GEOMETRISKA TEORIJA PARCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA JEDNE NEPOZNATE FUNKCIJE

Израдио за докторски испит

15. IV. 1952

Боривоје Рашајски

I. g l a v a

ISTORIJSKI PREGLED RAZVITKA TEORIJE KARAKTERISTIKA

Čuveni francuski geometar G.Monge,stvarajući svoju teoriju površina nastalih kretanjem krivih i primenjujući je na parcijalne jednačine (1),uveo je medju prvima geometrisku metodu,t.zv.teoriju karakteristika za rešavanje parcijalnih jednačina I reda sa jednom nepoznatom funkcijom,koja zavisi od dve nezavisne promenljive veličine.Zbog ogromne uloge,koju je Monge odigrao u geometriskoj teoriji parcijalnih jednačina,ukratko ćemo izneti osnovne principe njegove metode.Monge u svojoj studiji počinje sa jednačinom

$$f(x,y,z,\alpha,\varphi(\alpha))=0,$$

koja pretstavlja familiju površina,čija anvelopa dira svaku od tih površina duž jedne krive,koju zove karakteristikom i koja se daje jednačinama

$$f=0 \quad , \quad \frac{df}{d\alpha}=0 .$$

Eliminacija veličine α može se ostvariti ako je oblik funkcije $\varphi(\alpha)$ dat i tada se dolazi do tražene anvelope.Ako želimo jednačinu svih mogućih anvelopa,tada je potrebno posmatrati funkciju φ kao proizvoljnu.Pomenuta eliminacija može dovesti samo do jedne parcijalne jednačine I reda,koju će zadovoljavati sve moguće anvelope.Monge tvrdi da postoji i obrnuta veza izmedju parcijalnih jednačina i pomenutih anvelopa,naime da svaka parcijalna jednačina ima takve integrale koji mogu biti posmatrani kao anvelope. /Ovu postavku daje à priori - vidi primedbe N.Lésauté (2) /. Pošto je uspostavio takvu vezu izmedju parcijalnih jednačina i anvelopa,Monge postavlja niz karakteristika na jednoj anvelopi i kotrlja jednu ravan po ovim karakteristikama tako da čini jednu razvojnicu,čije su generatrise tangente na ove krive, i postavlja diferencijalne jednačine za karakteristike. Posmatrajući odvojeno linearne jednačine I reda on uspeva proizvoljnim kretanjem karakteristike da načini integralnu površinu.Primena te metode na nelinearne jednačine ne daje rezultate,on sam kaže: "Zaista površina ne može više biti posmatrana kao da je načinjena od jedne krive,ali nju treba posmatrati kao anvelopu,treba,dakle, upotrebiti jednačine obvijene /od anvelope/ površine."Ovaj neuspeo pokušaj Monge-a da geometriskim putem dodje do integralne površine nastale kao mesto karakteristike dao je povoda nizu naučnika da se analitičkim metodama bave rešavanjem integracije parcijalnih jednačina pomoću opšteg integrala diferencijalnih jednačina za karakteristike, koje su uveli Langrange i Monge.

Cauchy je (3), pokazujući da je dovoljno da se integral$_1$ prvi sistem jednačina, koje je dao Pfaff (4), sastavio pomoću opšteg integrala za karakteristike partikularno rešenje parcijalne jednačine, koje je danas poznato pod imenom opšti Cauchy-ev integral. Cauchy-ev integral geometriski znači integralnu površinu, koja je načinjena od karakteristika i koja prolazi kroz unapred datu ravnu ili prostornu krivu.

Jacobi, Mayer, Darboux i Bertrand su stavili sebi u zadatak da iz opšteg integrala za karakteristike formiraju potpuni integral parcijalne jednačine, no njihova teorija nije rešila problem u opštem slučaju. U glavnim potezima između njihov rad i rezultate.

Jacobi (5) proučavajući rezultate Hamilton-a došao je do jedne metode, danas poznate pod imenom prva Jacobi-jeva metoda za integraciju parcijalnih jednačina I reda. Njegov rad se sastoji u sledećem. Podjimo od parcijalne jednačine klasičnog oblika usvojenog od Jacobi-a

$$/1/ \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H(t; q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = 0$$

gde je V nepoznata funkcija, t, q_1, ..., q_n nezavisno promenljive, a p_i parcijalni izvodi $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, kao i od odgovarajućeg kanoničkog sistema

$$/2/ \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Jacobi je stavio sebi u zadatak da pokaže da integracija sistema /2/ daje, pomoću jedne kvadrature, potpuni integral jednačine /1/ i da, obrnuto, svaki potpuni integral jednačine /1/ dozvoljava da se samo pomoću diferenciranja dobiju svi različiti integrali sistema /2/. Nas interesuje samo prvi problem.

Poznavajući integrale sistema /2/ možemo promenljive p_i i q_i izraziti u funkciji od t i inicijalnih vrednosti p_i°, q_i° promenljivih p_i, q_i koje te vrednosti uzimaju za $t = t_\circ$. Izračunavajući, zatim, integral

$$V = \int_{t_\circ}^{t} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{dq_k}{dt} - H \right) dt$$

dobićemo V u funkciji od t i od $2n$ konstanata p_i°, q_i°. Kako veličine p_i° možemo izraziti u funkciji od q_i, q_i°, t, to se funkcija V može dovesti u zavisnost od samo tih poslednjih promenljivih. Zbog toga funkcija

$$V(q_1, \dots, q_n; t, q_1^\circ, \dots, q_n^\circ) + a$$

će biti potpuni integral jednačine /1/ u kojem veličine q_i^0 i a su proizvoljne konstante.

Jacobi-jev zaključak, kako je to prvi pravilno primetio Mayer (6), je jedino ispravan ako su veličine q_i, q_i^0 nezavisne izmedju sebe. Mayer je Jacobi-jevu metodu podvrgao prostoj modifikaciji i pokazao da će funkcija
$$V=\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0+\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}-H\right)dt+a$$
ako se izrazi pomoću promenljivih t, q_i, q_i^0 pretstavljati potpuni integral jednačine /1/.

Medjutim, Darboux (7) je zadržavajući principe Jacobi-jeve metode pošao baš od slučaja kad postoje $k<n$ veza izmedju veličina q_i, q_i^0
$$f_i(q_1,\dots,q_n;q_{k+1}^0,\dots,q_n^0)-q_i^0=0 \quad (i=1,2,\dots,k)$$
i došao do zaključka da će u takvom slučaju traženi potpuni integral biti oblika
$$V+\sum_{i=1}^{k} a_i f_i + a$$
gde su $a_i, a, q_{k+1}^0,\dots,q_n^0$ proizvoljne konstante.

Ovim problemom se bavio i J.Bertrand (8) i vrlo elegantnim rezonovanjem došao do zaključka da se potpuni integral izražava u obliku
$$V+\sum_{j=1}^{n-k} p_{k+j}^0 q_{k+j}^0 + a$$
koji će da zavisi od promenljivih $q_1,\dots,q_n, t$ i konstanata $q_1^0,\dots,q_k^0; p_{k+1}^0,\dots,p_n^0, a$. Tak je Bertrand-ova modifikacija značajno dopunila Jacobi jevu metodu i ujedno obuhvatila rezultate Mayer-a /za $n=k$/ i Darboux-a /kada izmedju $q_1,\dots,q_n; q_1^0,\dots,q_k^0$ postoji $n-k$ različitih veza/.

Teorijom karakteristika bavio se i Goursat (9). Navešću važnije momente iz njegove interpretacije Cauchy-jeve metode i primedbe, koje se odnose na sastavljanje potpunog integrala, a koje su zbog svoje nepreciznosti i netačnosti bile podvrgnute opravdanoj kritici W.Saltikova (10).

Goursat polazi od jednačine sa tri promenljive
$$F(x,y,z,p,q)=0$$
i postavlja zadatak iznalaženja integrala te jednačine koji se za $x=x_0$ svodi na unapred datu funkciju $z=\varphi(y)$. Polazeći od izraza
$$dz=p\,dx+q\,dy$$
i pretpostavljajući da su veličine y,z,p,q funkcije od x, u, gde je u nova promenljiva uzeta na mesto y, on dolazi do diferencijalnih jedn

čina za karakteristike i poznate Cauchy-jeve formule

$$U = U_0 e^{-\int_{x_0} \frac{Z}{P} dx}$$

gde je U t.zv. karakteristična funkcija

$$U \equiv \frac{\partial z}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u}$$

a Z i P su parcijalni izvodi leve strane date parcijalne jednačine uzeti po z i p. Neka su integrali diferencijalnih jednačina za karakteristike

$$y = f_1(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \quad , \quad p = f_3(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

$$z = f_2(\cdots\cdots\cdots) \quad , \quad q = f_4(\cdots\cdots\cdots)$$

gde su y_0, z_0, p_0, q_0 inicijalne vrednosti promenljivih y, z, p, q za $x = x_0$ i koje zadovoljavaju uslov

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

Da bi se dobio integral parcijalne jednačine potrebno je da karakteristična funkcija bude jednaka nuli. Da bi taj uslov ispunio on uzima veličine y_0, z_0, p_0, q_0 u funkciji od u i to u zgodnom obliku

$$y_0 = u \, , \quad z_0 = \varphi(u) \quad , \quad q_0 = \varphi'(u)$$

Izbacivanjem veličine u iz integrala karakteristika dolazi do traženog integrala date parcijalne jednačine.

Primenjujući Cauchy-jevu metodu na jednačinu oblika

$$F(x_j, z, p_k) = 0$$

on zaključuje da je potrebno i dovoljno da inicijalne vrednosti x_j^0, p_k^0, z^0 koje promenljive x_j, p_k^0, z uzimaju za $t = 0$ u integralima karakteristika

$$/3/ \qquad \begin{cases} x_i = f_i(t, z^0, x_j^0, p_k^0) \\ p_l = \varphi_l(t, z^0, x_j^0, p_k^0) \qquad (i, l = 1, 2, \ldots, n) \\ z = f(t, z^0, x_j^0, p_k^0) \end{cases}$$

budu takve funkcije od nezavisno promenljivih u_s $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ da zadovoljavaju veze

$$/4/ \qquad F(x_j^0, z^0, p_k^0) = 0 \qquad \delta z^0 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta x_i^0 = 0$$

Zatim Goursat na str. 119 pomenutog kursa, izdanje 1891 doslovce kaže:

..." l'élimination de $t, u_1, \dots, u_{n-1}$ entre les relations

$$z = f \ , \quad x_i = f_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

conduira, en général, à une seule relation

$$z = \phi(x_1, \dots, x_n)$$

et la fonction ϕ sera évidemment une intégrale. Il n'en serait plus de même si des équations (3) on pouvait déduire plusieurs relations entre les variables z, x_i. Cependant, par une extension du mot intégrale, due à M. Sophus Lie, nous ne rejettons pas ces solutions. D'une manière générale, nous désignerons sous le nom d'<u>intégrale</u> tout système d'éléments vérifiant les relations

$$F(z, x_i, p_k) = 0 \ , \quad dz = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

et dépendant de n variables indépendantes."

Navešću još i ona mesta iz Goursat-ovog kursa, izdanje 1921, koja je i M. Saltikov citirao u svojoj, malo čas pomenutoj raspravi o integralima S. Lie-a, koja pokazuje kako M. Goursat nije vodio računa o neophodnim uslovima za integrale karakteristika i još pogrešno smatrao da nas integrali S. Lie-a mogu izvući iz teškoća u slučaju kada teorija karakteristika ne bi dala integral klasičnog oblika: Na str. 186: "Puisque chaque intégrale est un lieu de caractéristiques, il est clair que toute intégrale sera représentée par les formules /3/ où x_i^0, z^0, p_k^0 doivent être des fonctions des $n-1$ variables indépendantes, de façon que ces formules représentent bien une multiplicité à n dimension." Na str. 188: ..."En résumé, pour que les formules /3/ représentent une intégrale, il faut et il suffit que les valeurs initiales x_i^0, z^0, p_k^0 soient des fonctions de $n-1$ variables indépendantes satisfaisant aux conditions /4/". Str. 191: ..."Cas particulier - On satisfait aux équations /4/ en prenant pour x_i^0, z^0 des constantes, les valeurs initiales étant liées par la seule relation

$$F(x_i^0, z^0, p_k^0) = 0$$

L' intégrale ainsi obtenue, que est formée l'ensamble des caractéristiques issues d' une point, dépend de $n+1$ constantes arbitraires. Si l'on attribue à l'une d'elles une valeur déterminée, on aura une intégrale complète."

Malo dalje isto na str. 191: ...Remarque I - Il pourra arriver dans certains cas, que cette intégrale ne soit pas proprement dite,mais une intégrale au sens plus large de Lie."

Dok su s jedne strane u pomen utim radovima xxxxx Jacobi-a, Mayer-a,Darboux-a i Bertrand-a rasmatrani samo posebni i izuzetni slučajevi problema:formirati potpuni integral parcijalne jednačine polazeći od opšteg integrala karakteristika,dotle s druge strane,kao što smo malo čas videli,u teoriji karakteristika pojavljuje se nesigurno i pogrešno traženje izlaza u novim pojmovima integrala datih od S.Li.

1899 godine N.Saltikov (11) objavio je svoju teoriju karakteristika.U toj teoriji on detaljno razradjuje osobine t.zv.karakterističnih funkcija i daje potrebne i dovoljne uslove za integrale karakteristika da bi se pomoću njih mogao formirati potpuni integral parcijalne jednačine I reda i sistema takvih jednačina.Ispitivanja i rezultati N.Saltikova ne doprinose samo da se tretiraju najopštiji slučajevi,već uklanjaju svaku nesigurnost i pružaju punu garanciju za rešavanje postavljenog problema.Iako je najzad pomoću klasične metode Cauchy koja dopušta formiranje integrala koji nosi njegovo ime,u isto vreme dat i način za sigurno dobijanje potpunih integrala.

Teorijom karakteristika u novije vreme,pored ostalih,bavio se i C.Carathéodory (12).U svojim izlaganjima on se trudio,zadržavajući klasičnu definiciju za karakteristike za razliku od pretstavljanja karakteristika kao štrafti u ($n+1$) - mernom prostoru (x_i, z),koja potiče od S.Lie-a i njegovih sledbenika,da dodje do prvobitnih veza kojima se služio i A.Cauchy (3).Na pomenutu teoriju Carathéodory-a mogu učiniti sledeće primedbe:

U svojim izlaganjima on nepotrebno uvlači pomoćni parametar t što čini njegove formule komplikovanije nego što to zahteva sama priroda problema.Interessantno je napomenuti da on nije jedini koji se služi tim pomoćnim parametrom.[1] Komplikovanost se ispoljava i kod praktičnog izračunavanja kada se prelazi na početne vrednosti i kada se traže vrednosti za karakteristične funkcije.

Dalje,kada se njegova teorija primenjuje na sastavljanje potpunog integrala $S(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n)$ pomoću opšteg integrala karakteristika[2]

---

1)Ovaj parametar je prvi uveo Lagrange - Leçons sur la theorie de fonction.Uzrok leži u tome što Lagrange nije hteo da usvoji oznake Charpit-a,koji je,pak,kritikovao njegova izlaganja (vidi N.Saltykow - Sur le memoire inedit de Charpit- Boulletin de Sciences mathematiques)

2)Oznake Carathéodory-a .

$$x_i = \xi_i\left(t, u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_n\right)$$
$$y_i = \eta_i\left(- - - - - - - - - - -\right) \quad (i = 1, 2, \dots n)$$
$$z = \sigma\left(- - - - - - - - - - -\right)$$

za datu parcijalnu jednačinu

$$\mathcal{F}\left(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z\right) = 0$$

gde je t pomoćni parametar, u_α $(\alpha = 1, 2, \dots, n-1)$ su parametri koje pored t treba izbaciti iz jednačina $x_i = \xi_i$, $z = \sigma$,a v_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ su parametri koji treba da ostanu u potpunom integralu, onda se može još primetiti sledeće:

Postupak za podelu opštih konstanta integracije, koje ulaze u integrale karakteristika, na dve grupe: jedna grupa konstanata u_α koje treba eliminisati iz pomenutih jednačina i druga grupa konstanata v_j koje treba da figurišu u potpunom integralu, jeste mnogo komplikovaniji u odnosu na uslove

$$U_{u_\alpha} = 0\ , \quad U_{v_j} \neq 0$$

koje daju karakteristične funkcije u pomenutoj teoriji Saltikova. Uslovi Saltikova ne samo da vrše podelu konstanata na dve grupe, već uz uslov

$$\frac{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial(t, u_1, \dots, u_{n-1})} \neq 0$$

garantuju i egzistenciju potpunog integrala $S(x_i, v_j)$, to jest da će ove konstante v_j ostati u rezultatu eliminacije. Dok Carathéodory utvrđuje da je rešenje $S(x_i, v_j)$ potpuni integral ako je pored uslova

$$U_{u_\alpha} = 0$$

još različita od nule determinanta na desnoj strani

$$/5/ \quad \left|\mathcal{F}_{y_i}, \frac{\partial A_i}{\partial u_\alpha}\right| \cdot \left|\frac{\partial B_i}{\partial v_j}\right| = \left|\frac{\partial \phi}{\partial v_j} - \mathcal{F}_z \frac{\partial s}{\partial v_j}, \frac{\partial^2 s}{\partial u_\alpha \partial v_\alpha}\right|$$

gde uvedene oznake znače

$$A_i(u_\alpha) = \xi_i\left(\tau(u_\beta), u_\alpha, v_j\right), \quad s(u_\alpha, v_j) = \sigma\left(\tau(u_\beta), u_\alpha, v_j\right)$$
$$B_i(u_\alpha, v_j) = \eta_i\left(\tau(u_\beta), u_\alpha, v_j\right), \quad \mathcal{F}\left(A_i(u_\alpha), B_i(u_\alpha, v_j), s(u_\alpha, v_j)\right) = \phi(v_j)$$

i $\mathcal{F}_{y_i}$ i $\mathcal{F}_z$ su parcijalni izvodi leve strane parcijalne jednačine po y_i i z . Dalje, prva determinanta na levoj strani /5/, posle unošenja početnih uslova za $t = \tau(u_\alpha)$ je ekvivalentna sa determinantom

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial(t, u_1, \dots, u_{n-1})}$$

a druga determinanti na istoj strani od /5/ sa determinantom

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial v_j} \right|$$

Ako je determinanta na desnoj strani od /3/ jednaka nuli, onda ne možemo da zaključimo, i da posebno se ispitamo, da li je to zbog toga što jednačine karakteristika nisu različite po parametrima t, u_α ili je to zbog toga što rezultat pomenute eliminacije nije potpuni integral, t.j. da je možda nastupio takav slučaj da se prilikom eliminacije parametara u_α još izgubio i neki od parametara v_j.

Na osnovu gornjih primedbi vidi se koliko je jednostavna i precizna teorija karakterističnih funkcija Saltikova, koja još i dalje dokazuje da uvek mora postojati $n-1$ karakterističnih funkcija, koje su identički jednake nuli i da mora postojati i n karakterističnih funkcija koje su različite od nule.

Na kraju izlaganja razvoja i rezultata analitičkih metoda u teoriji karakteristika pomenuću i Kamke-a (13) koji u svojim izlaganjima karakteristike posmatra kao štrafte i naročito se detaljno zadržava na rešavanju t.zv. Cauchy-jevog problema pri datim početnim uslovima i na određivanju oblasti u kojoj egzistira traženo rešenje. U vezi traženja potpunog integrala on se uglavnom naslanja na ranije pomenute rezultate A.Mayer-a.

Monge-ove ideje, iako su od njegovog savremenika Legendre (14) nazvane [illegible] "metafizičkim principima", nisu imale samo uticaj na razvoj analitičkih metoda, kako je to malo čas izneto, već su, kao i geometrijska teorija parcijalnih jednačina, privremeno i razvijane naročito tokom XIX veka. Kao najinteresantnije doprinose u razvitku geometrijske teorije treba pomenuti klasična dela Paul du Bois Reymond-a (15) i Gaston Darboux-a (16). Naročito nasuprot Monge-u podiže [illegible]

Reymond nasuprot Monge-u počinje najpre sa geometriskom interpretacijom same parcijalne jednačine pa onda prelazi na geometriska ispitivanja integralnih površina. Ovde ću se zadržati na § 38 pomenutog dela u kojem govori o analitičkom obliku uslova za dodir t.zv. integralnih štrafti. On polazi od integrala

$$\alpha = \lambda(x, y, z, p)\,,\ \beta = \lambda_1(x, y, z, p)\,,\ \gamma = \lambda_2(x, y, z, p) \qquad (C_i)$$

diferencijalnih jednačina za karakteristike, u kojima je veličina $\underline{q}$ eliminisana pomoću date parcijalne jednačine, i postavlja sledeće uslove za dodir integralne štrafte

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial p}\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \lambda'}{\partial x} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \lambda_1'}{\partial x} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \lambda_2'}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial p}\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \lambda'}{\partial y} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \lambda_1'}{\partial y} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \lambda_2'}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1'}{\partial x}\ \frac{\partial \lambda_2'}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} - \left(\frac{\partial \lambda'}{\partial x}\ \frac{\partial \lambda_2'}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda_1}{\partial p_1} + \left(\frac{\partial \lambda'}{\partial x}\ \frac{\partial \lambda_1'}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda_2}{\partial p_1} = 0$$

gde je α, β, γ respektivno smenjeno sa $\lambda(x_1, y_1, z_1, p_1)\,,\ \lambda_1(x_1, y_1, z_1, p_1)\,,\ \lambda_2(x_1, y_1, z_1, p$ t.j. sa tim funkcijama u kojima su argumenti smenjeni sa početnim vrednostima. Uz to je uvedena oznaka $\frac{\partial \lambda'}{\partial x} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x} + p\,\frac{\partial \lambda}{\partial z}$ i t.d. Treće jednačina je posledica prvih dveju pod uslovom da nisu jednake nuli veličine $\Big(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p}$ i t.d.

Na izlaganja u pomenutom paragrafu mogu se staviti sledeće primedbe:

1) Ne pokazuje da su gornji uslovi stvarno ispunjeni za posmatranu integralnu površinu, štaviše ne pokazuje da su oni ujedno i potrebni i dovoljni da bi se pomoću integrala (C_i) dobio potpuni integral, t.j. funkcionalna veza koja bi sadržavala dve proizvoljne konstante.

2) Tvrdnja, da integrali (C_i) povlače sobom dodir integralnih štrafti kao jedinu identičku posledicu, može se usvojiti unapred jedino za one integrale karakteristika koji se dobijaju prema Jacobi-evoj teoriji (11) iz potpunog integrala posmatrane parcijalne jednačine. Ovo poslednje sledi iz t.zv. kanoničnih osobina poslednjih pomenutih

integrala karakteristika. Medjutim, mogu direktno pokazati da integrali karakteristika dobiveni iz potpunog integrala moraju da zadovoljavaju uslove date karakterističnim funkcijama (11). Naime, uočimo karakteristike

$$z=\phi(x,y,C_1,C_2) \qquad p=\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\phi_{c_1}\equiv\frac{\partial\phi}{\partial C_1}+\frac{\partial\phi}{\partial C_2}C_3=0 \qquad q=\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

koji se prema pomenutoj Jacobi-evoj teoriji dobijaju iz potpunog integrala $z=\phi$. Medjutim, kako je uvek

$$\frac{\partial\phi_{c_1}}{\partial y}\lessgtr 0$$

to prednjim karakteristikama možemo dati sledeći oblik

$$z=\phi(x,\varphi,C_1,C_2)\equiv\bar\phi \qquad p=\phi_x(x,\varphi,C_1,C_2)\equiv\bar\phi_x$$

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,C_3) \qquad q=\phi_y(x,\varphi,C_1,C_2)\equiv\bar\phi_y$$

i neposredno videti da su ispunjeni sledeći uslovi

$$U_i\equiv\frac{\partial\bar\phi}{\partial C_i}\lessgtr 0 \quad (i=1,2) \qquad U_3\equiv 0$$

gde su U_j karakteristične funkcije

$$U_j\equiv\frac{\partial\bar\phi}{\partial C_j}-\bar\phi_y\frac{\partial\varphi}{\partial C_j} \qquad (j=1,2,3)$$

Napominjemo da nije teško navesti primer iz kojeg će se videti da karakteristike, dobivene direktno integracijom samog sistema diferencijalnih jednačina za karakteristike, ne moraju da zadovoljavaju uvek gornje uslove date karakterističnim funkcijama (10).

Iz prednjeg izlaganja zaključujemo da nikako ne smemo identifikovati makoje integrale karakteristika sa onima koji se po Jacobi-evoj teoriji dobijaju iz potpunog integrala.

Darboux detaljno ispituje osobine karakteristika, familije karakteristika na integralnoj površini koje su obavijene od integralne krive koja zadovoljava jednačinu

$$\varphi\left(x,y,z,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right)=0$$

(integralna kriva je povratna ivica površine - linije duž koje se sastaju dve grane površine) stoje dve grane površine), ispituje oblik integralne površine pomoć beskrajnih redova sa karakteristike, daje osobine singularnih površi na i njihov odnos sa ostalim integralnim površinama. On svoja ispitivanja proširuje na parcijalne jednačine I reda jedne funkcije sa više nezavisno promenljivih.

Od naučnika koji su se najdoslednije držali ideje i principa Monge-a u geometriskoj teoriji posmatranih jednačina treba pomenuti Leaute-a (2), koji je dao geometrisko tumačenje Cauchy-jevog obrasca

$$U = U_0 e^{-\int_{x_0} \frac{Z}{P} dx}$$

pomoću kojeg se može, kao što ćemo to docnije videti, znatno usavršiti Monge-ova teorija.

U novije vreme teorijom karakteristika bavio se i Hadamard (18) koji je prema geometriskim teorijama vrlo obazriv i za razvijanje istih preporučuje da se podje od potpunog integrala. Navešću doslovce njegove reči (str. 439): "Les développements qui précèdent sont vrais du moment qu' on admet qu'il existe une intégrale complète. Mais nous ne pouvons les appliquer que moyennant la connaissance de cette intégrale complète," kao i slično na str. 444. Ovakav stav Hadamard-a postavlja čitaoca pred pitanje da li je onda uopšte moguće geometriskim putem konstruisati potpuni integral?

Valja napomenuti da ova ~~grana~~ proširivanja geometriske teorije nisu rešila problem: načiniti površinu (potpuni integral) kao mesto karakteristika, sem što je data geometriska konstrukcija Cauchy-jevog integrala.

Novu etapu u razvitku geometriske teorije, koja počinje u poslednjoj četvrtini XIX veka, označavaju radovi Sophus Lie-a (18) i njegovih sledbenika. On uvodi u prostoru od ($n+1$) dimenzija pojam površinskog elementa (x_i, z, p_i), sistema površinskih elemenata ($F(x_i, z, p_i) = 0$), množine elemenata (skup elemenata združenih sa svim svojim beskonačno bliskim elementima - uslov za dva beskrajno bliska združena elementa je $dz = \sum p_i dx_i$) i pojam geometriskog mesta množine (to je skup tačaka te množine; geometrisko mesto može biti površina, kriva i tačka). Uvedeni pojmovi omogućuju da se proširi pojam klasičnog potpunog integrala . Ali uvodeći u posmatranja potpuni integral S. Lie-a mi silno sužavamo oblik i karakter parcijalne jednačine. Naime ako je reč o parcijalnim jednačinama I reda jedne nepoznate funkcije, koja zavisi od dve nezavisne promenljive veličine, onda takva jednači mora da bude linearna odnosno parcijalnih izvoda da bi dopuštala integral S.Lie-a; u slučaju nepoznate funkcije koja zavisi od više nezavisno promenljivih, onda Lie-ev integral imaju parcijalne jednačine samo specijalnog oblika (10). Sophus Lie, koji je bio čuveni geometar i koji ima neosporanih doprinosa u razvijanju teorije parcijalnih jednačina, nije obraćao dovoljno pažnje na to činjenice (i tek pri kraju svoga života nazvao je semi-linearnim jednačinama one koje dopuštaju njegove integrale). Slično je bilo i sa mnogim drugim njegovim sledbenicima. Zato nije slučajno što se tvrdilo da se težnje oko sastavljanja potpunog integrala kao mesta karakteristika mogu zavladati uvodeći integral u smislu S.Lie-a (9).

Druga vrsta ispitivanja u posmatranoj geometriskoj teoriji vezuje se za t.zv. Pfaff-ovim jednačinama i Pfaff-ovom metodom. Pfaff je prvi (4) analitičkom metodom rešio parcijalne jednačine I reda sa proizvoljnim brojem nezavisno promenljivih, stvarajući opštiju teoriju za integraciju linearnih diferencijalnih formi nepotpuno integrabilnih. Drugi put rešavanja opštih parcijalnih jednačina I reda ukazan je pojavom radova Cauchy-a (3) i Jacobi-a (5) kojima je pokazana mogućnost i rešenje pomenutog opšteg problema bez upotrebe Pfaff-ovih formi i teorija. Tako je teorija parcijalnih jednačina postala nezavisna i u tom smislu se dalje razvijala do današnjeg dana. Ali ipak treba napomenuti radove, koji dalje produbljuju Pfaff-ov problem, i to Frobenius-a (19), E.Weber-a (20) i dr.

Stvarajući svoj metod t.zv. spoljašnjih formi Cartan počev od 1899 godine (21) daje jako oružje i potsticaj za razvoj savremene diferencijalne geometrije. Sasvim je prirodno to što se savremena geometrija služi metodom spoljašnjih formi i da se geometriska teorija parcijalnih jednačina danas u njoj povezuje sa formama Pfaff-a i Pfaff-ovom metodom. Pored Cartan-ovih radova treba pomenuti na pr. i radove: Goursat-a (22), Рашевский-а (23) i Фиников-а (24). Nov metod u teoriji parcijalnih jednačina I reda ne daje nove rezultate, to jest koji pre njegovog primenjivanja nisu bili poznati. Ali što se tiče parcijalnih jednačina višeg reda i sa više nepoznatih funkcija pored određivanja karaktera proizvoljnosti rešenja on pruža nove mogućnosti za interpretaciju parcijalnih jednačina i usavršavanje teorije pomenutih jednačina.

Da bismo imali izvesnu sliku o modernoj geometriskoj teoriji, koja se služi diferencijalnim kosim formama i spoljašnjim proizvodom formi navešćemo metodu dobijanja sistema diferencijalnih jednačina za karakteristike i potpunog integrala, kojom se služio Рашевский u pomenutom delu.

Posmatrajmo ovaj sistem Pfaff-ovih jednačina

$$/6/\quad \begin{cases} \overset{1}{\omega}(d) \equiv \overset{1}{\omega}_\alpha dx^\alpha = \overset{1}{\omega}_1 dx^1 + \dots + \overset{1}{\omega}_n dx^n \\ \overset{2}{\omega}(d) \equiv df(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

Elementom d zvaćemo vektor beskonačno malog pomeranja iz tačke $M(x^1, \dots x^n)$ u beskonačno blisku tačku $M_1(x^1+dx^1, \dots, x^n+dx^n)$. Taj elemenat zvaćemo integralnim ako on zadovoljava gornji Pfaff-ov sistem. Karakterističnim elementom zvaćemo onaj integralni elemenat d koji još zadovoljava spoljašnje izvode gornjih formi

$$/7/\quad \overset{i}{\omega}'(d, \delta) \equiv \overset{i}{\omega}'_{\alpha\beta} dx^\alpha \delta x^\beta = 0 \quad (i=1,2)$$

a gde je

$$\overset{i}{\omega}'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \overset{i}{\omega}_\beta - \partial_\beta \overset{i}{\omega}_\alpha$$

Gornje izvodne forme moraju da budu zadovoljene za svaki integralni elemenat δ koji polazi iz iste tačke kao i elemenat d. Pošto je δ integralni elemenat to moraju da budu zadovoljeni uslovi

$$/8/\quad \overset{i}{\omega}_\beta(x) \delta x^\beta = 0 \quad (i=1,2)$$

zbog toga jednačine /7/ su linearne kombinacije levih strana jednačina /8/

$$/9/\quad \overset{i}{\omega}'_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \delta x^\beta = \underset{1}{\overset{i}{\vartheta}} \overset{1}{\omega}_\beta(x) \delta x^\beta + \underset{2}{\overset{i}{\vartheta}} \overset{2}{\omega}_\beta \delta x^\beta \quad (i=1,2)$$

množitelje $\underset{1}{\overset{i}{\vartheta}}, \underset{2}{\overset{i}{\vartheta}}$ dobijamo ako izjednačimo koeficijente obeju strana /9/

$$\overset{i}{\omega}'_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha = \underset{1}{\overset{i}{\vartheta}} \overset{1}{\omega}_\beta(x) + \underset{2}{\overset{i}{\vartheta}} \overset{2}{\omega}_\beta(x) \quad i=1,2$$

Za naš cilj, to jest traženje zavisnosti koje zadovoljavaju karakteristični elementi $d(dx^1, \dots, dx^n)$ dovoljno je da stavimo da su spoljašnji proizvodi svake forme /7/ sa svim formama /8/ jednaki identički nuli. Znači, treba izjednačiti sa nulom sve koeficijente takvih spoljašnjih proizvoda

$$/10/\quad \overset{i}{\omega}_{\alpha[\beta} \overset{1}{\omega}_{\beta_1} \overset{2}{\omega}_{\beta_2]} dx^\alpha = 0$$

gde uglaste zagrade znače da nad indeksima β, β_1, β_2, koji uzimaju vrednost od 1 do n, treba izvršiti alternaciju. Pri tome Рашевский zaključuje (str.86 pomenutog dela) da skup jednačina /6/ i /10/ daje potrebne i dovoljne uslove da bi elemenat $d(dx^1, \dots, dx^n)$ bio karakterigližam i naziva ga sistemom za karakteristike.

Tom sistemu za karakteristike možemo za naš slučaj Pfaff-ovog sistema /6/ dati i ovaj oblik (str.127 pomenutog dela)

$$\omega'_{\beta\alpha} dx^{\alpha} - \lambda \omega_{\beta} - \mu \partial_{\alpha} f = 0$$

$$\omega'_{\alpha} dx^{\alpha} = 0 , \quad \partial_{\alpha} f dx^{\alpha} = 0 \qquad \alpha, \beta = 1,2,..,n$$

i gde su λ i μ veličine uvedene zbog simetričnosti obrazaca i koje dalje u računu treba eliminisati.

Ako sad sistemu /6/ damo sledeći oblik

$$\omega(d) \equiv p_{\alpha} dx^{\alpha} - dz = 0$$

$$f \equiv f(x^1,..,x^n, z, p_1,.., p_n) = 0$$

i ako uvedemo oznake

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} , \quad P_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} , \quad Z = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (i = 1,2,..,n)$$

onda sistem za karakteristike dobija klasični oblik

$$\frac{dx^1}{P_1} = \cdots = \frac{dx^n}{P_n} = \frac{dz}{\sum p_i P_i} = - \frac{dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \cdots = - \frac{dp_n}{X_n + p_n Z}$$

Medjutim, mi znamo da ovaj sistem ne pretstavlja potrebne i dovoljne uslove za karakteristike kako to tvrdi Рашевский . Naime, on daje sam potrebne uslove, jer svaka karakteristika mora da zadovoljava taj sistem, ali svako rešenje tog sistema ne mora da bude karakteristika. Rešenja tog sistema, kao što je poznato (11), moraju da zadovoljavaju još naknadne uslove da bi mogla da budu uzeta za karakteristike.

Da bi objasnili postupak Рашевский-ог za dobijanje potpunog integrala parcijalne jednačine, mi ćemo najpre dati definiciju t.zv. kanoničkih promenljivih, a kojom se on služi u svojim izlaganjima.

Ako je u n-mernom prostoru $x^1,..,x^n$ date Pfaff-ove jednačina klase 2 k + 1

$$\omega(d) = 0$$

t.j. takva jednačina čija leva strana može da se izrazi najmanje pomoću 2 k + 1 različitih promenljivih i ako su u tom prostoru zadate (k + 1)skalarna funkcija koordinata tačaka

$$\eta = \eta(x^1,..,x^n) , \quad \eta^i = \eta^i(x^1,..,x^n) \qquad (i = 1,2,..,k)$$

onda te funkcije, koje su izmedju sebe nesavisne, zvaćemo kanoničkim promenljivima, ako Jednačine

$$\eta = C \quad , \quad \eta^i = C^i \qquad /i = 1,2,..,k)$$

gde su C i C^i proizvoljne konstante, pretstavljaju integralne površine date Pfaff-ove jednačine. To je očevidno, jer Pfaff-ova jednačina ima tada kanonički oblik

$$-d\eta + \zeta_\alpha d\eta^\alpha = 0$$

gde su ζ_α $(\alpha=1,2,\dots,k)$ funkcije od $x^1,\dots,x^n$ i nezavisne izmedju seb

Predjimo sad na samu metodu. Posmatrajmo parcijalnu jednačinu oblika

$$p_1 + H(x^1,\dots,x^n, z, p_2,\dots,p_n) = 0$$

kao površinu $\sum_{2n}$ koja zavisi od 2 n parametra $x^1,\dots,x^n, z, p_2,\dots,p_n$ i Pfaff-ovu jednačinu

$$\omega(d) = dz + H dx^1 - p_2 dx^2 - \dots - p_n dx^n = 0$$

posmatranu na toj površini $\sum_{2n}$. Ako pronadjemo kanoničke promenljive $y^1,\dots,y^n$ i izjednačimo ih konstantama

$$y^i = C^i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

mi površinu $\sum_{2n}$ raslojavamo na površine S_n (t.j. koje zavise od n parametara) i dobijamo identičnost

$$dz + H dx^1 - p_2 dx^2 - \dots - p_n dx^n \equiv Z_1 dy^1 + \dots + Z_n dy^n$$

gde su Z_i funkcije nezavisne izmedju sebe i od funkcije y^i. Medju površinama S_n' tražimo samo one koje zavise od parametara $x^1,\dots,x^n, y^1,\dots,y^n$ i sve parametre površine $\sum_{2n}$ izražavamo u funkciji ovih poslednjih. Specijalno

$$/11/ \qquad z = V(x^1,\dots,x^n, y^1,\dots,y^n)$$

Unoseći ovu vezu u prednju identičnost dobijamo

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (i=2,\dots,n)$$

$$-H = \frac{\partial V}{\partial x^1}, \quad Z_s = \frac{\partial V}{\partial y_s} \qquad (s=1,2,\dots,n)$$

Prvih n - 1 jednačina služe za transformaciju prilikom prelaženja od parametara $x^1,\dots,x^n, z, p_2,\dots,p_n$ od kojih zavisi površina $\sum_{2n}$, ka novim parametrima $x^1,\dots,x^n, y^1,\dots,y^n$. Kako su parametri $z, p_2,\dots,p_n$ funkcionalno nezavisni (takodje i za utvrdjene vrednosti za $x^1,\dots,x^n$), to će funkcionalna determinanta po novim parametrima $y^1,\dots,y^n$ biti različita od nule

$$D\left(\frac{V, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x^n}}{y^1, y^2, \dots, y^n}\right) \neq 0$$

pa jednačina /11/ je potpuni integral posmatrane parcijalne jednačine.

Takav je postupak Рашевский-ог za dobijanje potpunog integrala (str.169 do 178 pomenutog dela). Medjutim, kako kanoničke promenljive y^i zadovoljavaju uslove involucije

$$[y^i, y^j] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

to se izbacivanjem iz tih n funkcija veličina $p_2, \ldots p_n$ odmah dolazi do potpunog integrala /11/. Tu se, dakle, radi o t.zv. novoj Jacobi-jevoj metodi. Ali, kako je poznato, u opštem slučaju da se dodje do kanoničkih promenljivih i da se Pfaff-ova forma dovede do kanoničnog oblika, potrebno je poznavanje opšteg integrala sistema diferencijalnih jednačina za karakteristike. Pa prema tome, kada je taj integral poznat, nema potrebe tražiti kanoničke promenljive, već se pomoću njega, na osnovu osobina t.zv. karakterističnih funkcija, može direktno sastaviti potpuni integral.

Napominjem na kraju da Panaбский dolazi do potpunog integrala i na taj način što prilikom formiranja Cauchy-jevog integrala zahteva da karakteristike prolaze kroz površinu odredjenu jednačinama

$$z = y_1 + y_2 x^2 + \cdots + y_n x^n \quad , \quad p_2 = y_2, \ldots, \quad p_n = y_n$$

a to je specijalan slučaj onoga navedenog u kursevima analiza Hadamar-a i Goursat-a.

Na osnovu prednjeg pregleda razvoja i resultata teorije karakteristika i rešavanja problema: "sastaviti potpuni integral date parcijalne jednačine I reda jedne nepoznate funkcije ili sistema takvih jednačina pomoću opšteg integrala t.zv. sistema običnih diferencijalnih jednačina za karakteristike" možemo istaći sledeće činjenice:

1) Rešavanje gornjeg problema analitičkim metodama daje najjednostavnije i najpreciznije pomenuta teorija Saltikova, koja bazira na osobinama t.zv. karakterističnih funkcija. Ta teorija može s jedne strane da se primeni na najopštiji oblik parcijalne jednačine i na sistem takvih jednačina, da da najopštiji oblik rešenja i da ujedno obuhvati i rešavanje t.zv. Cauchy-jevog problema, i sa druge strane da otstrani svaku nesigurnost, a naročito jasno da istakne greške u zaključcima, ako se izlaz iz teškoća potraži u pojmu t.zv. Lie-ovih integrala.

2) Sve pomenute geometriske teorije, kako na različite načine, dovode do jednog istog sistema diferencijalnih jednačina za karakteristiku, koji pretstavlja samo neophodne, ali ne i dovoljne uslove za karakteristike. Naime, integral tog sistema ne pretstavlja uvek jednu krivu, takozvanu karakteristiku, t.j. duž kojeg se parcijalni izvodi p i q nepoznate funkcije ne menjaju uvek kako to propisuje

zadata parcijalna jednačina.

3) Geometriski pojmovi S. Lie-a i njegovi integrali iako na prvi pogled izgleda da proširuju ove klasične pojmove, sužavaju karakter i oblik parcijalne jednačine i ne mogu se primeniti na najopštije slučajeve parcijalnih jednačina.

4) Moderne geometriske teorije služe se opštijom teorijom t.zv. teorijom Pfaff-ovih jednačina i ne daju direktno rešenje gornjih problema, a i mana im je što se služe komplikovanijim matematičkim aparatom nego što to zahteva priroda samog problema.

5) Sve navedene geometriske teorije rešavaju geometriskim putem t.zv. Cauchy-jev problem i daju geometrisku konstrukciju t.zv. Cauchy-jevog integrala, a ne daju geometrisku konstrukciju potpunog integrala pomoću karakteristika.

6) Hadamard za geometriska izlaganja u teoriji karakteristika zahteva unapred poznavanje potpunog integrala, pa se onda prirodno postavlja pitanje: kako geometriskim putem konstruisati potpuni integral?

Imajući u vidu gornje činjenice ja sam u ovome radu postavio sebi za cilj da dodjem do takve geometriske teorije parcijalnih jednačina koja bi bila oslobodjena gornjih nedostataka. Do tog cilja mislim da se najjednostavnije dolazi ako se zadrže principi Monge-ove teorije, koriste rezultati njegovog najdoslednijeg sledbenika Lesute-a i ako se daju geometriska tumačenja za t.zv. karakteristične funkcije. Na taj način geometriska teorija karakteristika pomoću karakterističnih funkcija osigurava sebi valjanost, kao što je to slučaj sa tom analitičkom teorijom.

Na kraju, treba nešto kazati o vrednosti teorije karakteristika prema drugim metodama u teoriji parcijalnih jednačina. Polazeći sa stanovišta da diferencijalne jednačine uglavnom služe za ispitivanje funkcija, koje su njima definisane, a mnogo manje da bi ih izrazili pomoću poznatih funkcija, mi vrednost teorije karakteristika ne cenimo samo u tome što smo traženje integralnih površina sveli na traženje karakteristika, već – kako kaže Klein – "vielmehr hat man von den Streifen aus eine besondere Einsicht in die Erzeugung der Integralflächen: man sieht, dass die Funktion $z=\varphi(x,y)$[1] zweier Veränderlicher einerseits abhängt von dem Verlaufe der durch die Streifen bestimmten Funktionen einer Veränderlichen und anderseits von der willkürlichen Aneinanderreihung[2] dieser Streifen" (25). Dalja

1) Мислим на интеграцију парцијалне једначине I реда

važnost teorije karakteristika i karakterističnih funkcija leži u njenoj primeni i na druga teoretska pitanja (11).

II. g l a v a

PARCIJALNE JEDNAČINE JEDNE FUNKCIJE OD DVE NEZAVISNO PROMENLJIVE VELIČINE

§ 1

Svoja izlaganja zasnivaću na sledećim poznatim rezultatima metode Léauté-a (2):

1)Ako je data jedna tačka prostora i jedna ravan koja prolazi kroz nju i koordinate te tačke i uglovni koeficijenti te ravni zadovoljavaju neku datu parcijalnu jednačinu,onda je odredjena jedna karakteristika,dodirivana u pomenutoj tački od izabrane ravni; ta karakteristika je odredjena tada u svim svojim tačkama i sa svim svojim tangentnim ravnima;

2)Integralne površine koje prolaze kroz izabranu tačku i dodirivane su u njoj od izabrane ravni imaju zajedničku celu karakteristiku,odredjenu tačkom i ravni,i celu zonu - susednu ovoj krivoj razvojne površine načinjenoj od svih tangentnih ravni na ovoj karakteristici;

3)Kada je karakteristikom odredjena prva zona integralne površine,onda se na toj zoni može naći druga karakteristika,beskrajno bliska prvoj i sa njom je odredjena druga zona integralne površine. Tako bi zona po zona odredila integralnu površinu;

4)Geometriskim tumačenjem Cauchy-jeve formule

$$J = J_0 e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$$

gde Z i P znače parcijalne izvode leve strane date parcijalne jednačine

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

od z i p , i J znači jednu veličinu istog reda sa otstojanjem tačke B,druge karakteristike,od tangentne ravni na prvoj karakteristici u tački A,koja je beskrajno bliska tački B druge karakteristike. J_0 znači inicijalnu vrednost veličine J.

Sada ću postaviti sebi sledeće zadatke:

1)Konstruisati potpuni integral kao površinu koja se dobija kao geometrisko mesto karakteristika;

2)Dati Cauchy-jevoj formuli nov oblik;

3)Naći geometriskim putem potrebne i dovoljne uslove za opšti integral sistema diferencijalnih jednačina za karakteristike tako da bi se iz njega mogao dobiti potpuni integral date parcijalne jednačine;

4)Koristiti rešenja prednjih zadataka za geometrisko objašnjenje i formiranje t.zv.integrala Cauchy-ja.

§ 2. Potpuni integral prve vrste

Neka je data parcijalna jednačina

$$/1/ \qquad F(x,y,z,p,q)=0$$

gde je z nepoznata funkcija, a p i q parcijalni izvodi: $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$. Odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina za karakteristike glasi:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial p}p + \frac{\partial F}{\partial q}q} = -\frac{dp}{\frac{dF}{dx}} = -\frac{dq}{\frac{dF}{dy}}$$

Poznato je iz teorije, da je jedan integral ovog sistema i sama desna strana parcijalne jednačine /1/ izjednačena sa nekom proizvoljnom konstantom. Mi ćemo tu konstantu u našem računu da izjednačimo sa nulom, pa ćemo partikularni integral gornjeg sistema da napišemo u obliku:

$$/2/ \qquad \begin{aligned} y &= \overline{\varphi}(x, C_1, C_2, C_3) & p &= \overline{\psi}_1(x, C_1, C_2, C_3) \\ z &= \overline{\psi}(x, C_1, C_2, C_3) & q &= \overline{\psi}_2(x, C_1, C_2, C_3) \end{aligned}$$

gde su C_1, C_2, C_3 proizvoljne konstante integracije. Razume se, da pri tome mora da bude zadovoljen uslov: $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$. U ovome integralu namesto proizvoljnih konstanata C_1, C_2, C_3 uvedimo početne vrednosti y_0, z_0, q_0 -koje su uostalom proizvoljne- parametarskih promenljivih y, z, q, a koje odgovaraju datoj početnoj vrednosti x_0 glavne promenljive x. Početna vrednost p_0 promenljive p medjutim se izražava pomoću:

$$/3/ \qquad F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

Pomenute početne vrednosti pripadaju oblasti integrabilnosti date parcijalne jednačine. U ovakvom slučaju integral karakteristika prima ovaj oblik:

$$/4/ \qquad \begin{aligned} y &= \varphi(x, x_0, y_0, z_0, q_0) & p &= \psi_1(x, x_0, y_0, z_0, q_0) \\ z &= \psi(x, x_0, y_0, z_0, q_0) & q &= \psi_2(x, x_0, y_0, z_0, q_0) \end{aligned}$$

Sada ću pokazati kako se mogu konstruisati integralne površine, koje su geometrisko mesto karakteristika, i čije će jednačine zavisiti od dve proizvoljne konstante. Prema samom odredjivanju karakteristika moći će se razlikovati dve vrste integralnih površina, potpunih integrala. U ovom paragrafu pokazaću kako se može konstruisati prva vrsta integralnih površina i koje ću zvati potpuni integral prve vrste.

Neka je tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i ravni (p_0, q_0) odredjena prva karakteristika. Prema rezultatima metode Leaute-a tom karakteristikom – u njenom susedstvu na razvojnoj površini – odredjena je jedna zona integralne površine koju tražimo. U ravni (p_0, q_0) izabraću tačku M_1 (x_1, y_1, z_1), koja je beskrajno bliska tački M_0 i sa njom ima istu apcisu, t.j. neka je $x_1 = x_0$. Koordinate tačke M_1 u takvom slučaju zadovoljavaju jednačinu ravni

$$(X - x_0)p_0 + (Y - y_0)q_0 = Z - z_0$$

gde su X, Y, Z tekuće koordinate te ravni. Zbog toga imamo

$$z_0 - y_0 q_0 = z_1 - y_1 q_0$$

Da bi odredili novu zonu integralne površine, potrebno je na razvojnoj površini prve karakteristike konstruisati drugu karakteristiku koja je beskrajno bliska prvoj. Tu karakteristiku odredimo tačkom M_1 i ravni koja prolazi kroz nju i ima uglovne koeficijente: p_1 i $q_1 = q_0$ i to tako da je:

$$F(x_0, y_1, z_1, p_1, q_0) = 0$$

Drugom karakteristikom odredjena je druga zona integralne površine. U novoj ravni (p_1, q_0), koja prolazi kroz tačku M_1, izabraću tačku $M_2(x_2, y_2, z_2)$, beskrajno blisku tački M_1 i sa ovom ima istu apcisu, t.j. $x_2 = x_0$. Zahtev da tačka M_2 leži u novoj ravni izražava se uslovom:

$$z_2 - y_2 q_0 = z_1 - y_1 q_0 = z_0 - y_0 q_0$$

Da bismo odredili, dalje, novu zonu integralne površine, potrebno je na razvojnoj površini druge karakteristike konstruisati treću karakteristiku koja je beskrajno bliska drugoj. Tu karakteristiku odredimo tačkom M_2 i ravni koja prolazi kroz nju i ima uglovne koeficijente: p_2 i $q_2 = q_0$ i to tako da je :

$$F(x_0, y_2, z_2, p_2, q_0) = 0$$

Trećom karakteristikom odredjena je nova zona integralne površine.

Gornja konstrukcija pokazuje kako se dobija zona po zona integralne površine, t.j. sama tražena površina. Dalje se vidi da od konstanata: x_0, y_0, z_0, q_0, koje su dovoljne da odrede jednu karakteristiku, a figurišu u jednačinama /4/, treba konstantu z_0 zameniti novom konstantom b, koja je definisana jednačinom:

$$b = z_0 - y_0 q_0 \qquad /5/$$

Dakle, prilikom konstrukcije integralne površine ostaju nepromenjene konstante x_0, q_0, b, dok se, prelazeći s jedne karakteristike na drugu y_0 stalno menja.

Kada sam vršio konstrukciju dveju beskrajno bliskih karakteristika ja sam uzimao dve njihove beskrajno bliske tačke, na pr. M_1 i M_2 i zahtevao da tačka M_2 leži u tangentnoj ravni postavljenoj u tački M_1 prve karakteristike i još pretpostavljao da će druga

δx, δy, δz , zbog prve dve jednačine /4/ i promenljivosti veličine y_0 , zadovoljavaju ove jednačine

$$\delta y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\delta y_0$$

/6/

$$\delta z = \frac{\partial \psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y_0}\delta y_0$$

Postavimo u tački A odgovarajuću tangentnu ravan, sa $D = \overline{BN}$ označimo otstojanje tačke B druge karakteristike od te tangentne ravni i sa $J = \overline{BP}$ označimo razliku kota tačke B i tačke P , koja leži u tangentnoj ravni i ima istu projekciju u ravni xoy kao tačka B . Veličine D i J su beskonačno male istog reda, jer je

$$\frac{D}{J} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BP}} = \cos\measuredangle B$$

i količnik teži jednoj konačnoj granici različitoj od nule

$$\lim \frac{D}{J} = K \neq 0$$

kada $J \to 0$

Na osnovu definicije veličina J može se ovako izraziti :

$$J = \delta z - p\delta x - q\delta y$$

karakteristika, beskrajno bliska prvoj, ležati celom svojom dužinom na razvojnoj površini opisanoj duž prve karakteristike. Da bi ta pretpostavka bila ispunjena Lébauté, izvodeći Cauchy-jevu formulu i služeći se diferencijalnim jednačinama za karakteristike (vidi u III glavi primenjivanje tog postupka na parcijalne jednačine sa više nezavisno promenljivih), pokazao da je potreban i dovoljan uslov da baš tačka M_2 leži u tangentnoj ravni podignutoj u tački M_1 prve karakteristike. No kako se on tom prilikom služio diferencijalnim jednačinama za karakteristike, nije mogao naći uslove koje treba da zadovoljavaju integrali karakteristika. Zato ja sada sebi postavljam zadatak da nadjem potrebne i dovoljne uslove za integrale /4/ da bi gornja pretpostavka bila ispunjena. Pri rešavanju tog zadatka i koristeći samo jednačine /4/ dobiće i nov oblik za Cauchy-jevu formulu.

Te uslove naći ću na sledeći način. Uočimo dve beskrajno bliske karakteristike (I) i (II) i njihove dve beskrajno bliske tačke $A(x,y,z)$ i $B(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, gde simbol δ znači promenu veličina x, y, z kada se prelazi s jedne karakteristike na drugu a diferencijali

to se on vraća i [illegible]

ne y_0
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y_0}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y_0}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y_0}$$

Zato je
$$\frac{dU_{y_0}}{dx}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y_0}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Ako koristimo diferencijalne jednačine za karakteristike onda veličin $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ i $\frac{\partial\psi_1}{\partial x}$ možemo ovako izraziti
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{(Q)}{(P)}\,,\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial x}=-\frac{(Y)+\psi_1(Z)}{(P)}$$

gde X, Z, P, Q znače parcijalne izvode leve strane jednačin /1/ od y, z, p, q, a okrugle zagrade (znače rezultat smene y, z, p, q sa desnim stranama jednačina /4/ u izraze koji su stavljeni u zagrade. Dalje, kako je jednačina /1/ identički zadovoljena integralima karakteristik
$$F(x,\varphi,\psi,\psi_1,\psi_2)=0$$

to će biti zadovoljeno i karakteristikama, koje odgovaraju promenama veličine y_0, i postojaće nova identičnost
$$(Y)\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}+(Z)\frac{\partial\psi}{\partial y_0}+(P)\frac{\partial\psi_1}{\partial y_0}+(Q)\frac{\partial\psi_2}{\partial y_0}=0$$

Zbog gore izloženog desna strana jednačine /9/ može se dovesti do diferencijalne jednačine u kojoj su promenljive razdvojene
$$\frac{dU_{y_0}}{dx}=\frac{1}{(P)}\left[\psi_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}(Z)-\frac{\partial\psi}{\partial y_0}(Z)\right]=-\frac{(Z)}{(P)}U_{y_0}$$

ili posle integracije

$$U_{y_0}=U^0_{y_0}\,e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{(Z)}{(P)}dx}\qquad /10/$$

gde $U^{0}_{y_0}$ znači inicijalnu vrednost veličine U_{y_0}. Na taj način veličina J se izražava i na sledeći način:

$$/11/ \qquad J = U^{0}_{y_0}\, e^{-\int_{x_0} \frac{(Z)}{(P)} dx}\, \delta y_0$$

Izračunajmo sada inicijalnu vrednost za veličinu U_{y_0}, koja je data jednačinom /7/. Najpre u integrale /4/ uvrstimo namesto z_0 veličinu b odredjenu jednačinom /5/ i tada je

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\Big\}_{x=x_0} = z_0 \;, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\Big\}_{x=x_0} = 1 \;, \quad \psi\Big\}_{x=x_0} = z_0$$

Dakle:

$$/12/ \qquad U^{0}_{y_0} \equiv 0$$

a zbog /10/ i

$$/13/ \qquad U_{y_0} \equiv 0$$

uz pretpostavku da je integral na desnoj strani jednačine /10/ konačan i odredjen. Zato je prema jednačini /8/ i inicijalna vrednost J_0 identički jednaka nuli, a to je i prilikom konstrukcije integralne površine i pretpostavljeno, t.j. da na pr. tačka M_1 druge karakteristike leži u tangentnoj ravni podignutoj u tački M_0 prve karakteristike. Medjutim iz jednačine /11/ sledi da je veličina J stalno identički jednaka nuli ako jedna tačka druge karakteristike, na pr. tačka M_1 leži u pomenutoj ravni. Drugim rečima druga karakteristika celom svojom dužinom ležaće na razvojnoj površini opisanoj od tangentnih ravni duž prve beskrajno bliske karakteristike.

Dakle, kada je uslov /13/ identički zadovoljen, onda je moguće konstruisati zonu po zonu integralne površine, pa prema tome i celu površinu dobiti kao mesto karakteristike.

Posmatrajući jednačinu /8/ vidimo, pošto je δy_0 proizvoljna beskrajno mala veličina, ali odredjenog reda, da će J biti stalno jednako nuli ako je identički ispunjen uslov /13/. Znači i obrnuto važi: da bi druga karakteristika ležala cela na razvojnoj površini opisanoj duž prve beskrajno bliske karakteristike mora biti zadovoljen uslov /13/.

Kako je uvek $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} \lesseqgtr 0$, t.j. funkcija φ je uvek rešljiva po y_0, jer ta funkcija za $x = x_0$ postaje identična sa y_0 to se, uvodeći veličinu b /5/ i eliminišući y_0 iz prve kolone jednačina /4/ dobija integralna površina:

$$z = f(x, y, x_0, b, z_0)$$

gde x_0 znači odredjenu brojnu vrednost, a b i z_0 proizvoljne konstante.

Sada treba pokazati da je integralna površina /14/ potpuni integral parcijalne jednačine /1/, t.j. da se prilikom pomenute eliminacije veličine y_0 konstante b i q_0 zadržavaju u jednačini /14/.

Poći ću od očevidne identičnosti

$$\psi(x, x_0, y_0, b, q_0) \equiv f(x, \varphi, x_0, b, q_0)$$

i uzeću njene izvode po konstantama b i q_0

$$\frac{\partial \psi}{\partial b} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial b} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_0} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial q_0}\right)$$

gde zagrade znače da je u funkciji f na mesto y stavljeno φ. Ako rezultat eliminacije konstante y_0 iz desnih strana druge kolone jednačina /4/ označimo sa Ψ_1, Ψ_2, onda pošto je površina /14/ integralna, postoje uslovi

$$\Psi_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad i \quad \Psi_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

koji ako se u njima y smeni sa φ postaju

$$\psi_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \psi_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Zato poslednje identičnosti postaju

$$U_b \equiv \frac{\partial \psi}{\partial b} - \psi_2\frac{\partial \varphi}{\partial b} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right), \quad U_{q_0} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial q_0} - \psi_2\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial q_0}\right)$$

Odatle se lako zaključuje da su uslovi

$$/15/ \qquad U_b \lessgtr 0, \quad U_{q_0} \lessgtr 0$$

potrebni i dovoljni da bi u jednačini /14/ figurisale konstante b i q_0.

Ostaje mi još da pokažem da su uslovi /15/ zadovoljeni za našu konstruisanu površinu. Saltikov je pokazao (11) da za funkcije U_b i U_{q_0} važe obrasci analogni obrascu /10/. Zato je dovoljno da pokažem da su za našu površinu inicijalne vrednosti U_b^0 i $U_{q_0}^0$ tih funkcija različite od nule. Zbilja imamo

$$U_b^0 \equiv 1, \quad U_{q_0}^0 \equiv y_0$$

Na osnovu prednjeg mogu iskazati sledeću teoremu:

Ako u integrale /14/ uvedemo na mesto z_0 veličinu b, definisanu jednačinom /5/, onda je: 1) ispunjeni su potrebni i dovoljni uslovi /13/, /15/ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \lessgtr 0$ za integrale karakteristika /4/ i 2) eliminacija veličine y_0 iz prve kolone jednačina /4/ daje potpuni integral prve vrste /14/ kao geometrisko mesto karakteristika.

Do uslova /13/ mogu doći i na drugi način. Cauchy-jevoj formuli

$$J = J_0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{(Z)}{(P)} dx}$$

možemo dati i sledeće geometrisko tumačenje. Uočimo dve beskrajno bliske karakteristike (I) i (II) i na njima dve beskrajno bliske tačke M i N. Ako tačka N leži, što sam i pretpostavljao u konstrukciji integralne površine, na razvojnoj površini prve karakteristike, onda će i poprečni elemenat $\overline{MN}$ ležati na uočeni par tačaka na razvojnoj površini. Zato Cauchy-jevu formulu mogu i ovako geometriski tumačiti: ako poprečni elemenat $\overline{MN}$, što spaja dve beskrajno bliske tačke M i N, koje pripadaju dvema beskrajno bliskim karakteristikama (I) i (II), leži za jedan položaj tačaka M i N na razvojnoj površini opisanoj duž karakteristike (I), onda će on stalno ležati na toj razvojnoj površini, za svaki položaj beskrajno bliskih tačaka M i N. Označimo projekcije spojne linije MN ovih dveju tačaka sa $\delta x, \delta y, \delta z$ i uopšte priraštaje, koji se odnose na tačke M i N, sa δ, tada jednačine /4/ daju:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\delta y-\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\delta y_0=0$$
$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x+\delta z-\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\delta y_0=0$$

Kako poprečni elemenat MN leži na pomenutoj razvojnoj površini mora da postoji uslov

$$\delta z=p\,\delta x+q\,\delta y$$

i predanje jednačine se pišu u obliku

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\delta y-\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\delta y_0=0\,,\quad -\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi_1\right)\delta x+\psi_2\,\delta y-\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\delta y_0=0$$

Prednji sistem mogu smatrati kao uslove za odredjivanje veličine δy, jer zbog proizvoljnosti pravca poprečnog elementa MN priraštaji δx i δy_0 su proizvoljni. Da bi taj sistem bio saglasan mora da postoji uslov

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x-\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\delta y_0 \\ \psi_2 & -\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi_1\right)\delta x-\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\delta y_0 \end{vmatrix}=0$$

ili

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi_1-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi_2\right)\delta x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_0}-\psi_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)\delta y_0=0$$

Pošto su veličine δx i δy_0 proizvoljne poslednji uslov daje:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi_1-\psi_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv 0,\quad U_{y_0}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial y_0}-\psi_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\equiv 0$$

Prvi uslov je uvek zadovoljen, jer su jednačine /4/ integrali sistema diferencijalnih jednačina za karakteristike, a drugi uslov je uslov /13/. Mi smo pokazali /12/ da je inicijalna vrednost karakteristične funkcije identički jednaka nuli, t.j. da za inicijalni položaj tačaka M i N poprečni elemenat leži na razvojnoj površini. A kako je on stalno na razvojnoj površini - prema Cauchy-jevoj formuli - to će uslov /13/ stalno biti ispunjen. Obrnuto važi: Ako je uslov /13/ identički ispunjen, onda će (II) karakteristika stalno ležati u razvojnoj površini (I) karakteristike. Kako još važe uslovi $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\gtrless 0$ i /15/, to sam ponovo došao do prednje teoreme.

§ 3. POTPUNI INTEGRAL DRUGE VRSTE

Pretpostavimo da je sistem običnih diferencijalnih jednačina za karakteristike, koji odgovara parcijalnoj jednačini /1/, takav da dopušta mogućnost da se kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ povuče beskrajno mnogo karakteristika. Konstruišimo sve te karakteristike i pokažimo da je njihovo mesto jedna integralna površina, koja će zavisiti od dve proizvoljne konstante.

Za pomenutu tačku M_0 konstruišimo polarni konus (15) i na njemu uočimo direktrisu, koja je vrlo malo udaljena od njegovog vrha M_0. Zatim za svaku tačku te direktrise konstruišimo opet polarne konuse. Svi ovi konusi - nazovimo ih konusima "prvog sprata" - obvijeni su od jedne površine. Na ovoj obvojnici konusa I sprata uočimo jednu krivu, koja je vrlo blizu direktrisi prvog polarnog konusa, i za svaku tačku te krive konstruišimo nove konuse - konuse "drugog sprata" - , koji će biti obavijeni od jedne druge površine. Na ovoj, pak, obvojnici, kao ranije, konstruišimo nove polarne konuse "trećeg sprata" i dobićemo treću obvojnicu. Sve ove obvojnice biće delom obavijene od površine, koja je mesto svih karakteristika što prolaze kroz tačku M_0. Ta je površina integralna, jer u svakoj svojoj tački dodiruje jedan polarni konus.

Da bih našao jednačinu te integralne površine treba uzeti u obzir integrale /4/. Postaviću takodje potrebne i dovoljne uslove, koje ti integrali treba da zadovoljavaju za ovaku vrstu integralne površine.

Za svaku karakteristiku veličine x_0, y_0, z_0 su stalne, menja se samo q_0. Uočimo opet dve beskrajno bliske karakteristike i na njima dve beskrajno bliske tačke A i B. Veličina J, koja je istog reda kao i otstojanje tačke B od tangentne ravni postavljene u tački A za prvu karakteristiku, izražava se za ovaj slučaj na ovakav način

$$J=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi_1-\psi_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_0}-\psi_2\frac{\partial\varphi}{\partial q_0}\right)\delta q_0$$

gde δx i δq_0 znače promene veličina x i q_0 pri prelasku sa jedne karakteristike na drugu. Ili, uzimajući u obzir da je prva zagrada identički jednaka nuli i da se uvodi oznaka

$$/16/ \qquad U_{q_0}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial q_0}-\psi_2\frac{\partial\varphi}{\partial q_0}$$

još

$$/17/ \qquad J=U_{q_0}\,\delta q_0$$

Sličnim rezonovanjem, kao i u prethodnom paragrafu, dolazimo do jednačine:

$$/18/ \qquad U_{2_\circ} = U^0_{2_\circ}\, e^{-\int_{x_\circ}^{x} \frac{(Z)}{(P)} dx}$$

gde $U^0_{2_\circ}$ znači inicijalnu vrednost za karakterističnu funkciju /16/. Zbog toga jednačina /17/ definitivno prima sledeći oblik:

$$/19/ \qquad J = U^0_{2_\circ}\, e^{-\int_{x_\circ}^{x} \frac{(Z)}{(P)} dx}\, \delta_{2_\circ}$$

Pri poklapanju tačaka A i B sa M inicijalna vrednost karakteristične funkcije /16/ mora da bude identički jednaka nuli. Zbilja:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial 2_\circ}\right\}_{x=x_\circ} = 0\,, \quad \left.\psi_1\right\}_{x=x_\circ} = 2_\circ\,, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial 2_\circ}\right\}_{x=x_\circ} = 0$$

pa je

$$U^0_{2_\circ} \equiv 0$$

a zbog /18/ karakteristična funkcija /16/ je stalno identički jednaka nuli:

$$/20/ \qquad U_{2_\circ} \equiv 0$$

Na osnovu /17/ sada zaključujemo da će veličina J biti stalno jednaka nuli, jer je to slučaj za tačku M_o. Drugim rečima, svaka od karakteristika, koje prolaze kroz tačku M_o, ležaće celom svojom dužinom na razvojnoj površini opisanoj duž karakteristike, koja je beskrajno bliska prethodnoj. Znači svakom karakteristikom je odredjena jedna zona integralne površine. Sve te zone i čine integralnu površinu, koja je mesto karakteristika i koja je gore pretstavljena pomoću polarnih konusa.

Obrnuto, da bi veličina J bila stalno jednaka nuli, t.j. da bi se mogla konstruisati prednja površina, treba, na osnovu /17/, pošto je $\delta 2_\circ$ proizvoljno, da bude uslov /20/ identički zadovoljena.

Lako je pokazati da su sledeće karakteristične funkcije različite od nule

$$/21/ \qquad U_{y_\circ} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial y_\circ} - \psi_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y_\circ}\,, \quad U_{z_\circ} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial z_\circ} - \psi_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z_\circ}$$

što znači, a prema izlaganjima prethodnog paragrafa, da ako je moguće izvršiti eliminaciju veličine q_o iz prve kolone jednačina /4/, onda dobijamo jednačinu

$$/22/ \qquad z = f(x, y, x_\circ, y_\circ, z_\circ)$$

čija desna strana ~~samo~~ zavisi od konstanata y_o i z_o.

Zato možemo iskazati sledeću teoremu:

Da bismo dobili potpuni integral druge vrste, t.j. integralnu površinu, koja je geometrisko mesto svih karakteristika koje prolaze kroz jednu tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$, potrebno je i dovoljno da budu zadovoljeni uslovi /20/ i /21/ i da je $\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \lessgtr 0$. Eliminacija promenljivog parametra q_0 iz prve kolone jednačina /4/ daje traženu integralnu površinu /22/, u kojoj x_0 znači tačno odredjenu vrednost, a y_0 i z_0 su proizvoljne konstante potpunog integrala.

Ako uslov $\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \lessgtr 0$ nije zadovoljen, t.j. ako se u prvoj jednačini ne sadrži veličina q_0, onda bi jednačina $z = \psi$, izgleda, trebala da pretstavlja rezultat već izvršene eliminacije veličine q_0, t.j. da je ona jednačina tražene integralne površine. Medjutim, kako ta jednačina ne sadrži veličinu y, to ona pretstavlja neku cilindričnu površinu čija je izvodnica paralelna sa y-osom. Ova bi izvodnica varijacijom svoga parametra postala karakteristika cilindrične površine. Radi toga ta površina nikako ne može pretstavljati traženu integralnu površinu. Jednačine $z=\psi$, $y=\varphi$ ne pretstavljaju ni Sophus Lie-ov integral, jer posmatrana parcijalna jednačina /1/ nije linearna (10).

Do uslova /20/ dolazimo i na sledeći način. Opet ćemo se koristiti geometriskom interpretacijom Cauchy-jeve formule koja je data u prethodnom paragrafu. Označimo projekcije poprečnog elementa $\overline{AB}$ sa $\delta x, \delta y, \delta z$ i sa δ priraštaj koji se odnosi na taj elemenat i napišimo uslov da taj elemenat leži na razvojnoj površini opisanoj duž prve karakteristike

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

Služeći se integralima /4/ i uzimajući u obzir da q_0 igra ulogu promenljivog parametra, dobijamo ovaj sistem koji zadovoljavaju diferencijali δ

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\delta q_0 = 0, \quad -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi_1\right)\delta x + \psi_2\,\delta y - \frac{\partial \psi}{\partial q_0}\delta q_0 = 0$$

Sličnim rezonovanjem, kao u prethodnom paragrafu, iz uslova saglasnosti prednjeg sistema dobijamo

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi_1 - \psi_2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_0} - \psi_2\frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\right)\delta q_0 = 0$$

a pošto su δx i δq_0 proizvoljne veličine dolazimo do uslova

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi_1 - \psi_2\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0, \quad U_{q_0} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi_2\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \equiv 0$$

§ 4. POTPUNI INTEGRAL SA OPŠTIM KONSTANTAMA INTEGRACIJE

Da bih sastavio potpuni integral sa opštim konstantama integracije za razliku od potpunih integrala prve i druge vrste /14/ i /22/, u kojima kao proizvoljne konstante figurišu inicijalne vrednosti poći ću od opšteg integrala karakteristika datog u obliku /2/, a u kojem su opšte konstante integracije C_1, C_2, C_3. Sada je potrebno definisati karakteristike za ovaj slučaj kao i odrediti potrebne i dovoljne uslove za integral /2/ da bi se pomoću njega mogao formirati potpuni integral jednačine /1/.

Pretpostaviću da je prva od jednačina /2/ rešljiva po jednoj bilo kojoj od konstanata C_1, C_2, C_3 .Konkretnosti radi,a što ne umanjuje ništa opštost,pretpostaviću da postoji uslov

$$/23/ \qquad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial C_3} \lessgtr 0$$

Polazim od poznate činjenice da integrali /2/ identički zadovoljavaju datu jednačinu /1/.Uočiću,zatim,krivu liniju datu prvom kolonom jednačina /2/ i za svaku tačku te krive odredjena je ravan sa uglovnim koeficijentima $(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2)$.Geometrisko mesto tih ravni čini razvojnu površinu.Beskrajno bliska okolina uočene krive - deo te razvojne površine zadovoljavaće takodje jednačinu /1/. Ideja za rešavanje gornjeg zadatka se sastoji u sledećem: kretati tu krivu tako da svaki njen nov položaj bude takav da ona cela leži u razvojnoj površini opisanoj duž beskrajno bliskog prethodnog položaja te krive.Uzastopni položaji te krive sa beskrajno uzanim zonama,delovima razvojne površine zadovoljavali bi jednačinu /1/ i činili bi integralnu površinu.Pri kretanju krive pretpostaviću da se menja samo jedna,bilo koja od konstanata C_1, C_2, C_3 . Konkretnosti radi pretpostaviću da se menja konstanta C_3 ,dok se konstante C_1, C_2 ne bi menjale.

Sada treba da izvedem potrebne i dovoljne uslove za integrale /2/ da bih naznačenom konstrukcijom dobio integralnu površinu i šta više da bi ona pretstavljala potpuni integral jednačine /1/.Uočiću dva beskrajno bliska položaja krive date prvom kolonom jednačina /2/, a u kojima konstanta C_3 ,po pretpostavci igra ulogu parametra.Ta dva beskrajno bliska uzastopna položaja označiću sa (k_1) ,odnosno sa (k_2). Na krivoj (k_1) uzeću proizvoljnu tačku A sa koordinatama (x,y,z) i kroz tu tačku povući ravan sa uglovnim koeficijentima $(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2)$, a na krivoj (k_2)tačku B , koja je beskrajno bliska tački A i ima kordinate $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$.Otstojanje tačke B od prednje ravni u tački A , kao ranije,mogu zameniti veličinom istog reda,naime veličinom J .Veličina J u ovom slučaju se izražava

$$\delta J = \delta z - \overline{\Psi}_1 \delta x - \overline{\Psi}_2 \delta y$$

Kako sam pretpostavio da se C_3 menja kada se prelazi s krive (k_1) na krivu (k_2) i ako sa simbolom δ_3 označim priraštaje veličina x,y,z i C_3 kada se naša kriva kreće,onda postoje veze

$$\delta y = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial C_3}\delta C_3 \ , \quad \delta z = \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial C_3}\delta C_3$$

Zbog toga veličinu J mogu ovako izraziti

$$J = \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x} - \overline{\Psi}_1 - \overline{\Psi}_2 \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}\right)\delta x + U_3 \delta C_3$$

gde je uvedena oznaka za karakterističnu funkciju

$$U_3 \equiv \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial C_3} - \overline{\Psi}_2 \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial C_3}$$

Pošto integrali /2/ identički zadovoljavaju diferencijalne jednačine za karakteristike to uvek postoji identičnost

$$\text{~~/24/~~} \qquad \cancel{J = U_3 \delta C_3} \quad \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x} - \overline{\Psi}_1 - \overline{\Psi}_2 \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} \equiv 0$$

pa veličinu J mogu ovako izraziti

$$/24/ \qquad J = \cancel{U_3^0 e^{-\int_{x_0} \frac{(Z)}{(P)} dx} \delta C_3} \; U_3 \delta C_3$$

Obrazac /24/ može da dobije (vidi ranije izlaganja) i oblik

$$/25/ \qquad J = U_3^0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{(Z)}{(P)} dx} \delta C_3$$

gde U_3^0 znači inicijalnu vrednost funkcije U_3 za početnu vrednost x_0 glavne promenljive x. Da bi kriva (k_2) ležala celom svojom dužinom na razvojnoj površini opisanoj duž krive (k_1) treba veličina J da bude stalno jednaka nuli. Potreban i dovoljan uslov da bi veličina J bila jednaka stalno nuli dobija se iz /24/:

$$/26/ \qquad U_3 \equiv 0$$

pošto je veličina δC_3 proizvoljna. Kako je uslov /26/ izveden za makoja dva beskrajno bliska položaja krivih (k_1) i (k_2) to je on onda potreban i dovoljan uslov da bi površina, nastala kretanjem kriv[e] bila integralna.

Jednačinu te integralne površine, pošto je pretpostavljeno da postoji uslov /23/, dobićemo eliminacijom parametra C_3 iz prve kolone jednačina /2/ i biće

$$/27/ \qquad z = f(x, y, C_1, C_2)$$

Treba još naći uslove koje treba da zadovoljavaju integrali /2/ da bi jednačina /27/ sadržavala konstante C_1, C_2, t.j. da bi bila potpuni integral jednačine /1/. Poći ću, slično kao ranije, od identičnosti

$$\overline{\Psi}(x, C_1, C_2, C_3) \equiv f(x, \overline{\varphi}, C_1, C_2)$$

koju ću diferencirati po C_1 i C_2

$$/28/ \qquad \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial C_i} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial C_i} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial C_i}\right) \qquad i = 1, 2$$

gde zagrade znače da je u funkciji f namesto y stavljeno φ. Sa $\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2$ označiću rezultat eliminacije konstante iz desnih strana druge kolone jednačina /2/.Ova eliminacija je izvršena pomoću jednačine $y=\overline{\varphi}$ .Kako je površina /27/ integralna imam veze

$$\overline{\Psi}_1=\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad \overline{\Psi}_2=\frac{\partial f}{\partial y}$$

koje,ako u njih namesto y stavim φ ,postaju

$$\overline{\Psi}_1=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\ ,\quad \overline{\Psi}_2=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Zbog toga identičnosti /28/ mogu da napišem u obliku

$$U_i\equiv\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial C_i}-\overline{\Psi}_2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial C_i}\equiv\left(\frac{\partial f}{\partial C_i}\right)$$

Prema tome potrebni i dovoljni uslovi da bi jednačina /27/ sadržavala konstante $C_1 C_2$ jesu

$$/29/\qquad U_i\lessgtr 0\qquad i=1,2$$

Zato mogu da iskažem sledeću teoremu:

Da bi se iz sistema rešenja /2/ mogao sastaviti potpuni integral date parcijalne jednačine treba da budu ispunjeni uslovi /23/,/26/ i /29/ i tada eliminacijom konstante C_3 iz prve kolone jednačina /2/ dobija se traženi potpuni integral /27/.Pri tome izbor konstante za eliminaciju vezuje se samo za naznačene uslove /23/,/26 i /29/.

Do uslova /23/ može se doći i na drugi način,anologno kao i u ranijim paragrafima-.

Potrebno je još odrediti karakter dobijenog potpunog integrala /27/,(15).Napišimo taj integral u obliku

$$/30/\qquad f_1\equiv z-f(x,y,C_1,C_2)=0$$

Kao što je dobro poznato jednačina /30/ i

$$/31/\qquad \frac{\partial f_1}{\partial C_1}+\alpha\frac{\partial f_1}{\partial C_2}=0$$

gde je α promenljiv parametar,pretstavljaju familiju karakteristika,koje se dobijaju kao presečne linije površine /30/ i familije površina /31/ za koju je α promenljiv parametar.Na osnovu nekih sledećih osobina familije /31/ može se odrediti karakter integrala /30/:

a)Ako se sve površine /31/ seku duž jedne krive koju preseca u nekoj tački M i površina /30/,onda površina /30/ ima karakteristike koje prolaze kroz tu tačku M .U takvom slučaju potpuni integral je druge vrste.

b)Ako se sve površine /31/ ne seku duž jedne krive i ako one nemaju obvojnicu,onda površina /30/ pretstavlja potpuni integral prve vrste.

c)Ako površine /31/ imaju obvojnicu,koja seče površine /30/ duž jedne krive,onda ta kriva je obvojnica karakteristika koje leže na površini /30/.Ta kriva je tada povratna ivica za integralnu površinu /30/,(16). Površina /30/ je tada jedan Cauchy-jev integral,koji prolazi kroz obvojnicu karakteristika.

§ 5. Cauchy-ev integral.Integralna površina prolazi kroz ravnu krivu: $x=x_0,\ z=\phi(y)$

Jedna karakteristika je odredjena tačkom $M_0(x_0,y_0,z_0)$ i ravni $(p_0,q_0=\phi'(y_0))$; veličina p_0 je odredjena samom parcijalnom jednačinom /1/.Kroz tačku M_0, neka prolazi kriva:

$$/32/ \qquad x=x_0\ ,\quad z=\phi(y)$$

i njen elemenat $\overline{M_0 M_1}$ neka leži u ravni (p_0,q_0).Tada je gornjom karakteristikom odredjena prva zona integralne površine,koja sadrži elemenat naše ravne krive.Kroz tačku M_1 $(x_1,y_1,\phi(y_1))$ neka prolazi druga karakteristika,beskrajno bliska prvoj,i neka bude u toj tački dodirivana od ravni $(p_1,q_1=\phi'(y_1))$,koja sadrži nov elemenat $\overline{M_1 M_2}$ ravne krive.Veličina p_1 se odredjuje iz jednačine

$$F\left[x_0,y_1,\phi(y_1),p_1,\phi'(y_1)\right]=0$$

Ovom drugom karakteristikom odredjena je druga zona integralne površine i ona sadrži drugi elemenat $M_1 M_2$ krive.Tako bi,nastavljajući našu konstrukciju,našli integralnu površinu,sastavljenu od pomeratih zóna,koja bi sadržavala krivu /32/.Za tačke M_0, M_1, M_2 ..... te krive apcisa bi bila: $x=x_0$ veličina z_0 bi se menjala kako to propisuje data jednačina $z=\phi(y)$,a q_0 bi se menjalo prema uslovu $q=\phi'(y)$ položaj ravni,koje postavljamo kroz te tačke,zavise od elemenata propisane krive.Dakle,dok x_0 ostaje nepromenjeno,veličine z_0 i q_0 zavise od jednog istog parametra y_0.Menjanjem tog parametra dobijamo mesto karakteristika,koje se naslanjaju na krivu /32/.To mesto je jedna integralna površina,jer parametar y zadovoljava uslove,čiji smo geometriski smisao već videli.Zaista,ako u integrale karakteristika /4/ uvedemo mesto z_0 i q_0 njihove funkcije parametra y_0:

$$z_0=\phi(y_0)\ ,\quad q_0=\phi'(y_0)$$

onda će oni primiti sledeći oblik:

$$y=\alpha(x,x_0,y_0) \qquad p=\gamma(x,x_0,y_0)$$
$$z=\beta(x,x_0,y_0) \qquad q=\delta(x,x_0,y_0)$$

Parametar y_0 zadovoljava ove uslove:

$$a) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} \lessgtr 0$$

jer funkcija α za $x = x_0$ postaje identična sa y_0.

$$b) \quad \frac{\partial \beta}{\partial y_0} - q\frac{\partial \alpha}{\partial y_0} = 0$$

Kako smo ranije kazali, ovaj uslov je zadovoljen ako je to slučaj za početnu vrednost promenljive x, t.j. za $x = x_0$. Ako uvedemo tu početnu vrednost imamo

$$\frac{\partial \beta}{\partial y_0}\Big\}_{x=x_0} = q_0 \,, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_0}\Big\}_{x=x_0} = 1, \quad q_{x=x_0} = q_0 = \frac{\partial b}{\partial y_0}\Big\}_{x=x_0}$$

i to nam pokazuje da je uslov b) zadovoljen za tu početnu vrednost. Dakle, dovoljno je iz jednačina $y = \alpha, z = \beta$ eliminisati promenljiv parametar y_0, pa da tako dobivena jednačina pretstavlja integralnu površinu, koja prolazi kroz krivu /32/. To je t.zv. Cauchy-jev integral i u njemu veličina x_0 ima tačno odredjenu vrednost.

§ 6. CAUCHY-JEV INTEGRAL. INTEGRALNA POVRŠINA PROLAZI KROZ UNAPRED DATU PROSTORNU KRIVU

Neka je data prostorna kriva

$$/33/ \qquad x = \varphi_1(y)\,, \quad z = \varphi_2(y)$$

Uočimo na njoj dve beskrajno bliske tačke M_0 i M_1 i kroz njih povucimo takvu ravan da njeni uglovni koeficijenti zadovoljavaju datu parcijalnu jednačinu /1/. Tačkom M_0 i pomenutom ravni odredjena je jedna karakteristika, koja nam čini jednu zonu integralne površine. Budući da je ova zona načinjena od tangentnih ravni duž karakteristike, to ona sadrži očevidno elemenat krive $\overline{M_0M_1}$. Uzimajući sada tačku M_2 ove krive, koja je beskrajno bliska tački M_1, možemo da povučemo jednu drugu ravan, koja prolazi kroz ove dve poslednje tačke i čiji uglovni koeficijenti zadovoljavaju parcijalne jednačine. Time bi bila odredjena druga karakteristika i druga zona integralne površine, koj bi sadržavala i drugi elemenat $\overline{M_1M_2}$ date krive. Na taj način uzimajući sve nove i nove tačke date krive konstruisali bismo, korak po korak, zonu po zonu integralne površine, koja bi prolazila kroz unapred datu prostornu krivu. Na ovaj način smo pokazali ne samo mogućnost da integralna površina parcijalne jednačine prolazi kroz proizvoljna, već smo izveli samo njenu konstrukciju. Jednačina ove površine je integral parcijalne jednačine. Kako je on odredjen kada je data jedna kriva, to sledi da, ako je kriva proizvoljna, t.j. data proizvoljnim jednačinama, naš integral sadrži i zavisi od proizvoljne funkcije. Prema tome naš integral bi bio opšti integral zadate parcijalne jednačine.

Sada ćemo videti kako se može stvarno postići zadata integracija, t.j. kako se sastavlja jednačina integralne površine, koja treba da pridje kroz unapred propisanu krivu /33/. Posmatrajmo opet integrale karakteristika /4/ i pomoću njih i jednačina /33/ sastavimo traženi integral Cauchy-ja. Prva karakteristika je odredjena tačkom $[\phi_1(y_0), y_0, \phi_2(y_0)]$ i ravni, čiji su uglovni koeficijenti $p_0, q_0 = \phi_2'(y_0)$, gde se p_0 računa iz

$$F[\phi_1(y_0), y_0, \phi_2(y_0), p_0, \phi_2'(y_0)] = 0$$

Druga karakteristika je odredjena tačkom $[\phi_1(y_1), y_1, \phi_2(y_1)]$ i ravni, čiji su uglovni koeficijenti $p_1, q_1 = \phi_2'(y_0)$, gde se p_1 računa iz

$$F[\phi_1(y_1), y_1, \phi_2(y_1), p_1, \phi_2'(y_1)] = 0$$

Treća, četvrta......karakteristika bila bi slično odredjena. Dakle, konstante x_0, z_0, q_0, koje se nalaze u integralima karakteristika zavise od jedne iste veličine y_0. Pomenuti integrali bi uzeli sledeći oblik:

$$y = \varphi[x, \phi_1(y_0), y_0, \phi_2(y_0), \phi_2'(y_0)] \equiv \alpha_1(x, y_0), \quad p = \psi_1[\cdots] \equiv \gamma_1(x, y_0)$$

$$z = \psi[- - - \quad] \equiv \beta_1(x, y_0), \quad q = \psi_2[\cdots] \equiv \delta_1(x, y_0)$$

Da bi y_0 bilo proizvoljan parametar mora da budu, kao i do sada sa istim geometriskim smislom, zadovoljeni sledeći uslovi:

$$a) \ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_0} \lesseqgtr 0 \quad ; \quad b) \ U_{y_0} \equiv \frac{\partial \beta_1}{\partial y_0} - q\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_0} = 0$$

Prvi je očevidno zadovoljen, jer funkcija α_1 za $x = x_0 = \phi_1(y_0)$ postaje identična sa y_0. Drugi uslov je takodje zadovoljen, što može da se pokaže za početnu vrednost, a to je, kao što znamo, i dovoljno. Zbilja, imamo:

$$\left.\frac{\partial \beta_1}{\partial y_0}\right\}_{x = x_0 = \phi_1(y_0)} = \phi_2'(y_0) = q_0 \quad , \quad \left.\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_0}\right\}_{x = x_0 = \phi_1(y_0)} = 1$$

pa je: $U^0_{y_0} \equiv 0$. Kako je utvrdjeno da je y_0 promenljiv parametar, to njegovim menjanjem karakteristike, napred opisane, naslanjajući se na datu krivu, čine traženu integralnu površinu. Da bismo dobili jednačinu traženog mesta karakteristika, treba iz prve kolone jednačina, koje pretstavljaju poslednje integrale karakteristika, eliminisati veličinu y_0. Rezultat te eliminacije bio bi Cauchy-jev integral.

Kao što je poznato,a to nije teško videti i iz prednjega, problem bi bio neodredjen,ako bi se zahtevalo da integralna površina prodje kroz karakteristiku.

§ 7

Na taj način geometriskim putem sam pokazao da se može dobiti integralna površina,koja zavisi od dve proizvoljne konstante, t.j. potpuni integral koji je mesto karakteristika.Možemo uvek učiniti da karakteristične funkcije zadovoljavaju postavljene potrebne i dovoljne uslove.U slučaju kada integrali,koji sadrže opšte konstante integracije C_1, C_2, C_3 ,ne zadovoljavaju uslove /23/,/26/ i /29/,onda mesto njih treba uvesti početne vrednosti y_0 , z_0 , q_0 , odnosno y_0 , b , q_0 parametarskih promenljivih,kako je to pokazano u slučaju potpunog integrala druge,odnosno prve vrste.Kako je uvek zadovoljen uslov

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \gtrless 0$$

to uvek možemo dobiti potpuni integral prve vrste.

Poslednja dva paragrafa pokazuju kako se tumačenje Cauchy-jevog integrala u prednjoj geometriskoj teoriji može povezati sa karakterističnim funkcijama.

Tako geometriska teorija karakteristika dobija sasvim jednostavan oblik kada se u nju uvedu geometriska značenja karakterističnih funkcija.Štaviše,tu teoriju je moguće proširiti i na parcijalne jednačine sa više nezavisno promenljivih i na sisteme takvih jednačina To će biti zadatak sledećih dveju glava.

III. g l a v a

PARCIJALNE JEDNAČINE JEDNE FUNKCIJE SA VIŠE NEZAVISNO PROMENLJIVIH VELIČINA

Prelazeći na ispitivanje u višedimenzionalnom prostoru izvešću najpre diferencijalne jednačine za karakteristike pomoću analogne metode, kojom se Léauté (2) poslužio za slučaj parcijalne jednačine, čija nepoznata funkcija zavisi od dve nezavisno promenljive veličine. To činim iz razloga što će ta metoda - a to ne daju druge, na primer kod Darboux-a (16), F. Klein (25) i kod drugih autora - istaći one osobine karakteristika, koje ću koristiti za dalja izlaganja. Zatim je lako izvesti rezultate Léauté-a, koje sam naveo u početku prethodne glave, a koji važe i za višedimenzionalni prostor.

§ 8. Uopštavanje rezultata Leaute-a u višedimenzionalnom prostoru

Neka je data parcijalna jednačina

$$/1/ \qquad \mathcal{F}(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)=0$$

gde je z nepoznata funkcija nezavisno promenljivih $x_1, \dots, x_n$, i $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ za $i = 1,\dots,n$, a n je ceo pozitivan broj ≥ 2. Integraliti tu jednačinu znači naći u prostoru od $n+1$ dimenzije takvu površinu da koordinate svih njenih tačaka i koeficijenti svih njenih tangentnih ravni je zadovoljavaju.

Povucimo kroz tačku (x_i , z) jednu ravan sa uglovnim koeficijentima ($p_1, \dots, p_n$). Tu tačku i tu ravan smo izabrali tako da kordinate, odnosno uglovni koeficijenti zadovoljavaju jednačinu /1/. Potražimo sada uslove, koji treba da budu zadovoljeni, kada biramo samo one površine koje su od date ravni (p_i) i dodirivane u tački (x_i) z) i zadovoljavaju jednačinu /1/ još i za sve svoje tačke koje su beskrajno bliske pomenutoj tački dodira. Za sve te površine imamo veze:

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i + Z\,dz + \sum_{i=1}^{n} P_i\,dp_i = 0$$

gde su uvedene oznake:

$$X_i \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad Z \equiv \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P_i \equiv \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Te dve jednačine daju

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + p_i Z)\,dx_i + \sum_{i=1}^{n} P_i\,dp_i = 0$$

Pošto uvek imamo

$$/2/ \qquad dp_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}\,dx_k \qquad (i=1,\dots,n)$$

gde je uvedena oznaka

$$s_{ik} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

to se poslednja jednačina može napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_i + p_i Z + \sum_{k=1}^{n} s_{ik} P_k \right) dx_i = 0$$

Ta jednačina, da bi bila zadovoljena za makakvo dx_i $(i=1,\ldots,n)$, mora da sledi sistem od n jednačina

$$/3/ \qquad X_i + p_i Z + \sum_{k=1}^{n} s_{ik} P_k = 0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

a koje pretstavljaju napred tražene uslove. Veličina s_{ik} ima n^2, a pošto je $s_{ik} = s_{ki}$ $(i,k=1,\ldots,n)$, to ih ima različitih svega $\frac{1}{2}n(n+1)$ jednačine /3/ dozvoljavaju nam da veličine s_{ii} $(i=1,\ldots,n)$ izrazimo kao funkcije od $\frac{1}{2}n(n-1)$ ostalih veličina s_{ik} $(i,k=1,\ldots,n.\ i \neq k)$

$$/4/ \qquad s_{ii} = -\frac{1}{P_i}\left(X_i + p_i Z + \sum_{k=1}^{n} s_{ik} P_k \right) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

gde k u zbiru nikad ne može biti jednako i. Prema tome za sve tražene površine su proizvoljne svega $\frac{1}{2}n(n-1)$ veličina s_{ik}. Dakle, imamo beskrajno mnogo površina koje prolaze kroz tačku (x_i, z) i dodirivane su od ravni (p_i). Štaviše, sve ove površine zadovoljavaju jednačinu /1/ ne samo za tačku (x_i, z), već i za sve njoj beskrajno bliske tačke.

Jednačine /4/ se mogu iskoristiti da bi se pokazalo da sve te pomenute površine pod odredjenim uslovima imaju dodir drugog reda. Zbog toga podjimo od obrasca za d^2z napisanog u skraćenom obliku

$$d^2 z = s_{ii}\, dx_i^2 + 2 s_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

koji, kada izbacimo veličine s_{ii} pomoću jednačina /4/, dobija oblik:

$$/5/ \quad d^2 z = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + p_i Z}{P_i} dx_i^2 + s_{12}\left(\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}dx_1 - \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}dx_2\right)^2 + s_{13}\left(\sqrt{\frac{P_3}{P_1}}dx_1 - \sqrt{\frac{P_1}{P_3}}dx_3\right)^2 +$$
$$+ \cdots + s_{1n}\left(\sqrt{\frac{P_n}{P_1}}dx_1 - \sqrt{\frac{P_1}{P_n}}dx_n\right)^2 + s_{23}\left(\sqrt{\frac{P_3}{P_2}}dx_2 - \sqrt{\frac{P_2}{P_3}}dx_3\right)^2 + \cdots + s_{2n}\left(\sqrt{\frac{P_n}{P_2}}dx_2 - \sqrt{\frac{P_2}{P_n}}dx_n\right)^2$$
$$+ \cdots + s_{n-1,n}\left(\sqrt{\frac{P_n}{P_{n-1}}}dx_{n-1} - \sqrt{\frac{P_{n-1}}{P_n}}dx_n\right)^2$$

Ovaj drugi diferencijal zavisi od proizvoljnih veličina s_{ik}, a da bi ga učinili nezavisnim od njih, treba da se postavimo duž pravca koji je odredjen jednačinama

$$\frac{dx_1}{P_1} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\sum_{i=1} p_i P_i}$$

Tada se, zbilja, zagrade u izrazu /5/ poništavaju, d^2z ima za sve površine istu vrednost, t.j. sve pomenute površine imaju dodir drugog reda duž pravca /6/. Odredimo sada promene tangentnih ravni duž gornjeg pravca. Ako u jednačinama /2/ stavimo vrednosti za dx_i iz jednačina /6/, onda dobijamo

$$dp_i = \frac{\sum_{1}^{n} s_{ik} P_k}{\sum_{1}^{n} p_s P_s} \qquad (i=1,\dots,n)$$

Znajući da se pravac /6/ nalazi na površinama, koje zadovoljavaju jednačinu /1/ kako za tačku (x_i, z) tako i za sve tačke njoj beskrajno bliske, onda uzimanjem u obzir jednačine /3/ možemo odmah dobiti:

$$\frac{dz}{\sum p_s P_s} = - \frac{dp_i}{X_i + p_i Z} \qquad (i=1,\dots,n)$$

Ako te jednačine spojimo sa jednačinama /6/ dobijamo poznate diferencijalne jednačine za karakteristike

$$/7/ \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\sum p_s P_s} = - \frac{dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \dots = - \frac{dp_n}{X_n + p_n Z}.$$

Iz jednačina /7/ izilazi da veličine dp_i su iste za sve površine, za koje su iste i veličina x_i, z, p_i. Znači da sve površine, koje imaju dodir drugog reda duž pravca /6/, imaju takodje istu tangentnu ravan duž tog pravca. Iz prethodnog izlaganja možemo da izvučemo rezultate koji su potpuno isti kao i u trodimenzionalnom prostoru:

a) *Ako je data jedna tačka prostora i tangentna ravan, koja sa svojim uglovnim koeficijentima zadovoljava jednačinu /1/, onda je odredjena jedna kriva, karakteristika dodirivana u toj tački od tangentne ravni; ta karakteristika je tada odredjena sa svim svojim tačkama i sa svim svojim tangentnim ravnima.*

b) *Integralne površine koje prolaze kroz datu tačku prostora i dodirivane su u njoj od izabrane ravni, imaju zajedničku celu karakteristiku, odredjenu tom tačkom i ravni, i celu zonu - susednu ovoj krivoj - razvojne površine načinjene od svih tangentnih ravni na ovoj karakteristici.*

Sad ćemo izvesti poznatu Cauchy-jevu formulu iz teorije karakteristika i videti njenu primenu pri konstrukciji integralne površine.

Uočimo dve beskrajno bliske karakteristike (k_1) i (k_2) i na svakoj po jednu tačku A i B koje su beskrajno bliske jedna drugoj. Koordinate tačke A na prvoj karakteristici su (x_i, z) a p_i vrednosti koje odgovaraju toj tački, a $x_i + \delta x_i, z + \delta z, p_i + \delta p_i$ su vrednosti ovih veličina, koje odgovaraju tački B druge karakteristike. Ako hoćemo da izračunamo otstojanje tačke B od tangentne ravni podignute u tački A, onda to otstojanje možemo da smenimo sa jednom veličinom istog reda, naime sa razlikom kota tačke B i one tačke na tangent noj ravni koja ima istu projekciju kao i tačka B na ravni $z=0$. Tu razliku kota izražavamo

$$/8/ \qquad J = \delta z - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i$$

Kako veličine x_i , p_i , z zadovoljavaju jednačinu /1/ za svaku od ovih dveju karakteristika to imamo

$$/9/ \qquad \sum_{K=1}^{n} \left(X_K \delta x_K + P_K \delta p_K \right) + Z\, dz = 0$$

Ako predjemo sa tačke A $(x_i, z), p_i$ prve karakteristike na beskrajno blisku tačku $(x_i+dx_i, z+dz)$ iste karakteristike, imaćemo priraštaj za veličinu J

$$/10/ \qquad dJ = d\delta z - \sum_{K=1}^{n} \left(dp_K \delta x_K + p_K d\delta x_K \right)$$

Izračunajmo veličine $d\delta x_K$, $d\delta z$ za $k = 1,\dots,n$. Kako jednačine

$$dx_i = P_i\, d\alpha \,, \quad dz = \sum_{K=1}^{n} p_K P_K\, d\alpha \,, \quad dp_i = -\left(X_i + p_i Z \right) d\alpha \quad (i=1,\dots,n)$$

gde smo sa $d\alpha$ označili vrednost razmera /7/, odgovaraju svima karakteristikama, to će odgovarati i beskrajno bliskoj. Znači imaćemo

$$d\delta x_i = \delta P_i\, d\alpha + P_i\, d\delta\alpha \,, \quad d\delta z = \delta\left(\sum_{K=1}^{n} p_K P_K \right) d\alpha + \sum_{K=1}^{n} p_K P_K\, d\delta\alpha$$

pa jednačina /10/ dobija oblik

$$dJ = d\alpha \sum_{K=1}^{n} \left(P_K \delta p_K - \frac{dp_K}{d\alpha} \delta x_K \right)$$

Kada izraze $\frac{dp_K}{d\alpha}$ smenimo vrednostima iz prve karakteristike dobijamo

$$dJ = d\alpha \sum_{K=1}^{n} \left[P_K \delta p_K + \left(X_K + p_K Z \right) \delta x_K \right]$$

ili s obzirom na /9/ i /8/ dobijamo diferencijalnu jednačinu, koja definiše veličinu J

$$dJ = -J Z\, d\alpha$$

Integral ove jednačine daje poznatu Cauchy-jevu formulu

$$/11/ \qquad J = J_0 e^{-\int \frac{Z}{P} dx_1}$$

gde J_0 znači inicijalnu vrednost za veličinu J . 1

c)Ova formula kaže: kada je za jedan položaj tačaka A B veličina J jednaka nuli, onda će to biti slučaj i kada se tačka A bude kretala duž prve karakteristike. Ili, s obzirom na ranije, na prvoj zoni integralne površine, koja je odredjena prvom karakteristikom, ležaće druga karakteristika ako je to slučaj za jednu makoju tačku ove poslednje. Druga karakteristika odredjuje drugu zonu integralne površine. Tako bi zona po zona odredila integralnu površinu.

Formulu /11/ možemo i ovako protumačiti: ako poprečni elemenat što spaja dve tačke A i B leži u razvojnoj površini prve karakteristike za jedan položaj para tih tačaka, onda će on ležati stalno na toj razvojnoj površini i kad se bude okretala tačka A duž prve karakteristike.

Moj je cilj da Cauchy-jevu formulu izrazim pomoću integrala diferencijalnih jednačina za karakteristike /7/ i da odredim uslove za te integrale, koje oni treba da zadovoljavaju da bih mogao formirati potpuni integral parcijalne jednačine. Tom prilikom doći ću do poznatih karakterističnih funkcija (11), kao i do tri vrste potpunih integrala i do mogućnosti da se jednostavno objasni teorija Cauchy-jevog integrala.

§ 9. Potpuni integral prve vrste

Neka data parcijalna jednačina /1/ zadovoljava uslov

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \lessgtr 0$$

Poznato je da desna strana jednačine /1/ izjednačena jednoj proizvoljnoj konstanti pretstavlja jedan integral sistema /7/ ja ću u računu nju da izjednačim sa nulom i poći ću od integrala sistema /7/ napisanog u obliku

$$/12/ \qquad \begin{aligned} x_{2+1} &= \overline{\theta}_2 (x_1, C_1, \ldots, C_{2n-1}) \qquad (2 = 1, \ldots, n-1) \\ z &= \overline{\phi} (\text{- - - - - -}) \\ p_s &= \overline{\phi}_s (\text{- - - - - -}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

koji će da zavisi od 2n-1 proizvoljnih konstanata C_i.

Za prethodna rasmatranja mesto tih konstanata uvešću početne vrednosti x_i^0, z^0, p_i^0 $(i = 2, \ldots, n)$ parametarskih promenljivih x_i, z, p_i $(i = 2, \ldots, n)$, koje odgovaraju odredjenoj početnoj vrednosti x_1^0 glavne promenljive x_1. Veličina p_1^0 izražava se pomoću jednačine /1/ kao funkcija prethodnih početnih vrednosti. Napominjem da su nove konstante potpuno proizvoljne i da pripadaju oblasti integrabiliteta date parcijalne jednačine. Integral /12/ piše se zato u obliku

$$/13/ \qquad \begin{aligned} x_{2+1} &= \theta_2 (x_1, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) \qquad (2 = 1, \ldots, n-1) \\ z &= \phi (\text{- - - - - - - -}) \\ p_s &= \phi_s (\text{- - - - - - - -}) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Sada ću pokazati kako se konstruiše potpuni integral prve vrste kao mesto karakteristika. Neka je tačkom M_0 (x_i^0, z^0) i ravni (p_i^0)

odredjena prva karakteristika. U toj ravni

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - x_i^{\circ}\right)p_i^{\circ} = Z - z^{\circ}$$

gde su X_i i Z tekuće koordinate, uočimo tačku M_1 sa koordinatama $x_1^1 = x_1^{\circ}$, x_{i+1}^1 $(i = 1,\dots,n-1)$, z^1 i koja je beskrajno bliska tački M_0. U takvom slučaju postoji izmedju koordinata ovih dveju tačaka sledeća veza

$$z^{\circ} - \sum_{z=1}^{n-1} x_{z+1}^{\circ} p_{z+1}^{\circ} = z^1 - \sum_{z=1}^{n-1} x_{z+1}^{1} p_{z+1}^{\circ}$$

Tom prvom karakteristikom odredjena je, u njenom susedstvu na razvojnoj površini, jedna zona integralne površine koju tražimo. Da bismo odredili novu zonu integralne površine, potrebno je na razvojnoj površini prve karakteristike konstruisati drugu karakteristiku beskrajno blisku prvoj. Tu drugu karakteristiku odrediću tačkom M_1 i tangentnom ravni $(p_1^1, p_{i+1}^1 = p_{i+1}^{\circ})$, $i = 1,\dots,n-1$, gde p_1^1 računamo iz veze

$$F\left(x_1^{\circ}, x_2^1, \dots, x_n^1, z^1, p_2^{\circ}, \dots, p_n^{\circ}\right) = 0$$

Tom drugom karakteristikom je odredjena druga zona integralne površine. Na tangentnoj ravni druge karakteristike

$$\left(X_1 - x_1^{\circ}\right)p_1^1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - x_{i+1}^1\right)p_{i+1}^{\circ} = Z - z^1$$

uočimo tačku M_2 sa koordinatama $(x_1^{(2)} = x_1^{\circ}, x_{i+1}^{(2)}, z^{(2)})$, $(i = 1,\dots,n-1)$ koja je beskrajno bliska tački M_1. Zbog toga postoji nova veza

$$z^1 - \sum_{z=1}^{n-1} x_{z+1}^1 p_{z+1}^{\circ} = z^{(2)} - \sum_{z=1}^{n-1} x_{z+1}^{(2)} p_{z+1}^{\circ}$$

Tačkom M_2 i ravni $(p_1^{(2)}, p_{i+1}^{(2)} = p_{i+1}^{\circ})$, $i = 1,\dots,n-1$, gde se $p_1^{(2)}$ računa iz

$$F\left(x_1^{\circ}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, z^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{\circ}, \dots, p_n^{\circ}\right) = 0$$

odredjena je treća karakteristika, beskrajno bliska drugoj i sa njome odredjena treća zona tražene integralne površine. Tako bi nastavljajući konstrukciju zonom i zonom dobili traženu integralnu površinu. Iz samog načina konstrukcije vidi se da mesto veličine z° treba uvesti novu veličinu b definisano vezom

$$/14/ \qquad b = z^{\circ} - \sum_{z=1}^{n-1} x_{z+1}^{\circ} p_{z+1}^{\circ}$$

i da se prilikom konstrukcije menjaju veličine x_{i+1}° $(i = 1,\dots,n-1)$, a ne menjaju veličine x_1°, p_{i+1}° $(i = 1,\dots,n-1)$, b.

Da bi gore opisana konstrukcija integralne površine bila ispravna dokazaću da svaka naredna karakteristika leži u razvojnoj površini opisanoj od tangentnih ravni duž prethodne beskrajno bliske karakteristike.

Poći ću od formule /8/ sa čijim geometriskim smislom smo se upoznali u prethodnom paragrafu i njenu desnu stranu izrazićú pomoću integrala /13/. Kako je

$$/15/ \qquad \delta x_{z+1} = \frac{\partial \theta_z}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_z}{\partial x^o_{K+1}} \delta x^o_{K+1}$$

$$\delta z = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x^o_{K+1}} \delta x^o_{K+1}$$

gde simbol δ označava priraštaje odgovarajućih veličina kada se prelazi s jedne tačke jedne karakteristike na drugu beskrajno blisku tačku druge beskrajno bliske karakteristike, to formulu /8/ mogu napisati

$$J = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \phi_1 - \sum_{z=1}^{n-1} \phi_{z+1}\frac{\partial \theta_z}{\partial x_1}\right)\delta x_1 + \sum_{K=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^o_{K+1}} - \sum \phi_{z+1}\frac{\partial \theta_z}{\partial x^o_{K+1}}\right)\delta x^o_{K+1}$$

Medjutim, kako integrali /13/ identički zadovoljavaju jednačine /7/, postoji identičnost

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \phi_1 - \sum_{z=1}^{n-1} \phi_{z+1}\frac{\partial \theta_z}{\partial x_1} \equiv 0$$

Uvodeći još oznake

$$/16/ \qquad U_{x^o_{K+1}} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^o_{K+1}} - \sum_{z=1}^{n-1} \phi_{z+1}\frac{\partial \theta_z}{\partial x^o_{K+1}} \qquad (K=1,\dots,n-1)$$

prednja formula dobija oblik

$$/17/ \qquad J = \sum_{K=1}^{n-1} U_{x^o_{K+1}} \delta x^o_{K+1}$$

Karakteristične funkcije /16/ mogu se, kako je to pokazao Saltikov (11 izraziti pomoću svojih inicijalnih vrednosti $U^o_{x^o_{K+1}}$, t.j.

$$/18/ \qquad U_{x^o_{K+1}} = U^o_{x^o_{K+1}} e^{-\int_{x^o_1}^{x_1} \frac{Z}{P} dx_1} \qquad (K=1,\dots,n-1)$$

gde integral u eksponentu ima konačnu i odredjenu vrednost u oblasti promenljivih koju posmatramo. Jednačine /18/ pokazuju da se karakteristične funkcije poništavaju ili su različite od nule zajedno sa svoji početnim vrednostima.

Lako je izračunati početne vrednosti $U^o_{x^o_{K+1}}$ za karakteristike koje sam napred definisao. Ako u integrale /13/ uvedem smenu definisanu sa /14/, vidi se da se tražene vrednosti identički poništavaju

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^o_{K+1}} - \sum_{z=1}^{n-1} \phi_{z+1}\frac{\partial \theta_z}{\partial x^o_{K+1}}\Bigg|_{x_1=x_1^o} = p^o_{K+1} - p^o_{K+1} \equiv 0 \qquad (K=1,\dots,n-1)$$

pa zbog /18/ postoje uslovi

$$/19/ \qquad U_{x^o_{K+1}} \equiv 0 \qquad (K=1,\dots,n-1)$$

Prema /17/ vidi se da će i veličina J biti stalno jednaka nuli. Obrnuto, da bi J bilo stalno jednako nuli pri proizvoljnim vrednostima priraštaja δx^o_{K+1} treba da budu ispunjeni uslovi /19/. Prema tome konstruisana površina je integralna, jer su ispunjeni potrebni i dovoljni uslovi /19/.

Nije teško pokazati da je ta površina potpuni integral jednačine /1/.Kako je uvek ispunjen uslov

$$/20/ \quad D\left(\frac{\theta_1,\dots,\theta_{n-1}}{x_2^0,\dots,x_n^0}\right) \lessgtr 0$$

jer leve strane prvih (n-1)jednačina /13/ za $x_1 = x_1^0$ svodi se na početne vrednosti parametarskih promenljivih x_{i+1} $(i = 1,\dots,n-1)$, to je moguće iz prvih n jednačina /13/ te početne vrednosti eliminisati. Rezultat eliminacije daje traženu integralnu površinu $z = \varphi(x_1,\dots,x_n, b, p_2^0,\dots, p_n^0, x_1^0)$ (21)

Poći ću od očevidne identičnosti

$$\phi(x_1, x_2^0,\dots, x_n^0, b, p_2^0,\dots, p_n^0) \equiv \varphi(x_1, \theta_1,\dots,\theta_{n-1}, b, p_2^0,\dots, p_n^0, x_1^0)$$

i uzeću njene izvode po konstantama b, p_{k+1}^0, $(k = 1,\dots,n-1)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial b} - \sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{r+1}}\right)\frac{\partial\theta_r}{\partial b} \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial p_{k+1}^0} - \sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{r+1}}\right)\frac{\partial\theta_r}{\partial p_{k+1}^0} \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_{k+1}^0}\right) \qquad (k = 1,\dots,n-1)$$

gde zagrade znače da je u funkciji φ mesto x_{k+1} stavljeno θ_k $(k = 1,\dots,n-1)$. Ako rezultat eliminacije konstanata x_{k+1}^0 iz desnih strana poslednjih n jednačina /13/ označim sa φ_s, onda, pošto postoje uslovi /19/, odnosno pošto je površina /21/ integralna, biće

$$\varphi_s = \frac{\partial\varphi}{\partial x_s} \qquad (s = 1,\dots,n)$$

koji, ako u njima x_{r+1} smenimo sa θ_r $(r = 1,\dots,n-1)$ postaju

$$\phi_s = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\right) \qquad (s = 1,\dots,n-1)$$

Zato poslednje identičnosti imaju oblik

$$/22/ \quad U_b \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right), \quad U_{p_{k+1}^0} \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_{k+1}^0}\right) \qquad (k = 1,\dots,n-1)$$

Saltikov (11) je pokazao da i za funkcije U_b, $U_{p_{k+1}^0}$ postoje analogne veze kao što su /18/ za funkcije $U_{x_{k+1}^0}$. Zato ću izračunati početne vrednosti za funkcije

$$U_b^0 \equiv 1, \quad U_{p_{k+1}^0}^0 \equiv x_{k+1}^0 \qquad (k = 1,\dots,n-1)$$

Na osnovu prednjih rezultata, veza analognih /18/ i identičnosti /22/ zaključuje se, prvo, da je

$$/23/ \quad U_b \lessgtr 0, \quad U_{p_{k+1}^0} \lessgtr 0$$

i drugo, da integralna površina /21/ potpuni integral, t.j. da prilikom eliminacije veličina x_{k+1}^0 $(k = 1,\dots,n-1)$ iz prvih n jednačina /13/, nisu otpale veličine b, p_{k+1}^0 $(k = 1,\dots,n-1)$, koje u /21/ igraju ulogu n proizvoljnih konstanata. Napominjem da veličina x_1^0 ima tačno određenu vrednost. Sada mogu da iskažem teoremu:

Ako u integrale /13/ uvedemo na mesto z^0 veličinu b, definisanu jednačinom /14/, onda je: 1) ispunjeni su potrebni i dovoljni uslovi /19/, /20/ i /23/ za integrale karakteristika /13/ i 2) eliminacije veličine x^{o}_{K+1} $(k = 1,..,n-1)$ iz prvih n jednačina /13/ daje potpuni integral /21/ kao geometrisko mesto karakteristika.

Uslove /19/ mogu izvesti i na sledeći način. Uočimo dve beskrajno bliske karakteristike i na njima dve beskrajno bliske tačke. A i B. Ako sa $(\delta x_i, z)$ označim projekcije poprečnog elementa, koji spaja ove dve tačke, i uopšte sa δ označim priraštaje veličina koje se odnose na taj elemenat, onda zahtevom

$$\delta z = \sum_{K=1}^{n} p_K \delta x_K$$

t.j. da taj elemenat stalno leži u razvojnoj površini prve karakteristike, jednačine /15/ dobijaju ovaj oblik

$$-\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \delta x_{2+1} - \sum_{K=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_2}{\partial x^{o}_{K+1}}\delta x^{o}_{K+1} = 0 \qquad (2 = 1,..,n-1)$$

/24/
$$-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \phi_1\right)\delta x_1 + \sum_{i=2}^{n}\phi_i\,\delta x_i - \sum_{K=1}^{n-1}\frac{\partial\phi}{\partial x^{o}_{K+1}}\delta x^{o}_{K+1} = 0$$

Ovaj sistem od n jednačina ima n-1 nepoznatih priraštaja δx_{2+1} $(r = 1,..,n-1)$ i da bi on bio saglasan mora sledeća determinanta da bude jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum_{K=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_1}{\partial x^{o}_{K+1}}\delta x^{o}_{K+1} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum_{K=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_2}{\partial x^{o}_{K+1}}\delta x^{o}_{K+1} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial\theta_3}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum_{K=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_3}{\partial x^{o}_{K+1}}\delta x^{o}_{K+1} \\
- & - & - & - & - & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum_{K=1}^{n-1}\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x^{o}_{K+1}}\delta x^{o}_{K+1} \\
\phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 & \dots & \phi_{n-1} & \phi_n & -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \phi_1\right)\delta x_1 - \sum_{K=1}^{n-1}\frac{\partial\phi}{\partial x^{o}_{K+1}}\delta x^{o}_{K+1}
\end{vmatrix} = 0$$

Tu determinantu ću da transformišem na sledeći način. Naime, prvih (n-1) vrsta, prethodno pomnožene svaka respektivno sa ϕ_i $(i = 2,..,n)$, sabraću i taj zbir ću oduzeti od poslednje vrste. Tako dobijam sledeću determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x^0_{k+1}}\delta x^0_{k+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x^0_{k+1}}\delta x^0_{k+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\dfrac{\partial\theta_3}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\partial\theta_3}{\partial x^0_{k+1}}\delta x^0_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\dfrac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_1}\delta x_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x^0_{k+1}}\delta x^0_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -K\delta x_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} U_{x^0_{k+1}}\delta x^0_{k+1} \end{vmatrix} = 0$$

gde sam uveo oznaku:

$$K \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \Phi_1 - \sum_{r=1}^{n-1}\Phi_{r+1}\frac{\partial\theta_r}{\partial x_1}$$

Razvijanjem po poslednjoj vrsti gornja determinanta daće očevidno uslov

$$K\,\delta x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} U_{x^0_{k+1}}\,\delta x^0_{k+1} = 0$$

Pošto su δx_1 i δx^0_{k+1} proizvoljne vrednosti determinanta može da bude jednaka nuli, ako postoje identičnosti

$$K \equiv 0 \qquad U_{x^0_{k+1}} \equiv 0 \qquad (k = 1, \dots, n-1)$$

Očevidno je da i obrnuto važi. Saglasnost sistema /24/, utvrdjena prednjim uslovima, pokazuje da poprečni elemenat AB stalno leži u razvojnoj površini prve karakteristike, t.j. da druga karakteristika leži u toj razvojnoj površini ili da je naša površina dobivena kao mesto karakteristika integralna.

§ 10. Potpuni integral druge vrste

Pretpostavimo da je sistem običnih diferencijalnih jednačina /7/ takav da se može kroz tačku M (x^0_i, z) povući bezbroj karakteristika. Svaka od tih karakteristika odredjena je istom tačkom M i različitim tangentnim ravnima $(p^{(i)}_1, p^{(i)}_2, \dots, p^{(i)}_n)$ za i = 1,2,3,.... Ja ću dokazati da ovako definisane karakteristike mogu da proizvedu potpuni integral jednačine /1/, koji ću zvati potpuni integral druge vrste. Kod ovih karakteristika veličine p^0_{i+1}, i = 1,..,n-1 (veličina p^0_1 se odredjuje pomoću odgovarajućih ostalih veličina iz jednačine /1/) igraju ulogu promenljivih parametara, veličine x^0_{i+1}, i = 1,..,n-1, z^0 su stalne za sve karakteristike. Sada ću, imajući ovo u vidu, veličinu J, koja ima isti smisao kao ranije, da izrazim pomoću integrala karakteristika:

$$J=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\Phi_1-\sum_{r=1}^{n-1}\Phi_{r+1}\frac{\partial\theta_r}{\partial x_1}\right)\delta x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p^0_{k+1}}-\sum_{r=1}^{n-1}\Phi_{r+1}\frac{\partial\theta_r}{\partial p^0_{k+1}}\right)\delta p^0_{k+1}$$

što pak, ako uvedemo oznake

$$(25)\qquad U_{p^0_{k+1}}\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial p^0_{k+1}}-\sum_{r=1}^{n-1}\Phi_{r+1}\frac{\partial\theta_r}{\partial p^0_{k+1}}\qquad(k=1,\dots,n-1)$$

i uzmemo u obzir da integrali /13/ identički zadovoljavaju sistem /7/, daje

$$(26)\qquad J=\sum_{k=1}^{n-1}U_{p^0_{k+1}}\,\delta p^0_{k+1}$$

Slično, kao /18/, postoje veze

$$(27)\qquad U_{p^0_{k+1}}=U^0_{p^0_{k+1}}\,e^{-\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{z}{p}dx_1}$$

gde $U^0_{p^0_{k+1}}$ znači inicijalne vrednosti karakterističnih funkcija /25/. Te inicijalne vrednosti, kao što je lako videti, identički se poništavaju za naše karakteristike, t.j.

$$U^0_{p^0_{k+1}}\equiv 0\qquad(k=1,\dots,n-1)$$

pa zbog /27/ imamo uslove

$$(28)\qquad U_{p^0_{k+1}}\equiv 0\qquad(k=1,\dots,n-1)$$

To znači da je, prema /26/, veličina J stalno jednaka nuli. Obrnuto, pošto su veličine $\delta p^0_{k+1}(k=1,\dots,n-1)$ proizvoljne, da bi veličina J bila stalno jednaka nuli treba da budu zadovoljeni uslovi /28/. Dakle, ispunjeni su potrebni i dovoljni uslovi da bi površina dobivena kao mesto karakteristika bila integralna. No važno je primetiti da tu površinu možemo dobiti samo ako je ispunjen uslov

$$(29)\qquad D\left(\frac{\theta_1,\dots,\theta_{n-1}}{p^0_2,\dots\dots,p^0_n}\right)\lessgtr 0$$

t.j. samo tada se može izvršiti eliminacija veličina p^0_{k+1} iz prvih n jednačina /13/. Pretpostavimo da je uslov /29/ ispunjen tada rezultat pomenute eliminacije dovodi do integralne površine

$$(30)\qquad z=\varphi(x_1,\dots,x_n,x_1^0\dots,x_n^0,z^0)$$

Analogno, kao u prethodnom paragrafu uslovi

$$U^0_{z^0}\equiv 1\lessgtr 0\;,\qquad U^0_{x^0_{k+1}}\equiv -p^0_{k+1}\lessgtr 0\quad(k=1,\dots,n-1)$$

ili još više

$$(31)\qquad U_{z^0}\lessgtr 0\qquad U_{x^0_{k+1}}\lessgtr 0\quad(k=1,\dots,n-1)$$

znače da površina /30/ jeste potpuni integral. Na osnovu ovednjeg može se iskazati sledeća teorema:

Da bismo dobili potpuni integral druge vrste, t.j. integralnu površinu koja je geometrisko mesto svih karakteristika koje prolaze kroz jednu tačku $M_0(x_i^0, z)$, potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi /28/, /31/ i /29/. Eliminacija promenljivih parametara p_{k+1}^0 $(k = 1, \ldots, n-1)$ iz n prvih jednačina /13/ daje traženu integralnu površinu /30/, u kojoj x_1^0 znači tačno odredjenu vrednost, a x_{k+1}^0 $(k = 1, \ldots, n-1)$ i z^0 su proizvoljne konstante potpunog integrala.

Ako iz tih jednačina nije moguće eliminisati pomenute konstante, zato što nije ispunjen uslov /29/, onda te jednačine ne možemo smatrati kao integral jednačine /1/, pa ni kao Sophus Lie-ov integral, jer poslednje vrste integrala dopuštaju samo parcijalne jednačine partikularnog oblika (10).

Do uslova /28/ možemo doći i na drugi način, analogno kao i u prethodnom paragrafu polazeći od sistema jednačina

$$-\frac{\partial \Theta_r}{\partial x_1}\delta x_1 + \delta x_{r+1} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial \Theta_r}{\partial p_{k+1}^0}\delta p_{k+1}^0 = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \Phi_0\right)\delta x_1 + \sum_{i=2}^{n}\Phi_i\,\delta x_i - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k+1}^0}\delta p_{k+1}^0 = 0$$

i tražeći njegovu saglasnost za nepoznate priraštaje δx_{r+1} $(r = 1, \ldots, n-1)$

§ 11. Potpuni integral treće vrste

Sad ću karakteristike da definišem na sledeći način. Neka je tačkom M_0 (x_i^0, z) i ravni (p_i^0) odredjena prva karakteristika. Uočimo tačku M_1 sa koordinatama $(x_i^1 = x_i^0, \ldots, x_m^1 = x_m^0, x_{m+1}^1, \ldots, x_n^1, z^1)$, koja je beskrajno bliska sa tačkom M_0 i leži u tangentnoj ravni

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - x_i^0)\,p_i^0 = Z - z^0$$

gde su X_i i Z tekuće koordinate ravni. Zbog toga postoji sledeća veza

$$Z^0 - \sum_{r=1}^{n-m} x_{m+r}^0\, p_{m+r}^0 = Z^1 - \sum_{r=1}^{n-m} x_{m+r}^1\, p_{m+r}^0$$

Prvom karakteristikom bi bila odredjena jedna zona integralne površine. Drugu karakteristiku odredimo tačkom M_1 i ravni $(p_1^1, \ldots, p_m^1, p_{m+1}^1 = p_{m+1}^0, \ldots, p_n^1 = p_n^0)$ i njom je odredjena druga zona integralne površine. Uočimo sada tačku M_2 sa koordinatama $(x_i^{(2)} = x_i^0, \ldots, x_m^{(2)} = x_m^0, x_{m+1}^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, z^{(2)})$, koja je beskrajno bliska tački M_1 i koja leži u tangentnoj ravni

$$\sum_{i=1}^{m}(X_i - x_i^0)\,p_i^1 + \sum_{j=1}^{n-m}(X_{m+j} - x_{m+j}^1)\,p_{m+j}^0 = Z - z^1$$

pa zato postoji veza:

$$Z^{1} - \sum_{r=1}^{n-m} x^{1}_{m+r}\, p^{0}_{m+r} = Z^{(2)} - \sum_{r=1}^{n-m} x^{(2)}_{m+r}\, p^{0}_{m+r}$$

Treću karakteristiku odredili bismo tačkom M_2 i ravni $(p_1^{(2)},\dots,p_m^{(2)},p_{m+1}^{(2)},p_{m+2}^{0},\dots,p_n^{(2)}\ p_n^{0})$ i njom bismo dobili treću zonu integralne površine. I tako dalje bi zonom i zonom odredili integralnu površinu kao mesto karakteristika-potpuni integral treće vrste. Iz samog izlaganja vidi se, prvo, da na mesto konstante z^0 možemo uzeti novu konstantu b

$$(32) \qquad b = z^{0} - \sum_{r=1}^{n-m} x^{0}_{m+r}\, p^{0}_{m+r}$$

i drugo, da se ne menjaju veličine $x_1^0,\dots,x_m^0,p_{m+1}^0,\dots,p_n^0,b$, a menjaju se i igraju ulogu promenljivih parametara ove veličine $x_{m+1}^0,\dots,x_n^0,p_2^0,\dots,p_m^0$.

Broj m je ceo i nalazi se u razmaku $1 \le m \le n$. Kada je $m = 1$ imamo slučaj potpunog integrala prve vrste i kada je $m = n$ imamo slučaj potpunog integrala druge vrste.

Ostaje mi da pokažem da je gore konstruisana površina potpuni integral. Za ovaj slučaj veličina J, koja ima isti geometriski smisao kao i ranije, izražava se ovako

$$(33) \qquad J = \sum_{j=1}^{n-m} U_{x^0_{m+j}}\, \delta x^0_{m+j} + \sum_{i=1}^{m-1} U_{p^0_{i+1}}\, \delta p^0_{i+1}$$

ili

$$J = \sum_{j=1}^{n-m} U^0_{x^0_{m+j}}\, e^{-\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{Z}{P_1}dx_1}\, \delta x^0_{m+j} + \sum_{i=1}^{m-1} U^0_{p^0_{i+1}}\, e^{-\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{Z}{P_1}dx_1} \cdot \delta p^0_{i+1}$$

gde su uvedene oznake

$$(34) \qquad \begin{aligned} U_{x^0_{m+j}} &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^0_{m+j}} - \sum_{r=1}^{n-1} \phi_{r+1} \frac{\partial \theta_r}{\partial x^0_{m+j}} \quad (j=1,\dots,n-m) \\ U_{p^0_{i+1}} &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial p^0_{i+1}} - \sum_{r=1}^{n-1} \phi_{r+1} \frac{\partial \theta_r}{\partial p^0_{i+1}} \quad (i=1,\dots,m-1) \end{aligned}$$

i gde $U^0_{x^0_{m+j}}$ i $U^0_{p^0_{i+1}}$ znače inicijalne vrednosti karakterističnih funkcija /34/. Te inicijalne vrednosti za ovaj slučaj, a to je lako videti, identički se poništavaju, pa zato imamo uslove

$$(35) \qquad U_{x^0_{m+j}} \equiv 0 \quad (j=1,\dots,n-m) \qquad U_{p^0_{i+1}} \equiv 0 \quad (i=1,\dots,m-1)$$

Uslovi /35/ su potrebni i dovoljni da bi veličina J /33/ bila stalno jednaka nuli, t.j. da mesto naših karakteristika čini integralnu površinu jednačine /1/.

Ako postoji uslov

$$(36) \qquad \mathcal{D}\left(\frac{\theta_1,\dots\dots,\theta_{n-1}}{x^0_{m+1},\dots x^0_n, p^0_2 \dots, p^0_m}\right) \lessgtr 0$$

onda je moguće iz n prvih jednačina /13/,pošto se izvrši smena /32/ izvršiti eliminaciju veličina $x^o_{m+1},\dots,x^o_n$, $p^o_2,\dots,p^o_m$. Rezultat eliminacije je integralna površina

$$(37)\qquad z = f(x_1,\dots,x_n,x^o_1\dots,x^o_m,b,p^o_{m+1},\dots p^o_n)$$

Ta površina je potpuni integral jednačine /1/,jer postoje uslovi

$$(38)\qquad U_{x^o_{j+1}} \lesseqgtr 0 \ (j+1,\dots m-1) \qquad U_b \lesseqgtr 0 \qquad U_{p^o_{m+s}} \lesseqgtr 0 \ (s=1,2,\dots,n-m)$$

koji važe zbog:

$$U^o_{x^o_{j+1}} \equiv -p^o_{j+1} \qquad U^o_b \equiv 1 \qquad U^o_{p^o_{m+s}} \equiv -x^o_{m+s} \quad (s=1,2,\dots,n-m)$$

Zato se može iskazati sledeća teorema:

Da bi se iz integrala /13/,u kojima je na mesto z stavljena veličina b, odredjena jednačinom /32/,mogao dobiti potpuni integral treće vrste potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi /35/,/36/i /38/. Tada se eliminacijom veličina $x^o_{m+j}(j=1,\dots,n-m)$ i $p^o_{i+1}(i=1,\dots,m-1)$,gde je $1\le m\le n$,iz n prvih jednačina /13/ dobija tražena površina /37/ kao mesto karakteristika.

Do uslova /35/ možemo doći,analogno kao ranije,tražeći saglasnost sistema od n jednačina

$$-\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \delta x_{i+1} - \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_i}{\partial x^o_{m+k}}\delta x^o_{m+k} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial\theta_i}{\partial p^o_{k+1}}\delta p^o_{k+1} = 0 \quad (i=1,\dots,n-1)$$

$$-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-\phi_1\right)\delta x_1 + \sum_{j=1}^{n-1}\phi_{j+1}\delta x_{j+1} - \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial\phi}{\partial x^o_{m+k}}\delta x^o_{m+k} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial\phi}{\partial p^o_{k+1}}\delta p^o_{k+1} = 0$$

u kojem posmatramo kao nepoznate veličine priraštaje $\delta x_{r+1}(r=1,\dots,n-1)$

§ 12.Potpuni integral sa opštim konstantama integracije

Poći ću sada od opšteg integrala sistema /7/ napisanog u obliku /12/,t.j. od integrala u kojemopšte konstante integracije C_i $(i=1,\dots,2n-1)$ nisu zamenjene inicijalnim vrednostima veličina što figurišu u jednačini /1/.Sada je potrebno u ovakvom slučaju definisati karakteristike i odrediti uslove,koje integrali /7/ treba da zadovoljavaju, da bi se pomoću njih mogao da formira potpuni integral jednačine /1/.

Pretpostaviću da su prvih (n-1)jednačina /12/ rešljive odnosno n-1 bilo kojih konstanata C_i $(i=1,\dots,2n-1)$.Radi preglednijeg izvodjenja njihovu numeraciju udesiću tako,da mogu pretpostaviti da su one rešljive odnosno konstanata $C_{n+1},\dots,C_{2n-1}$,t.j. da je ispunjen uslov

$$(39) \qquad \frac{\mathcal{D}(\bar{\theta}_1, \dots \bar{\theta}_{n-1})}{\mathcal{D}(C_{n+1}, \dots C_{2n-1})} \lessgtr 0$$

Kako integrali /12/ identički zadovoljavaju datu parcijalnu jednačinu to ću postaviti sebi u zadatak da kretanjem krive, definisane prvim n jednačinama /12/, proizvedem integralnu površinu jednačine /1/. U tu svrhu učiniću još pretpostavku da se kretanjem krive menjaju konstante $C_{n+1}, \dots, C_{2n-1}$, a da se ostale ne menjaju. Beskrajno bliska okolina te krive - razvojne površine, načinjena je od ravni podignutih u svakoj njenoj tački i čiji uglovni koeficijenti su odredjeni poslednjim n jednačinama /12/, takodje zadovoljava ~~tu~~ polaznu parcijalnu jednačinu. Pitanje je sada pod kojim uslovima može da se pomakne ta kriva da bi ona cela ležala u toj razvojnoj površini i bila beskrajno bliska svome prvobitnom položaju. Označiću krivu u prvobitnom položaju sa (k_1), a krivu u novom položaju sa (k_2) i na svakoj od njih po jednu tačku A, odnosno B. Ove tačke neka budu beskrajno bliske jedna drugoj i imaju koordinate (x_i, z), odnosno $(x_i + \delta x_i, z + \delta z)$. Ako hoćemo da izračunamo otstojanje tačke B od ravni $(\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n)$ postavljenoj u tački A, onda slično, kao ranije, to otstojanje možemo da smenimo veličinom J, koja je istog reda s njim, i pretstavlja razliku kota tačke B i one tačke na ravni (ϕ_i) koja ima istu projekciju kao i tačka B na ravni $z = 0$. Ta veličina se izražava u ovom slučaju

$$J = \delta z - \sum_{i=1}^{n} \bar{\phi}_i \, \delta x_i$$

Zbog napred učinjenih pretpostavki imamo:

$$\delta x_{r+1} = \frac{\partial \bar{\theta}_r}{\partial x_1} \delta x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \bar{\theta}_r}{\partial C_{n+j}} \delta C_{n+j} \qquad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\delta z = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_1} \delta x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial C_{n+j}} \delta C_{n+j}$$

i zato je

$$J = \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_1} - \bar{\phi}_1 - \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\phi}_{r+1} \frac{\partial \bar{\theta}_r}{\partial x_1} \right) \delta x_1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial C_{n+j}} - \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\phi}_{r+1} \frac{\partial \bar{\theta}_r}{\partial C_{n+j}} \right) \delta C_{n+j}$$

Pošto se prvi izraz u zagradi ~~na desnoj~~ strani gornje jednačine identički poništava i ako se uvedu oznake za karakteristične funkcije

$$(40) \qquad U_{n+j} \equiv \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial C_{n+j}} - \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\phi}_{r+1} \frac{\partial \bar{\theta}_r}{\partial C_{n+j}} \qquad (j = 1, 2, \dots n-1)$$

dobijamo sledeći obrazac:

$$(41) \qquad J = \sum_{j=1}^{n-1} U_{n+j} \, \delta C_{n+j}$$

Kako postoje veze (11)

$$V_i = U_i^{\circ} \, e^{\int_{x_1^{\circ}} \frac{\dots}{p_1} dx_1} \qquad (i = 1, 2, \dots, 2n-1)$$

gde U_i^0 znače početne vrednosti karakterističnih funkcija, to je jasno da su karakteristične funkcije jednake ili različite od nule zajedno sa svojim početnim vrednostima. Pri tome se pretpostavlja da je integral u eksponentu konačan i odredjen u posmatranoj oblasti integrabiliteta jednačine /1/.

Pošto su priraštaji δC_{n+j} proizvoljne veličine potrebni i dovoljni uslovi da bi veličina J bila stalno jednaka nuli makako se kretala tačka A duž krive (k_1), glase

$$(42) \qquad U_{n+j} \equiv 0 \qquad j=1,2,\dots,n-1$$

Uslovi /41/ jesu oni traženi uslovi da bi kriva (k_2) ležala celom svojom dužinom u razvojnoj površini krive (k_1). Ako bi sada za svaku tačku krive (k_2) konstruisali ravni čiji uglovni koeficijenti zadovoljavaju datu jednačinu /1/ i odredjuju se pomoću n poslednjih jednačina /12/ dobili bismo razvojnu površinu čije će tačke u beskrajnoj blizini krive (k_2) zadovoljavati datu jednačinu /1/. Jasno je, ako bismo sada tražili uslove, da sledeća kriva (k_3), beskrajno bliska krivoj (k_2), leži u prednjoj razvojnoj površini, onda bi ti uslovi bili baš uslovi /42/. Nastavljajući tako kretanje naše krive mi bismo sa potrebnim i dovoljnim uslovima /42/ konstruisali integralnu površinu jednačine /1/. Kako smo pretpostavili da postoji uslov /38/ može se iz prvih n jednačina /12/ eliminisati n-1 konstanta $C_{n+1},\dots,C_{2n-1}$ i dobija se kao rezultat eliminacije tražena integralna površina

$$(43) \qquad z = f(x_1,\dots,x_n,C_1,\dots,C_n)$$

Treba sad videti koje uslove treba da ispunjavaju integrali /12/ da bi jednačina /43/ pretstavljala potpuni integral, t.j. da se prilikom pomenute eliminacije nijedna od konstanata $C_1,\dots,C_n$ ne izgubi iz jednačin /43/. Poći ću od očevidne identičnosti

$$\Phi(x_1, C_1,\dots,C_{2n-1}) \equiv f(x_1, \Theta_1,\dots,\Theta_{n-1}, C_1,\dots,C_n)$$

iz koje se tražeći izvode po konstantama $C_1,\dots,C_n$ dobijaju nove identičnosti

$$(44) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial C_i} - \sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}\right)\frac{\partial\Theta_r}{\partial C_i} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial C_i}\right) \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

gde zagrade znače da je u funkciji namesto x stavljeno (r 1,..n-1). Kako je površina /43/ integralna postoje uslovi

$$\varphi_s = \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (s=1,2,\dots n)$$

gde je sa φ_s označen rezultat eliminacije konstanata $C_{n+1}\dots C_{2n-1}$ iz desnih strana poslednjih n jednačina /12/, a koja je izvršena pomoću n-1 prvih jednačina /12/. Ako u poslednji uslov svuda na mesto

x_{1+1}, stavimo $\bar{\Theta}_z$ ($r = 1..,n-1$) dobija se

$$\bar{\Phi}_s = \left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Zbog toga identičnosti /41/ možemo da napišemo u obliku

$$U_i \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial C_i}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

Odavde je lako zaključiti da se potrebni i dovoljni uslovi

$$(45) \qquad U_i \lesseqgtr 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

da bi površina /43/ sadržavala proizvoljne konstante $C_1, \ldots, C_n$. Na osnovu prednjeg možemo iskazati sledeću teoremu:

Da bi se iz integrala /12/ mogao dobiti potpuni integral treba sve konstante C_i podeliti tako u dve grupe: $C_1, \ldots, C_n$; $C_{n+1}, \ldots, C_{2n-1}$ da budu ispunjeni potrebni i dovoljni uslovi /39/, /49/ i /43/. Eliminacija druge grupe konstanata iz prvih n jednačina /12/ daje traženi potpuni integral kao mesto karakteristika.

U ranijim paragrafima bilo je pokazano, ako se na mesto konstanata C_j ($j = 1, \ldots, 2n-1$) uvedu početne vrednosti veličina što figuriše u jednačini /1/, da na tri načina mogu biti zadovoljeni gornji uslovi i da se tako može doći do tri vrste potpunih integrala nastalih kao geometrisko mesto karakteristika.

Pomoću izložene teorije vrlo jednostavno se geometriski objašnjava i dobija t.zv. opšti integral Cauchy-ja. U ovoj glavi neću se zadržati na obradi toga pitanja, već napominjem da bi naša rasuđivanja bila analogna onima koja su iznešena u II glavi.

IV. g l a v a

SISTEM PARCIJALNIH JEDNAČINA I REDA JEDNE NEPOZNATE FUNKCIJE

§ 13. Zajednička površina sistema parcijalnih jednačina

Neka je dat sistem parcijalnih jednačina

$$/1/ \qquad F_K(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)=0 \qquad K=1,2\dots p<n$$

gde je z nepoznata funkcija a p_i znače parcijalne izvode te funkcije od nezavisno promenljivih x_i. Uočimo jednu jednačinu datog sistema, na pr. $F_i=0$, tada makoja njena karakteristika sa svim svojim tangentnim ravnima zadovoljavaće sledeći sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$/2/ \qquad \frac{dx_s}{\frac{\partial F_i}{\partial p_s}}=\cdots\cdots=-\frac{dp_s}{\frac{dF_i}{dx_s}}$$

Tu karakteristiku odredjujemo, kao što je poznato, pomoću tačke $M(x_i z)$ i ravni (p_i) i označimo je sa K_{F_i}. Tom istom tačkom i ravni odredimo karakteristiku K_{F_K} neke druge jednačine $F_K=0$ našeg sistema. Uočimo, zatim, na karakteristici K_{F_i} tačku M_1 koja je beskrajno bliska uočenoj i u njoj odgovarajuću tangentnu ravan i postavimo pitanje kada će ta tačka sa odgovarajućom tangentnom ravni da zadovoljava i jednačinu $F_K=0$ ili još opštije pitanje kada će ove dve jednačine da imaju zajedničke karakteristike i zajedničke tangentne ravni duž njih?

Odgovor na prvo pitanje je da uslov

$$/3/ \qquad \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial F_K}{\partial x_s}dx_s+\frac{\partial F_K}{\partial p_s}dp_s\right)+\frac{\partial F_K}{\partial z}dz=0$$

mora biti zadovoljen za tačku M_1 i odgovarajuću tangentnu ravan. Eliminacijom veličina dx_i i dp_i iz jednačina /2/ i /3/ dobijamo traženi uslov:

$$/4/ \qquad [F_i,F_K]\equiv\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{dF_K}{dx_s}-\frac{\partial F_K}{\partial p_s}\frac{dF_i}{dx_s}\right)=0$$

Pošto smo tačku M birali proizvoljno na karakteristici i pošto je izraz $[F_i,F_K]$ simetričan u odnosu na funkcije F_i i F_K, to onda uslov /4/ kaže da uočene dve jednačine $F_i=0$ i $F_K=0$ imaju zajedničke karakteristike i tangentne ravni duž njih. Te karakteristike smo odredili tačkom M i ravni (p_i).

Na osnovu izloženoga u prethodnoj glavi o formiranju integralnih površina pomoću karakteristika i na osnovu poslednjeg zaključka vidimo da uslov /4/ znači takodje da dve jednačine $F_i=0$ i $F_K=0$ imaju zajedničke integralne površine. Prema tome, ako je uslov /4/

ispunjen za svako $i,k=1,\dots,m$, onda naš sistem datih parcijalnih jednačina ima zajedničke integralne površine,(25).

§ 14. Integrali karakteristika

Diferencijalne jednačine za karakteristike za jednu datu jednačinu $F_i=0$ sistema /1/,kao što je to ranije pokazano,izražavaju se

$$[F_i, f]=0$$

Kako naše jednačine sistema imaju zajedničke karakteristike,to naš sistem /1/ ima sledeće diferencijalne jednačine za karakteristike:

$$/5/ \qquad [F_s, f]=0 \qquad (s=1,\dots,m)$$

Sistemu /5/ odgovara sledeći potpuno integrabilni sistem sa totalnim diferencijalima,(26)

$$/6/ \qquad dx_{m+k}=\sum_{i=1}^{m} X^i_{m+k}dx_i \quad (k=1,\dots,n-m), \quad dp_s=\sum_{i=1}^{m} P^i_s dx_i \quad (s=1,\dots,n), \quad dz=\sum_{i=1}^{m} Z^i dx_i$$

gde su uvedene skraćene oznake

$$/7/ \qquad X^i_{m+k}\equiv\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}, \quad P^i_s\equiv-\frac{\Delta^s_i+\Delta_i p_s}{\Delta}, \quad Z^i\equiv p_i+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}p_{m+k}$$

dalje,ako sa Δ označimo sledeću determinantu

$$/8/ \qquad \Delta\equiv D\left(\frac{F_1,\dots,F_m}{p_1,\dots,p_m}\right)$$

onda $\Delta_i, \Delta_{ik}, \Delta^s_i$ su determinante,koje se dobijaju iz /8/ ako se i -ta kolona odgovarajućih parcijalnih izvoda funkcija F_k zamene sa parcijalnim izvodima po promenljivima $z, p_{m+k} x_s$. Sistem /6/ biće nam potreban u daljem izlaganju.

Pretpostavimo da smo našli potpuni sistem $2n-m+1$ različitih integrala jednačina /5/,koji je pretstavljen sledećim funkcijama

$$F_1,\dots,F_m, f_1, f_2,\dots, f_{2n-2m+1}$$

Kada prvih m integrala izjednačimo sa nulom,a ostale sa proizvoljnim konstantama $C_1,\dots,C_{2n-2m+1}$,onda,pod pretpostavkom da je $\Delta\neq0$,opšti integral karakteristika glasi:

$$/9/ \qquad \begin{aligned} x_{m+r}&=\varphi_r(x_1,\dots,x_m, C_1,\dots,C_{2n-2m+1}) \quad (r=1,\dots,n-m)\\ z&=\psi(-\text{-----------})\\ p_s&=\psi_s(-\text{-----------}) \quad (s=1,\dots,n)\end{aligned}$$

Uvedimo mesto gornjih proizvoljnih konstanata C. početne,uostalom, proizvoljne vrednosti $x^0_{m+1},\dots,x^0_n, p^0_{m+1},\dots,p^0_n$ parametarskih promenljivih $x_{m+1},\dots,x_n, p_{m+1},\dots,p_n, z$ koje odgovaraju početnim vrednostima $x_1^0,\dots,x_m^0$ glavnih nezavisno promenljivih veličina $x_1,\dots,x_m$. Početne vrednosti $p_1^0,\dots,p_m^0$ izražavaju se kao funkcije prethodnih početnih vrednosti na osnovu samog sistema /1/. Jasno je pri tome da sve gornje početne vrednosti promenljivih pripadaju oblasti integrabilnosti sistema /1/. Prema tome opšti integral karakteristika možemo napisati u sledećem obliku:

$$x_{m+k} = \varphi_k\left(x_1,\dots,x_m, x_1^0,\dots,x_n^0, z^0, p^0_{m+1},\dots,p^0_n\right) \quad (k=1,\dots,n-m)$$

$$/10/ \qquad z = \phi(\dots\dots\dots\dots)$$

$$p_s = \phi_s(\dots\dots\dots\dots) \quad (s=1,\dots,m)$$

Sada sebi postavljam sledeći zadatak: da pomoću integrala karakteristika konstruišem integralnu površinu koja će da zavisi od n-m-1 proizvoljnih konstanata, t.j. da pomoću sistema /10/, a docnije i pomoću sistema /9/, formiram potpuni integral sistema /1/, kao i da odredim potrebne i dovoljne uslove za rešenje gornjeg zadatka.

§ 15. Potpuni integral prve vrste

Neka je prva zajednička karakteristika svih jednačina /1/ odredjena tačkom M_0 (x_i^0, z^0) i ravni (p_i^0). Tom karakteristikom je odredjena prva zona zajedničke integralne površine. Uzmimo tačku M_1, koja je beskrajno bliska tački M_0, ima koordinate $(x_1^1 = x_1^0,\dots,x_m^1 = x_m^0, x^1_{m+1},\dots,x^1_n, z^1)$ i leži u tangentnoj ravni

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - x_i^0\right) p_i^0 = Z - z^0$$

Zbog toga ima vezu

$$z^0 - \sum_{k=1}^{n-m} x^0_{m+k}\, p^0_{m+k} = z^1 - \sum_{k=1}^{n-m} x^1_{m+k}\, p^0_{m+k}$$

Tom tačkom M_1 i tangentnom ravni $(p_1^1,\dots,p_m^1, p^0_{m+1},\dots,p^0_n)$, gde se veličine $p_1^1,\dots,p_m^1$ računaju iz sistema /1/, odredjena je druga karakteristika i druga zona zajedničke integralne površine. Zatim uzmimo tačku M_2 $(x_1^{(2)} = x_1^0,\dots,x_m^{(2)} = x_m^0, x^{(2)}_{m+1},\dots,x^{(2)}_n, z^{(2)})$, koja je beskrajno bliska tački M_1 i leži u ravni

$$\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - x_i^0\right) p_i^0 + \sum_{s=1}^{n-m}\left(X_{m+s} - x^1_{m+s}\right) p^0_{m+s} = Z - z^1$$

To daje novu vezu

$$z^1 - \sum_{k=1}^{n-m} x^1_{m+k}\, p^0_{m+k} = z^{(2)} - \sum_{k=1}^{n-m} x^{(2)}_{m+k}\, p^0_{m+k}$$

Tom tačkom M_2 i ravni $(p_1^{(2)},\dots,p_m^{(2)}, p^0_{m+1},\dots,p^0_n)$, gde se veličine $p_1^{(2)},\dots,p_m^{(2)}$ računaju iz /1/, odredjena je treća karakteristika i treća zajednička zona integralne površine. Na sličan način nastavljajući konstrukciju došli bismo do zajedničke integralne površine jednačina /1/.

Sama konstrukcija integralne površine navodi da se mesto z uvede nova konstanta b definisana veza

$$/11/ \qquad b = z^0 - \sum_{r=1}^{n-m} x^0_{m+r}\, p^0_{m+r}$$

Takodje se vidi da su veličine $x_1^0,\dots,x_m^0, p^0_{m+1},\dots,p^0_n, b$ stalne, a da se menjaju i igraju ulogu parametara veličine $x^0_{m+1},\dots,x^0_n$. Ovih poslednjih ima $(n-m)$ i treba ih izbaciti iz prvih $(n-m+1)$ jednačina sistema /10/. Sada ću odrediti potrebne i dovoljne uslove, koje treba da zadovoljavaju integrali karakteristika da bih dobio gore konstruisanu integralnu površinu.

U slučaju sistema parcijalnih jednačina /1/ karakteristike /10/ pretstavljaju jednu m-mernu mnogostrukost za razliku od slučaja jedne jedine parcijalne jednačine kada karakteristike pretstavljaju krivu liniju.

Uočimo dve karakteristike (k_1) i (k_2), koje su beskrajno bliske jedna drugoj i na svakoj od njih po jednu tačku A i B, koje su takodje izmedju sebe beskrajno bliske i imaju koordinate A (x_i, z), odnosno B $(x_i + \delta x_i, z + \delta z)$. U tački A postavimo ravan sa koeficijentima $p_s = \phi_s$ i na njoj uočimo tačku P sa koordinatama $(x_i + \delta x_i, z_p)$, onda ću veličinom J da definišem otstojanje tačaka B i P. Ova veličina biće istog reda kao otstojanje tačke B od gornje ravni i izražavaće se

$$J = \delta z - \sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta x_i$$

Sada ću tu veličinu da izrazim pomoću integrala karakteristika /10/. Kako simbol δ znači priraštaj veličina, koje figurišu u tim integralima, a koja se dobija kada se prelazi iz tačke A u tačku B, to ću iz prvih $(n-m+1)$ jednačina /10/, a na osnovu gornje konstrukcije integralne površine dobiti sledeće veze

$$\delta z = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial \phi_k}{\partial x^0_{m+k}}\delta x^0_{m+k}$$

$$\delta x_{m+r} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \theta_r}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial \theta_r}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j} \qquad (r = 1,\dots, n-m)$$

Zato je

$$/13/ \qquad J = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \phi_i - \sum_{k=1}^{n-m}\phi_{m+k}\frac{\partial \theta_k}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \sum_{l=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^0_{m+l}} - \sum_{k=1}^{n-m}\phi_{m+k}\frac{\partial \theta_k}{\partial x^0_{m+l}}\right)\delta x_{m+l}$$

Ako sada stavim integrale karakteristika /10/ u prvih $(n-m)$ jednačina i u poslednjoj jednačini sistema /6/, dobiću sledeće identičnosti

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial x_i} \equiv \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \quad \begin{pmatrix} i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n-m \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \equiv \phi_i + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}\phi_{m+k} \quad (i=1,\dots,m)$$

ili

$$/14/ \qquad K_i \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \phi_i - \sum_{k=1}^{n-m}\phi_{m+k}\frac{\partial\theta_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1,\dots,m)$$

Ako uvedemo sledeće oznake za karakteristične funkcije

$$/15/ \qquad U_{x^0_{m+l}} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^0_{m+l}} - \sum_{k=1}^{n-m}\phi_{m+k}\frac{\partial\theta_k}{\partial x^0_{m+l}} \qquad (l=1,\dots,n-m)$$

onda zbog /14/ obrazac /13/ se jednostavno izražava

$$/16/ \qquad J = \sum_{l=1}^{n-m} U_{x^0_{m+l}}\,\delta x^0_{m+l}$$

Sada ću navesti izvodjenje Saltikova (26), koje ima za cilj da pokaže kako se funkcije /15/ mogu izraziti pomoću svojih inicijalnih vrednosti, i usto propratiću ga odredjenim geometriskim tumačenjima.

Potražimo priraštaje funkcija /15/ ako se pomeramo samo duž jedne karakteristike, t.j. tražimo parcijalne izvode po x_i, dok ostale veličine biće nepromenjene. Dakle:

$$\frac{\partial U_{x^0_{m+l}}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x^0_{m+l}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n-m}\phi_{m+k}\frac{\partial\theta_k}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial\phi_{m+k}}{\partial x^0_{m+l}}\frac{\partial\theta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial\phi_{m+k}}{\partial x_i}\frac{\partial\theta_k}{\partial x^0_{m+l}}\right) \qquad (i=1,\dots,m)$$

Ove jednačine moraju da budu zadovoljene za svaku karakteristiku i zato ćemo u njih smeniti mesto

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\phi_{m+k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\theta_k}{\partial x_i}$$

odgovarajuće njihove vrednosti koje se računaju iz sistema /6/ i dobiti ovaj rezultat:

$$\frac{\partial U_{x^0_{m+l}}}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi_i}{\partial x^0_{m+l}} + \frac{1}{\Delta}\sum_{l=1}^{m} M_i^l \sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F_l}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial\phi_{m+k}}{\partial x^0_{m+l}} + \frac{\partial F_l}{\partial x^0_{m+k}}\frac{\partial\theta_k}{\partial x^0_{m+k}}\right) + \frac{\Delta_i}{\Delta}\sum_{k=1}^{n-m}\phi_{m+k}\frac{\partial\theta_k}{\partial x^0_{m+k}}$$

gde je uvedena nova oznaka M_i^l i koja označava minor determinante Δ, koji odgovara elementu $\frac{\partial F}{\partial p_i}$, uključujući tu i njegov znak.

Sistem jednačina /1/ mora identički da bude zadovoljen integralima /10/ i ta identičnost je zadovoljena i karakteristikama koje odgovaraju priraštajima veličina x^0_{m+l}, zbog toga ćemo imati novu identičnost

$$\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F_l}{\partial x_{m+k}}\frac{\partial\theta_k}{\partial x^0_{m+l}} + \frac{\partial F_l}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial\phi_{m+k}}{\partial x^0_{m+l}}\right) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_l}{\partial p_i}\frac{\partial\phi_i}{\partial x^0_{m+l}} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x^0_{m+l}} = 0 \qquad (l=1,\dots,m)$$

Zato dobijamo

$$\frac{\partial \mathcal{U}_{x^0_{m+\ell}}}{\partial x_i} = - \mathcal{U}_{x^0_{m+\ell}} \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Kako je,(25):

$$\cancel{dV} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

to je izraz

$$dV = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i}{\Delta} dx_i$$

totalni diferencijal. Zato se funkcije /15/ izražavaju na sledeći način:

$$/17/ \qquad \mathcal{U}_{x^0_{m+\ell}} = \mathcal{U}^0_{x^0_{m+\ell}} e^{-\int_{V_0} dV}$$

gde $\mathcal{U}^0_{x^0_{m+\ell}}$ znači inicijalnu vrednost za funkcije /15/, a V^0 funkcije V. Napomenimo da se *mi ograničavamo na oblast promenljivih u kojoj integral diferencijala* dV ima konačnu i odredjenu vrednost. Stoga na osnovu /17/ možemo da zaključimo da su funkcije /15/ jednake ili različite od nule istovremeno sa svojim početnim vrednostima.

Da bi moja konstrukcija integralne površine bila ispravna mora karakteristika (k_2) da leži u razvojnoj površini karakteristike (k_1), a to znači s obzirom na geometrisko značenje veličine J da ta veličina mora da bude stalno jednaka nuli, t.j. za makoji par tačaka A i B.

U tu svrhu izračunajmo početne vrednosti karakterističnih funkcija /15/

$$\mathcal{U}^0_{x^0_{m+\ell}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^0_{m+\ell}} - \sum_{k=1}^{n-m} \phi_{m+k} \frac{\partial \theta_k}{\partial x^0_{m+\ell}} \Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ \cdots \\ x_m = x^0_m}} = p^0_{m+\ell} - p^0_{m+\ell} = 0$$

gde smo u integrale /10/ uveli zamenu /11/. Zbog /17/ dobijamo

$$/18/ \qquad \mathcal{U}_{x^0_{m+\ell}} \equiv 0 \qquad (\ell = 1, \dots, n-m)$$

koji pretstavljaju tražene potrebne uslove. Medjutim, ovaj uslov je i dovoljan da bi prema /15/ J stalno bilo jednako nuli, treba, pošto su veličine $\delta x^0_{m+\ell}$ proizvoljne, da budu ispunjeni uslovi /18/.

Pošto je uvek ispunjen uslov

$$/19/ \qquad \mathcal{D}\left(\frac{\theta_1, \dots, \theta_{n-m}}{x^0_{m+1}, \dots, x^0_n}\right) \lessgtr 0$$

možemo kao rezultat eliminacije konstanata x^0_{m+j} $(j = 1, \dots n-m)$ iz prvih $(n-m+1)$ jednačina /10/ dobiti traženu integralnu površinu:

$$/20/\qquad z = F(x_1,\dots,x_n, x_1^o,\dots,x_m^o, b, p_{m+1}^o,\dots,p_n^o)$$

Treba sada da pokažem da integrali /10/ zadovoljavaju potrebne i dovoljne uslove da bi naša površina /20/ bila potpuni integral sistema /10/, t.j. da se prilikom pomenute eliminacije veličine b, p_{m+j}^o $(j=1,\dots,n-m)$ zadržavaju u jednačini /20/. Poći ću od očevidne identičnosti

$$\Phi(x_1,\dots,x_m,x_1^o,\dots,x_n^o,b,p_{m+1}^o,\dots,p_n^o) \equiv F(x_1,\dots,x_m,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-m},x_1^o,\dots,x_m^o,b,p_{m+1}^o,\dots,p_n^o)$$

i uzeću izvode po p_{m+j}^o i b :

$$/21/\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial p_{m+j}^o} - \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{m+r}}\right)\frac{\partial\vartheta_r}{\partial p_{m+j}^o} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial p_{m+j}^o}\right)\qquad (j=1,\dots,n-m)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} - \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{m+r}}\right)\frac{\partial\vartheta_r}{\partial b} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)$$

gde zagrade znače da je u funkciji F na mesto x_{m+r} stavljeno ϑ_r $(r=1,\dots,n-m)$. Pošto je naša površina integralna ispunjeni su uslovi

$$f_{m+r} = \frac{\partial F}{\partial x_{m+r}}\qquad (r=1,\dots,n-m)$$

gde je sa f_s označen rezultat eliminacije veličina x_{m+j}^o iz desnih strana poslednjih n-m jednačina sistema /10/. Ova eliminacija se vrši pomoću prvih n-m jednačina istog sistema. Ako u tim uslovima x_{m+r} smenimo sa funkcijama ϑ_r dobićemo

$$\Phi_{m+r} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x_{m+r}}\right)\qquad (r=1,\dots,n-m)$$

Zato se identičnosti /21/ izražavaju

$$U_{p_{m+j}^o} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial p_{m+j}^o} - \sum_{r=1}^{n-m}\Phi_{m+r}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial p_{m+j}^o} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial p_{m+j}^o}\right)\qquad (j=1,\dots,n-m)$$

$$U_b \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial b} - \sum_{r=1}^{n-m}\Phi_{m+r}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial b} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)$$

Pošto su u slučaju naše konstruisane površine inicijalne vrednosti $U_{p_{m+j}^o}^o, U_b^o$ za prednje funkcije

$$U_{p_{m+j}^o}^o \equiv x_{m+r}^o\ ,\quad U_b^o \equiv 1$$

i pošto je lako pokazati da za funkcije $U_{p_{m+j}^o}, U_b$ postoje analogni obrasci /17/, onda je

$$/22/\qquad U_{p_{m+j}^o} \lesseqgtr 0\ ,\quad U_b \lesseqgtr 0\ ,\quad (j=1,\dots,n-m)$$

pa prema tome desna strana jednačine /21/ sadrži konstante p_{m+j}^o $(j=1,\dots,n-m)$ i b i jednačina /20/ pretstavlja potpuni integral sistema /1/.

Zato se može iskazati sledeća teorema:

Ako u integrale /10/ uvedemo na mesto z^o veličinu b ,

definisanu jednačinom /11/,onda je:1)ispunjeni su potrebni i dovoljni uslovi /18/,/19/ i /20/ za integrale karakteristika /10/ i 2)eliminacija veličina x^0_{m+l} $(l=1,..n-m)$ iz prvih $(n-m+1)$ jednačina /10/ daje potpuni integral prve vrste /21/ kao mesto karakteristika.

Uslove /18/ mogu izvesti i na sledeći način: Ako projekcije poprečnog elementa AB,koji spaja ranije navedene tačke karakteristika (k_1) i (k_2),označimo sa $(\delta x_i\ ,\delta z)$ i sa δ označimo promene odgovarajućih veličina pri prelasku iz tačke A u tačku B i ako zahtevamo da stalno bude

$$\delta z-\sum_{i=1}^{m}p_i\,\delta x_i=0$$

t.j. da poprečni elemenat AB stalno leži u razvojnoj površini karakteristike (k_1),onda na osnovu jednačina /12/ i /10/ i gore opisane konstrukcije integralne površine dobiću sledeći linearni sistem:

$$/23/\qquad \begin{aligned}&-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_k}{\partial x_i}\delta x_i+\delta x_{m+k}-\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_k}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j}=0\qquad (k=1,..,n-m)\\&-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}-\phi_i\right)\delta x_i+\sum_{j=1}^{n-m}\phi_{m+j}\,\delta x_{m+j}-\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\phi}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j}=0\end{aligned}$$

koji ima $n-m+1$ jednačinu, a $n-m$ nepoznatih priraštaja, δx_{m+k} $(k=1,\dots,n-m)$. Priraštaji δx_i ,$(i=1,..,m)$ i δx^0_{m+j} ,$(j=1,..,n-m)$ su proizvoljni jer poprečni elemenat što leži u razvojnoj površini ima proizvoljan pravac.Da bi sistem /23/ bio saglasan potrebno je i dovoljno da postoji uslov:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&-\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_1}{\partial x_i}\delta x_i-\sum\limits_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_1}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j}\\0&1&0&\cdots&0&0&-\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_2}{\partial x_i}\delta x_i-\sum\limits_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_2}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j}\\-&-&-&-&-&-&-\\0&0&0&\cdots&0&1&-\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_{n-m}}{\partial x_i}\delta x_i-\sum\limits_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_{n-m}}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j}\\\phi_{m+1}&\phi_{m+2}&\phi_{m+2}&\cdots&\phi_{n-1}&\phi_n&-\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}-\phi_i\right)\delta x_i-\sum\limits_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\phi}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j}\end{vmatrix}=0$$

Ako svaku od $n-m$ prvih vrsta respektivno pomnožim sa $\phi_{m+1},\dots,\phi_n$ pa njihov zbir oduzmem od poslednje vrste dobiću:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_1}{\partial x_i}\delta x_i - \sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_1}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_2}{\partial x_i}\delta x_i - \sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_2}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j} \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_{n-m}}{\partial x_i}\delta x_i - \sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_{n-m}}{\partial x^0_{m+j}}\delta x^0_{m+j} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\sum_{i=1}^{m} K_i\delta x_i - \sum_{j=1}^{n-m} U_{m+j}\delta x^0_{m+j} \end{vmatrix} = 0$$

gde su uzete oznake /14/ i /17/. Razvijanjem poslednje determinante po poslednjoj vrsti dobija se

$$\sum_{i=1}^{m} K_i\delta x_i + \sum_{j=1}^{n-m} U_{m+j}\delta x^0_{m+j} = 0$$

ili zbog /14/

$$\sum_{j=1}^{n-m} U_{m+j}\delta x^0_{m+j} = 0$$

Kako su proizvoljne veličine δx^0_{m+j}, dobivamo uslove /18/, t.j. da se pomenuti poprečni elemenat stalno nalazi na razvojnoj površini.

§ 16. Potpuni integral druge vrste

Sada ću pokazati kako se može konstruisati integralna površina sistema /1/ kao jedno novo mesto karakteristika.

Pretpostaviću da je sistem /10/ takav da dopušta da se kroz tačku $M_0(x_i^0, z^0)$ može povući beskrajno mnogo karakteristika. Sve te karakteristike su odredjene tačkom M_0 i tangentnim ravnima: (p_i^0), $(p_i^{(1)})$, $(p_i^{(2)})$ i t.d. za $(i = m+1,\dots,n)$, gde veličine: $p_j^0, p_j^0, p_j^0, \dots, (j = 1,\dots,m)$ se računaju iz jednačina /1/ pomoću odgovarajućih vrednosti ostalih veličina što figurišu u njima. Dakle, vidi se da su veličine (x_i^0, z^0) stalne, a da se menjaju veličine $p^0_{m+1}, \dots, p^0_m$ kada se prelazi s jedne karakteristike na drugu.

Da bi mesto gornjih karakteristika pretstavljalo integralnu površinu potrebno je i dovoljno da uvek svaka od karakteristika leži u razvojnoj površini sebi beskrajno bliske karakteristike. Kakve uslove integrali /10/ treba da zadovoljavaju da bi bio ispunjen prednji uslov? Poći ću opet od obrasca

$$J = \delta z - \sum_{i=1}^{m} p_i\delta x_i$$

koji ima isti geometriski smisao kao u prethodnom paragrafu. Veličinu J sada ću izraziti pomoću integrala /10/. Sa simbolom δ označiću priraštaje veličina, koje figurišu u njima, i koji se dobivaju kada se prelazi iz jedne tačke jedne od tih karakteristika u drugu beskrajno blisku tačku koja pripada karakteristici koja je prednjoj beskrajno bliska. Zato iz prvih (n-m+1) jednačina /10/ dobijamo

$$(24)\quad \begin{aligned} \delta x_{m+r} &= \sum^{m} \frac{\partial \Theta_r}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial \Theta_r}{\partial p^\circ_{m+j}}\delta p^\circ_{m+j} \qquad (r=1,2,\ldots, n-m)\\ \delta z &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial \phi}{\partial p^\circ_{m+j}}\delta p^\circ_{m+j} \end{aligned}$$

Prednji obrazac zato dobija oblik

$$J = \sum_{i=1}^{m} K_i \delta x_i + \sum_{j=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p^\circ_{m+j}} - \sum_{r=1}^{n-m} \Phi_{m+r}\frac{\partial \Theta_r}{\partial p^\circ_{m+j}}\right)\delta p^\circ_{m+j}$$

ili, ako uzmemo u obzir identičnosti /14/ i uvedemo oznake

$$(25)\qquad U_{p^\circ_{m+j}} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial p^\circ_{m+j}} - \sum_{r=1}^{n-m} \Phi_{m+r}\frac{\partial \Theta_r}{\partial p^\circ_{m+j}}$$

može mu se dati i oblik

$$(26)\qquad J = \sum_{j=1}^{n-m} U_{p^\circ_{m+j}}\,\delta p^\circ_{m+j}$$

Slično, kao i u prethodnom paragrafu, karakteristične funkcije /25/ mog se izraziti pomoću svojih inicijalnih vrednosti

$$(27)\qquad U_{p^\circ_{m+j}} = U^\circ_{p^\circ_{m+j}}\, e^{-\int_{v_1} dV}$$

t.j. da funkcije /25/ su istovremeno jednake ili različite od nule sa svojim početnim vrednostima. Razume se, da se i ovde ograničavamo na on oblast promenljivih u kojoj integral diferencijala dV ima konačnu i odredjenu vrednost.

Izračunajmo početne vrednosti funkcija /25/ za karakteristi definisane u početku paragrafa:

$$U^\circ_{p^\circ_{m+j}} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial p^\circ_{m+j}} - \sum_{r=1}^{n-m}\Phi_{m+r}\frac{\partial \Theta_r}{\partial p^\circ_{m+j}}\Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^\circ\\ \cdots\\ x_m = x_m^\circ}} \equiv 0 \qquad (j=1,\ldots,n-m)$$

Zbog toga su karakteristične funkcije

$$(28)\qquad U_{p^\circ_{m+j}} \equiv 0 \qquad (j=1,\ldots,n-m)$$

Prema tome veličina J je stalno identički jednaka nuli. Obrnuto, iz /26/ sledi da je veličina J jednaka nuli, ako su uslovi /28/ ispunje jer su δp°_{m+j} proizvoljni priraštaji.

Pretpostavimo da je ispunjen sledeći uslov

$$(29) \qquad \mathcal{D}\left(\frac{\Theta_1, \ldots, \Theta_{n-m}}{p^0_{m+1}, \ldots, p^0_n}\right) \lessgtr 0$$

i da smo kao rezultat eliminacije konstanata p^0_{m+j} iz (n-m+1) prvih n jednačina /10/ dobili traženu integralnu površinu

$$(30) \qquad z = F(x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots x_m^0, x_{m+1}^0 \ldots, x_n^0, z^0)$$

gde veličine $x_1^0, \ldots, x_m^0$ znače tačno odredjene vrednosti glavnih parametarskih promenljivih $x_1, \ldots, x_m$ u oblasti integrabilnosti sistema /1/.

Da bi jednačina /30/ pretstavljala potpuni integral treba pokazati da se prilikom pomenute eliminacije veličine $x^0_{m+1}, \ldots, x^0_n, z^0$ zadržavaju u toj jednačini. Prema izlaganjima u prethodnom paragrafu potrebno je i dovoljno pokazati da su inicijalne vrednosti $U^0_{x^0_{m+j}}$, $U^0_{z^0}$ karakterističnih funkcija

$$(31) \qquad \begin{aligned} U_{x^0_{m+j}} &\equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^0_{m+j}} - \sum_{r=1}^{n-m} \Phi_{m+r} \frac{\partial \Theta_r}{\partial x^0_{m+j}} \lessgtr 0 \quad (j = 1, \ldots n-m) \\ U_{z^0} &\equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z^0} - \sum_{r=1}^{n-m} \Phi_{m+r} \frac{\partial \Theta_r}{\partial z^0} \lessgtr 0 \end{aligned}$$

različite od nule. Zbilja, lako je videti da postoje uslovi

$$U^0_{x^0_{m+j}} \equiv -p^0_{m+j} \lessgtr 0 \qquad U^0_{z^0} \lessgtr 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots n-m)$$

Zato možemo iskazati sledeću teoremu:

Da bismo dobili potpuni integral druge vrste, t.j. integralnu površinu koja je geometrisko mesto svih karakteristika koje prolaze kroz jednu tačku M_0 (x_i^0, z^0), potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi /28/, /29/ i /31/. Eliminacija promenljivih parametara p^0_{m+j} $(j = 1, \ldots, n-m)$ iz (n-m+1) prvih jednačina /10/ daje traženu integralnu površinu /30/ u kojoj $x_1^0, \ldots, x_m^0$ znače tačno odredjene vrednosti, a x^0_{m+j} $(j = 1, \ldots, n-m)$, z^0 su proizvoljne konstante potpunog integrala.

Do uslova /28/ mogu doći i na sledeći način:

Ako projekcije poprečnog elementa, koji spaja dve beskrajno bliske tačke dveju beskrajno bliskih karakteristika, označimo sa $(\delta x_i, \delta z)$ i sa δ označimo za odgovarajuće veličine priraštaje koji nastaju pri prelazu sa jedne na drugu od pomenutih tačaka i ako zahtevamo da stalno bude

$$\delta z = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i$$

t.j. da pomenuti poprečni elemenat stalno leži u razvojnoj površini prve karakteristike onda na osnovu jednačina /24/ dobija se:

$$(32)\quad \begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\theta_r}{\partial x_i}\delta x_i+\delta x_{m+r}-\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\theta_r}{\partial p^\circ_{m+j}}\delta p^\circ_{m+j}=0 \quad (r=1,\dots,n-m)\\ &-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}-\phi_i\right)\delta x_i+\sum_{s=1}^{n-m}\phi_{m+s}\,\delta x_{m+s}-\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial\phi}{\partial p^\circ_{m+j}}\delta p^\circ_{m+j}=0 \end{aligned}$$

Ako svaku od prvih $(n-m)$ jednačina sistema /32/ pomnožimo sa ϕ_{m+r} $(r=1,\dots,n-m)$ i zatim saberemo, a od dobivenog rezultata oduzmemo poslednju jednačinu tog sistema, onda ćemo dobiti

$$(33)\qquad \sum_{i=1}^{m}K_i\,\delta x_i+\sum_{j=1}^{n-m}U_{p^\circ_{m+j}}\,\delta p^\circ_{m+j}=0$$

Poprečni elemenat što leži u razvojnoj površini ima proizvoljan položaj, a što znači da priraštaji δx_i $(i=1,\dots,m)$ i δp°_{m+j} $(j=1,\dots,n-m)$ su proizvoljni. Tada poslednja jednačina može imati mesta samo ako su ispunjeni uslovi /14/ i /28/. Tako smo došli do zaključka da integrali /10/ moraju da zadovoljavaju uslove /28/ da bi poprečni elemenat stalno ležao u razvojnoj površini jedne od karakteristika, t.j. da bi površina načinjena od karakteristika bila integralna. Jednu od jednačina /32/ treba odbaciti, jer smo koristili jednačinu /33/ a preostale služe za odredjivanje priraštaja zavisnih promenljivih δx_{m+r} $(r=1,\dots,n-m)$.

§ 17. Potpuni integral treće vrste

Sada ću pokazati još jedan način za konstrukciju zajedničke integralne površine sistema /1/ kao mesto karakteristika. Poći ću opet od integrala karakteristika /10/. Prvu karakteristiku odrediću tačkom M_0 (x_i°, z°) i ravni (p_i°), $(i=1,\dots,n)$, gde su $x_1^\circ,\dots,x_m^\circ$ odredjene vrednosti glavnih promenljivih, a veličine $p_1^\circ,\dots,p_m^\circ$ se računaju iz sistema /1/, kada se u ovaj stave inicijalne vrednosti ostalih promenljivih što figurišu u njemu. Uočiću zatim tačku M_1, koja je beskrajno bliska sa tačkom M i koja ima koordinate $(x_1'=x_1^\circ,\dots,x'_{m+q}=x^\circ_{m+q}, x'_{m+q+1},\dots,x'_m, z'$. Broj q je ceo i nalazi se u razmaku $0\le q\le n-m$.
Kada se traži uslov da tačka M_1 leži u tangentnoj ravni

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-x_i^\circ)\,p_i^\circ=Z-z^\circ$$

dobiću ga u obliku

$$z^\circ-\sum_{r=1}^{n-m-q}x^\circ_{m+q+r}\,p^\circ_{m+q+r}=z'-\sum_{r=1}^{n-m-q}x'_{m+q+r}\,p^\circ_{m+q+r}$$

Drugu karakteristiku odrediću tačkom M_1 i ravni $(p_1',\dots,p_m',p'_{m+1},\dots,p'_{m+q},p'_{m+q+1}=p^\circ_{m+q+1},\dots,p_n'=p_n^\circ)$, gde se veličine $p_1',\dots,p_m'$ računaju iz sistema /1/ ako u njega uvrstimo odgovarajuće vrednosti promenljivih koje se tamo nalaze. Zatim, uzeću tačku M_2, beskrajno blisku tački M_1, i čije su koordinate $(x_1^0, \dots, x_{m+q}^0, x_{m+q+1}^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, z^{(2)})$ i koja leži u ravni

$$\sum_{i=1}^{m+q}(X_i - x_i^0)p_i^1 + \sum_{i=1}^{n-m-q}(X_{m+q+i} - x^1_{m+q+i})p^0_{m+q+i} = Z - z'$$

pa prema tome mora da postoji sledeća veza

$$z' - \sum_{r=1}^{n-m-q} x^1_{m+q+r}p^0_{m+q+r} = z^{(2)} - \sum_{r=1}^{n-m-q} x^{(2)}_{m+q+r}p^0_{m+q+r}$$

Treću karakteristiku odrediću tačkom M_2 i ravni $(p_1^{(2)}, \dots, p^{(2)}_{m+q}, p^{(2)}_{m+q+1} = p^0_{m+q+1}, \dots, p_n^{(2)} = p_n^{(0)})$ gde veličine $p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)}$ računamo iz /1/. Tako bih odredio i sledeće karakteristike i svakom takvom po jednu zonu integralne površine i konačno dobio integralnu površinu sistema /1/. Izvedena konstrukcija pokazuje da mesto veličine z^0 treba uvesti novu b, koja je određena sa

$$b = z^0 - \sum_{r=1}^{n-m-q} x^0_{m+q+r}p^0_{m+q+r} \tag{34}$$

i da se kretanjem karakteristika ne menjaju veličine $x_1^0, \dots, x^0_{m+q}, b, p^0_{m+q+1}, \dots, p_n^0$, a menjaju se veličine $x^0_{m+q+1}, \dots, x_n^0, p^0_{m+1}, \dots, p^0_{m+q}$, kojih ima $n-m$ i koje, dakle, igraju ulogu promenljivih parametara.

Da bi konstruisana površina bila integralna treba pokazati da će uvek sledeća karakteristika ležati u razvojnoj površini prethodne beskrajno bliske karakteristike. Obrazac /26/ u ovom slučaju dobija oblik

$$J = \sum_{j=1}^{n-m-q} U_{m+q+j}\,\delta x^0_{m+q+j} + \sum_{i=1}^{q} U_{n-m+i}\,\delta p^0_{m+i} \tag{35}$$

gde veličina J ima isto geometrisko tumačenje kao i ranije, a uvedene su oznake za karakteristične funkcije

$$(36)\quad \begin{aligned} U_{m+q+j} &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^0_{m+q+j}} - \sum_{r=1}^{n-m} \Phi_{m+r}\frac{\partial \theta_r}{\partial x^0_{m+q+j}} \qquad (j = 1, \dots, n-m-q) \\ U_{n-m+i} &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial p^0_{m+i}} - \sum_{r=1}^{n-m} \Phi_{m+r}\frac{\partial \theta_r}{\partial p^0_{m+i}} \qquad (i = 1, 2 \dots q) \end{aligned}$$

Lako je pokazati s obzirom na rezultat Saltikova, (26), da se funkcije /36/ mogu izraziti pomoću svojih inicijalnih vrednosti U^0_{m+q+j}, U^0_{n-m+i}, t. da je

$$(37)\quad \begin{aligned} U_{m+q+j} &= U^0_{m+q+j}\, e^{-\int_{V_0}^{V} dV} \qquad (j = 1, \dots, n-m-q) \\ U_{n-m+i} &= U^0_{n-m+i}\, e^{-\int_{V_0}^{V} dV} \qquad (i = 1, \dots q) \end{aligned}$$

gde veličine V i V_0 imaju isto značenje kao ranije, a integral diferencijala dV ima konačnu i odredjenu vrednost.

Inicijalne vrednosti karakterističnih funkcija /36/ u našem slučaju, ako se uzme u obzir zamena /34/, su identički jednake nuli i zato na osnovu /37/ imamo ove identičnosti

$$/38/ \quad U_{m+q+j} \equiv 0 \;, \quad U_{n-m+i} \equiv 0 \qquad \left(\begin{matrix} j = 1,\dots, n-m-q \\ i = 1,\dots, q \end{matrix} \right)$$

Znači da je veličina J stalno jednaka nuli, t.j. da je konstruisana površina integralna. Obrnuto, na osnovu obrasca /35/, da bi J bilo stalno jednako nuli moraju biti ispunjeni uslovi /36/, jer su priraštaji δx^{0}_{m+q+j} i δp^{0}_{m+i} proizvoljne veličine.

Lako je pokazati da su ostale karakteristične funkcije

$$/39/ \quad \begin{aligned} U_{m+k} &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^{0}_{m+k}} - \sum_{z=1}^{n-m} \phi_{m+z} \frac{\partial \theta_z}{\partial x^{0}_{m+k}} \lesseqgtr 0 \qquad (k = 1,\dots, q) \\ U_{n-m+q+i} &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial p^{0}_{m+q+i}} - \sum_{z=1}^{n-m} \phi_{m+z} \frac{\partial \theta_z}{\partial p^{0}_{m+q+i}} \lesseqgtr 0 \qquad (i = 1,\dots, n-m-q) \\ U_{2n-2m+1} &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial b} - \sum_{z=1}^{n-m} \phi_{m+z} \frac{\partial \theta_z}{\partial b} \lesseqgtr 0 \end{aligned}$$

različite od nule i da ta osobina ima isto značenje kao i ranije, naime da ako postoji uslov

$$/40/ \qquad D\left(\frac{\theta_1, - - - - - , \theta_{n-m}}{x^{0}_{m+q+1},\dots, x^{0}_{n}, p^{0}_{m+1},\dots, p^{0}_{m+q}} \right) \lesseqgtr 0$$

onda rezultat eliminacije veličina $x^{0}_{m+q+1},\dots, x^{0}_{n}, p^{0}_{m+1},\dots, p^{0}_{n}$ iz prvih $(n-m+1)$ jednačina /10/ sadržavaće i veličine $x^{0}_{m+1},\dots, x^{0}_{n}, p^{0}_{m+q+1},\dots, p^{0}_{n}$, b. Prema tome može se iskazati sledeća teorema:

Da bi se iz integrala /10/, u kojima je na mesto z^{0} stavljena veličina b, odredjena jednačinom /34/, mogao dobiti potpuni integral treće vrste, potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi /38/, /39/ i /40/ za integrale karakteristika. Tada se eliminacijom veličina $x^{0}_{m+q+j}, p^{0}_{m+i}$ ($j = 1,\dots, n-m-q$; $i = 1,\dots, q$), gde je $0 \leq q \leq n-m$, iz $(n-m+1)$ prvih jednačina /10/ dobija jednačina tražene površine kao mesto karakteristika, a u kojoj su proizvoljne konstante integracije veličine $x^{0}_{m+1},\dots, x^{0}_{m+q}; p^{0}_{m+q+1},\dots, p^{0}_{n}, b$.

Uslovi /38/ mogu biti izvedeni i na drugi način kao što je to ranije pokazano.

§ 18. Potpuni integral koji sadrži opšte konstante integracije

Ostaje mi još da rešim sledeći zadatak: da pomoću sistema /9 konstruišem integralnu površinu sistema /1/, koja će biti mesto karakteristika i koja će zavisiti od $(n-m+1)$ proizvoljnih konstanata C_i, t.j. koja će biti potpuni integral datog sistema /1/.

Zbog toga je sada potrebno definisati karakteristike i odrediti potrebne i dovoljne uslove za integrale /9/ da bi se pomoću nji dobila gore pomenuta integralna površina.

Pretpostaviću da su prvih n-m jednačina /9/ rešljive odnosno bilo kojih n-m na broju konstanata, koje u tim jednačinama figurišu. Bez štete po opštost rešenja zadatka pretpostaviću da su one rešljive u odnosu na sledeće konstante: $C_{n-m+2}, C_{n-m+3}, \dots, C_{2n-2m+1}$, t.j. da postoji sledeći uslov:

$$/41/ \qquad \mathcal{D}\left(\frac{\varphi_1, \dots\dots\dots, \varphi_{n-m}}{C_{n-m+2}, \dots\dots, C_{2n-2m+1}}\right) \gtrless 0$$

Poznato je da integrali /9/ zadovoljavaju identički dati sistem /1/. Uočiću, zatim, "krivu liniju" datu sa prvih (n-m+1) jednačina /9/, za svaku tačku te "krive" raven koja je odredjena sa uglovnim koeficijentima $(\psi_1, \dots, \psi_n)$. Geometrisko mesto tih ravni čini razvojnu površinu, čiji deo, beskrajno blizak uočenoj "krivoj", takodje zadovoljava sistem /1/. Sada se, slično kao ranije, postavlja pitanje pod kojim uslovima ta "kriva" može da se pomakne da bi ona cela ležala na pomenutoj razvojnoj površini i bila beskrajno bliska svome početnom položaju. Ti uslovi bi bili potrebni i dovoljni da bi "kriva" kretanjem proizvela integralnu površinu. Zaista, tim novim položajem "krive", beskrajno blizak početnom bila bi odredjena nova zona integralne površine i ponovljenim postupcima dobili bismo nove zone integralne površine, pa i samu tu površinu.

Prilikom kretanja "krive" pretpostaviću da se menjaju konstante $C_{n-m+2}, C_{n-m+3}, \dots, C_{2n-2m+1}$, a da se ostale konstante ne menjaju. Označiću, opet, "krivu" u prvobitnom položaju sa (k_1), "krivu" u novom položaju sa (k_2) i na svakoj od njih po jednu tačku A, odnosno B. Ove tačke neka budu beskrajno bliske jedna drugoj i neka imaju koordinate $A\,(x_i, z)$ i $B\,(x_i+\delta x_i, z+\delta z)$. Tada veličina J se izražava

$$J = \delta z - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \delta x_i$$

i pretstavlja veličinu istog reda kao što je otstojanje tačke B od ravni $(\psi_1, \dots, \psi_n)$, koja je postavljena u tački A. Zbog učinjene pretpostavke o konstantama $C_{n-m+2}, \dots, C_{2n-2m+1}$ i zbog jednačina

$$\delta x_{m+2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_{n-m+k+1}} \delta C_{n-m+k+1} \quad (2=1, \dots, n-m)$$

$$\delta z = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial \psi}{\partial C_{n-m+k+1}} \delta C_{n-m+k+1}$$

tu veličinu možemo izraziti i na sledeći način:

$$J = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \psi_i - \sum_{2=1}^{n-m} \psi_{m+2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{n-m+k+1}} - \sum_{2=1} \psi_{m+2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_{n-m+k+1}}\right)\delta C_{n-m+k+1}$$

Ali, ako se uvedu oznake za karakteristične funkcije

$$/42/\quad U_{n-m+k+1} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial C_{n-m+k+1}} - \sum_{r=1}^{n-m} \psi_{m+r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial C_{n-m+k+1}} \qquad (k=1,\dots,n-m)$$

i uzmu u obzir identičnosti /14/ dobijamo

$$/43/\qquad J = \sum_{k=1}^{n-m} U_{n-m+k+1}\,\delta C_{n-m+k+1}$$

Koristeći navedeni rezultat Saltikova

$$U_{n-m+k+1} = U^{0}_{n-m+k+1}\, e^{-\int_{v_0}^{v} dv} \qquad (k=1,\dots,n-m)$$

vidimo da su karakteristične funkcije /42/ jednake ili različite od nule zajedno sa svojim početnim vrednostima $U^{0}_{n-m+k+1}$. Pri tome se ograničavamo na oblast promenljivih u kojoj integral u eksponentu ima konačnu i odredjenu vrednost.

Pomoću obrasca /43/ dobijaju se traženi uslovi za integrale karakteristika /9/. Naime, da bi "kriva" (k_2) ležala u razvojnoj površini opisanoj duž "krive" (k_1) potrebno je i dovoljno da veličina J stalno bude jednaka nuli. Prema tome potrebni i dovoljni uslovi su:

$$/44/\qquad U_{n-m+k+1} \equiv 0 \qquad (k=1,2,\dots,n-m)$$

Kako su uslovi /44/ izvedeni za makoja dva beskrajno bliska položaja "krivih" (k_1) i (k_2), to su onda oni potrebni i dovoljni da bi površina bila integral. Zbog učinjene pretpostavke /41/ možemo iz prvih (n-m) jednačina /9/ da izračunamo konstante $C_{n-m+2},\dots,C_{2n-2m+1}$ i da njihove tako nadjene vrednosti zamenimo u (n-m+1)-vu jednačinu /9/. To daje

$$/45/\qquad z = \phi(x_1,\dots,x_n, C_1,\dots,C_{n-m+1})$$

integralnu površinu sistema /1/.

Ostaje još da se nadju odgovarajući uslovi da bi površina /45 bila potpuni integral, t.j. da bi funkcija ϕ zavisila od konstanat $C_1,\dots,C_{n-m+1}$. Poći ću od očevidne identičnosti

$$\psi(x_1,\dots,x_m, C_1,\dots,C_{2n-2m+1}) \equiv \phi(x_1,\dots,x_m, \varphi_1,\dots,\varphi_{n-m}, C_1,\dots,C_{n-m+1})$$

koju ću parcijalno da diferenciram po konstantama $C_1,\dots,C_{n-m+1}$

$$/46/\qquad \frac{\partial \psi}{\partial C_i} - \sum_{r=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_{m+r}}\right)\frac{\partial \varphi_r}{\partial C_i} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial C_i}\right) \qquad (i=1,2,\dots,n-m+1)$$

gde gornje zagrade označavaju da je u funkciji ϕ na mesto x_{m+r} stavljamo φ_r. ($r = 1,\dots,n-m$). Pošto je površina /45/ integral na postoje veze

$$\psi_{m+r} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{m+r}} \qquad (r=1,\dots,n-m)$$

gde ψ_{m+r} označava rezultat eliminacije konstanata $C_{n-m+1},\dots,C_{2n-2m+1}$ iz desnih strana poslednjih (n-m) jednačina. Ako u tim vezama x_{m+r} smenimo sa φ_r dobićemo

$$\psi_{m+r} \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+r}}\right) \qquad (r=1,\dots,n-m)$$

Zbog toga identičnosti /46/ se izražavaju

$$U_i \equiv \frac{\partial \psi}{\partial C_i} - \sum_{r=1}^{n-m} \psi_{m+r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial C_i} \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial C_i}\right) \qquad (i=1,2,\dots,n-m+1)$$

Poslednje identičnosti pokazuju da ako postoje uslovi

$$/47/ \qquad U_i \lessgtr 0 \qquad (i=1,2,\dots,n-m+1)$$

onda je jednačina /45/ potpuni integral. Prema tome imamo teoremu:

Da bi se iz integrala /9/ mogao dobiti potpuni integral treba sve konstante C_i podeliti tako u dve grupe: $C_1,\dots,C_{n-m+1}$ i $C_{n-m+2},\dots,C_{2n-2m+1}$ da budu ispunjeni potrebni i dovoljni uslovi /41/, /44/ i /47/. Eliminacija druge grupe konstanata iz prvih (n-m+1) jednačina /9/ daje traženi potpuni integral kao mesto karakteristika /45/.

Napominjem takodje da se pomoću izlaganja u ovoj glavi može jednostavno geometriski objasniti i formirati t.zv. Cauchy-jev integral datog sistema /1/.

SPISAK LITERATURE

(1) G.Monge	-Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, Paris, 1795;
	-Application de l'Analyse à la géométrie, 5e édition, Paris, 1850;
(2) H.Leaute	-Étude géometrique du problème de l'intégration des équations differentielles partielles du premier ordre et à trois variables, Toulous, 1876 ;
(3) A.Cauchy	-Bulletin de la Societe Philomatique de France, Paris, 1819, p.10,
	-Exercices d'Analyse et de Physique Mathematique, Paris, 1824
(4) Pfaff	-Allgemeine Methode partielle Differentialgleichungen und gewöhnliche Differentialgleichungen, beide erster Ordnung, in belibig vielen Veränderlichen, vollständig zu integriren, No 129 zbirke Ostw.Klas.d.exacten Wissenschaften ;
(5) Jacobi	-Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen, Gesammelte Werke, t.IV, S 59-127 ;
(6) A.Mayer	-Über die Jacobi-Hamilton-sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Mathematische Analen, t.III.S.435 ;
(7) G.Darboux	-Sur la premiere methode de Jacobi pour l'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre. Comtes rendus, T.LXXX, p.160, 1875 ;
(8) J.Bertrand	-Sur la premiere methode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Comtes rendus, T.LXXXII, p.641, 1876 ;
(9) E.Goursat	-Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 1e i 2e edition, Paris, 1891 \ 1921
(10) N.Saltykow	-Étude sur les integrales de S.Lie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, Bulletin de l'Academie des sciences mathematiques et naturalles, A No 5, Belgrade, 1939 ;
(11) N.Saltykow	-Mémoire sur l'integration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Journal de Mathematiques pures et appliquees, 5e serie, t.V.1899, p.435 ;
	-Metode integriranja parcijalnih jednačina I reda s jednom nepoznatom funkcijom, Teorija karakteristika, glava VI i VIII, Srpska akademija nauka, posebno izdanje, knj. CXXXIX, Beograd, 1947 ;
(12) C.Caratheodory	-Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung, S.36-53, Leipzig und Berlin, 1935 ;
(13) Kamke	-Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen II Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung fur eine gesuchte Funktion, Leipzig, 1944 ;
(14) Legendre	-Mémoires sur l'intégration des quelques équations aux dérivées partielles, 1787 ;
(15) Paul du Bois Reymond	-Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei variabeln, Erste Heft: Die Theorie der Charakteristiken, 1864 ;

(16) G. Darboux — Mémoires sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Journal des savantes étrangers, t. XXVII, 1880 ;

(17) J. Hadamard — Cours d'Analyse, Tome seconde, Paris 1930 ;

(18) S. Lie — Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung insbesondere über eine Klassification derselben, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften u. G.A. Universität Göttingen, 1873, S. 473 ;

— Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen I Ordnung, Mathematische Annalen, Bd. IX, 1876, S. 250

(19) Frobenius — Über das Pfaffsche Problem, J. für Math. 82, 1877, S. 230–315

(20) H. Weber — Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnun Leipzig, 1910 ;

(21) E. Cartan — Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, Ann. de l'Ecole Normale Sup., (3), (16), 1899;

— Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Actualités scientifiques et industrielles, No 994, Paris 1945 ;

(22) E. Goursat — Leçons sur le problème de Pfaff, Paris 1922 ;

(23) П. Рашевский — Геометрическая теория уравнений с частными производными, Москва 1947 Ленинград;

(24) С. Фиников — Метод внешних форм, Картана в дифференциальной геометрии, Москва 1948 Ленинград ;

(25) F. Klein — Vorlesungen über höhere Geometrie, dritte Auflage, §§ 72–74, Berlin 1926 ;

(26) Н. Салтиков — Изслѣдованія по теоріи уравненій с частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, Харков 1905, стр. 142.