v)},
{b[0],b[1],b[2],b[3],b[4],b[5]}]]
```

```
{{b[0] -> (126420 - 4984 p - 4984 r + 1220 p r - 4984 s + 1220 p s + 1220 r s -
     496 p r s - 4984 v + 1220 p v + 1220 r v - 496 p r v + 1220 s v -
     496 p s v - 496 r s v + [illegible] p r s v) / 467775,
  b[1] -> (4 (203069 - 78163 p - 78163 r + 6152 p r - 78163 s + 6152 p s +
       6152 r s - 2098 p r s - 78163 v + 6152 p v + 6152 r v - 2098 p r v +
       6152 s v - 2098 p s v - 2098 r s v + 1037 p r s v)) / 467775,
  b[2] -> (49078 - 433528 p - 433528 r + 234868 p r - 433528 s + 234868 p s +
     234868 r s - 27152 p r s - 433528 v + 234868 p v + 234868 r v -
     27152 p r v + 234868 s v - 27152 p s v - 27152 r s v + 11293 p r s v) /
   155925, b[3] ->
   (8 (162904 - 44929 p - 44929 r + 98224 p r - 44929 s + 98224 p s + 98224 r s -
       52914 p r s - 44929 v + 98224 p v + 98224 r v - 52914 p r v + 98224 s v -
       52914 p s v - [illegible] r s v + [illegible] p r s v)) / [illegible],
  b[4] -> (2 ([illegible]
       38072 r s - 34272 p r s - 75632 v + 38072 p v + 38072 r v - 34272 p r v +
       38072 s v - 34272 p s v - 34272 r s v + 57707 p r s v)) / 17325,
  b[5] -> (8 (264764 - 62177 p - 62177 r + 199160 p r - 62177 s + 199160 p s +
       199160 r s - 124779 p r s - 62177 v + 199160 p v + 199160 r v -
       124779 p r v + 199160 s v - 124779 p s v - 124779 r s v + 379571 p r s v))
     / 155925}}
```

```
b[0]:=(126422+4984*(p+r+s+v)+1220*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)+
496*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+263*p*r*s*v)/467775;
b[1]:=4*(203068-78163*(p+r+s+v)-6152*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
2098*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)-1037*p*r*s*v)/467775;
b[2]:=(49078-433528*(p+r+s+v)+234868*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)+
27152*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+11293*p*r*s*v)/155925;
b[3]:=8*(162904-44929*(p+r+s+v)+98224*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
62914*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)-9026*p*r*s*v)/155925;
b[4]:=2*(-12748-75032*(p+r+s+v)+38072*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
84272*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+57707*p*r*s*v)/17325;
b[5]:=8*(264764-62177*(p+r+s+v)+199160*(p*r+p*s+p*v+r*s+r*v+s*v)-
124778*(p*r*s+p*r*v+p*s*v+r*s*v)+379571*p*r*s*v)/155925;
e:=(1/11!)*Sum[((k-t)^11)*a[k],{k,0,n}]-(1/(11-1)!)*Sum[((k-t)^(11-1))*b[k],
{k,0,n}];
Table[Simplify[e]]
e:=(1/12!)*Sum[((k-t)^12)*a[k],{k,0,n}]-(1/(12-1)!)*Sum[((k-t)^(12-1))*b[k],
{k,0,n}];
Table[Simplify[e]]
e:=(1/13!)*Sum[((k-t)^13)*a[k],{k,0,n}]-(1/(13-1)!)*Sum[((k-t)^(13-1))*b[k],
{k,0,n}];
Table[Simplify[e]]

0

0

(-5539692 - 1213468 p - 1213468 r - 451832 p r - 1213468 s - 451832 p s -

   451832 r s - 225208 p r s - 1213468 v - 451832 p v - 451832 r v -

   225208 p r v - 451832 s v - 225208 p s v - 225208 r s v - 133787 p r s v)
 
 1277025750

p:=Sqrt[3]/2;r:=1/2;s:=-1/2;v:=-Sqrt[3]/2;
Table[a[w],{w,0,n}]
Table[b[w],{w,0,n}]
Table[{w,N[a[w],32],N[b[w],32]},{w,0,n}]

{-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1}

 8247    13763      5183    6221      71111    27617      71111    6221      5183    13763
{-----, -----, -(----), ----, -(-----), -----, -(-----), ----, -(----), -----,
 30800   7700      4400    1925      15400    3850       15400    1925      4400    7700

 8247
 -----}
 30800

{{0, -1., 0.26775974025974025974025974025974},

 {1, 0, 1.7874025974025974025974025974026},

 {2, 1., -1.1779545454545454545454545454545},

 {3, 0, 3.2316883116883116883116883116883},

 {4, -1., -4.6175974025974025974025974025974},

 {5, 0, 7.[illegible]},

 {6, 1., [illegible]},

 {7, 0, 3.[illegible]},

 {8, -1., -1.1779545454545454545454545454545},

 {9, 0, 1.7874025974025974025974025974026},

 {10, 1., 0.26775974025974025974025974025974}}
```

```
(*periodicnost*)
p3:=((1-x)^10)*Sum[a[w]*((1+x)/(1-x))^w,{w,0,10}]
p4:=((1-x)^10)*Sum[b[w]*((1+x)/(1-x))^w,{w,0,10}]
Table[Simplify[p3]]
Simplify[Expand[Table[Simplify[p4]]]]
```

$$4 x (3 + 52 x^2 + 146 x^4 + 52 x^6 + 3 x^8)$$

$$-6 + 102 x^2 + \frac{1294 x^4}{5} - \frac{20 x^6}{7} + \frac{10438 x^8}{175} + \frac{54114 x^{10}}{1925}$$

```
pp:=64*x*(1-p-(1+p)*x^2)*(1-r-(1+r)*x^2)*(1-s-(1+s)*x^2)*
(1-v-(1+v)*x^2)-
(32*h/467775)*(467775*(1-(p+r+s+v)+(p*r+p*s+r*s+p*v+r*v+s*v)-
(p*r*s+p*r*v+p*s*v+s*r*v)+p*r*s*v)-
x^2*(1715175-779625*(p+r+s+v)-155925*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)+
1091475*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)-2027025*p*r*s*v)+
x^4*(2141370+353430*(p+r+s+v)-977130*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)-
270270*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)+3388770*p*r*s*v)-
x^6*(747450+1040490*(p+r+s+v)+290070*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)-
996930*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)-2662110*p*r*s*v)-
x^8*(506649-213609*(p+r+s+v)-536811*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)-
750189*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)-914991*p*r*s*v)+
x^10*(519617+200641*(p+r+s+v)+122561*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)+
90817*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)+73985*p*r*s*v))
Expand[Table[Simplify[pp]]]
```

$$-6 h + 12 x + 102 h x^2 - 208 x^3 + \frac{1294 h x^4}{5} + 584 x^5 - \frac{20 h x^6}{7} - 208 x^7 +$$

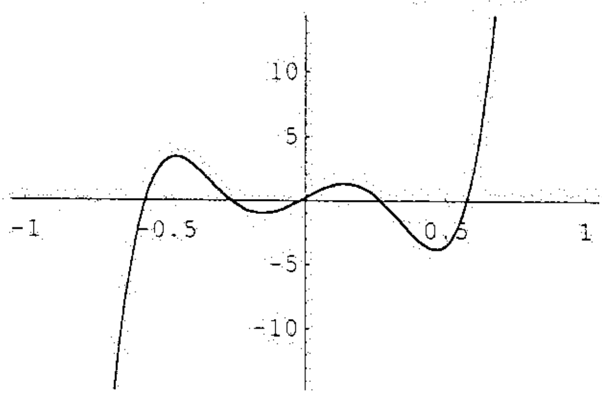
$$\frac{10438 h x^8}{175} + 12 x^9 + \frac{54114 h x^{10}}{1925}$$

```
pp:=64*x*(1-p-(1+p)*x^2)*(1-r-(1+r)*x^2)*(1-s-(1+s)*x^2)*
(1-v-(1+v)*x^2)-
(32*h/467775)*(467775*(1-(p+r+s+v)+(p*r+p*s+r*s+p*v+r*v+s*v)-
(p*r*s+p*r*v+p*s*v+s*r*v)+p*r*s*v)-
x^2*(1715175-779625*(p+r+s+v)-155925*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)+
1091475*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)-2027025*p*r*s*v)+
x^4*(2141370+353430*(p+r+s+v)-977130*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)-
270270*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)+3388770*p*r*s*v)-
x^6*(747450+1040490*(p+r+s+v)+290070*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)-
996930*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)-2662110*p*r*s*v)-
x^8*(506649-213609*(p+r+s+v)-536811*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)+
750189*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)-914991*p*r*s*v)+
x^10*(519617+200641*(p+r+s+v)+122561*(p*r+p*s+r*s+p*v+s*v+r*v)+
90817*(p*r*s+p*r*v+r*s*v+p*s*v)+73985*p*r*s*v))
p:=Sqrt[3]/2
r:=1/2;
s:=-1/2;
v:=-Sqrt[3]/2
h:=-0.0426579982;
Table[Simplify[pp]]
N[Solve[pp==0,x],16]
Plot[pp,{x,-1.,1.}]
```

```
                          2          3             4         5             6
0.255948 - 12 x - 4.35122 x  + 208 x  + 15.9546 x  - 594 x  + 0.12188 x  +

      7           8        9           10
208 x  - 2.54437 x  - 12 x  + 1.11217 x

{{x -> -6.612256777873736}, {x -> -6.211725699841678}, {x -> -1.705425730231361},
 {x -> -0.5773610993396305}, {x -> -0.2679491869452195},
 {x -> 0.02133223406219093}, {x -> 0.2679491970904853},
 {x -> 0.5773402896520611}, {x -> 1.762677506275615}, {x -> 3.181130541170684}}
```



-Graphics-

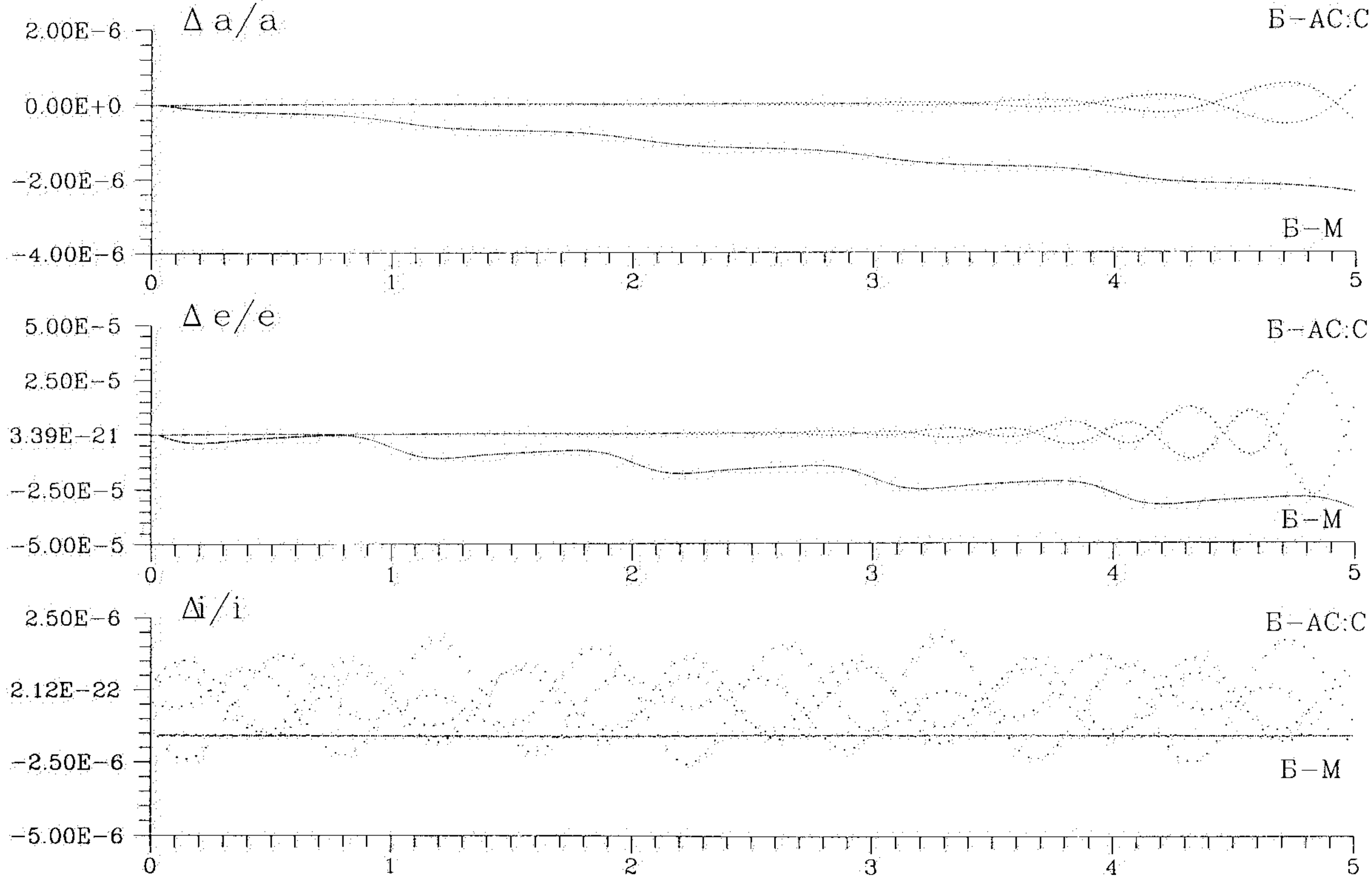
ПРИЛОГ 3Б

ГРАФИЦИ ИНТЕГРАЦИЈЕ ПРОБЛЕМА ДВА ТЕЛА (СУНЦЕ + ЗЕМЉА)

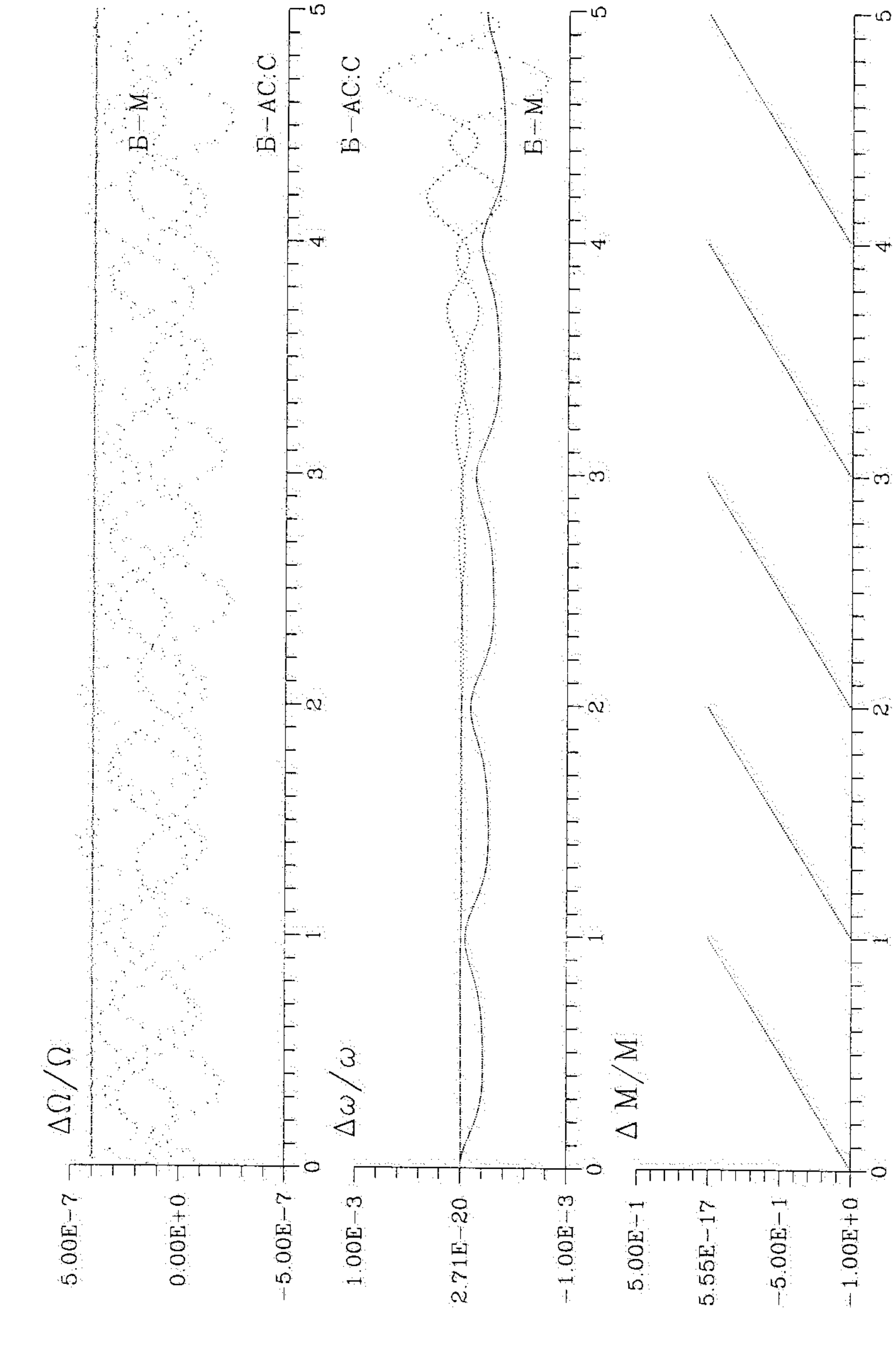
Приказане су релативне грешке у путањским елементима.

3Б−1

4−корачне методе



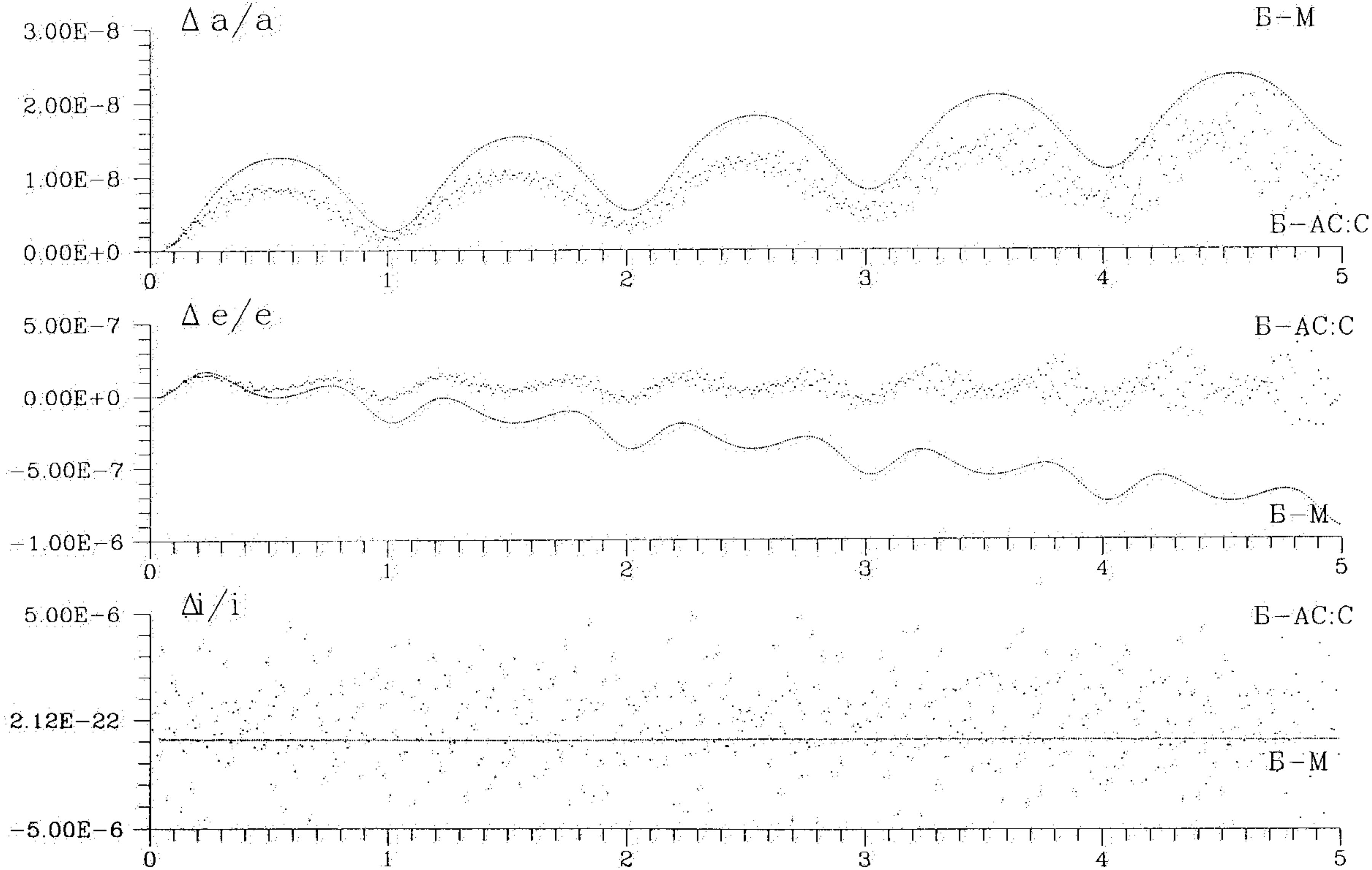
3Б−2



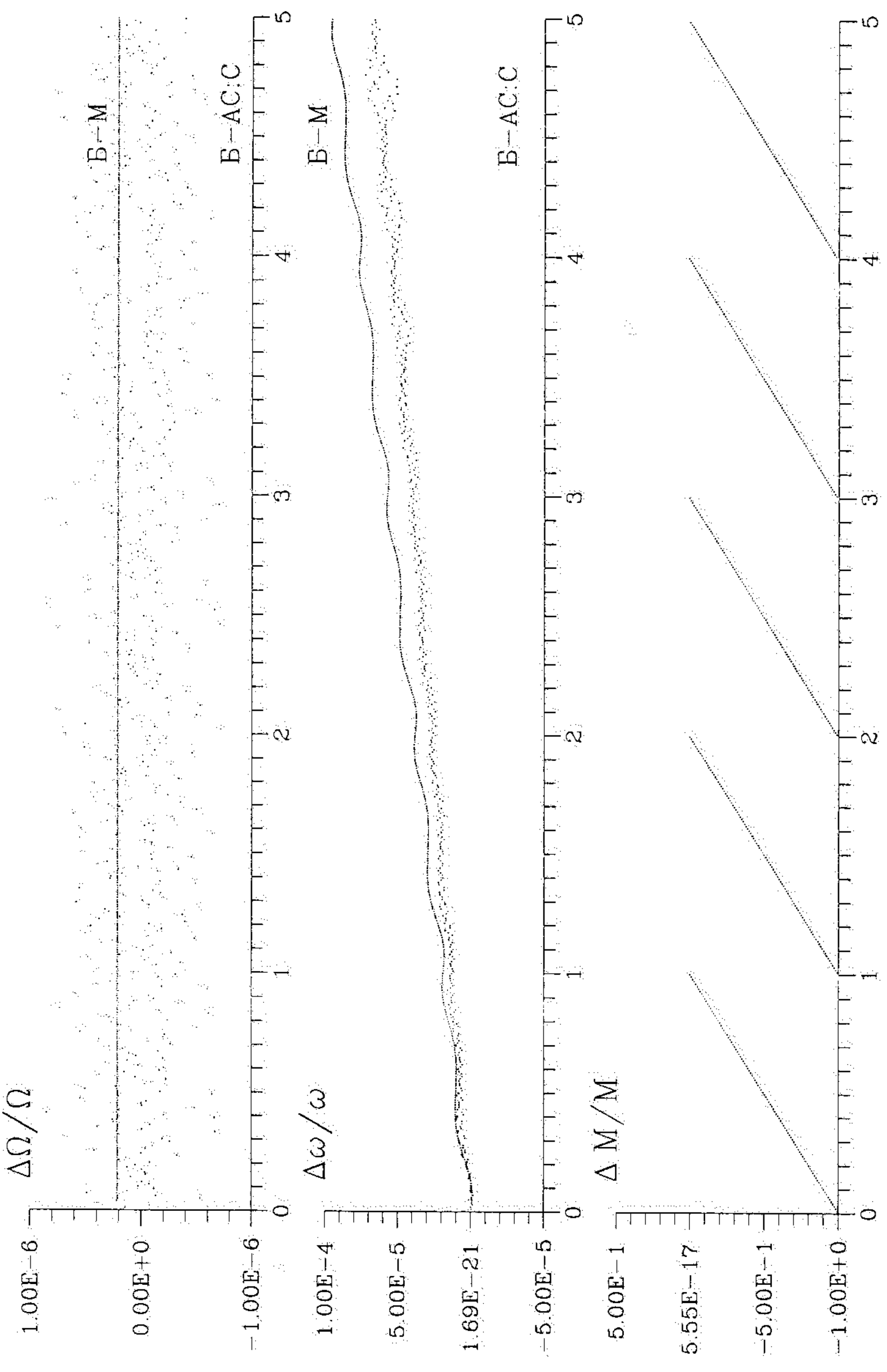
ΔΩ/Ω
Б−М
Б−АС.С
5.00E−7
0.00E+0
−5.00E−7
Δω/ω
Б−АС.С
Б−М
1.00E−3
2.71E−20
−1.00E−3
Δ M/M
5.00E−1
5.55E−17
−5.00E−1
−1.00E+0
0
1
2
3
4
5

3Б-3

5-корачне методе

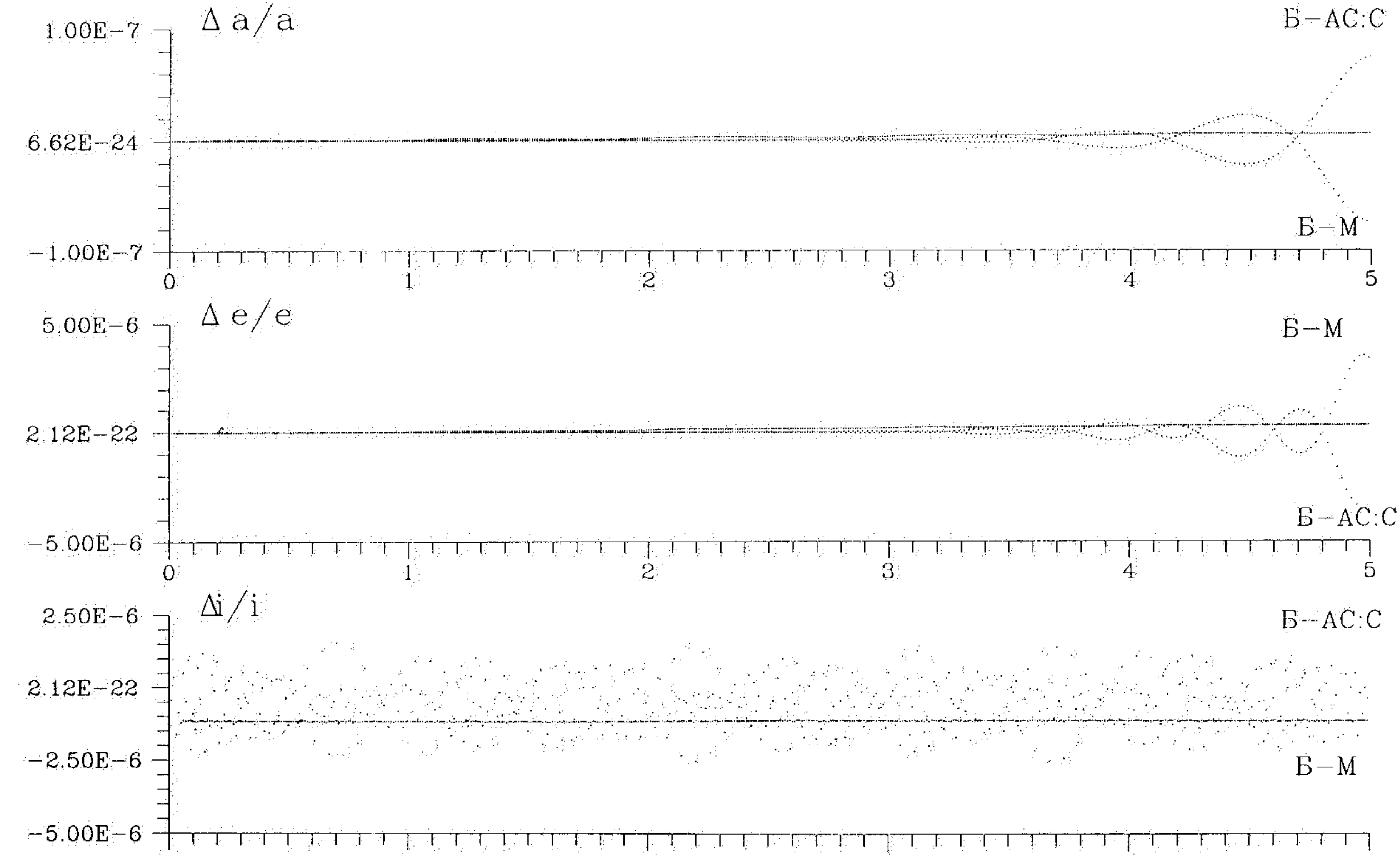


ЗБ-4

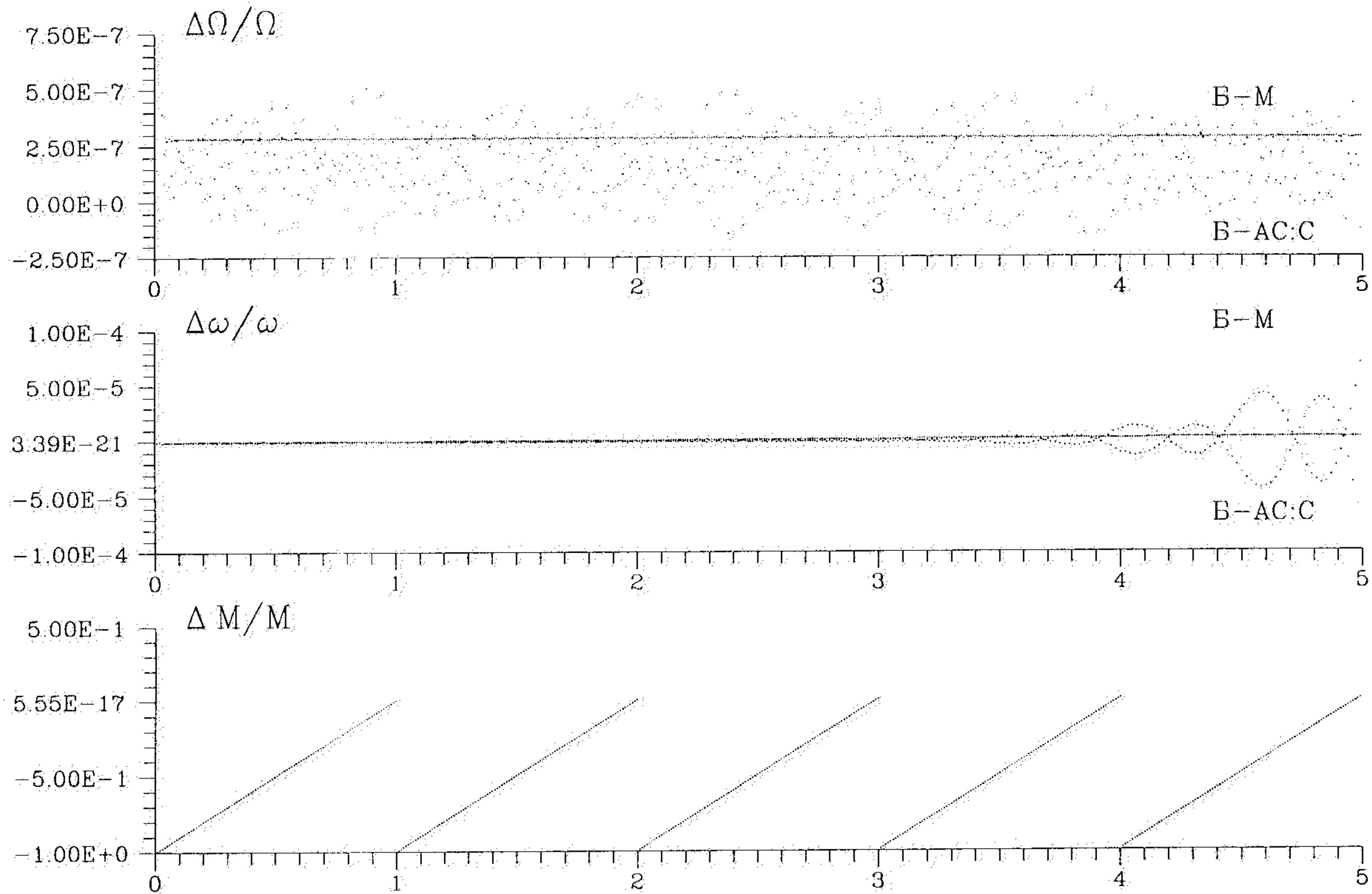

ΔΩ/Ω
Б-М
Б-AC:C
1.00E-6
0.00E+0
-1.00E-6
Δω/ω
Б-М
Б-AC:C
1.00E-4
5.00E-5
1.69E-21
-5.00E-5
Δ M/M
5.00E-1
5.55E-17
-5.00E-1
-1.00E+0
0
1
2
3
4
5

ЗБ-5

6-корачне методе

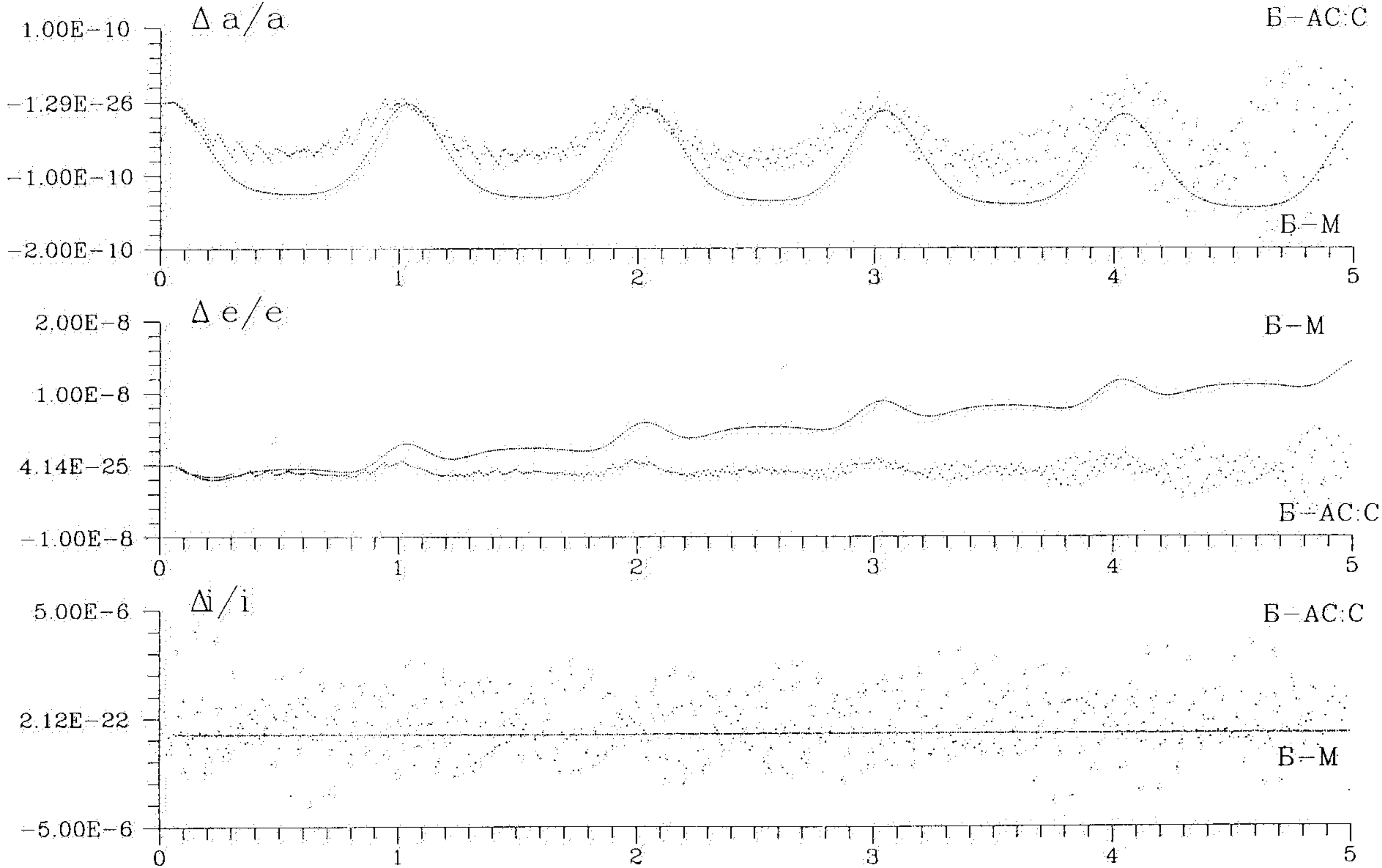


3Б-6

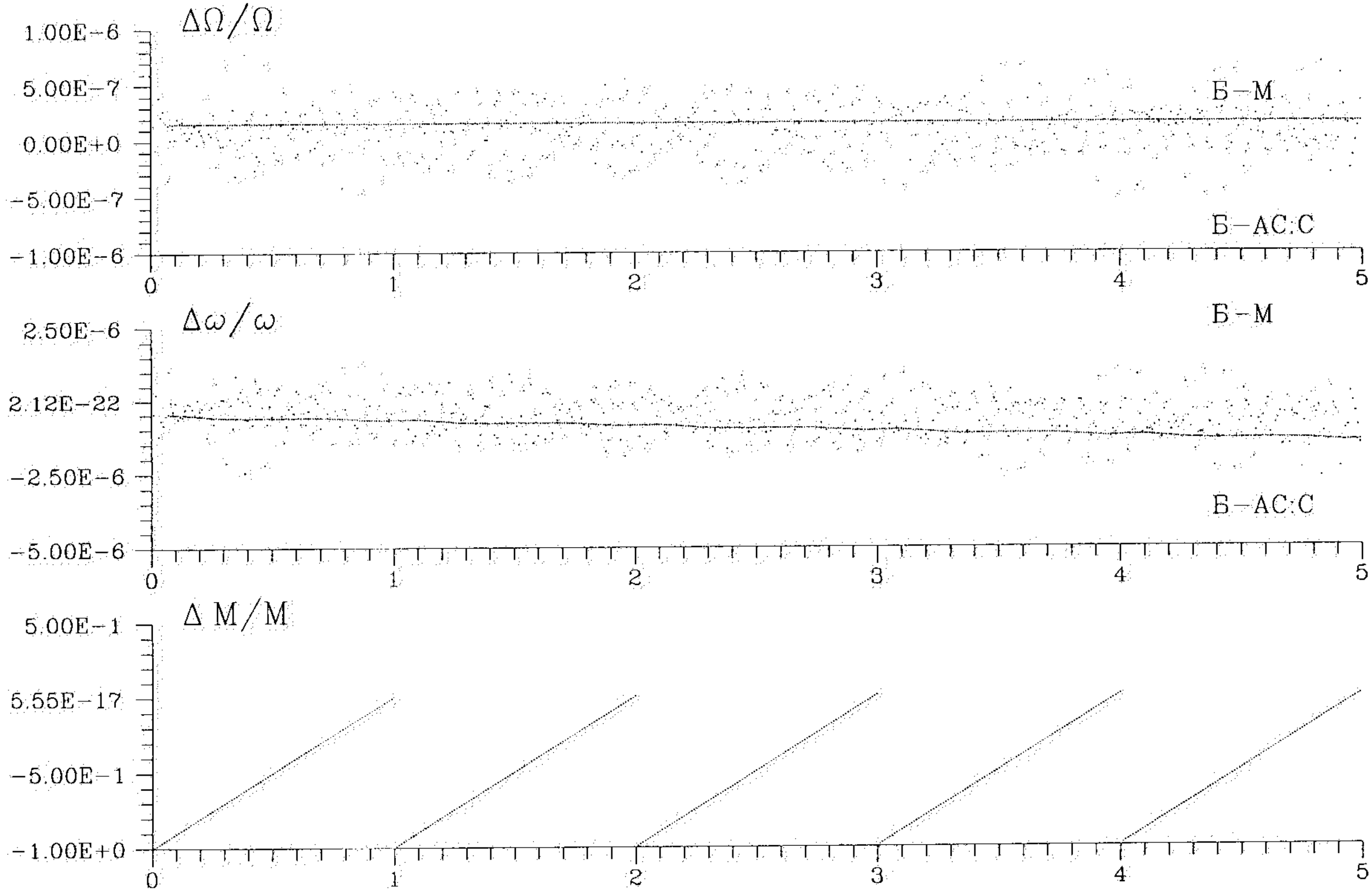

ΔΩ/Ω
7.50E-7
5.00E-7
2.50E-7
0.00E+0
-2.50E-7
Б-М
Б-АС:С
Δω/ω
1.00E-4
5.00E-5
3.39E-21
-5.00E-5
-1.00E-4
Б-М
Б-АС:С
Δ M/M
5.00E-1
5.55E-17
-5.00E-1
-1.00E+0
0
1
2
3
4
5

3Б-7

7-корачне методе



3Б-8



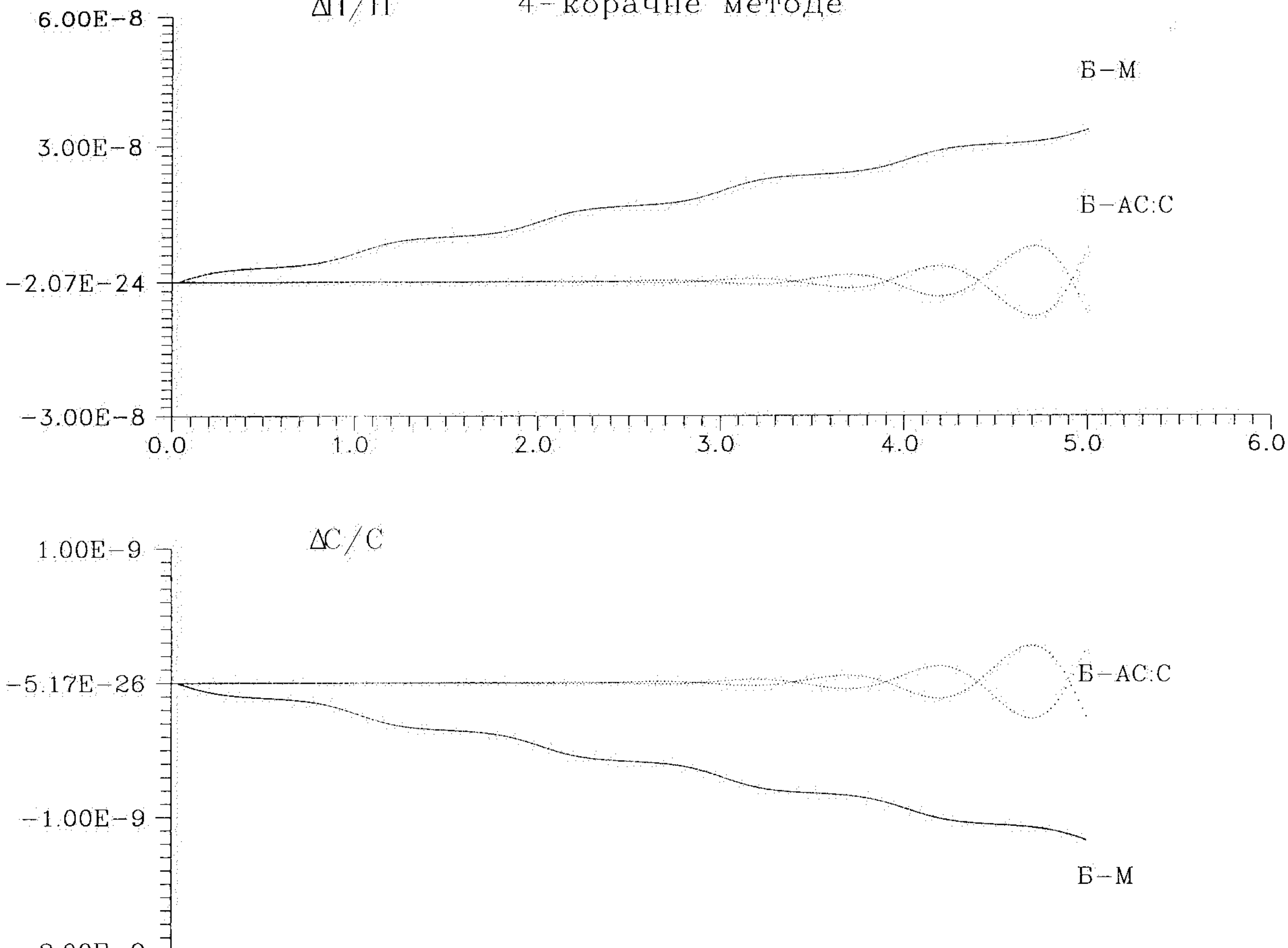
ΔΩ/Ω
1.00E-6
5.00E-7
0.00E+0
-5.00E-7
-1.00E-6
Б-М
Б-АС:С
Δω/ω
2.50E-6
2.12E-22
-2.50E-6
-5.00E-6
Б-М
Б-АС:С
Δ M/M
5.00E-1
5.55E-17
-5.00E-1
-1.00E+0
0
1
2
3
4
5

ПРИЛОГ 3В

ГРАФИЦИ ИНТЕГРАЦИЈЕ ПРОБЛЕМА ПЕТ ТЕЛА

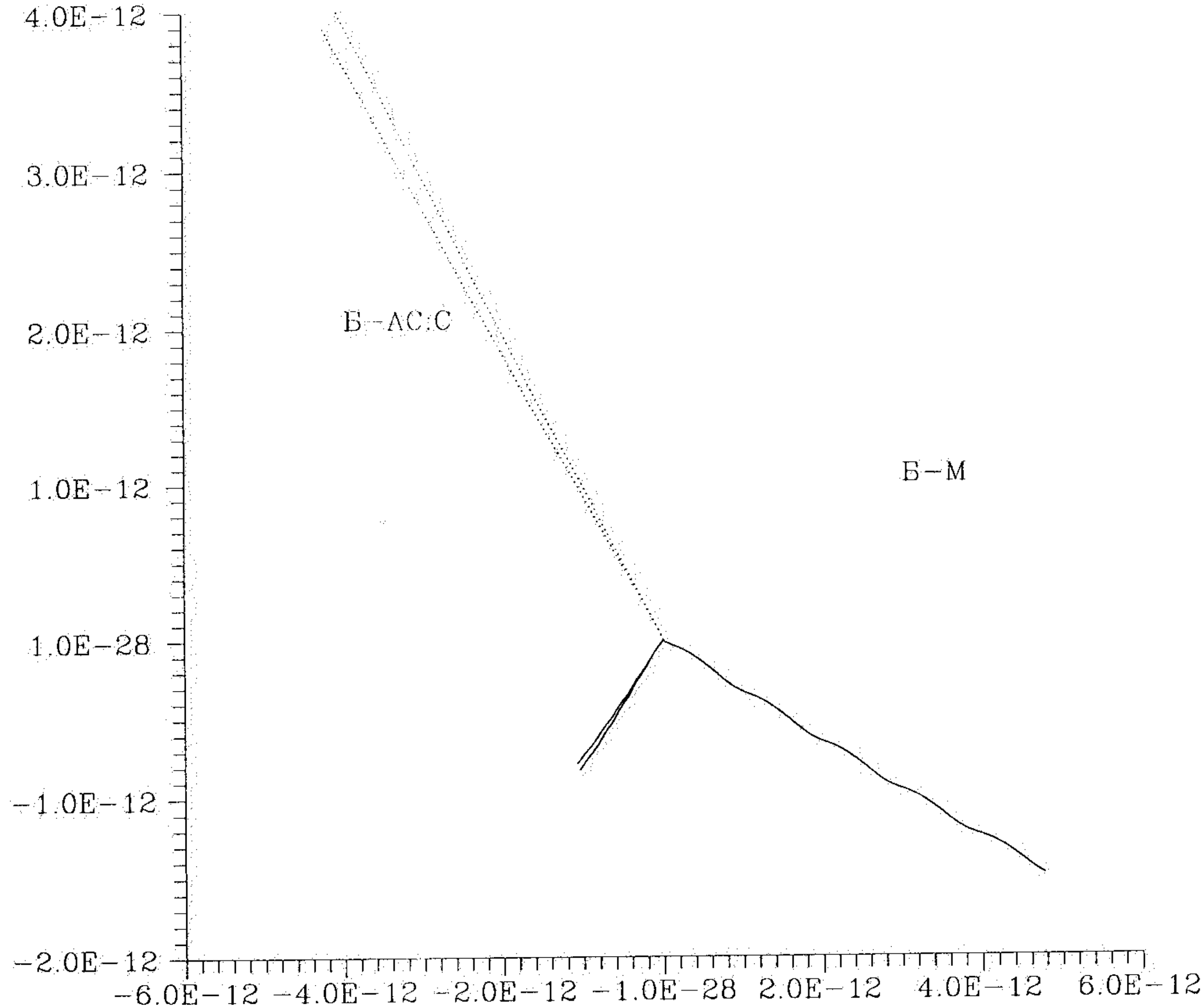
(Сунце + Земља + Марс + Јупитер + Сатурн)

Приказане су релативне грешке у првим интегралима и то: у интегралу енергије, у интегралу угаоног момента и пројекције положаја и брзине барицентра на екваторску раван.


ΔH/H
4-корачне методе
Б−М
Б−АС:С
6.00E−8
3.00E−8
−2.07E−24
−3.00E−8
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
ΔC/C
1.00E−9
−5.17E−26
−1.00E−9
Б−АС:С
Б−М

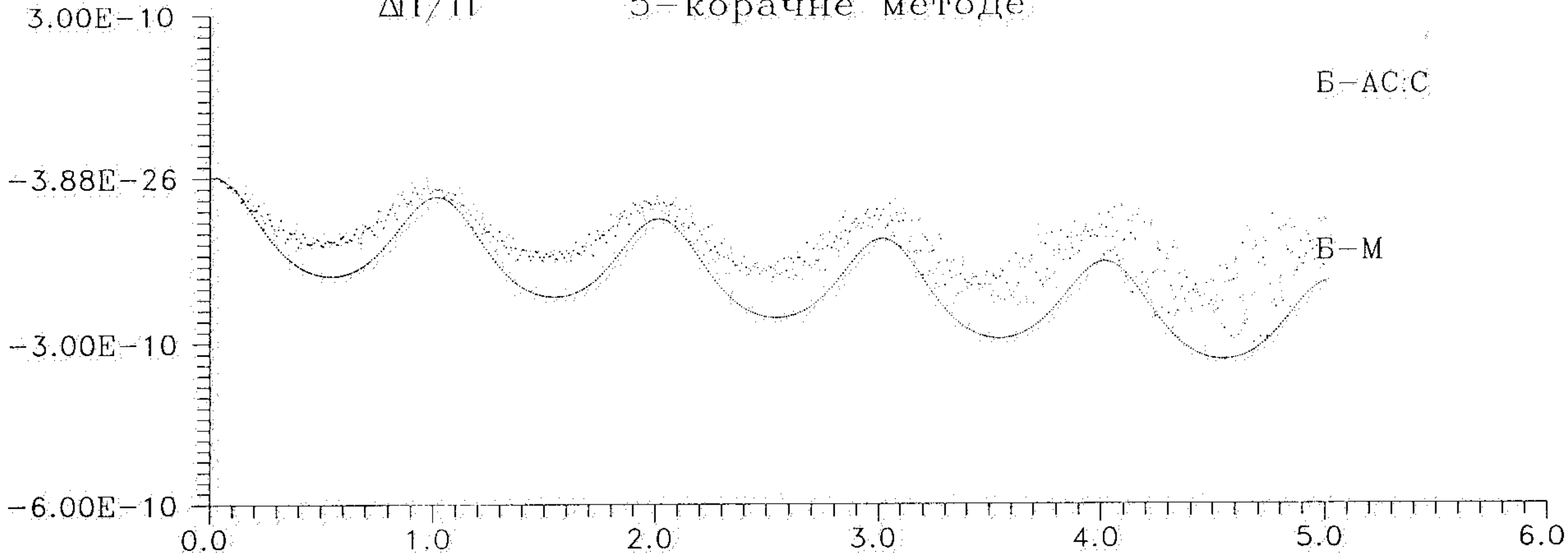
ЗВ−1

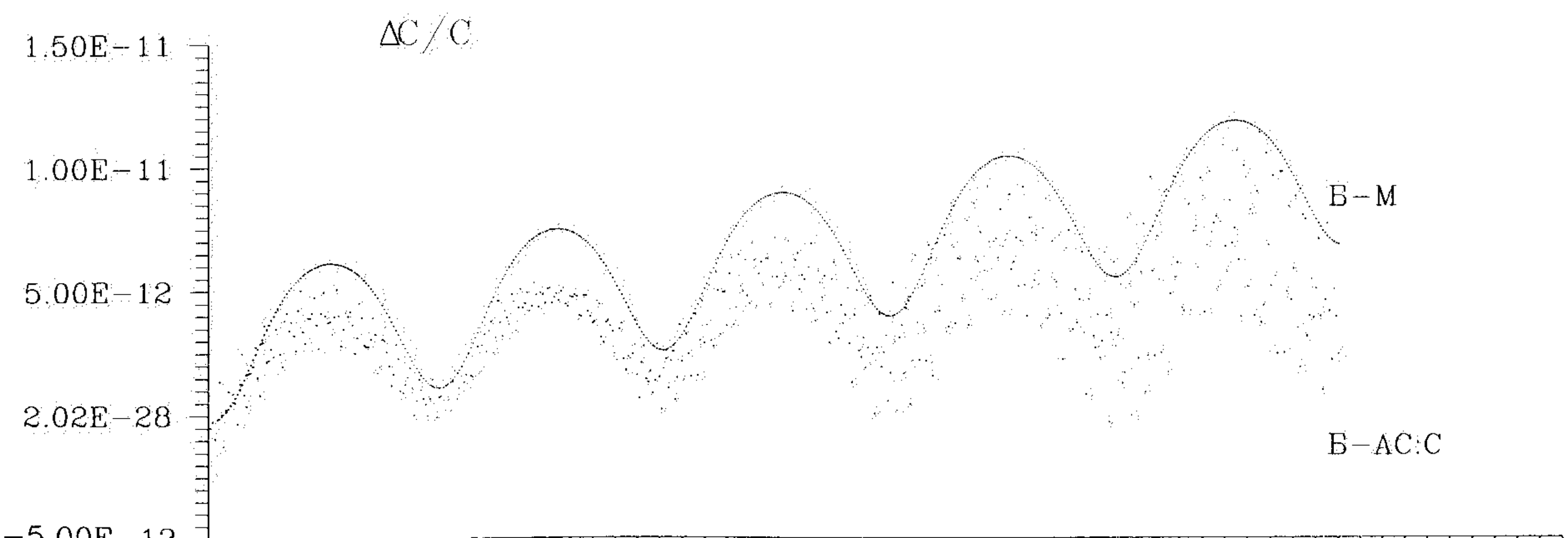
(x₀,y₀) центар масе



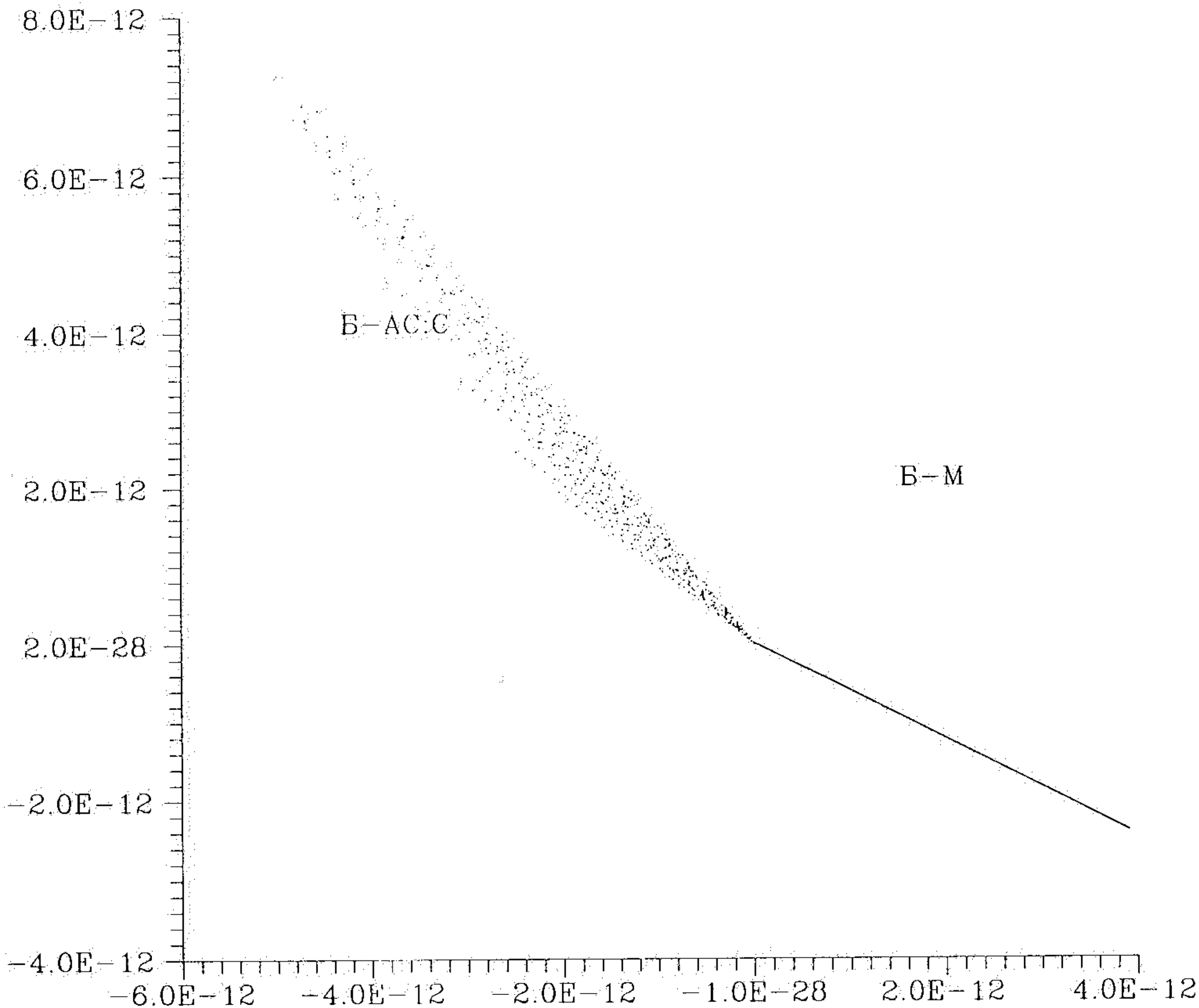
3B-2

3B-3


ΔH/H
5-корачне методе
Б-АС:С
Б-М
3.00E-10
-3.88E-26
-3.00E-10
-6.00E-10
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0

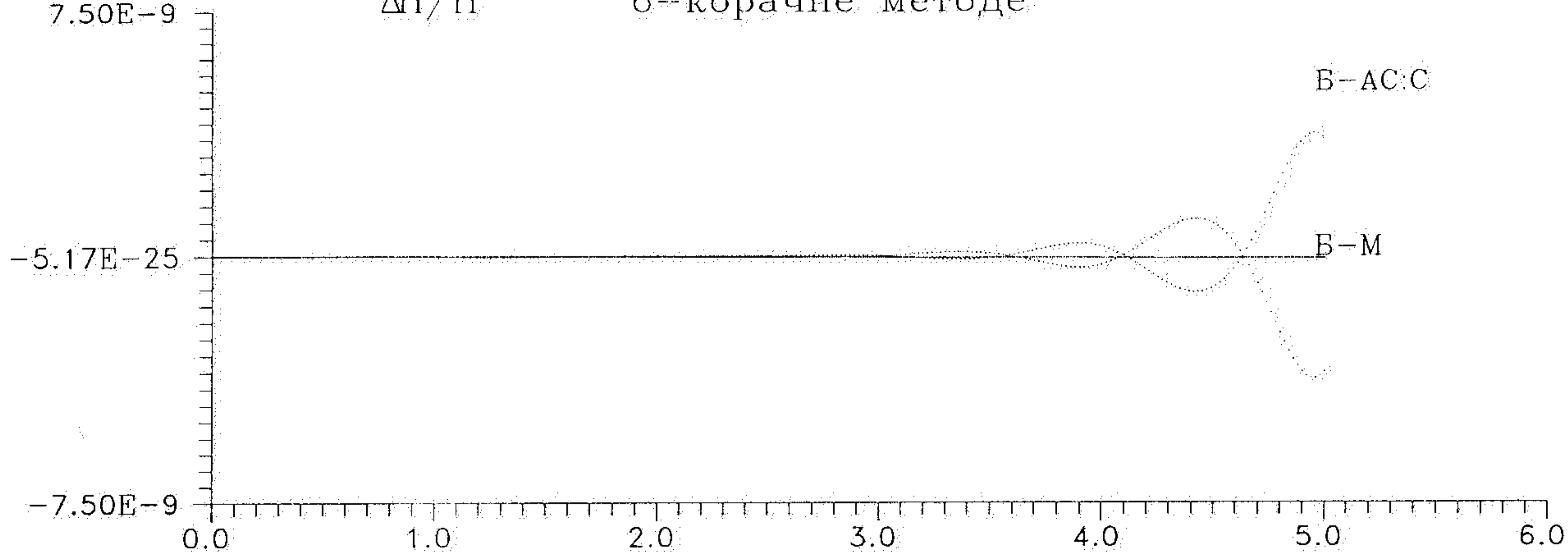

ΔC/C
Б-М
Б-АС:С
1.50E-11
1.00E-11
5.00E-12
2.02E-28

(x$_0$,y$_0$) центар масе

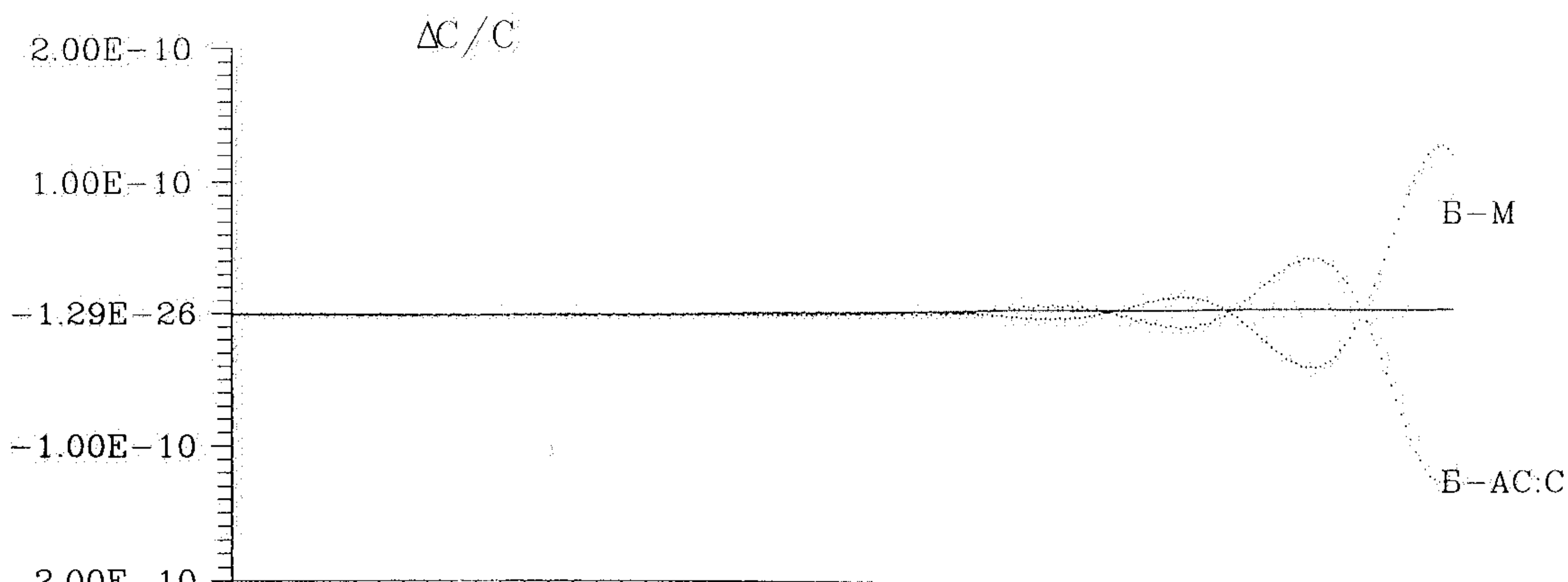


3В−4

3B-5



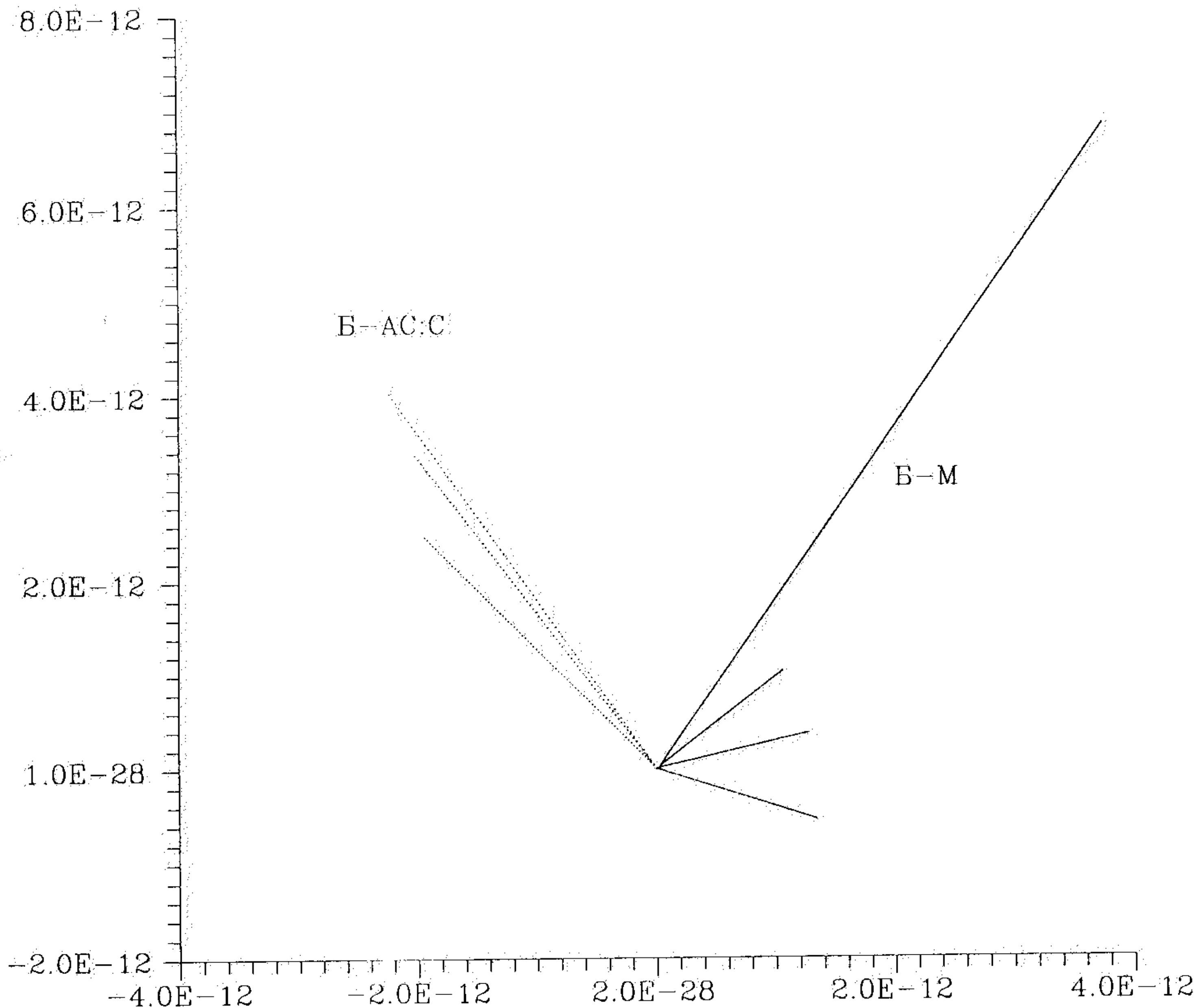
8-корачне методе
7.50E-9
-5.17E-25
-7.50E-9
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
Б-AC:C
Б-M



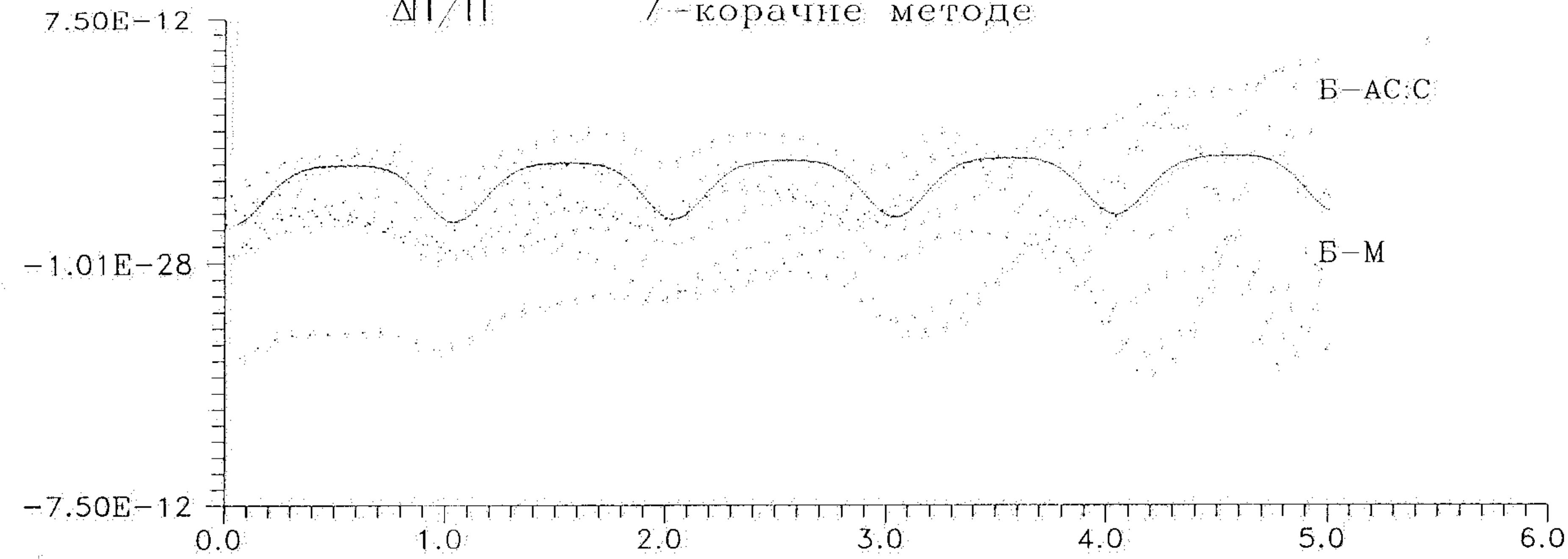
ΔC/C
2.00E-10
1.00E-10
-1.29E-26
-1.00E-10
Б-M
Б-AC:C

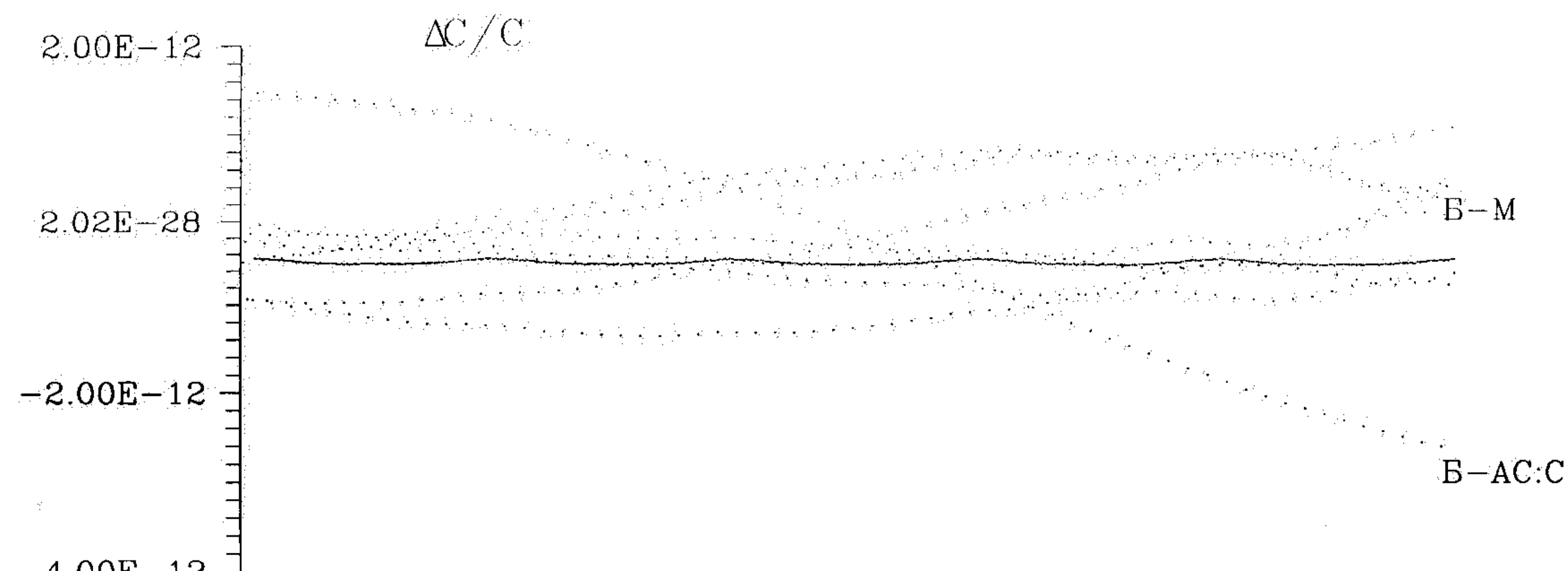
3B-6

(x_0, y_0) центар масе



3B-7


ΔП/П
7-корачне методе
Б-АС:С
Б-М
7.50E-12
-1.01E-28
-7.50E-12
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0


ΔC/C
Б-М
Б-АС:С
2.00E-12
2.02E-28
-2.00E-12

3B-8

(x_0, y_0) центар масе