dan M. Bajšanski

з средње школе
на рад Филоз,
Н. Саду.

OPŠTA KLASA POSTUPAKA ZBIRLJIVOSTI EULER-BOREL-OVOG TIPA I NJIHOVA PRIMENA NA ANALITIČKO PRODUŽENJE

- T e z a -

Докторска дисертација
брањена је 24. V 1956 год.
у Филоз. факулт. у Н. Саду.
(Подаци су узети из протокола.)
Н. Ј.

Прир. мат. ф.

23 [redacted]

Богдан М. Бајшански

Општа класа поступака збирљивости Euler-Borel-овог типа и њихова примена на аналитичко продужење

- теза -

PД 81

OPŠTA KLASA POSTUPAKA ZBIRLJIVOSTI
EULER-BOREL-OVOG TIPA I NJIHOVA PRIMENA
NA ANALITIČKO PRODUŽENJE

S A D R Ž A J

U V O D

0.1. Računanje s divergentnim redovima pojavljuje se neposredno posle stvaranja infinitezimalnog računa, već kod samog Leibnitz-a. Daljim širenjem matematičke analize upotreba divergentnih redova postaje sve češća. Matematičari osamnaestog stoleća uvideli su da divergentni redovi pretstavljaju snažnu aparaturu, koristili su tu aparaturu i dobili niz značajnih rezultata. Euler je, na primer, izveo funkcionalnu jednačinu Riemann-ove ζ - funkcije, čitav vek pre Riemann-a. Medjutim, pošto osnovni matematički pojmovi, kao pojam broja, granice ili funkcije, još nisu bili strogo izgradjeni, prirodno je što su primenjena rezonovanja bila nedovoljno rigurozna. Činjenica da su rezultati dobijeni na takav način bili ipak ispravni, može se jedino objasniti vanrednom intuicijom onih koji su do tih rezultata došli. Euler je,medjutim, shvatio potrebu za izvesnim zasnivanjem računa s divergentnim redovima. On je vrlo dobro osećao razliku izmedju operacija s konvergentnim i divergentnim redovima, i pisao je, na primer: "Verujem da svaki red mora imati jednu odredjenu vrednost. Da bi se izbegle sve teškoće, koje se pri tome pojavljuju, tu vrednost ne bi trebalo zvati imenom zbira, jer je opšte uobičajeno sa tom rečju vezivati jedan takav pojam, kao da je zbir nastao stvarnim sabiranjem, a ta ideja se kod divergentnih redova ne javlja... " Ali definicija sume divergentnog reda koju je Euler dao bila je manje srećna. Prema njegovoj definiciji: "suma divergentnog reda jeste vrednost onog konačnog izraza čijim razvijanjem je red dobijen." Nedostatak definicije je u tome što ona implicitno pretpostavlja da se jedan red može dobiti razvijanjem samo jednog konačnog izraza. Ali, na primer, red $1+2+4+8+\ldots$ kome Euler dodeljuje kao vrednost -1, objašnjavajući to činjenicom da je taj red dobijen razvijanjem funkcije $(1-x)^{-1}$ za $x=2$, može se dobiti i razvijanjem funkcije $2(e^{2y}-1)^{-1}$ po $(e^{2ny}+1)^{-1}$ za $y=0$, i stoga bi mu trebalo pripisati vrednost ∞ /kompleksno/. Taj nedostatak Euler-ove definicije bio je primećen već od njegovih savremenika /Bernoulli, Callet, Lagrange/.

Ma da su divergentni redovi bili često korišćeni, ne samo od Euler-a, već i mnogih njegovih savremenika i sledbenika, naročito Fourier-a i Poisson-a, bilo je u isto doba i matematičara koji su se skeptički odnosili prema upotrebi divergentnih redova /D'Alembert, Laplace, Lagrange/. Česte i neplodne diskusije o divergentnim redovima prekinute su najzad radovima Cauchy-a i Abel-a, naročito Cauchy-evim strogim zasnivanjem pojma konvergencije. Kao i Euler,ni Cauchy nije uspeo da objasni činjenicu da se očigledno nedopuštenim operacijama sa divergentnim redovima dolazilo do tačnih rezultata. Medjutim, za razliku od Euler-a, ne uspevši da objasni tu činjenicu, Cauchy nije ni operisao sa divergentnim redovima. Divergentni redovi,kao sredstvo dokaza, nestali su iz matematičke analize. Oni se ponovo javljaju tek krajem devetnaestog veka. /Frobenius, Hölder, naročito Cesàro/.

Cesàro je definisao sume za izvesne klase divergentnih redova, ali je osnovni zanačj njegovog rada u tome što je istakao da su takve definicije stvar konvencije. Ne postavlja se, dakle, pitanje šta je suma divergentnog reda, već kako definisati sumu divergentnog reda. Problem je najzad bio pravilno formulisan. Prirodno je bilo, zatim, ograničiti slobodu definicije sa dva zahteva: prvo, da definisani zbir pretstavlja generalizaciju zbira konvergentnog reda, i drugo, da za definisani zbir važe osnovni zakoni koji važe za zbirove konvergentnih redova, a koji se odnose na sabiranje dva reda i množenje reda nekim brojem. Ono što bi verovatno začudilo matematičare Eulere-ovog doba, jeste da postoji beskonačno mnoštvo različitih definicija koje ispunjavaju oba uslova, i da medju njima ne postoji nijedna koju bi bilo prirodno pretpostaviti svim ostalim. Da bi se istakla ta relativnost, u teoriji divergentnih redova se ne govori o A-, B-, itd. definiciji zbira divergentnog reda, već o A-, B- itd. postupku zbirljivosti, i sadržina te teorije je ispitivanje medjusobnih odnosa različitih postupaka zbirljivosti. Teorija divergentnih redova konačno je opravdala skoro sve rezultate koje je Euler dobio operušući sa divergentnim redovima, i skoro svaka Euler-ova formula postaje tačna kada se doda oznaka odgovarajućeg postupka zbirljivosti. Isto tako, u problemima u kojima su i ranije pretežno korišćeni divergentni redovi, njihova upotreba dala je nove značajne rezultate /teorija Fourier-ovih redova:Féjer-ov stav, teorija analitičkog produženja: Borel-ovi, Lindelöf-ovi, Mittag-Leffler-ovi rezultati./

0.2. Radi ubrzanja konvergencije sporo konvergentnih redova i radi sabiranja divergentnih redova, Euler je, primećujući da red $\sum a_n$ nastaje iz reda $\sum a_n x^{n+1}$ za $x=1$ i takodje iz reda $\sum a_n \left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1}$ za $y=\frac{1}{2}$, pisao je

$$\sum a_k x^{k+1} = \sum a_k \left(\frac{y}{1-y}\right)^{k+1} = \sum_k a_k \sum_s \binom{k+s}{k} y^{k+s+1} =$$

$$= \sum_n \left(\sum_\nu \binom{n}{\nu} a_\nu\right) y^{n+1},$$

tako da je sumu reda $\sum a_k$ izračunavao kao sumu reda $\sum b_n$, gde je

$b_n = 2^{-n-1} \sum_\nu \binom{n}{\nu} a_\nu$. To, što je kod Euler-a bilo dokaz, Knopp je dao kao definiciju: red $\sum a_n$ je /E,1/ - zbirljiv ka s, ako je red $\sum b_n$ konvergentan i suma mu je s. Iz veze koja postoji izmedju opštih članova navedena dva reda može se naći i veza koja postoji izmedju njihovih parcijalnih suma, tako da se data definicija može formulisati i na sledeći način: niz s_n je /E,1/ - zbirljiv ka s ako niz $\sigma_n = 2^{-n} \sum_0^n \binom{n}{\nu} s_\nu$ konvergira ka s.

Tu definiciju Knopp je dalje uopštio: niz s_n je /E,q/- zbirljiv ka s ako niz

$$\sigma_n = (1+q)^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} s_\nu, \quad q>0$$

konvergira ka s. Tada očigledno, ako sa $a_{n\nu}$ označimo element matrice koja transformiše niz s_n u σ_n, važi

$$a_{n\nu} = (1+q)^{-n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu}.$$

Drugim rečima, elementi u n-toj vrsti te matrice pretstavljaju koeficijente stepenog razvitka funkcije

$$f^n(z) = \left(\frac{z+q}{1+q}\right)^n, \quad q>0.$$

Meyer-König je godine 1949 definisao jednu novu klasu S_r postupaka zbirljivosti koja stoji u izvesnom odnosu simetrije sa klasom Euler-Knopp-ovih postupaka. Naime, matrica koja odgovara jednom Meyer-König-ovom postupku zbirljivosti načinjena je tako da elementi u njenoj n-toj vrsti jesu koeficijenti stepenog razvitka funkcije

$$f^n(z) = \left(\frac{1-r}{1-rz}\right)^n, \quad 0<r<1.$$

Iako postoji znatna srodnost izmedju njih, Euler-Knopp-ovi i Meyer-König-ovi postupci pretstavljaju dve različite klase postupaka, od kojih nijedna ne sadrži drugu kao specijalan slučaj.

Definisavši jednu vrstu postupaka zbirljivosti skoro istovetnih sa Meyer-König-ovim, Karamata je pokušao da otkrije i jednu klasu postupaka zbirljivosti koja bi sadržala kao specijalan slučaj, kako te postupke, tako i Euler-Knopp-ove. Stoga je definisao postupke zbirljivosti sa matricama čija je n-ta vrsta data koeficijentima stepenog razvitka funkcije

$$f^n(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^n.$$

Karamata je formulisao i stav permanencije za te postupke zbirljivosti, koji je zatim dokazao Szegö.

0.3. Mi ćemo uopštiti navedene postupke zbirljivosti na taj način što ćemo definisati postupak zbirljivosti čija matrica u n-toj vrsti sadrži koeficijente n-tog stepena neke analitičke funkcije $f(z)$. Na taj način svakoj analitičkoj funkciji $f(z)$, regularnoj u početku, odgovaraće jedan postupak zbirljivosti koji ćemo zvati generalisanim Euler-ovim postupkom i označavati sa (E, f). Stavljajući

$$f(z) = \frac{z+q}{1+q}, \quad \frac{1-r}{1-rz}, \quad \frac{az+b}{cz+d}$$

naš postupak zbirljivosti svešće se na Euler-ov, Meyer-König-ov ili Karamatin. Stavljajući $f(z) = e^{z-1}$, dobićemo postupak koji od Borel-ovog razdvaja samo jedna neznatna razlika /ako

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n s_n}{n!} \longrightarrow s \qquad \text{kad } x \to \infty ,$$

niz s_n biće zbirljiv ka s Borel-ovim postupkom, ukoliko x neprekidno teži beskonačnosti, postupkom (E, e^{z-1}), ukoliko x teži beskonačnosti preko niza prirodnih brojeva. Očigledno je da iz B-zbirljivosti sledi (E, e^{z-1}) zbirljivost, dakle, (E, e^{z-1}) postupak je opštiji, ali je taj dobitak trivijalan./

Osnovni problem koji nastaje definicijom ovih postupaka zbirljivosti jeste naći uslove za funkciju $f(z)$ tako da njoj asocirani postupak bude permanentan. Poznato je da Toeplitz-Schur-ov stav daje tri uslova koji su potrebni i dovoljni da bi jedan postupak zbirljivosti bio permanentan. Ti uslovi se izražavaju preko elementa matrice postupka zbirljivosti, u našem slučaju preko brojeva $a_{n\nu}$, gde smo uveli oznaku $f^n(z) = \sum a_{n\nu} z^\nu$. U želji da iskoristimo činjenicu što se radi o specijalnoj klasi postupaka zbirljivosti da bismo stav o permanenciji, koji važi za svaki postupak zbirljivosti, uprostili, pretvorili u specifičan stav o permanenciji za našu klasu postupaka zbirljivosti, moramo uslove o koeficijentima $a_{n\nu}$ prevesti na uslove neposredno o funkciji $f(z)$. Prva dva uslova Toeplitz-Schur-a lako se prevode u tom smislu. Ali treći uslov, naime uslov da

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1) \text{kad } n \to \infty,$$

donosi teškoće. Čak i kad je funkcija $f(z)$ relativno jednostavna, kao u dokazu koji je dao Szegö, vrlo je teško pokazati da je gornji uslov zadovoljen, izuzimajući naravno trivialni slučaj kad su koeficijenti od $f(z)$ pozitivni. Da je napisani uslov prostiji ili da se odnosi direktno na koeficijente $a_{n\nu}$, mi bismo ga mogli zadržati kao uslov o koeficijentima, žrtvujući unekoliko praktični i estetski zahtev da se svi uslovi odnose na fukkciju $f(z)$. Medjutim, gornji uslov je upravo najteži od sva tri uslova, i njegovo proveravanje u konkretnom slučaju može biti praktički neostvarljivo. Stoga je bilo nužno njemu naći ekvivalentan, ili bar dosta opšti dovoljan uslov koji bi se odnosio na funkciju $f(z)$. To je učinjeno u stavu 2.1.

Medjutim, uslovi koje stav 2.1. postavlja funkciji $f(z)$ da bi postupak zbirljivosti $(E, f(z))$ bio permanentan nisu nimalo očigledni. Postavlja se prirodno čitav niz pitanja: da li su ti uslovi neprotivrečni, da li su nezavisni, koliko je široka klasa funkcija koje ispunjavaju te uslove, pripadaju li toj klasi funkcija i funkcije čiji su koeficijenti pozitivni i za koje je, prema tome, stav o permanenciji trivialan. Dalje, uslovi stava 2.1. dati su u obliku koji je podesam za izvodjenje dokaza, specijalno za dokazivanje stava o permanenciji, ali koji nije toliko pogodan za efektivno proveravanje. Stoga je potrebno naći ekvivalentne uslove za koje je lako proveriti da li ih data funkcija zadovoljava ili ne. Najzad, ukoliko funkcije $f(z)$ i $g(z)$ zadovoljavaju uslove stava 2.1., permanentni su ne samo postupci zbirljivosti asocirani njima, već i oni koji su asocirani funkcijama $f(z)g(z)$ i $f(g(z))$. Postavlja se pitanje da li i te dve funkcije zadovoljavaju uslove stava 2.1. Ukoliko to nije slučaj, ne samo što uslovi stava 2.1. nisu dovoljno prirodni, već podležu vrlo trivialnim generalizacijama. Nijedno od navedenih pitanja nema dovoljno očigledan odgovor. Uslovi stava 2.1. zahtevali su prema tome detaljno ispitivanje. Stoga smo funkcije koje zadovoljavaju pomenute uslove izdvojili u posebnu klasu, koju smo, kratkoće radi, nazvali klasom E-funkcija. Prvi odeljak posvećen je proučavanju tih funkcija, iscrpnom u onoj meri koja je potrebna za dalja izlaganja. Stav o permanenciji daje se tek kasnije, u drugom odeljku, tako da su njegovi uslovi tada dovoljno jasni. Stav o inkluziji, koji obično daje najbolju sliku odnosa ~~unutar~~ jedne klase postupaka zbirljivosti, čini sadržinu trećeg odeljka. U četvrtom odeljku dati su stavovi permanencije i inkluzije za klasu postupaka zbirljivosti koja je definisao Karamata. Ti stavovi - od kojih je poznat jedino prvi, što smo već napomenuli - dati su kao direktne posledice prethodno dokazanih opštih stavova. Najzad, kako specijalni slučajevi posmatranih postupaka zbirljivosti, kao Euler-ovi i Borel-ovi postupci, imaju značaja kao aparatura u teoriji analitičkog produženja, bilo je od interesa dati opšte stavove o analitičkom produženju pomoću postupaka $(E, f(z))$, što je učinjeno u poslednjem odeljku.

Jedna klasa funkcija u vezi sa generalisanim Euler-ovim postupcima zbirljivosti

1.1. U ovome odeljku posmatraćemo jednu potklasu klase unimodularnih funkcija, to jest funkcija koje su regularne u jediničnom krugu i čiji je maksimalni moduo u zatvorenom jediničnom krugu jednak jedinici. Funkcije te potklase biće osim toga regularne i na jediničnom krugu, a u tački $z=1$ uzimaće vrednost 1. Dalje, na jediničnom krugu one će maksimalni moduo dostizati najviše u konačno mnogo tačaka. Poslednji uslov pretstavlja ustvari dosta blago ograničenje. Naime, iz činjenice da je funkcija $f(z)$ regularna na jediničnom krugu i različita od konstante sledi da ona jedinični krug preslikava na neku analitičku krivu. Ako bi funkcija dostizala svoj maksimalni moduo, koji je ravan jedinici, u beskonačno mnogo tačaka jediničnog kruga, onda bi ta analitička kriva imala sa jediničnim krugom ~~imala~~ beskonačno mnogo zajedničkih tačaka. Kako dve analitičke krive sa beskonačno mnogo zajedničkih tačaka moraju biti identičke, to bi funkcija preslikavala jedinični krug na jedinični krug. S druge strane, kako je regularna u i na jediničnom krugu, funkcija u njemu može imati najviše konačno mnogo nula. Neka su te nule z_1, z_2, ... z_i, ... z_p, i neka je

$$g_i(z) = \frac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z}, \quad g(z) = g_1(z)\, g_2(z) \dots g_p(z).$$

Tada je funkcija

$$h(z) = f(z)/g(z)$$

prvo, regularna u i na jediničnom krugu; drugo, nema nula unutar njega; treće, njen moduo na rubu jediničnog kruga je konstantan i jednak jedinici. Stoga je $h(z)$ neka konstanta čiji je moduo ravan jedinici, dakle $h(z)=e^{\theta i}$. Odatle je

$$f(z) = e^{\theta i} g(z) = e^{\theta i} \prod_{i=1}^{p} \frac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z}, \quad |z_i| < 1 \quad \text{za} \quad i = 1,2$$

Prema tome, uslovom da funkcija dostiže svoj maksimalni modu na jediničnom krugu najviše konačno mnogo puta, isključili s osim konstante, jedino funkcije koje su proizvod konačno mno specijalnih homografskih funkcija. Uostalom, koliko su svi r vedeni uslovi opšti, pokazuje i činjenica da je za svaku ana litičku funkciju $f(z)$, regularnu u okolini neke tačke z, mo naći - i to na beskonačno mnogo načina - tri konstante A, a takve da funkcija $Af(az+b)$ zadovoljava sve navedene uslove

Pretpostavimo da funkcija $f(z)$ zadovoljava te uslove i da je $e^{\vartheta i}$ jedna od tačaka u kojima dostiže maksimalni moduo. Pošto je $f(e^{ti})$ regularno u okolini tačke $t=\vartheta$, može se razviti u red po stepenima od $t-\vartheta$. Tada se i $\overline{f(e^{ti})}$ može razviti po stepenima od $t-\vartheta$, t realno, pa isto važi i za njihov proizvod $|f(e^{ti})|^2$. Kako je poslednja funkcija različita od nule u okolini tačke $t=\vartheta$, to se i njen koren $|f(e^{ti})|$ može razviti po $t-\vartheta$. Medjutim, poslednja funkcija dostiže maksimum za $t=\vartheta$, pa stoga prvi njen izvod koji je u toj tački različit od nule mora biti parnoga reda i negativan, te je

$$|f(e^{ti})| = 1 - A(t-\vartheta)^{2\kappa} + o\left((t-\vartheta)^{2\kappa}\right), \ t \to \vartheta.$$

Na taj način, svakoj tački $e^{\vartheta i}$ date funkcije odgovara neki pozitivan broj A i neki paran broj 2κ. To nam omogućuje da formulišemo i poslednji uslov u definiciji, koja glasi

<u>Definicija</u>. Analitička funkcija $f(z)$ je E-funkcija ako je

i) $f(z)$ regularno za $|z| \leq 1$,

ii) $f(1) = 1$,

iii) $|f(z)| < 1$ za $|z| = 1$ izuzev u konačno mnogo tačaka $e^{t_m i}$

iv) svakom t_m odgovara pozitivan broj α_m takav da je
$r^{-\alpha_m} M_m(r) = 1 + O\left((r-1)^{2\kappa_m}\right)$ kad $r \to 1$,
gde su $M_m(r)$ i $2\kappa_m$ definisani pomoću
$M_m(r) = \mathrm{Max}|f(z)|$ za $|z| = r$, $t_m - \varepsilon < \arg z < t_m + \varepsilon$,
$$|f(e^{ti})| = 1 - A_m(t-t_m)^{2\kappa_m} + o\left((t-t_m)^{2\kappa_m}\right), \ t \to t_m.$$

Da bi se uvidelo da su uslovi u definiciji neprotivrečni, dovoljno je posmatrati funkciju $f(z) = \frac{1+z}{2}$. Ona očigledno zadovoljava uslove i)-ii); maksimalni moduo dostiže samo u tački $z=1$, pa je zadovoljeni uslov iii). Kako je

$$|f(e^{ti})| = 1 - \frac{t^2}{8} + o(t^2), \ t \to 0,$$

i

$$r^{-\frac{1}{2}} M(r) = r^{-\frac{1}{2}} \frac{1+r}{2} = 1 + \frac{1}{8}(r-1)^2 + o\left((r-1)^2\right), \ r \to 1$$

zadovoljen je i uslov iv).

Da bismo pokazali da su sva četiri uslova u definiciji nezavisna dovoljno je pokazati da uslov iv) nije posledica prethodna tri uslova, jer je očigledno da su prva tri uslova nezavisna. Posmatrajmo funkciju $f(z) = \frac{1}{8}(3z^2 + 6z - 1)$.

Ona očigledno zadovoljava uslove i) i ii). Pošto je

$$\varphi(t) = |f(e^{it})|^2 = \frac{1}{32}(23+12\cos t - 3\cos 2t),$$

dobijamo $\varphi'(t) = \frac{3}{8}\sin t\,(\cos t - 1)$,

pa $|f(e^{it})|^2$ dostiže maksimum samo u tački $t=0$, i zato je zadovoljen i uslov iii). Medjutim, kako je

$$\varphi(t) = 1 - \frac{3}{64}t^4 + o(t^4), t \to 0,$$

to je

$$|f(e^{it})| = 1 - \frac{3}{128}t^4 + o(t^4), t \to 0.$$

Da bi $f(z)$ bilo E-funkcija, potrebno je da postoji $\alpha > 0$ takvo da je $r^{-\alpha}M(r) = 1 + O((r-1)^4)$, $r \to 1$.

Stavljajući $\alpha = \frac{3}{2}$, imaćemo

$$r^{-3/2}M(r) \geq r^{-3/2}f(r) = \frac{1}{8}r^{-3/2}(3r^2+6r-1) = 1 + \frac{1}{16}(r-1)^3 + o((r-1)^3$$

uslov nije zadovoljen. Birajući makakvo α različito od $3/2$ pojaviće se u oceni $r^{-\alpha}M(r)$ i linearni član. Stoga uslov iv) nije zadovoljen.

Daćemo dve napomene u vezi sa definicijom. Pre svega, dokazi koji će se pojavljivati u odeljcima posvećenim izučavanju samih postupaka zbirljivosti važili bi i za klasu funkcija koje bi, mesto uslova iv), zadovoljavale opštiji uslov

$$r^{-\alpha_m}M_m(r) \leq 1 + K(r-1)^{2\nu_m}, \quad r \to 1.$$

Medjutim, taj uslov je samo prividno opštiji od uslova iv). To se može dokazati na osnovu Hadamard-ovog stava o tri kruga. Taj stav se ne može neposredno primeniti jer se on odnosi na ponašanje maksimalnog modula na celom jednom prstenu, dok nas interesuje ponašanje maksimalnog modula samo na jednom isečku tog prstena, definisanom pomoću $t_m - \varepsilon \leq \arg z \leq t_m + \varepsilon$ i $R_1 \leq |z| \leq R_2$ gde su $R_2 - 1$ i $1 - R_1$ proizvoljno mali pozitivni brojevi. Da bismo primenili Hadamard-ov stav, konstatujmo da se pretpostavka o celome prstenu koristi u tom stavu jedino da bi se dokazalo da funkcija $z^{\alpha} f(z)$, regularna u istom prstenu pošto je u njemu načinjen zasek, ne može dostizati maksimalni moduo na tom zaseku, već ga mora dostizati na graničnim kružnim lucima. Medjutim, iz činjenice da je funkcija $|f(z)|$ neprekidna na našem isečku, sledi da funkcija $f(z)$, pa prema tome i funkcija $z^{\alpha} f(z)$, koja je regularna u isečku, mora dostizati maksimalni moduo na graničnim kružnim lucima, pod uslovom da su izabrani brojevi R_1 i R_2 dovoljno bliski jedinici. Na taj način, Hadamard-ov stav važiće i u našem slučaju za r koje se nalazi u okolini jedinice. Dakle, $\log M_m(r)$ biće konveksna funkcija od $\log r$, pa će prema tome imati levi i desni izvod u tački $r=1$. Stoga, ako prava $\alpha_m \log r$ dodiruje krivu $\log M_m(r)$ ($r\geq 1$ ili $r\leq 1$) u tački $r=1$, tada je zbog konveksnosti za $r\approx 1$

$\log M_m(r) \geq \alpha_m \log r$, odakle je, za $r\approx 1$, $r^{-\alpha_m} M_m(r) \geq 1$, pa iz

$$r^{-\alpha_m} M_m(r) \leq 1 + K(r-1)^{2k_m}, \quad r\to 1,$$

sledi

$$r^{-\alpha_m} M_m(r) = 1 + O((r-1)^{2k_m}), \quad r\to 1.$$

S druge strane, ako prava $\alpha_m \log r$ seče krivu $\log M_m(r)$, tada ~~je~~ ili za $r>1$ postoji pozitivan ili za $r<1$ negativan broj β_m takav da je $\log M_m(r) \geq (\alpha_m+\beta_m)\log r$, odakle je

$$r^{-\alpha_m} M_m(r) \geq r^{\beta_m} \geq 1 + \frac{\beta_m}{2}(r-1) + O((r-1)^2), \quad r\to 1$$

pa u tom slučaju nije ispunjen ni opštiji uslov

$$r^{-\alpha_m} M_m(r) \leq 1 + K(r-1)^{2k_m}, \quad r\to 1.$$

Naglasimo da smo u toku dokaza uzgred pokazali da je $r^{-\alpha_m} M_m(r) \geq 1$, što će biti korišćeno i dalje.

Druga napomena odnosi se na broj α_m pomenutih definicija. Kad god postoji, on je jednak broju $e^{t_m i} f'(e^{t_m i})/f(e^{t_m i})$. Da je poslednji izraz realan i pozitivan, pokazano je u lemi 1.1. Da važi tvrdjenje o jednakosti, sledi implicitno iz stava 1.4.

Najzad, naglasimo da će svi dokazi u ovome odeljku biti dati pod pretpostavkom da postoji samo jedno t_m i da je ono jednako nuli. Ta pretpostavka, uostalom uobičajena, ne ograničeva niukoliko opštost dobijenih zaključaka.

1.2. <u>Stav 1.1.</u> Ako su $f(z)$ i $g(z)$ E-funkcije, tada je i $h(z)=f(z)\cdot g(z)$ E-funkcija.

<u>Dokaz</u>. Očigledno je da $h(z)$ zadovoljava uslove i)-iii) u definiciji E-funkcije. Jedino je potrebno dokazati da zadovoljava uslov iv). Radi toga stavimo na osnovu i) i iii)

1) $$|f(e^{ti})| = 1 - A_1 t^{2k_1} + o(t^{2k_1}), \quad A_1>0,\ t\to 0.$$
$$|g(e^{ti})| = 1 - A_2 t^{2k_2} + o(t^{2k_2}), \quad A_2>0,\ t\to 0.$$

odakle sledi množenjem

2) $$|h(e^{ti})| = 1 - A_3 t^{2k_3} + o(t^{2k_3}), \quad A_3>0,\ t\to 0.$$

gde je

$$k_3 = \min(k_1,k_2), \quad A_3 = \begin{cases} A_1, & k_3=k_1\neq k_2 \\ A_1+A_2, & k_3=k_1=k_2 \\ A_2, & k_3=k_2\neq k_1. \end{cases}$$

Uvedimo oznake

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_1(r) &= \operatorname{Max}|f(z)|, \ |\arg z| < \varepsilon_1 \\ \mathcal{M}_2(r) &= \operatorname{Max}|g(z)|, \ |\arg z| < \varepsilon_2 \\ \mathcal{M}_3(r) &= \operatorname{Max}|h(z)|, \ |\arg z| < \varepsilon_3 \end{aligned}\right\} |z| = r, \ \varepsilon_3 \leq \operatorname{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \tag{3}$$

Kako $f(z)$ i $g(z)$ po pretpostavci zadovoljavaju uslov iv) u definiciji E-funkcije, to je

$$\mathcal{M}_{1,2}(r) = r^{\alpha_{1,2}}\left(1 + \mathcal{O}\left((r-1)^{2\kappa_{1,2}}\right)\right), \ r \to 1,$$

pa ćemo imati za $|z| = r$, $r \approx 1$,

$$r^{-\alpha_3}\mathcal{M}_3(r) = r^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\mathcal{M}_3(r) = r^{-\alpha_1-\alpha_2}\operatorname{Max}|f(z)||g(z)| \leq$$

$$\leq r^{-\alpha_1}\operatorname{Max}|f(z)| \ r^{-\alpha_2}\operatorname{Max}|g(z)| \leq$$

$$\leq r^{-\alpha_1}\mathcal{M}_1(r) \ r^{-\alpha_2}\mathcal{M}_2(r) =$$

$$\leq \left(1 + \mathcal{O}\left((r-1)^{2\kappa_1}\right)\right)\left(1 + \mathcal{O}\left((r-1)^{2\kappa_2}\right)\right) \leq$$

$$\leq 1 + \mathcal{O}\left((r-1)^{2\kappa_3}\right)$$

Iz dobijenog i iz činjenice da je $r^{-\alpha_3}\mathcal{M}_3(r) \geq 1$ sledi

$$r^{-\alpha_3}\mathcal{M}_3(r) = 1 + \mathcal{O}\left((r-1)^{2\kappa_3}\right), \ r \to 1,$$

što zajedno sa 2), dokazuje stav.

Dokaz sledećeg stava zasniva se na dve leme. Prva od njih dobija se jednostavno geometriskom interpretacijom $\arg f'(z)$ Medjutim, kako će ona biti često korišćena u daljem izlaganju, daćemo njen detaljan analitički dokaz. Formulisaćemo je ne u najopštijem obliku, već u obliku u kom ćemo je dalje koristiti.

<u>Lema 1.1.</u> Ako $f(z)$ zadovoljava uslove

i) regularno je za $|z| \leq 1$,

ii) za $|z|=1$ maksimalni moduo dostiže u tačkama z_i, kojih je konačno mnogo,

tada je svaki od brojeva $z_i f'(z_i)/f(z_i)$ realan i pozitivan.

<u>Dokaz</u>. Stavimo $z_i = 1$, $f(1) = 1$.

Zbog i) možemo pisati $f(e^{ti}) = 1 + f'(1)ti + \mathcal{O}(t^2)$, $t \to 0$, odakle je

$$|f(e^{ti})| = 1 - \Im f'(1)t + \mathcal{O}(t^2), \ t \to 0.$$

Kako $|f(e^{ti})|$ po pretpostavci ima maksimum u tački $t=0$, to je $\Im f'(1) = 0$, dakle $f'(1)$ je realno.

Na osnovu principa maksimalnog modula $|f(1)| > |f(r)|, r<1$ pa je, zbog i) i činjenice da je $f'(1)$ realno

$$1 > |1 + f'(1)(r-1) + \mathcal{O}((r-1)^2)| = 1 + f'(1)(r-1) + \mathcal{O}((r-1)^2)$$

odakle je $f'(1)$ ne-negativno.

Najzad, pretpostavimo da je $f'(1) = 0$, i označimo sa k red, a sa T argument prvog izvoda funkcije $f(z)$ u tački $z = 1$ koji je različit od nule. Tada je

$$f(z) = 1 + Re^{Ti}(z-1)^k + o(|z-1|^k), \quad z \to 1.$$

Stavljajući $z-1 = \rho e^{ti}$, dobivamo

$$|f(1+\rho e^{ti})| = 1 + R\rho^k \cos(T + kt) + o(\rho^k), \rho \to 0.$$

Jednostavan račun pokazuje da je uvek mogućno izabrati takvo t u otvorenom intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ da je $T + kt$ u nekom intervalu $(2m\pi - \frac{\pi}{2}, 2m\pi + \frac{\pi}{2})$, dakle $\cos(T+kt) > 0$, pa stoga postoji tačka z unutar jediničnog kruga za koju je $|f(z)| > 1$, što je u kontradikciji sa principom maksimalnog modula. Prema tome, $f'(1)$ ne može biti nula.

<u>Lema 1.2</u>. Ako $f(z)$ zadovoljava uslove i)-iii) u definiciji E-funkcije, postoje pozitivni brojevi β, γ, δ takvi da je

$$|f(re^{ti})| \le r^\beta |f(e^{ti})| \text{ za } 1-\gamma \le r \le 1, \quad t_m - \delta \le t \le t_m + \delta.$$

<u>Dokaz</u>. Kako je funkcija $\varphi(t) = \mathrm{Re}\, e^{ti}\varphi'(e^{ti})/\varphi(e^{ti})$ neprekidna i, prema prethodnoj lemi i pretpostavci $t = 0$, $\varphi(0) = 3a > 0$, to postoji $\delta > 0$ takvo da je $\varphi(t) \ge 2a$ za $-\delta \le t \le \delta$. Razvijanjem funkcije $f(re^{ti})/f(e^{ti})$ u okolini tačke e^{ti} imaćemo

$$\frac{f(re^{ti})}{f(e^{ti})} = 1 + \frac{f'(e^{ti})e^{ti}}{f(e^{ti})}(r-1) + \mathcal{O}(K(t)(r-1)^2), \; r \to 1.$$

Pošto je $K(t)$ ograničeno, biće

$$\left|\frac{f(re^{ti})}{f(e^{ti})}\right| = 1 + \varphi(t)(r-1) + \mathcal{O}((r-1)^2) \le$$
$$\le 1 + 2a(r-1) + \mathcal{O}((r-1)^2) \quad \text{za } -\delta \le t \le \delta.$$

Medjutim, postoji $\gamma > 0$ tako da je

$$1 + 2a(r-1) + \mathcal{O}((r-1)^2) \le r^a \quad \text{za } 1-\gamma \le r \le 1,$$

pa je $|f(re^{ti})| / |f(e^{ti})| \le r^a$ za $1-\gamma \le r \le 1$, $-\delta \le t \le \delta$, čime je lema dokazana.

<u>Stav 1.2</u>. Ako su $f(z)$ i $g(z)$ E-funkcije, tada je i $h(z) = g(f(z))$ E-funkcija.

Dokaz. Zadržavajući oznake 1), 2) i 3) uvedene u dokazu prethodnog stava i uvodeći oznaku $f(e^{it}) = \rho e^{i\vartheta}$, $\rho=\rho(t), \vartheta=\vartheta(t)$, imaćemo, pošto je $f(1)=1$ i $f'(1)$, na osnovu leme 1.1., realno, da je

$$\vartheta(t) = \operatorname{Im}\log f(e^{it}) = \operatorname{Im}\log(1+f'(1)ti+O(t^2)) =$$
$$= \operatorname{Im}(f'(1)it + O(t^2)) =$$
4) $$= f'(1)t + O(t^2),\ t\to 0.$$

Kakò je $g(z)$ E-funkcija, ona zadovoljava uslove leme 1.2., pa postoji neko $\beta>0$ takvo da je za $1-\gamma\le\rho\le 1$, $-\delta\le t\le\delta$,
~~Medjutim,~~ $|h(e^{it})| = |g(f(e^{it}))| = |g(\rho e^{i\vartheta})| \le \rho^{\beta}|g(e^{i\vartheta})|$.
Medjutim,
$$\rho^{\beta} = |f(e^{it})|^{\beta} = (1-A_1t^{2\kappa_1}+o(t^{2\kappa_1}))^{\beta} = 1-A_1't^{2\kappa_1}+o(t^{2\kappa_1}),$$
i zbog 4),
$$|g(e^{i\vartheta})| = 1-A_2\vartheta^{2\kappa_2}+o(\vartheta^{2\kappa_2}) = 1-A_2't^{2\kappa_2}+o(t^{2\kappa_2}),$$
tako da je za t dovoljno malo da bi $1-\gamma\le\rho(t)\le 1$ i $-\delta\le\vartheta(t)\le\delta$
$$|h(e^{it})| = 1-A_3t^{2\kappa_3}+o(t^{2\kappa_3}) \le (1-A_1't^{2\kappa_1}+o(t^{2\kappa_1}))(1-A_2't^{2\kappa_2}+o(t^{2\kappa_2}))$$
pa je $\kappa_3\le \operatorname{Min}(\kappa_1,\kappa_2)$.

Stoga, da bismo dokazali da je $h(z)$ E-funkcija, dovoljno je da pokažemo da postoji neko $\alpha_3>0$ takvo da je
$$r^{-\alpha_3}M_3(r) = 1+O\left((r-1)^{2\operatorname{Min}(\kappa_1,\kappa_2)}\right),\ r\to 1,$$
jer tada je utoliko pre
$$r^{-\alpha_3}M_3(r) = 1+O((r-1)^{2\kappa_3}),\ r\to 1.$$
Uvedimo oznaku $f(re^{ti}) = \rho(r,t)\,e^{\vartheta(r,t)i}$. Tada, koristeći činjenicu da je $M_1(r)-1 = O(r-1),\ r\to 1$, pošto je $f(z)$ E-funkcija, i primenjujući princip maksimalnog modula, imaćemo
$$r^{-\alpha_3}M_3(r) = r^{-\alpha_1\alpha_2}\operatorname{Max}|h(z)| = r^{-\alpha_1\alpha_2}\operatorname{Max}|g(f(z))| =$$
$$= r^{-\alpha_1\alpha_2}\operatorname{Max}|g(\rho e^{i\vartheta})| \le r^{-\alpha_1\alpha_2}\operatorname{Max}|g(M_1(r)e^{\vartheta i})| =$$
$$\le r^{-\alpha_1\alpha_2}M_1^{\alpha_2}(r)\,(1+O((M_1(r)-1)^{2\kappa_2})) =$$
$$\le r^{-\alpha_1\alpha_2}r^{\alpha_1\alpha_2}(1+O((r-1)^{2\kappa_1}))(1+O((r-1)^{2\kappa_2})) =$$
$$\le 1+O\left((r-1)^{2\operatorname{Min}(\kappa_1,\kappa_2)}\right),\ r\to 1,$$
što je, kao što smo pokazali, dovoljno za dokaz stava.

1.3. Stav koji se navodi u ovom paragrafu daje dovoljne uslove da bi funkcija $f(z)$ bila E-funkcija, i njegov značaj je u tome što se tim uslovima znatno lakše rukuje nego uslovima u definiciji E-funkcije, a pri tome klasa E-funkcija nije odviše sužena.

Stav 1.3. Ako $f(z)$ zadovoljava uslove i)-iii) u definiciji E-funkcije i ako je

$$|f(e^{ti})| = 1 - A_m(t-t_m)^2 + o((t-t_m)^2),\ A_m>0, \text{ kad } t\to t_m,$$

tada je $f(z)$ E-funkcija.

Dat uslov o ponašanju $|f(e^{ti})|$ može se i geometriski interpretirati. On je ekvivalentan uslovu da dodiri izmedju krivih $r(t)=|f(e^{ti})|$ i $r=1$, ili, što je isto, izmedju krivih $|f(z)|=1$ i $|z|=1$, budu najviše prvog reda.

Drugi ekvivalent istog uslova, koji ćemo formulisati, jednostavnosti radi, pod pretpostavkom da je $t_m=0$, može se dobiti razvijanjem funkcije $f(e^{ti})$ oko tačke $t=0$. Tada ćemo imati

$$f(e^{ti}) = 1 + f'(1)ti - \frac{f''(1)+f'(1)}{2}t^2 + o(t^2),\ t\to 0,$$

iz čega, na osnovu leme 1.1., sledi

$$|f(e^{ti})| = 1 - (\mathrm{Re}\, f''(1) - f'(1)^2 + f'(1))t^2 + o(t^2),\ t\to 0,$$

pa se uslov o ponašanju $|f(e^{ti})|$ može pisati u obliku

$$\mathrm{Re}\, f''(1) > f'(1)^2 - f'(1),$$

u kome obliku ćemo ga i koristiti u samom dokazu stava 1.3.

Dokaz. Razvijanjem funkcije $z^{-f'(1)}f(z)$ u okolini tačke $z=1$, dobija se

$$z^{-f'(1)}f(z) = 1 + (a+bi)(z-1)^2 + O(|z-1|^3),\ z\to 1,$$

$$\therefore\ r^{-f'(1)}|f(z)| = 1 + \mathrm{Re}\,[(a+bi)(z-1)^2] + O(|z-1|^3),\ z\to 1,$$

gde su uvedene oznake $a = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\, f''(1) - f'(1)^2 + f'(1))$, $b = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\, f''(1)$. Stavimo dalje $z-1 = \varrho e^{\vartheta i}$, $a+bi = re^{ti}$. Pošto je a pozitivno, to je $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ pa je

$$\mathrm{Re}\,(a+bi)(z-1)^2 = r\varrho^2\cos(t+2\vartheta)$$

negativan izvan jednog para unakrsnih uglova definisanih sa $-\vartheta_1<\vartheta<\vartheta_2$ gde je $0<\vartheta_{1,2}<\frac{\pi}{2}$. Stoga $f(z)$ može dostizati svoj maksimalni moduo samo u oblasti koja leži unutar tog para uglova, dakle u nekoj oblasti $\frac{|z-1|}{||z|-1|}<K$, gde je K neki pozitivan broj. Označimo sa z_r, jednu od tačaka u kojima $f(z)$ dostiže maksimalni moduo za $|z|=r$, $|\arg z|<\varepsilon$. Tada je

$$r^{-f'(1)}M(r) = r^{-f'(1)}|f(z_r)| = 1 + \mathrm{Re}\,(a+bi)(z_r-1)^2 + O(|z_r-1|^3) \leq$$

$$\leq 1 + |a+bi|\,|z_r-1|^2 + O(|z_r-1|^3) \leq$$

$$\leq 1 + K^2|a+bi|(r-1)^2 + O(|r-1|^3) =$$

$$\leq 1 + O((r-1)^2),\ r \to 1,$$

tako da je zadovoljen uslov iv) u definiciji E-funkcije.

Pokazaćemo da je dokazanim stavom obuhvaćena specijalno svaka funkcija koja zadovoljava uslove i)–iii) u definiciji E-funkcije, ako su koeficijenti njenog stepenog reda realni i nenegativni. Naime, zbog uslova iii) $f(z)$ je različito od z^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Stoga se u stepenom redu $f(z)$ nalaze bar dva koeficijenta različita od nule. Označimo ih sa a_p i a_q, $p \neq q$, i neka je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Na osnovu Schwarz-ove nejednačine, a zbog nenegativnosti koeficijenata a_n, imaćemo

$$\left(\sum_0^\infty n a_n\right)^2 = \left(\sum_0^\infty n\sqrt{a_n}\sqrt{a_n}\right)^2 \leq \sum_0^\infty n^2 a_n \sum_0^\infty a_n.$$

Znak jednakosti u napisanoj nejednačini ne može stajati, jer bi tada $n\sqrt{a_n}$ bilo proporcionalno sa $\sqrt{a_n}$ kad god je $a_n \neq 0$, pa bi bilo $p = q$. Stoga je

$$\left(\sum_0^\infty n a_n\right)^2 < \sum_0^\infty n^2 a_n,$$

gde smo iskoristili činjenicu da je $\sum_0^\infty a_n$, na osnovu uslova i) i ii), jednako jedinici. Iz dobijene nejednačine imamo

$$\left(\sum_0^\infty n a_n\right)^2 - \sum_0^\infty n a_n < \sum_0^\infty n(n-1)a_n.$$

Dakle, zadovoljen je uslov $f'(1)^2 - f'(1) < \mathrm{Re}\, f''(1)$.

Potrebno bi bilo da dokažemo da je sličan uslov zadovoljen u svim tačkama jediničnog kruga u kojima $f(z)$ dostiže maksimalni moduo. Ali, s obzirom da je $f(z)$ različito od z^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ i da ima pozitivne koeficijente, postoji samo jedna takva tačka, tačka $z = 1$, čime je stav dokazan.

1.4. Stav 1.4. Potreban i dovoljan uslov da $f(z)$ bude E-funkcija jeste da $f(z)$ zadovoljava uslove i)–iii) u definiciji E-funkcije i da u svakoj tački $e^{t_m i}$ u kojoj $f(e^{ti})$ dostiže maksimalni moduo bude

$$g_m''(e^{t_m i}) = g_m'''(e^{t_m i}) = \ldots = g_m^{(2k_m-1)}(e^{t_m i}) = 0,$$

gde je

$$g_m(z) = z^{-e^{t_m i} f'(e^{t_m i})/f(e^{t_m i})} f(z),\quad |f(e^{ti})| = 1 - A_m(t-t_m)^{2k_m} + o((t-t_m)^{2k_m}),\ t \to t_m$$

(Primetimo da uslovi ovog stava nisu toliko uski koliko možda izgledaju na prvi pogled, jer nisu nezavisni, pošto uslovi o izvodima funkcija $g_m(z)$ delimično slede iz ponašanja $|f(e^{ti})|$.)

Dokaz.

1^0 Uslov je potreban.

Pretpostavimo da je $|f(e^{ti})| = 1 - At^{2\kappa} + o(t^{2\kappa})$ i da funkcija $g(z) = z^{-\alpha} f(z), \alpha = f'(1)$, ima u tački $z=1$ izvode jednake nuli zaključno sa redom $p-1$, pri čemu je $p < 2\kappa$. Tada je

$$g(z) = 1 + a_p (z-1)^p + o(|z-1|^p), p > 1, a_p = |a_p| e^{Ti}, z \to 1.$$

$$g(1+\rho e^{ti}) = 1 + |a_p| \rho^p e^{(T+pt)i} + o(\rho^p), \rho \to 0,$$

dakle $|g(1+\rho e^{ti})| = 1 + |a_p| \rho^p + o(\rho^p)$ za $t = -T/p$.

Stavimo $1+\rho e^{ti} = r e^{\vartheta i}$. Tada je

$$r^{-\alpha} M(r) \geqslant r^{-\alpha} |f(re^{\vartheta i})| = |g(re^{\vartheta i})| = |g(1+\rho e^{ti})| \geqslant$$
$$\geqslant 1 + |a_p| \rho^p + o(\rho^p) \geqslant$$
$$\geqslant 1 + K |r-1|^p.$$

Prema tome, uslov iv) nije zadovoljen za $\alpha = f'(1)$. Očigledno je da nije zadovoljen ili za jedno drugo α , pa stoga $f(z)$ nije E-funkcija ako nisu zadovoljeni uslovi gornjeg stava.

2^0 Uslov je dovoljan.

Pošto je $g(z) = 1 + a_{2\kappa}(z-1)^{2\kappa} + o(|z-1|^{2\kappa})$, $z \to 1$, iz činjenice da je $|g(e^{ti})| = |f(e^{ti})|$ i

$$g(e^{ti}) = 1 + a_{2\kappa} i^{2\kappa} t^{2\kappa} + o(t^{2\kappa}), t \to 0,$$

odakle je

$$|g(e^{ti})| = 1 + \mathcal{R}\ell\, a_{2\kappa} i^{2\kappa} t^{2\kappa} + o(t^{2\kappa}), t \to 0,$$

sledi $\mathcal{R}\ell\, a_{2\kappa} i^{2\kappa} < 0$, dakle $\mathcal{R}\ell\, a_{4\kappa} < 0$, $\mathcal{R}\ell\, a_{4\kappa+2} > 0$, pa postoji broj m takav da je $(2m \pm \kappa)\pi + \frac{\pi}{2} < T < (2m \pm \kappa)\pi + \frac{3\pi}{2}$, gde je $T = \arg a_{2\kappa}$. Stoga je funkcija

$$|g(1+\rho e^{ti})| = 1 + |a_{2\kappa}| \rho^{2\kappa} \cos(2\kappa t + T) + o(\rho^{2\kappa}), \rho \to 0,$$

manja od jedinice kad je ρ malo i $t = \pm \frac{\pi}{2} \rho$, pa $g(z)$ može dostizati maksimalni moduo samo unutar neke oblasti $\frac{|z-1|}{|z|-1} < K$, gde je K neki pozitivan broj. Neka z_r ima značanje kao u dokazu stava 1.3. Tada je

$$r^{-f'(1)} M(r) = r^{-f'(1)} |f(z_r)| = |g(z_r)| \leqslant 1 + |a_{2\kappa}| |z_r - 1|^{2\kappa} + o(|z_r-1|^{2\kappa}) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + K |a_{2\kappa}| |r-1|^{2\kappa} + o(|r-1|^{2\kappa}), r \to 1.$$

Permanencija generalisanih Euler-ovih postupaka zbirljivosti

2.1. **Stav 2.1.** Ako su elementi matrice $\| a_{n\nu} \|$ definisani pomoću $f^n(z) = \sum a_{n\nu} z^\nu$ i ako je $f(z)$ E-funkcija, tada je postupak zbirljivosti čija je matrica $\| a_{n\nu} \|$ permanentan.

Dokaz. Treba dokazati da su zadovoljeni poznati uslovi Toeplitz-Schur-a, naime da je

1^0 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0$ za svako utvrdjeno ν

2^0 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = 1$

3^0 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1)$, $n\to\infty$.

1^0 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0$ za svako utvrdjeno ν.

Na osnovu Cauchy-eve formule $a_{n\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f^n(z)\, z^{-\nu-1} dz$, pa, ako integrišemo po krugu $|z| = \frac{1}{2}$, imaćemo $|a_{n\nu}| \leq 2^\nu \delta^n$, gde smo sa δ označili $Max\,|f(z)|$ za $|z| = \frac{1}{2}$. Prema uslovu iii) u definiciji E-funkcije, $f(z)$ je različito od konstante, pa je, na osnovu principa maksimalnog modula, $\delta < 1$, iz čega sledi

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n\nu}| \leq \lim_{n\to\infty} 2^\nu \delta^n = 0 \quad \text{za svako utvrdjeno } \nu$$

2^0 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = 1$.

Na osnovu uslova i) u definiciji E-funkcije, $f(z)$, pa stoga i $f^n(z)$, regularno je za $|z| \leq 1$. Stoga su redovi $\sum\limits_{\nu} a_{n\nu}$ konvergentni i imaju za zbirove $f^n(1)$. Pošto je, prema uslovu ii) u definiciji E-funkcije, $f(1) = 1$, to je $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = 1$ za sve n.

3^0 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1)$, $n\to\infty$.

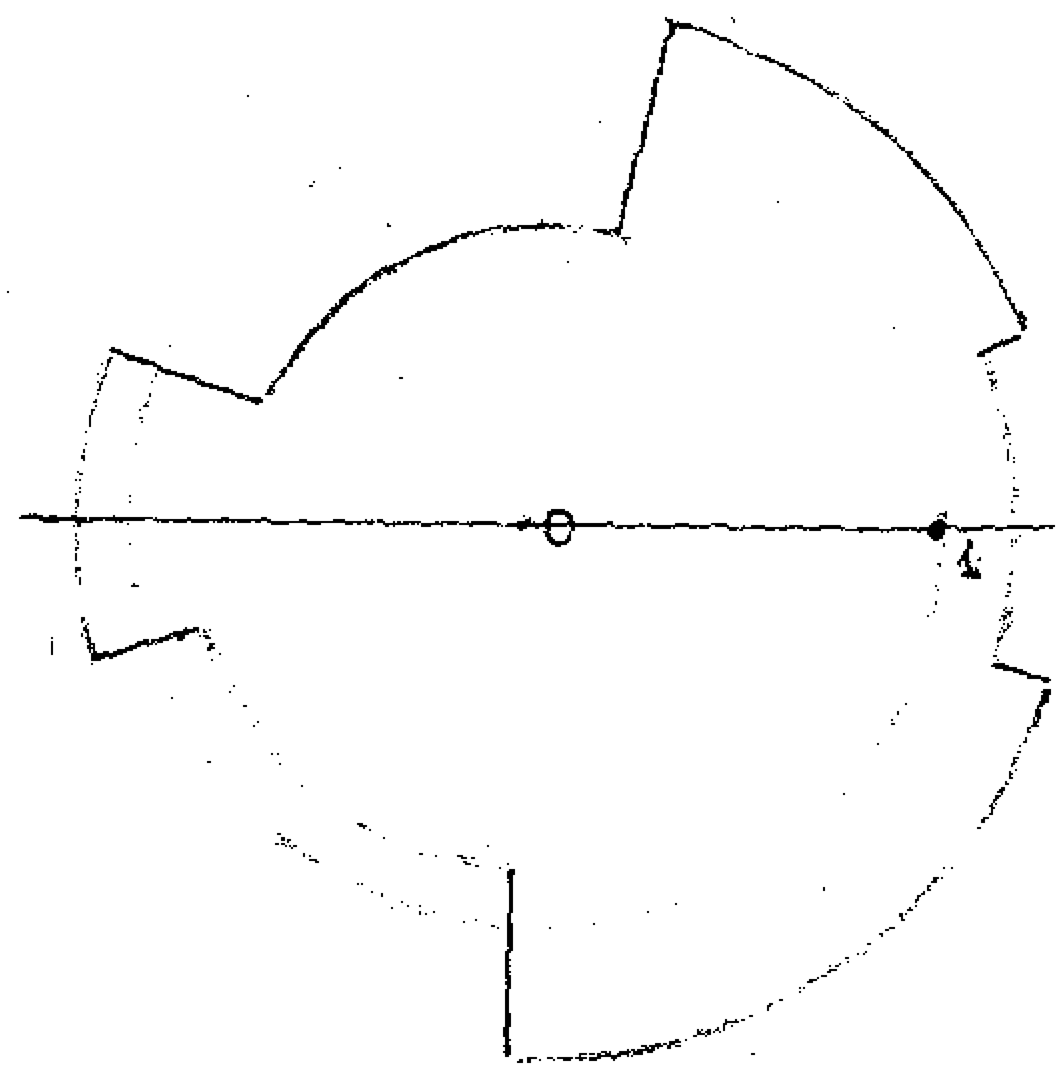
Pošto je $f^n(z)$ regularno za $|z| \leq 1$, to je svaki od redova $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|$ konvergentan. Da bi se pokazalo i da je niz suma tih redova ograničen, potrebna je dovoljno oštra ocena koeficijenata $|a_{n\nu}|$, ali je dovoljno tu ocenu dati samo za n veliko. Ocena će i ovaj put biti dobijena preko Cauchy-eve formule, ali će biti izabrana promenljiva putanja integracije, putanja zavisna od ν, n i funkcije $f(z)$.

Neka funkcija $f(z)$ dostiže na jediničnom krugu maksimalni moduo u tačkama $P_m: z = e^{t_m i}$; označimo sa $Q_m: z = e^{t'_m i}$ neku tačku na jediničnom krugu koja se nalazi izmedju dve susedne tačke P_{m-1} i P_m. Tada kružnom luku $Q_m Q_{m+1}$ pripada tačka P_m, a njoj, prema definiciji E-funkcije, odgovaraju dva

pozitivna broja, $2\kappa_m$ **i** α_m**. Onda je mogućno definisati kružne lukove** $C_{mn\nu}$ **i duži** $D_{mn\nu}$ **pomoću**

$$C_{mn\nu}: t'_m < \arg z < t'_{m+1}$$

$$|z| = \begin{cases} 1 - \gamma_{n,m}, & \text{za } \nu < \alpha_m n \\ 1 + \gamma_{n,m}, & \text{za } \nu \geq \alpha_m n \end{cases}$$



$D_{mn\nu}: z = re^{it'_m}$, gde se r menja u intervalu

$$[1-\gamma_{n,m}, 1-\gamma_{n,m+1}] \quad \text{za } \nu < n\,\mathrm{Min}(\alpha_m, \alpha_{m+1})$$

$$[1-\gamma_{n,m}, 1+\gamma_{n,m+1}] \quad \text{,,} \quad \alpha_{m+1} n \leq \nu < \alpha_m n$$

$$[1+\gamma_{n,m}, 1-\gamma_{n,m+1}] \quad \text{,,} \quad \alpha_m n \leq \nu < \alpha_{m+1} n$$

$$[1+\gamma_{n,m}, 1+\gamma_{n,m+1}] \quad \text{,,} \quad n\,\mathrm{Max}(\alpha_m, \alpha_{m+1}) \leq \nu$$

pri čemu je $\gamma_{n,m} = n^{-1/2\kappa_m}$.

Kružni lukovi $C_{mn\nu}$ **i duži** $D_{mn\nu}$ **zajedno obrazuju putanju** C **pod uslovom da je po dužima** $D_{mn\nu}$ **podesno izabran smer integracije. Ta putanja je očigledno zatvorena i sadrži u unutrašnjosti tačku** $z=0$ **. Dalje, kako je funkcija** $f(z)$ **E-funkcija, ona je regularna za** $|z| \leq 1$ **, pa stoga postoji neko** $\delta > 0$ **takvo da je ona regularna i za** $|z| \leq 1+\delta$ **. S druge strane, tačaka** $e^{t_m i}$ **ima po pretpostavci konačno mnogo, pa postoji broj** $\kappa = \mathrm{Max}(\kappa_m)$**. Medjutim, za** $n \geq \delta^{-2\kappa}$ **za svaku tačku** z **putanje** C **važi** $|z| \leq 1 + n^{-1/2\kappa}$ **, pa putanja** C **pripada oblasti regularnosti funkcije** $f(z)$ **. Prema tome, za** n **dovoljno veliko, dopušteno je primeniti Cauchy-evu formulu**

$$a_{n\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)^n z^{-\nu-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_m \int_{C_{mn\nu}} f^n(z)\, z^{-\nu-1}dz + \frac{1}{2\pi i}\sum_m \int_{D_{mn\nu}} f^n(z)\, z^{-\nu-1}dz$$

pa je $2\pi|a_{n\nu}| \leq \sum_m c_{mn\nu} + \sum_m d_{mn\nu}$**, gde je**

$$c_{mn\nu} = \int_{C_{mn\nu}} |f(z)|^n\, |z|^{-\nu-1}|dz|,$$

$$d_{mn\nu} = \int_{D_{mn\nu}} |f(z)|^n\, |z|^{-\nu-1}|dz|.$$

Stoga, a s obzirom da indeks m **uzima samo konačno mnogo vrednosti, dovoljno je da pokažemo da je**

$$\text{I} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{mn\nu} = \mathcal{O}(1) \quad \textbf{kad } n \to \infty \quad \textbf{za svako } m,$$

$$\text{II} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{mn\nu} = \mathcal{O}(1) \quad \textbf{kad } n \to \infty \quad \textbf{za svako } m.$$

I $\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{mn\nu} = \mathcal{O}(1)$ kad $n \to \infty$ za svako m.

$$c_{mn\nu} = \int_{c_{mn\nu}} |f(z)|^n |z|^{-\nu-1} |dz| = r^{-\nu} \int_{t_m'}^{t_{m+1}'} |f(re^{ti})|^n \, dt =$$

1) $$= \left(M_m(r) r^{-\alpha_m}\right)^n r^{\alpha_m n-\nu} \int_{t_m'}^{t_{m+1}'} |f(re^{ti})|^n M_m^{-n}(r)\, dt.$$

Posebno ćemo oceniti svaki od tri faktora na koje se raspada $c_{mn\nu}$. Pri tome, indeks m nećemo više pisati, radi jednostavnosti.

a) Prema definiciji R-funkcije $r^{-\alpha} M(r) = 1 + O((r-1)^{2\kappa}) \leq 1 + H'(r-1)^2$

Stavljajući $r = 1 \mp n^{-1/2\kappa}$, dobijamo $M(r) r^{-\alpha} \leq 1 + H'/n$,

pa je stoga

2) $$\left(M(r) r^{-\alpha}\right)^n \leq \left(1 + \frac{H'}{n}\right)^n \leq e^{H'} = H.$$

b) Prema izboru putanje

$$r^{\alpha n-\nu} = \begin{cases} (1 - n^{-1/2\kappa})^{\alpha n - \nu} & \text{za } \nu < \alpha n, \\ (1 + n^{-1/2\kappa})^{\alpha n - \nu} & \text{za } \nu \geq \alpha n. \end{cases}$$

Kako je $(1 - n^{-1/2\kappa})^{-n^{1/2\kappa}} \geq e^{1/2}$ za n dovoljno veliko, i takođe

~~to je~~ $(1 + n^{-1/2\kappa})^{n^{1/2\kappa}} \geq e^{1/2}$ za n dovoljno veliko, to je

3) $$r^{\alpha n-\nu} \leq e^{-\frac{1}{2}|\alpha n - \nu| n^{-1/2\kappa}}.$$

c) Da bismo ocenili integral

$\int_{t'}^{t''} |f(re^{ti})|^n M^{-n}(r)\, dt$, gde je $t' = t_m'$, $t'' = t_{m+1}'$, $M(r) = M_m(r)$,

modificiraćemo unekoliko klasičnu Laplace-ovu metodu.

Pre svega, neka $|f(z)|$ uzima za $|z| = R_{1,2}$ vrednost svog maksimuma u beskonačno mnogo tačaka, neka je $R_{1,2} \leq 1 + \delta$ i neka R označava jedan od brojeva R_1, R_2. Tada krive $|f(Re^{ti})|$ i $|f(z)| = \underset{|z|=R}{Max}|f(z)| = M(R)$ imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka i analitičke su. Stoga se one poklapaju. Prema tome, $f(z)$ preslikava krug $|z| = R$ na krug $|f(z)| = M(R)$. Stoga $g(z) = \frac{f(Rz)}{M(R)}$ preslikava jedinični krug na jedinični krug. Pošto je $f(z)$ regularno za $|z| \leq R$, $g(z)$ je regularno za $|z| \leq 1$. Odatle je $g(z) = e^{\vartheta i} h(z)$, gde je $h(z)$ jednako proizvodu konačno mnogo specijalnih homografskih funkcija. Na taj način je $f(z) = M(R) g\left(\frac{z}{R}\right) = M(R) e^{\vartheta i} h\left(\frac{z}{R}\right)$. Kako to važi i za $R = R_1$, i za $R = R_2$, mora biti $M(R_1) e^{\vartheta_1 i} h\left(\frac{z}{R_1}\right) = M(R_2) e^{\vartheta_2 i} h\left(\frac{z}{R_2}\right)$. Stoga obe funkcije $h\left(\frac{z}{R_1}\right)$ i $h\left(\frac{z}{R_2}\right)$ moraju imati iste nule, tj. $R_1 z_j = R_2 z_j$ za $j = 1, 2, \ldots p$. Kako je, po pretpostavci, $R_1 \neq R_2$, to je $z_j = 0$ za $j = 1, 2, \ldots p$, odakle je $f(z) = e^{\vartheta_i} z^p$.

Prema tome, $|f(z)|=1$ u svim tačkama jediničnog kruga, što je suprotno uslovu iii) u definiciji E-funkcije.

Moguéno je dakle da $|f(z)|$ uzima vrednost svog maksimuma beskonačno mnogo puta samo na jednome krugu $|z|=R$, $R\leq 1+\delta$. Kako je to R, prema uslovu iii) u definiciji E-funkci e, različito od 1, to je, za n dovoljno veliko, $1-\frac{|R-1|}{2}<r=1\pm n^{-1/2\kappa}<1+\frac{|R-1|}{2}$, pa možemo pretpostaviti da $|f(re^{ti})|$ uzima vrednost svog maksimuma samo u konačno mnogo tačaka τ_s za $t'\leq t\leq t''$.

Stoga se integral $\int_{t'}^{t''}|f(re^{ti})|^n \mathcal{M}(r)^{-n}dt$ može pretstaviti kao zbir konačno mnogo integrala $\int_{\tau'}^{\tau''}|f(re^{ti})|^n\mathcal{M}(r)^{-n}dt$, gde su funkcije $\tau'(r)$ i $\tau''(r)$ tako izabrane da integrand dostiže maksimum samo jednom unutar intervala integracije, u tački koju ćemo označiti sa $\tau(r)$. Integral

$$\int_{\tau'}^{\tau''}|f(re^{ti})|^n \mathcal{M}(r)^{-n}dt$$

prikazaćemo kao zbir integrala preko intervala $(\tau',\tau_r-\varepsilon)$, $(\tau_r-\varepsilon,\tau_r+\varepsilon)$ i $(\tau_r+\varepsilon,\tau'')$, pri čemu je $\varepsilon(r)>0$ izabrano dovoljno malo. Tada je

$$\int_{\tau'}^{\tau''}|f(re^{ti})|^n \mathcal{M}(r)^{-n}dt \leq \int_{\tau_r-\varepsilon}^{\tau_r+\varepsilon}|f(re^{ti})|^n\mathcal{M}(r)^{-n}dt+K\alpha^n,\ 0<\alpha<$$

Pošto je $|f(re^{ti})|>0$ za $\tau_r-\varepsilon<t<\tau_r+\varepsilon$, to se funkcija $\log|f(re^{ti})|-\log\mathcal{M}(r)$ može razviti oko tačke $t=\tau_r$. Tada je

$$\varphi(r,t)=\log|f(re^{ti})|-\log\mathcal{M}(r)=\sum_{\mu=2l}^{2\kappa-1}A_\mu(r)(t-\tau_r)^\mu+\widetilde{A}_{2\kappa}(r)(t-\tau_r)^{2\kappa},$$

4) gde je $$A_\mu(r)=\frac{\partial^\mu\varphi(r,t)}{\partial t^\mu}\bigg|_{t=\tau_r},\quad \widetilde{A}_{2\kappa}(r)=\frac{\partial^{2\kappa}\varphi(r,t)}{\partial t^{2\kappa}}\bigg|_{t=\tau},\quad \tau_r-\varepsilon<\tau<\tau_r+$$

Pošto je $\widetilde{A}_{2\kappa}(r)$ neprekidna funkcija od r i $\widetilde{A}_{2\kappa}(1)<0$, to je $\widetilde{A}_{2\kappa}(r)$ takodje negativno i šta više $\widetilde{A}_{2\kappa}(r)<\frac{1}{2}A_{2\kappa}(1)$ za r dovoljno blisko jedinici, dakle za n dovoljno veliko.

Pokazaćemo da svaka funkcija $A_\mu(r)$, $\mu=2l,\ldots,2\kappa-1$ ima u tački $r=1$ nulu bar reda $2\kappa-\mu$. Radi toga smatraćemo da je svaka od tih funkcija definisana pomoću dva analitička izraza, jednog za $r\geq 1$ i jednog za $r\leq 1$. Pokazaćemo da svaki od tih izraza, koje ćemo i dalje, jednostavnosti radi, označavati sa $\mathcal{A}_\mu(r)$ ima u tački $r=1$ nulu reda bar $2\kappa-\mu$. Za to je dovoljno dokazati da su svi izvodi od $\mathcal{A}_\mu(r)$ zaključno sa izvodom reda $2\kappa-\mu-1$ jednaki nuli u $r=1$. Pošto se, na osnovu 4), izvodi od $\mathcal{A}_\mu(r)$ izražavaju kao linearna forma sastavljena od parcijalnih izvoda funkcije $\varphi(r,t)$ po r i t i, kako su koeficijenti te forme, izvodi od τ_r po r, dovoljno je pokazati da, prvo, izvodi od τ_r po r ($r\geq 1$ ili $r\leq 1$) postoje za $r=1$, i drugo, da su svi parcijalni izvodi od $\varphi(r,t)$ po r i t zaključno sa parcijalnim izvorima reda $2\kappa-1$, jednaki nuli u tački $r=1$.

Pre svega, τ_r je definisano kao jednoznačna funkcija od r. Ta funkcija je očigledno i neprekidna. Medjutim, tačke $z=re^{\tau_r i}$ imaju prema lemi 1.1. osobinu da je $\operatorname{Im} zf'(z)/f(z)=0$. Kako je $g(z)=zf'(z)/f(z)$ različito od konstante, pošto je $f(z)$ različito od z^{κ}, i kako je $g(z)$ regularno u tački e^{tmi}, to inverzna funkcija od $g(z)$ u okolini te tačke preslikava neki deo realne ose oko $g(e^{tmi})$ na konačno mnogo lukova analitičkih krivih oko tačke e^{tmi}. (Tvrdjenje da $re^{\tau_r i}$ pretstavljaju luk analitičke krive ne bi bilo tačno ako se ne bismo ograničili na $r\geq 1$ ili $r\leq 1$, pošto je luk analitičke krive čije tačke zadovoljavaju uslov $\operatorname{Im} zf'(z)/f(z)=0$ može za $r\geq 1$ pretstavljati neki skup tačaka maksimuma, a za $r\leq 1$ tačaka mimimuma modula funkcije $f(z)$, i obratno.)

Stoga, posmatrane tačke $z=re^{\tau_r i}$ obrazuju luk neke analitičke krive. Kako je na osnovu stava 1.4. $\tau_r=\mathcal{O}(r-1)$, prvi izvod od r po τ_r ne može biti jednak nuli. Stoga je τ_r analitička funkcija od r u okolini tačke $r=1$, pa prema tome postoje svi izvodi od τ_r u tački $r=1$.

S druge strane, na osnovu stava 1.4.,

$$z^{-\alpha}f(z)=1+A(z-1)^{2\kappa}+o(|z-1|^{2\kappa}),\ z\to 1,$$

pa je $\log z^{-\alpha}f(z)=A(z-1)^{2\kappa}+o(|z-1|^{2\kappa})$. Stoga je

$$\log e^{-\alpha ti}r^{-\alpha}f(re^{ti})=A(r(e^{ti}-1)+(r-1))^{2\kappa}+o(|r(e^{ti}-1)+(r-1)|^{2\kappa}),$$

pa je tada

$$\varphi(r,t)=\log|f(re^{ti})|-\log M(r)=\log r^{-\alpha}|f(re^{ti})|+\mathcal{O}((r-1)^{2\kappa})=$$

$$=\operatorname{Re}\log e^{-\alpha ti}r^{-\alpha}f(re^{ti})+\mathcal{O}((r-1)^{2\kappa})=$$

$$=\operatorname{Re}A(r(e^{ti}-1)+(r-1))^{2\kappa}+\mathcal{O}((r-1)^{2\kappa})+o(|r(e^{ti}-1)+(r-1)|^{2\kappa})$$

te, pošto je $e^{ti}-1=ti+\mathcal{O}(t^2)$, postoje u tački $r=1$, $t=0$ svi parcijalni izvodi od $\varphi(r,t)$ zaključno sa redom $2\kappa-1$ i jednaki su nuli.

Na osnovu pokazanog je $A'_\mu(r-1)^{2\kappa-\mu}<A_\mu(r)<A''_\mu(r-1)^{2\kappa-\mu}$, gde su A'_μ i A''_μ dva realna broja, i to važi za $|r-1|<\varepsilon'$, dakle za n dovoljno veliko.

Prema tome, biće

$$I(n)=\int_{\tau_r}^{\tau_r+\varepsilon}|f(re^{ti})|^n M(r)^{-n}dt=\int_{\tau_r}^{\tau_r+\varepsilon}e^{n[\log|f(re^{ti})|-\log M(r)]}dt=$$

$$=\int_{\tau_r}^{\tau_r+\varepsilon}e^{n\sum_{2e}^{2\kappa-1}A_\mu(r)(t-\tau_r)^\mu+n\bar{A}_{2\kappa}(r)(t-\tau_r)^{2\kappa}}dt\le$$

$$\le\int_{\tau_r}^{\tau_r+\varepsilon}e^{n\sum_{2e}^{2\kappa-1}A''_\mu(r-1)^{2\kappa-\mu}(t-\tau_r)^\mu+\frac{n}{2}A_{2\kappa}(1)(t-\tau_r)^{2\kappa}}dt.$$

Stavimo $r=1\pm n^{-1/2\kappa}$**. Tada je**

$$I(n)\le\int_{\tau_r}^{\tau_r+\varepsilon}e^{n\sum_{2e}^{2\kappa-1}A''_\mu(\pm1)^\mu n^{(\mu-2\kappa)/2\kappa}(t-\tau_r)^\mu+\frac{n}{2}A_{2\kappa}(1)(t-\tau_r)^{2\kappa}}dt.$$

Ako izvršimo smenu $n^{\frac{1}{2\kappa}}(t-\tau_r)=x$ **, imaćemo**

$$I(n)\le n^{-\frac{1}{2\kappa}}\int_0^\infty e^{\sum_{2e}^{2\kappa-1}A''_\mu(\pm1)^\mu x^\mu+\frac{A_{2\kappa}(1)}{2}x^{2\kappa}}dx.$$

Pošto je $P(x)=\sum_{2e}^{2\kappa-1}A''_\mu(\pm1)^\mu x^\mu+\frac{1}{2}A_{2\kappa}(1)x^{2\kappa}\le\frac{A_{2\kappa}(1)}{4}x^{2\kappa}$**, jer** $A_{2\kappa}(1)<0$, **za** $x\ge X$ **, gde** X **zavisi samo od funkcije** $f(z)$ **jer od nje zavise jedino brojevi** A'_μ, A''_μ **, to je**

$$\int_0^\infty e^{P(x)}dx\le\int_0^X e^{P(x)}dx+\int_X^\infty e^{A_{2\kappa}(1)x^{2\kappa}/4}dx\le K_1.$$

Stoga je $I(n)\le K_1 n^{-1/2\kappa}$ **, iz čega se konačno dobija za** n **dovoljno veliko**

$$5)\qquad \int_{t'_m}^{t'_{m+1}}|f(re^{ti})|^n M(r)^{-n}dt\le K n^{-1/2\kappa}.$$

Uzimajući u obzir resultate 1) **,** 2) **,** 3) **i** 5) **imaćemo**

$$c_{mn\nu}\le KH\, n^{-1/2\kappa_m}e^{-\frac{1}{2}|\alpha_m n-\nu|n^{-1/2\kappa_m}}$$

Pošto je $n^{-1/2\kappa}\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}|\alpha n-\nu|n^{-1/2\kappa}}\le n^{-1/2\kappa}\sum_{\nu=0}^{\alpha n-1}e^{\frac{1}{2}(\nu-\alpha n)n^{-1/2\kappa}}+1+$

$$+n^{-1/2\kappa}\sum_{\nu=\alpha n}^{\infty}e^{\frac{1}{2}(\alpha n-\nu)n^{-1/2\kappa}}\le n^{-1/2\kappa}e^{-\frac{1}{2}\alpha n^{1-1/2\kappa}}\frac{e^{\frac{1}{2}\alpha n^{1-1/2\kappa}}-1}{e^{\frac{1}{2}n^{-1/2\kappa}}-1}+1+$$

$$+n^{-1/2\kappa}\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{2}n^{-1/2\kappa}}}\le\frac{1}{n^{1/2\kappa}(e^{1/2n^{-1/2\kappa}}-1)}+\frac{1}{n^{1/2\kappa}(1-e^{-\frac{1}{2}n^{-1/2\kappa}})}+1,$$

i, $e^x-1\ge x$ **i** $1-e^{-x}\ge\frac{x}{2}$ **za** $0\le x\le1$ **, pa je gornji izraz** ≤7**, to je**

$$\sum_\nu c_{mn\nu}=O(1)\ \textbf{za svako } m \textbf{ i } n \textbf{ dovoljno veliko.}$$

II $\sum_{\nu=0}^{\infty}d_{mn\nu}=O(1)$ **Kad** $n\to\infty$ **za svako** m .

Uvedimo sledeće oznake: $\alpha=\mathrm{Max}\,\alpha_m$, $\kappa=\mathrm{Max}\,\kappa_m$, $\delta_n=n^{-1/2}$, $\gamma_n=n^{-1/2\kappa}$. **Tada je**

$$d_{mn\nu}=\int_{D_{mn\nu}}|f(z)|^n|z|^{-\nu-1}|dz|=\int|f(re^{it_m})|^n r^{-\nu-1}dr\le$$

$$\le\begin{cases}\int_{1-\gamma_n}^{1+\gamma_n}|f(re^{it'_m})|^n r^{-\nu-1}dr & \text{za } \nu<\alpha_m n,\\[2mm] \int_{1+\delta_n}^{1+\gamma_n}|f(re^{it'_m})|^n r^{-\nu-1}dr & \text{za } \nu\ge\alpha_m n.\end{cases}$$

Po pretpostavci je $|f(re^{it_m'})| \leq 1-2\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$. Tada će zbog neprekidnosti biti $|f(re^{it_m'})|\leq 1-\varepsilon$ za $|r-1|\leq\delta$, gde je $\delta>0$. Kako $r-1$ i γ_n teže nuli kad n teži beskonačnosti, to je, za n dovoljno veliko, $\gamma_n<\delta$ i $|r-1|<\delta$. Stoga je

$$\int_{1+\beta_n}^{1+\gamma_n} |f(re^{it_m'})|^n r^{-\nu-1}dr \leq \begin{cases} 2\gamma_n(1-\varepsilon)^n(1-\gamma_n)^{-\nu-1}, & \beta_n=-\gamma_n, \\ \gamma_n(1-\varepsilon)^n(1+\delta_n)^{-\nu-1}, & \beta_n=\delta_n, \end{cases}$$

pa je za n dovoljno veliko, takvo da je $\delta_n=n^{-\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}$, $\gamma_n\leq\frac{1}{3}$, $(1-\gamma_n)^{\alpha}>\sqrt{1-\varepsilon}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{\infty} d_{mn\nu} &\leq \sum_{\nu=0}^{\alpha n} d_{mn\nu} + \sum_{\nu=\alpha n}^{\infty} d_{mn\nu} \leq \\
&\leq 2\gamma_n(1-\varepsilon)^n\sum_{\nu=0}^{\alpha n}(1-\gamma_n)^{-\nu-1} + \gamma_n(1-\varepsilon)^n\sum_{\nu=\alpha n}^{\infty}(1+\delta_n)^{-\nu-1} \leq \\
&\leq 2(1-\varepsilon)^n\left[(1-\gamma_n)^{-\alpha n-1}-1\right] + 2\gamma_n\delta_n^{-1}(1-\varepsilon)^n(1+\delta_n)^{-\alpha n-1} \leq \\
&\leq 3(1-\varepsilon)^n(1-\gamma_n)^{-\alpha n} + 2\gamma_n\delta_n^{-1}(1-\varepsilon)^n \leq \\
&\leq 3(1-\varepsilon)^{\frac{n}{2}} + 2\sqrt{n}\,(1-\varepsilon)^n \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

pa je prema tome $\sum_{\nu} d_{mn\nu}<K$ za n dovoljno veliko, čime je stav dokazan.

Napomena. U slučaju da se ispituju postupci zbirljivosti asociranih funkcijama definisanim u 1.3., dokaz stava permanencije se unekoliko skraćuje. Naime, ocena integrala

$$\int |f(re^{ti})|^n M(r)^{-n}dt$$

ne zahteva tada glomazan račun, već se dobiva neposredno.

2.2. Dokazani stav daje dovoljne uslove da bi $(E, f(z))$ postupak zbirljivosti bio permanentan. Prirodno se postavlja pitanje o potrebnim i dovoljnim uslovima. Očigledno je da prvi uslov u definiciji E-funkcije, uslov koji zahteva regularnost funkcije $f(z)$ u i na jediničnom krugu, nije potreban. Potrebno je da funkcija $f(z)$ bude regularna unutar jediničnog kruga, jer u suprotnom slučaju nijedan od redova $\sum_{\nu}|a_{n\nu}|$ ne bi bio konvergentan. Medjutim, nije potrebno da funkcija $f(z)$ bude regularna i na jediničnom krugu, što pokazuje primer funkcije definisane stepenim redom $\frac{6}{\pi^2}\sum_{n} n^{-2}z^n$, čiji je poluprečnik konvergencije ravan jedinici, a koja ipak definiše jedan permanentan postupak zbirljivosti. Ukoliko bismo se rešili da problemu pridjemo u svoj mogućoj opštosti, morali bismo tretirati i slučajeve kada funkcija nije regularna na rubu jediničnog kruga. Tada bi se pored teškoća koje se već javljaju kod funkcija regularnih i na rubu, pojavile i dve nove vrste teškoća: prvo sloboda u izboru konture integracije, koja je bila od odlučujućeg značaja u dokazu stava 2.1., bila bi ograničena, i drugo, prva dva uslova Toeplitz-Schur-a o koeficijentima a_{nk} ne bi se više dali jednostavno prevesti na uslove o funkciji $f(z)$. Ne bi se dali prevesti na uslove o funkciji $f(z)$, jer ako funkcija ima singularitet na jediničnom krugu, vrednost funkcije u tački $z=1$ nije vezana sa sumom njenog stepenog reda u toj tački, tako da - ako bismo želeli da uslove o koeficijentima prenesemo na uslove o funkciji - bili bi nam potrebni za ovaj manje važan deo stava rezultati znatno oštriji od onih koji su dati u Fatou-Riesz-ovom ili apsolutnom Fatou-Riesz-ovom stavu. Stoga nije realno očekivati rešenje problema u tom najopštijem obliku u slučaju funkcija koje imaju singularitete na jediničnom krugu, već samo rešenja koja bi se odnosila na pojedine klase takvih funkcija, posebno interesantnih. Napominjemo da se $(E, f(z))$ postupci sa funkcijom $f(z)$, koja ima singularitet na jediničnom krugu, prirodno javljaju kod izvesnih stavova o inkluziji ili ekvivalenciji dva postupka zbirljivosti. Uprkos toga, uslov o regularnosti funkcije $f(z)$ na jediničnom krugu, iako nije potreban, više je nego prirodan u datom stavu o permanenciji. Pri tom uslovi, uslov ii) postaje očigledno potreban, a potreban je i uslov da $|f(z)| \leq 1$ za $|z|=1$, što je jedna generalizacija trećeg uslova u definiciji E-funkcije. Očigledno je da ~~taj~~ treći uslov nije nužan za stav o permanenciji, što pokazuje primer funkcije z^k, $k=0,1,\ldots$. Postavlja se pitanje, ne bi li se možda taj uslov (naime, da je $|f(z)|<1$ za $|z|\leq 1$ izuzev u konačno mnogo tačaka $e^{t_m i}$) mogao zameniti opštijim uslovom $|f(z)|\leq 1$ za $|z|\leq 1$, pa da stav o permanenciji i dalje ostane u važnosti. Kako svaka funkcija koja zadovoljava opštiji, ali ne i manje opšti od navedenih uslova, može da bude prikazana kao proizvod konačno mnogo homografskih funkcija, što je uzgred pokazano, u dokazu stava 2.1., to, da bi se mogla na gore navedeni način uopštiti klasa E-funkcija, jedino ostaje da se dokaže da je permanentan onaj postupak zbirljivosti koji je asociran funkciji $f(z)=\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$, $0<\alpha<1$. Medjutim, prema nepotpunim rezultatima kojima raspolažemo, vrlo je verovatno da je taj stav netačan.

Inkluzija medju generalisanim Euler-ovim postupcima zbirljivosti

3.1. **Stav 3.1.** Ako je

i) funkcija $g(f^{-1}(z))$, koja je definisana u okolini tačke $z=1$, E-funkcija

ii) $s_n = O(r^n)$, gde je $r < \mathrm{Min}(R_1, R_2)$, R_1, R_2 poluprečnici konvergencije za funkciju[1] $f(z)$, odnosno $g(z)$

tada iz $(E, f(z)) - \lim s_n = s$

sledi $(E, g(z)) - \lim s_n = s$.

Dokaz. Pre svega, potrebno je dokazati da je funkcija $h(z) = g(f^{-1}(z))$ zaista definisana u okolini tačke $z=1$. Posmatrajmo, radi toga, skup funkcija koje su u tački $z=1$ regularne, jednake jedinici i imaju pozitivan prvi izvod. Tada s jedne strane, svaka E-funkcija pripada tome skupu; s druge strane, taj skup čini grupu u odnosu na kompoziciju funkcije. Odatle je $h(z)$ definisano za $z \approx 1$, pa uslov i) ima smisla.

Pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi stava i uvedimo sledeće oznake

$$f^n(z) = \sum a_{n\nu} z^\nu, \quad g^n(z) = \sum b_{n\nu} z^\nu, \quad h^n(z) = \sum c_{n\nu} z^\nu$$

$$T_1 = \| a_{n\nu} \|, \quad T_2 = \| b_{n\nu} \|, \quad T_3 = \| c_{n\nu} \|$$

$M(r) = \mathrm{Max}\,|f(z)|$ za $|z| = R_3$, R_3 poluprečnik konvergencije za $h(z)$.

Kako je $h(f(z)) = g(z)$, dakle $h^n(f(z)) = g^n(z)$, to je

$$\sum_\nu c_{n\nu} \sum_m a_{\nu m} z^m = \sum_\nu c_{n\nu} f^\nu(z) = \sum_m b_{nm} z^m,$$

pa je na osnovu Weierstrass-ovog stava o dvostrukim redovima i jedinstvenosti razvitka funkcije u stepeni red $\sum_\nu c_{n\nu} a_{\nu m} = b_{nm}$, dakle $T_3 T_1 = T_2$.

Iz činjenice da je niz s_n (E, f) zbirljiv ka s, i da je (E, h) postupak regularan, sledi da $T_3\,(T_1 s_n) \to s$. Naš cilj je da dokažemo da je tada niz s_n i (E, g) zbirljiv ka s, to jest da $T_2 s_n = (T_3 T_1) s_n \to s$. Za to je očigledno dovoljno pokazati da je $T_3 (T_1 s_n) = (T_3 T_1) s_n$. Medjutim, zakon asocijativnosti ne važi nužno u ovom slučaju, jer posmatrani vektori i matrice nisu konačnog reda. Postavlja se, naime, pitanje da li je, odnosno kada je, dozvoljena promena poretka sumacije:

$$\sum_\nu \sum_m c_{n\nu} a_{\nu m} s_m = \sum_m \sum_\nu c_{n\nu} a_{\nu m} s_m .$$

[1]) Ако је $f(z) = \sum a_n z^n$, R полупречник конвергенције реда $\sum a_n z^n$, рећи ћемо да је R полупречник конвергенције функције $f(z)$.

Pošto napisani dvostruki red nije apsolutno konvergentan ni kad su ispunjeni svi uslovi stava, promena poretka sumacije nije očigledna. Da bismo je opravdali, primenimo na red

$$\sum_{\nu} c_{n\nu} \sum_{m} a_{\nu m} s_m z^m$$

Weierstrass-ov stav o dvostrukim redovima. Ako, dakle, dokažemo da je $\sum_{m} a_{\nu m} s_m z^m$ konvergentno za $|z| \leq 1$ i da je red $\sum_{\nu} c_{n\nu} f^{\nu}(z)$ uniformno konvergentan za $|z| \leq 1$, tada je promena poretka sumacije dozvoljena.

Medjutim, ~~za dovoljno malo,~~ $\sum_{m} |a_{\nu m}||s_m| \leq K \sum_{m} |a_{\nu m}| r^m < \infty$ jer redovi $\sum a_{n\nu} z^{\nu}$, $\sum a_{m\nu} z^{\nu}$ i $\sum |a_{m\nu}| z^{\nu}$ imaju isti poluprečnik konvergencije. Dakle, redovi koji definišu $f_{\nu}(z)$ konvergentni su za $|z| \leq 1$.

S druge strane, za $|z| \leq 1$ važi

$$|f_{\nu}(z)| = |\sum_{m} a_{\nu m} s_m z^m| \leq \sum_{m} |a_{\nu m}||s_m||z|^m \leq$$
$$\leq K \sum_{m} |a_{\nu m}| r^m .$$

Medjutim, kako je na osnovu definicije E-funkcije, leme 1.1. i stava 1.3. mogućno naći r_1, $r < r_1 < R_2$, i φ, takve da je $f(r_1 e^{\varphi i} z) / \mathcal{M}(r_1)$ E-funkcija, biće

$$\sum_{m} |a_{\nu m}| r_1^m \leq L \mathcal{M}^{\nu}(r_1), \qquad \text{pa je}$$

$$|f_{\nu}(z)| \leq K \sum_{m} |a_{\nu m}| r^m = K \sum_{m} |a_{\nu m}| r_1^m \leq K L \mathcal{M}^{\nu}(r_1),$$

pa, kako je red $\sum_{\nu} |c_{n\nu}| \mathcal{M}^{\nu}(r_1)$, zbog $\mathcal{M}(r_1) < \mathcal{M}(R_2) = R_3$, konvergentan, to je red $\sum_{\nu} c_{n\nu} f(z)^{\nu}$ uniformno konvergentan za $|z| \leq 1$, čime je stav dokazan.

Navedeni stav daje samo dovoljne uslove za inkluziju dva postupka zbirljivosti. To je i prirodno, pošto oštrina jednog stava inkluzije zavisi od oštrine odgovarajućeg stava permanencije, na osnovu koga se on i dokazuje: nemajući potrebne i dovoljne uslove za permanenciju, ne možemo ih imati ni za inkluziju.

Medjutim, kako je stav permanencije dat vrlo opšte, i uslov i) u gornjem stavu, jer sledi direktno iz stava permanencije, vrlo je opšt, ma da postavlja dosta uska ograničenja na funkcije $f(z)$ i $g(z)$. Ali, uskost tih ograničenja ne nastaje usled nedostatka opštosti stava, već je u prirodi stvari. Da bismo to objasnili na primeru, posmatrajmo postupak (E, e^{z-1}) Pošto funkcija e^{z-1} uzima vrednost 1 u tačkama $1+2k\pi i$, to je svaki od nizova $s_n = (1+2k\pi i)^n$ zbirljiv ka s. Stoga, da bi postupak $(E, g(z))$ sadržao postupak (E, e^{z-1}), on mora pre svega da svaki od navedenih nizova sabira ka 1. To je, medjutim, mogućno samo ako funkcija $g(z)$ u svim navedenim tačkama uzima vrednost 1, a to je već dosta oštro nužno ograničenje, koje nije i jedino.

Da sam uslov i) nije dovoljan za tačnost stava, pokazuje primer: $f(z) = \frac{3+z}{4}$, $g(z) = \frac{1}{2-z}$. Očigledno je da je $h(z) = g(f^{-1}(z)) = 1 : 5(1 - \frac{4}{5}z)$ E-funkcija. Medjutim, niz $s_n = (-3)^n$ je zbirljiv postupkom (E, f) ka nuli, dok postupkom (E, g) nije zbirljiv. Iz tog razloga u stavu se morao pojaviti uslov ii). Da je on dovoljno prirodan, moguéno je pokazati na sledeći način: ako je $|s_n| > KR^n$, gde je R, na primer, veće od poluprečnika konvergencije za funkciju $g(z)$, tada (E, g) transformacija niza s_n ne postoji.

Naravno, ni uslov ii) nije potreban. To pokazuju trivijalni slučajevi, kao na primer kad su $f(z)$ i $g(z)$ u i na jediničnom krugu regularne funkcije od z^2. Tada članovi niza sa neparnim indeksima mogu rasti proizvoljnom brzinom.

Najzad, napomenimo da se uslov i) koji se odnosi na funkciju $g(f^{-1}(z))$ može transformisati tako da se odnosi direktno na funkcije $f(z)$ i $g(z)$. Medjutim, takav transformisani oblik uslova ne samo što je, zbog glomaznosti, nepodesan za formulaciju samog stava o inkluziji, već je nepogodan i za primenu na specijalne postupke zbirljivosti.

Jedna specijalna klasa postupaka zbirljivosti

4.1. U ovome odeljku dobijeni stavovi biće primenjeni na jednu posebnu klasu E-postupaka zbirljivosti, na E-postupke asocirane funkcijama $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, gde su koeficijenti a, b, c, d, realni. Ti postupci su od posebnog značaja, jer sadrže kao specijalan slučaj dve poznate vrste postupaka zbirljivosti, naime, Euler-Knopp-ove i Meyer-König-ove postupke.

Karamata je prvi definisao postupke koje ćemo posmatrati i formulisao je stav permanencije za njih, koji je zatim Szegö dokazao. Mi ćemo stav permanencije i stav inkluzije za te postupke izvesti kao posledice iz naših opštih stavova (stav 2.1. i stav 3.1.) uz napomenu da se metodom primenjenom u dokazu stava 2.1. stav permanencije za ove postupke može i direktn dokazati, i to na znatno jednostavniji i kraći način nego kod Szegö-a.

<u>Stav 4.1.</u> Da bi E-postupak zbirljivosti asociran funkciji $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ bio permanentan, dovoljno je da

i) $|d|>|c|$

ii) $a+b=c+d$

iii) $|b-a|<|d-c|$.

<u>Dokaz</u>. Prema opštem stavu oppermanenciji (stav 2.1.) treba jedino dokazati da su uslovi navedeni u gornjem stavu dovoljni da $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ bude E-funkcija. To je očigledno, jer zbog uslova i) $f(z)$ je regularno u i na jediničnom krugu, a zbog uslova ii) $f(1)=1$. Dalje, zbog uslova iii) $|f(-1)|<1$ i zbog ii) $f(1)=1$, pa $f(z)$ nije konstanta. Pošto je tada $f(z)$ homografska E-funkcija, ona preslikava svaki krug ili na krug ili na pravu. Zbog uslova i) jedinični krug preslikava na krug. Kako su njeni koeficijenti realni, centar tog kruga je na realnoj osi, i kako je $f(-1)$ realno i po modulu manje od jedinice i $f(1)=1$, to je taj krug u unutrašnjosti jediničnog kruga, te prema tome ima s njim zajedničku samo tačku $z=1$, pa je zadovoljen i treći uslov u definiciji E-funkcije. Najzad, pošto dodir izmedju dva različita kruga ne može biti reda višegod prvog, zadovoljen je, na osnovu stava 1.3., i četvrti uslov u definiciji E-funkcije.

Napomenimo da su uslovi navedeni u stavu takodje i potrebni da bi $f(z)$ bilo E-funkcija.

Radi jednostavnosti korisno je u daljem izlaganju pisati homografske E-funkcije u jednom drugom obliku, koji ćemo nazvati njihovim kanoničkim oblikom. Naime, kako je, na osnovu uslova i), $d \neq 0$ i kako su od četiri koeficijenta koja figurišu u izrazu za $f(z)$ samo tri nezavisna, možemo bez ograničenja opštosti pretpostaviti da je $d=1$. Uslov ii) može se iskoristiti da se eliminiše i parametar a. Uvodeći oznake $\alpha = b$, $\beta = -c$ homografska E-funkcija dobija tada oblik

$$\varphi(z) = \frac{\alpha + (1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z},$$

pri čemu uslovi stava 4.1. prelaze u uslove $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha+\beta > 0$. Postupak zbirljivosti asociran funkciji $\varphi(z)$ označavaćemo sa $E(\alpha,\beta)$. Za $\beta = 0$ on degeneriše u Euler-Knoppov postupak, a za $\beta = 1-\alpha$ u neki Meyer-König-ov postupak.

Navedeni stav, kao i opšti stav permanencije, daje samo dovoljne, ne potrebne i dovoljne uslove za permanenciju, koji će se moći dobiti tek rešenjem ranije pomenutog problema o permanenciji postupaka zbirljivosti asociranih funkcijama $\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$.

4.2. <u>Stav 4.2.</u> Ako je

i) $s_n = O(r^n)$, $r < \mathrm{Min}\left(1/|\beta|,\ 1/|\beta'|\right)$,

ii) $\alpha' + \beta' - \alpha'\beta > \alpha + \beta - \alpha\beta'$,

iii) $1 > \alpha + \beta - \alpha\beta'$,

tada iz $E(\alpha,\beta) - \lim s_n = s$

sledi $E(\alpha',\beta') - \lim s_n = s$.

<u>Dokaz</u>. Iz činjenice da $\varphi(z)$ i $\varphi'(z)$ imaju jedine singularitete u tačkama $1/\beta$ i $1/\beta'$, iz uslova i) sledi da je zadovoljen uslov ii) stava 3.1. Prema tome na osnovu stava 3.1. dovoljno je pokazati da je $\varphi''(z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z))$ E-funkcija. Iz

$$\varphi(z) = \frac{\alpha + (1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z}$$

sledi

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{-\alpha + z}{1-\alpha-\beta+\beta z}$$

odakle je

$$\varphi''(z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z)) = \frac{\alpha'-\alpha+\alpha\beta'-\alpha'\beta + (1-\alpha'-\beta'+\alpha'\beta)z}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta' - (\beta'-\beta)z}.$$

Stavljajući

$$\varphi''(z) = \frac{\alpha'' + (1-\alpha''-\beta'')z}{1-\beta'' z},$$

imaćemo

$$\alpha'' = \frac{\alpha'-\alpha+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}\ ;\quad \beta'' = \frac{\beta'-\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}.$$

Prema stavu 4.1., potrebni i dovoljni uslovi da $\varphi''(z)$ bude E-funkcija su

$$\frac{\alpha'-\alpha+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}<1,$$

1) $$\frac{\beta'-\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}<1,$$

$$\frac{\alpha'+\beta'-\alpha-\beta+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}>0.$$

Medjutim, ove tri nejednačine ekvivalentne su dvema nejednačinama

2) $$\alpha'+\beta'-\alpha'\beta>\alpha+\beta-\alpha\beta',$$
$$1>\alpha+\beta-\alpha\beta',$$

jer, ako bi $1-\alpha-\beta+\alpha\beta'<0$, prva nejednačina se svodi na $(\alpha'-1)(1-\beta)>0$ što je u suprotnosti sa činjenicom da su $\varphi(z)$ i $\varphi'(z)$ E-funkcije. Stoga je zadovoljena druga nejednačina u 2) . Odatle, preko treće nejednačine u 1) , sledi da je zadovoljena i prva nejednačina u 2) . S druge strane,ako je zadovoljena druga nejednačina u 2) , prve dve nejednačine u 1) se svode na $(\alpha'-1)(1-\beta)<0$, odnosno na $(1-\alpha)(\beta'-1)<0$, a te nejednačine su automatski zadovoljene, s obzirom da su $\varphi(z)$ i $\varphi'(z)$ E-funkcije. Dalje, iz obe nejednačine u 2) sledi da su i brojitelj i imenitelj leve strane treće nejednačine u 1) pozitivni, tako da je zadovoljena i ta nejednačina.

Napominjemo da uslov da je $s_n=O(r^n)$, $r<1/|\beta|$, delimično sledi iz činjenice što je niz s_n zbirljiv postupkom $E(\alpha,\beta)$. Naime, funkcija $\varphi(z)=\frac{\alpha+(1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z}=\sum_0^\infty a_n z^n$, $\alpha<1,\beta<1,\alpha+\beta>0$, ne može za $\beta\neq 0$ imati beskonačno mnogo koeficijenata jednakih nuli, i $a_n=K\beta^n$ za n dovoljno veliko. Kako je niz s_n zbirljiv $E(\alpha,\beta)$, to $a_n s_n$ teži nuli, odakle je $s_n=o(|\beta|^{-n})$. Naš uslov je nešto oštriji od tog potrebnog uslova, ali je moguéno očekivati da se stav poboljša tako da pomenuti uslov potpuno nestane. Za $\beta=0$ on je medjutim automatski zadovoljen. Ne pišući taj uslov, već ga podrazumevajući, transkripcijom preostalog dela uslova i), možemo formulisati sledeći stav:

Ako je $\alpha'+\beta'-\alpha'\beta>\alpha+\beta-\alpha\beta'$, $1>\alpha+\beta-\alpha\beta'$ i $|\beta'|<|\beta|$ ili $(\alpha+1)|\beta'|<|\alpha+2\beta-1|$, tada iz $E(\alpha,\beta)\text{-}\lim s_n=s$ sledi $E(\alpha',\beta')\text{-}\lim s_n=s$.

Iz napisanog stava sledi specijalno

$$E(\alpha,0)\subset E(\alpha',1-\alpha') \quad \text{za} \quad \alpha'>\frac{2\alpha}{1+\alpha},$$

stav koji uspostavlja odnos izmedju Euler-Knopp-ovih i Meyer-König-ovih postupaka zbirljivosti.

Primena na teoriju analitičkog produženja

5.1. Stav koji se daje u ovom odeljku pretstavlja uopštenje poznatih stavova o analitičkom produženju pomoću Euler-ovog, odnosno Borel-ovog postupka zbirljivosti. Pošto se tretiraju opštiji postupci zbirljivosti, i formulacija stava i dokaz biće složeniji. Na primer, pojavljuje se teškoća zbog toga što funkcija $f(z)$ - generatrisa postupka zbirljivosti koji posmatramo - nije nužno cela funkcija, već može imati u velikom stepenu proizvoljno rasporedjene singularitete, što će biti od uticaja na oblast u kojoj odgovarajući postupak zbirljivosti analitički produžava dati element neke analitičke funkcije. Na taj način, oblast u koju se vrši analitičko produženje zavisiće od dve vrste singulariteta: singulariteta funkcije čije analitičko produženje tražimo i singulariteta funkcije generatrise onog postupka zbirljivosti pomoću koga se to produženje vrši. (U ranije proučavanim slučajevima - Borel-ova, Mittag-Leffler-ova, Lindelöf-ova zbirljivost - oblast je zavisila samo od prve vrste singulariteta.)

Neka je analitička funkcija $F(z)$ data u okolini tačke $z=0$ stepenim redom $\sum_0^\infty A_n z^n$. Pošto je $F(z)$ u opštem slučaju multiformna funkcija, nije moguće jednoznačno definisati analitičko produženje njenog elementa $\sum_0^\infty A_n z^n$, ukoliko se prethodno ne uvede u z-ravan izvestan sistem zaseka. Taj sistem zaseka je u velikom stepenu proizvoljan. Mi ćemo ga utvrditi na sledeći način: ako je ζ kritički singularitet funkcije $F(z)$, tada svaka tačka $\lambda\zeta$, $\lambda>1$, pripada zaseku. Izdvajajući iz z-ravni sve tačke koje pripadaju zasecima i sve singularitete od $F(z)$, u preostalom delu z-ravni funkcija $F(z)$ biće regularna i jednoznačna. Taj preostali deo z-ravni pretstavlja neke vrste generalisani Mittag-Leffler-ovu zvezdu funkcije $F(z)$. (Medjutim, u odnosu na ulogu i postanak, postoji znatna razlika izmedju Mittag-Leffler-ove zvezde kod samih Mittag-Leffler-ovih i kod (E,f)-postupaka zbirljivosti. U drugom slučaju Mittag-Leffler-ova zvezda koristi se jedino pri izboru putanje integracije, kao što će se kasnije videti; u prvom slučaju, ona istovremeno važi i kao oblast za koju se dobija analitičko produženje od $\sum_0^\infty A_n z^n$. Dalje, u prvom slučaju, ona se nužno pojavljuje, odredjena samim Mittag-Lefflereovim postupkom zbirljivosti; u drugom slučaju, ona je rezultat dosta proizvoljnog izbora. Napomenimo da se u vezi s tim postavlja i pitanje da li je moguéno ili u kolikom stepenu je moguéno pooštriti stav koji dajemo korišćenjem dosta široke proizvoljnosti u izboru zaseka. To pitanje je dosta složeno i u ovom radu ostavljeno je otvorenim.)

Označimo sa $\overline{K}(f,\zeta)$ skup tačaka z takvih da je istovremeno $|z|<R|\zeta|$, gde je R jednako poluprečniku konvergencije za funkciju $f(z)$, i $|f(z/\zeta)|<1$. Ako je ζ nekritički singularitet funkcije $F(z)$, neka $K_1(f,\zeta)$ bude definisana kao $\overline{K}(f,\zeta)$. Ako je ζ kritički singularitet funkcije $F(z)$, neka skupu $K_2(f,\zeta)$ pripadaju one i samo one tačke z skupa $\overline{K}(f,\zeta)$ za koje svako λz, $0<\lambda<1$, pripada takodje skupu $\overline{K}(f,\zeta)$. Na taj način svakom singularitetu funkcije $F(z)$ odgovara po jedan skup $K_{1,2}(f,\zeta)$. Označimo presek svih tih skupova sa $\mathcal{G}(f,F)$. Koristeći uvedene oznake, možemo konačno formulisati

<u>Stav 5.1.</u> Ako je $f(z)$ E-funkcije, tada (E,f) transformacije niza parcijalnih suma reda $\sum_0^\infty A_n z^n$ uniformno konvergira ka $F(z)$ u svakom ograničenom zatvorenom delu skupa $\mathcal{G}(f,F)$.

<u>Dokaz.</u> Najpre ćemo pokazati da stav važi za $F(z)=(1-z)^{-1}$, jer tu činjenicu koristimo u dokazivanju stava za opšti slučaj. Parcijalne sume stepenog reda od $F(z)$ date su sa $s_\nu(z)=\frac{1-z^{\nu+1}}{1-z}$. Označimo, kao i ranije, $f^n(z)=\sum_0^\infty a_{n\nu}z^\nu$. Tada niz

$$\sigma_n(z)=\sum_\nu a_{n\nu}\frac{1-z^{\nu+1}}{1-z}=\frac{1}{1-z}\sum_\nu a_{n\nu}-\frac{z}{1-z}\sum_\nu a_{n\nu}z^\nu$$

pretstavlja (E,f) transformaciju niza $s_\nu(z)$. Ako z pripada oblasti $\mathcal{G}(f,\frac{1}{1-z})=K_1(f,1)$, tada, prvo, pripada krugu konvergencije funkcije $f(z)$, pa je red $\sum a_{n\nu}z^\nu$ konvergentan i jednak $f^n(z)$, i, drugo, $|f(z)|<1$, pa $f^n(z)\to 0$. Stoga $\sigma_n(z)\to(1-z)^{-1}$. Ako posmatramo ograničenu zatvorenu oblast sadržanu u $\mathcal{G}(f,F)$, konvergencija će biti uniformna, jer u tom slučaju $f^n(z)$ uniformno teži nuli.

Svaki od skupova $K_{1,2}(f,\zeta)$ je otvoren. Medjutim, kako funkcija $F(z)$ može imati beskonačno mnogo singulariteta ζ, to je skup $\mathcal{G}(f,F)$ u opštem slučaju presek <u>beskonačno</u> mnogo otvorenih skupova. Odatle nije moguéno zaključiti da je skup $\mathcal{G}(f,F)$ otvoren, pa, pošto je ta činjenica potrebna za dokaz, moramo ići posrednim putem. Dokazaćemo, naime, da je $C\mathcal{G}(f,F)$, komplement skupa $\mathcal{G}(f,F)$, zatvoren, to jest, da je unija skupova

$CK_{1,2}(f,\zeta)$ zatvorena. Skup $CK_{1,2}(f,\zeta)$, kao komplement otvorenog skupa, zatvoren je, i, pošto je $f(z)$ E-funkcija, ne sadrži tačku $z=0$. Skup tačaka $\zeta^{(1)}$, kao skup singulariteta analitičke funkcije, (a slično skup tačaka $\zeta^{(2)}$ kao skup kritičkih singulariteta analitičke funkcije), takodje je zatvoren, i, pošto je $F(z)$ regularno u početku, ne sadrži tačku $z=0$. Ako tačka z pripada skupu $CK_{1,2}(f,\zeta)$, tačka $\frac{z}{\zeta^{(1),(2)}}$ pripada skupu $CK_{1,2}(f,1)$, pa je prema tome svaki broj z skupa $Cg(f,F)$ ravan proizvodu nekog broja ζ skupa $\zeta^{(1),(2)}$ i nekog broja η skupa $CK_{1,2}(f,1)$. Da bismo pokazali da je $Cg(f,F)$ zatvoren, dovoljno je da pokažemo da svaki konvergentan niz $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ iz skupa $Cg(f,F)$ ima graničnu vrednost koja takodje pripada skupu $Cg(f,F)$. Posmatrajmo neki takav niz: $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ Prema pokazanom važi $z_n=\zeta_n\eta_n$. Niz ζ_n ne mora da konvergira, izaberimo ~~ga~~ iz njega podniz $\zeta_{n'}$ koji konvergira ili teži ∞ (kompleksno). Na taj način dobijamo niz $z_{n'}=\zeta_{n'}\eta_{n'}$. Niz $\eta_{n'}$ ne mora da konvergira, izaberimo iz njega podniz $\eta_{n''}$ koji konvergira ili teži ∞ (kompleksno). Na taj način dobili smo niz $z_{n''}=\zeta_{n''}\eta_{n''}$. Tada je

$$z=\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n''\to\infty} z_{n''}=\lim_{n''\to\infty}\zeta_{n''}\eta_{n''}.$$

Pošto su skupovi ζ i η zatvoreni i ne sadrže nulu, to je i $\lim\zeta_{n''}\neq 0$ i $\lim\eta_{n''}\neq 0$. Stoga je $\lim\zeta_{n''}\lim\eta_{n''}$ definisan u proširenoj brojnoj oblasti, pa je $\lim\zeta_{n''}\eta_{n''}=\lim\zeta_{n''}\lim\eta_{n''}$. Kako su skupovi ζ i η zatvoreni, to je $\lim\zeta_{n''}\lim\eta_{n''}=\zeta\eta$, pa je $z=\lim z_n$ jednako proizvodu nekog broja skupa $CK_{1,2}(f,1)$ i nekog broja skupa $\zeta^{(1),(2)}$, dakle z pripada skupu $Cg(f,F)$. Prema tome je $Cg(f,F)$ zatvoren, dakle $g(f,F)$ otvoren skup.

Neka je $H(f,F)$ bilo kakav ograničen zatvoren podskup skupa $g(f,F)$. Kako za svako ζ koje pripada rubu generalisane Mittag-Leffler-ove zvezde, i svako z koje pripada oblasti $g(f,F)$ važi $|z|<R|\zeta|$, $|f(z/\zeta)|<1$, to za iste ζ i za z iz $H(f,F)$ važi $|z/\zeta|\leq R-2\delta$, $|f(z/\zeta)|\leq 1-2\varepsilon$, δ, $\varepsilon>0$. Kako su obe navedene funkcije neprekidne za odredjeni domen od ζ, to postoji kontura C oko ruba generalisane Mittag-Leffler-ove zvezde tako da je za svako z iz $H(f,F)$ i svako u sa C:

1) $$\left|\frac{z}{u}\right|\leq R-\delta,\quad \left|f\left(\frac{z}{u}\right)\right|\leq 1-\varepsilon.$$

Na osnovu Cauchy-eve formule biće $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(u)\,du}{u-z}$ ~~p~~ ako tačka z leži u unutrašnjosti konture C.

Uvedimo oznaku $\varphi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \frac{1-z^{\nu+1}}{1-z}$ **. Tada je**

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(u)}{u} \lim \varphi_n\left(\frac{z}{u}\right) du .$$

Prema 1) i prema rezultatu o analitičkom produženju reda $\sum z^n$ **niz** $\varphi_n(z/u)$ **uniformno konvergira, pa ćemo imati**

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_C \frac{F(u)}{u}\varphi_n\left(\frac{z}{u}\right)du =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_C\frac{F(u)}{u}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu\left(\frac{z}{u}\right)du.$$

Kako je red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\frac{z^{\nu+1}}{u^{\nu+1}}$ **, zbog** $|z/u|\le R-\delta$**, uniformno konvergentan, to je uniformno konvergentan red** $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu(z/u)$**, pa je**

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\int_C\frac{F(u)}{u}s_\nu(z/u)\,du =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\int_C F(u)\left(\frac{1}{u}+\frac{z}{u^2}+\frac{z^2}{u^3}+\dots+\frac{z^\nu}{u^{\nu+1}}\right)du.$$

Deformisaćemo konturu C **na konturu koja će potpuno ležati unutar kruga konvergencije za funkciju** $F(z)$ **. Tada je**

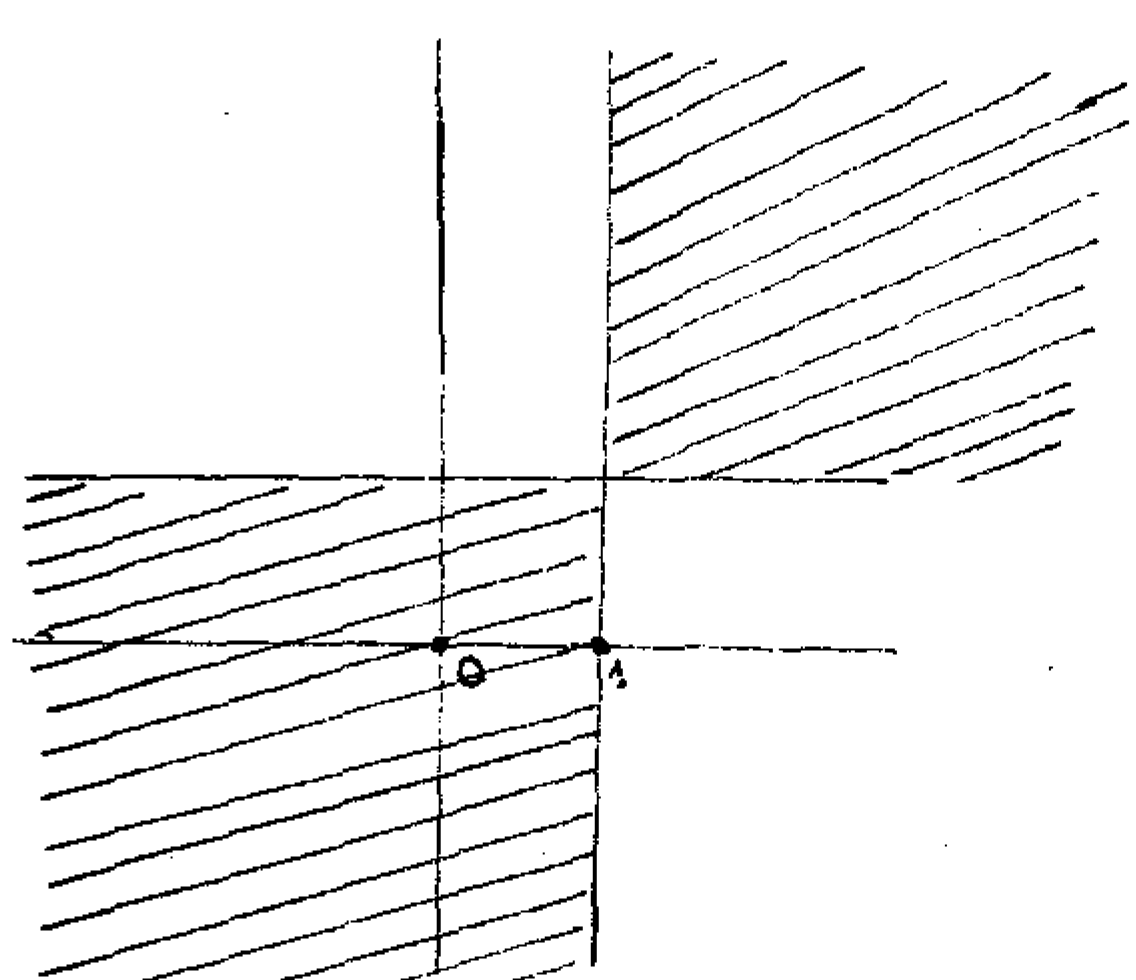
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\int_K (A_0+A_1u+A_2u^2+\dots)\left(\frac{1}{u}+\dots+\frac{z^\nu}{u^{\nu+1}}\right)du$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(A_0+A_1z+A_2z^2+\dots+A_\nu z^\nu) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}F_\nu(z)$$ **gde je** $F_\nu(z) = \sum_{\mu=0}^{\nu} A_\mu z^\mu$.

5.2. Očigledno je da oblast $G(f,F)$ **može biti višestruko, čak beskonačno mnogo puta povezano. Pokazaćemo, medjutim, da ona ne mora biti uopšte povezana. Zato je dovoljno staviti** $f(z) = e^{\frac{i}{2}z^2-(i-1)z-1+\frac{i}{2}}$ **,** $F(z)=(1-z)^{-1}$**. Tada je** $|f(z)| = e^{(1-\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z-1)}$, **pa je** $f(z)$ **E-funkcija, a oblast** $G(f,F)$ **sastavljena je od onog ugla izmedju pravih** $x=1$ **i** $y=1$ **u kome leži tačka** $z=0$ **, i ugla unakrsnog tom; dakle, nije povezana. (Crtež 1).**

Najzad, radi ilustracije stava navešćemo kako oblast $G(f,F)$ **izgleda ukoliko se posmatraju postupci zbirljivosti asocirani funkcijama**

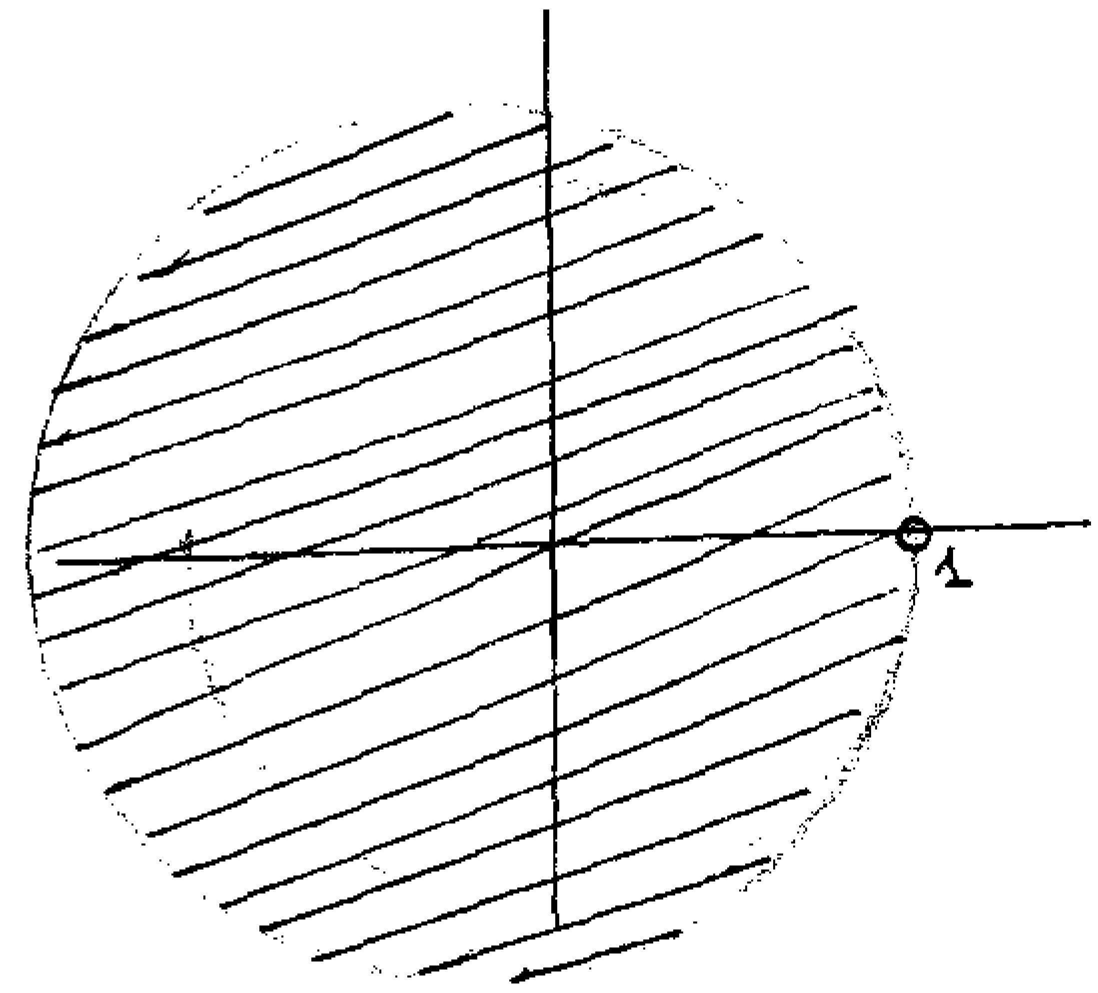
$$f(z) = \frac{\alpha+(1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z}, \alpha<1, \beta<1, \alpha+\beta>0,$$

ispitivani u četvrtom odeljku, i funkcija $F(z)=(1-z)^{-1}$ **. Prema definiciji datoj u prethodnom paragrafu,** $G(f,F)$ **je u posmatranom slučaju isto što i** $K_1(f,1)$ **, to jest skup tačaka** z **za koje je isto-**

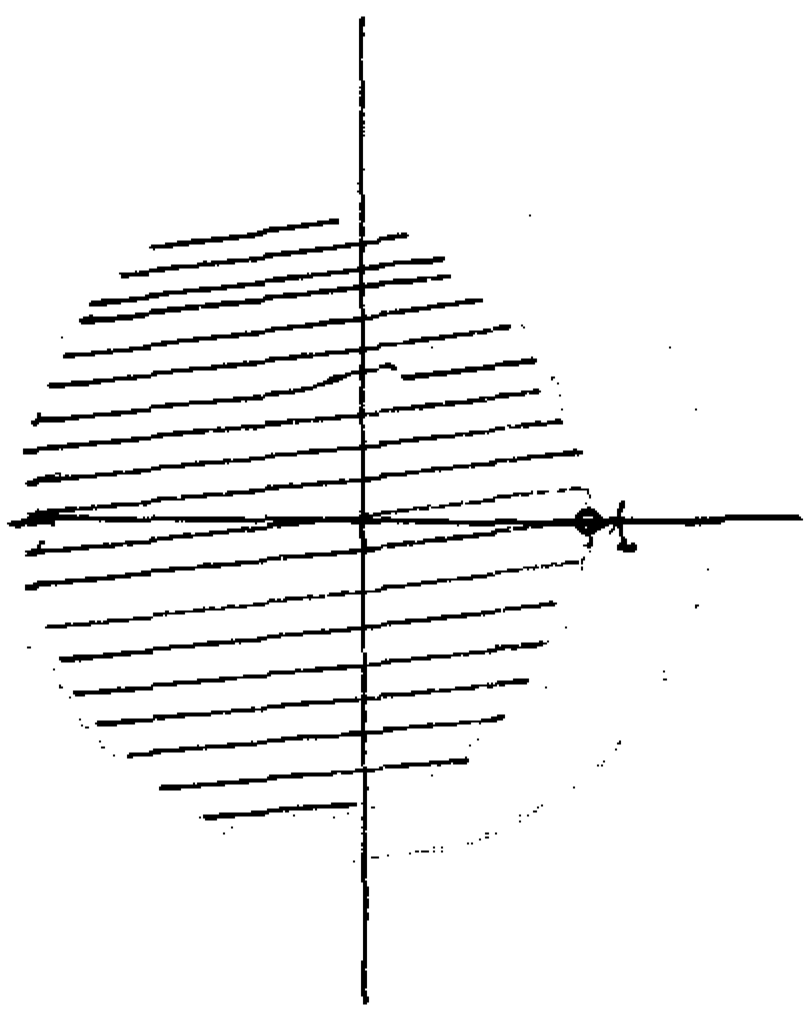


1

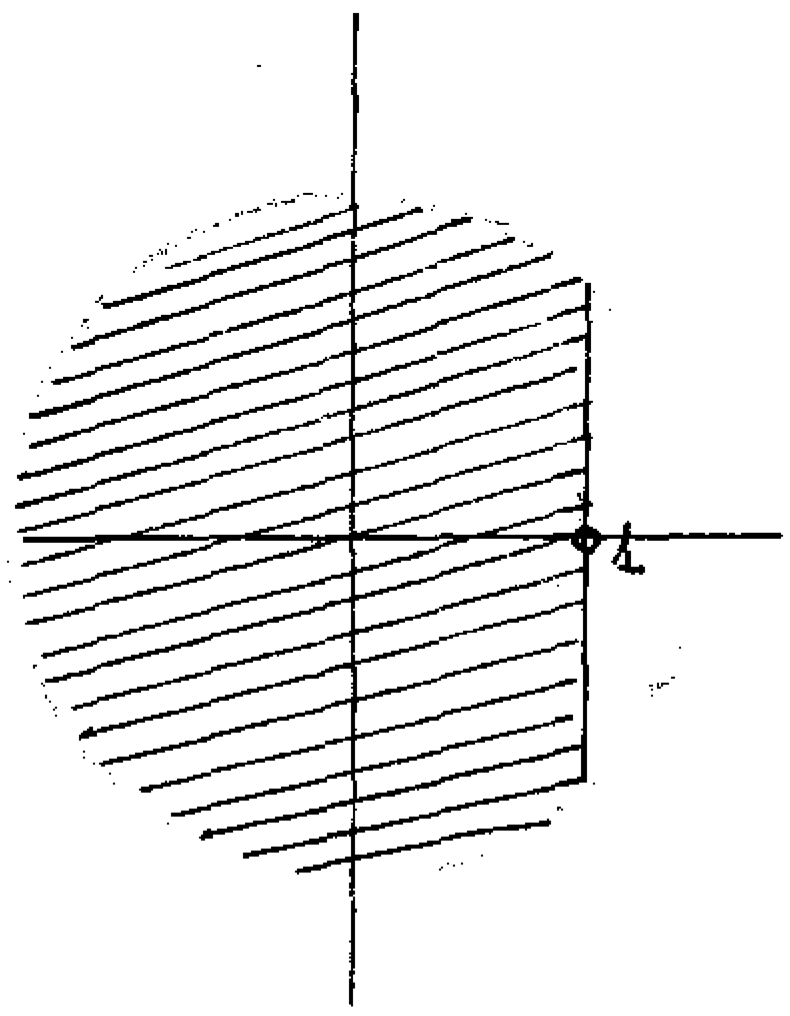
vremeno $|z| < 1/|\beta|$ i $|\alpha + (1-\alpha-\beta)z| < |1-\beta z|$, dakle skup tačaka koje se nalaze unutar dva kruga, ili unutar ~~jednog~~ prvog i van drugog od ta dva kruga. Šrafirane oblasti na crtežima 2-5 pretstavljaju tada oblasti $g(f, F)$ za različite odnose izmedju koeficijenata α i β.



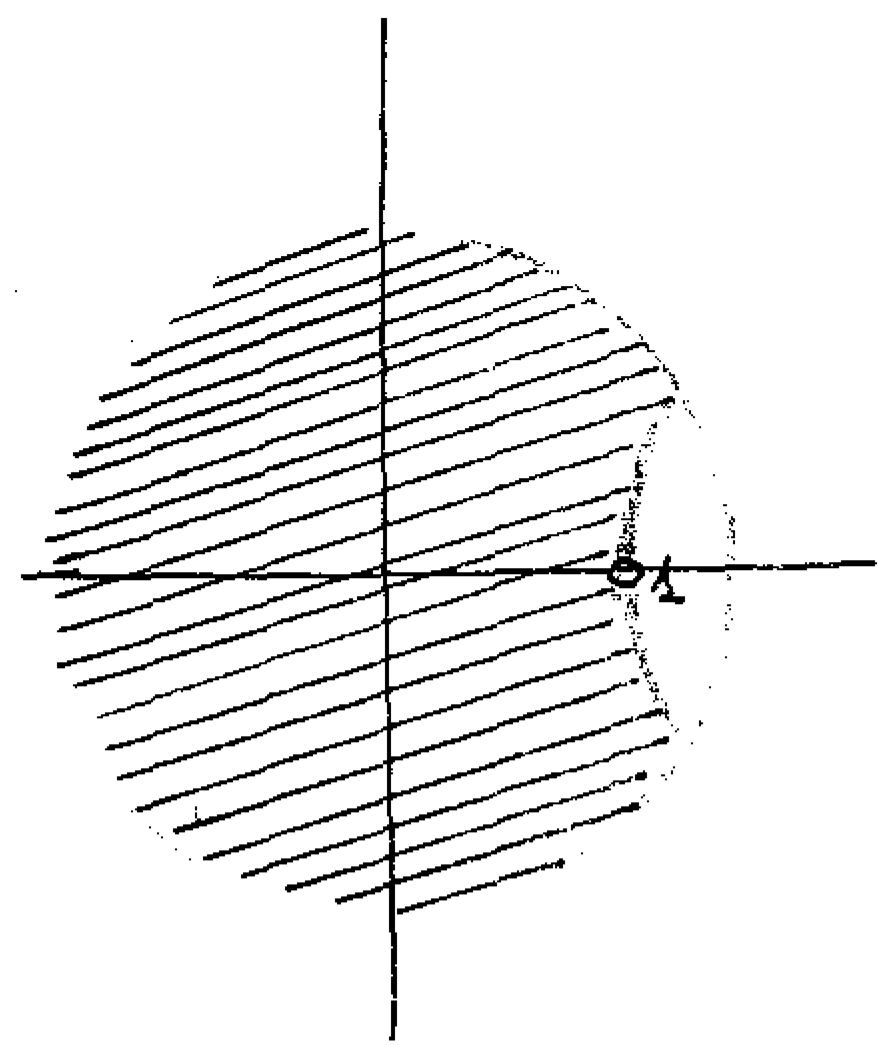
2



3



4



5

L I T E R A T U R A

1. Hardy, G.H. Divergent Series. Oxford, 1949.
2. Knopp, K. Theory and application of infinite Series. English ed., London, 1928.
3. Landau, E. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin, 1916.
4. Meyer-König, W. Die E_p-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Archiv der Mathematik 1, Heft 3, 1948/9.
5. Meyer-König, W. Die E_p-und S_a-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze. Mathematische Zeitschrift. Band 52, Heft 3, 1949.