BOŽIDAR D. VUJANOVIĆ

GEOMETRIZACIJA KRETANJA I POREMEĆAJA NEKONVERZATIVNIH SISTEMA

U nizu primena savremene diferencijalne geometrije na racionalnu mehaniku, od naročitog je značaja problem geometrizacije kretanja. Pod ovim pojmom se obično podrazumeva iznalaženje takvog prostora u kome će diferencijalne jednačine kretanja imati što neposredniju i jednostavniju geometrijsku interpretaciju.

Geometrizacija u ovom smislu pokazala se naročito pogodna pri proučavanju izoenergiskih - konzervativnih sistema. Poznato je, naime da se Mopertijev princip može iskazati u obliku koji eksplicira njegov geometrijski karakter:

<u>Trajektorije konzervativnog dinamičkog sistema su geodeziske linije u Rimanovom konfiguracionom prostoru akcione metrike.</u> [1], [10], [12].

Cilj ovoga rada je da, sa jedne strane, proširi primenu Mopertijevog principa na nekonzervativne sisteme, /ne tretirajući ga kao varijacioni princip već imajući u vidu njegov geometrijski smisao u gore navedenom obliku/, a sa druge strane, primeni dobijene rezultate na proučavanje poremećaja holonomnih skleronomnih dinamičkih sistema.

Problemom geometrizacije kretanja čiji je pionir Sing [10] bavilo se dosta autora. Medjutim, problemom geometrizacije Mopertijevog principa i njegovim proširenjem na nekonzervativne sisteme, bavio se samo A. Lihnerović [2], koji je uglavnom proučavao prirodu dobijenih prostora. Pitanje geometrizacije poremećaja kako konzervativnih tako i nekonzervativnih sistema i povezivanje ove teorije sa grupom afinih kretanja nije do sad tretirano.

1. GEOMETRIZACIJA KRETANJA NEKONZERVATIVNIH SISTEMA

Neka je neki dinamički sistem* odredjen u odnosu na nezavisne koordinate $q^\lambda\ (\lambda = 1, 2, \dots n)$ živom silom

/1.1/ $$2T = g_{\lambda\mu} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu \quad \text{gde je} \quad \dot{q} \equiv \frac{dq^\lambda}{dt}$$

i aktivnim generalisanim nekonzervativnim silama Q^λ koje su samo funkcije položaja.

Elementarni rad na stvarnim pomeranjima dq^λ dat je izrazom

$$dA = Q_\lambda dq^\lambda$$

Zakon žive sile u diferencijalnom obliku glasi:

/1.2/ $$dT = dA$$

Diferencijalne jednačine geodeziskih linija, u nekom linearno povezanom prostoru L_n sa koeficijentima povezanosti $\Gamma^\omega_{\mu\lambda}$ glase:

/1.3/ $$\frac{\overset{\Gamma}{\delta} \dot{q}^\omega}{dt_\Gamma} \equiv \ddot{q}^\omega + \Gamma^\omega_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = \theta \dot{q}^\omega,$$

gde simbol δ/dt_Γ označava apsolutni izvod po vremenu u odnosu na koeficijente povezanosti .

Zadatak koji želimo da rešimo sastoja bi se u sledećem:

Odrediti skalarni množilac θ i sistem koeficijenata povezanosti $\Gamma^\omega_{\mu\nu}$ iz /1.3/ tako, da jednačina /1.2/ bude zadovoljena, a da se jednačine /1.3/ svedu na diferencijalne jednačine kretanja:

/1.4/ $$\frac{\overset{*}{\delta} \dot{q}^\omega}{dt} \equiv \ddot{q}^\omega + \left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu = Q^\omega$$

---

* Misli se na neholonomne skleronomne dinamičke sisteme,

S A D R Ž A J

Pošto se apsolutni diferencijal skalara poklapa sa običnim diferencijalom, to ćemo diferenciranjem /1.1/ dobiti

$$2dT = (\overset{\Gamma}{\delta} g_{\lambda\mu})\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu} + 2g_{\lambda\mu}(\overset{\Gamma}{\delta}\dot{q}^{\lambda})\dot{q}^{\mu}$$

Iz /1.3/ sledi da je $\overset{\Gamma}{\delta}\dot{q}^{\lambda} = \theta\dot{q}^{\lambda}dt \equiv \theta dq^{\lambda}$; pa poslednja jednačina postaje:

$$2dT \equiv (\overset{\Gamma}{\delta} g_{\lambda\mu})\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu} + g_{\lambda\mu}\,\theta\,\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}dt$$

Koristeći /1.2/ i identičnost /1.1/ imaćemo:

$$(\overset{\Gamma}{\delta} g_{\lambda\mu})\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu} + 2\theta g_{\lambda\mu}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}dt = 2dA = 2Q_{\lambda}dq^{\lambda} = \frac{2dA}{2T}g_{\lambda\mu}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}$$

odnosno

$$/1.5/ \quad (\overset{\Gamma}{\delta} g_{\lambda\mu} + 2\theta g_{\lambda\mu}dt - 2\frac{dA}{2T}g_{\lambda\mu})\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu} = 0$$

Kako je izraz u zgradi simetričan mora biti /[3] str.16/

$$/1.5'/ \quad \overset{\Gamma}{\delta} g_{\lambda\mu} = -2\left(\theta dt - \frac{dA}{2T}\right)g_{\lambda\mu}$$

U opštem slučaju je u L_n /[4], str.86/

$$\overset{\Gamma}{\delta} g_{\lambda\mu} = \overset{\Gamma}{\nabla}_{\nu} g_{\lambda\mu}dq^{\nu} \equiv -Q_{\nu\lambda\mu}dq^{\nu}$$

odnosno: $\overset{\Gamma}{\nabla}_{\nu} g_{\lambda\mu} = -Q_{\nu\lambda\mu}$ gde simbol $\overset{\Gamma}{\nabla}_{\nu}$ označava kovarijantni izvod u odnosu na sistem koeficijenata povezanosti Γ ;

Iz jednačina:

$$\partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\omega}_{\nu\lambda}g_{\omega\mu} - \Gamma^{\omega}_{\nu\mu}g_{\lambda\omega} \equiv -Q_{\nu\lambda\mu}$$

za zadano $Q_{\nu\lambda\mu}$ /tj. ako su poznati kovarijantni izvodi pomoćnog tenzora $g_{\lambda\mu}$/, imamo da je: / [4] , str.86 /

$$/1.6/ \quad \Gamma^{\omega}_{\lambda\mu} = \left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega} - S_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\omega} + S^{\omega}_{\cdot\lambda\mu} + \\ + \frac{1}{2}\left(g^{\omega\nu} Q_{\lambda\mu\nu} + g^{\omega\nu} Q_{\mu\nu\lambda} - g^{\omega\nu} Q_{\nu\lambda\mu} \right)$$

ovde je $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega}$ t.zv.tenzor torzije, a $\left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\}$ Kristofelovi simboli druge vrste obrazovani u odnosu na pomoćni tenzor $g_{\lambda\mu}$.

U našem slučaju je:

$$/1.7/ \quad 2\left(\theta dt - \frac{dA}{2T}\right) g_{\lambda\mu} \equiv Q_{\nu\lambda\mu}\, dq^{\nu}$$

Pretpostavimo da je skalarni množilac θ iz /1.3/ oblika:

$$\theta = \theta_\nu \dot{q}^{\nu}$$

gde su θ_ν kovarijantni vektori koje treba odrediti.

Na osnovu uvedene predpostavke, /1.7/ postoje:

$$/1.8/ \quad 2\left(\theta_\nu - \frac{Q_\nu}{2T}\right) g_{\lambda\mu} \equiv Q_{\nu\lambda\mu} = 2\Phi_\nu\, g_{\lambda\mu} \; ; \text{ gde je}$$

$$/1.9/ \quad \Phi_\nu \equiv \theta_\nu - \frac{Q_\nu}{2T}$$

Jednačine /1.5'/ odnosno /1.8/ definišu kvazi-metričku povezanost. Za odredjivanje koeficijenata $\Gamma^{\omega}_{\lambda\mu}$ treba odrediti θ_ν i tenzor torzije $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega}$. Medjutim, geodeziske linije ne zavise od tenzora torzije, naime

$$\left(S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega} - S_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\omega} + S^{\omega}_{\cdot\lambda\mu} \right) \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\mu} \equiv 0,$$

i /1.3/ postaje:

$$\frac{\overset{\Gamma}{\delta} \dot{q}^{\omega}}{dt} \equiv \ddot{q}^{\omega} + \left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\mu} + g^{\nu\omega}\left(\Phi_\lambda g_{\mu\nu} + \Phi_\mu g_{\nu\lambda} - \Phi_\nu g_{\lambda\mu} \right) \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\mu} = \theta_\nu \dot{q}^{\nu} \dot{q}^{\omega}$$

odnosno zbog /1.1/ imaćemo

$$\ddot{q}^{\omega}+\left\{{\omega \atop \lambda\mu}\right\}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}+2g^{\nu\omega}\Phi_{\lambda}g_{\mu\nu}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}-2Tg^{\nu\omega}\Phi_{\nu}=\Phi_{\nu}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\omega}\ ;$$

$$\frac{\overset{\varphi}{\delta}\dot{q}^{\omega}}{dt}=\theta_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}-2g^{\nu\omega}\Phi_{\lambda}g_{\mu\nu}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}+2Tg^{\nu\omega}\Phi_{\nu}$$

Da bi bio ispnjen uslov zadatka /1.4/ mora biti:

$$\theta_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}-2g^{\nu\omega}\Phi_{\lambda}g_{\mu\nu}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}+2Tg^{\nu\omega}\Phi_{\nu}\equiv Q^{\omega}\ ;$$

$$\theta_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}-2\Phi_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}+g^{\omega\nu}\Phi_{\nu}\cdot 2T\equiv Q^{\omega}$$

Posle zamene /1.9/ u poslednji izraz, imaćemo:

$$\theta_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}-2\theta_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}+\frac{Q_{\nu}}{T}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}+2Tg^{\omega\nu}\theta_{\nu}-g^{\omega\lambda}Q_{\lambda}\equiv Q^{\omega};$$

$$-\theta_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega}+2Tg^{\omega\nu}\theta_{\nu}\equiv 2Q^{\omega}-\frac{1}{T}Q_{\nu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega};$$

$$\theta_{\nu}(2Tg^{\omega\nu}-\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega})\equiv\frac{Q_{\nu}}{T}(2Tg^{\omega\nu}-\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\omega})$$

pa je

$$/1.10/\quad \theta_{\nu}=\frac{Q_{\nu}}{T}$$

i konačno imamo

$$/1.11/\quad \theta=\frac{Q_{\nu}\dot{q}^{\nu}}{T}$$

i

$$/1.12/\quad Q_{\nu\lambda\mu}\equiv 2\left(\theta_{\nu}-\frac{Q_{\nu}}{2T}\right)g_{\lambda\mu}=2\left(\frac{Q_{\nu}}{T}-\frac{Q_{\nu}}{2T}\right)g_{\lambda\mu}\equiv\frac{Q_{\nu}}{T}g_{\lambda\mu}$$

Traženi koeficijenti povezanosti imaju vrednosti:

$$/1.13/\quad \Gamma^{\omega}_{\lambda\mu}=\left\{{\omega \atop \lambda\mu}\right\}+\Sigma^{\cdot\cdot\omega}_{\lambda\mu}+\frac{1}{2T}g^{\omega\nu}(Q_{\lambda}g_{\mu\nu}+Q_{\mu}g_{\nu\lambda}-Q_{\nu}g_{\lambda\mu})$$
$$\equiv\left\{{\omega \atop \lambda\mu}\right\}+\Sigma^{\cdot\cdot\omega}_{\lambda\mu}+\frac{1}{2T}(Q_{\lambda}\delta^{\omega}_{\mu}+Q_{\mu}\delta^{\omega}_{\lambda}-Q^{\omega}g_{\lambda\mu})$$

gde je sa $\Sigma^{\cdot\cdot\omega}_{\lambda\mu}$ označen deo koji zavisi od torzije,

$$\Sigma^{\cdot\cdot\omega}_{\lambda\mu}\equiv S^{\cdot\cdot\omega}_{\lambda\mu}-S^{\cdot\omega}_{\mu\cdot\lambda}+S^{\omega}_{\cdot\lambda\mu}$$

koji je ostao proizvoljan jer ga uslovi zadatka ne odredjuju.

Na osnovu /1.13/ i /1.11/ diferencijalne jednačine kretanja postaju:

$$/1.14/ \qquad \frac{\overset{\Gamma}{\delta} \dot{q}^{\omega}}{dt} - \theta \dot{q}^{\omega} \equiv \frac{\overset{g}{\delta} \dot{q}^{\omega}}{dt} - Q^{\omega} = 0$$

Množenjem gornje jednačine sa $\dot{q}^{\tau}$ imaćemo:

$$\frac{\overset{\Gamma}{\delta} \dot{q}^{\omega}}{dt} \dot{q}^{\tau} = \theta \dot{q}^{\omega} \dot{q}^{\tau}$$

isto tako je

$$\frac{\overset{\Gamma}{\delta} \dot{q}^{\tau}}{dt} \dot{q}^{\omega} = \theta \dot{q}^{\omega} \dot{q}^{\tau}.$$

Pa je

$$\frac{\overset{\Gamma}{\delta} \dot{q}^{\omega}}{dt} \dot{q}^{\tau} - \frac{\overset{\Gamma}{\delta} \dot{q}^{\tau}}{dt} \dot{q}^{\omega} = 0$$

ili: /[3], str.131/

$$/1.15/ \qquad \ddot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\tau} - \ddot{q}^{\tau} \dot{q}^{\lambda} + \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \dot{q}^{\tau} - \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} \dot{q}^{\lambda} \right) \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} = 0$$

Jednačine /1.14/ odnosno /1.15/ su poznate kao diferencijalne jednačine geodeziskih linija, napisane u odnosu na proizvoljni parametar t.

Na osnovu iznetog možemo formulisati sledeći:

STAV: <u>Holonomni, nekonzervativni, skleronomni dinamički sistem kreće se po geodeziskoj liniji, u konfiguracionom prostoru sa koeficijentima povezanosti /1.13/</u>

Iz teorije trajektorija poznato je / [5], str.159 / da će se dinamički sistem kretati po geodeziskoj liniji i u slučaju kada polje sila, koje na njega deluje, ima pravac tangente na trajektoriju u svakoj tački /osobene trajektorije, trajectories remarquables/. U vezi sa ovim može se primenitti da su intencije gornjeg izvodjenja bile, da se pronadje prostor u kome će naš dinamički sistem da se kreće po osobenim trajektorijama, što se jasno vidi iz jednačine /1.13/ koju možemo interpretirati kao drugi Njutnov zakon, gde je na desnoj strani "sila": $\bar{Q}^{\lambda} \equiv \theta \dot{q}^{\lambda}$

Pronadjimo sada takav linearno povezani prostor u kome će vreme biti afini parametar.

Iz diferencijalne geometrije je poznato, da će dva linearno povezana prostora imati iste geodeziske linije ukoliko im se koeficijenti povezanosti razlikuju za tenzor: /[6] , str.156/

$$\Gamma^{\omega}_{\lambda\mu} - \Pi^{\omega}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2T}\left(Q_{\lambda}\delta^{\omega}_{\mu} + Q_{\mu}\delta^{\omega}_{\lambda}\right) \qquad /1.16/$$

Iz /1.13/ vidi se da je u našem slučaju

$$\Pi^{\omega}_{\lambda\mu} \equiv \left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} + \Sigma_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega} - \frac{1}{2T} Q^{\omega} g_{\lambda\mu} \qquad /1.17/$$

Linearno povezani prostori $L_n(\Gamma)$ i $L_n(\Pi)$ su dinamički potpuno ekvivalentni jer je ispunjen uslov /1.16/ a diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na sistem koeficijenata povezanosti /1.17/ glase:

$$\frac{\overset{\Pi}{\delta} \dot{q}^{\omega}}{dt} \equiv \frac{\overset{g}{\delta} \dot{q}^{\omega}}{dt} - Q^{\omega} = 0 \qquad /1.18/$$

Ovde neposredno sledi da se dinamički nekonzervativni sistem kreće po geodeziskoj liniji u prostoru sa koeficijentima povezanosti /1.17/ i u tom prostoru vreme igra ulogu afinog parametra.

2. TRAJEKTORIJE NEKONZERVATIVNOG SISTEMA

Ako iz jednačina /1.14/

$$/2.1/ \quad \ddot{q}^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} = 2 \frac{Q_{\sigma} \dot{q}^{\sigma}}{2T} \dot{q}^{\lambda}$$

eliminišemo vreme i uvedemo kao promenljivi parametar luk, definisan sa

$$/2.2/ \quad ds^2 = g_{\lambda\mu} dq^{\lambda} dq^{\mu} \equiv 2T dt^2$$

imaćemo

$$/2.3/ \quad \dot{q}^{\lambda} = \frac{dq^{\lambda}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$/2.4/ \quad \ddot{q}^{\lambda} = \frac{d^2 q^{\lambda}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dq^{\lambda}}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Podjimo opet od zakona žive sile /1.2/ u obliku

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2 Q_{\lambda} dq^{\lambda}$$

pa sledi

$$/2.5/ \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = Q_{\lambda} \frac{dq^{\lambda}}{ds}$$

Zamenom /2.5/ u /2.4/ imamo:

$$/2.4'/ \quad \ddot{q}^{\lambda} = \frac{d^2 q^{\lambda}}{ds^2} 2T + Q_{\sigma} \frac{dq^{\sigma}}{ds} \frac{dq^{\lambda}}{ds}$$

Jednačina /2.1/ postaje

$$\frac{d^2 q^{\lambda}}{ds^2} 2T + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dq^{\mu}}{ds} \frac{dq^{\nu}}{ds} \cdot 2T = 2 \frac{Q_{\sigma}}{2T} \frac{dq^{\sigma}}{ds} \frac{dq^{\lambda}}{ds} \cdot 2T - Q_{\sigma} \frac{dq^{\sigma}}{ds} \frac{dq^{\lambda}}{ds}$$

Odnosno: $\dfrac{\overset{\Gamma}{\delta} q'^{\omega}}{ds} \equiv \dfrac{Q_\lambda}{2T} q'^{\lambda} q'^{\omega}$ gde je $\left\{ q' \equiv \dfrac{dq}{ds} \right\}$

Medjutim je

$$\frac{\overset{\Gamma}{\delta} q'^{\omega}}{ds} - \frac{1}{2T} Q_\lambda q'^{\lambda} q'^{\mu} \equiv q''^{\omega} + \left[\left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} + \frac{1}{2T}\left(Q_\lambda \delta^{\omega}_{\mu} + Q_\mu \delta^{\omega}_{\lambda} - Q^{\omega} g_{\lambda\mu} \right) - \frac{1}{2T} Q_\lambda \delta^{\omega}_{\mu} \right] q'^{\lambda} q'^{\mu} = 0$$

ili

$$\frac{\overset{\Gamma}{\delta} q'^{\omega}}{ds} - \frac{1}{2T} Q_\lambda q'^{\lambda} q'^{\mu} \equiv q''^{\omega} + \left[\left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} + \frac{1}{2T}\left(Q_\mu \delta^{\omega}_{\lambda} - Q^{\omega} g_{\lambda\mu} \right) \right] q'^{\lambda} q'^{\mu} = 0$$

Nesimetrični deo koeficijenata povezanosti ne igra nikakvu ulogu u razmatranju, pa posmatrajmo samo <u>simetrični</u> deo izraza u srednjoj zagradi:

$$/2.6/ \quad q''^{\omega} + \left[\left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} - \frac{1}{2T} Q^{\omega} g_{\lambda\mu} + \frac{1}{4T}\left(Q_\mu \delta^{\omega}_{\lambda} + Q_\lambda \delta^{\omega}_{\mu} \right) \right] q'^{\lambda} q'^{\mu} = 0$$

Stavljajući

$$/2.7/ \quad \overset{*}{\Pi}{}^{\omega}_{\lambda\mu} \equiv \left\{ {\omega \atop \lambda\mu} \right\} + \frac{1}{4T}\left(Q_\mu \delta^{\omega}_{\lambda} + Q_\lambda \delta^{\omega}_{\mu} \right) - \frac{1}{2T} Q^{\omega} g_{\lambda\mu}$$

diferencijalne jednačine trajektorija, mogu se napisati u obliku:

$$/2.8/ \quad \frac{\overset{\overset{*}{\Pi}}{\delta} q'^{\omega}}{ds} \equiv q''^{\omega} + \overset{*}{\Pi}{}^{\omega}_{\lambda\mu} q'^{\lambda} q'^{\mu} \equiv \frac{\overset{g}{\delta} q'^{\omega}}{ds} - \frac{1}{2T}\left(Q^{\omega} - Q_\sigma q'^{\sigma} q'^{\omega} \right) = 0$$

Iz izloženog sledi

STAV: <u>Trajektorije nekonzervativnog skleronomnog dinamičkog sistema jesu geodeziske linije u linearno povezanom prostoru $L_n(\overset{*}{\Pi})$ sa koeficijentima povezanosti /2.7/. U ovom prostoru je dužina luka s afini parametar.</u>

3. KOEFICIJENTI POVEZANOSTI

Koeficijenti povezanosti: /1.13/, /1.17/ i /2.7/ su geodeziski ekvivalentni, tj. diferencijalne jednačine kretanja napisane u odnosu na ove povezanosti, ne razlikuju se medju sobodm. Pošto je

$$\Gamma^{\omega}_{\lambda\mu} - \Pi^{\omega}_{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2T}\left(Q_\lambda \delta^{\omega}_{\mu} + Q_\mu \delta^{\omega}_{\lambda}\right)$$

$$\Gamma^{\omega}_{\lambda\mu} - \overset{*}{\Pi}{}^{\omega}_{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{4T}\left(Q_\lambda \delta^{\omega}_{\mu} + Q_\mu \delta^{\omega}_{\lambda}\right)$$

$$\Pi^{\omega}_{\lambda\mu} - \overset{*}{\Pi}{}^{\omega}_{\lambda\mu} = \frac{1}{4T}\left(Q_\lambda \delta^{\omega}_{\mu} + Q_\mu \delta^{\omega}_{\lambda}\right)$$

sve tri linearne povezanosti imaju iste geodeziske linije,pa su i sva tri linearno povezana prostora

$$L_n(\Gamma),\ L_n(\Pi),\ L_n(\overset{*}{\Pi})$$

<u>dinamički ekvivalentna.</u>

Pošto je svaka od navedenih povezanosti funkcija i koordinata i izvoda koordinata po vremenu, jer svaka zavisi od žive sile sistema, to one pripadaju klasi t.zv. <u>Generalisanih afinih geodeziskih prostora,</u> koje je 1928. g. pronašao J. Duglas / [7], str.143 - 168 / a kasnije razradio K. Yano / [8] , str.185 - 194 /.

Navodimo bez dokaza nekoliko činjenica, koje se odnose na ove prostore a koje će nam trebati kasnije.

Apsolutni diferencijal vektora u generalisanom afinom geodeziskom prostoru, u odnosu na koeficijente povezanosti Γ je:

/3.1/ $$\delta v^{\omega} \overset{def}{=} dv^{\omega} + \Gamma^{\omega}_{\mu\lambda} dq^{\mu} v^{\lambda}$$

a kovarijatni izvod

$$/3.2/ \quad \overset{\Gamma}{\nabla}_\mu v^\varkappa \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \partial_\mu v^\varkappa - \Gamma_\mu^\varrho \dot{\partial}_\varrho v^\varkappa + \Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa v^\lambda \quad i$$

$$/3.3/ \quad \dot{\overset{\Gamma}{\nabla}}_\mu v^\varkappa \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \overset{\circ}{\partial}_\mu v^\varkappa$$

gde su uvedne oznake $\dot{\partial}_\varrho \equiv \dfrac{\partial}{\partial\left(\frac{dq^\varrho}{dt}\right)}$ i $\Gamma_\mu^\varrho \equiv \Gamma_{\mu\lambda}^\varrho \dfrac{dq^\lambda}{dt}$

Dalje su

$$/3.4/ \quad R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = \left(\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa - \Gamma_\nu^\varrho \dot{\partial}_\varrho \Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa\right) - \left(\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\varkappa - \Gamma_\mu^\varrho \dot{\partial}_\varrho \Gamma_{\lambda\nu}^\varkappa\right) + \\ + \Gamma_{\nu\varrho}^\varkappa \Gamma_{\mu\lambda}^\varrho - \Gamma_{\mu\varrho}^\varkappa \Gamma_{\nu\lambda}^\varrho$$

i

$$/3.5/ \quad T_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = \dot{\partial}_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa$$

t.zv. tenzori krivine.

Liov izvod koeficijenata povezanosti u generalisanom afinom geodeziskom prostoru, u polju vektora ξ , glasi:

$$/3.6/ \quad \underset{\xi}{\mathcal{L}} \Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa \equiv \nabla_\mu \nabla_\lambda \xi^\varkappa + R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} \xi^\nu + T_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} \frac{dq^\varrho}{dt} \overset{\Gamma}{\nabla}_\varrho \xi^\varkappa$$

4. NAPOMENA O KONZERVATIVNIM SISTEMIMA

Geometrizacija kretanja nekonzervativnih sistema sadrži u sebi konzervativna kretanja kao specijalan slučaj. Namera nam je da podvučemo razlike /geometrijskog karaktera/ koje karakterišu geometrisku interpretaciju kretanja, jednih i drugih sistema.

Podjimo pre svega od činjenice da se živa sila sistema /1.1/ može shvatiti kao kvadrat brzine u konfiguracionom prostoru, naime

/4.1/ $$2T \equiv v^2 \equiv g_{\lambda\mu}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\mu}$$

U tom slučaju zakon žive sile /1.2/ izgleda

/4.2/ $$dv^2 = 2\,\frac{Q_\lambda dq^\lambda}{2T}\,v^2$$

Kako je u osnovi naše geometrizacije postavljen uslov da se vektor brzine $\dot{q}^{\lambda}$ paralelno pomera duž trajektorije, to jednačina /4.2/ implicira generalisani afini geodeziski prostor /<u>Vajlovog tipa</u>. / [9] , str.22/. Ova jednačina podvlači, u isto vreme, razliku izmedju Rimanovog i Vajlovog prostora. Naime, u Rimanovom prostoru, pri paralelnom pomeranju, dužina vektora ostaje nepromenjena, dok se u Vajlovom menja po zakonu /4.2/ koji se naziva <u>kongruentno pomeranje</u>.

Kada se u jednačinu /1.5'/ zameni vrednost za ϑ iz /1.11/ imamo

/4.3/ $$\overset{\Gamma}{\delta} g_{\lambda\mu} = -\frac{Q_\nu}{T}\,dq^\nu\, g_{\lambda\mu}$$

odnosno

$$/4.4/ \quad \overset{\Gamma}{\nabla}_{\nu} g_{\lambda\mu} = -\frac{Q_{\nu}}{T} g_{\lambda\mu}$$

Namesto tenzora $g_{\lambda\mu}$, uvedimo drugi tenzor $\bar{g}_{\lambda\mu}$, koji je proporcionalan sa prvim:

$$/4.5/ \quad \bar{g}_{\lambda\mu} = \sigma^2 g_{\lambda\mu}$$

gde je σ proizvoljni skalarni faktor.

Kvarijantnim diferenciranjem /4.5/ dobićemo:

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{\nu} \bar{g}_{\lambda\mu} = 2\sigma g_{\lambda\mu} \partial_{\nu}\sigma - 2\sigma^2 \frac{Q_{\nu} g_{\lambda\mu}}{2T}$$

a zbog /4.4/ i /4.5/ biće:

$$/4.6/ \quad \nabla_{\nu} \bar{g}_{\lambda\mu} = 2\left(\frac{\partial_{\nu}\sigma}{\sigma} - \frac{Q_{\nu}}{2T}\right)\bar{g}_{\lambda\mu} = -\frac{\bar{Q}_{\nu}}{T} g_{\lambda\mu}$$

gde je:

$$/4.7/ \quad \bar{Q}_{\nu} = 2\frac{\partial_{\nu}\sigma}{\sigma} T - Q_{\nu}$$

Prema tome, moguće je pomnožiti proizvodljnom funkcijom $\sigma(q)$ fundamentalni tenzor $g_{\lambda\mu}$, a da se oblik jednačine /4.4/ ne promeni. Ovo znači, da u geodeziskom afinom prostoru Vajlovog tipa, nije moguće potpuno odrediti fundamentalni metrički tenzor, a samim tim ne postoji akcioni linijski elemenat.

Pokažimo da je za konzervativne sisteme, akcioni linijski elemenat jednoznačajno odredjen, i da je prostor u tom slučaju Rimanov. Označimo sa U funkciju sile a sa h totalnu energiju sistema koja je u ovom slučaju konstantna.

tada je

/4.8/ $Q_\nu \equiv \partial_\nu U$ i

/4.9/ $T = U + h$

Zamenom ovih vrednosti u /4.6/ imaćemo:

/4.6'/ $$\overset{\Gamma}{\nabla}_\nu \bar{g}_{\lambda\mu} = 2\left[\frac{\partial_\nu \sigma}{\sigma} - \frac{\partial_\nu U}{2(U+h)}\right]\bar{g}_{\lambda\mu}$$

Izaberimo skalar σ tako da je

/4.10/ $$\frac{\partial_\nu \sigma}{\sigma} = \frac{\partial_\nu U}{2(U+h)}$$

pa sledi:

/4.11/ $\sigma^2 = C(U+h)$

Jednačina /4.5/ tada postaje

ili $\bar{g}_{\lambda\mu} = C(U+h)g_{\lambda\mu}$

/4.12/ $d\bar{s}^2 = C(U+h)ds^2 \;;\; C = const$

što predstavlja akcioni linijski elemenat.

Za vrednost σ iz /4.11/ prostor sa koeficijentima povezanosti postoje Rimanov što sledi iz /4.6'/

Prema tome za slučaj konzervativnog sistema, moguće je konformnom transformacijom /4.5/, izvršiti prenormiranje metričkog tenzora tako da jednačina

/4.13/ $$\overset{\Gamma}{\nabla}_\nu \bar{g}_{\lambda\mu} = -\frac{\partial_\nu U\, g_{\lambda\mu}}{U+h}$$

postane:

$$/4.14/ \quad \overset{\Gamma}{\nabla}_\nu \bar{g}_{\lambda\mu} = 0$$

$$\div$$

Dokažimo malopredjašnje tvrdjenje, da fundamentalni tenzor nije u potpunosti odredjen, na taj način, što ćemo pokazati da ne postoji vrednost σ iz /4.6'/ takva da je

$$/4.15/ \quad \frac{\partial_\nu \sigma}{\sigma} = \frac{Q_\nu}{2T}$$

za slučaj da je sistem nekonzervativan.
Pomnožimo ovu jednačinu sa dq^ν i izvršimo sabiranje, pa ćemo imati

$$/4.16/ \quad d(\ln \sigma) = \frac{Q_\nu dq^\nu}{2T}$$

Kako $Q_\nu dq^\nu$ po predpostavci nije totalni diferencijal a faktor $1/2T$ ne može da bude integracioni faktor /integracioni faktor može da bude konačna funkcija a ne kvadratna diferencijalna forma/, jednačina /4.16/ gubi smisao i naše tvrdjenje je dokazano.
Prema tome, izraz /4.7/ mogao bi se shvatiti kao geometriska mera nekonzervativnosti uočenog dinamičkog sistema. Na kraju, napomenimo da konstanta $\mathbb{C}$ u /4.12/, ne igra bitnu ulogu, jer je lemenat luka u diferencijalnoj geomet iji odredjen do na konstantu.

II DEO

TEORIJA POREMEĆAJA HOLONOMNIH SKALERONOMNIH SISTEMA

5. POREMEĆAJI U SMISLU SINGA

Za izučavanje poremećenog kretanja skleronomnih holonomnih dinamičkih sistema podjimo od Lagrančevih jednačina druge vrste, rešenih po ubrzanjima:

/5.1/ $$\ddot{q}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = Q^{\alpha} \; ; \quad \left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}_{g}\right)$$

gde generalisana sila Q^{α} zavisi samo od položaja.
Predpostavimo da nam je poznato jedno rešenje jednačina /5.1/ recimo

/5.2/ $$q^{\alpha} = q^{\alpha}(t)$$

i neka je takvo kretanje poremećeno iz bilo kojeg razloga. Predpostavljajući da su poremećaji dovoljno mali, za jednačine poremećenog kretanja možemo uzeti:

/5.3/ $$\bar{q}^{\alpha} = q^{\alpha} + x^{\alpha}(t)$$

gde je x^{α} vektor poremećaja.
Predpostavićemo da i poremećeno kretanje zadovoljava jednačine /5.1/ kako je to uobičajeno u teoriji poremećaja, naime:

$$\ddot{\bar{q}}^{\alpha} + \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{\bar{q}}^{\beta}\dot{\bar{q}}^{\gamma} = \bar{Q}^{\alpha}$$

Razvijajući veličine $\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ i $\bar{Q}^{\alpha}$ u red, pod predpostavkom da su vektori x^{α} male veličine prvog reda, imaćemo u prvoj aproksimaciji:

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + x^{\delta}\partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \quad \text{i}$$
$$\bar{Q}^{\alpha} = Q^{\alpha} + x^{\beta}\partial_{\beta}Q^{\alpha}$$

Zamenom ovih vrednosti i vrednosti /5.3/ u /5.1/ biće:

$$\ddot{q}^{\alpha}+\ddot{x}^{\alpha}+(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+x^{\delta}\partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})(\dot{q}^{\beta}+\dot{x}^{\beta})(\dot{q}^{\gamma}+\dot{x}^{\gamma})=Q^{\alpha}+x^{\beta}\partial_{\beta}Q^{\alpha}$$

množenjem izraza u zgradi i zadržavajući se na veličinama prvog reda, a zbog /5.1/ dobićemo:

$$/5.4/ \quad \ddot{x}^{\alpha}+2\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}+x^{\delta}\partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}=x^{\beta}\partial_{\beta}Q^{\alpha}$$

Ove jednačine ćemo zvati <u>klasične jednačine</u> teorije poremećaja, Suština sledećih transformacija, koje pripadaju Singu, / [10], str.31 - 106 /, sastoji se u tome, da se gornje jednačine napišu u invarijantnom obliku. Invarijantnost se postiže time, što se veličine $\dot{x}^{\alpha}$ i $\ddot{x}^{\alpha}$ zamene sa apsolutnim izvodima $\frac{\delta x^{\alpha}}{dt}$ i $\frac{\delta^2 x^{\alpha}}{dt^2}$.

Znamo da je

$$\frac{\delta x^{\alpha}}{dt}=\frac{dx^{\alpha}}{dt}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dq^{\beta}}{dt}x^{\gamma} \quad \text{i}$$

$$\frac{\delta^2 x^{\alpha}}{dt^2}=\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}+\partial_{\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\varkappa\sigma}\dot{q}^{\lambda}\dot{q}^{\varkappa}x^{\sigma}+\Gamma^{\alpha}_{\varkappa\sigma}\ddot{q}^{\varkappa}x^{\sigma}+\Gamma^{\alpha}_{\varkappa\sigma}\dot{q}^{\varkappa}\dot{x}^{\sigma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\omega\overline{u}}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\omega}x^{\overline{u}}$$

ako se na desnoj strani poslednje jednačine mesto $\ddot{q}^{\varkappa}$ stavi njegova vrednost iz /5.1/ posle dužeg, ali lakog računa jednačine

/5.4/ postaju:

$$/5.5/ \quad \frac{\delta^2 x^{\alpha}}{dt^2}+R_{\gamma\delta\beta}^{\cdots\alpha}x^{\delta}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}=x^{\delta}\nabla_{\delta}Q^{\alpha}$$

Ove jednačine je prvi izveo Sing i primenjene su na čitav niz konkretnih problema iz oblasti stabilnosti kretanja. /na primer:

15 str. 635-641 /.

6. POREMEĆAJ PUTANJA

Činjenica da su trajektorije konzervativnog dinamičkog sistema, geodeziske linije u prostoru akcionog linijskog elementa /4.12/, pruža vrlo velike mogućnosti za proučavanje poremećaja putanja i njihovu geometrizaciju.

Podjimo od diferencijalnih jednačina trajektorija:

$$/6.1/ \quad \frac{d^2q^\alpha}{d\sigma^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{d\sigma}\frac{dq^\gamma}{d\sigma}=0$$

gde je: $d\sigma^2=\mathbb{C}\,(U+h)\,ds^2\,;\ ds^2=2T\,dt^2$

a $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ koeficijenti povezanosti obrazovani u odnosu na akcionu metriku. Na osnovu analize izvršene u odeljku 4, vrednost ovih koeficijenata dobija se direktno iz /1.13/ stavljajući

$Q_\lambda=\partial_\lambda U\,;\ Q^\pi=g^{\pi\nu}\partial_\nu U\equiv U^\pi$ i $T=U+h$

$$/6.2/ \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\equiv\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}_g+\frac{1}{2(U+h)}\left[\partial_\beta U\,\delta^\alpha_\beta+\partial_\gamma U\,\delta^\alpha_\beta-U^\alpha g_{\beta\gamma}\right]$$

Ponavljajući postupak kao u prošlom odeljku dobija se za poremećaje putanja sledeća jednačina

$$/6.3/ \quad \frac{\delta^2x^\alpha}{d\sigma^2}+R^{\cdots\alpha}_{\theta\delta\sigma}\frac{dq^\theta}{d\sigma}x^\delta\frac{dq^\psi}{d\sigma}=0$$

gde su Riman - Kristofelov tenzor $R^{\cdots\alpha}_{\theta\delta\sigma}$ i apsolutni izvod $\delta^2x^\alpha/\delta\sigma^2$ obrazovani u odnosu na akcionu metriku.

Jednačine /6.3/ poznate su u diferencijalnoj geometriji kao jednačine kojima se meri t.zv. geodezisko odstupanje /"L'écart geodésique"/.

, str.217 /

Ove jednačine predstavljaju uslov da poremećene geodeziske linije budu opet geodeziske linije.

Napišimo sada poremećajne jednačine u drugom invarijantnom obliku koji eksplicira njihov geometriski smisao.

Predpostavimo da poremećajni vektor obrazuje vektorsko polje, pa da je s toga funkcija parametra σ preko koordinata, naime:

$$x^\alpha = x^\alpha [q(\sigma)]$$

Odavde sledi da je

$$\frac{\delta x^\alpha}{d\sigma} = \frac{dq^\lambda}{d\sigma} \nabla_\lambda x^\alpha \qquad \text{i}$$

$$\frac{\delta^2 x^\alpha}{d\sigma^2} = \frac{\delta}{d\sigma}\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\right) \equiv \frac{dq^\mu}{d\sigma} \nabla_\mu \left(\frac{dq^\lambda}{d\sigma} \nabla_\lambda x^\alpha\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{dq^\mu}{d\sigma}\left(\nabla_\mu \frac{dq^\lambda}{d\sigma}\right)\left(\nabla_\lambda x^\alpha\right) + \frac{dq^\mu}{d\sigma}\frac{dq^\lambda}{d\sigma}\left(\nabla_\mu \nabla_\lambda x^\alpha\right)$$

Medjutim $\displaystyle \frac{dq^\mu}{d\sigma}\left(\nabla_\mu \frac{dq^\lambda}{d\sigma}\right) \equiv \frac{\delta}{d\sigma}\left(\frac{dq^\lambda}{d\sigma}\right) = 0$

jer je ovo jednačina kretanja /6.1/, pa gornji izraz postaje

$$/6.4/ \qquad \frac{\delta^2 x^\alpha}{d\sigma^2} = \frac{dq^\lambda}{d\sigma}\frac{dq^\mu}{d\sigma}\left(\nabla_\lambda \nabla_\mu x^\alpha\right)$$

Zbog /6.4/ jednačina /6.3/ postaje

$$\left(\nabla_\lambda \nabla_\mu x^\alpha + R_{\gamma\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} x^\gamma\right)\frac{dq^\lambda}{d\sigma}\frac{dq^\mu}{d\sigma} = 0$$

Izraz u zagradi je simetričan. To dokazujemo time što je antisimetrični deo $T_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\alpha}$ izraza

$$T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} \equiv \nabla_\lambda \nabla_\mu x^\alpha + R_{\gamma\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} x^\gamma$$

jednak nuli.

Zaista, posmatrajmo:

$$T_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} = \nabla_{[\lambda}\nabla_{\mu]}x^{\alpha} + R_{\nu[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}x^{\nu}$$

kako je

$$\nabla_{[\lambda}\nabla_{\mu]}x^{\alpha} = \frac{1}{2}R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}x^{\nu}$$

i

$$R_{\nu[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \equiv \frac{1}{2}\left(R_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} - R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\right)$$

sledi

$$T_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \equiv \frac{1}{2}x^{\nu}\left(R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} - R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\right)$$

Zbog

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = -R_{\mu\nu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$$

poslednji izraz postaje:

$$T_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} \equiv \frac{1}{2}x^{\nu}\left(R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\mu\nu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\right)$$

U Rimanovim prostorima je: $R_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\mu\nu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = 0$

/ [12] , str.182 / pa je $T_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} \equiv 0$

Jednačina /6.3/ se svodi na

/6.5/ $$\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}x^{\alpha} + R_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}x^{\nu} = 0$$

/jer je $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$ simetričan tenzor, a $\frac{dq^{\lambda}}{d\sigma}$ može da bude makakav vektor /[6] , str.15 /

Medjutim, leva strana jednačine /6.7/ identična je sa izrazima za Liov izvod koeficijenata povezanosti prostora akcionog linijskog elementa u odnosu na polje vektora poremećaja x^{α} /[8] , str.6 /

/6.6/ $$\underset{x}{\mathcal{L}}\,\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} = 0$$

Prema tome jednačine /6.5/ predstavljaju potreban i dovoljan uslov da transformacije

/6.7/ $$\bar{q}^{\lambda} = q^{\lambda} + x^{\lambda}$$

definišu <u>afino kretanje</u>.

Na osnovu stava K.Jana / [8] , str.9 / afine transformacije /6.7/ prevode geodeziske linije u geodeziske linije, pa su i trajektorije poremećenog kretanja takodje geodeziske linije u prostoru akcionog linijskog elementa, što je obuhvaćeno i definicijom poremećenog kretanja.

7. POREMEĆAJ NEKONZERVATIVNIH SISTEMA

Pozabavimo se sada pitanjem da li je moguće i u slučaju nekonzervativnih sistema, naći neki drugi invarijantni oblik poremećajnim jednačinama /5.5/.

U tom cilju pođjimo od činjenice da su jednačine kretanja dinamičkog sistema s obzirom na povezanost /1.17/ geodeziske linije u generalisanom afinom geodeziskom prostoru naime:

$$/7.1/ \quad \frac{d^2q^\alpha}{dt^2} + \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} = 0$$

gde je

$$/7.2/ \quad \Pi^\alpha_{\beta\gamma} = \mathrm{funct}\left(q, \frac{dq}{dt}\right)$$

Neka je poznato neko rešenje jednačina /7.1/ recimo:

$$q^\alpha = q^\alpha(t)$$

i ako je takvo kretanje poremećeno, uzmimo za jednačine poremećenog kretanja

$$/7.3/ \quad \overline{q}^\alpha = q^\alpha + x^\alpha(t)$$

gde kao i dosad vektor x^α smatramo malom veličinom prvog reda. Ponavljajući isti postupak kao i ranije a vodeći računa o /7.2/ imaćemo za klasične poremećajne jednačine:

$$/7.4/ \quad \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + 2\Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} + x^\delta\partial_\delta\Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} +$$

$$+ \frac{dx^\delta}{dt}\dot{\partial}_\delta\Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} = 0$$

gde je $\dot{\partial}_\delta \equiv \dfrac{\partial}{\partial\left(\frac{dq^\delta}{dt}\right)}$

Apsolutni izvod vektora poremećaja prema /3.1/ je

$$\frac{\delta x^\alpha}{dt} = \frac{dx^\alpha}{dt} + \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}x^\gamma$$

a drugi apsolutni izvod

$$\frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta x^\alpha}{dt}\right) + \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\delta x^\beta}{dt}x^\gamma$$

odnosno

$$\frac{\delta^2 x^\alpha}{\delta t^2} = \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \partial_\nu \Pi^\alpha_{\lambda\mu}\frac{dq^\nu}{dt}x^\lambda\frac{dq^\mu}{dt} + \dot{\partial}_\nu \Pi^\alpha_{\lambda\mu}\frac{d^2q^\nu}{dt^2}x^\lambda\frac{dq^\mu}{dt} + \Pi^\alpha_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dq^\mu}{dt}$$
$$+ \Pi^\alpha_{\lambda\mu}x^\lambda\frac{d^2q^\mu}{dt^2} + \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} + \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\Pi^\beta_{\kappa\sigma}x^\kappa\frac{dq^\sigma}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt}$$

ako mesto d^2q^ν/dt^2 stavimo njegovu vrednost iz /7.1/ posle sredjivanja dobićemo

$$\frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2} \equiv \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \partial_\nu \Pi^\alpha_{\lambda\mu}\frac{dq^\nu}{dt}x^\lambda\frac{dq^\mu}{dt} - \dot{\partial}_\nu \Pi^\alpha_{\lambda\mu}\Pi^\nu_{\omega\sigma}\frac{dq^\omega}{dt}\frac{dq^\mu}{dt}x^\lambda +$$
$$+ 2\Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} - \Pi^\alpha_{\lambda\mu}\Pi^\mu_{\tau\rho}\frac{dq^\tau}{dt}\frac{dq^\rho}{dt} + \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\Pi^\beta_{\kappa\sigma}\frac{dq^\sigma}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt}$$

Zamenom $\dfrac{d^2x^\alpha}{dt^2}$ iz ovog izraza u /7.4/ dobiće se

$$\frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2} + x^\delta\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt}\Big[\left(\partial_\delta \Pi^\alpha_{\beta\gamma} - \dot{\partial}_\rho \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\rho_\delta\right) - \Big(\partial_\beta \Pi^\alpha_{\delta\gamma} -$$
$$- \dot{\partial}_\rho \Pi^\alpha_{\delta\beta}\Gamma^\rho_\gamma\Big) + \Pi^\alpha_{\delta\rho}\Pi^\rho_{\beta\gamma} - \Pi^\alpha_{\rho\beta}\Pi^\rho_{\delta\gamma}\Big] + \dot{\partial}_\rho \Pi^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt}\frac{\delta x^\delta}{dt} = 0$$

Ili prema /3.4/ i /3.5/

$$/7.5/ \quad \frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2} + R_{\delta\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} x^\delta \frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} + T_{\delta\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \frac{\delta x^\delta}{dt}\frac{dq^\beta}{dt}\frac{dq^\gamma}{dt} = 0$$

Ovo je izraz za geodezisko odstupanje u generalisanom afinom geodeziskom prostoru i predstavlja očigledno generalizaciju geodeziskog odstupanja u smislu Singa i Levi - Živite.

Da bi ove jednačine napisali u drugom invarijantnom obliku predpostavimo da je poremećeno kretanje oblika:

$$/7.6/ \quad \bar{q}^\alpha = q^\alpha + x^\alpha[q(t)]$$

Zbog ove predpostavke biće:

$$/7.7/ \quad \frac{dx^\lambda}{dt} = \partial_\nu x^\alpha \frac{dq^\nu}{dt}$$

$$/7.8/ \quad \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \partial_\mu \partial_\nu x^\alpha \frac{dq^\mu}{dt}\frac{dq^\nu}{dt} - \partial_\nu x^\alpha \Pi_{\varphi\theta}^\nu \frac{dq^\varphi}{dt}\frac{dq^\theta}{dt}$$

Zamenom /7.7/ i /7.8/ u klasične poremećajne jednačine /7.4/, dobiće se:

$$/7.9/ \quad \left[\partial_\mu \partial_\lambda x^\alpha + x^\nu \partial_\nu \Pi_{\mu\lambda}^\alpha + \frac{dx^\nu}{dt}(\partial_\nu x^\varsigma)\dot{\partial}_\varsigma \Pi_{\mu\lambda}^\alpha - \Pi_{\mu\lambda}^\varsigma \partial_\varsigma x^\alpha + \right.$$
$$\left. + \Pi_{\varsigma\lambda}^\alpha \partial_\mu x^\varsigma + \Pi_{\mu\varsigma}^\alpha \partial_\lambda x^\varsigma\right]\frac{dq^\mu}{dt}\frac{dq^\lambda}{dt} = 0$$

Kako je izraz u zagradi simetričan po λ i μ to je

$$/7.10/ \quad \partial_\mu \partial_\lambda x^\alpha + x^\nu \partial_\nu \Pi_{\mu\lambda}^\alpha + \frac{dx^\nu}{dt}(\partial_\nu x^\varsigma)\dot{\partial}_\varsigma \Pi_{\mu\lambda}^\alpha -$$
$$- \Pi_{\mu\lambda}^\varsigma \partial_\varsigma x^\alpha + \Pi_{\varsigma\lambda}^\alpha \partial_\mu x^\varsigma + \Pi_{\mu\varsigma}^\alpha \partial_\lambda x^\varsigma = 0$$

ili u tenzorskom obliku / [8] , str. 188/.

$$/7.11/ \quad \nabla_\mu \nabla_\lambda x^\alpha + R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\alpha} x^\nu + T_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\alpha} \frac{dq^\varrho}{dt} \nabla_\varrho x^\nu = 0$$

Medjutim, leva strana ovih jednačina identična je sa izrazom za Liov izvod keoficijenata povezanosti generalisanog afinog geodeziskog prostora, tj.:

$$/7.12/ \quad \underset{x}{\mathcal{L}} \Pi_{\mu\lambda}^{\alpha} \equiv \nabla_\mu \nabla_\lambda x^\alpha + R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\alpha} x^\nu + T_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\alpha} \frac{dq^\varrho}{dt} \nabla_\varrho x^\nu = 0$$

Jednačine /7.12/ predstavljaju potreban i dovoljan uslov da infinitezimalne transformacije - poremećeno kretanje /7.6/, obrazuju afino kretanje, u generalisanom afinom geodeziskom prostoru; Na osnovu iznetog imamo sledeći

STAV: <u>Poremećajno kretanje skleronomnog nekonzervativnog dinamičkog sistema, jeste afino kretanje u generalisanom afinom geodeziskom prostoru u kome su trajektorije neporemećenog kretanja geodeziske linije, trajektorije poremećenog kretanja su opet geodeziske lini-nije u istom prostoru.</u>

8. O REŠENJIMA POREMEĆAJNIH JEDNAČINA

Da bi podvukli značaj teorije grupa u proučavanju poremećaja holonomnih dinamičkih sistema, diskutujmo predhodno egzistenciju rešenja parcijalnih poremećajnih jednačina /6.5/ i /7.12/.

Podjimo od konzervativnih sistema. Poremećajna jednačina za ove sisteme je:

$$\overset{a}{\nabla}_\lambda \overset{a}{\nabla}_\mu x^\alpha + R_{\nu\lambda\mu}^{\cdots\alpha} x^\nu = 0 \tag{8.1}$$

gde $\overset{a}{\nabla}_\lambda$ označva simbol kovarijantnog izvoda u odnosu na osnovni tenzor $a_{\lambda\mu} = (U+h)\, g_{\lambda\mu}$ prostora elementa dejstva.

Uvedimo tenzor b_μ^α jednačinom:

/8.2/ $\partial_\mu x^\alpha = -x^h \Gamma_{\mu h}^\alpha + b_\mu^\alpha$ ili $\left(b_\mu^\alpha \equiv \overset{a}{\nabla}_\mu x^\alpha \right)$

ove jednačine i jednačine /8.1/ napisane u obliku:

$$\overset{a}{\nabla}_\lambda b_\mu^\alpha = - R_{\nu\lambda\mu}^{\cdots\alpha} x^\nu \tag{8.3}$$

obrazuju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po n^2+n nepoznatih veličina x^α i b_μ^α.

Uslovi integrabilnosti ovog sistema su: / [8], str.56 /

/8.4/
$$E_1 \equiv \underset{x}{£} R_{\nu\lambda\mu}^{\cdots\alpha} = 0$$
$$E_2 \equiv \underset{x}{£} \overset{a}{\nabla}_{\omega_1} R_{\nu\lambda\mu}^{\cdots\alpha} = 0$$
$$E_3 \equiv \underset{x}{£} \nabla_{\omega_2} \nabla_{\omega_1} R_{\nu\lambda\mu}^{\cdots\alpha} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Prema poznatoj teoremi o egzistenciji rešenja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina /v. napr. [8] , str. 93 /, potreban i dovoljan uslov da sistem jednačina /8.1/ odnosno /8.2/ i /8.3/, koji u opštem slučaju nije potpun, dopušta rešenje je, da postoji pozitivan ceo broj N takav, da jednačine sistema $E_1, \dots, E_N$, budu saglasne za sve vrednosti x^α i b^α_μ u oblasti posmatranja, a da jednačine sistema E_{N+1} budu zadovoljene zbog jednačine prethodnog sistema.

Ako su uslovi ove teoreme zadovoljeni i ako je broj nezavisnih jednačina u prvih N - sistema jednak n^2+u-r , tada rešenje ovog sistema nije u potpunosti odredjeno već sadrži r proizvoljnih konstanata. Tada postoji r nezavisnih rešenja $x^i_{(\alpha)}\,; (\alpha=1,\dots,r)$ a prostor akcione metrike dozvoljava r - parametarsku grupu afinih kretanja / [14] , str. 396 - 400 /.

Rešenja poremećajnih jednačina /8.1/ data su sa:

/8.5/ $$x^i = C^{(\alpha)} x^i_{(\alpha)}$$

što sledi iz činjenice da se svaka r - parametarska grupa može predstaviti preko r - jednoparametarskih grupa /v.napr. [13],str.39/

U slučaju da je prostor akcione metrike ravan tj. ako je

$$R^{\dots\alpha}_{\nu\lambda\mu}=0$$

tada su uslovi /8.4/ identičnosti po x^α i b^α_μ pa je rešenje u potpunosti odredjeno i broj nezavisnih afinih kretanja je n^2+n

Ovaj slučaj odgovara kretanju po inerciji tj. kada je

$$U=0$$

a kinematički linijski elemenat ima Euklidovu metiku.

Proučimo sada uslove integrabilnosti parcijalnih poremećajnih jednačina za nekonzervativne sisteme /7.12/:

$$/8.6/ \quad \overset{\Pi}{\nabla}_{\mu} \overset{\Pi}{\nabla}_{\lambda} x^{\varkappa} + R^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} x^{\nu} + T^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} \frac{dq^{\varrho}}{dt} \nabla_{\varrho} x^{\nu} = 0$$

Uvedimo kao i ranije tenzor $b^{\varkappa}_{\lambda}$ jednačinom:

$$/8.7/ \quad \partial_{\lambda} x^{\varkappa} = -x^{h} \Pi^{\varkappa}_{h\lambda} + b^{\varkappa}_{\lambda} \quad \text{odnosno} \quad b^{\varkappa}_{\lambda} \equiv \overset{\Pi}{\nabla}_{\lambda} x^{\varkappa}$$

odavde diferenciranjem po $\dot{q}^{\nu}$ imamo

$$/8.8/ \quad \dot{\partial}_{\nu} b^{\varkappa}_{\lambda} = x^{h} T^{\dots\varkappa}_{\nu h\lambda} \quad ; \left(T^{\dots\varkappa}_{\nu h\lambda} \equiv \dot{\partial}_{\nu} \Pi^{\varkappa}_{h\lambda} \right)$$

i jednačine /8.6/ tada postaju:

$$/8.9/ \quad \overset{\Pi}{\nabla}_{\mu} b^{\alpha}_{\lambda} = -R^{\dots\alpha}_{\nu\mu\lambda} x^{\nu} - T^{\dots\alpha}_{\nu\mu\lambda} \frac{dq^{\varrho}}{dt} \overset{\Pi}{\nabla}_{\varrho} x^{\nu}$$

kako je x^{α} samo funkcija položaja to sledi još da je

$$/8.10/ \quad \dot{\partial}_{\nu} x^{\alpha} = 0$$

Sistem jednačina /8.7/ - /8.10/ je ekvivalentan sistem prvog reda jednačinama /8.6/ po $n^2 + n$ nepoznatih funkcija x^{α} i b^{α}_{μ} Uslovi integrabilnosti ovih jednačina su / [8] , str. 190 /

$$/8.11/ \quad \underset{x}{\mathcal{L}} R^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} \equiv x^{\omega} \overset{\Pi}{\nabla}_{\omega} R^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} - \left(\frac{dq^{\varrho}}{dt} \nabla_{\varrho} x^{\omega} \right) \dot{\nabla}_{\omega} R^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} - R^{\dots\varrho}_{\nu\mu\lambda} \nabla_{\varrho} x^{\varkappa} + R^{\dots\varkappa}_{\varrho\mu\lambda} \nabla_{\nu} x^{\varrho} + R^{\dots\varkappa}_{\nu\varrho\lambda} \nabla_{\mu} x^{\varrho} + R^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\varrho} \nabla_{\lambda} x^{\varrho} = 0$$

$$/8.12/ \quad \underset{x}{\mathcal{L}} T^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} \equiv x^{\omega} \nabla_{\omega} T^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} - \left(\frac{dq^{\varrho}}{dt} \nabla_{\varrho} x^{\omega} \right) T^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} - T^{\dots\varrho}_{\nu\mu\lambda} \nabla_{\varrho} x^{\varkappa} + T^{\dots\varkappa}_{\varrho\mu\lambda} \nabla_{\nu} x^{\varrho} + T^{\dots\varkappa}_{\nu\varrho\lambda} \nabla_{\nu} x^{\varrho} + T^{\dots\varkappa}_{\nu\varrho\lambda} \nabla_{\mu} x^{\varrho} + T^{\dots\varkappa}_{\nu\mu\varrho} \nabla_{\lambda} x^{\varrho} = 0$$

Ukoliko uslovi integrabilnosti /8.11/ i /8.12/ nisu identičnosti po x^{μ} i b^{μ}_{ν} tada se može dokazati da rešenje nije u potpunosti odredjeno i da zavisi od r proizvoljnih konstanti a da generalisani afini geodeziski prostor dopušta neku r - parametarsku grupu afinih kretanja. /[8], str. 193/.

Ako su uslovi integrabilnosti identični zadovoljeni iz /8.11/ i /8.12/ sledi da je u tom slučaju:

/8.13/ $R^{\cdots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} \equiv 0$ i

/8.14/ $T^{\cdots\varkappa}_{\nu\mu\lambda} \equiv 0$

Jednačina /8.14/ tvrdi da je prostor u tom slučaju Rimanov tj. da je $\dot{\partial}_{\nu} \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} = 0$ a /8.13/ da je ravan pa dolazimo do istog zaključka kao i ranije da se kretanje vrši po inerciji.

Kao zaključak podvucimo tri činjenice koje slede iz izloženog u ovom poglavlju:

1/ Poremećaji konzervativnih dinamičkih sistema obrazuju grupu afinih kretanja u prostoru akcionog linijskog elementa.

2/ Poremećaji nekonzervativnih dinamičkih sistema obrazuju grupu afinih kretanja u generalisanom afinom geodeziskom prostoru.

3/ Poremećaji holonomnih dinamičkih sistema shvaćeni kao rešenja jednačina /8.1/ odnosno /8.6/ nisu odredjeni u potpunosti, već zavise od r proizvoljnih konstanti koje ne mogu biti odredjene uslovima zadatka.

Ova poslednja primedba, po našem mišljenju, niukoliko ne umanjuje praktični značaj grupne koncepcije u teoriji poremećaja.

U mnogim praktičnim problemima iz ove oblasti izračunavanje vektora poremećaja vrši se samo zato da bi se ocenila stabilnost kretanja posmatranog sistema. Smatramo da se neki zaključci u vezi sa stabilnošću kretanja mogu dobiti i bez potpunog poznavanja vektora poremećaja, a baš zahvaljujući teoriji grupa.

9. O JEDNOM GRUPNOM KRITERIJUMU STABILNOSTI STACIONARNIH KRETANJA

Za kretanje se kaže da je stabilno ako je dužina vektora poremećaja: $x^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ ograničena tokom kretanja.

Kriterijumi za ocenu stabilnosti kretanja, kako konzervativnih tako i nekonzervativnih kretanja, nisu dosad nadjeni. /ovde se misli na proučavanje stabilnosti Singovom metodom poremećaja/.

Jedini izuzetak čini <u>stacionarno</u> kretanje konzervativnih dinamičkih sistema, tj. takvo kretanje kod koga su pozicione generalisane koordinate i ciklične generalisane brzine konstantne tokom kretanja.

<u>Potreban i dovoljan uslov za stabilnost ovakvog kretanja je da se totalna energija ne menja prilikom poremećaja. 10</u>

Totalna energija je u ovom slučaju konstantna i iznosi za neporemećeno kretanje:

$$T + \Pi = h \tag{9.1}$$

a za poremećeno:

$$T^* + \Pi^* = h + \delta' h \tag{9.2}$$

gde je $\delta' h$ varijacija konstantne energije.

Iz poslednjeg izraza sledi da je:

$$T^* = \frac{1}{2} g^* (\dot q^\alpha + \dot x^\alpha)(\dot q^\beta + \dot x^\beta) \approx T + \frac{1}{2} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot q^\beta x^\gamma + g_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot x^\beta =$$
$$= T + \frac{1}{2}\left([\alpha\gamma,\beta] + [\beta\gamma,\alpha]\right) \dot q^\beta \dot q^\alpha x^\gamma + g_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot x^\beta$$

Ako mesto $\dot{x}^{\beta}$ uvedemo $\frac{\delta x^{\beta}}{dt}$ imaćemo

$$T^{*}-T=[\alpha\gamma,\beta]\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}x^{\gamma}+g_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\frac{\delta x^{\beta}}{dt}-g_{\alpha\beta}\left\{{\beta \atop \sigma\gamma}\right\}x^{\gamma}\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\alpha}=$$

$$=[\alpha\gamma,\beta]\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}x^{\gamma}+g_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\frac{\delta x^{\beta}}{dt}-\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\sigma}[\sigma\gamma,\alpha]x^{\gamma}\equiv g_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\frac{\delta x^{\beta}}{dt}$$

i razlika /9.2/ i /9.1/ daje / [15] , str.626/

$$/9.3/ \qquad g_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\frac{\delta x^{\beta}}{dt}+\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}}x^{\alpha}=\delta' h$$

Eliminišimo iz ovih jednačina vreme. U tu svrhu podjimo od jednačine /2.5/ koja za slučaj potencijalnih sila glasi:

$$\frac{d^{2}s}{dt^{2}}=-\frac{d\Pi}{ds}$$

odavde imamo prvi integral u obliku:

$$/9.4/ \qquad \dot{s}^{2}=2(h-\Pi)\equiv\lambda$$

pa /9.3/ postaje:

$$g_{\alpha\beta}\frac{dq^{\alpha}}{ds}\frac{\delta x^{\beta}}{ds}\lambda+\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}}x^{\alpha}=\delta' h$$

odnosno:

$$/9.5/ \qquad g_{\alpha\beta}\frac{dq^{\alpha}}{ds}\frac{\delta x^{\beta}}{ds}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}}x^{\alpha}=\frac{\delta' h}{\lambda}$$

Podjimo sada od jednačina /8.1/ koje pomnožene sa $a_{\alpha\sigma}$ i sabrane po α izgledaju:

$$\overset{a}{\nabla}_{\lambda}\overset{a}{\nabla}_{\mu} x_{\sigma} + R_{\nu\lambda\mu\sigma} x^{\nu} = 0$$

Pomnožimo ove jednačine sa $\frac{dq^{\lambda}}{d\sigma}\frac{dq^{\mu}}{d\sigma}\frac{dq^{\sigma}}{d\sigma}$ i saberimo po indeksima λ, μ i σ. Pošto je tenzor $R_{\nu\lambda\mu\sigma}$ antisimetričan po μ i σ to je

$$R_{\nu\lambda\mu\sigma} x^{\nu}\frac{dq^{\lambda}}{d\sigma}\frac{dq^{\mu}}{d\sigma}\frac{dq^{\sigma}}{d\sigma} \equiv 0$$

pa gornja jednačina postaje:

$$(\overset{a}{\nabla}_{\lambda}\overset{a}{\nabla}_{\mu} x_{\sigma})\frac{dq^{\lambda}}{d\sigma}\frac{dq^{\mu}}{d\sigma}\frac{dq^{\sigma}}{d\sigma} = 0$$

Pošto je vektor $dq^{\lambda}/d\sigma$ kovarijantno konstantan biće:

$$\frac{\overset{a}{\delta}}{d\sigma}\left(\overset{a}{\nabla}_{\mu} x_{\sigma}\frac{dq^{\mu}}{d\sigma}\frac{dq^{\sigma}}{d\sigma}\right) = 0$$

pa sledi da je:

/9.6/ $$\left(\overset{a}{\nabla}_{\mu} x_{\sigma}\right)\frac{dq^{\mu}}{d\sigma}\frac{dq^{\sigma}}{d\sigma} = \mathbb{C}$$

odnosno

/9.6'/ $$\overset{a}{\nabla}_{(\mu} x_{\sigma)}\frac{dq^{\mu}}{d\sigma}\frac{dq^{\sigma}}{d\sigma} = \mathbb{C}$$ ili

/9.7/ $$a_{\lambda\mu}\,\overline{\frac{\overset{a}{\delta} x^{\lambda}}{d\sigma}}\,\frac{dq^{\mu}}{d\sigma} = \mathbb{C}$$

gde smo sa crtom naglasili da su odgovarajući vektori napisani u prostoru elementa dejstva.

Prevedimo izraz /9.7/ u prostor kinematičkog linijskog elementa; pošto je:

$$a_{\lambda\mu} = 2(U+h)g_{\lambda\mu} \equiv \lambda g_{\lambda\mu}$$

$$\frac{\overset{a}{\delta}\bar{x}^\lambda}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\overset{a}{\delta}x^\lambda}{d\sigma}, \quad \frac{d\bar{q}^\mu}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{dq^\mu}{d\sigma}$$ i

izraz /3.7/ postaje:

$$g_{\lambda\mu}\frac{\overset{a}{\delta}x^\lambda}{d\sigma}\frac{dq^\mu}{d\sigma} = \mathbb{C}$$

Kako je apsulutni izvod $\overset{a}{\delta}/d\sigma$ formiran u odnosu na koeficijente povezanosti /6.2/ imaćemo:

$$g_{\lambda\mu}\frac{dq^\mu}{d\sigma}\left\{\frac{dx^\lambda}{d\sigma} + \left\{{\lambda \atop \nu\omega}\right\}_g x^\nu\frac{dq^\omega}{d\sigma} + \frac{1}{\lambda}\left[\partial_\nu U\,\delta^\lambda_\omega + \partial_\omega U\,\delta^\lambda_\nu - U^\lambda g_{\nu\omega}\right]x^\nu\frac{dq^\omega}{d\sigma}\right\} = \mathbb{C}$$

Što posle kraćeg računa daje:

$$g_{\lambda\mu}\frac{dq^\mu}{d\sigma}\frac{\overset{g}{\delta}x^\lambda}{d\sigma} + \frac{1}{\lambda}x^\nu\partial_\nu U\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \mathbb{C}$$

Pošto je $d\sigma^2 = \lambda ds^2$ to prelazkom na parametar s gornji izraz postaje:

$$g_{\lambda\mu}\frac{dq^\mu}{ds}\frac{\overset{g}{\delta}x^\lambda}{ds} + \frac{1}{\lambda}x^\nu\partial_\nu U = \mathbb{C}\lambda \qquad /9.8/$$

Navedimo bez dokaza jedan pomoćni stav iz teorije grupa koji glasi: Dva prostora u konformnom odnosu imaće iste grupe kretanja ako je $x^\nu\partial_\nu U = 0$ gde je λ koeficijenat proporcijalnosti $a_{\lambda\mu} = \lambda g_{\lambda\mu}$ a x^ν vektori infinitezimalnog pomeranja. / [13] , str. 23/

Predpostavimo sada da vektori poremećenog kretanja obrazuju <u>grupu kretanja</u>, u prostoru elementa dejstva, /Ova predpostavka nije u oprečnosti sa konstatacion /1/ prošlog poglavlja jer je svaka grupa kretanja u isto vreme i grupa afinih kretanja/.

Tada jednačina /9.6'/ daje

$$\overset{a}{\nabla}_{(\mu} x_{\sigma)} = 0$$

pa je i

$$\mathfrak{C} = 0$$

ako je ta grupa takva da se poklapa sa grupom kretanja kinematičkog linijskog elementa onda je i

$$x^{\nu} \partial_{\nu} U = 0$$

pa se izrazi /9.5/ i /9.8/ poklapaju jer je u tom slučaju:

$$\frac{\delta' h}{\lambda} \equiv c \lambda \equiv 0$$

i

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}} x^{\alpha} \equiv - \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}} x^{\alpha} \equiv 0$$

pa je uslov za stabilnost po Singu ispunjen.

Odavde sledi sledeća

TEOREMA: <u>Ako poremećaji konzervativnog dinamičkog sistema definišu grupu kretanja u Rimanovom konfiguracionom prostoru elementa dejstva i ako je ta grupa identična sa grupom kretanja konfiguracionog prostora kinematičkog linijskog elementa, stacionarno kretanje je stabilno</u>.

27.I 1963. god.

B e o g r a d

L I T E R A T U R A

1. Lichnerowicz, A.: Eléments de Calcul Tensoriel; Collèction Armand Colin; Paris 1950.

2. Lichnerowicz, A.: Les espaces a connexion semimétrique et la mécanique. C.R. Ac. Sci. 212: 328 - 331,1941

3. Eisenhart, L.P.: Riemannian Geometry; Princeton univ.press Princeton 1949.

4. Schouten, J. A and Struik, D.J., Einführung in die neueren Methodes der Differentialgeometrie, I. Groningen-Batavia, Norrdhoff. 1935.

5. Bilimović, A.: Racionalna mehanika II - Mehanika sistema. Naučna knjiga, Beograd 1951.

6. Schouten, J.A.: Ricci Calculus, second edition, Springer 1954.

7. Duglas, J.: The general geometry of paths. Ann. of Math. 2. 29. 1928.

8. Yano, K.: The thory of Lie derivatives and its apolications. North-Holland publ. Co. Amsterdam-Groningen 1955.

9. Thomas, T.Y.: The differential invariants of generalized spaces; Cambridge, Univ.press 1934.

10. Synge, J.L.: On the geometry of Dynamics, Phili Transactions of the Roy. Soc. of London. Ser. A. vol 226, P.p. 31 - 106.

11. Levi-Civita, T.: The apsolute differential calculus. Blackie and S. London 1948.

12. Andjelić, T.: Tenzorski račun, Naučna knjiga, Beograd 1952.

13. Stojanović, R.: Primene tenzorskog računa i dif.geometrije u mehanici. Postdiplomski kurs 1960.

14. Knebelman, M.S.: Nat.Ac. of Sc.USA. Washington, Vol. 13.N°6 192

15. Lur'e A.I.: Analitičeskaja mehanika F.M. 1961.