PROBLEM APROKSIMACIJE IRACIONALNIH BROJEVA RAZLOMLJENIM RACIONALNIM BROJEVIMA

Teza

Božidara P. Djerasimovića
asistenta Prirodno-matematičkog fakulteta
u Beogradu

S A D R Ž A J

Uvod . . . . str. I – X

I. Racinalne približne vrednosti iracionalnih brojeva . . " 1 – 21

II. Nizovi racionalnih približnih vrednosti iracionalnih brojeva . . . . " 22 – 27

III. Red aproksimacije racionalnih približnih vrednosti iracionalnih brojeva . . . . " 28 – 36

IV. Uredjeni kompleksi prirodnih brojeva i rad sa njima. . " 37 – 42

V. Tačke nagomilavanja niza λ_n periodičnog verižnog razlomka . . . . " 43 – 47

VI. Cela rešenja Diofantove jednačine $u^2+(-1)^n v^2+(-1)^m w^2 = \alpha uvw$ " 48 – 54

VII. Perron-ova modularna funkcija $M(\gamma)$ jednog iracionalnog broja γ . . . . " 55 – 59

Spisak literature . . . . " 60 – 62

Увод

Cilj prvog dela ovog rada je da donekle popuni prazninu koja postoji u primeni teorije pravilnih verižnih razlomaka na racionalne približne vrednosti jednog iracionalnog broja. I to naročito na one približne vrednosti u obliku racionalnih razlomaka koje ne pripadaju nizu približnih vrednosti pravilnog verižnog razlomka u koji je razvijen posmatrani iracionalan broj.

Približne vrednosti jednog iracionalnog broja u obliku racionalnih razlomaka mogu se ispitivati pomoću verižnih i Farey-evih razlomaka (Koksma [16] str. 9).

Engleski matematičar lord Brouncker pred kraj 17 veka izražava dvostruki odnos površine u krugu upisanog kvadrata prema površini istog kruga u obliku verižnog razlomka

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}$$

Prema Lagrange-u [18] to je prva pojava verižnog razlomka. Put kojim je lord Brouncker došao do navedenog rezultata je nepoznat. Nešto docnije Wallis [39] dokazuje identičnost navedene Brouncker-ove formule sa danas poznatim obrascem

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}$$

"Ali – kako kaže Lagrange [18] – oba ova matematičara ne poznaju osobine verižnih razlomaka, koje otkriva tek Huyghens". Posle Huyghens-a pojavljuje se na tom polju Euler a zatim Lagrange [18].

Prema italijanskom matematičaru E.Bortolotti [2] verižni razlomci potiču od italijanskog matematičara Cataldi-a koji 1613 g. daje obrazac

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} + \frac{r}{2a} + \frac{r}{2a} + \dots$$

Prema O.Perron-u [28] nemački matematičar Dan.Schwenter [32] 1636 g.poznaje primenu Euklidovog algoritma na izračunavanje približnih vrednosti,pa čak poznaje i pojam"najbolje približne vrednosti".

Ne ulazeći u analizu ova tri izložena mišljenja,sigurno je da je kod Euler-a i Lagrange-a - i to prvo kod njih - teorija verižnih razlomaka već izgradjena.Od tog vremena verižni razlomci postaju skoro jedina aparatura za ~~izračunavanje~~ izračunavanje i ispitivanje racionalnih razlomaka kao približnih vrednosti iracionalnih brojeva.U tu svrhu upotrebljavaju se naročito pravilni verižni razlomci

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots$$

koji se izražavaju simbolom

$$(b_0, b_1, b_2, \dots)$$

Jer,kao što je Lagrange-u [18] već jasno,samo ovi verižni razlomci imaju osobinu da je svaka približna vrednost

$$(b_0), (b_0, b_1), (b_0, b_1, b_2), \dots$$

jedna najbolja približna vrednost posmatranog broja.Osim ove osobine pravilni verižni razlomci imaju još i sledeće osobine koje povoljno utiču na mogućnost njihove primene za odredjivanje i ispitivanje racionalnih razlomaka kao približnih vrednosti realnih brojeva.To su:

1) Jednostavnost izračunavanja nepotpunih količnika $b_0, b_1, b_2, \dots$ primenom Euklidovog algoritma.

2) Naizmenično postavljanje uzastopnih približnih vrednosti $\frac{x_0}{y_0}, \frac{x_1}{y_1}, \dots$ sa jedne i druge strane posmatranog iracionalnog broja

3) Relacija koju zadovoljavaju brojioci i imenioci ma koje dve uzastopne približne vrednosti

$$|x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n| = 1,$$

gde je

$$\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \quad , \quad \frac{x_n}{y_n} = (b_0, b_1, \ldots, b_n).$$

4) Gornja granica greške aproksimacije

$$\left|\gamma - \frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{1}{y_n y_{n+1}}$$

(Posledica druge i treće od navedenih osobina.)

Engleski matematičar Farey posmatra niz razlomaka koji postaje ako se urede po veličini svi racionalni razlomci čiji brojioci i imenioci ne prelaze neki dati prirodan broj N. Naprimer za N = 5 takav niz, nazvan niz Farey-evih razlomaka, je

1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1, 5/4, 4/3, 3/2, 5/3, 2/1, 5/2, 3/1, 4/1, 5/1

Mogućnost primene Farey-evih razlomaka na posmatranje racionalnih približnih vrednosti iracionalnih brojeva proizilazi iz dve osobine ovih razlomaka:

1) Ma koja dva uzastopna razlomka $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ Farey-evog niza zadovoljavaju relaciju

$$|ad - bc| = 1$$

(Cauchy-ev stav)

2) Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ ma koja dva uzastopna razlomka Farey-evog niza, onda razlomak

$$\frac{pa + qc}{pb + qd} \qquad (1)$$

gde su p i q ma koji prirodni brojevi, leži izmedju njih. I to uvek se mogu odrediti prirodni brojevi p i q tako da razlomak (1) ima koju bilo racionalnu vrednost izmedju $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$.

(2) Verižni i Farey-evi razlomci primenjeni na izračunavanje i ispitivanje racionalnih približnih vrednosti iracionalnih brojeva imaju svojih dobrih strana i svojih nedostataka. Tako verižni razlomci pretstavljaju najbolju i najprirodniju aparaturu za izračunavanje pojedinih uzastonih glavnih približnih vrednosti jednog datog iracionalnog broja (a iz glavnih tako isto i za izračunavanje umetnutih približnih vrednosti). Isto tako u slučaju kad je iracionalni broj unapred dat u obliku beskonačnog pravilnog verižnog razlomka. Ali verižni razlomci nisu uvek najprirodniji način i za ispitivanje racionalnih razlomaka uopšte kao približnih vrednosti datog iracionalnog broja. To je naročito slučaj sa lošijim približnim vrednostima, koje nisu ni umetnute ni glavne.

Pri primeni Farey-evih razlomaka ostaje jedna elemenat neodredjenosti. Ako jedan iracionalan broj hoćemo da uporedimo sa datim nizom Farey-evih razlomaka onda lako odredjujemo dva uzastopna člana toga niza $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ izmedju kojih leži posmatrani iracionalan broj. Ali pri daljem približavanju, koristeći razlomak (1) ne znamo da li je taj razlomak levo ili desno od posmatranog iracionalnog broja.

Prema svemu tome potrebna je jedna aparatura koja bi za ispitivanje, uporedjivanje i klasifikaciju racionalnih razlomaka kao približnih vrednosti jednog datog iracionalnog broja bila pogodnija, opštija i prirodnije povezana sa postavljenim problemom od verižnih i Farey-evih razlomaka.

(3) Ako uočimo da se u teoriji verižnih razlomaka približavanje jednom iracionalnom broju

$$\gamma = (b_0, b_1, b_2, \dots)$$

vrši preko glavnih približnih vrednosti

$$\frac{x_0}{y_0}, \frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots$$

rekurentnim obrascem

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{b_{n+1} x_n + x_{n-1}}{b_{n+1} y_n + y_{n-1}}, \qquad (2)$$

onda bi pokušaj proširenja na lošije približne vrednosti mogao poći od tog obrasca. Primetimo li još da najmanji par celih i pozitivnih rešenja jednačine

$$y_n x_n' - x_n y_n' = \pm 1$$

gde je na desnoj strani znak greške aproksimacije razlomka $\frac{x_n}{y_n}$, ima vrednosti

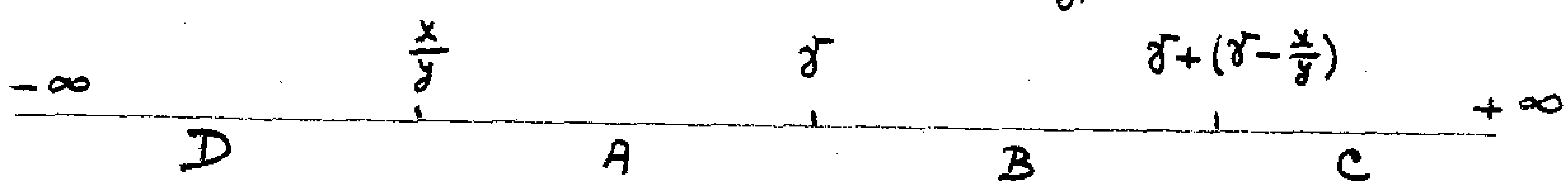
$$x_n' = x_{n-1}, \quad y_n' = y_{n-1}$$

onda se obrazac (2) može napisati u obliku

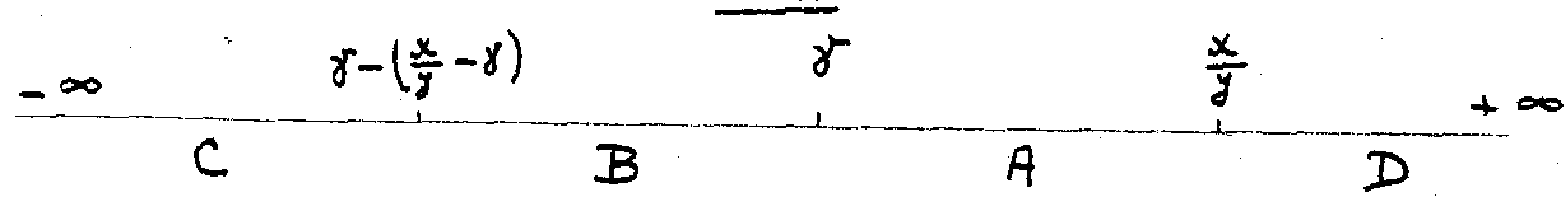
$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{b_{n+1} x_n + x_n'}{b_{n+1} y_n + y_n'} . \qquad (3)$$

Postavimo sad sledeći problem: Ako je $\frac{x}{y}$ jedan ma koji racionalan razlomak, odrediti drugi racionalan razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ koji je bliži nekom posmatranom iracionalnom broju γ od prvog razlomka.

Uočimo pre svega ovo. Ako sa razlomkom $\frac{x}{y}$ hoćemo, u odnosu na broj γ, da uporedimo neki drugi razlomak $\frac{x_1}{y_1}$, da se onda ističu če-



сл. 1



сл. 2

tiri oblasti A, B, C i D (sl.1 ili 2) u kojima može ležati razlomak $\frac{x_1}{y_1}$. Obrazac koji bi dao taj novi, bliži, razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ mogli bismo tražiti u obliku

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{\varphi(x, x', p, q)}{\varphi(y, y', p, q)} , \qquad (4)$$

gde su p i q celi brojevi, a x' i y' par najmanjih pozitivnih i celih rešenja jednačine

$$y x' - x y' = \pm 1,$$

gde je na desnoj strani znak greške aproksimacije datog razlomka $\frac{x}{y}$.

Funkcija φ trebalo bi da zadovoljava ove uslove:

1) da za cele vrednosti brojeva p i q razlomak $\frac{x_1}{y_1}$, dat obrascem (4), prolazi kroz sve racionalne vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$;

2) da uslovi za p i q koji će odredjivati da li razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ leži u oblasti A,B,C ili D budu što prostiji;

3) da se obrazac (4) pretvara u obrazac (3) kad $\frac{x}{y}$ postaje jedna glavna približna vrednost broja γ.

To su osnovni principi kojima sam se rukovodio postavljajući stav § 1 u prvom delu ovog rada.

(4) Posle Euler-a i Lagrange - a primena pravilnih verižnih razlomaka na ispitivanje racionalnih vrednosti iracionalnih brojeva vršene su uglavnom u dva pravca:

a) Ispitivanje umetnutih približnih vrednosti i posebno vrednosti $\frac{x}{y}$ kod kojih je

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{cy^2}$$

gde je $c > 1$ ili $1{,}5 \leqslant c \leqslant 2$.

b) Ispitivanje reda aproksimacije pojedinih približnih vrednosti.

U prvom pravcu poznati su radovi koje su dali: Smith [37], Cahen [3], Morimoto [23], Fatou [5], Koksma [17], Oppenheim [26] Grace [10] i drugi.

O drugom pravcu moramo dati iscrpnija obaveštenja.

(5) Ispitivanje reda aproksimacije pretstavlja jedno od najviše obradjivanih i najmladjih poglavlja teorije racionalnih približnih vrednosti jednog iracionalnog broja.

Problem je postavljen 1850 g. kad je Hermite [11], pomoću osobina kvadratnih formi, dokazao da se svaki iracionalan broj γ može aproksimirati sa beskrajno mnogo racionalnih razlomaka $\frac{x}{y}$ tako da greška bude

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}\,y^2}.$$

Na taj način su postale tzv.Hermite-ove približne vrednosti čiju toeriju dalje razvija francuski matematičar Humbert [12;13] ,služeći se geometrsikom teorijom verižnih razlomaka.

Hurvitz [14] 1891 g.poboljšava ovaj Hermite-ov rezultat dokazujući da je moguće svaki realan iracionalan broj γ aproksimirati sa beskrajnom mnogo racionalnih razlomaka $\frac{x}{y}$ koji će zadovoljavati nejednakost

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, y^2} .$$

U isto vreme dokazuje da je za izvesne brojeve ovo najveći mogući red aproksimacije.Takav je naprimer broj

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} .$$

Za ovaj broj,ma kakvo malo bilo $\varepsilon > 0$,postoji uvek <u>samo konačno mnogo</u> parova prirodnih brojeva <u>x</u> i <u>y</u> takvih da je

$$\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)\, y^2} .$$

O redu aproksimacije najbolje govore pozitivni brojevi λ_n uvedeni na sledeći način.Neka je $\frac{x_0}{y_0}, \frac{x_1}{y_1}, \cdots$ niz glavnih približnih vrednosti iracionalnog broja γ ,onda je

$$\lambda_n = \frac{1}{y_n^2 \left|\gamma - \frac{x_n}{y_n}\right|} \qquad \text{tj} \qquad \left|\gamma - \frac{x_n}{y_n}\right| = \frac{1}{\lambda_n y_n^2} .$$

U pogledu rasporeda vrednosti u nizu λ_n prvi rezultat potiče od Vahlen-a [38] 1895 g.koji - primenom Farey-evih razlomaka - dokazuje da, ma kakav bio iracionalan broj γ, mora biti

$$\mathrm{Max}\,(\lambda_{n-1}, \lambda_n) > 2 . \qquad n = 1, 2, \dots$$

Zatim Borel [1] 1903 g.

$$\mathrm{Max}\,(\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}) > \sqrt{5} \qquad n = 1, 2, \dots$$

U ovom pravcu radila je mnogo jedna grupa japanskih matematičara M.Fujiwara [7,8] ,S.Morimoto (Fukasawa) [24,22] ,K.Shibata [34] i najzad 1950 g. Obreškov [25].

Izmedju ma koja dva i ma koja tri člana niza λ_n postoje odredjene relacije u obliku jednačina, kao što je pokazano u drugom odeljku III glave ovog rada. Iz tih relacija dobijaju se nejednakosti iz kojih sleduju mnogi od rezultata dobijenih u napred navedenim radovima. Iz istih relacija su zatim dobijeni i novi rezultati.

Još jasniju svetlost na red aproksimacije racionalnih približnih vrednosti jednog iracionalnog broja γ baca Perron-ova modularna funkcija $M(\gamma)$. O. Perron [29] 1921 g. uvodi ovu funkciju kao

$$M(\gamma) = \limsup_{n\to\infty} \lambda_n$$

tj. ako je

$$\gamma = (b_0, b_1, b_2, \dots)$$

onda je

$$M(\gamma) = \limsup_{n\to\infty} \left\{ (b_{n+1}, b_{n+2}, \dots) + (0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1) \right\}.$$

Prema pomenutom Hurwitz-ovom stavu, ma kakav bio iracionalan broj γ uvek je

$$M(\gamma) \geq \sqrt{5}.$$

Nezavisno od O. Perron-a i mnogo ranije - "začudjujuće rano", kako kaže francuski matematičar Roger Descombes [4] - A. A. Markov 1879 [20, 21] g. odlazi mnogo dalje. On posmatra dvostruko neograničeni niz prirodnih brojeva

$$\dots, b_{-3}, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$$

pa odredjuje skup vrednosti

$$\varphi_n = (b_{n+1}, b_{n+2}, \dots) + (0, b_n, b_{n-1}, \dots)$$

i najzad traži gornju granicu brojeva ovog skupa. Istovestnost sa Perron-ovom modularnom funkcijom je ~~[illegible]~~ očevidna.

Na taj način, kad se upotrebi pojam modularne funkcije $M(\gamma)$, Markov dokazuje ovaj rezultat.

Modularna funkcija $M(\gamma)$ ispod broja 3 ima samo beskrajno mnogo izolovanih vrednosti sa brojem 3 kao jedinom tačkom nagomilavanja.

Te vrednosti su

$$\sqrt{5}, \sqrt{8}, \frac{\sqrt{221}}{5}, \frac{\sqrt{1517}}{13}, \ldots \qquad (5)$$

Iracionalni brojevi koji odgovaraju ovim vrednostima modularne funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$ su čisto periodični verižni razlomci

$$\theta_n = (\overline{2,2,a_1,a_1,a_2,a_2,\ldots,a_s,a_s,1,1}) \qquad (6)$$

čija perioda - perioda Markova - zadovoljava niz uslova (Koksma [16], str. 31): a) sastoji se iz parova dvojki i parova jedinica; b) počinje parom dvojki, a završava se parom jedinica; c) deo izmedju početnog i završnog para je simetričan; d) broj parova jedinica je ograničen izvesnim uslovima itd.

Sve vrednosti niza (5) su oblika

$$\mathcal{M}(\theta_n) = \sqrt{9 - \frac{4}{u^2}},$$

gde u, sa još dve odgovarajuće vrednosti v i w ($u > v$, $u > w$) pretstavlja ma koji trio celih pozitivnih rešenja jednačine

$$u^2 + v^2 + w^2 = 3uvw \qquad (7)$$

Vrednosti u koje zadovoljavaju jednačinu (7) čine niz brojeva Markova

$$1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, \ldots$$

Rad Markova (dug i veoma komplikovan) ostaje u početku neprimećen, ali, od 1907 g. do danas, perioda Markova i jednačina (7) predmet su ispitivanja mnogih matematičara. Hurwitz [15] 1907 g. ispituje jednačinu (7) nezavisno od teorije verižnih razlomaka i aproksimacija. Frobenius [6] 1913 g. i jednačinu (7) i oblik periode Markova. Zatim se po istim pitanjima nižu radovi Perron-a i dvojice japanskih matematičara.

VI odeljak ovog rada posvećen je rešavanju Diofantove jednačine

$$u^2 + (-1)^n v^2 + (-1)^m w^2 = \alpha\, u v w$$

gde su α, m i n prirodni brojevi, čiji je specijalni slučaj jednačina (7). U tom odeljku su potvrdjeni već dobijeni rezultati u pogledu jednačine (7), pa je zatim pokazano da se i rešenja druga dva oblika posmatrane jednačine:

$$u^2 - v^2 - w^2 = \alpha\, u v w$$
$$u^2 \pm v^2 \mp w^2 = \alpha\, u v w$$

dobijaju pomoću nizova periodičnih verižnih razlomaka sa periodom čija je struktura slična periodi Markova, kao i da nizovi pojedinih uzajamno prostih rešenja ovih jednačina pretstavljaju izvesne analogije sa nizom brojeva Markova.

Odeljak IV, na osnovu Frobenius-ove [6] definicije uredjenog kompleksa prirodnih brojeva, definiše tri operacije sa uredjenim kompleksima, daje i nekoliko novih identičnih relacija medju ovim kompleksima i tako priprema aparaturu koja je primenjena u odeljku VI.

Odeljak V ispituje tačke nagomilavanja niza λ_n jednog čisto periodičnog verižnog razlomka, definiše i ispituje jednu racionalnu funkciju $g(\theta)$ čisto periodičnog verižnog razlomka θ, koja se takodje koristi u odeljku VI.

Najzad, u odeljku VII ovog rada nastavljena su ispitivanja Perron-ove modularne funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$. Ispitivanja su vršena u pogledu vrste brojeva koji mogu biti vrednosti ili tačke nagomilavanja vrednosti funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$. Tako se dobijaju nove klase transcendentnih brojeva γ za koje modularna funkcija $\mathcal{M}(\gamma)$ ima izvesne cele, racionalne razlomljene ili iracionalne vrednosti. I za ova ispitivanja korišćena je aparatura formirana u odeljku IV kao i rezultati odeljka V.

I RACIONALNE PRIBLIŽNE VREDNOSTI IRACIONALNIH BROJEVA

~~I Uvod~~ 1 Основни задатак

1. ~~(1)~~ U vezi sa racionalnim razlomkom $\frac{x}{y}$ kao približnom vrednošću iracionalnog broja γ posmatramo:

a) grešku aproksimacije

$$\delta = \gamma - \frac{x}{y} \tag{1}$$

b) pozitivni broj λ definisan jednakošću

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| = \frac{1}{\lambda y^2} \quad \text{tj.} \quad \lambda = \frac{1}{y^2|\delta|} \tag{2}$$

Svaki racionalni razlomak $\frac{x}{y}$ može biti smatran kao približna vrednost ma kog realnog broja γ. Greška bi u tom slučaju mogla biti proizvoljno velika, odnosno broj λ proizvoljno mali. Kao što je poznato, ma koliki bio imenilac y, uvek se može odrediti brojilac x tako da se dobijenim razlomkom posmatrani iracionalan broj γ aproksimira sa greškom manjom od $1/2y$. Radi toga postavimo sledeću definiciju:

Definicija: Racionalnom približnom vrednošću pozitivnog iracionalnog broja γ nazivaćemo razlomak $\frac{x}{y}$ koji zadovoljava uslove:

1) da su x i y prirodni uzajamno prosti brojevi;

2) da je

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2y} \quad \text{tj.} \quad \lambda > \frac{2}{y} \tag{3}$$

2. ~~(2)~~ Predmet prvog dela ovog rada sastoji se u rešavanju sledećeg zadatka:

Kad je data jedna racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ iracionalnog broja γ, odrediti novu približnu vrednost $\frac{x_1}{y_1}$ istog broja γ koja će biti bliža broju γ od date.

2 Rešavanje osnovnog zadatka

3. ~~(1)~~ Dokazaćemo tri pomoćna stava koji će nam omogućiti rešavanje postavljenog zadatka. Prva dva daju potrebne i dovoljne uslove da od dva razlomka $\frac{x}{y}$ i $\frac{x_1}{y_1}$ drugi bude bliži nekom posmatranom broju γ od prvog.

Treći pomoćni stav omogućava da se traženom razlomku $\frac{x_1}{y_1}$ da pogodan oblik.

<u>Pomoćni stav 1:</u> **Razlomak** $\frac{x_1}{y_1}$ nalaziće se izmedju broja γ i razlomka $\frac{x}{y}$ <u>onda i samo onda</u>, ako su zadovoljeni uslovi

$$\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right)\left(\gamma-\frac{x}{y}\right)>0 \tag{4}$$

$$\left|\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right|<\left|\gamma-\frac{x}{y}\right| \tag{5}$$

Tada je

$$\left|\gamma-\frac{x_1}{y_1}\right|=\left|\gamma-\frac{x}{y}\right|-\left|\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right| \tag{6}$$

<u>Dokaz:</u> Ako se razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ nalazi izmedju broja γ i razlomka $\frac{x}{y}$ onda su moguća samo dva položaja

U oba slučaja je razlika

$$r=\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}$$

istog znaka kao i greška aproksimacije udaljenijeg razlomka

$$\gamma-\frac{x}{y}=\delta.$$

[Uslov (4)]. Osim toga apsolutna vrednost razlike <u>r</u> mora biti manja od apsolutne vrednosti greške δ, jer bi se u protivnom razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ poklopio sa brojem γ ili prešao na suprotnu stranu toga broja. [Uslov (5)].

<u>Pomoćni stav 2:</u> Razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ nalaziće se sa suprotne strane broja γ od razlomka $\frac{x}{y}$ i biće bliži broju γ od tog razlomka, <u>onda i samo onda</u> ako su zadovoljeni uslovi

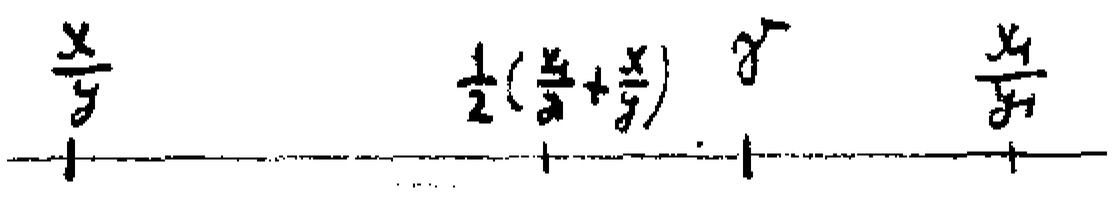
$$\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right)\left(\gamma-\frac{x}{y}\right)>0 \tag{7}$$

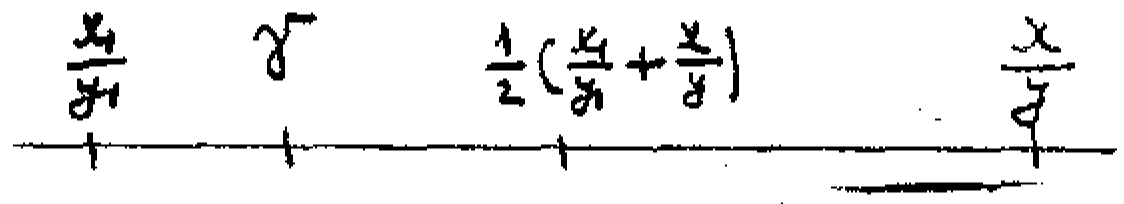
$$\frac{1}{2}\left|\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right|<\left|\gamma-\frac{x}{y}\right|<\left|\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right| \tag{8}$$

Tada je

$$\left|\gamma-\frac{x_1}{y_1}\right|=\left|\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right|-\left|\gamma-\frac{x}{y}\right| \tag{9}$$

<u>Dokaz:</u> Ako se razlomci $\frac{x}{y}$ i $\frac{x_1}{y_1}$ nalaze sa raznih strana broja γ, tako da je razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ bliži broju γ, onda su moguća samo dva položaja:





U oba slučaja je razlika r istog znaka kao i greška δ razlomka $\frac{x}{y}$. [Uslov (7)]. Isto tako u oba slučaja je apsolutna vrednost greške δ manja od apsolutne vrednosti razlike r. [Drugi deo nejednakosti (8)]. I najzad u oba slučaja sredina rastojanja razlomaka $\frac{x}{y}$ i $\frac{x_1}{y_1}$ nalazi se izmedju broja γ i razlomka $\frac{x}{y}$, što znači da je apsolutna vrednost polovine razlike r manja od apsolutne vrednosti greške δ. [Prvi deo nejednakosti (8)].

Pomoćni stav 3: Neka su x i y dati prirodni uzajamno prosti brojevi i neka je x' i y' par najmanjih celih pozitivnih rešenja jednačine

$$y x' - x y' = \varepsilon \qquad (10)$$

gde je ε bilo +1 bilo −1, onda razlomak

$$\frac{px + qx'}{py + qy'} \qquad (11)$$

za razne vrednosti celih brojeva p i q, takvih da je

$$py + qy' > 0$$

prolazi kroz sve moguće realne racionalne vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$. Pri tome razlika

$$\frac{px + qx'}{py + qy'} - \frac{x}{y} \qquad (12)$$

ima znak proizvoda $q\varepsilon$.

Brojilac i imenilac razlomka (11) biće uzajamno prosti onda i samo onda ako su brojevi p i q uzajamno prosti.

Dokaz: Pošto su x i y uzajamno prosti, onda je - za jedno izabrano ε - uvek odredjen par najmanjih rešenja x' i y'. Neka je sad $\frac{x_1}{y_1}$ ma koji dati racionalni razlomak čiju vrednost hoćemo da ima razlomak (11). Tada ćemo vrednosti p i q odrediti rešavanjem sistema:

$$\left.\begin{aligned} px + qx' &= x_1 \\ py + qy' &= y_1 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

odakle je, prema jednačini (10):

$$\left.\begin{aligned} p &= \varepsilon(y_1x' - x_1y') \\ q &= \varepsilon(yx_1 - xy_1) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

te vidimo da su p i q celi brojevi, ma kakav bio dati razlomak $\frac{x_1}{y_1}$. Iz druge od jednakosti (14) zaključujemo da razlika (12) ima znak proizvoda $q\varepsilon$.

Da su brojilac i imenilac razlomka (11) uzajamno prosti, kad su to p i q i obrnuto, zaključujemo iz jednakosti (14) odnosno (13).

4. Pristupimo sada rešavanju osnovnog zadatka postavljenog u ~~odeljku 1(2)~~ § 2.

Neka je dat racionalan razlomak $\frac{x}{y}$ kao približna vrednost iracionalnog broja γ, pa ako zadržimo sve oznake uvedene u ~~odeljku~~ § 3, onda se - prema pomoćnom stavu 3 - svaki drugi racionalan razlomak može napisati u obliku

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{px + qx'}{py + qy'}. \qquad (15)$$

Zato smemo pretpostaviti, ne gubeći nijedno rešenje postavljenog zadatka, da je traženi razlomak oblika (15), gde još treba odrediti znak desne strane jednačine (10), tj. ε, i odnos celih brojeva p i q, tako da razlomak (15) bude bliži broju γ od datog razlomka, tj. da budu zadovoljeni uslovi (4) i (5) ili (7) i (8).

Da bi bili zadovoljeni uslovi (4) i (7) dovoljno je, prema pomoćnom stavu 3, da desna strana jednačine (10) ima znak greške aproksimacije datog razlomka $\frac{x}{y}$:

$$\delta = \gamma - \frac{x}{y}$$

i da je $q > 0$. Na taj način obrazac (15) može pretstavljati samo razlomke koji se nalaze izmedju datog razlomka $\frac{x}{y}$ i broja γ ili sa suprotne strane broja γ.

Da bismo uslove (5) i (8) napisali u pogodnijem obliku, napomenimo da iz druge od jednakosti (14) sleduje:

$$\left|\frac{x_1}{y_1}-\frac{x}{y}\right|=\frac{q}{yy_1} \qquad (16)$$

5. Razlikujmo sada dva slučaja:

a) Da bi se razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ nalazio izmedju broja γ i razlomka $\frac{x}{y}$, potrebno je i dovoljno da budu zadovoljeni uslovi (4) i (5). Prvi je već uzet u obzir, a drugi, prema jednakosti (16), možemo napisati u obliku

$$y_1>\lambda q y \qquad (17)$$

gde smo uveli i koeficijent λ datog razlomka $\frac{x}{y}$, definisan jednakošću (2). Ako -prema (15)- stavimo još da je $y_1=py+qy'$, onda se potrebni i dovoljni uslovi da razlomak (15) leži izmedju broja γ i datog razlomka $\frac{x}{y}$, mogu napisati u obliku

$$q>0 \quad , \quad p>\left(\lambda-\frac{y'}{y}\right)q \qquad (18)$$

b) Da bi se razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ nalazio sa druge strane broja γ od razlomka $\frac{x}{y}$ i bio bliži broju γ od tog razlomka potrebno je i dovoljno da budu zadovoljeni uslovi (7) i (8). Prvi je već uzet u obzir, a drugi prema jednakostima (2) i (16) možemo napisati u obliku

$$\frac{\lambda}{2}qy<y_1<\lambda q y \qquad (19)$$

Ako, prema (15) stavimo još da je $y_1=py+qy'$ onda se potrebni i dovoljni uslovi da razlomak (15) bude bliži broju γ i da se nalazi sa suprotne strane toga broja od razlomka $\frac{x}{y}$, mogu napisati u obliku

$$q>0 \quad , \quad \left(\frac{\lambda}{2}-\frac{y'}{y}\right)q<p<\left(\lambda-\frac{y'}{y}\right)q. \qquad (20)$$

Pošto su uslovi (18) i (20) i potrebni, a ne samo dovoljni to su izrazom (15) uz uslove (18) ili (20) obuhvaćene sve racionalne približne vrednosti broja γ, bliže tome broju od date vrednosti $\frac{x}{y}$.

Mogli bi se još postaviti pitanje da li se iz uslova (18) ili (20) uvek mogu odrediti prirodan broj q i ceo broj p. Uslov (18) daje donju medju racionalnog broja $\frac{p}{q}$,što znači da postoji bezbrojno mnogo parova $\underline{p}$ i $\underline{q}$ koji taj uslov zadovoljavaju. Prema uslovu (20) racionalan broj $\frac{p}{q}$ mora se nalaziti u jednom intervalu čija širina nije nikad nula, što opêtet znači da postoji bezbrojno mnogo parova $\underline{p}$ i $\underline{q}$ koji zadovoljavaju uslov (20).

6. Prema trećem pomoćnom stavu:

a) Razlomak (15) nalaziće se sa suprotne strane broja γ od razlomka $\frac{x}{y}$ i biće udaljeniji od broja γ nego taj razlomak, ako je

$$q>0 \quad , \quad 0 < y_1 < \frac{\lambda}{2} q y$$

tj.

$$q>0 \quad , \quad -\frac{y'}{y} q < p < \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{y'}{y}\right) q$$

b) Razlomak (15) nalaziće se sa iste strane broja γ sa koje se nalazi i dati razlomak $\frac{x}{y}$,ali udaljeniji od broja γ nego taj razlomak, ako je

$$q<0 \quad , \quad y_1 > 0$$

tj.

$$q<0 \quad , \quad p > -\frac{y'}{y} q$$

7. Na osnovu svega izloženog ~~u odeljku~~ možemo iskazati:

<u>Stav 1:</u> Ako je data jedna racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ iracionalnog broja γ i ako su $\underline{x'}$ i $\underline{y'}$ par najmanjih celih pozitivnih rešenja jednačine

$$y x' - x y' = \pm 1 \qquad (21)$$

gde je na desnoj strani znak greške aproksimacije $\underline{\delta}$ datog razlomka, onda razlomak

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{px + qx'}{py + qy'} \qquad (22)$$

gde su $\underline{p}$ i $\underline{q}$ celi brojevi, pretstavlja sve racionalne približne vrednosti broja γ, i to:

a) ako je

$$q>0 \quad , \quad p > \left(\lambda - \frac{y'}{y}\right) q \qquad (23)$$

<u>onda i samo onda</u> će se razlomak (22) nalaziti izmedju datog razlom-

ka $\frac{x}{y}$ i broja γ ;

b) ako je

$$q > 0 \quad , \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{y'}{y}\right) q < p < \left(\lambda - \frac{y'}{y}\right) q \qquad (24)$$

onda i samo onda će razlomak (22) biti bliži broju γ od datog razlomka $\frac{x}{y}$,i nalaziće se sa suprotne strane broja γ od datog razlomka;

c) ako je

$$q > 0 \quad , \quad -\frac{y'}{y} q < p < \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{y'}{y}\right) q \qquad (25)$$

onda i samo onda će razlomak (22) biti udaljeniji od broja γ nego razlomak $\frac{x}{y}$ i nalaziće se sa suprotne strane broja γ ;

d) ako je

$$q < 0 \quad , \quad p > -\frac{y'}{y} q \qquad (26)$$

onda i samo onda će se razlomak (22) nalaziti sa iste strane broja γ sa koje se nalazi i razlomak $\frac{x}{y}$,ali udaljeniji od broja γ nego taj razlomak.

8. Izraze za grešku aproksimacije razlomka (22),(ako ga kraće označimo sa $\frac{x_1}{y_1}$),prema (6),(9) i (16) možemo napisati u prostijem obliku, ako stavimo

$$\delta = \gamma - \frac{x}{y} \quad , \quad \delta_1 = \gamma - \frac{x_1}{y_1}$$

pa je

$$|\delta_1| = |\delta| - \frac{q}{y y_1} \qquad (27)$$

ako se razlomci $\frac{x}{y}$ i $\frac{x_1}{y_1}$ nalaze sa iste strane broja γ ,i to

a) $q > 0$,ako je razlomak $\frac{x_1}{y_1}$ bliži broju γ ;

b) $q < 0$,ako je razlomak $\frac{x}{y}$ bliži broju γ ; i:

$$|\delta_1| = \frac{q}{y y_1} - |\delta| \qquad (28)$$

yz $q > 0$

ako se razlomci $\frac{x}{y}$ i $\frac{x_1}{y_1}$ nalaze sa raznih strana broja γ.

3 Najbolje i glavne približne vrednosti

9. Neka je $\frac{x}{y}$ jedna data racionalna približna vrednost realnog broja γ, neka je λ odgovarajući koeficijent definisan jednakošću (2) i neka su x' i y' najmanji par celih pozitivnih rešenja jednačine (21).

Na osnovu stava 1 dokazaćemo dva stava koji daju potrebne i ~~do~~ dovoljne uslove da nijedan racionalni razlomak $\frac{x_1}{y_1}$, gde je $y_1 < y$ ne bude bliži broju γ od datog razlomka $\frac{x}{y}$.

Stav 2: Da bi jedna racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ imala osobinu da izmedju nje i broja γ ne leži ni jedan racionalan razlomak sa manjim imeniocem od y potrebno je i dovoljno da bude

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y'y} \quad \text{tj} \quad \lambda > \frac{y'}{y} \qquad (29)$$

Dokaz: Prema stavu 1 svi racionalni razlomci koji leže izmedju broja γ i razlomka $\frac{x}{y}$ imaju oblik (22) kad p i q zadovoljavaju uslove (23). Da bi bilo $y_1 = py + qy' > y$ dovoljno je da bude $p > 0$, a druga nejednačina (23) biće zadovoljena samo za pozitivne vrednosti p, ako je izraz na njenoj desnoj strani pozitivan, tj. ako je

$$\lambda - \frac{y'}{y} > 0$$

a to je uslov (29).

Uslov (29) je i potreban, jer kad je $\lambda < \frac{y'}{y}$, onda su uslovi (23) zadovoljeni za $p=0$, $q=1$, što znači da tada razlomak $\frac{x'}{y'}$ leži izmedju broja γ i razlomka $\frac{x}{y}$.

Stav 3: Da bi jedna racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ imala osobinu da ne postoji nijedan racionalan razlomak sa manjim imeniocem od y koji je bliži broju γ od datog razlomka $\frac{x}{y}$, potrebno je i dovoljno da bude

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2y'y} \quad \text{tj.} \quad \lambda > \frac{2y'}{y} \qquad (30)$$

Dokaz: Pošto je uslov (29) sadržan u uslovu (30), potrebno je stav 3 dokazati samo za razlomke koji leže sa suprotne strane broja γ od razlomka $\frac{x}{y}$. Prema stavu 1 takvi razlomci su oblika (22) kad p i q zadovoljavaju uslove (24). Da bi druga od nejednakosti (24) bila zadovoljena samo za pozitivne vrednosti p - jer je tada $py+qy'>y$ - dovoljno je da donja medja bude pozitivna, tj. da bude

$$\frac{\lambda}{2}-\frac{y'}{y}>0$$

a to je uslov (30). Uslov (30) je i potreban, jer ako je koeficijenat λ u intervalu

$$\frac{y'}{y}<\lambda<\frac{2y'}{y}$$

onda su uslovi (24) zadovoljeni za $p=0,\ q=1$, što znači da se tada razlomak $\frac{x'}{y'}$ nalazi sa druge strane broja γ od razlomka $\frac{x}{y}$ i da je bliži broju γ od tog razlomka.

Sada možemo ~~uvesti~~ koristiti poznati pojam "najbolje racionalne približne vrednosti".

Definicija: Za jednu racionalnu približnu vrednost $\frac{x}{y}$ ~~kxxx~~ realnog broja γ kažemo da je "najbolja racionalna približna vrednost" toga broja, ako ima osobinu da ne postoji nijedan racionalan razlomak sa manjim imeniocem od y bliži broju γ od datog razlomka $\frac{x}{y}$.

Na osnovu toga možemo stav 3 iskazati u obliku:

Stav 3 a: Da bi jedna racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ bila "najbolja približna vrednost" toga broja potrebno je i dovoljno da bude

$$\left|\gamma-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{2y'y} \quad \text{tj.} \quad \lambda>\frac{2y'}{y} \qquad (30)$$

10. ~~9~~ Iz stava 2 sledi je neposredno:

Stav 4: Ako je $\frac{x}{y}$ racionalna približna vrednost iracionalnog broja γ i ako je (uz $y>3$) zadovoljen uslov:

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{(y-1)y} \qquad \text{tj.} \qquad \lambda > 1 - \frac{1}{y} \tag{31}$$

onda izmedju broja γ i razlomka $\frac{x}{y}$ ne leži nijedan racionalan razlomak čiji je imenilac manji od y.

Dokaz: Pošto je uvek $y' \leq y-1$, to će uslov (29) biti uvek zadovoljen kad je zadovoljen uslov (31).

Iz stava 3 sleduje neposredno:

Stav 5: Da bi racionalan razlomak $\frac{x}{y}$ bio jedna "najbolja racionalna približna vrednost" realnog broja γ dovoljno je da bude (uz $y > 2$)

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2(y-1)y} \qquad \text{tj.} \qquad \lambda > 2 - \frac{2}{y} \tag{32}$$

Dokaz: Pošto je $y' \leq y-1$ to će uslov (30) biti uvek zadovoljen kad je zadovoljen uslov (32).

Dovoljnim uslovima (31) i (32) u pogodnom slučaju izostavlja se odredjivanje rešenja y'.

Napomena: Iz uslova (32) direktno proizilazi poznati Legendre-ov [19] dovoljan uslov

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2y^2} \qquad \text{tj.} \qquad \lambda > 2$$

na osnovu koga se može zaključiti da razlomak $\frac{x}{y}$ pripada nizu približnih vrednosti pravilnog verižnog razlomka broja γ, pa da je, prema tome, taj razlomak jedna najbolja približna vrednost broja γ.

11. Pokušajmo sad da rešimo sledeći zadatak:

Kad je data jedna najbolja racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ, odrediti drugu najbolju približnu vrednost istog broja γ koja je bliža tome broju od date vrednosti $\frac{x}{y}$, a da pri tome njen imenilac bude najmanji mogući.

Postavljeni zadatak pretpostavlja da data približna vrednost $\frac{x}{y}$ zadovoljava uslov (30).

Pri odredjivanju novog imenioca y_1 pokušajmo da izdvojimo slučaj kad će se traženi razlomak nalaziti sa iste strane broja γ sa koje se nalazi i dati razlomak $\frac{x}{y}$ .Radi toga primetimo sledeću činjenicu.Ako za izvesnu odredjenu vrednost $q>0$,nejednačinu (23) zadovoljava jedna vrednost $p=n$,onda je - za isto q - nejednačina (24) zadovoljena za $p=n-1$ .Kad je zadovoljen uslov(30),nejdnakost (23) daje najmanje p za $q=1$.Da bi to p ~~kžžm~~ - s obzirom na prethodnu napomenu - bilo najmanje moguće: $p=1$,potrebno je i dovoljmo da bude

$$\lambda-\frac{y'}{y}<1 .$$

U tom slučaju nejednakost (24) imala bi najmanji par rešenja: $p=1$, $q \geqslant 2$,pa bi prva vrednost imenioca traženog razlomka $y_1=y+y'$ bila manja od druge $y_1=y+qy'$,gde je $q \geqslant 2$.

Prema tome tražena racionalna približna vrednost je

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x+x'}{y+y'} . \qquad (33)$$

Da je to jedna najbolja racionalna približna vrednost broja γ proizilazi iz načina na koji je dobijena,ali to možemo pokazati i neposredno. Radi toga je potrebno da nadjemo par najmanjih pozitivnih i celih rešenja x_1' ,y_1' jednačine

$$y_1x_1'-x_1y_1'=\pm 1$$

gde je na desnoj strani znak greške δ_1 ili,što je isto,znak greške δ datog razlomka,a x_1 i y_1 su brojilac i imenilac dobijenog razlomka.Lako se uveriti da su tražena rešenja

$$x_1'=x' , \quad y_1'=y'.$$

Greška $|\delta_1|$ razlomka (33) data je obrascem (27) kad se u njemu stavi

$$y_1=y+y' \quad i \quad q=1,$$

pa je ,prema uslovu (30):

$$|\delta_1|=|\delta|-\frac{1}{y(y+y')}<\frac{1}{2y'y}-\frac{1}{y(y+y')}$$

ili

$$|\delta_1| < \frac{1}{2y'(y+y')}$$

tj.

$$|\delta_1| < \frac{1}{2y_1' y_1},$$

što znači da ~~mxmx~~ razlomak (33) zadovoljava uslov (30).

Na osnovu izloženog možemo iskazati

<u>Stav 6:</u> Kad jedna najbolja racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ zadovoljava uslov

$$\frac{1}{y(y+y')} < \left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2yy'} \qquad (34)$$

tj.

$$\frac{2y'}{y} < \lambda < 1 + \frac{y'}{y} \qquad (34a)$$

o <u>onda i samo onda</u> se druga najbolja racionalna približna vrednost istog broja γ koja je bliža broju γ od date, a pri tome ima najmanji mogući imenilac, nalazi <u>sa iste strane broja γ</u> sa koje se nalazi i data vrednost $\frac{x}{y}$. Ta nova približna vrednost je

$$\frac{x+x'}{y+y'}.$$

12. ~~(5)~~ Uslov (34) deli sve najbolje racionalne približne vrednosti jednog realnog broja na dve grupe. Zato prema Lagrange-u [18] ~~uvodimo~~ koristimo pojam "glavne racionalne približne vrednosti":

<u>Definicija:</u> Za jednu racionalnu približnu vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ kažemo da je <u>glavna približna vrednost</u> toga broja, ako zadovoljava uslov

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y(y+y')} \quad \text{tj} \quad \lambda > 1 + \frac{y'}{y} \qquad (35)$$

13. ~~(6)~~ Sad nam još ostaje da zadatak koji smo postavili u ~~odeljku 3(4)~~ § 11 rešimo kad je dati razlomak $\frac{x}{y}$ jedna glavna približna vrednost broja γ.

Za $q = 1$ uslov (23) postaje

$$\frac{\lambda}{2} - \frac{y'}{y} < p < \lambda - \frac{y'}{y} . \qquad (36)$$

Širina ovog intervala jednaka je $\frac{\lambda}{2}$.Prema tome kad je $\lambda > 2$ taj interval sadrži najmanje jedan ceo broj,koji možemo uzeti za p.A ako je uz uslov (35), $\lambda < 2$ onda je donja medja intervala (36) manja od 1,a kako je gornja,uz uslov (35) ,uvek veća od 1,to znači da vrednost $p=1$ zadovoljava nejednakpst (36).Prema tome,kad je zadovoljen uslov (35) nejednakost (36) daje uvek jednu ili više povoljnih vrednosti za p. Najmanju od tih vrednosti označimo sa m,a najveću sa b,pa iz nejednakosti (36) sleduje

$$m = \left[\frac{\lambda}{2} - \frac{y'}{y}\right] + 1 \qquad (37)$$

$$b = \left[\lambda - \frac{y'}{y}\right] \qquad (38)$$

gde ~~praksx~~ $[A]$ pretstavlja najveći ceo broj koji se nalazi u A.

Najmanja vrednost p koja,uz uslov (35) ,zadovoljava nejednakost (23) dobila bi se takodje za $q=1$ i bila bi $p=b+1$.Pošto je $m < b+1$,to je najmanji mogući imenilac traženog razlomka $y_1 = my + y'$ što znači da se traženi razlomak nalazi sa suprotne strane broja γ od datog razlomka $\frac{x}{y}$.

14. Vrednosti p dobijene iz nejednakosti (36) daju $b - m + 1$ razlomak oblika (22):

$$\frac{x_1^{(p)}}{y_1^{(p)}} = \frac{px + x'}{py + y'} \qquad (39)$$

gde je $p = m, m+1, \ldots, b-1, b$ .Svi ti razlomci nalaze se sa druge strane broja γ od datog razlomka $\frac{x}{y}$ i bliži su broju γ od tog razlomka. Greška aproksimacije

$$|\delta_1^{(p)}| = \left| \gamma - \frac{px + x'}{py + y'} \right|$$

prema obrascu (28) ima vrednost

$$|\delta_1^{(p)}| = \frac{1}{y(py+y')} - \frac{1}{\lambda y^2} \qquad (40)$$

i opada kad p raste.

Utvrdimo prvo da li koji od razlomaka (39) pretstavlja jednu glavnu približnu vrednost broja γ. Radi toga je potrebno da nadjemo par najmanjih celih rešenja jednačine

$$y_1^{(p)} x_1'^{(p)} - x_1^{(p)} y_1'^{(p)} = \mp 1 \qquad (41)$$

gde je na desnoj strani znak greške $\delta_1^{(p)}$ ili, što je u ovom slučaju isto, znak suprotan znaku greške δ datog razlomka $\frac{x}{y}$. Ma koliko bilo p dobija se

$$x_1'^{(p)} = x \, , \quad y_1'^{(p)} = y \qquad (42)$$

gde su x i y brojilac i imenilac datog razlomka $\frac{x}{y}$. Prema tome, uslovu (35) i obrascu (40) da bi razlomak (39) bio jedna glavna približna vrednost broja γ, potrebno je i dovoljno da bude zadovoljena nejednakost

$$|\delta_1^{(p)}| < \frac{1}{y_1^{(p)}(y_1^{(p)} + y_1'^{(p)})}$$

tj.

$$\frac{1}{y(py+y')} - \frac{1}{\lambda y^2} < \frac{1}{(py+y')(py+y'+y)}$$

odakle je

$$p > \lambda - \frac{y'}{y} - 1$$

Ovu nejednakost zadovoljava samo najveća vrednost p:

$$p = b,$$

što znači da je samo poslednji u nizu razlomaka (39) jedna glavna približna vrednost broja γ.

Postavlja se zatim pitanje da li su svi razlomci niza (39) najbolje racionalne približne vrednosti broja γ. Da bi to bilo, potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$|\delta_1^{(p)}| < \frac{1}{2 y_1'^{(p)} y_1^{(p)}}$$

tj.

$$\frac{1}{y(py+y')} - \frac{1}{\lambda y^2} < \frac{1}{2y(py+y')}$$

odakle je

$$p > \frac{\lambda}{2} - \frac{y'}{y}$$

Ovu nejednakost - prema (36) - zadovoljavaju sve nadjene vrednosti

$$p = m, m+1, \ldots, b-1, b.$$

Prema tome svi razlomci (39) su najbolje približne vrednosti broja γ.

15. Na kraju ove analize ~~xxxxxxxxxx~~ još je od interesa, prema vrednosti λ datog razlomka $\frac{x}{y}$, odrediti broj članova niza (39). Radi toga razlikujmo ove slučajeve-

a) Neka je

$$1+\frac{y'}{y}<\lambda<2+\frac{y'}{y}$$

Tada je - prema (36) - gornja medja za p manja od 2,pa je jedina povoljna vrednost

$$p=1.$$

b) Kad je

$$2+\frac{y'}{y}<\lambda<2+\frac{2y'}{y}$$

onda je

$$\lambda=2+\frac{2y'}{y}-\eta \qquad \text{uz} \qquad 0<\eta<\frac{y'}{y}$$

pa nejednakost (36) postaje

$$1-\frac{\eta}{2}<p<2+\frac{y'}{y}-\eta$$

te su povoljne vrednosti za p:

$$p=1 \quad i \quad p=2.$$

c) Kad je

$$2+\frac{2y'}{y}<\lambda<3+\frac{y'}{y}$$

onda je

$$\lambda=2+\frac{2y'}{y}+\eta \qquad \text{uz} \qquad 0<\eta<1-\frac{y'}{y}$$

te nejednakost (36) postaje

$$1+\frac{\eta}{2}<p<2+\frac{y'}{y}+\eta$$

pa se za p dobija jedina povoljna vrednost

$$p=2$$

d) Ako je

$$\lambda>3+\frac{y'}{y}$$

onda je širina intervala (36) uvek veća od 2,pa postoje najmanje dve povoljne vrednosti za p.

16. Na osnovu izvedenih zaključaka možemo iskazati

Stav 7: Glavna približna vrednost realnog broja γ koja je bliža broju γ od jedne date glavne približne vrednosti $\frac{x}{y}$ istog broja γ ,a koja pod tim uslovima ima najmanji mogući imenilac,nalazi se sa suprotne strane broja γ od date vrednosti $\frac{x}{y}$ i pretstavljena je razlomkom

$$\frac{bx+x'}{by+y'} \tag{43}$$

gde je

$$b=\left[\lambda-\frac{y'}{y}\right] \tag{44}$$

Ako data glavna približna vrednost $\frac{x}{y}$ zadovoljava uslov

$$\lambda<2+\frac{y'}{y} \qquad \text{ili} \qquad 2+\frac{2y'}{y}<\lambda<3+\frac{y'}{y} \tag{45}$$

onda ne postoji nijedna najbolja približna vrednost broja γ, koja bi bila bliža broju γ od date vrednosti $\frac{x}{y}$, a čiji bi imenilac ležao u intervalu izmedju imenilaca dveju pomenutih glavnih približnih vrednosti.

Naprotiv, ako data glavna približna vrednost $\frac{x}{y}$ zadovoljava uslov

$$2+\frac{y'}{y}<\lambda<2+\frac{2y'}{y} \qquad \text{ili} \qquad \lambda>3+\frac{y'}{y} \tag{46}$$

onda postoji jedna ili više najboljih približnih vrednosti broja γ, čiji su imenioci u intervalu izmedju imenilaca dveju posmatranih glavnih približnih vrednosti, koje su sve bliže broju γ od date vrednosti $\frac{x}{y}$, nalaze se sa suprotne strane broja γ od date vrednosti $\frac{x}{y}$ i utoliko su bliže broju γ ukoliko im je imenilac veći. Ove vrednosti su oblika

$$\frac{px+x'}{py+y'} \tag{47}$$

gde je $p=m,\ m+1,\ \ldots,\ b-1$, a broj <u>m</u> je dat obrascem

$$m=\left[\frac{\lambda}{2}-\frac{y'}{y}\right]+1 \tag{48}$$

Glavna približna vrednost (43) je bliža broju γ od svih vrednosti (47).

<u>4 Neke osobine lošijih približnih vrednosti</u>

17. Neka je $\frac{x}{y}$ jedna data racionalna približna vrednost iracionalnog broja γ, λ odgovarajući koeficijenat definisan obrascem (2) i neka su, kao i do sada, x' i y' par najmanjih celih pozitivnih rešenja jednačine

$$yx'-xy'=\pm 1 \tag{49}$$

gde je na desnoj strani znak greške δ datog razlomka. Osim toga neka su x'' i y'' par najmanjih celih i pozitivnih rešenja jednačine

$$y'x'' - x'y'' = \pm 1 \qquad (50)$$

gde je na desnoj strani znak greške

$$\delta' = \gamma - \frac{x'}{y'}$$

razlomka $\frac{x'}{y'}$.

U ovm odeljku posmatraćemo razlomak $\frac{x'}{y'}$ i dokazaćemo sledeća tri stava.

<u>Stav 8:</u> Ako data racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ zadovoljava uslov

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y'y} \quad \text{tj.} \quad \lambda > \frac{y'}{y} \qquad (51)$$

onda i samo onda je razlomak $\frac{x'}{y'}$ jedna glavna približna vrednost broja γ koja se nalazi sa suprotne strane toga broja od datog razlomka $\frac{x}{y}$.

<u>Dokaz:</u> Razlomak (22) svodi se na razlomak $\frac{x'}{y'}$ za $p=0$, $q=1$, što znači da se - kad je zadovoljen uslov (51) - razlomci $\frac{x}{y}$ i $\frac{x'}{y'}$ nalaze sa raznih strana broja γ, jer je tada, prema veličini broja λ, zadovoljen ili uslov (24) ili (25), a ne može biti zadovoljen uslov (23). Zato, ako stavimo

$$|\delta'| = \left|\gamma - \frac{x'}{y'}\right| = \frac{1}{\lambda' y'^2}$$

prema jednakosti (28) vredi relacija

$$|\delta'| = \frac{1}{y'y} - |\delta| \qquad (52)$$

Na osnovu uslova (51) možemo staviti da je

$$\lambda = \frac{y'}{y} + \eta$$

gde je $\eta > 0$, pa jednakost (52) postaje

$$|\delta'| = \frac{\eta}{y'(y'+\eta y)}$$

odakle je

$$\lambda' = \frac{y}{y'} + \frac{1}{\eta} \qquad (53)$$

Pošto se u posmatranom slučaju razlomci $\frac{x'}{y'}$ i $\frac{x}{y}$ nalaze sa raznih strana broja, desna strana jednakosti (50) ima znak suprotan znaku greške datog razlomka $\frac{x}{y}$,pa će par najmanjih celih i pozitivnih rešenja x'' i y'' te jednačine biti oblika

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x - cx' \\ y'' &= y - cy' \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

gde je c ceo broj

$$1 \leq c \leq \mathrm{Min}\left\{\frac{x}{x'}, \frac{y}{y'}\right\}$$

Tada se dobijena vrednost (53) za λ' može napisati u obliku

$$\lambda' = c + \frac{y''}{y'} + \frac{1}{\eta}$$

pa je uvek

$$\lambda' > 1 + \frac{y''}{y'}$$

što znači - prema uslovu (35)-da je $\frac{x'}{y'}$ jedna glavna približna vrednost broja γ ,te je prethodni stav dokazan.

Stav 9: Ako data racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ zadovoljava uslov

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| > \frac{1}{y'y} \qquad \text{tj.} \qquad \lambda < \frac{y'}{y} \qquad (55)$$

onda i samo onda se razlomak $\frac{x'}{y'}$ nalazi izmedju datog razlomka $\frac{x}{y}$ i broja γ i uvek je

$$\lambda' > \lambda$$

Dokaz: Pošto je u ovom slučaju

$$\lambda - \frac{y'}{y} < 0$$

to je nejednakost (23) zadovoljena za $p=0$,$q=1$,što znači da razlomak $\frac{x'}{y'}$ leži izmedju razlomka $\frac{x}{y}$ i broja γ .Da je pri tome $\lambda' > \lambda$ proizilazi iz činjenice da je $y' < y$,jer iz $|\delta'| < |\delta|$ sleduje

$$\lambda' > \lambda\left(\frac{y}{y'}\right)^2$$

pa je,tim pre

$$\lambda' > \lambda .$$

Time je stav 9 dokazan.

~~**Stav 10:** Ako data racionalna približna vrednost realnog~~

Stav 10: Ako data racionalna približna vrednost $\frac{x}{y}$ realnog broja γ zadovoljava uslov

$$\frac{y'(y'+y'')}{y(y+y'+y'')} < \lambda < \frac{y'}{y} \qquad (56)$$

onda i samo onda je razlomak $\frac{x'}{y'}$ jedna glavna racionalna ~~vrednost~~ približna vrednost istog broja γ koja se nalazi izmedju razlomka $\frac{x}{y}$ i broja γ.

Dokaz: Neka su x'' i y'' par najmanjih pozitivnih i celih rešenja jednačine (50), čija desna strana ovoga puta ima znak greške datog razlomka $\frac{x}{y}$, jer se prema stavu 9 sad razlomci $\frac{x}{y}$ i $\frac{x'}{y'}$ nalaze sa iste strane broja γ. Da bi razlomak $\frac{x'}{y'}$ bio jedna glavna približna vrednost broja γ, potrebno je i dovoljno da bude

$$\lambda' > 1 + \frac{y''}{y'}$$

a kako je, prema obrascu (27)

$$\frac{1}{\lambda' y'^2} = \frac{1}{\lambda y^2} - \frac{1}{yy'}$$

odakle je

$$\lambda' = \frac{\lambda y^2}{y'(y'-\lambda y)}$$

to mora biti

$$\frac{\lambda y^2}{y'(y'-\lambda y)} > 1 + \frac{y''}{y'}$$

i najzad

$$\lambda > \frac{y'(y'+y'')}{y(y+y'+y'')}$$

čime je stav 10 dokazan.

18. Zadržavajući značenje oznaka x' i y', x'' i y'' pretpostavimo dalje da je x''' i y''' par najmanjih pozitivnih i celih rešenja jednačine

$$y''x''' - x''y''' = \pm 1,$$

gde je na desnoj strani znak greške aproksimacije δ'' razlomka $\frac{x''}{y''}$, itd. pretpostavimo da je $x^{(k)}$ i $y^{(k)}$ par najmanjih celih i pozitivnih rešenja

jednačine
$$y^{(k-1)}x^{(k)}-x^{(k-1)}y^{(k)}=\pm 1$$

gde je na desnoj strani znak greške
$$\delta^{(k-1)}=\gamma-\frac{x^{(k-1)}}{y^{(k-1)}} .$$

Pretpostavimo osim toga da je $\lambda<\frac{y'}{y}$ i da se svi razlomci $\frac{x}{y},\frac{x'}{y'},\dots$
$\dots,\frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}$ nalaze sa iste strane broja γ ,pa možemo dokazati

Stav 11: Da bi razlomak $\frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}$ bio jedna glavna približna vrednost broja γ dovoljno je da data približna vrednost $\frac{x}{y}$ zadovoljava uslov
$$\left|\gamma-\frac{x}{y}\right|<\frac{2k+1}{2y^2} \qquad \text{tj.} \qquad \lambda>\frac{2}{2k+1} \tag{57}$$
gde je $k=0,1,2,\dots$

<u>Dokaz:</u> Pokušajmo da odredimo uslov koji je dovoljno da zadovoljava $\lambda^{(s-1)}$ da bi bilo $\lambda^{(s)}>\alpha$,gde je $s\le k$,a α jedan dati pozitivan broj.Pošto se po pretpostavci razlomci $\frac{x^{(s-1)}}{y^{(s-1)}}$ i $\frac{x^{(s)}}{y^{(s)}}$ nalaze sa iste strane broja γ ,na osnovu obrasca (27) sleduje
$$\frac{1}{\lambda^{(s)}}=\frac{1}{\lambda^{(s-1)}t^2}-\frac{1}{t} \tag{58}$$
gde je
$$t=\frac{y^{(s-1)}}{y^{(s)}} .$$
Da bi bilo $\lambda^{(s)}>\alpha$,tj. $\frac{1}{\lambda^{(s)}}<\frac{1}{\alpha}$ mora biti -prema (58) -
$$\frac{1}{\lambda^{(s-1)}t^2}-\frac{1}{t}<\frac{1}{\alpha}$$
odakle je
$$\lambda^{(s-1)}>\frac{\alpha}{t^2+\alpha t}$$
Da bi ova nejednakost bila zadovoljena dovoljno je da bude
$$\lambda^{(s-1)}>\frac{\alpha}{\alpha+1}$$
jer je $t>1$ .Odatle <u>zaključak:</u>

Da bi bilo
$$\lambda^{(s)}>\alpha$$
dovoljno je da bude
$$\lambda^{(s-1)}>\frac{\alpha}{\alpha+1}$$

Prema tome,da bi bilo $\lambda^{(k)} > 2$

dovoljno je da bude $\lambda^{(k-1)} > \frac{2}{3}$

a da bi to bilo dovoljno je da bude
$$\lambda^{(k-2)} > \frac{2}{5}$$

itd. . . . da bude $\lambda^{1} > \frac{2}{2k-1}$

a da bi to bilo ,dovoljno je da bude
$$\lambda > \frac{2}{2k+1}$$

čime je prethodni stav dokazan.

Iz stava 11,naprimer,sleduje

<u>Posledica stava 11:</u>Da bi razlomak $\frac{x^{1}}{y^{1}}$ bio jedna glavna racionalna približna vrednost broja γ <u>dovoljno je</u> da dati razlomak zadovoljava uslov $\lambda > \frac{2}{3}$.

19. Pretpostavimo sad da se razlomak $\frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}$ nalazi sa suprotne strane broja γ od razlomaka $\frac{x}{y}, \frac{x^{1}}{y^{1}}, \ldots, \frac{x^{(k-1)}}{y^{(k-1)}}$,pa možemo dokazati

<u>Stav 12:</u> Da bi razlomak $\frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}$ bio jedna glavna približna vrednost broja γ i nalazio se sa suprotne strane broja γ od razlomka $\frac{x}{y}$ <u>dovoljno je</u> da bude

$$\left|\gamma - \frac{x}{y}\right| < \frac{k}{y^2} \qquad \text{tj.} \qquad \lambda > \frac{1}{k} \qquad (59)$$

gde je $k = 1, 2, \ldots$

<u>Dokaz:</u> Da bi razlomak $\frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}$ bio jedna glavna približna vrednost broja γ i nalazio se sa suprotne strane toga broja od razlomka $\frac{x^{(k-1)}}{y^{(k-1)}}$ dovoljno je - prema stavu 8 - da bude $\lambda^{(k-1)} > 1$,a da bi to bilo iz zaključka izvedenog u toku dokaza stava 11 sledeje da je dovoljno da bude $\lambda^{(k-2)} > \frac{1}{2}$, a da bi to bilo dovoljno je da bude $\lambda^{(k-3)} > \frac{1}{3}$ itd....
.....da bude $\lambda^{1} > \frac{1}{k-1}$,a da bi to bilo dovoljno je da bude
$$\lambda > \frac{1}{k}$$

čime je prethodni stav dokazan.

II NIZOVI RACIONALNIH PRIBLIŽNIH VREDNOSTI IRACIONALNOG BROJA

1 Niz glavnih približnih vrednosti

20 Kad je data jedna glavna racionalna približna vrednost nekog iracionalnog broja, onda - prema stavu 7 - uvek možemo da odredimo drugu glavnu racionalnu približnu vrednost istog broja, čiji je imenilac veći od imenioca date, a pri tome najmanji mogući. Znači da možemo govoriti o <u>nizu glavnih racionalnih približnih vrednosti</u> jednog iracionalnog broja. γ :

$$\frac{x_0}{y_0}, \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots \tag{1}$$

Greške aproksimacije članova niza (1) označimo, kao i do sada, sa

$$|\delta_\nu| = \left|\gamma - \frac{x_\nu}{y_\nu}\right| = \frac{1}{\lambda_\nu y_\nu^2} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Početni član $\frac{x_0}{y_0}$ niza (1) je najveći ceo broj koji se sadrži u iracionalnom broju γ

$$b_0 = [\gamma],$$

pa znači da je

$$x_0 = b_0 \quad , \quad y_0 = 1 \tag{3}$$

Odgovarajuća vrednost broja λ je uvek veća od 1

$$\lambda_0 > 1$$

što znači da zadovoljava uslov (35 I). Jer par najmanjih pozitivnih celih rešenja jednačine

$$y_0 x_0' - x_0 y_0' = 1$$

ima vrednosti

$$x_0' = 1 \quad , \quad y_0' = 0$$

Pa je

$$\lambda_0 > 1 + \frac{y_0'}{y_0} = 1$$

a to znači da je

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{x_\nu}{y_\nu} = \gamma .$$

f) Prema stavu 7 obrazac $(43/_I)$ iz jedne date glavne približne vrednosti $\frac{x_{\nu-1}}{y_{\nu-1}}$ sledeća glavna približna vrednost $\frac{x_\nu}{y_\nu}$ dobija se u obliku razlomka $(22/_I)$ za $q=1$,što znači - prema obrascu $(16/_I)$ - da je uvek

$$\frac{x_\nu}{y_\nu} - \frac{x_{\nu-1}}{y_{\nu-1}} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{y_{\nu-1}\, y_\nu} \tag{6}$$

Odatle zaključujemo da par najmanjih celih pozitivnih rešenja jednačine (5) ima vrednosti

$$x'_\nu = x_{\nu-1} \ , \quad y'_\nu = y_{\nu-1} \tag{7}$$

Ako odgovarajuću vrednost prirodnog broja <u>b</u> definisanog obrascem $(44/_I)$ označimo sa $b_{\nu+1}$,onda - prema obrascu $(43/_I)$ - za izračunavanje brojilaca i imenilaca glavnih približnih vrednosti vrede rekurentni obrasci

$$\left.\begin{aligned} x_{\nu+1} &= b_{\nu+1}\, x_\nu + x_{\nu-1} \\ y_{\nu+1} &= b_{\nu+1}\, y_\nu + y_{\nu-1} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots \quad (x_{-1} = 1,\ y_{-1} = 0)$$

gde je

$$b_{\nu+1} = \left[\lambda_\nu - \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} \right] \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

21. Niz (1) glavnih racionalnih približnih vrednosti jednog iracionalnog broja γ identičan je sa nizom približnih vrednosti pravilnog verižnog razlomka

$$\gamma = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots \tag{10}$$

ili kraće

$$\gamma = (b_0, b_1, b_2, \ldots) \tag{11}$$

To proizilazi pre svega iz:a)činjenice da svi članovi niza (1) zadovoljavaju uslov (4),koji je -prema Lagrange-u [18] -potreban i dovoljan da razlomak $\frac{x_\nu}{y_\nu}$ pripada nizu približnih vrednosti verižnog razlomka (10) i b) činjenice da se u nizu (1) nalaze sve racionalne približne vrednosti broja γ koje zadovoljavaju uslov (4).

Identičnost niza (1) sa nizom približnih vrednosti verižnog razlomka (10) možemo dokazati i neposredno posmatrajući izraz

Prema definiciji glavne približne vrednosti i stavu 7, niz (1) glavnih približnih vrednosti jednog iracionalnog broja γ ima ove osobine:

a) Članovi niza (1) nalaze se naizmenično sa jedne i druge strane broja γ. Pošto je $\frac{x_0}{y_0} < \gamma$, to je

$$\frac{x_{2\nu}}{y_{2\nu}} < \gamma \quad , \quad \frac{x_{2\nu+1}}{y_{2\nu+1}} > \gamma \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Sve vrednosti λ_ν za $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ zadovoljavaju uslov

$$\lambda_\nu > 1 + \frac{y'_\nu}{y_\nu} \tag{4}$$

gde je x'_ν i y'_ν par najmanjih celih pozitivnih rešenja jednačine

$$y_\nu x'_\nu - x_\nu y'_\nu = (-1)^\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

c) Brojioci i imenioci članova niza (1) - prema stavu 7 - rastu sa indeksom, tj.

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu < \ldots$$

$$y_0 \leqq y_1 < \ldots < y_{\nu-1} < y_\nu < \ldots$$

d) Greška aproksimacije opada kad ν raste, tj.

$$|\delta_0| > |\delta_1| > \ldots > |\delta_{\nu-1}| > |\delta_\nu| > \ldots$$

e) Niz (1), ma kakav bio <u>iracionalan</u> broj γ, ima neograničeno mnogo članova, jer se - prema stavu 7 - ma kakva bila data glavna približna vrednost $\frac{x_n}{y_n}$, uvek može odrediti sledeća $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$. Prema tome, pošto su x_ν i y_ν rastući nizovi prirodnih brojeva, uvek je

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = \infty \quad , \quad \lim_{\nu \to \infty} y_\nu = \infty .$$

Zbir grešaka aproksimacije dva uzastopna člana niza (1) -prema obrascu (28/I) ima vrednost

$$|\delta_\nu| + |\delta_{\nu+1}| = \frac{1}{y_\nu y_{\nu+1}}$$

što znači, prema gornjem da je

$$\lim_{\nu \to \infty} |\delta_\nu| = \lim_{\nu \to \infty} |\delta_{\nu+1}| = 0$$

koji se nalazi u srednjoj zagradi u obrascu (9). Vrednost toga izraza označimo sa $\gamma_{\nu+1}$:

$$\gamma_{\nu+1} = \lambda_\nu - \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

Greške aproksimacije dva uzastopna člana niza (1) - prema obrascu($18/I$)- vezane su relacijom

$$|\delta_{\nu+1}| = \frac{1}{y_\nu y_{\nu+1}} - |\delta_\nu| \tag{13}$$

koja se može napisati u obliku

$$\lambda_{\nu+1} - \frac{y_\nu}{y_{\nu+1}} = \frac{1}{\lambda_\nu - \frac{y_{\nu+1}}{y_\nu}} .$$

Ako još $y_{\nu+1}$ u imeniocu desne strane smenimo izrazom (8), prethodna jednakost dobija oblik

$$\lambda_\nu - \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} = b_{\nu+1} + \frac{1}{\lambda_{\nu+1} - \frac{y_\nu}{y_{\nu+1}}} \tag{14}$$

i najzad - prema (12) - oblik

$$\gamma_{\nu+1} = b_{\nu+1} + \frac{1}{\gamma_{\nu+2}} .$$

Kad još smenimo ν sa $\nu-1$:

$$\gamma_\nu = b_\nu + \frac{1}{\gamma_{\nu+1}} \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{15}$$

Iz obrasca (12) za $\nu=0$ sleduje

$$\lambda_0 = \gamma_1$$

tj.

$$|\delta_0| = \frac{1}{\gamma_1}$$

odakle je

$$\gamma = b_0 + \frac{1}{\gamma_1}$$

što - prema (15) - znači da je

$$\gamma_0 = \gamma .$$

Prema tome uzastopnom upotrebom obrasca (15) možemo pisati jedno za drugim

$$\gamma = b_0 + \frac{1}{\gamma_1} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\gamma_2}} =$$

$$= b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\gamma_3}}} =$$

$$= \dots\dots\dots\dots =$$

$$= b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}$$

Tako je dokazano da je niz prirodnih brojeva $b_0, b_1, b_2, \dots$ identičan sa nizom nepotpunih količnika pravilnog verižnog razlomka (10), a to znači - prema (8) - da je niz (1) identičan sa nizom približnih vrednosti verižnog razlomka (10). Ujedno smo konstatovali da je niz količina

$$\gamma_{\nu+1} = \lambda_\nu - \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

pretstavlja niz potpunuh količnika u primeni Euklidovog algoritma na iracionalan broj γ, tj. da je

$$\gamma_\nu = (b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \dots) \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots \qquad (16)$$

22. Iz obrasca (9) sleduju neposredno poznate Lagrange-ove [18] granice za grešku aproksimacije razlomka $\frac{x_\nu}{y_\nu}$. Obrazac (9) možemo napisati u obliku nejednakosti

$$\lambda_\nu - \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} - 1 < b_{\nu+1} < \lambda_\nu - \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} \qquad (17)$$

odakle je, prema (8)

$$\lambda_\nu y_\nu - y_\nu < y_{\nu+1} < \lambda_\nu y_\nu \qquad (18)$$

i najzad

$$\frac{1}{y_\nu(y_\nu + y_{\nu+1})} < \left|\gamma - \frac{x_\nu}{y_\nu}\right| < \frac{1}{y_\nu y_{\nu+1}}. \qquad (19)$$

23. Greške aproksimacije dva ma koja člana niza (1) - prema obrascima (27/I) i (28/I) - vezana su jednom od relacija

$$|\delta_s| = \frac{q_{\nu,s}}{y_\nu y_s} - |\delta_\nu| \qquad (20)$$

(ako je $s-\nu \geqslant 1$ neparan broj)

$$|\delta_s| = |\delta_\nu| - \frac{q_{\nu,s}}{y_\nu y_s} \qquad (21)$$

(ako je $s-\nu \geqslant 2$ paran broj)

gde je $q_{\nu,s}$ imenilac razlomka

$$\frac{p_{\nu,s}}{q_{\nu,s}} = (b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots, b_s)$$

III RED APROKSIMACIJE RACIONALNIH PRIBLIŽNIH VREDNOSTI IRACIONALNIH BROJEVA

A Osnovni pojmovi

24. Neka je dat pozitivan iracionalan broj

$$\gamma = (b_0, b_1, b_2, \dots); \qquad (1)$$

neka je niz njegovih glavnih približnih vrednosti

$$\frac{x_\nu}{y_\nu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

i neka je

$$\left| \gamma - \frac{x_\nu}{y_\nu} \right| = \frac{1}{\lambda_\nu y_\nu^2} \qquad (2)$$

Tada je niz

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \dots \qquad (3)$$

niz pozitivnih ~~realnih~~ brojeva koji su svi veći od 1, ili tačnije - prema (4/II) -

$$\lambda_\nu > 1 + \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots \qquad (4)$$

Članovi niza (3) mogu se još izraziti i u obliku (12/II)

$$\lambda_\nu = \gamma_{\nu+1} + \frac{y_{\nu-1}}{y_\nu} \qquad (5)$$

gde je

$$\gamma_{\nu+1} = (b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, b_{\nu+3}, \dots) \qquad (6)$$

tj

$$\lambda_\nu = (b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \dots) + (0, b_\nu; b_{\nu-1}, \dots, b_1). \qquad (7)$$

Osim toga ma koja dva čalana niza (3) zadovoljavaju jednu od relacija

$$\frac{1}{\lambda_s y_s^2} = \frac{q_{\nu,s}}{y_\nu y_s} - \frac{1}{\lambda_\nu y_\nu^2} \tag{8}$$

(ako je $s-\nu \geqslant 1$ neparan broj)

$$\frac{1}{\lambda_s y_s^2} = \frac{1}{\lambda_\nu y_\nu^2} - \frac{q_{\nu,s}}{y_\nu y_s} \tag{9}$$

(ako je $s-\nu \geqslant 2$ paran broj)

gde je $q_{\nu,s}$ imenilac razlomka

$$\frac{p_{\nu,s}}{q_{\nu,s}} = (b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ . \ . \ . \ , b_s) \tag{10}$$

tj.

$$q_{\nu,s} = [b_{\nu+2}, b_{\nu+3}, \ . \ . \ . \ , b_s] \tag{11}$$

uz

$$q_{\nu,\nu} = 0 \qquad , \quad q_{\nu,\nu+1} = 1 \ .$$

Prema O.Perron-u [29] definišemo još modularnu funkciju $\mathcal{M}(\gamma)$ kao

$$\mathcal{M}(\gamma) = \limsup_{\nu \to \infty} \lambda_\nu \tag{12}$$

Iz obrasca (7) sleduje da će vrednost funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$ za jedan iracionalan broj

$$\gamma = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$$

biti konačna uvek i jedino kad su nepotpuni količnici b_ν ograničeni za $\nu \to \infty$.

2 Relacije izmedju članova niza λ_ν

25. U toku sledećih izlaganja dokazaćemo na osnovu obrazaca (8) i (9) da izmedju ma koja dva i ma koja tri člana niza (3) postoje odredjene relacije iz kojih sleduju mnogi poznati i neki novi rezultati.

Neka je $n-m \geqslant 1$ neparan broj.Tada - prema (8) - λ_m i λ_n zadovoljavaju relaciju

$$\left(\frac{y_m}{y_n}\right)^2 - \lambda_m q_{m,n} \frac{y_m}{y_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} = 0 \tag{13}$$

~~Ako posmatramo trinom,onda su ,prema identičnosti ( ),nule toga tri-~~

Ako posmatramo trinom

$$\varphi(t) = t^2 - \lambda_n q_{m,n} t + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \tag{14}$$

onda su, prema identičnosti (13), nule toga trinoma

$$t_1 = \frac{y_m}{y_n} \tag{15}$$

$$t_2 = \lambda_n q_{m,n} - \frac{y_m}{y_n}$$

Izraz za t_2 možemo napisati i u drugom obliku. Prema (5) je

$$t_2 = q_{m,n}\,\gamma_{n+1} + \frac{q_{m,n}\,y_{n-1} - y_m}{y_n}$$

a kako je

$$q_{m,n}\,y_{n-1} - y_m = q_{m,n-1}\,y_n$$

to prethodna jednakost postaje

$$t_2 = q_{m,n}\,\gamma_{n+1} + q_{m,n-1} \tag{16}$$

Irazi (15) i (16) pokazuju da je

$$t_1 < 1 < t_2 .$$

Stavimo

$$\alpha_{m,n} = q_{m,n}\,\gamma_{n+1} + q_{m,n-1} \tag{17}$$

pa je, prema (14) i (16)

$$\varphi(\alpha_{m,n}) = 0. \tag{18}$$

26. Posmatrajmo drugi slučaj, kad je, $n-m \geq 2$ paran broj. Tada se relacija izmedju λ_m i λ_n, prema (9), može napisati u obliku

$$\left(\frac{y_m}{y_n}\right)^2 + \lambda_n q_{m,n}\frac{y_m}{y_n} - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} = 0 \tag{19}$$

Ako posmatramo trinom

$$\psi(t) = t^2 + \lambda_n q_{m,n} t - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \tag{20}$$

onda su prema identičnosti (19) njegove nule

$$t_1 = \frac{y_m}{y_n} \tag{21}$$

$$t_2 = -\left(\lambda_n q_{m,n} + \frac{y_m}{y_n}\right)$$

Izraz za t_2 ,na isti način kao i u prvom slučaju,može se napisati u obliku

$$t_2 = -\left(q_{m,n}\,\gamma_{n+1} + q_{m,n-1}\right) \tag{22}$$

pa,ako zadržimo oznaku $\alpha_{m,n}$ datu jednakošću (17),onda je

$$\psi(-\alpha_{m,n}) = 0. \tag{23}$$

Prema (18) i (23) možemo iskazati stav

<u>Stav 13:</u> Ma koja dva člana niza (3): λ_m i λ_n $(m < n)$ vezana su relacijom

$$\frac{\alpha_{m,n}}{\lambda_n} + \frac{(-1)^{n-m+1}}{\alpha_{m,n}\,\lambda_m} = q_{m,n} \tag{A}$$

gde je

$$\alpha_{m,n} = q_{m,n}\,\gamma_{n+1} + q_{m,n-1}$$

Ako stavimo: $m = \nu-1$, $n = \nu$ onda je $\alpha_{\nu-1,\nu} = \gamma_{\nu+1}$

pa sleduje

<u>Posledica stava 13:</u> Ma koja dva uzastopna člana niza (3) $\lambda_{\nu-1}$ i λ_ν vezana su relacijom

$$\frac{\gamma_{\nu+1}}{\lambda_\nu} + \frac{1}{\gamma_{\nu+1}\,\lambda_{\nu-1}} = 1 .$$

27. Pomoću osobina trinoma $\varphi(t)$ definisanog jednakošću (14) možemo izvesti tri nejednakosti iz kojih sleduju poznati rezultati Vahlen-a [38] i Morimota [22] .

a)Kao što je naglašeno,uvek je

$$t_1 < 1 < t_2$$

što znači da je

$$\varphi(1) < 0 .$$

Ako pri tome uzmemo da je $m = \nu-1$, $n = \nu$ onda prema (14) sleduje <u>zaključak:</u>

Ma koja dva uzastopna člana niza (3): $\lambda_{\nu-1}$ i λ_ν zadovoljavaju nejednakost

$$\frac{1}{\lambda_{\nu-1}} + \frac{1}{\lambda_\nu} < 1 \tag{24}$$

Iz ove nejednakosti pre svega direktno sleduje poznati Vahlen-ov stav: da od dva uzastopna člana niza (3) bar jedan mora biti veći od 2.

b) Neka su m, n i s prirodni brojevi, takvi da je

$n-m \geq 1$ neparan broj, $s-n \geq 1$ neparan broj,

pa stavimo

$$t' = q_{m,n} \frac{p_{n,s}}{q_{n,s}} + q_{m,n-1}$$

odakle je identički

$$t' = \frac{q_{m,s}}{q_{n,s}}$$

a pošto je prema (15) i (16)

$$t_1 < t' < t_2$$

onda je

$$\varphi(t') < 0$$

pa sleduje zaključak.

Ma koja dva člana niza (3): λ_m i λ_n, takva da je $n-m \geq 1$ neparan broj zadovoljavaju nejednakost

$$\frac{q_{m,s}}{q_{n,s}\lambda_n} + \frac{q_{n,s}}{q_{m,s}\lambda_m} < q_{m,n} \tag{25}$$

gde je $s-n \geq 1$ neparan broj.

c) Ako je $m-s \geq 1$ neparan broj, $n-m \geq 1$ neparan broj, a izraz za t_1 trinoma $\varphi(t)$ napišemo u obliku

$$t_1 = \frac{y_m}{y_n} = \frac{y_m}{q_{m,n} y_{m+1} + q_{m+1,n} y_m} = \frac{1}{q_{m,n} \frac{y_{m+1}}{y_m} + q_{m+1,n}}$$

gde je

$$\frac{y_{m+1}}{y_m} = (b_{m+1}, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1),$$

pa stavimo

$$t'' = \frac{1}{q_{m,n} \frac{q_{s,m+1}}{q_{s,m}} + q_{m+1,n}} = \frac{q_{s,m}}{q_{s,n}}$$

onda je

$$\varphi(t'') < 0,$$

pa sleduje <u>zaključak</u>:

Ma koja dva člana niza (3): λ_m i λ_n takva da je $n-m \geqslant 1$ neparan broj zadovoljavaju nejednakost

$$\frac{q_{s,m}}{q_{s,n}\,\lambda_n} + \frac{q_{s,n}}{q_{s,m}\,\lambda_m} < q_{m,n}, \tag{26}$$

gde je $m-s \geqslant 1$ neparan broj.

Iz nejednakosti (25) i (26) direktno sleduju poznate nejednakosti

$$\mathrm{Max}\,(\lambda_m, \lambda_n) \geqslant \frac{q_{m,s}}{q_{n,s}\,q_{m,n}} + \frac{q_{n,s}}{q_{m,s}\,q_{m,n}}$$

$$\mathrm{Max}\,(\lambda_m, \lambda_n) \geqslant \frac{q_{s,m}}{q_{s,n}\,q_{m,n}} + \frac{q_{s,n}}{q_{s,m}\,q_{m,n}}$$

koje je japanski matematičar S.Morimoto [22] izveo geometriskim putem.

Iz nejednakosti (24),(25) i (26) sleduju još mnogi rezultati koje su drugim putem izveli M.Fujiwara,S.Morimoto i drugi (J.F.Koksma [16] stavovi 8 i 22,str.27-35;S.Morimoto [22]).

28. Posmatrajmo tri člana niza (3): λ_m , λ_n i λ_s takva da je

$n-m \geqslant 1$ neparan broj, $s-n \geqslant 1$ neparan broj.

Tada,prema obrascu (8) vrede relacije

$$\left.\begin{aligned} t^2 - \lambda_n q_{m,n}\, t + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} &= 0 \\ u^2 - \lambda_n q_{n,s}\, u + \frac{\lambda_n}{\lambda_s} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

gde je

$$t = \frac{y_m}{y_n}\,, \quad u = \frac{y_s}{y_n}$$

a osim toga je

$$q_{m,n}\, u - q_{n,s}\, t = q_{m,s} \tag{27a}$$

Eliminaciju količina t i u iz relacija (27) i (27a) možemo izvršiti na dva načina.Ako <u>t</u> iz treće jednakosti zamenimo u prvoj,pa u dobi- jenoj jednakosti zamenimo <u>u</u> iz druge

$$u = \frac{1}{2}\left(\lambda_n q_{n,s} + \sqrt{\lambda_n^2 q_{n,s}^2 - \frac{4\lambda_n}{\lambda_s}}\right)$$

onda se dobija

$$\frac{q_{n,s}^2}{\lambda_m} + \frac{q_{m,s}^2}{\lambda_n} - \frac{q_{m,n}^2}{\lambda_s} = q_{m,n} q_{m,s} q_{n,s}\sqrt{1 - \frac{4}{q_{n,s}^2 \lambda_n \lambda_s}} \qquad (28)$$

Ako u iz treće jednakosti zamenimo u drugoj, pa u dobijenoj jednakosti zamenimo t iz prve:

$$t = \frac{1}{2}\left(\lambda_n q_{m,n} - \sqrt{\lambda_n^2 q_{m,n}^2 - \frac{4\lambda_n}{\lambda_m}}\right)$$

onda se dobija

$$\frac{q_{m,n}^2}{\lambda_s} + \frac{q_{m,s}^2}{\lambda_n} - \frac{q_{n,s}^2}{\lambda_m} = q_{m,n} q_{m,s} q_{n,s}\sqrt{1 - \frac{4}{q_{m,n}^2 \lambda_m \lambda_n}} \qquad (29)$$

Pošto su jednakosti (28) i (29), identične jednakosti, i leve strane moraju biti pozitivne, što znači da je zadovoljena nejednakpst

$$\left|\frac{q_{m,n}^2}{\lambda_s} - \frac{q_{n,s}^2}{\lambda_m}\right| < \frac{q_{m,s}^2}{\lambda_n} \qquad (30)$$

($n-m \geq 1$ neparno, $s-n \geq 1$ neparno)

koju ćemo iskoristiti nešto docnije.

Koristeći koju bilo od jednakosti (28) ili (29), posle kvadriranja i sredjivanja dolazimo do jednakosti

$$\left(\frac{q_{n,s}^2}{\lambda_m} + \frac{q_{m,s}^2}{\lambda_n} + \frac{q_{m,n}^2}{\lambda_s}\right)^2 - \frac{4 q_{n,s}^2 q_{m,n}^2}{\lambda_m \lambda_s} = q_{m,n}^2 q_{m,s}^2 q_{n,s}^2$$

Na sličan način dokazuju se analogne relacije za slučajeve kad su $n-m$ i $s-n$ oboje parni ili jedno neparno a drugo parno, pa možemo iskazati

<u>**Stav 14:**</u> Ma koja tri člana niza (3): λ_m, λ_n i λ_s vezana su relacijom

$$\left(\frac{q_{m,s}^2}{\lambda_n} + \varepsilon_1 \frac{q_{n,s}^2}{\lambda_m} + \varepsilon_2 \frac{q_{m,n}^2}{\lambda_s}\right)^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{4 q_{n,s}^2 q_{m,n}^2}{\lambda_m \lambda_s} = q_{m,n}^2 q_{n,s}^2 q_{m,s}^2 \qquad (B)$$

gde je $\qquad \varepsilon_1 = (-1)^{n-m+1}, \quad \varepsilon_2 = (-1)^{s-n+1}$

Ako je $m=\nu-1$, $n=\nu$, $s=\nu+1$ onda sleduje:

Posledica stava 14: Ma koja tri uzastopna člana niza λ_ν vezana su relacijom

$$\left(\frac{b_{\nu+1}^2}{\lambda_\nu}+\frac{1}{\lambda_{\nu-1}}+\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)^2-\frac{4}{\lambda_{\nu-1}\lambda_{\nu+1}}=b_{\nu+1}^2 \qquad (B_1)$$

Iz relacije (B_1) možemo izvesti jednu nejednakost. Napišimo tu relaciju u obliku pa zanemarimo poslednji član leve strane

$$\frac{b^4_{\nu+1}}{\lambda_\nu^2}+\frac{2b^2_{\nu+1}}{\lambda_\nu}\left(\frac{1}{\lambda_{\nu-1}}+\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)+\left(\frac{1}{\lambda_{\nu-1}}-\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)^2=b^2_{\nu+1}$$

i najzad dobijamo:

$$\frac{b^4_{\nu+1}}{\lambda_\nu^2}+\frac{2b^2_{\nu+1}}{\lambda_\nu}\left(\frac{1}{\lambda_{\nu-1}}+\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)\leqslant b^2_{\nu+1} \qquad \frac{1}{\lambda_{\nu-1}}+\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\leqslant\frac{\lambda_\nu^2-b^2_{\nu+1}}{2\lambda_\nu}. \qquad (B_1')$$

Iz ove nejednakosti, na primer, sleduje poznati rezultat koji je na drugi način izveo Obreškov [25] da je

$$\mathrm{Max}\,(\lambda_{\nu-1},\lambda_\nu,\lambda_{\nu+1})\geqslant\sqrt{b^2_{\nu+1}+4}\,.$$

29. Jednakost (B) možemo pre svega koristiti da dokažemo poznati stav:

Ako su λ_m, λ_n i λ_s tri člana niza (3), takva da je $n-m\geqslant 1$ neparan broj, $s-n\geqslant 1$ neparan broj, onda je

$$\mathrm{Max}\,(\lambda_m,\lambda_n,\lambda_s)>\sqrt{\left(\frac{q^2_{n,s}+q^2_{m,s}+q^2_{m,n}}{q_{n,s}\,q_{m,s}\,q_{m,n}}\right)^2-\frac{4}{q^2_{m,s}}} \qquad (31)$$

Dokaz: Smenimo u relaciji (B)

$$\frac{1}{\lambda_m}=u,\quad \frac{1}{\lambda_n}=w,\quad \frac{1}{\lambda_s}=v \qquad (32)$$

pa posmatrajmo w kao funkciju od u i v

$$w=\frac{1}{q^2_{m,s}}\left\{-q^2_{n,s}\,u-q^2_{m,n}\,v+q_{n,s}\,q_{m,n}\sqrt{q^2_{m,s}+4uv}\right\} \qquad (33)$$

Ako u jednakosti (33) stavimo da su u, v i w medjusobno jednaki, onda je njihova zajednička vrednost jednaka izrazu koji stoji na desnoj strani nejednakosti (31). Prema tome da bismo dokazali nejednakst (31) dovoljno je pokazati da je $dw<0$ kad su du i dv pozitivni. Radi toga nalazimo parcijalne izvode $\frac{\partial w}{\partial u}$ i $\frac{\partial w}{\partial v}$, koji se - prema (33) - mogu napisti u oblíku

$$\frac{\partial w}{\partial u} = -\frac{q^2_{n,s}}{q^2_{m,s}}\left(1 - \frac{2q^2_{m,n}v}{q^2_{m,s}u + q^2_{m,s}w + q^2_{m,n}v}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{q^2_{m,n}}{q^2_{m,s}}\left(1 - \frac{2q^2_{n,s}u}{q^2_{n,s}u + q^2_{m,s}w + q^2_{m,n}v}\right).$$

Prema nejednakosti (30), kad se uzme u obzir smena (32), izrazi u zagradama su pozitivni, što znači da su posmatrani parcijalni izvodi negativni. Time je prethodni stav dokazan.

Taj stav su dokazali 1925 g. na drugi način - ne izvodeći relaciju (B) - japanski matematičari Morimoto (Fukasawa) [22] i Fujiwara [9] .

IV. Uredjeni kompleksi prirodnih brojeva i rad sa njima

30. U sledećim odeljcima ovog rada upotrebljavaćemo nekoliko već poznatih simbola, a uvešćemo i nove, kao i tri operacije sa tim simbolima. Uvodjenje ovih operacija opravdaćemo njihovom neposrednom primenom.

Osim već upotrebljenog simbola za pravilan verižni razlomak $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, upotrebljavaćemo isto tako poznati simbol $[b_1, b_2, \ldots b_n]$ za Euler-ovu funkciju definisanu jednačinom

$$(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) = \frac{[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n]}{[b_1, b_2, \ldots, b_n]}, \tag{1}$$

Osnovne osobine ove funkcije su

$$[b_0] = b_0, \quad [b_0, b_1] = b_0 b_1 + 1,$$

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n] = b_n [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}] + [b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}], \tag{2}$$

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n] = [b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0]. \tag{3}$$

31. Prema Frobenius-u [6], jedan uredjeni kompleks veličina ili simbola $a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$ označićemo jednim velikim latinskim slovom

$$A = a_1 a_2 a_3 \ldots a_m .$$

U našem slučaju su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nepotpuni količnici verižnog razlomka - dakle <u>prirodni brojevi</u>.

Ako je dalje

$$B = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n ,$$

onda je

$$a_1 a_2 \ldots a_m b_1 b_2 \ldots b_n = AB .$$

Za ove simbole ne važi komutativni zakon, ali važi asocijativni

$$\{AB\} C = A\{BC\} .$$

Prema tome jednoznačno je odredjen smisao stepena

$$A^n = \underbrace{A A \ldots A}_{n \text{ puta}}$$

kao i izraza

$$A^k B^l C^m \ldots$$

Isto tako, ako je a jedna jedina veličina - broj ili simbol - tada ćemo kompleks $\underbrace{aa\ldots a}_{k \text{ puta}}$ obeležavati sa $\{a\}^k$, ili - ako je izbegnuta svaka zabuna - sa a^k.

Ako uvedemo pojam vakantnog kompleksa koji ćemo označiti sa V, onda je

$$A^0 = V \ , \quad a^0 = V .$$

32. Definisaćemo tri operacije koje mogu biti izvršene na jednom uredjenom kompleksu

$$A = a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m .$$

To su:

<u>a) izostavljanje poslednjeg člana</u>

$$A' = a_1 a_2 \ldots a_{m-1} \ ;$$

<u>b) inverzija</u>

$$\underline{A} = a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 \ ;$$

<u>c) promena parnosti broja članova</u>

$$A^* = a_1 a_2 \ldots a_{m-2} \begin{cases} a_{m-1}+1 & \text{ako je } a_m = 1 \\ a_{m-1} \ a_m - 1 \ \ 1 & \text{ako je } a_m \geq 2 \end{cases}$$

Kao što se vidi uvedene operacije nisu medju sobom komutativne. Zato im utvrdjujemo red vršenja

Neka operacija promene parnosti broja članova $\{A^*\}$ bude najvišeg reda, nižeg od nje operacija inverzije $\{\underline{A}\}$, a najnižeg reda operacija izostavljanja poslednjeg člana $\{A'\}$.

Prema tome:

$$\underline{A}' = a_m a_{m-1} \ldots a_2$$

$$\underline{A}^* = \left. \begin{matrix} a_{m-1}+1 \\ 1 \ a_m - 1 \ a_{m-1} \end{matrix} \right\rangle a_{m-2} a_{m-3} \ldots a_2 a_1$$

$$A^{*\prime} = a_1 a_2 \ldots a_{m-3} \begin{cases} a_{m-2} \\ a_{m-2} \ a_{m-1} \ a_m - 1 \end{cases}$$

$$\underline{A}^{*\prime} = \left. \begin{matrix} a_{m-1}+1 \\ 1 \ a_m - 1 \ a_{m-1} \end{matrix} \right\rangle a_{m-2} a_{m-3} \ldots a_3 a_2$$

Od uvedenih operacija u već citiranom članku Frobenius-a definisana je samo operacija inverzije uredjenog kompleksa.

33. Prema definiciji uvedenih operacija i definiciji i osobinama simbola $(b_0 b_1 \ldots b_n)$ i $[b_0 b_1 \ldots b_n]$, sleduju ove osnovne identične jednakosti:

a) $$\underline{\{A\}} = A \ , \quad \{A^*\}^* = A \ ,$$

tj. <u>operacije inverzije i promene parnosti broja članova poništavaju same sebe</u>.

b) $$\{ABC\}^* = ABC^* \ , \quad \underline{\{ABC\}} = \underline{C}\,\underline{B}\,\underline{A} \ ,$$

c) $$(A^*) = (A) \ , \quad (AB^*) = (AB) \ ,$$

d) $$[\underline{A}] = [A] \ , \quad [A^*] = [A] \ , \quad [\underline{A}^*] = [\underline{A^*}] = [A] \ .$$

Izostavljanje prvog člana jednog uredjenog kompleksa

$$A = a_1 a_2 \ldots a_m$$

može se označiti zahvaljujući obrascu (3):

$$[a_2 a_3 \ldots a_m] = [a_m a_{m-1} \ldots a_3 a_2] = [\underline{A}'] \ ,$$

pa je

$$(A) = \frac{[A]}{[\underline{A}']} \ , \quad (\underline{A}) = \frac{[A]}{[A']} \qquad (4)$$

Kako je $(a) = a$, možemo pisati

$$[V] = 1 \ .$$

Isto tako, kako je $(V) = \frac{1}{0}$, možemo, prema obrascu (4) pisati

$$[V'] = 0 \ .$$

Prema definiciji operacije promene parnosti broja članova možemo pisati

$$a V^* = a-1 \ 1 \ , \quad A V^* = A^* .$$

34. Rekurentni obrazac (2) možemo sad napisati u obliku

$$[Aa] = a[A] + [A'] \ , \qquad (5)$$

a iteracijom ovog obrasca dolazimo do opštijeg, poznatog rekurentnog obrasca (Frobenius [6])

$$[AB] = [A][B] + [A'][\underline{B}'] . \tag{6}$$

Poznati obrazac o razlici dve uzastopne glavne približne vrednosti, može se pomoću uvedenih simbola napisati u obliku

$$(aA) - (aA') = \frac{(-1)^{m-1}}{[A][A']} ,$$

gde je m broj članova kompleksa A. Neposrednom primenom ovog obrasca i obrasca (6) dolazi se do tako isto poznatog obrasca

$$(aAB) - (aA) = (-1)^m \frac{[\underline{B}']}{[AB][A]} , \tag{7}$$

ili

$$(aAB) - (aA) = \frac{(-1)^m}{\{(B)+(0\underline{A})\}[A]^2} , \tag{8}$$

gde je a prirodan broj, A i B uredjeni kompleksi prirodnih brojeva, a m broj članova kompleksa A. U obrascu (8) kompleks B može imati i neograničeno mnogo članova.

35. Iz prethodnih obrazaca sleduju dva korisna obrasca.

a) $$[A^{*\prime}] = [A] - [A'] \tag{9}$$

gde je A ma koji uredjeni kompleks prirodnih brojeva.

Dokaz: Ako se kompleks A završava članom većim od jedinice, onda je

$A = Bb,\ A^* = B\ b-1\ 1$, gde je $b \geq 2$,

pa je $[A^{*\prime}] = [Bb] - [B]$ tj. $[A^{*\prime}] = [A] - [A']$.

Ako je poslednji član kompleksa A jedinica, onda je

$A = B\,b\,1$, $A^* = B\ b+1$, gde je $b \geq 1$,

pa je $[A] = [Bb] + [B]$ tj. $[A] = [A'] + [A^{*\prime}]$.

Prema tome u oba slučaja vredi obrazac (9).

b) $$[B][ABC] = [AB][BC] + (-1)^n [A'][\underline{C}'] \tag{10}$$

gde su A, B i C ma koji uredjeni kompleksi prirodnih brojeva, a n broj članova kompleksa B.

Dokaz: Prema obrascu (6) je

$$[ABC] = [AB][C] + [AB'][\underline{C}'] ,$$

a primenom obrasca (7) dobija se

$$(\underline{B}\,\underline{A}) - (\underline{B}) = (-1)^{n+1}\frac{[A']}{[AB'][B']}$$

Eliminacijom količine $[AB']$ iz prethodnih jednačina dobija se obrazac (10).

Ako stavimo

$$x_\nu = [A\{bB\}^\nu] \quad , \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad , \qquad (11)$$

gde je b prirodan broj, a A i B uredjeni kompleksi prirodnih brojeva, onda se primenom obrasca (10) - kad se u njemu A smeni sa $A\{bB\}^{\nu-2}b$ i stavi $C = bB$ - neposredno dobija poznati rekurentni obrazac

$$x_\nu = \rho\, x_{\nu-1} - (-1)^s x_{\nu-2} \, , \qquad (12)$$

gde je

$$\rho = [bB] + [B'] \qquad (13)$$

a s broj članova periode bB.

36. Ako je $A = \underline{A}$ onda je uredjeni kompleks A simetričan pa ga obeležavamo sa S, tj.

$$S = \underline{S} = c_1\, c_2 \ldots c_2\, c_1 \, .$$

Simetrični kompleksi sa parnim odnosno neparnim brojem članova mogu se napisati u obliku

$$S_{2k} = C\underline{C} \quad , \quad S_{2k+1} = C c \underline{C} \, ,$$

gde je C ma koji uredjeni kompleks prirodnih brojeva, a c prirodan broj. Neposrednom primenom obrasca (6) sleduju poznati obrasci

$$[S_{2k}] = [C\underline{C}] = [C]^2 + [C']^2 \qquad (14)$$

$$[S_{2k+1}] = [Cc\underline{C}] = [C]\{[Cc] + [C']\} \qquad (15)$$

(Perron [7] , str. 34-37).

37. Kao primenu uvedenih simbola i operacija dokažimo i tri korisne identičnosti.

<u>Stav 15</u>: Ako su A i B uredjeni kompleksi prirodnih brojeva i to A konačan, a B vakantan, konačan ili beskonačan, onda uvek vredi identičnost

$$(0\,\underline{A}\,B) + (0\,\underline{A}^*B) = 1 \qquad (16)$$

Dokaz: Bilo da se kompleks A završava jedinicom ili članom većim od 1, izraz na levoj strani navedene identičnosti svodi se na oblik

$$(0\ 1\ a-1\ C)+(0\ a\ C) \tag{17}$$

gde je $a \geqslant 2$ prirodan broj, a C uredjeni kompleks prirodnih brojeva. Pošto izraz (17) ima uvek vrednost 1, identičnost je dokazana. Pri tome nema nikakve razlike da li je kompleks B vakantan, konačan ili beskonačan.

Stav 16: Ako je a prirodan broj, a A ma koji konačni uredjeni kompleks prirodnih brojeva, vrede identičnosti

$$a) \quad (0\,A\{aA\}^{\nu})-(0\,\underline{A}\{a\underline{A}\}^{\nu})=(0A)-(0\underline{A}) \tag{18}$$

gde je ν nula ili prirodan broj; i

$$b) \quad (0\,\overline{Aa})-(0\,\overline{\underline{A}a})=(0A)-(0\underline{A}). \tag{19}$$

Dokaz: Ako identičnost (18) napišemo u obliku

$$(0\,A\{aA\}^{\nu})-(0A)=(0\,\underline{A}\{a\underline{A}\}^{\nu})-(0\underline{A}),$$

pa na obe strane primenimo obrazac (7), ona postaje očevidna. Identičnost (19) je granični slučaj identičnosti (18). Identičnost (18) vredi ma koliko veliki bio prirodan broj ν, a pošto kad $\nu \to \infty$ izrazi ($0A\{aA\}^{\nu}$) i ($0\underline{A}\{a\underline{A}\}^{\nu}$) teže konačnim i odredjenim granicama ($0\overline{Aa}$) i ($0\overline{\underline{A}a}$) onda vredi i identičnost (19). Interesantno je napomenuti da iz identičnosti (19) neposredno proizilazi poznati stav Galois (Perron [7] , str. 83, Satz 6) o inverznoj periodi čisto periodičnog verižnog razlomka.

V. Tačke nagomilavanja niza λ_n čisto periodičnog verižnog razlomka

38. Neka je čisto periodičan verižni razlomak

$$\theta = (\overline{a_1 a_2 \ldots a_s}) \tag{1}$$

Tada se odgovarajući niz λ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) može razdvojiti na s delimičnih nizova

$$\lambda_{ks+\nu} \qquad \begin{cases} \nu = 0, 1, 2, \ldots, s-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Svaki od ovih nizova ima samo po jednu tačku nagomilavanja, jer svako $\lambda_{ks+\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, s-1$) za $k \to \infty$ teži konačnoj i odredjenoj granici

$$\mu_\nu = \lim_{k \to \infty} \lambda_{ks+\nu} = (\overline{a_{\nu+1} \ldots a_s a_1 \ldots a_\nu}) + (0\, \overline{a_\nu \ldots a_1 a_s \ldots a_{\nu+1}})$$

(Perron [8] str.). Prema tome niz λ_n jednog periodičnog verižnog razlomka može imati najviše s tačaka nagomilavanja $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{s-1}$. Perron [8] za μ_ν daje izraz

$$\mu_\nu = \frac{2\sqrt{D}}{[a_{\nu+2} \ldots a_s a_1 \ldots a_\nu]} \tag{2}$$

gde je D diskriminanta razlomka (1).

Radi kratkoće ubuduće ćemo pisati:

$$\mu_\nu = \mu \left\{ (\overline{a_{\nu+1} a_{\nu+2} \ldots a_s a_1 \ldots a_\nu}) \right\}.$$

39. Dve tačke nagomilavanja niza λ_n čisto periodičnog verižnog razlomka mogu se poklapati. O tome govori

Stav 17: Jednakost

$$\mu \left\{ (\overline{aAbB}) \right\} = \mu \left\{ (\overline{bBaA}) \right\} \tag{3}$$

gde su a i b prirodni brojevi, a A i B uredjeni kompleksi prirodnih brojeva, biće zadovoljena onda i samo onda kad je zadovoljen uslov

$$(aA) - (0\underline{A}) = (bB) - (0\underline{B}) \tag{4}$$

Dokaz: Da bi bila zadovoljena jednakost (3) - prema obrascu (2) - potrebno je i dovoljno da imenioci perioda $aAbB$ i $bBaA$ budu jednaki, tj.

$$[AbB] = [BaA]$$

Ovu jednakost - prema rekurentnom obrascu (6/IV) možemo napisati u obliku

$$[A][aB] + [A'][B] = [B][aA] + [B'][A]$$

odakle se deobom sa $[A][B]$ dobija uslov (4), pa je stav 17 dokazan.

Napomena: Iz stava 17 sleduje da je uvek

$$\mu\{(\overline{aSaS_1})\} = \mu\{(\overline{aS_1aS})\} \tag{5}$$

gde su S i S_1 vakantni, jednočlani ili simetrični kompleksi prirodnih brojeva.

40. Posmatrajmo čisto periodičan verižni razlomak

$$\theta = (\overline{aA}) \tag{6}$$

gde je a prirodan broj, a A uredjeni kompleks prirodnih brojeva sa $s-1$ članova. Tada je, prema obrascu (2):

$$\mu\{(\overline{aA})\} = \sqrt{\{(aA)+(o\underline{A})\}^2 + (-1)^s \frac{4}{[A]^2}} \,. \tag{7}$$

Izraz $(aA)+(o\underline{A})$ igra osnovnu ulogu i često se javlja u našim daljim ispitivanjima, pa zato uvedimo za njega posebnu oznaku

$$g(\theta) = (aA) + (o\underline{A}) \tag{8}$$

U pogledu vrednosti i oblika funkcije $g(\theta)$ dokazaćemo nekoliko stavova.

Stav 18: Uvek se može odrediti čisto periodičan verižni razlomak θ, da odgovarajuća vrednost funkcije $g(\theta)$ bude ma koji unapred dati pozitivan racionalan broj.

Dokaz: Funkciji $g(\theta)$ može se dati i drugi oblik. Iz identičnosti $(14/IV)$ sleduje $(a\underline{A}) = 1 - (o\underline{A}^*)$, pa izraz (8) postaje

$$g(\theta) = a + 1 + (oA) - (o\underline{A}^*) \,. \tag{9}$$

Da bismo dokazali stav 18, dovoljno je da dokažemo da se uvek može odrediti kompleks A^*, tako da bude zadovoljena jednakost

$$(oA^*) - (o\underline{A}^*) = \frac{m}{n} \tag{10}$$

gde je $\frac{m}{n}$ ma koji pravi razlomak. Radi toga stavimo

$$(A^*) = \frac{p}{q} \quad , \quad (A^{*\prime}) = \frac{p'}{q'}$$

pa jednakost (10) postaje

$$\frac{q-p'}{p} = \frac{m}{n}$$

odakle je

$$\left.\begin{aligned} p &= dn \\ q &= p' + dm \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

gde je α prirodan broj - zajednički faktor izraza $q-p'$ i p . Kad se p i q iz jednačina (11) zamene u jednakosti

$$pq'-p'q=\varepsilon \quad , \quad \varepsilon=\pm 1,$$

ona postaje

$$nq'-mp'=\frac{p'^2+\varepsilon}{\alpha} \quad , \qquad (12)$$

što znači da je $p'^2+\varepsilon$ deljivo sa α . Neka je naprimer

$$\alpha=p'^2+\varepsilon \qquad (13)$$

Ako je u tom slučaju

$$\frac{n}{m}=(\mathcal{B}) \qquad \text{(sa parnim brojem članova)}$$

onda je jedno rešenje

$$\frac{p'}{q'}=(B'),$$

a iz~~z~~ jednačina (13) i (11) dobijaju se odgovarajuća rešenja za p i q . Kako je iz jednačina (11) i (13) uvek $p>p'$, $q>q'$ znači da je svako na ovaj način dobijeno rešenje zadovoljavajuće, pa je stav 18. dokazan. Kao što se iz toka dokaza vidi, navedeno rešenje je samo jedno od mnogih.

41. Iz oblika (9) funkcije $g(\theta)$ sleduje i

<u>Stav 19</u>. Da bi funkcija $g(\theta)$ imala celobrojnu vrednost, <u>potrebno je i dovoljno</u> da periodični verižni razlomak θ ima oblik

$$\theta=(\overline{a\,\mathcal{S}^*}) \qquad (14)$$

gde je a prirodan broj, a $\mathcal{S}$ ma koji simetrični kompleks prirodnih brojeva. Tada je $g(\theta)=a+1$.

<u>Dokaz</u>: Razlika $(\theta A)-(\theta \underline{A}^*)$ koja figuriše u izrazu (9) je po apsolutnoj vrednosti manja od 1, pa će $g(\theta)$ imati celobrojnu vrednost onda i samo onda, akom je

$$(\theta A)-(\theta\underline{A}^*)=0 \quad , \quad \text{tj.} \quad (A)=(A^*) .$$

a to će biti samo kad je

$$A^*=\underline{A}^*,$$

što znači da je u posmatranom slučaju uredjeni kompleks A^* simetričan

$$A^*=\mathcal{S} \qquad \text{odakle je} \qquad A=\mathcal{S}^*.$$

te je stav 19. dokazan.

<u>Napomena 1</u>: Ako je

$$\theta_1=(\overline{a\,\underline{\mathcal{S}}^*})$$

i onda je $g(\theta_1)=a+1$, jer je kompleks $\{\underline{S}^*\}^*$ simetričan.

Napomena 2: Dvočlane periode navedene osobine dobijamo kad u razlomku (14) stavimo $S=V$ ili $S=1^2$. Tako se dobijaju jedina dva takva dvočlana čisto periodična razlomka

$$(\overline{a-1,1}) \qquad \text{i} \qquad (\overline{a,2}). \tag{15}$$

Tročlanu periodu iste osobine dobijamo ako stavimo da je $S=b+1$, gde je b prirodan broj: Dobija se razlomak

$$(\overline{a,b,1}). \tag{16}$$

42. Stav 19. daje mogućnost formiranja nizova čisto periodičnih verižnih razlomaka θ za koje funkcija $g(\theta)$ ima istu celobrojnu vrednost. To isto se može postići i za ostale racionalne vrednosti $g(\theta)$ pomoću sledećeg stava.

Stav 20: Ako su a i b prirodni brojevi, a A ma koji uredjeni kompleks prirodnih brojeva, onda za niz periodičnih razlomaka

$$\theta_\nu=(a\,\overline{\underline{A}^*\{b\underline{A}\}^\nu}), \quad \nu=0,1,2,\dots \tag{17}$$

funkcija $g(\theta_\nu)$ ima stalnu vrednost, nezavisnu od ν:

$$g(\theta_\nu)=a+1+(0A)-(0\underline{A}), \quad \nu=0,1,2,\dots$$

Dokaz: Prema definiciji funkcije $g(\theta)$ biće

$$g(\theta_\nu)=a+(0\underline{A}^*\{b\underline{A}\}^\nu)+(0\{Ab\}^\nu A^*).$$

Kako je

$$(0\{Ab\}^\nu A^*)=(0A\{bA\}^\nu),$$

a prema identičnosti (16/IV)

$$(0\underline{A}^*\{b\underline{A}\}^\nu)=1-(0\underline{A}\{b\underline{A}\}^\nu),$$

izraz $g(\theta_\nu)$ dobija oblik

$$g(\theta_\nu)=a+1+(0A\{bA\}^\nu)-(0\underline{A}\{b\underline{A}\}^\nu)$$

i najzad - prema identičnosti (18/IV) - oblik

$$g(\theta_\nu)=a+1+(0A)-(0\underline{A}),$$

te je stav 20. dokazan.

43. Izrazu $g(\theta)$ može se dati još jedan oblik. Neka je

$$\theta=(\overline{aAbB}) \tag{18}$$

gde su a i b prirodni brojevi, a A i B uredjeni kompleksi prirodnih brojeva. (A sa m , B sa n članova). Tada je jedno za drugim

$$g(\theta) = a + (0AbB) + (0\underline{B}\,b\underline{A}) =$$

$$= (aA) + (0\underline{B}) + \{(0AbB) - (0A)\} + \{(0\underline{B}\,b\underline{A}) - (0\underline{B})\}.$$

Kad prva dva razlomka izrazimo Euler-ovom funkcijom $[C]$, a na zagrade primenimo obrazac (7/IV), pa sve svedemo na zajednički imenilac, $g(\theta)$ dobija oblik

$$g\{(\overline{aAbB})\} = \frac{[AbB][BaA] + (-1)^n[A]^2 + (-1)^m[B]^2}{[AbB][A][B]} \qquad (19)$$

44. Iz obrasca (19) sleduje

<u>Stav 21</u>: Jednakost

$$g\{(\overline{aAbB})\} = \frac{[AbB]^2 + (-1)^n[A]^2 + (-1)^m[B]^2}{[AbB][A][B]} \qquad (20)$$

gde su a i b prirodni brojevi, A i B uredjeni kompleksi prirodnih brojeva (A sa m , B sa n članova), biće zadovoljena <u>onda i samo onda</u> ako je

$$\mu\{(\overline{aAbB})\} = \mu\{(\overline{bBaA})\} \qquad (21)$$

Da bi u tom slučaju prirodni brojevi $[A]$ i $[B]$ bili uzajamno prosti <u>potrebno je</u> da kompleksi A i B budu simetrični i da je $a = b$.

<u>Dokaz</u>: Prvi deo stava 21. proizilazi neposredno iz stava 17. i obrasca (19). Zatim, prema stavu 17., uslov (21) zahteva ispunjenje uslova (4) koji se može napisati u obliku

$$a + \frac{[\underline{A}'] - [A']}{[A]} = b + \frac{[\underline{B}'] - [B']}{[B]} \qquad (22)$$

Da bi u tom slučaju prirodni brojevi $[A]$ i $[B]$ bili uzajamno prosti, potrebno je da brojioci razlomaka u jednačini (22) budu jednaki nuli, tj. da je

$$[\underline{A}'] = [A'] \quad , \quad [\underline{B}'] = [B'] \qquad (23)$$

a tada je i $a = b$. Iz jednakosti (23) - deobom sa $[A]$ odnosno $[B]$ - dobija se:

$$(A) = (\underline{A}) \quad , \quad (B) = (\underline{B}) ,$$

što znači da su kompleksi A i B simetrični. Time je stav 21. dokazan u celini.

VI Cela rešenja jednačine $u^2+(-1)^n v^2+(-1)^m w^2=\alpha uvw$.

45. Obrazac (~~13/III~~ 20/IV) iz stava ~~8~~ 21 daje nam mogućnost da dodjemo do celih rešenja Diofantove jednačine

$$u^2+(-1)^n v^2+(-1)^m w^2=\alpha uvw \tag{1}$$

gde su α, m i n prirodni brojevi. Da bismo dobili jedan skup ovih rešenja dovoljno je odrediti takav čisto periodični verižni razlomak θ koji zadovoljava stav 19 i uslov (~~III~~ 4/V). Radi toga posmatrajmo razlomak

$$\theta=(\overline{a\underline{A}\,b\,S\,b\,A^*}) \tag{2}$$

gde su a i b prirodni brojevi, A uredjeni kompleks prirodnih brojeva, a S simetrični kompleks istih brojeva. Kako je kompleks $\underline{A}\,b\,S\,b\,A$ simetričan to je, prema stavu 19 : $g(\theta)=a+1$. Da bi se na $g(\theta)$ mogao primeniti obrazac (~~III~~ 20/V) - prema stavovima 17 i 21 - potrebno je i dovoljno da bude zadovoljen uslov

$$a+(0\underline{A})-(0A)=b+(0SbA)-(0\underline{A}^*bS) \tag{3}$$

Valja naglasiti da su razlomkom (2) obuhvaćeni svi čisto periodični verižni razlomci (izuzimajući samo njih nekoliko sa pet i manje članova) koji zadovoljavaju oba navedena uslova, tj. koji daju cela rešenja jednačine (1).

46. U pogledu vrednosti prirodnih brojeva a i b, prema uslovu (3), moguća su samo tri slučaja: $b=a-1$, $b=a+1$, $b=a$. U <u>prvom</u> slučaju jednačina (3) - prema identičnosti (16/IV) - svodi se na oblik

$$2-(0SbA)-(0A)=(0\underline{A}bS)-(0\underline{A}),$$

što je nemoguće, jer je uvek

$$1-(0A)>(0\underline{A}bS)-(0\underline{A}).$$

U <u>drugom</u> slučaju jednačina (3) na isti način postaje

$$(0SbA)+(0A)=(0\underline{A})-(0\underline{A}bS),$$

što je isto tako nemoguće, jer je uvek

$$(0A)>(0\underline{A})-(0\underline{A}bS).$$

Zato ostaje jedino slučaj kad je $a=b$.

21. Kad je $a=b$ razlomak (2) ima oblik

$$\theta=(\overline{a\underline{A}\,a\,S\,a\,A^*}) \tag{4}$$

a jednačina (3), kad se u njoj stavi $a=b$ i - prema identičnosti (~~[illegible]~~)- smeni

$$(0\underline{A}^* a S) = 1 - (0\underline{A}\, a S)\ , \quad (0 S a A) = 1 - (0\underline{S}^* a A)$$

dobija oblik

$$(0\underline{S}^* a A) - (0A) = (0\underline{A}\, a S) - (0\underline{A}) . \qquad (5)$$

Neka su <u>prirodan broj a i kompleks S dati</u>, pa je u jednačini (5) <u>jedina nepoznata kompleks A</u>. U tom slučaju jednačina (5) je u stvari jedna Diofantova jednačina drugog stepena sa nepoznatama $[A]$ i $[A']$. Ali, mi ćemo jednačinu (5) rešiti direktno, ne prevodeći je na algebarski oblik Diofantove jednačine drugog stepena. Kako je razlomak $(0\underline{A})$ jedna glavna približna vrednost razlomka $(0\underline{A}\, a S)$, to se može očekivati, po sklopu jednačine (5), da je i $(0A)$ <u>jedna glavna približna vrednost razlomka</u> $(0\underline{S}^* a A)$. Da bi to bilo potrebno je i dovoljno ~~da bude~~ - prema poznatom Legendre-ovom uslovu - da bude

$$|(0\underline{S}^* a A) - (0A)| < \frac{1}{\left\{1 + \frac{[A']}{[A]}\right\} [A]^2}$$

tj. prema jednačini (5):

$$(a S) + (0A) > (1\underline{A}) ,$$

a ova nejednakost je zadovoljena za svako $a \geqslant 2$, čime je naša pretpostavka potvrdjena.

47 ~~22~~. Na osnovu toga možemo dokazati

<u>Stav 22:</u> Kad su u jednačini

$$(0\underline{S}^* a A) - (0A) = (0\underline{A}\, a S) - (0\underline{A}) \qquad (5)$$

poznati prirodan broj a i simetrični kompleks prirodnih brojeva S, a uredjeni kompleks A nepoznat, onda svakom paru uredjenih kompleksa R i Q koji zadovoljavaju uslove

$$S = RQ^* \ , \quad [Q a R'] = [RQ] \qquad (6)$$

odgovara jedan niz rešenja jednačine (5):

$$A_\nu = \{\underline{S}^* a\}^\nu \underline{Q} \ , \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \qquad (7)$$

Tako dobijena rešenja su jedina rešenja jednačine (5).

<u>Dokaz:</u> Pošto je razlomak $(0A)$ jedna glavna približna vrednost razlomka $(0\underline{S}^* a A)$, onda se kompleks A poklapa sa početnim delom kompleksa $\underline{S}^* a A$. Prema tome, ako stavimo da je $S^* = RQ$, onda smemo pretpostaviti da je jedno rešenje jednačine (5): $A = \underline{Q}$. Zamenom u jednačini (5) dobija se uslov (6). U stvari kad je zadovoljen taj uslov, jednačina (5) ima niz rešenja (7), jer se zamenom kompleksa A_ν, datog obrascem (7), u

jednačini (5), dobija uvek uslov (6), ma koliki bio prirodan broj ν .

48. Iz niza kompleksa A_ν, datog obrascem (7) proizilazi niz razlomaka oblika(4):

$$\theta_\nu = \left(\overline{a\, \underline{A_\nu}\, a\, S\, a\, A_\nu^*}\right), \quad \nu = 0,1,2,\dots \tag{8}$$

Iz ovog niza razlomaka sleduje dalje - prema stavu 21 - jedan niz skupova:

$$u_\nu = [\underline{A_\nu}\, a\, S\, a\, A_\nu], \quad v_\nu = [A_\nu], \quad w_\nu = [S\, a\, A_\nu] \tag{9}$$

celih rešenja jednačine

$$u^2 + (-1)^n v^2 + (-1)^m w^2 = (a+1)\, u v w \tag{10}$$

gde su m i n brojevi članova kompleksa A_ν i $S\, a\, A_\nu^*$. U pogledu niza rešenja (9) dokazaćemo:

<u>Stav 23:</u> Svakom paru uredjenih kompleksa S i Q (sa s i q članova) koji zadovoljavaju uslove stava 22, odgovara jedan niz skupova u_ν, v_ν, w_ν ($\nu = 0,1,2,\dots$) celih rešenja jedne od jednačina

$$u^2 + v^2 + w^2 = (a+1)\, u v w \tag{I}$$

$$u^2 - v^2 - w^2 = (a+1)\, u v w \tag{II}$$

$$u^2 \pm v^2 \mp w^2 = (a+1)\, u v w \tag{III}$$

i to:

a) jednačine (I), ako su s i q oboje parni;
b) jednačine (II), ako je s parno, a q neparno;
c) jednačine (III), ako je s neparno.

Za niz prirodnih brojeva v_ν vrede relacije

$$v_\nu = [Q\{a S^*\}^\nu], \quad \nu = 0,1,2,\dots \tag{11}$$

$$v_\nu = (a+1)[S]\, v_{\nu-1} - (-1)^s v_{\nu-2}, \quad \nu = 2,3,\dots \tag{12}$$

Odgovarajuće vrednosti u_ν i w_ν svode se na v_ν i $v_{\nu+1}$ obrascima

$$u_\nu = \frac{v_{\nu+1}^2 + (-1)^s v_\nu^2}{[S]}, \quad w_\nu = v_{\nu+1}, \quad \nu = 0,1,2,\dots \tag{13}$$

Ako su v_0 i v_1 uzajamno prosti, onda su uzajamno prosti i ma koji u_ν, v_ν i w_ν ($\nu = 0,1,2,\dots$).

<u>Dokaz:</u> Kako su m i n u jednačini (10) brojevi članova kompleksa A_ν i $S\, a\, A_\nu^*$, onda, prema obrascu (7) sleduje da je:

m iste parnosti sa $\nu s + q$,

n iste parnosti sa $(\nu+1)s + q$.

Odatle, prostim rezonovanjem, sleduje prvi deo stava 23. Obrazac (11) proizilazi iz obrasca (7) i drugog od obrazaca (9). Na osnovu obrasca (11), a prema obrascu (12/IV) proizilazi rekurentni obrazac (12). U njemu je, prema obrascu (13/IV): $\rho = [aS] + [S^*]$, što se, prema obrascima (5/IV) i (9/IV) može napisati u obliku $\varrho=(a+1)[S]$. Prvi od obrazaca (13) dobija se kad na izraz u_ν dat prvim od obrazaca (9) primenimo obrazac (10/IV):

$$[S][\underline{A}_\nu a\, S a\, A_\nu]=[S a A_\nu]^2+(-1)^s[A_\nu]^2.$$

Drugi od obrazaca (13) sleduje neposredno iz obrasca (7) i trećeg od obrazaca (9). Da bismo dokazali poslednji deo stava 23 dovoljno je da posmatramo obrasce (12) i (13). Ako su v_0 i v_1 uzajamno prosti, onda su - prema obrascu (12) - uzajamno prosti i ma koja dva uzastopna v_ν i $v_{\nu+1}$, a na osnovu obrasca (13) i ma koji trio u_ν, v_ν i w_ν.

49. Posmatrajmo sad uslove (6) i oblik najmanjeg rešenja $A=\underline{Q}$ jednačine (5). U tom pogledu dokazaćemo prvo

<u>Stav 24:</u> Ma kakvi bili dati prirodan broj a i simetrični kompleks prirodnih brojeva S, jednačina

$$(0\underline{S}^*a A)-(0A)=(0\underline{A}\, a S)-(0\underline{A})$$

uvek ima niz rešenja

$$A_\nu=\{\underline{S}^*a\}^\nu\underline{S}^*,\quad \nu=0,1,2,\dots \tag{14}$$

Odgovarajući niz skupova u_ν, v_ν i w_ν ($\nu=0,1,2,\dots$) celih rešenja odgovara:

a) jednačini (II), ako je s parno;
b) jednačini (III), ako je s neparno.

Ma koji skup ovako dobijenih celih rešenja ima zajednički faktor $[S]$.

<u>Dokaz:</u> Kad u obrascima (6) stavimo $R=V$, $Q=S^*$, oni su identički zadovoljeni, pa iz obrasca (7) sleduje niz rešenja (14). Prema obrascu (11) je tada

$$v_0=[S]\quad,\quad v_1=(a+1)[S]^2$$

odakle vidimo da v_0 i v_1 imaju zajednički faktor $[S]$. Prema rekurentnom obrascu (12) to znači da je i svako v_ν ($\nu=2,3,\dots$) deljivo sa $[S]$, a iz obrasca (13) sleduje da su i svi u_ν i w_ν deljivi sa $[S]$. Ostale tvrdnje stava 24 sleduju iz stava 23, jer je $q=s+1$ ili $q=s-1$.

50. Pokazaćemo da pod izvesnim uslovima jednačina (5) može imati i drugih nizova rešenja osim niza (14). Radi toga dokažimo

<u>Stav 25:</u> Ako simetrični kompleks S u jednačini

$$(0\underline{S}^*a A)-(0A)=(0\underline{A}\, a S)-(0\underline{A})$$

ima osbinu da razlomak $\overline{(aS^*)} = \overline{(aCaD)}$ (15)

daje jedan skup celih rešenja $u' = [CaD]$, $v' = [C]$, $w' = [D]$ jedn od jednačina (I), (II) ili (III), onda jednačina (5), pored niza rešenja datog stavom 24, ima i niz rešenja

$$A_\nu = \{\underline{S}^* a\}^\nu \underline{D} \quad , \nu = 0, 1, 2, \dots \qquad (16)$$

Razlomci

$$\theta_\nu = \overline{(a\underline{A_\nu} a S a A_\nu^*)} \;, \nu = 0, 1, 2, \dots \qquad (17)$$

koji proizilaze iz tako dobijenog niza kompleksa A_ν daju cela rešenja u_ν, v_ν i w_ν one iste od jednačina (I), (II) ili (III), čija rešenja daje i razlomak (15).

Ma koji tako dobijeni skup u_ν, v_ν i w_ν biće uzajamno prosti brojevi onda i samo onda ako su u', v' i w' uzajamno prosti.

<u>Dokaz</u>: Ako stavimo $R = Ca$, $Q = D$ onda iz prvog od uslova (6) proizilazi jednakost (15), a drugi postaje $[DaC] = [CaD]$, odakle na osnovu stavova 17 i 21 proizilazi prvi deo stava 25. Ako sa m i n kao i do sada, označimo brojeve članova kompleksa A_ν i $S_a A_\nu^*$, a sa ℓ i k brojeve članova kpmpleksa C i D, onda je na osnovu obrazaca (16) i (17):

m iste parnosti sa $\nu(\ell + k) + k$

n iste parnosti sa $\nu(\ell + k) + \ell$,

odakle neposredno sleduje drugi odeljak stava 25. Dalje iz obrasca (16), na osnovu drugog od obrazaca (9), sleduje

$$v_0 = [D] \;, \quad v_1 = [D'][aD][C] + p[D]$$

gde je p prirodan broj. Ako su $v' = [C]$ i $w' = [D]$ uzajamno prosti, onda su prema poslednjim obrascima uzajamno prosti i v_0 i v_1, jer - prema teoriji pravilnoh verižnih razlomaka - $[D]$ ne može imati zajednički faktor sa $[D']$ ili sa $[aD]$. Prema poslednjem odeljku stava 23 onda su uzajamno prosti i svi u_ν, v_ν i w_ν. Naprotiv ako v' i w' imaju zajednički faktor, onda - prema poslednjim obrascima - isti faktor imaju i v_0 i v_1, pa i svi u_ν, v_ν i w_ν. Tako je stav 25 dokazan u celini.

51. Posmatrajmo sad pojedinačno jednačine (I), (II) i (III). Rezultati koji se dobijaju u pogledu jednačine (I) slažu se sa već poznatim ezultatima Markova [20, 21], Hurwitz-a [15], Frobenius-a [6], M. Fujiware [9] i K. Shibate [35]. Ovi rezultati proizilaze is stava 25, polazeći od najmanji celih rešenja jednačine (I), za $a = 2$, koje daju razlomci $\overline{(1,1)}$, $\overline{(2,2)}$.

52. Jednačine

$$u^2 - v^2 - w^2 = \alpha u v w \qquad (\text{II})$$

$$u^2 \pm v^2 \mp w^2 = \alpha u v w \qquad (\text{III})$$

gde smo radi kraćeg pisanja stavili $\alpha = a+1$, imaju - prema stavu 24 - bezbrojno mnogo skupova celih rešenja sastavljenih iz brojeva koji <u>nisu</u> uzajamno prosti. Ali iste jednačine imaju i bezbrojno mnogo skupova celih rešenja sastavljenih iz uzajamno prostih brojeva. Stav 25 ompgućava nam da potpuno odredimo niz takvih rešenja i jedne i druge jednačine. Ti nizovi - kao što ćemo pokazati - pretstavljaju analogiju niza brojeva Markova, tj. niza celih rešenja jednačine (I).

53. Stav 26: Perioda svakog čistoperiodičnog verižnog razlomka iz koga proizilazi jedan skup uzajamno prostih celih rešenja jednačine:

$$u^2 - v^2 - w^2 = \alpha u v w \qquad (\mathrm{II})$$

gde je $\alpha \geqslant 3$ prirodan broj, ima oblik

$$\alpha - 1 \ S_{2k+1} \ \alpha - 1 \ S_{2k'+1}$$

gde je

$$S_{2k+1} \ \alpha - 1 \ S^*_{2k'+1} = S_{2k''}.$$

Svaka takva perioda je sastavljena najviše od četiri vrste članova: $1, \alpha-2, \alpha-1, \alpha$.

Vrednosti u iz svih skupova uzajamno prostih celih rešenja jednačine (II) - za svako dato $\alpha \geqslant 3$ -čine jedan odredjeni niz prirodnih brojeva

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2+1,\ \alpha^4-\alpha^2+1,\ \alpha^4+3\alpha^2+1,\ \alpha^6-3\alpha^4+2\alpha^2+1, \\ \alpha^6+\alpha^4+2\alpha^2+1,\ \alpha^6+5\alpha^4+6\alpha^2+1,\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Isto tako vrednosti v i w iz svih takvih skupova - za jedno odredjeno $\alpha \geqslant 3$ -čine odredjeni niz prirodnih brojeva, koji nema zajedničkih članova sa prvim nizom

$$1, \alpha, \alpha^2-1, \alpha^3-2\alpha, \alpha^3+2\alpha, \alpha^4-3\alpha^2+1, \alpha^4+\alpha^2+1, \ldots \qquad (19)$$

$[S_{2k+1}]$

Dokaz: Prvi deo stava 26, koji govori o obliku periode proizlazi neposredno iz poslednjeg odeljka stava 21. Iz oblika perio dalje sledu je da će sva cela rešenja za u biti oblika $[S_{2k}]$, a za v i w oblika (Obrasci (14/IV) i (15/IV)). Prema stavu 24, jedini razlomci koji daju uzajamno prosta rešenja jednačine (II), dobijaju se za $S = V$ tj.

$$\theta_\nu = (\overline{a\ 1\ \{a-1\ 1\}^\nu a\ a\ \{1\ a-1\}^{\nu-1} 1\ a})\ , \nu = 1, 2, \ldots \qquad (20)$$

sa početnim

$$\theta_0 = (\overline{a\ 1\ a\ a+1}) \qquad (21)$$

Primenom stava 25, iz svakog od ovih razlomaka dobija se po jedan novi kompleks S, koji daje po jedan novi niz traženih razlomaka itd. Takvim postupkom biće obuhvaćeni svi razlomci koji daju uzajamno prosta cela rešenja jednačine (II), pa iz njih i sva takva rešenja. S bbzirom ma operacije koje se pri tome vrše (C^* i $\underline{C}$), a na osnovu sastava razlomaka (20) i (21) zaključujemo da će i svi dalje dobijeni razlomci biti sastavljeni od navedene četiri vrste članova. Da bismo odredili nizove (18) i (19) primenimo stav 25 na razlomke (20) i (21) i na one koji iz njih proizilaze. Tako se dobija niz mogućih kompleksa S :

bez članova: V;

sa dva člana: $\{a+1\}^2$;

sa četiri člana: $1\ a^2\ 1$; $\{a+1\}^4$;

sa šest članova: $a\ 1\ a^2\ 1\ a\ ;\ 1\ a\ \{a+1\}^2\ a\ 1\ ;\ \{a+1\}^6\ ;$

sa osam članova: $1\ a-1\ 1\ a^2\ 1\ a-1\ 1\ ;\ a+1\ a\ 1\ a^2\ 1\ a\ a+1\ ;$
$1\ a\ \{a+1\}^4\ a\ 1\ ;\ \{a+1\}^8\ ;$ itd.

Iz svakog od ovih kompleksa proističe – prema stavu 25 – po jedan niz čisto periodičnih verižnih razlomaka od kojih svaki daje po jedan skup uzajamno prostih celih rešenja jednačine (II). Primenom stava 23 na tako dobijene nizove, vodeći računa o stepenu (u odnosu na α) dobijenih vrednosti, formirani su nizovi (18) i (19). Tako je stav 26 dokazan u celini.

54. Za cela uzajamno prosta rešenja jednačine (III) vredi analogni stav:

<u>Stav 27:</u> Perioda svakog čisto periodičnog verižnog razlomka iz koga proističe jedan skup uzajamno prostih celih rešenja jednačin

$$u^2+v^2-w^2=\alpha\, u v w \qquad (\mathrm{III})$$

gde je $\alpha \geqslant 3$ prirodan broj, ima oblik

$$\alpha-1\ S_{2k+1}\ \alpha-1\ S_{2k'}$$

gde je

$$S_{2k+1}\ \alpha-1\ S^{*}_{2k'} = S_{2k''+1}\,.$$

Svaka takva perioda sastavljena je najviše od četiri vrste članova

$$1\,,\ \alpha-2\,,\ \alpha-1\,,\ \alpha\,.$$

Vrednosti u i v iz svih skupova uzajamno prostih celih rešenja jednačine (III) – za svako dato $\alpha \geqslant 3$ – čine jedan odredjeni niz prirodnih brojeva

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2-1,\ \alpha^3-2\alpha,\ \alpha^3+2\alpha,\ \alpha^4-3\alpha^2+1,\ \alpha^4+\alpha^2+1,\ \dots$$

Isto tako vrednosti w iz svih takvih skupova – za svako dato $\alpha \geqslant 3$ – čine odredjeni niz prirodnih brojeva, koji nema zajedničkih članova sa prvim nizom:

$$\alpha^2+1,\ \alpha^4-\alpha^2+1,\ \alpha^4+3\alpha^2+1,\ \alpha^6-3\alpha^4+2\alpha^2+1,$$
$$\alpha^6+\alpha^4+2\alpha^2+1,\ \alpha^6+5\alpha^4+6\alpha^2+1,\ \dots$$

<u>Dokaz:</u> Jedini čisto periodični verižni razlomci koji daju cela ~~rešenja~~ uzajamno prosta rešenja jednačine (III) su razlomci su razlomak sa tročlanom periodom

$$(\overline{a\ a\ 1})$$

i niz razlomaka koji daje stav 24 za $S=1$:

$$\theta_\nu = (\overline{a\ \{a+1\}^\nu\ a\ 1\ a\ \{a+1\}^{\nu-1}\ a\ 1})\ ,\quad \nu=0,1,2,\dots,$$

kao i oni razlomci koji iz ovih proizilaze primenom stava 25. Tako se dobija niz mogućih kompleksa S :

sa jednim članom: $1\ ;\ a+1\ ;$

sa tri člana: $1\ a-1\ 1\ ;\ a\ 1\ a\ ;\ \{a+1\}^3\ ;$

sa pet članova: $1\ a-1\ 1\ a-1\ 1\ ;\ 1\ a\ a+1\ a\ 1\ ;\ a+1\ a\ 1\ a\ a+1\ ;$
$a\ 1\ a-1\ 1\ a\ ;\ \{a+1\}^5\ ;$ itd.

Ostale tvrdnje stava 27 se dokazuju analogno stavu 26.

VII Peron-ova modularna funkcija $\mathcal{M}(\gamma)$ jednog iracionalnog broja γ

55. ~~(63)~~ Cilj ovog odeljka je posmatranje Perron-ove modularne funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$ (koju smo definisali u trećem delu ovog rada (strana 29)), jednog iracionalnog broja

$$\gamma = (b_0, b_1, b_2, \dots) \tag{1}$$

čiji su svi nepotpuni količnici b_ν $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$ konačni. Onda je prema obrascu (7/III)

$$\mathcal{M}(\gamma) = \limsup_{\nu \to \infty} \left\{ (b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \dots) + (0\, b_\nu\, b_{\nu-1} \dots b_1) \right\} \tag{2}$$

Markov [20, 21] je pokazao da je najmanja vrednost ove funkcije $\sqrt{5}$ a najniža tačka nagomilavanja broj 3. Perron [29, 30] je našao da ova funkcija nema vrednosti između $\sqrt{12}$ i $\sqrt{13}$, da postoji jedan skup brojeva γ, koji ima moć kontinuuma, za koji je $\mathcal{M}(\gamma) = 3$, isto tako i za $\mathcal{M}(\gamma) = \sqrt{12}$ itd. Pri tome je interval $(3, \sqrt{12})$ ostao neispitan. Shibata [36] je produžio ova ispivanja dalje u istom smislu za vrednosti $\mathcal{M}(\gamma) > 4$.

Ispitivanja u ovom radu odnose se na vrste brojeva koji uopšte mogu biti vrednosti ili tačke nagomilavanja vrednosti funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$, kao i na specijalne tačke slične tački $\mathcal{M}(\gamma) = 3$ ove funkcije.

56. ~~(70)~~ **Stav 28:** Svaki prirodan broj $a \geqslant 3$ je tačka nagomilavanja vrednosti modularne funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$. Jedan od nizova vrednosti funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$ koje teže broju a dat je obrascem

$$\mathcal{M}(\theta'_\nu) = \sqrt{a^2 - (-1)^{s_\nu} \frac{4}{[S_\nu]^2}} \tag{3}$$

gde je S_ν $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$ niz svih mogućih simetričnih kompleksa sastavljenih od prirodnih brojeva $1, 2, \dots, a-2$ (Tako da je i svaki kompleks S_ν^* sastavljaen samo od istih tih brojeva). Niz kompleksa S_ν je tako uredjen da broj $[S_\nu]$ raste sa indeksom ν. s_ν je broj članova kompleksa S_ν.

Brojevi θ'_ν su ekvivalentni sa brojevima

$$\theta_\nu = (a-1\ S_\nu^*) \tag{4}$$

Dokaz: Pošto je $a-1$ najveći nepotpuni količnik u u razlomku θ_ν onda je

$$\mathcal{M}(\theta_\nu) = \mu_0$$

S druge strane iz stava 19 sleduje da je $g(\theta_\nu) = a$,pa iz obrasca (7/V) sleduje obrazac (3).Tako je stav 28 dokazan.

57. Stav 29: Skup brojeva γ za koje je $\mathcal{M}(\gamma) = a$,ima moć kontinuuma,ma koliki bio prirodan broj $a \geqslant 3$.

Dokaz: Pokazaćemo da za svaki prirodan broj $a \geqslant 4$ postoji prebrojivo mnogo takvih skupova iracionalnih brojeva γ . Neka je S ma koji simetrični kompleks sastavljaen od članova $1, 2, \dots a-1$,pa posmatrajmo broj γ definisan verižnim razlomkom

$$\gamma = (a-1\ \underline{S}^* S^{k_1} a-1\ \underline{S}^* S^{k_2} a-1\ \underline{S}^* S^{k_3} a-1 \dots),$$

gde je k_1 , k_2 , $k_3, \dots, k_\nu, \dots$ ma koji rastući beskrajni niz prirodnih brojeva.U tom slučaju - prema obrascu (2) je:

$$\mathcal{M}(\gamma) = a-1 + (0\ \underline{S}^* \bar{S}) + (0\ \bar{S}),$$

ili - prema identičnosti (16/IV)

$$\mathcal{M}(\gamma) = a,$$

pa je stav 29 dokazan.

58. Stav 30: Ma koliki bio racionalan pravi razlomak $\frac{m}{n}$, uvek se može naći dovoljno veliki prirodan broj a ,takav da vrednost

$$\alpha = a + \frac{m}{n} \tag{5}$$

bude tačka nagomilavanja vrednosti funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$.

U tom slučaju su tačke nagomilavanja iste funkcije i svi brojevi

$$a + \nu + \frac{m}{n} \quad , \text{gde je } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Jedan od nizova vrednosti funkcije $\mathcal{M}(\gamma)$ koje teže broju α dat je obrascem

$$\mathcal{M}(\theta'_\nu) = \sqrt{\alpha^2 + (-1)^{(b+1)(\nu+1)} \frac{4}{[A\{bA\}^\nu]^2}} \quad , \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

gde je kompleks $A = a_1 a_2 \dots a_s$ jedno ma koje rešenje jednačine

$$(bA) - (b\underline{A}) = \frac{m}{n}, \qquad (7)$$

a prirodni brojevi a i b su tako izabrani da je

$$a \geqslant a_\nu + 2 \quad \text{za } \nu = 1, 2, \dots, s; \quad b \leq a - 2. \qquad (8)$$

Brojevi θ'_ν su ekvivalentni brojevima

$$\theta_\nu = (\overline{a - 1 \; \underline{A}^* \{b\underline{A}\}^\nu}), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \qquad (9)$$

Dokaz: Prema stavu ~~22~~ 18 jednačina (7) uvek ima bar jedno rešenje ma koliki bio dati pravi razlomak $\frac{m}{n}$. Sa tako odredjenim kompleksom A možemo uvek formirati niz razlomaka (9). Tada je prema stavu 20 i jednačini (7)

$$g(\theta_\nu) = \alpha,$$

pa iz obrasca (~~22~~ 7/V), uz uslove (8), sleduje obrazac (6). Pošto $[A\{bA\}^\nu]$ neograničeno raste sa ν, to je

$$\lim_{\nu \to \infty} \mathcal{M}(\theta_\nu) = \alpha.$$

Od brojeva s i ν zavisi da li će se vrednosti $\mathcal{M}(\theta_\nu)$ približavati broju α samo sa gornje strane ili oscilatorno.

59. (~~25~~) Stav ~~33~~ 31: Postoji bezbrojno mnogo racionalnih razlomljenih brojeva α većih od 3, takvih da skup iracionalnih brojeva γ, za koje je $\mathcal{M}(\gamma) = \alpha$ ima moć kontinuuma. Ako je α jedan takav broj, onda istu osobinu imaju i svi brojevi $\alpha + \nu$, gde je $\nu = 1, 2, 3 \dots$

Ma koliki bio dati racionalan pravi razlomak $\frac{m}{n}$, uvek se može naći dovoljno veliki prirodan broj a, da racionalan broj

$$\alpha = a + \frac{m}{n}$$

ima osbinu navedenu u prvom delu ovog stava.

Dokaz: Za jedno dato $\frac{m}{n}$, kao u dokazu stava 30, odredimo kompleks A, pa zatim, prema uslovima (8), prirodne brojeve a и b. Najzad formiramo iracionalan broj

$$\gamma = (a\text{-}1\ \underline{A}^{*}\{b\underline{A}\}^{k_1}a\text{-}1\ \underline{A}^{*}\{b\underline{A}\}^{k_2}a\text{-}1\ \underline{A}^{*}\{b\underline{A}\}^{k_3}a\text{-}1\ \ldots)$$

gde je $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\nu, \ldots$ ma koji beskonačan rastući niz prirodnih brojeva. Prema obrascu (2) i uslovima (8) biće

$$\mathcal{M}(\gamma) = a\text{-}1 + (0\underline{A}^{*}\overline{b\underline{A}}) + (0\overline{Ab})$$

a odatle prema identičnosti (16/IV)

$$\mathcal{M}(\gamma) = a + (0\overline{Ab}) - (0\underline{A}b)$$

i najzad prema identičnosti (19/IV)

$$\mathcal{M}(\gamma) = \alpha$$

Ostali navodi stava 34 su očigledni.

60. ~~(79)~~ Dokažimo najzad

Stav ~~3~~2: Ako je

$$\frac{\xi}{2} = (0\, b_1\, b_2\, b_3, \ldots\ldots)$$

jedan ma koji iracionalan pravi razlomak čiji su svi nepotpuni količnici konačni, onda se uvek može odrediti dovoljno veliki prirodan broj a, da skup iracionalnih brojeva γ, za koje je

$$\mathcal{M}(\gamma) = a + \xi$$

ima moć kontinuuma. U tom slučaju istu osobinu imaju i svi brojevi

$$a + \nu + \xi$$

gde je $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Dokaz: Neka je

$$\frac{\xi}{2} = (0\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots)$$

jedan iracionalan pozitivan broj manji od 1 takav da postoji neko najveće b_N, pa da su svi

$$b_\nu \leq b_N \quad , \nu = 1, 2, \ldots$$

Formirajmo tada niz simetričnih kompleksa

$$S_0 = b_1\, b_2 \ldots\ldots b_{k_0-1}\, b_{k_0}\, b_{k_0-1} \ldots\ b_2\, b_1$$
$$S_1 = b_1\, b_2 \ldots\ b_{k_1-1}\, b_{k_1}\, b_{k_1-1} \ldots\ b_2\, b_1$$
$$S_3 = b_1\, b_2 \ldots\ b_{k_2-1}\, b_{k_2}\, b_{k_2-1} \ldots\ b_2\, b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gde je $k_0, k_1, k_2, \ldots$ ma koji beskonačan rastući niz prirodnih brojeva. Tada obrazujmo broj

$$\gamma = (a\, S_0\, a\, S_1\, a\, S_2\, a \ldots\ldots)$$

gde je $a - 1 > b_N$, pa je prema (2)

$$\mathcal{M}(\gamma) = a + (0\, b_1\, b_2 \ldots) + (0\, b_1\, b_2 \ldots)$$

tj.

$$\mathcal{M}(\gamma) = a + \xi\ .$$

L I T E R A T U R A :

1) Borel, É.: Contribution à l'analyse arithmétique du continu. J. de Math. (5), t. 9 (19o3), str. 329 - 375.

2) Bortolotti, E.: Le antiche regole empiriche per calcolo approssimato dei radicali quadratici e le prime serie infinite. Bollettino della "Mathesis", t.11 (1919), str. 14 - 29.

3) Cahen, E.: Sur la suite de meilleure approximation absolue pour un nombre. C. R., t. 165 (1917), str. 262 - 264.

4) Descombes, R.: Sur un théorème classique d'Hurwitz, C.R. t.236 (Nr.15, 13-IV, 1953), str. 1460 - 1462.

5) Fatou, P.: Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriques, C.R. t. 139 (1904), str. 1019 - 1021.

6) Frobenius, G.: Über die Markoffschen Zahlen, S. B. preuss. Akad. Wiss. 1913, str. 458 - 487.

7) Fujiwara, M.: Bemerkung zur Theorie der Approximation der irrationa - len Zahlen durch rationale Zahlen. Tôhoku Math. J., t. 11 (1916), str. 239 - 242.

8) " Bemerkung zur Theorie der Approximation der irrationa - len Zahlen durch rationale Zahlen. Tohoku Math. J., t. 14 (1918), str. 109 - 115.

9) " Approximation of an irrational number by rational numbers Proc. Imp. Acad. Jap., t. 2 (1926), str. 1 - 3.

10) Grace, J. H.: The Classification of Rational Approximations. Proc. London Math. Soc. (2), t. 15 (1916) str. 18 - 29.

11) Hermite, Ch.: Sur l'introduction des variables continues dans la théori des nombres, Oevres, t. I, str. 164 - 192.

12) Humbert, G.: Sur la methode d'approximation d'Hermite, J. de math. (7), t. 2 (1916), str. 79 - 103.

13) Humbert, G.: Sur les réduites d'Hermite. C. R.,t. 162 (1916), str.67-73.

14) Hurwitz, A.: Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Werke, t. II, str. 122 -128.

15) " Über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis. Werke,t. II str. 410 - 421.

16) Koksma, J. F.: Diophantische Approximationen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 4.

17) " Bewijs van een stelling over kettingbreuken, Mathematica A. Tijdschrift voor studeerenden, Zutphen,t.6, str. 226 - 231.

18) Lagrange : Additions aux éléments d'algèbre d'Euler. Oevres,t.VII, str. 5 - 180.

19) Legendre, A. M.: Théorie des nombres, t. I, IV izdanje 1900 (preštampano III izdanje iz 1830 god.),str. 17 - 27.

20) Markov, A. A.: Sur les formes quadratiques binaires indéfinies I. Math. Ann. Bd. 15 (1879),str. 381 - 407.

21) " Sur les formes quadratiques binaires indéfinies II. Math. Ann. 17 (1880),str. 379 - 400.

22) Morimoto (Fukasawa), S.: Über die Kleinsche geometrische Darstellung des Kettenbruchs. Jap. J. Math.,t. 2 (1926), str. 101 - 114.

23) " Das Problem der besten Approximation der irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen. Jap. J. Math. t. 3(1926), str. 87 - 89.

24) " Beweise einiger Sätze in der Kettenbruchstheorie durch die Humbertsche geometrische Darstellung. Jap. J. Math. t. 7 (1930), str. 305 - 314.

25) Obreškov, N.: Sur l'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels. C. r. Acad. Bulgare Csi. 3.Nr. 1 (1951).

26) Oppenheim, A.: Rational approximations to irrationals. Bull. Amer. math. Soc. 47, str. 602 - 604.

27) Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig 1913 (B.G.Teubne

28) " Zur Abwehr. S. B. der Heidelberger Akad.der Wiss.,1920.

29) " Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale I. S. B. der Heidelberger Akad. der Wiss.,1921.

30) " Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. II S. B. der Heidelberger Akad. der Wiss.,1921.

31) " Irrationalzahlen. Göschens Lehrbücherei Bd.1,Berlin 1947, III izdanje.

32) Schwenter, D.: Deliciae Physico - Mathematicae,Nürnberg,1636.

33) Serret, J. A.: Sur un theoreme relatif aux nombres entiers. J. de Math. 13 (1848).

34) Shibata, K.: On the condition for the fraction of approximation. J. Tôkyô phys. school. t. 40 (1931),str. 601 - 607.

35) " Approximation of an irrational number by rational numbers Proc. Imp. Acad. Jap.,t.II (1926),str. 46 - 48.

36) " On the Order of the Approximation of Irrational Numbers by Rational Numbers. Tôhoku Math. J., t. 30 (1929), str. 22 - 50.

37) Smith, H. J. S.: Note on continued fractions. The messenger of mathematics (2) 6 (1877).

38) Vahlen, K. Th.: Über Näherungswerte und Kettenbrüche. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 115 (1895),str.221 - 233.

39) Wallis Arithmetica infinitorum.

R e s u m e

LE PROBLÈME D'APPROXIMATION DE NOMBRES IRRATIONNELS PAR LES NOMBRES RATIONNELS

par B. Djerasimović

Le but de la première partie de cette thèse est d'étudier les valeurs approchées rationnelles d'un nombre irrationnel sans utiliser les fractions continues et les fractions de Farey. C'est le premier lemme qui donne la possibilité pour cela.

Dans la deuxieme partie on utilise les résultats de la première partie pour obtenir quelques resultats bien connus de fractions continues regulieres.

Dans la troisième partie on démontre certaines relations entre deux ou trois termes de la suite λ_ν , définie par la formule (2), d'ou l'on obtient quelques résultats connues et nouveaux.

Dans la quatrième partie on definit trois opérations avec les complexes ordonnées de nombres naturels et puis on utilise ces symboles pour exprimer les fprmules connues et nouvelles de fractions continues regulières.

La cinquieme partie est consacrée a l'étude de points d'accumulation de la suite λ_ν d'une fraction continue périodique.

Dans la sixième partie on resout l'equation de Diofant en utilisant les complexes ordonnées de nombres naturels citées plus haut.

Enfin la septième partie est consacree a l'étude de fonction $M(\gamma)$ modulaire de Perron (8) [29,30] d'un nombre irrationnel γ .