DJORDJE KARAPANDŽIĆ
docent Univerziteta

PRIMENA TRANSFORMACIJA DODIRA NA INTEGRACIJU DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

BEOGRAD
1955

PRIMENA TRANSFORMACIJA DODIRA NA INTEGRACIJU DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

U v o d

A) Prvi deo: O b i č n e d i f e r e n c i j a l n e j e d n a č i n e.

I G l a v a: Istorijski podaci i napomene o metodama integraljenja.

II G l a v a: Transformacije dodira: 1) Opšte napomene i način obrazovanja transformacija 2) Integracija običnih diferencijalnih jednačina pomoću transformacija dodira 3) Postupci pri integraciji običnih diferencijalnih jednačina.

III G l a v a: Riccatieva jednačina: 1) Uslovi Abela i Pejovića 2) Uslov Bugajeva i njegova generalizacija 3) Parametarski oblik opšteg integrala Riccatieve jednačine.

IV G l a v a: Neke poznatije diferencijalne jednačine rešene transformacijama dodira.

V g l a v a: Primena singularnih integrala jednačina funkcionalnog tipa: a) Algebarsko izračunavanje neodredjenih integrala. b) Algebarsko ~~rešavanje~~ klase ... diferencijalnih jednačina sa singularnim integralima

VI g l a v a: Primena transformacija dodira na jednačine II reda.

B) Drugi deo: P a r c i j a l n e j e d n a č i n e.

I G l a v a: Transformacije dodira: 1) Opšte napomene i način obrazovanja transformacija 2) Integracija parcijalnih jednačina transformacijama dodira.

II G l a v a: Primena transformacija dodira na problem integracije parcijalnih jednačina.

U V O D

U vrlo opširnoj i iscrpnoj literaturi o diferencijalnim jednačinama najmanje ima dela koja bi sistematski prikazala upotrebu i primenu transformacija dodira. Osim vrlo opširnog i instruktivnog odeljka u knjizi prof. Saltikova /1/ o parcijalnim jednačinama – u većini udžbenika se govori o transformacijama dodira uzgred u vrlo skučenom obimu, a o njihovoj efektivnoj primeni još i mnogo manje. Jedino u raspravama V.P. Ermakova /2/ i N.Saltikova /3/ posvećuje se pažnja njihovoj praktičnoj upotrebi za tačno odredjenu svrhu: da se pomoću njih izvrši integracija običnih i parcijalnih jednačina. Sem ovog, u novije vreme imamo raspravu D.Mitrinovića /4/, B.Rašajskog /5/ i nekoliko drugih članaka /6/ o primeni ovih transformacija. Istina je da su S.Lie i Engel /7/, Liebmann /8/ Mayer /9/ i još izvestan broj autora kao Darboux /10/ Gourçat /11/, Cartan /12/, Lainé /13/, Hocheisel /14/ i dr. posvetili transformacijama dodira odeljke nekih svojih dela ili izvesne članke kao G.Cerf /15/, ali se malo obraćalo pažnje na već pomenutu efektivnu njihovu sistematsku upotrebu.

U prošlosti, kroz drugu polovinu XVIII veka i ceo XIX vek, veliki broj klasika matematike bavio se je ovim transformacijama u pojedinim slučajevima – da pomenemo Euler, Lagrange, Legendre, Ampère, a tek je Jacobi /16/ dao teoriju ovih transformacija. Ipak i u klasičnoj literaturi nedostaje jedno iscrpnije delo o ovim transformacijama. Pored pomenutog dela S.Liea koje interpretira probleme transformacija dodira pretežno s gledišta geometrije, rasprave Jakobia, V.P.Ermakova i N.Saltikova tretirajući direktno njihovu primenu – obraćaju pažnju na ove transformacije s gledišta analize.

Cilj je ovoga rada, da da – s jedne strane, sistematski i sažet prikaz ovih transformacija s gledišta analize, i sa druge strane da na slučajevima pojedinih važnih običnih i parcijalnih jednačina pokaže efikasnost njihove upotrebe. Osim ovog, ovaj rad ima da prikaže primenu singularnih integrala nekih klasa diferencijalnih jednačina na probleme algebarskog iznalaženja neodredjenih integrala kao i algebarskog dobijanja integrala diferencijalnih jednačina. U ovom radu je najzad izvedena prvi put primena transformacija dodira na integraciju običnih diferencijalnih jednačina II reda.

Izlaganje teorije samih transformacija i njihove primene saobraženo je idejama V.P. Ermakova čemu je dao značajne dopune i produbljivanja prof. N.Saltikov u nizu svojih rasprava.

Ovaj rad je podeljen na dva odeljka od kojih prvi sadrži tretiranje običnih, a drugi - parcijalnih diferencijalnih jednačina.

U prvom odeljku posvećenom običnim diferencijalnim jednačinama izvršena je podela na šest glava:

I Glava sadrži rasmatranje istoriskih i drugih podataka o diferencijalnim jednačinama i metodama integraljenja;

II Glava izlaže ukratko teoriju transformacija dodira i način primene na integraciju običnih diferencijalnih jednačina;

III Glava sadrži rezultate primene transformacija dodira na Riccatievu jednačinu;

U IV glavi izložena je integracija nekoliko tipova važnijih diferencijalnih jednačina (Euler, Laguerre i Appell);

V Glava sadrži primenu singularnih integrala diferencijalnih jednačina na problem iznalaženja neodredjenih integrala kao i klase diferencijalnih jednačina singularnim integralima.

VI Glava sadrži primenu transformacija dodira na diferencijalne jednačine drugog reda - pa je dat postupak za iznalaženje njihovog opšteg integrala.

U drugom odeljku posvećenom parcijalnim jednačinama ima dve glave.

I Glava obuhvata izlaganje o tangencijalnim transformacijama analogo odeljku posvećenom običnim diferencijalnim jednačinama;

II Glava sadrži primenu izloženih metoda na parcijalne jednačine.

A) PRVI DEO

Obične diferencijalne jednačine

I Glava

Istoriski podaci i napomene o metodama integraljenja.

U Eulerovom delu "Institutiones calculi integralis" nalazi se niz znamenitih diferencijalnih jednačina koje su integraljene onda poznatim metodama i koje su ušle u savremene udžbenike; te su metode: razdvajanje promenljivih, primena multiplikatora a uz oba načina korišćene su još i transformacije. Jednačine koje su rešene jednim načinom često su rešavane i drugim. Ovo je svakako prva opsežnija sistematika diferencijalnih jednačina kao što je i za mnoge druge discipline matematike Eulerovo delo prvo izvorno delo.

U odeljku "De separatione variabilium" (liber prior, pars prima, sectio secunda) Euler navodi više primera homogenih jednačina, opštu linearnu jednačinu, kao i Bernouilli-evu. Osim ovoga navodi onaj klasični slučaj Riccatieve jednačine kad je moguća integracija pomoću kvadratura (§ 436 problema 57). Karakteristično je da za homogene jednačine daje Euler poznatu smenu $y=ux$ ne pominjući da se opšta jednačina oblika

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

može pomenutom smenom dovesti do razdvajanja promenljivih, dok za linearnu jednačinu navodi (§ 420 problema 52) opšti oblik

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

kao i za Bernouilli-evu jednačinu (§429 problema 53)

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{n+1}$$

pri čemu je za linearnu jednačinu upotrebio smenu $y=Xu$ a za Bernouillievu poznatu smenu $y^{-n}=z$;

kod smene $y=Xu$ za linearnu jednačinu X i u su funkcije od x za koje Euler uvodi uslov

$$dX+P.X\,dx=0$$

odakle dobija

$$X=e^{-\int P\,dx}$$

i na osnovu toga iz same linearne jednačine proizilazi

$$u=\int e^{\int P\,dx}.Q\,dx$$

pa onda najzad – zbog polazne smene dobijamo

$$y = Xu = e^{-\int P dx} \cdot \int e^{\int P dx} \cdot Q dx$$

pri čemu ne piše konstantu integracije. Isto ovo Euler čini i kod Bernulieve jednačine – izostavljajući pisanje konstante.
Ovaj način je ušao u udžbeničku literaturu kao klasična metoda. Medjutim, kad smo kod ovog pitanja – treba napomenuti da postoji jedna sasvim jednostavna metoda koja se sastoji u svodjenju linearne jednačine na jednačinu koja razdvaja promenljive. To se postiže prostom smenom $P(x) = \frac{u'}{u}$ otkud je $u = e^{\int P dx}$ a sama jednačina postaje

$$(uy)' + uQ(x) = 0$$

i razdvaja promenljive – odakle imamo

$$y = e^{-\int P dx}\left(K + \int e^{\int P dx} Q dx\right)$$

(N.Saltikov "Intermediaire des matchematiciens" t. 1894)
Karakteristične su tri jednačine iz ove grupe

$\S 431$ $\quad \alpha y + \beta x y' + x^m y^n (\gamma y + \delta x y') = 0$ problema 54
$\S 433$ $\quad yy' + y'(a + bx + nx^2) = y(c + nx)$ problema 55
$\S 434$ $\quad (y - x)\, y' = \frac{n(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ problema 56

od kojih se prve dve rešavaju respektivno smenama

$$x^\alpha y^\beta = t \qquad x^\gamma y^\delta = u \qquad u = \frac{y(c+nx)}{y + a + bx + nx^2}$$

a treća se rešava pomoću tri smene

$$y = \frac{x - u}{1 + xu} \qquad 1 + u^2 = t^2 \qquad t = \frac{1 + s^2}{2s}$$

Što se tiče Ricatieve jednačine u ovoj grupi imamo tri jednačine

$\S 410 \quad z' + \frac{a}{x^2} z^2 = 1 \qquad \S 436 \quad y' + y^2 = ax^m \qquad \S 440 \quad y' + y^2 = \frac{a}{x^2}$

pri čemu je poslednja samo specijalni slučaj prethodne za $m = -2$
U odeljku "De integratione aequationum differentialium ope~~xxx~~ multiplicatorum" nalazi se izvestan broj onih jednačina koje su već integraljene u prethodnom odeljku – kao npr. linearna i Bernoullieva kao i pomenuta jednačina iz paragrafa 433 pored ostalih. Isto tako i Ricatieva jednačina onoga tipa iz § 436 samo za $m = -4$. U ovom odeljku karakterističnim su slučajevi integracije jednačine

$$P(x)\,y + Q(x)\,yy' + R(x)\,y' = 0.$$

pomoću multiplikatora koja spada u okvir jednačina koje je Abel mnogo docnije proučavao, a od kojih je rešeno pet opštijih slučajeva u §493, §498, §502, §509, §512, §505 sa multiplikatorima respektivno

Specijalni slučajevi ove jednačine su §499, §526

§499 $\alpha\gamma xy + yy'(\alpha+\beta x+\gamma x^2) - \alpha y^2(\alpha-\gamma x^2) = 0$ §526 $u^2 v\frac{dv}{du} + u\left[v^2 - uv + \frac{1}{4}(n^2-1)\right] = a\frac{dv}{du}$

Što se tiče Ricatieve jednačine

$$y' + y^2 + X(x) = 0$$

navedena su dva multiplikatora

§528 $\frac{1}{P(x)y^2+Q(x)y+R(x)}$ §529 $\frac{P(x)}{y^2+2Q(x)y+R(x)}$

Treba navesti nekoliko slučajeva jednačine

$$yy' - y + R(x) = 0.$$

koja je bila mnogo docnije (1883) predmet teze profesora Kojalovića za koju Kurenski /17/ navodi da je poznat mali broj slučajeva integrabilnosti - nenavodeći ove Eulerove slučajeve. U Euler-ovom delu postoje ove jednačine navedenog tipa

§519 $ay + x^2 + 2yy'(x - a^2) = 0$

§523 $y\frac{dy}{du} + y\left(\frac{m-n}{m+n+2} - \frac{(m+n)a}{u^{m+n+2}}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{a^2}{u^{2m-2n+2}} + \frac{(m-n)a}{(m+n+2)u^{m-n}} - \frac{(m+1)(n+1)u^2}{(m+n+2)^2}\right) = 0$

§524 $y\frac{dy}{du} - \frac{2nay}{2n+2} + \frac{a^2}{u^{4n+3}} - \frac{1}{4}u = 0$ §525 $y\frac{dy}{du} - ny + \frac{a^2}{u^3} + \frac{1}{4}(n^2-1)u - \frac{na}{u} = 0$

§527 $y\frac{dy}{du} - y\left(\frac{\mu}{\lambda} - 2(\lambda+1)au^{2\lambda}\right) + u\left(\frac{\mu^2-\lambda^2}{4\lambda^2} - \frac{\mu}{\lambda}au^{2\lambda} + a^2u^{4\lambda}\right) = 0.$

Treći odeljak "De resolutione aequationum differentialium magis comlicatorum" sadrži niz jednačina o kojima i naziv kaže da po mišljenju samog Euler-a nisu bile jednostavne za rešavanje. Te jednačine su

681. $y - x\sqrt{1+y'^2} = 0$,
682. $y - xy' = nx\sqrt{1+y'^2}$
684. $xy'^3 + y = y'\sqrt{xy(1+y'^2)}$
685. $\sqrt{1+y'^2} = \frac{xy'+y}{\sqrt{2xy}}$
699. $y - xy' = a\sqrt{1+y'^2}$
701. $y - xy' = a(1+y'^2)$
702. $y - xy' = a\sqrt[3]{1+y'^2}$
703. $y - nxy' = a\sqrt{1+y'^2}$
704. $Ay'^m = Bx^\alpha + Cy^\beta$

Za jednačinu 685 Steklov /18/ navodi da je to jednačina Moigno-a, medjutim, kao što se vidi ona se sreće još kod Eulera. Jednačine 699, 701, 702 su tipa koji je Klero otkrio i koje sad nose njegovo ime. Poslednja jednačina u ovom odeljku u §704 u isto vreme je jedna od najinteresantnijih u Euler-ovom delu. Karakteristično je da mnoge kanonske forme diferencijalnih jednačina su specijalan slučaj ove jednačine za $m=\beta$ - tako imamo počevši od linearne jednačine

$y' + y = mx^\alpha$ $y'^2 + y^2 = mx^\alpha$ $y'^3 + y^3 = mx^\alpha$ ....

Jedan deo iz Euler-ovog dela - kao odeljak o homogenim jednačinama, zatim o linearnoj i Bernoulli-evoj jednačini, o integrabilnim slučajevima specijalne Ricatieve jednačine, ušao je u materiju svih današnjih udžbenika o diferencijalnim jednačinama. Medjutim, znatan broj jednačina i danas pretstavlja materijal za ispitivanje kao što je slučaj sa jednačinom iz §522, zatim naročito pomenuta jednačina iz §704, koja za $\gamma=\beta=2$, $A=-C=1$

$$y'^2+y^2=Bx^4$$

pretstavlja specijalan slučaj jednačine

$$y'^2+y^2=f(x)$$

kojom se je bavio znatan broj matematičara i to Appell, Elliot, M. Petrović, Heymann, Rivereau, Turière, S. Marković /19/ i naročito iz beogradske škole matematičara prof. Petrović, prof. Pejović, prof. Mitrinović, pri čemu su dali više važnih priloga problemu integrabilnosti ove jednačine. Sad ćemo preći na jedan savremeniji pregled jednačina.

Pored navedenih jednačina iz Euler-ovog dela pozabavićemo se pregledom jednačina izloženih u knjizi prof. Kamke-a /20/. Ovo je prva veća zbirka jednačina u novije vreme iako nije sistematski uredjena. Svakako se postavlja pitanje ustanovljenja jednog sistematskog pregleda s iscrpnom bibliografijom i daleko potpunijim registrom jednačina – ali to je posebno i važno pitanje kojim bi se trebalo pozabaviti. U vezi sa ovim problemom navešćemo ukratko sistematizaciju jednačina u Kamke-ovom registru jednačina. Tih jednačina ima 576. Kao što smo napomenuli, red izlaganja nije ni sistematski sa gledišta metoda, niti hronološki i bez dovoljno bibliografskih podataka – ali i pored svega toga kao prvi u svojoj vrsti u novije vreme ovaj registar je ipak koristan za proučavanje metoda i rezultata u ovoj oblasti matematike. Dok u Euler-ovom delu ima svega tri grupe jednačina, u Kamke-ovom pregledu zastupljeno je 12 grupa i to:

1) razdvajanje promenljivih,

2) homogene diferencijalne jednačine, 3) linearne diferencijalne jednačine, 4) Bernouilli-eva jednačina, 5) Ricati-eva jednačina, 6) Clairaut-ova jednačina, 7) Lagrange-ova jednačina, 8) Abel-ova jednačina (prve i druge vrste) 9) jednačine rešene pomoću smene, 10) jednačine koje se rešavaju diferenciranjem, 11) egzaktne diferencijalne jednačine – tj. jednačine koje pretstavljaju totalni diferen-

cijal, 12) jednačine koje se integrale pomoću Legendre-ove transformacije dodira (njih ovage ima pet).

Svakako da jednačine iz prve četiri grupe ne pretstavljaju nikakav naročiti interes – to bi uglavnom moglo da važi i za Clairaut-ovu i Lagrange-ovu (odnosno D.Alembertovu jednačinu, kako je Kamke naziva). Napominjemo da je kod Kamkea integraljeno Legendre-ovim transformacijama svega 5 jednačina i da je isključivo upotrebljena samo ta transformacija. Osim ovog, ako bi se ostalo i pri njoj samo u samom Kamke-ovom registru postoji veliki broj jednačina koji bi se ovom transformacijom mogao integraliti. Navedimo još i to da se ne može videti nikakav razlog zašto su navedeni primeri kao što su

1.407 $xy'^2 = y$ 1.462 $yy'^2 = 1$ 1.463 $y'y^2 = e^{2x}$ 1.17 $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$

Medjutim, nema navedenih radova prof. Pejovića o Ricatie-voj jednačini kao uopšte ni pomena o teoriji invarijanata kojoj su dali znatne priloge Laguerre, Appell, Halphen /21/, a baveći se ovom teorijom i prof. Pejović je dao niz priloga /22/.

II G l a v a

T r a n s f o r m a c i j e d o d i r a

1) Opšte napomene i način obrazovanja transformacija

Transformacije dodira prvi su proučavali, kao što smo napomenuli, Euler, Lagrange, Legendre, Ampere, zatim Jacobi, pa najzad S.Lie, koji je ovoj vrsti transformacija dao i naziv koji se danas upotrebljava. Sem ovoga, kao što je napomenuto, na prednosti njihove primene ukazali su V.P. Ermakov i prof. N.Saltikov, koji je integralio nebrojene slučajeve i parcijalnih i običnih jednačina ovom metodom i dao mnoga teoriska obrazloženja.

Problem tretiran uopšte sastoji se u ovome: ako postoje tri promenljive x, y, y' koje zadovoljavaju relaciju

$$dy - y' . dx = 0 \qquad 1.)$$

treba ispitati kakve će veze postojati izmedju ovih promenljivih i nekih drugih x_1, y_1, y'_1 koje zadovoljavaju oblikom isti odnos

$$dy_1 - y'_1 dx_1 = 0 \qquad 2.)$$

Neka je veza izmedju x, y, y' i x_1, y_1, y'_1 data ovim jednačinama:

$$x_1 = X(x, y, y') \qquad y_1 = Y(x, y, y') \qquad y'_1 = P(x, y, y') \qquad 3.)$$

Jasno je da funkcije X, Y, P ne mogu biti kakve bilo već da moraju da zadovoljavaju izvesne potrebne i dovoljne uslove. Ove uslove izvešćemo na ovaj način.

Diferenciranjem prve i druge jednačine sistema (3) dobijamo

$$dx_1 = X_x dx + X_y dy + X_{y'} dy' \qquad dy_1 = Y_x dx + Y_y dy + Y_{y'} dy'$$

pri čemu X i Y sa odgivarajućim indeksima pretstavljaju parcijalne izvode po onoj primenljivoj koja je u indeksu označena.

Stavljajući ove izraze na mesto dx_1 i dy_1 u jednačinu (2) dobija se

$$Y_x dx + Y_y dy + Y_{y'} dy' - P(X_x dx + X_y dy + X_{y'} dy') = 0.$$

a odavde je skupljajući članove s istim diferencijalom

$$(Y_x - PX_x) dx + (Y_y - PX_y) dy + (Y_{y'} - PX_{y'}) dy' \qquad 4.)$$

Grupišimo sad iz jednačine (4) članove sa dx i dy' na ovaj način

$$[Y_x + Y_y . y' - P(X_x + X_y . y')] dx + [Y_{y'} - PX_{y'}] dy' = 0 \qquad 5.)$$

Pošto izmedju količina x, y, y' i x_1, y_1, y'_1 ne mogu postojati nikakvi drugi odnosi osim onih iz sistema (3) – to se odnos (5) identički svodi na nulu, pri čemu pošto dx i dy (kao diferencijali promenljivih) nisu nule - moraju postojati ovi odnosi

$$\mathcal{Y}_x + \mathcal{Y}_y y' - P(\mathcal{X}_x + \mathcal{X}_y y') = 0 \qquad \mathcal{Y}_{y'} - P \mathcal{X}_{y'} = 0. \tag{6.}$$

Iz druge jednačine ovog sistema dobija se

$$P = \frac{\mathcal{Y}_{y'}}{\mathcal{X}_{y'}} \tag{7.}$$

ili kako je po sistemu (3) $P = y_1'$ to je onda

$$y_1' = \frac{\mathcal{Y}_{y'}}{\mathcal{X}_{y'}} = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y'} \Big/ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y'} \tag{8.}$$

Zbog formule (8) prva jednačina iz sistema (6) dobija oblik

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y'}\left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} y'\right) - \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y'}\left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y} y'\right) = 0. \tag{9.}$$

Pošto su jednačine (8) i (9) dobijene iz sistema (6), iskoristivši obe jadnačine sistema - to smo onda dobili uslove potrebne i dovoljne. Dakle, da bi skup jednačina (3) odgovarao postavljenom problemu, potrebno je da obe funkcije $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ zadovoljavaju uslov (9) a treća P da se dobija iz obrasca (8). U tom slučaju se kaže da funkcije iz sistema (3) čine transformacije dodira. U našem izlaganju nismo ništa pretpostavljali o promenljivim x, y, y' i x_1, y_1, y_1' - ali celo izlaganje ima poseban interes kad se pretpostavi da je y funkcija od x i da y' pretstavlja stvarno izvod od y po x što će mo dalje uvek u našim izlaganjima pretpostaviti. Isto tako biće shvaćeno y_1' kao izvod funkcije y_1 po x_1. Uslov (9) pretstavlja dobro poznati uslov involucije iz teorije parcijalnih jednačina.

Ustvari uslov (9) pretstavlja parcijalnu jednačinu sa dve funkcije $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ a tri promenljive x, y, y'.

Ovaj način inetrpretacije je prema izlaganjima prof. N. Saltikova. Ostavljajući nastranu geometriske interpretacije zadržaćemo se samo na tumačenjima s gledišta analize.

Za obrazovanje transformacija dodira mogu se koristiti ovi načini.

a) Dve prve jednačine iz sistema (3) posle eliminacije y' daju izvesnu funkciju od x, y, x_1, y_1 - dakle

$$\Phi(x, y, x_1, y_1) = 0. \tag{10.}$$

Prilikom obrazovanja transformacija može se uzeti proizvoljna funkcija od x, y, x_1, y_1 kao data funkcija Φ, da bi dobili x_1, y_1, y_1' možemo ih smatrati kao nepoznate jednoga sistema od tri jednačine - u algebarskom smislu. Tako možemo uzeti sistem

$$\Phi(x, y, x_1, y_1) = 0. \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} y_1' = 0 \tag{11}$$

Formula (10) zove se osnovna formula transformacija dodira. Navedeni način citiran je kod više pomenutih autora. Navedimo kao primer

$$\Phi \equiv x x_1 + y + y_1 = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' \equiv x_1 + y_1 = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} y_1' \equiv x + y_1' = 0$$

odakle dobijamo poznate Legendr-ove transformacije

$$x_1 = -y' \qquad y_1 = xy' - y \qquad y_1' = -x$$

b) Drugi postupak sastoji se u tome što se proizvoljno uzeta funkcija $\chi(x,y,y') = x_1$ po Ermakovu, smatra kao diferencijalna jednačina u kojoj igra ulogu parametra a integral takve jednačine sa integracionom konstantom kao novom promenljivom y_1, pri čemu je x_1 smenjeno sa $\chi(x,y,y')$ ~~daje~~ daje novu funkciju $\psi[x,y,\chi(x,y,y')] = y_1$

Tako napr. za

$$x - yy' = x_1$$

imamo posle integracije (stavljajući $x_1 = C_1$)

$$\frac{x^2}{2} - C_1 x = \frac{y^2}{2} + C_2$$

što pretstavlja ustvari osnovnu formulu transformacije gde C_1 i C_2 igraju ulogu x_1 i y_1. Zamenjujući C_1 u polsedajoj formuli dobijamo

$$xyy' - \frac{x^2+y^2}{2} = y_1$$

tako da čitava transformacija izgleda ovako

$$x - yy' = x_1 \qquad xyy' - \frac{x^2+y^2}{2} = y_1 \qquad y_1' = -x$$

pri čemu smo poslednju jednačinu dobili na osnovu obrasca (8).

Na ovaj način mogu se izvesti i opšte linearne transformacije, mada ih je prof. Saltikov izveo koristeći uslov involucije ~~...~~. ~~...~~ Ove transformacije oblika

$$x_1 = ay' + by + c \qquad y_1 = dy' + gy + h \qquad y_1' = \frac{d}{a} \qquad 12.)$$

pri čemu su d, g, h vezani sa a, b, c ovim relacijama

$$d = -a\int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}\,dx \qquad g = e^{\int \frac{b}{a}dx} - b\int \frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}\,dx \qquad h = \int \frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}\cdot c}{a}\,dx - c\int \frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}\,dx \qquad 13.)$$

Pomenuti način obrazovanja transformacija proizilazi na osnovu činjenice da je osnovna formula transformacija jedina veza između x, y, x_1, y_1 koja može postojati - jer ako bi postojala još i neka druga, onda bi bilo moguće izraziti x_1 i y_1 pomoću x i y a to onda ne bi bile transformacije dodira jer ne bi sadržali izvode. Dakle, kako je transformacija dodira jedina veza koja se može dobiti - to integracijom ne može ništa drugo da se dobije no osnovna formula transformacija gde ulogu konstanti igraju nove promenljive x_1 i y_1.

Sem ovog ovo tumačenje zasnovano je na osobini integrala u involuciji parcijalnih jednačina. Inače ovo tumačenje je od fundamentalnog značaja za praktično izvodjenje integracije, što je izmaklo mnogim autorima a što je Ermakov uočio. Može se slobodno reći da zbog nemanja ove interpretacije sama primena transformacija nije prodrla pa ni do danas u literaturi nema pomena o njoj osim u pomenutim raspravama prof. N. Saltikova.

Najzad navedimo da već i sam uslov involucije uzimajući $\eta_1 = \overline{f}(x, y, y_1)$ kao dato - daje mogućnost da se iz njega kao parcijalne jednačine odredi y_1.

Pored ovoga, na bazi geometriskih interpretacija postoji jedan način dobijanja transformacija dodira pomoću anvelopa, što je navedeno u pomenutom radu prof. D. Mitrinovića. /4/

2) Integracija običnih diferencijalnih jednačina pomoću transformacija dodira

Podjimo od diferencijalne jednačine oblika

$$A(x, y, y') = 0 \tag{14.)}$$

koja se podesnim izborom transformacija dodira (3) može svesti na jednačinu u novim promenljivim x_1, y_1, y_1'

$$\xi(x_1, y_1, y_1') = 0 \tag{15.)}$$

koju ~~daxmax~~ ćemo kratkoće radi zvati rezolentom. Ovo je uvek moguće kad ~~ma~~ se stare promenljive x, y, y' izraze pomoću novih x_1, y_1, y_1' iz sistema (3). Naravno da ovo pretpostavlja da se sistem (3) može rešiti po novim promenljivim.

Neka je integral jednačine (15) dat funkcijom

$$\tau(x_1, y_1, C) = 0. \tag{16.)}$$

gde je C integraciona konstanta

Ako se ovaj integral (16) izrazi pomoću x_1, y_1 iz sistema (3) u starim promenljivim x, y, y' dobija se nova funkcija

$$\mu(x, y, y', C) = 0 \tag{17.)}$$

Iz dveju jednačina (14) i (17) moguće je eliminisati y' i dobija se

$$\mathcal{J}(x, y, C) = 0 \tag{18.)}$$

kao integral polazne jednačije (14).

Pored ovog načina moguće je koristiti drugi način: uzeti osnovnu formulu trasformacija dodira (10), zatim koristiti integral (16), a kao treću jednačinu uzeti totalni diferencijal funkcije Φ po promenljivim x_1 i y_1 pri čemu y_1' možemo uzeti ili iz jednačine (15) ako se lako može rešiti po y_1' ili iz integrala (16) - dakle, svakako

Imajući tri jednačine

$$\Phi(x,y,x_1,y_1)=0 \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\cdot\theta(x_1 y_1)=0 \qquad T(x_1 y_1 C)=0 \qquad 19.)$$

moguće je eliminisati količine $x_1 y_1$ pa će se dobiti integral (18).
Može se desiti da se prilikom transformisanja jednačine (14) dobija jednačina u novim promenljivim $x_1 y_1$ koja ne sadrži y_1' dakle da bude rezolventa oblika

$$y_1=f(x_1) \qquad 20.)$$

Koji ćemo zvati funkcionalni oblik ili funkcionalna rezolventa.
Za ovaj slučaj može se dobiti poseban postupak integracije polazne jednačine. Diferenciranjem jednačine (20), a koristeći obrazac (2) dobija se

$$\left[f'(x_1)-y_1'\right]dx_1=0$$

Ovo može biti jednako nuli u ova dva slučaja

$$a)\ f'(x_1)-y_1'=0 \qquad b)\ dx_1=0$$

Prvi slučaj ne daje ništa novo - dok drugi daje $x_1=C$ što znači $X(x,y,y')=C$ pa iz poslednje jednačine i date jednačine (14) treba eliminisati znači, iz jednačine rešiti y' i zameniti ga u polaznu jednačinu.
Kao najprostiji primer uzmimo slučaj Clairaut-ove jednačine

$$y-xy'=f(y')$$

koja se Legendrovim transformacijama svodi na jednačinu

$$y_1=f(x_1)$$

ako se stavi $x_1=C$ tj. $C=y'$ imamo odmah poznati integral

$$y-Cx=f(C)$$

Ovakve slučajeve poznavao je još Lagrange. U našem radu mi ćemo se posebno baviti primenom ovih jednačina i pokazaćemo njinova svojstva do sad nezapažena i neiskorišćena.
U polsednje vreme ovom vrstom jednačina na području parcijalnih jednačina bavio se je B.Rašajski u već citiranom radu koji je pokazao neosnovanost ~~xxx~~ tvrdjenja Hilbert-a i Courant-a da ovakve jednačine nemaju smisla. Osim ovog, autor pomenutih radova dao je potrebne i dovoljne uslove koji se odnose na dva problema:
1) naći opšti oblik parcijalne jednačine I reda koja se datim osnovnim obrascem transformacija može dosvesti na funkcionalni oblik.
2) Kad je data diferencijalna jednačina-pronaći onu vrstu transformaxija dodira koji je svode na funkcionalni tip.

3) ~~Postupci pri~~ Metode integraciji e običnih diferencijalnih jednačina

a) ~~Postupak~~ Metoda proširenih transformacija

Neka je data diferencijalna jednačina

$$g(x,y,y')=0 \qquad 21)$$

koja pretstavlja partikularni slučaj izvesnog tipa diferencijalne jednačine.

Pretpostavimo da se nekom transformacijom dodira

$$x_1=u(x,y,y') \qquad y_1=v(x,y,y') \qquad y_1'=w(x_1,y_1,y_1') \qquad 22)$$

gornja jednačina (21) može svesti na integrabilan oblik

$$\eta(x_1,y_1,y_1')=0 \qquad 23)$$

Označimo integral jednačine (23)

$$\tau(x_1,y_1,C)=0 \qquad 24)$$

Integral polazne jednačine (21) biće - kao što smo ranije videli - odredjen sistemom

$$\Phi(x,y,x_1,y_1)=0 \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\cdot y_1'=0 \qquad \tau(x_1,y_1,C)=0 \qquad 25)$$

pri čemu je Φ osnovna formula transformacija dodira a y_1' možemo uzeti iz druge jednačine ovog sistema (22)

Ostavimo li istu rezolventu (23) a uzmemo li nove transformacije dodira

$$x_1=U(x,y,y') \qquad y_1=V(x,y,y') \qquad y_1'=W(x,y,y') \qquad 26)$$

koje sadrže transformacije (22) kao specijalan slučaj - dobićemo jednačinu

$$G(x,y,y')=0 \qquad 27)$$

koja sadrži jednačinu (21) kao specijalan slučaj. Svakako će se pri ovome desiti da u jednačini (27) se pojave izvesni uslovi za koeficijente koji pretstavljaju neke funkcije nezavisno promenljive.

Da bi smo ovo bolje ilustrovali uzmimo jednu jednačinu koja je navedena kod Kamkea.

U pitanju je jednačina

$$y\ln y'+y'-y\ln y-xy=0 \qquad 1.565$$

ako ovu jednačinu napišemo u obliku

$$\ln\frac{y'}{y}+\frac{y'}{y}-x=0$$

i uzmemo izraz pod znakom logaritma za x_1 onda dobijamo, po načinu Ermakova, transformacije oblika

$$x_1 = \frac{y'}{y} \qquad y_1 = \frac{xy'}{y} - \ln y \qquad y_1' = x,$$

i zbog toga se gornja jednačina pretvara u prostu jednačinu koja razdvaja promenljive

$$\ln x_1 + x_1 = y_1'$$

čiji je integral

$$y_1 = x_1 \ln x_1 - x_1 + \frac{x_1^2}{2} + C$$

gde je C konstanta integracije - i onda imamo sistem jednačina

$$y_1 = xx_1 - \ln y \qquad y_1 = x_1 \ln x_1 - x_1 + \frac{x_1^2}{2} + C \qquad x = \ln x_1 + x_1$$

odakle se dobija integral u parametarskom obliku

$$\frac{x_1^2}{2} + x_1 + C = \ln y \qquad x = \ln x_1 + x_1$$

odakle se može dobiti i implicitni oblik integrala

$$x = \ln\left[-1 \pm \sqrt{1-2C+2\ln y}\right] + \left[-1 \pm \sqrt{1-2C+2\ln y}\right]$$

?

a jednačinu 1.565 Kamke preporučuje da se napiše u obliku

$x = \ln\frac{t}{y} + \frac{t}{y}$ i da se poslednja jednačina diferencira tako da se dobije nova jednačina $\frac{dy}{dt} = I_1(y,t)$ Obe jednačine

$$x = \ln\frac{t}{y} + \frac{t}{y} \qquad \ln y - \frac{t^2}{2y^2} - \frac{t}{y} = C$$

pri čemu je poslednja jednačina integral jednačine $\frac{dy}{dt} = I_1(y,t)$ daju integral jednačine 1.565.

izraz $\frac{t}{y}$ što je ustvari $\frac{t}{y} = x$

Dakle, ovo diferenciranje istovetno je sa primenom transformacija dodira - mada je daleko lakše uvideti da li je moguća primena transformacija dodira - dok se mogućnost efikasnosti primene diferenciranja ne može uvideti tako lako - još manje kod ovako složenog načina kakav je naveden u knjizi Kamke-a.

Vratimo se našem problemu. Imali smo transformacije

$$x_1 = \frac{y'}{y} \qquad y_1 = \frac{xy'}{y} - \ln y \qquad y_1' = x$$

uzimajući generalnije transformacije

$$x_1 = \frac{y'}{\varphi'(x)\,y} \qquad y_1 = \frac{y'}{\varphi'(x)\,y}\cdot\varphi - \ln y \qquad y_1' = \varphi(x)$$

pri čemu je $\varphi(x)$ kakva bilo funkcija od x i zadržavajući istu rezolventu

$$\ln x_1 + x_1 = y_1'$$

dobijamo jednačinu $\ln\frac{y'}{\varphi' y} + \frac{y'}{\varphi' y} = \varphi$

Lako je uzeti još opštiju rezolventu i imaćemo

$$\alpha x_1^m + (\ln x_1 + x_1)^n = y_1'$$

što pretstavlja opšti oblik jednačini od malopredjašnje.

Posledaju jednačinu moguće je napisati u obliku

$$\alpha y'^{m} + P(x)\left[\ln y' - \ln[Q(x)y] + \frac{y'}{Q(x)y}\right]^{m} = R(x) \qquad 1565a$$

pri čemu je

$$P(x) = [\varphi'(x)]^{m} \qquad Q(x) = \varphi'(x) \qquad R = \varphi(x)\varphi'(x)$$

odakle se mogu napisati uslovi za koeficijente

$$R = Q(x)\int Q(x)\,dx \qquad P = [Q(x)]^{m}$$

koji su kao što se vidi u ovom slučaju jednostavni. Dakle gornja jednačina 1565 a) je opštija od 1565, koja se dobija za $\alpha=0, m=1, P=Q=1, R=x$ iz 1565 a). Ovaj način - iako u suštini jednostavan, treba da bude sistematska procedura pri nalaženju integrabilnih slučajeva: kad se pronadje kakav bilo partikularni slučaj može se odmah potražiti klasa jednačine kojoj on pripada. Ta klasa će biti uvek karakterisana nekim uslovom medju funkcijama koeficijenata. Ovo je moguće koristiti i za punktualne transformacije - medjutim, većina autora ovo ne koristi iako to treba da pretstavlja sistematsku proceduru prilikom svakog istraživanja integrabilnosti pojedinih jednačina. Naravno da ako se jedan partikularan slučaj reši najpre punktualnim transformacijama onda se generalnijim transformacijama dobija jedna klasa jednačina - dok se korišćenjem transformacija dodira dobija sasvim druga klasa, a jednoj i drugoj klasi pripada pomenuti partikularni slučaj. Ovo je naročito od interesa za praktične probleme integracije.

b) ~~Postupak~~ Metoda proširenih rezolventi

Pretnodno izlaganje sadrži jedan postupak kako da se postigne to da dati tip jednačine uopštimo tako da koeficijenti nove jednačine sadrže koeficijente stare jednačine kao partikularne slučajeve. Medjutim, moguće je uzimajući iste transformacije

$$x_1 = u(x,y,y') \qquad y_1 = v(x,y,y') \qquad y_1' = w(x,y,y') \qquad 22.)$$

ali izmenjenu rezolventu

$$\mathcal{H}(x,y,y') = 0 \qquad 28)$$

koja sadrži raniju rezolventu (23), postići to da se dobije jednačina

$$\mathcal{H}(x,y,y') = 0 \qquad 29)$$

koja sadrži raniju jednačinu

$$g(x,y,y') = 0 \qquad 21.$$

Tako zadržavajući ranije transformacije

$$x_1 = \frac{y'}{y} \qquad y_1 = \frac{xy'}{y} - \ln y \qquad y_1' = x$$

i tražeći rezolvente opštije od

$$\ln x_1 + x_1 = y_1'$$

nailazimo odmah na oblike

$$y_1^m(\ln x_1 + x_1) = y_1' \qquad (\ln x_1 + x_1)^m + \alpha y_1 = y_1' \qquad y_1' + \alpha y_1 + \beta y_1^m(\ln x_1 + x_1) = 0$$

kojima respektivno odgovaraju jednačine

$$\left(\frac{xy'}{y} - \ln y\right)^m \cdot \left(\ln\frac{y'}{y} + \frac{y'}{y}\right) = x \qquad \left(\ln\frac{y'}{y} + \frac{y'}{y}\right)^m + \alpha\left(\frac{xy'}{y} - \ln y\right) = x$$

$$x + \alpha\left(\frac{xy'}{y} - \ln y\right) + \beta\left(\frac{xy'}{y} - \ln y\right)^m \cdot \left(\ln\frac{y'}{y} + \frac{y'}{y}\right) = 0$$

Sve ove jednačine sadrže u sebi jednačinu 1565 kao specijalan slučaj. Ako bi se uzele generalnije transformacije dobili bi se još opštiji slučajevi.

Kao što se iz sveg izloženog vidi, kad je dat jedan partikularni slučaj - moguće je načiniti čitave klase jednačina i to: 1) zadržavajući istu rezolventu a uzimajući opštije transformacije kojima je izvršena integracija zadatog slučaja; 2) zadržavajući iste transformacije a tražeći razne rezolvente koje obuhvataju dobijenu rezolventu u zadatom slučaju; ili najzad najopštije 3) uzeti razne opštije rezolvente i opštije transformacije.

Iako svi ovi postupci pretstavljaju sasvim jednostavne metode, ipak većina autora propušta da se njima služi - čak i kod punktualnih transformacija, a da i ne govorimo o transformacijama dodira.

III Glava

Riccati-eva jednačina

U opširnoj bibliografiji Riccatieve jednačine nalazi se veliki broj metoda - osim metoda transformacija dodira. Inače su primenjene za dobijanje slučajeva njene integracije punktualne transformacije i invarijante, zatim odredjeni integrali, partikularni integrali, približne metode, beskrajni redovi a van oblasti realne promenljive i analitička teorija diferencijalnih jednačina.

1) Uslovi Abel-a i Pejovića

U ovoj glavi ćemo reprodukovati u glavnim crtama primenu transformacija dodira na Riccati-evu jednačinu, što je objavljeno u našem radu /6/.

Polazeći od transformacija prof. N.Saltikova (12) iz prethodne glave, gde su koeficijenti dati formulama (13) takodje iz prethodne glave, a uzimajući specijalan slučaj za $c=0$, $h=0$ imamo transformacije

$$x_1 = ay' + by \qquad y_1 = dy' + gy \qquad y'_1 = \frac{d}{a}$$
$$d = -a\int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}dx \qquad g = e^{\int\frac{b}{a}dx} - b\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}dx \tag{1.}$$

Prema obrazloženjima iz druge glave, odeljak 1) koristićemo u ovoj glavi metodu koja je tamo izložena.

Zato koristimo rezolventu oblika

$$(x_1y'_1 - y_1)^2 = y_1 + m \qquad m = const. \tag{2.}$$

koja razdvaja promenljive. Koristeći transformacije (1) i rezolventu (2), dobijamo Riccati-evu jednačinu

$$y' + Py^2 + Qy + R = 0. \tag{3.}$$

gde je

$$P = e^{2\int\frac{b}{a}dx} \Big/ a\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}dx\,, \quad Q = -e^{\int\frac{b}{a}dx}\Big/ a\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}dx + \frac{b}{a}\,, \quad R = -m\Big/ a\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}dx \tag{4.}$$

Prva i treća jednačina iz sistema (4) daju

$$\sqrt{-\frac{mP}{R}} = e^{\int\frac{b}{a}dx} \tag{5.}$$

Dve poslednje jednačine iz sistema (4) daju

$$Q = \frac{R}{m}e^{\int\frac{b}{a}dx} + \frac{b}{a} \tag{6.}$$

Uvodeći oznaku

$$u=\sqrt{-\frac{mP}{R}} \qquad 7.)$$

dobijaju se iz (5) ova dva odnosa,

$$e^{\int\frac{b}{a}dx}=u \qquad \frac{b}{a}=\frac{u'}{u} \qquad 8.)$$

Zbog ovih poslednjih odnosa, obrazac (6) može da se napiše

$$\left(\frac{1}{u}\right)'+\frac{1}{u}\cdot Q-\frac{R}{m}=0.$$

Integracija ove poslednje jednačine daje

$$\frac{1}{u}=e^{-\int Q\,dx}\left(C+\frac{1}{m}\int Re^{\int Q\,dx}dx\right)^2 \qquad 9.)$$

pri čemu je konstanta integracije - ustvari proizvoljni parametar. Koristeći formulu (7), dobijamo iz formule (9) uslov

$$R=-mPe^{-2\int Q\,dx}\left(C+\frac{1}{m}\int Re^{\int Q\,dx}dx\right)^2 \qquad 10.)$$

Dakle, Riccati-eva jednačina (3) integrabilna je pri uslovu (10). Ovaj uslov je opštiji od uslova Abel-a /23/ - jer ako se stavi

$$C=\sqrt{\frac{-M}{m}}$$

dobija se iz (10)

$$R=-Pe^{-2\int Q\,dx}\left(\sqrt{M}+\frac{1}{\sqrt{m}}\int Re^{\int Q\,dx}dx\right)^2$$

a odavde kad m teži beskonačnosti dobija se uslov Abel-a formalno.
Medjutim, interesantno je da se uslov (10) može dobiti i u jednom drugom obliku. Iz prvih dveju jednačina sistema (4) a pomoću odnosa (8), dobija se

$$u'=Qu+P$$

Odavde proizilazi neposredno

$$u=e^{\int Q\,dx}\left(C_1+\int Pe^{-\int Q\,dx}dx\right)$$

Stavljajući vrednost za u u formulu (7) imamo odmah

$$R=-\frac{mPe^{-2\int Q\,dx}}{\left(C_1+\int Pe^{-\int Q\,dx}dx\right)^2} \qquad 11.)$$

što pretstavlja uslov koji je našao prof. Pejović /22/ pomoću teorije invarijanata. Ovaj slučaj karakterističan je zbog ovih mogućnosti modifikacije koja se ogleda u uslovima (10) i (11). Ustvari, uslovi (10) i (11) su dva vida jednog istog odnosa. Ovakvi slučajevi su u literaturi retki i već zbog toga ovaj rezultat pretstavlja jedan prilog primeni transformacija dodira - jer se drugim načinom srodnost pomenutih uslova nije do sad dokazala.

2) Uslov Bugaeva i njegova generalizacija

Medjutim, moguće je dobiti i izvestan drugi uslov uz upotrebu nešto izmenjene resolvente.
Uzmimo resolventu tipa

$$(x_1y_1'-y_1)^2=x_1+m \qquad 12.)$$

i transformacije koje smo obrazovali po načinu Ermakova oblika

$$x_1=\frac{y'+\varphi'}{\psi'} \qquad y_1=y+\varphi-\frac{y'+\varphi'}{\psi'}\psi \qquad y_1'=-\psi \tag{13}$$

Ove transformacije su specijalan slučaj transformacija prof. N. Saltikova. Upotrebljavajući rezolventu (12) i formule (13), dobijamo takodje Riccati-evu jednačinu, pri čemu je

$$P=-\psi' \qquad Q=-2\psi'\varphi \qquad R=\varphi'+\psi'(m-\varphi^2) \tag{14}$$

Eliminišući ψ i φ pomoću prve dve jednačine poslednjeg sistema, dobija se iz treće jednačine istog sistema uslov

$$Q'P-QP'=-2\left[\frac{Q^2P}{4}-RP^2-mP^3\right] \tag{15}$$

Dakle, Riccati-eva jednačina

$$y'+Py^2+Qy+R=0 \tag{3}$$

integrabilna je pri uslovu (15). Ovaj uslov našao je Bugaev /24/.
Koristimo onaj postupak izložen u odeljku (3) prethodne glave: zadržimo istu rezolventu (12), samo upotrebimo generalnije transformacije, a to su transformacije prof. N. Saltikova u obliku

$$x_1=ay'+by+c \qquad y_1=dy'+gy+h \qquad y_1'=\frac{d}{a}$$

$$d=-a\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}dx \qquad g=e^{\int\frac{b}{a}dx}-b\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}dx \qquad h=\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}\cdot c}{a}dx-c\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}}{a}dx$$

Na ovaj način dobićemo, koristeći rezolventu (12), opet Riccati-evu jednačinu

$$y'+Py^2+Qy+R=0 \tag{3}$$

pri čemu je

$$P=-\frac{1}{a}\left(\frac{db}{a}-g\right)^2, \quad Q=\frac{1}{a}\left[b-2\left(\frac{db}{a}-g\right)\left(\frac{dc}{a}-h\right)\right], \quad R=\frac{1}{a}\left[c+m-\left(\frac{dc}{a}-h\right)^2\right] \tag{16}$$

Izračunavajući izraze $\frac{db}{a}-g$ i $\frac{dc}{a}-h$ pomoću formula za d, g, h iz (1) imamo

$$P=-\frac{1}{a}e^{2\int\frac{b}{a}dx}, \quad Q=\frac{1}{a}\left[b-2e^{\int\frac{b}{a}dx}\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}\cdot c}{a}dx\right], \quad R=\frac{1}{a}\left[c+m-\left(\int\frac{e^{\int\frac{b}{a}dx}\cdot c}{a}\right)^2\right] \tag{17}$$

Kako su funkcije a, b, c proizvoljne, izaberimo ih tako da je

$$a=\frac{1}{\psi} \qquad b=\frac{p}{\psi} \qquad c=\frac{\varphi'}{\psi'}$$

gde su ψ i φ funkcije a p konstantni koeficijenat. Zbog ovog formule (16) postaju

$$P=-\psi^{2p}\cdot\psi', \quad Q=p\cdot\frac{\psi'}{\psi}-2\psi^{p}\cdot\psi'\int\psi^{p}\cdot\psi' dx, \quad R=\varphi'+m\psi'-\psi'\left(\int\psi^{p}\cdot\varphi' dx\right)^2 \tag{18}$$

Iz ovih jednačina - iz prve dve izračunavajući ψ i φ zamenjujući u treću, dobijamo

$$R=S^{-\frac{p}{2p+1}}\left(\frac{Q\cdot S^{\frac{p}{2p+1}}+p\cdot P\cdot S^{-\frac{p+1}{2p+1}}}{2P}\right)'+P\cdot S^{-\frac{2p}{2p+1}}\left(\frac{QS^{\frac{p}{2p+1}}+p\cdot PS^{-\frac{p+1}{2p+1}}}{2P}\right)^2-mP\cdot S^{-\frac{2p}{2p+1}} \tag{19}$$

Pri čemu je $S=-(2p+1)\left(\int P dx+A\right)$ gde je A konstanta. Uslov (19) za $p=0$ postaje ranije dobijeni uslov (15) prof. Bugaeva. Ovaj slučaj sa uslovom Bugaeva ističe korist postupka izloženog u odeljku pod 1) u prošloj glavi: ako se jdnom transformacijom dodira jedna diferencijalna jednačina integrali, onda – zadržavajući istu rezolventu a opštiji oblik transformacija – dobijamo uslov za koeficijente koji sadrži prethodni uslov kao specijalan slučaj. Ovo je važno za praktične primene prilikom integracije pojedinih slučajeva, što smo više puta istakli u glavi II.

3) Parametarski oblik opšteg integrala Riccati-eve jednačine

Vratimo se sad formulama (16). Imamo tri formule i tri funkcije a, b, c jer se ostale funkcije d, g, h izražavaju pomoću formula (13) Potražimo integral jednačine (12) koristeći metodu Eruškova. U tom cilju u rezolventi (12) neka je $m=0$ radi uprošćavanja računanja. Integral jednačine (12) tada je

$$y_1 = x_1\left(\mu - 2\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right) \qquad \mu = \text{const.} \qquad 20.)$$

Za transformacije dodira (12) iz glave II

$$x_1 = ay' + by + c \qquad y_1 = gy' + dy + h \qquad y_1' = \frac{d}{a}$$

pri čemu je

$$d = -a\int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}\cdot dx, \quad g = e^{\int \frac{b}{a}dx} - b\cdot\int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}dx, \quad h = \int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}\cdot c}{a}dx - c\cdot\int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}dx$$

Osnovna formula glasi:

$$y_1 = \frac{d}{a}x_1 + \left(g - \frac{bd}{a}\right)y + h - \frac{cd}{a} \qquad 21.)$$

Iz integrala (20) diferenciranjem dobijamo

$$\mu - \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{d}{a} \qquad 22)$$

Pri čemu je y_1 zamenjeno iz poslednje jednačine sistema (12), glave II. Izračunavajući izraze

$$g - \frac{bd}{a}, \quad h - \frac{cd}{a}, \quad \frac{d}{a}$$

pomoću obrazaca (13) iz glave II, dobijamo iz jednačina (20), (21), (22)

$$y = e^{-\int \frac{b}{a}dx}\left[\left(\int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}dx + \mu\right)^{-1} + \int \frac{c\,e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}dx\right] = \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx} + \mu\, e^{-\int \frac{b}{a}dx}\cdot\int \frac{c\,e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}dx}{\int \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}dx + \mu} \qquad 23.)$$

Prema ovome, Riccati-eva jednačina (3), čiji su koeficijenti izraženi formulama (16), ima za integral funkciju datu obrascem (23) – pri čemu se pokazuje da konstante integracije figurišu racionalno.

Najzad, ovome je moguće dati i drugi vid: za slučaj kanoničke jednačine

$$y' + y^2 + R(x) = 0$$

formule (23) i (17) daju za

$$P = 1 \qquad Q = 0$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\mu' - \int \frac{dx}{\sqrt{a}}\right)^{-1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{a'}{a} \qquad R = \frac{3}{16}\cdot\left(\frac{a'}{a}\right)^{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{a''}{a}$$

Znači da gornja kanonička jednačina ima opšti integral dat - kao i onaj u formuli (23) - u parametarskoj formi, pri čemu ulogu parametarske funkcije igra funkcija ~~x~~

U izlaganju, koje smo učinili u ovom odeljku, pokazali smo sistematski postupak u primeni transformacija dodira. U ovom slučaju bila je u pitanju Riccatieva jednačina. U narednoj glavi biće predmet naših razmatranja niz drugih jednačina.

IV Glava

U prethodnim glavama i odeljcima prikazana je u glavnim crtama upotreba transformacija dodira. Kao što se iz svega izloženog moglo videti - važno je rešiti zadate partikularne slučajeve a onda uopštavanjem, bilo transformacija bilo rezolvente, dobiće se slučajevi u kojima mesto vrlo specijalnih funkcija figurišu daleko opštije funkcije. Ovakav postupak moguć je i sa punktualnim transformacijama. I on pretstavlja jednu sistematsku proceduru koju često, kao što smo već rekli, većina autora ne koristi - iako nema razloga da odbaci jedan potpuniji i dalekosežniji rezultat.

Cilj je izlaganja u ovoj glavi da ukaže s gledišta problema integracije diferencijalnih jednačina na jednu značajnu činjenicu da se transformacija dodira nalazi najčešće indicirana u samoj jednačini. Naravno, da ima izuzetaka od toga - ali u najvećem broju slučajeva transformacije su date nekim karakterističnim izrazom od x, y, y' u samoj jednačini. U ovom pogledu transformacije dodira se razlikuju od punktualnih, gde najčešće nismo u stanju da iz same jednačine uvidimo koju transformaciju treba da upotrebimo. Pomenuta osobina transformacija dodira je sa čisto praktičnog gledišta dragocena i slučajevi koje ćemo navesti potkrepiće naša tvrdjenja. Jednačine u ovoj glavi uzete su iz Kamkeovog registra na kraju njegove knjige /20/ a pored svake navedene jednačine naznačen je broj iz registra.

Tako imamo za jednačinu J. Rose-a (Mathesis 44, 1930)

$$x^{n-1} y'^{n} - nxy' + y = 0 \qquad 1\cdot 554$$

ako se izabere za x_1 prvi izraz na levoj strani, dakle

$$x_1 = x^{n-1} \cdot y'^{n}$$

onda se integracijom dobija, po načinu Ermakova druga formula

$$y_1 = nxy' - y$$

i otuda se gornja jednačina transformiše vrlo jednostavno u prostu jednačinu oblika

$$y_1 = x_1$$

ako stavimo, kako je objašnjeno u II glavi, da je $x_1 = C$ tj.

$$x^{n-1} \cdot y'^{n} = C$$

odakle imamo

$$y' = \sqrt[n]{C} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

onda dobijemo integral zadate jednačine u obliku

$$y = \sqrt[n]{C}\, x^{\frac{1}{n}} - C$$

(Kod Kamke-a je, usled štamparske greške, integral pogrešno naveden i glasi

$$y = C x^{\frac{1}{n}}$$

Ne samo što se navedena jednačina može integraliti, nego i jednačina

$$y = n x y' + f\left(x^{n-1} y'^{n}\right) \qquad g - Rose$$

koja se ne nalazi kod Kamke-a a koja se prethodnim transformacijama svodi na funkcionalnu jednačinu oblika, pri čemu je x_1 i y_1 isto kao kod prethodne jednačine. Prema ovome, integral poslednje jednačine je

$$y = n\sqrt[n]{c}\, x^{\frac{1}{n}} + f(c)$$

Ova jednačina inače pretstavlja uopštenje Clairaut-ove jednačine na koju se svodi za $n=1$

Kod Kamke-a je navedena kao posebna jednačina još i ova

$$f(xy'^2) + 2xy' - y = 0 \qquad 1.573$$

koja, medjutim, pripada tipu gornje jednačine za $n=2$ pa je izlišno navoditi je.

Isto tako, jednačina

$$f\left(x - \frac{3}{2} y'^2\right) + y'^3 = y \qquad 1.574$$

se svodi na funkcionalnu jednačinu. Lako je obrazovati transformacije

$$x_1 = x - \frac{3}{2} y'^2 \qquad y_1 = y'^3 - y \qquad y_1' = -y$$

i imamo odmah rezolventu funkcionalnog tipa

$$f(x_1) + y_1 = 0$$

Integral se dobija na malopredjašnji način i onda imamo

$$y = f(c) + \sqrt{\left[\frac{2}{3}(x-c)\right]^3}$$

Navedene jednačine mogu poslužiti kao primeri za primenu transformacija dodira - medjutim, u knjizi prof. Kamke-a se pominju samo Legendre-ove transformacije, a nema ni pomena o tome da se može obrazovati mnoštvo transformacija dodira kao i o tome da se u primeni ovih transformacija može naići na funkcionalne jednačine i da se tada integrali dobijaju bez kvadratura, što u ostalom i najveći broj ostalih autora gubi iz vida nepominjući taj slučaj ili čak negirajući njegov smisao.

Navedimo dalje jednačinu koja se nalazi kod Laguerre-a (Oeuvres I p 47 a koja je oblika

$$a y'^2 + b x^2 y' + c x y = 0 \qquad 1.404$$

Ako ovu jednačinu napišemo u obliku

$$a \frac{y'}{x^2} + b + c \cdot \frac{y}{x y'} = 0$$

i uzmemo za jednu formulu tangencijalnih transformacija

$$x_1 = \frac{y'}{x^2}$$

onda ćemo po metodi Eramkov-a dobiti y_1 tako da ćemo imati transformacije

$$x_1 = \frac{y'}{x^2} \qquad y_1 = \frac{x y'}{3} - y \qquad y_1' = \frac{x^3}{3}$$

ili iz ovih obrazaca imamo dalje

$$y = x_1 y_1' - y_1 \qquad x y' = \frac{x_1 y_1'}{3}$$

Pomenuta jednačina postaje jednačina koja razdvaja promenljive

$$(3 a x_1 + 3b + c) x_1 y_1' - c y_1 = 0$$

čiji je integral

$$y_1 = K e^{c \int \frac{dx_1}{x_1 (3x_1 + 3b + c)}} \qquad K = \text{const.}$$

Prema ovome će sistem za dobijanje integrala polazne jednačine biti oblika

$$y_1 = \frac{x_1 x^3}{3} - y \qquad y_1 = K e^{c \int \frac{dx_1}{x_1 (3 a x_1 + 3b + c)}} \qquad (3 a x_1 + b + c) x_1 \cdot \frac{x^3}{3} - c y_1 = 0$$

Odavde je moguća eliminacija x_1 i y_1 (zamenom y_1 u treću jednačinu dobija se kvadratna jednačina po x_1 čije rešenje kao i y_1 treba staviti u srednju jednačinu, a time će se dobiti integral jednačine 1404 u implicitnoj formi). Tako dobijamo

$$\frac{-3bx^3 \pm \sqrt{9b^2x^6 - 12acx^3y}}{18a} - y = K \left[\frac{-3bx^3 \pm \sqrt{9b^2x^6 - 12acx^3y}}{3a(-3bx^3 \pm \sqrt{9b^2x^6 - 12acx^3y}) + (3b - c) 6 a x^3} \right]^{\frac{c}{3b+c}}$$

Za rešenje ove jednačine kod Kamke-a je navedena smena

$$y = x^3 \eta(\xi) \qquad \xi = \ln x$$

pri čemu Laguerre-ova jednačina postaje

$$a \eta'^2 + (6 a \eta + b) \eta' + 9 a \eta^2 + 3 b \eta + c = 0$$

i kad se reši po η' može se dobiti integral pomoću kvadratura. Svakako je teže doći do navedenih supstitucija, koje Kamke predlaže, nego uočiti odmah transformaciju dodira na samoj jednačini. Napomenimo da u pomenutim delima Laguerre-a navedena jednačina u originalu glasi

$$y'^2 - 2x^2 y' + 2xy = 0.$$

koja se posle rešavanja po izvodu može napisati pri čemu je faktor integrabilnosti

$$y - x^3 - x\sqrt{x^4 - 2xy}$$

kojim kad se pomnoži poslednja jednačina dobija se potpun diferencijal. (Naslov Laguerre-ovog članka je: "Sur la récherche d'un facteur d'intégrabilité des équations différentielles du prémier ordre(1878)" Kamke ne navodi odakle je uzeta gornja smena kao i uopštenje jednačine.) Vratimo se našim postupcima za dobijanje generalnijih oblika, koji će nam dati čitave različite klase jednačina.

U tu svrhu uzmimo transformacije

$$x_1 = \frac{y' + \varphi'}{\psi'} \qquad y_1 = \frac{y' + \varphi'}{\psi'}\psi - y - \varphi \qquad y_1' = \psi$$

gde su φ, ψ kakve bilo funkcije od x. Iskoristimo ranije dobijenu rezolventu

$$(3ax_1 + 3b + c)x_1 y_1' - cy_1 = 0$$

u koju ćemo staviti funkcije koje izražavaju x_1, y_1, y_1' i tako dobijamo jednačinu

$$Py'^2 + Qy' + R - cy = 0 \qquad g1\text{-}Lag.$$

pri čemu je

$$P = 3a\frac{1}{\psi'^2} \qquad Q = 3\left[2a\frac{\varphi'}{\psi'} + b\right]\frac{\psi}{\psi'} \qquad R = 3b\frac{\psi}{\psi'}\varphi' + c\varphi + 3a\frac{\psi}{\psi'^2}\cdot\varphi'^2$$

odakle proizilazi uslov

$$R = 2\cdot\frac{1}{P}\left(Q - \frac{3}{2}b\sqrt{P}\int\frac{1}{\sqrt{P}}dx\right)\left[\frac{3a}{2}\sqrt{P}\int\frac{1}{\sqrt{P}}dx + 2\left(Q - \frac{3}{2}b\sqrt{P}\int\frac{1}{\sqrt{P}}dx\right)\right]$$

Ovaj uslov za $P = \frac{a}{x}$, $Q = bx$, $R = 0$, daje Laguerre-ov slučaj.

Napomenimo da gornje transformacije obuhvataju one prvobitno upotrebljene za $\varphi = 0$, $\psi = \frac{x^3}{3}$.

Što se tiče druge generalizacije dobijene zadržavanjem prvobitnih transformacija, primetimo da generalnije rezolvente

$$(3ax_1 + 3b + c)x_1^n y_1'^p - cy_1^q = 0 \qquad (3ax_1^m + 3b + c)x_1^n y_1' - cy_1 + f(x_1)\,y_1^k = 0$$

koje odgovaraju slučaju Laguerre-a i to prva za $n = p = q = 1$ a druga za $m = n = 1$, $f(x_1) =$ daju nove odgovarajuće jednačine respektivno

$$\left[3a\left(\frac{y'}{x^2}\right)^m + 3b + c\right]\left(\frac{y'}{x^2}\right)^n\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)^p - c\left(\frac{xy'}{3} - y\right)^q = 0. \qquad g2 - Lag.$$

$$\left[3a\left(\frac{y'}{x^2}\right)^m + 3b + c\right]\left(\frac{y'}{x^2}\right)^n\cdot\frac{x^3}{3} - c\left(\frac{xy'}{3} - y\right) + f\left(\frac{y'}{x^2}\right)\left(\frac{xy'}{3} - y\right)^k = 0. \qquad g3 - Lag.$$

Svaka od ovih jednačina generalnija je od Laguerre-ove na koju se svodi pri gornjim već navedenim vrednostima za razne konstante.

Navedimo još i sledeću diferencijalnu jednačinu koja je generalnija od Laguerre-ove. To je jednačina oblika:

$$T\left(\frac{y'}{x^2}\right) + c\cdot\frac{y}{xy'} = 0 \qquad g4 - Lag.$$

Pomenuta jednačima postaje zbog navedenih transformacija

$$x_1 y_1' T(x_1) + 3c(x_1 y_1' - y_1) = 0$$

što dovodi do jednačine oblika

$$y_1'[T(x_1) + 3c]x_1 - 3cy_1 = 0$$

koja razdvaja promenljive.

Pozabavimo se jednačinom

$$y' = ay^3 + bx^{-\frac{3}{2}} \qquad 1.38$$

kojom se bavio i P. Appell (Journal de Mathémat. (4),5, 1889) a za koju Kamke predlaže smenu

$$y = x^{-\frac{1}{2}}\eta\left(\frac{\xi}{2}\right) \qquad \xi = \ln|x|$$

pri čemu se data jednačina svodi na

$$\eta' = a\eta^3 + \frac{1}{2}\eta + b$$

pa je ovim dovedena do kvadratura. Ova jednačima navedena je u pomenutom časopisu na strani ~~370~~ 376 i u originalu glasi:

$$y' = y^3 + Rx^{-\frac{3}{2}}$$

naziv Appell-ovog memoara je : " Sur des invariants de quelques equationes differentielles".

Na analog način kako smo do sad postupali napišimo gornju jednačimu u ovom obliku

$$\frac{y'}{y^3} - a = b\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{y^3}$$

Uzmimo kao jednu od formula transformacija dodira

$$x_1 = \frac{y'}{y^3}$$

odakle dobijamo na poznati način ceo sistem formula

$$x_1 = \frac{y'}{y^3}, \qquad y_1 = \frac{y'}{y^3}x + \frac{1}{2y^2} \qquad y_1' = x$$

iz kojih imamo takodje

$$\frac{1}{y} = \sqrt{2(y_1 - x_1 y_1')}$$

Prema ovome, gornja jednačima će da se transformiše u rezolventu

$$x_1 - a = b\, y_1'^{-\frac{3}{2}} \sqrt{2^3(y_1 - x_1 y_1')^3}$$

odakle imamo jednačinu koja razdvaja promenljive

$$y_1'\left[x_1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x_1-a}{b}\right)^2}\right] = y_1$$

što daje

$$\ln y_1 = 2\sqrt[3]{b^2}\int \frac{1}{2\sqrt[3]{b^2}x_1 + \sqrt[3]{(x_1-a)^2}}\,dx_1$$

Zato ćemo imati integral u obliku sistema tri jednačine,

$$y_1 = x_1 x - \frac{1}{2y^2} \qquad \ln y_1 = 2\sqrt[3]{b^2}\int \frac{1}{2\sqrt[3]{b^2}x_1 + \sqrt[3]{(x_1-a)^2}}\,dx_1 \qquad x\left[x_1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x_1-a}{b}\right)^2}\right] = y_1$$

U vezi sa ovim izlaganjima napomenimo da jednačima koju je obradio M. Chini (Istituto Lombardo (2),58,1925) a koja pripada istom tipu

$$y' = ay^n + bx^{\frac{n}{1-n}}$$ 1-52

smenom $y = x^{\frac{1}{1-n}} u$ kako navodi Kamke, svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive, a koja je oblika

$$xu' = au^n + \frac{u}{n-1} + b$$

Medjutim, moguće je kao i u slučaju Appell-ove jednačine koja je njen specijalni slučaj za $n=3$ napisati u obliku

$$\frac{y'}{y^n} - a = b \cdot \frac{x^{\frac{n}{1-n}}}{y^n}$$

Odmah možemo izabrati za x_1

$$x_1 = \frac{y'}{y^n}$$

a odavde dobijamo posle integracije i ostalih operacija ceo sistem obrazaca

$$x_1 = \frac{y'}{y^n} \qquad y_1 = \frac{y'}{y^n}x + \frac{1}{(n-1)y^{n-1}} \qquad y_1' = x$$

Odakle se dobija i obrazac

$$\frac{1}{y} = \sqrt[n-1]{(n-1)(y_1 - x_1 y_1')}$$

Posle transformacije Chinieve jednačine dobijamo

$$y_1'^{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{x_1-a}{b}\right) = \left[(n-1)(y_1 - x_1 y_1')\right]^{\frac{n}{n-1}}$$

odakle je

$$y_1'\left[x_1 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{x_1-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = y_1$$

što daje integral

$$\ln y_1 = \int \frac{1}{x_1 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{x_1-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}}\, dx_1$$

Koristeći ovaj integral poznatim postupkom, dolazimo do integrala Chinieve jednačine u parametarskoj formi.

Vratimo se našim generalizacijama pomoću transformacija dodira.

U dosadašnjim izvodjenjima kod Chinijeve jednačine koristili smo transformacije

$$x_1 = \frac{y'}{y^n} \qquad y_1 = \frac{y'}{y^n}x + \frac{1}{(n-1)y^{n-1}}$$

koje za $n=3$ daju one koje smo iskoristili kod Appell-ove jednačine. Uzmemo li generalnije transformacije, koje obuhvataju prethodne, tj. uzmimo za

$$x_1 = \frac{y'}{\varphi'(x)y^n}$$

onda dobijamo posle integracije i ostalih operacija tražene transformacije:

$$x_1 = \frac{y'}{\varphi' y^n} \qquad y_1 = \frac{\varphi}{\varphi'} \cdot \frac{y'}{y^n} + \frac{1}{(n-1)y^{n-1}} \qquad y_1' = \varphi$$

Iskoristimo ranije dobijenu rezolventu kod Chinieve jednačine

$$y_1'\left[x_1+\frac{1}{n-1}\left(\frac{x_1-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]=y_1$$

pa dobijamo, najzad, jednačinu

$$y'=a\varphi' y^n+b\cdot\varphi^{\frac{n}{1-n}} \qquad g - \text{Ann. Chini}$$

koja sadrži i Chinievu za $\varphi=x$ i Appell-ovu za $\varphi=x$, $n=3$

Na slučaju Appell-ove jednačine prikazaćemo da postupak koji smo do sada primenjivali na transformacije dodira - možemo primeniti i kod punktualnih transformacija.

Ako uzmemo generalnije transformacije

$$y=f(x)\eta(\xi) \qquad \xi=\ln|x|$$

koje sadrže kao specijalan slučaj transformacije koje je upotrebio Kamke, tj. $y=x^{-\frac{1}{2}}\eta(\xi)$ - i postupimo analogo kao do sada, zadržavajući istu transformisanu jednačinu

$$\eta'=a\eta^3+\frac{1}{2}\eta+b$$

onda dobijamo jednačinu

$$y'=a\frac{1}{xf^2}y^3+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{f'}{f}\right)y+b\cdot\frac{1}{x}\cdot f \qquad g - \text{Ann.}$$

koja daje za $f=\frac{1}{\sqrt{x}}$ jednačinu koju je Appell integralio. Kao što se vidi, ovaj postupak je potpuno analog predjašnjem a jednačina ~~jx~~ dobijena ovim načinom je opštija od one Appell-ove. Vidi se, medjutim, da ona pripada sasvim drugoj klasi jednačina od one opštije jednačine koju smo dobili transformacijama dodira.

Najzad kao poslednji slučaj iz ove grupe jednačina obradjenih u ovoj glavi navedimo Eulerovu jednačinu

$$Ay'^n=Bx^\alpha+Cy^\beta \qquad 1.550 \qquad a.)$$

koju smo naveli u glavi I. Ako poslednju jednačinu napišemo u obliku

$$A\frac{y'^n}{y^\beta}=B\frac{x^\alpha}{y^\beta}+C \qquad b.)$$

onda možemo izabrati

$$x_1=\frac{y'^n}{y^\beta}$$

kao prvu formulu transformacija dodira, a odavde integracijom - prema onome što smo izložili u glavi II dobijamo y_1 i dalje y_1' pa ćemo imati

$$x_1=\frac{y'^n}{y^\beta} \qquad y_1=\frac{y'x}{y^{\frac{\beta}{n}}}-\frac{y^{-\frac{\beta}{n}+1}}{-\frac{\beta}{n}+1} \qquad y_1'=\frac{x}{n}y^{\beta-\frac{\beta}{n}}\cdot y'^{1-n} \qquad c.)$$

iz ovih formula imamo i obrnuto

$$y=\left(-\frac{\beta}{n}+1\right)^{\frac{n}{n-\beta}}\left[nx_1y_1'-y_1\right]^{\frac{n}{n-\beta}} \qquad x=ny_1'x_1^{1-\frac{1}{n}} \qquad d.)$$

Pomoću formula d) gornja jednačina a) može da se napiše u obliku

$$\left[\frac{1}{B}\left(A\frac{y'^n}{y^\beta}-C\right)\right]^{-\frac{1}{\beta}}=x^{-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot y$$

odakle imamo

$$\left[\frac{1}{B}\left(Ax_1-C\right)\right]^{-\frac{1}{\beta}}=n^{-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot y_1'^{-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot x_1^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\alpha}{\beta}}\left(-\frac{\beta}{n}+1\right)^{\frac{n}{n-\beta}}\left(nx_1y_1'-y_1\right)^{\frac{n}{n-\beta}} \qquad r.)$$

što nam dalje daje

$$L(x_1)=y_1'^{-\frac{\alpha}{\beta}\frac{n-\beta}{n}}\left(ny_1'x_1-y_1\right) \qquad e.)$$

gde je

$$L(x_1)\equiv D\,x_1^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\left(Ax_1-C\right)^{-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{n-\beta}{n}} \qquad D\equiv n^{\frac{\alpha}{\beta}}\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{\frac{n}{\beta-n}}\cdot\left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{n-\beta}{n}}$$

Jednačina e) može postati linearna pod dvema pretpostavkama - ili je

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{n-\beta}{n}=0$$

ili

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{n-\beta}{n}+1=0.$$

prva pretpostavka daje (izuzimajući $\alpha=0$ čime jednačina a) postaje trivijalna) $n=\beta$ a druga daje

$$n=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \qquad f.)$$

što je i Euler našao na drugi način. U ovom poslednjem slučaju rezolventa se svodi na linearnu jednačinu

$$ny_1'x_1-y_1-L(x_1)=0. \qquad g.)$$

Medjutim, slučaj $n=\beta$ ne može biti uzet u obzir jer, kako se vidi iz jednačine d) dolazi do rezultata koji nema smisla - jer eksponent

$$\frac{n}{n-\beta}=\frac{1}{1-\frac{\beta}{n}}$$

teži beskonačnosti za $\beta\to n$

Što se tiče integrala jednačine g) on će se javiti u konačnoj formi pod uslovima koji su poznati za binomni diferencijal, jer imamo integral oblika

$$y_1=\sqrt[n]{x_1}\left[K-\frac{D}{n}\int x_1^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\alpha}{\beta}-\left(\frac{1}{n}+1\right)}\cdot\left(Ax_1-C\right)^{-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{n-\beta}{n}}\,dx_1\right]$$

pri čemu ako se uzme uslov f) imaćemo eksponente

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}-1=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}-1=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)-1=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)-1$$

$$-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{n-\beta}{n}=-\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{\beta}{n}\right)=-\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)=-\frac{1}{\beta}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}$$

pa prema tome moraju biti zadovoljeni uslovi za integraciju binomnog diferencijala, tj. da jedan od izraza

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)-1,\quad\frac{1}{\alpha}$$

bude ceo broj.

Učinimo i u ovom slučaju kao i u ranijim: iskoristimo generalnije transformacije dodira

$$x_1=\frac{y'^n}{y^\beta\varphi'} \qquad y_1=\frac{y'}{\varphi'}y^{-\frac{\beta}{n}}\cdot\varphi-n\frac{y^{\frac{n-\beta}{n}}}{n-\beta} \qquad y_1'=\frac{y^{-\frac{\beta}{n}+\beta}}{ny'^{n-1}\cdot\varphi'^{1-n}} \qquad t.)$$

napominjemo nezavisno od ove jednačine o kojoj je reč, da gornja transformacija t) za slučaj funkcionalne rezolvente

$$y_1 = f(x_1)$$

daju jednačinu

$$\frac{y'}{\varphi'}\cdot y^{-\frac{\beta}{n}}\cdot\varphi - \frac{n}{n-\beta}\, y^{\frac{n-\beta}{n}} = f\left(\frac{y'^{\,n}}{y^{\beta}\cdot\varphi'}\right) \qquad \boxed{y_2 - Clair.}$$

koja predstavlja uopštenje Clairaut-ove jednačine, jer se za $\varphi = x,\ \beta = 0,\ n = 1$ svodi gornja jednačina na Clairaut-ovu jednačinu. [illegible] uopštenje razlikuje se od onog kod jednačine I.Rose-a na početku glave.

Predjimo sad na slučaj Abel-ove jednačine

$$[y + g(x)]\,y' + f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x) = 0 \qquad A.)$$

U tu svrhu uzmimo transformacije koje smo za ovaj slučaj naročito obrazovali

$$x_1 = \frac{\psi'}{y'-\varphi'}(y-\varphi) - \psi\,,\quad y_1 = \frac{\psi'}{y'-\varphi'}\,,\quad y_1' = \frac{1}{y-\varphi} \qquad T.)$$

gde su φ, ψ makakve funkcije od x.

Pretpostavimo da se gornja jednačina A.) transformacijama T.) u novim promenljivima svodi na rezolventu oblika

$$y_1' = \frac{x_1 + 1}{x_1} \qquad R.)$$

Odavde posle smene obrazaca T.) dobijamo

$$\frac{1}{y-\varphi} = \frac{\psi'(y-\varphi) + (1-\psi)(y'-\varphi')}{\psi'(y-\varphi) - \psi(y'-\varphi')}$$

Iz ove jednačine imamo

$$\left[y - \varphi + \frac{\psi}{1-\psi}\right]y' + \frac{\psi'}{1-\psi}y^2 - \left[\frac{\psi'}{1-\psi}(2\varphi+1) + \varphi'\right]y + \frac{\psi'}{1-\psi}\varphi^2 + \varphi\varphi' + \frac{\psi'}{1-\psi}\varphi - \frac{\psi}{1-\psi}\cdot\varphi' = 0 \qquad 1.)$$

koja u potpunosti odgovara gornjem obliku A.) Abel-ove jednačine pod uslovima

$$g = -\varphi + \frac{\psi}{1-\psi} \qquad f_1 = -\left[\frac{\psi'}{1-\psi}(2\varphi+1) + \varphi'\right]$$

$$f_2 = \frac{\psi'}{1-\psi} \qquad f_0 = \frac{\psi'}{1-\psi}\cdot\varphi^2 + \varphi\varphi' + \frac{\psi'}{1-\psi}\cdot\varphi - \frac{\psi}{1-\psi}\cdot\varphi' \qquad 2.)$$

Iz obrazaca 1.) lako se dobijaju uslovi:

$$\delta)\ f_1 = -\left[f_2\left(3e^{\int f_2 dx} - 2g - 1\right) - g'\right],\quad f_0 = f_2\left(e^{\int f_2 dx} - 1\right)\left(e^{\int f_2 dx} - g\right) - 2g f_2 e^{\int f_2 dx} + g^2 + g g' \qquad K.)$$

Iz jednačine k.) dobijamo integracijom

$$y_1 = x_1 + \ln x_1 + C'$$

i koristeći uobičajeni sistem

$$y_1 = x_1 + \ln x_1 + C', \quad \frac{1}{y-\varphi} = 1 + \frac{1}{x_1}, \quad y_1(y-\varphi) = \psi + x_1 \qquad l.)$$

posle lakih računanja dobijamo kao integral jednačine h.)

$$\frac{\psi}{y-\varphi} = \ln \frac{y-\varphi}{1-y+\varphi} + C \qquad C = C' - 1 \qquad m.)$$

Saobražavajući ovaj integral pomoću formula i.) Abel-ovoj jednačini A.) imamo

$$\left[\ln\left(y - e^{\int f_2 dx} - g - 1\right) / \left(e^{\int f_2 dx} - y - g\right)\right]\left(y - e^{\int f_2 dx} - g - 1\right) + e^{-\int f_2 dx} - 1 = 0 \qquad n.)$$

Dakle za Abel-ovu jednačinu A.) pri uslovima j.) i k.) imamo integral n.

Na ovaj način je dobijena još jedna klasa Abel-ovih jednačina za koju važe uslovi različiti od onih koje navodi Kamke (u knjizi "Differentionalgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen ... str.27) čime je dat prilog pitanju integrabilnosti ove znamenite jednačine.

V G l a v a

P r i m e n a f u n k c i o n a l n i h j e d n a č i n a na algebarsko izračunavanje neodredjenih integrala i klase običnih diferencijalnih jednačina sa singularnim integralima.

U dosadašnjim našim izlaganjima bavili smo se primenom transformacija dodira u cilju dobijanja izvesnih integrabilnih oblika raznih diferencijalnih jednačina. To je svakako problem koji je bio manje ili više od važnosti uvek, i koji ostaje uvek od interesa. Jedna posebna osobenost transformacija dodira ogleda se u postojanju funkcionalnih jednačina koje smo pomenuli u glavi II. U ovoj glavi izložićemo primene tih jednačina sa gledišta koja su dosad ostala nezapažena i neiskorišćena. [illegible] a Prvi odeljak ove glave obuhvata algebarsko dobijanje neodredjenih integrala pomoću singularnih integrala običnih diferencijalnih jednačina. U tome smislu treba poznavati što više diferencijalnih jednačina koje imaju singularnih integrala. To pitanje se tretira u drugom odeljku ove glave.

Izložićemo najpre postupak za dobijanje neodredjenih integrala što će biti proširenje našeg ranijeg rada /25/ u kome smo se ograničili na primene Clairaut-ove jednačine, dok ćemo sad to proširiti i na druge jednačine. Obe primene pretstavljaju korišćenje osobina singularnih integrala diferencijalnih jednačina na način koji dosad nije primenjivan .

I

Algebarsko izračunavanje neodredjenih integrala.

Kao što je poznato, diferencijalne jednačine prvog reda mogu imati singularnih integrala.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$F(x,y,y')=0. \qquad 1)$$

onda skup jednačina

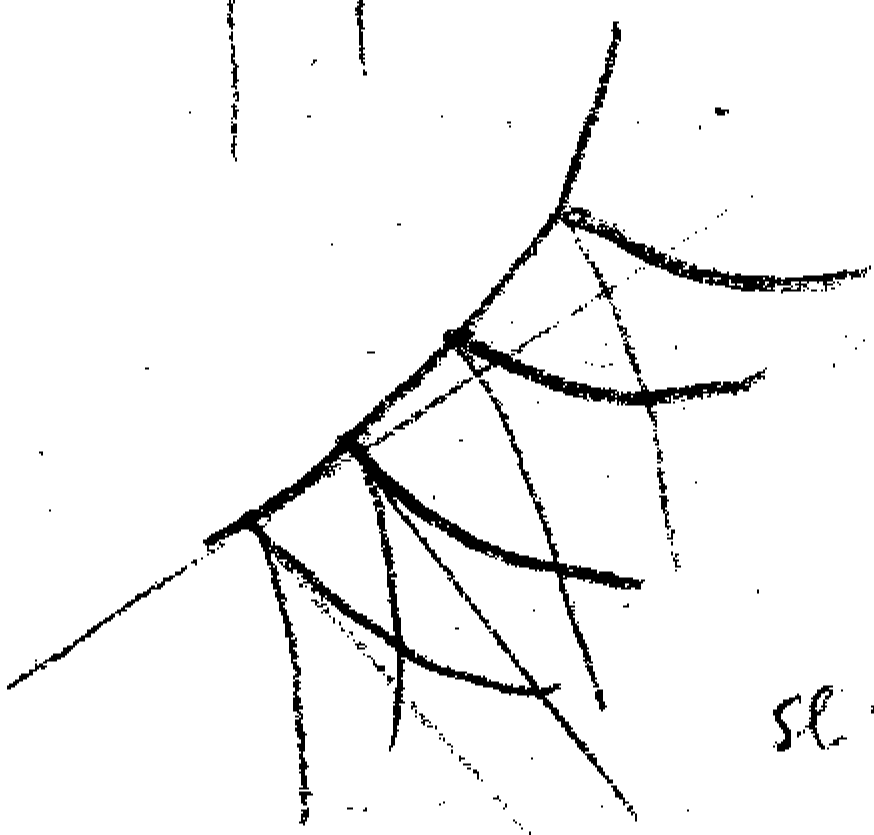
$$F(x,y,y')=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=0.$$

može odrediti singularni integral ako rezultat eliminacije y' iz objednačine 2)

$$\varphi(x,y)=0. \qquad 3.)$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu 1), a ako to nije slučaj onda mogu nastupiti drugi slučajevi.
Zadržimo se najpre na jednoj osobini singularnog integrala.

sl.1



sl.2

Neka je opšti integral jednačine 1) prestavljen funkcijom

$$\mathcal{J}(x,y,C)=0. \qquad 4.)$$

gde je C proizvoljna konstanta. U slučaju singularnog integrala - obvojnice(sl.1) vrednosti x,y,y' za svaku zajedničku tačku i singularnog i opšteg integrala jedne iste su. Dakle, u algebarskom smislu singularni integral 2) prestavlja sistem jednačina u kome su moguće algebarske operacije sa x,y,y'

To nije slučaj ako je u pitanju geometrisko mesto singularnih tačaka (sl.2) - jer su vrednosti za y' kod opšteg integrala različite od onih u istim tačkama koje pripadaju geometriskom mestu singularnih tačaka. Pomenuta osobina singularnog integrala igra osnovnu ulogu u izlaganju koje ćemo dalje učiniti.
U našim izlaganjima koristićemo se onim diferencijalnim jednačinama za koje znamo da imaju singularne integrale. Te jednačine je lako obrazovati na osnovu funkcionalnih jednačina i raznih transformacija dodira. Na prvom je mestu Clairaut-ova jednačina za koju se inače zna da ima singularni integral a onda i druge jednačine funkcionalnog tipa. Uopšte klase ovih jednačina podesne su za napred navedenu svrhu zbog toga što se kod njih lako može doći do opšteg integrala. Neka je opšti integral takve jednačine

$$\mathcal{J}(x,y,C)=0. \qquad 4.)$$

onda će singularni biti dat sistemom jednačina

$$\mathcal{J}(x,y,C)=0, \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial C}=0 \qquad 5.)$$

iz kog treba eliminisati c) pri uslovima da je

$$D \equiv \begin{vmatrix} \mathcal{I}_x & \mathcal{I}_y \\ \mathcal{I}_{cx} & \mathcal{I}_{cy} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad 6.)$$

kao i da je $\mathcal{I}_{cc} \neq 0$ uz uslov da je jedan od izvoda $\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y$ bar različit od nule-što je poznato i navedeno na pr. kod dela Valle Poussin-a /26/ i Mangoldt-Knopp /27/. Medjutim, može da se desi da iako nisu ispunjeni ovi uslovi ipak postoji singularni integral. Ako su napred navedeni uslovi ispunjeni, onda postoji sigurno singularni integral, a ako to nije, onda nastaje neizvesnost u pogledu njegovog postojanja. Dakle, na ovaj način možemo ispitati uglavnom postojanje singularnih integrala. Uostalom, ako se rezultati koje dobijemo pod pretpostavkom da singularni integral postoji - pokažu kao ispravni - onda je to u isto vreme i dokaz da singularni integral postoji.

Pretpostavimo, dalje, da se jednačina 1) može napisati u obliku

$$y = \mathcal{N}(x, y') \qquad 7.)$$

Tada singularni integral jednačine 1) može da se napiše u obliku

$$y = \mathcal{N}(x, y') \qquad \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y'} = 0. \qquad 8.)$$

pri čemu se druga jednačina može napisati

$$y' = K(x) \qquad 9.)$$

Kako znamo da imamo posla sa singularnim integralom, a prema tome, kao što smo ranije rekli, jednačine 11) i 12) pretstavljaju sistem u algebarskom smislu - to imamo pomoću integracije

$$y = \int K(x)\,dx + \alpha \qquad 10.)$$

gde je   proizvoljna konstanta. Zato imamo sistem jednačina 7.) $y = \mathcal{N}(x, y')$ 8.) $y' = K(x)$ 10.) $y = \int K(x)\,dx + \alpha$

iz kog na jednostavan način dobijamo

$$\int K(x)\,dx + \alpha = \mathcal{N}\left[x, K(x)\right] \qquad 11.)$$

Relacija 11) nam pokazuje izvršenje jedne kvadrature algebarskim putem.

Može se prigovoriti da zahtev da se jednačina 1) treba da napiše u obliku 7.), pretstavlja jedno znatno ograničenje, ali ćemo iz daljeg izlaganja uvideti da i pored ovog zahteva moguće je izvršiti veliki broj kvadratura algebarskim putem.

Navešćemo najpre Clairaut-ovu jednačinu - koja pretstavlja najprostiji tip ovih jednačina o kojima je bilo reči u našem dosadašnjem izlaganju.

A.)

Jednačinu Clairaut-a možemo napisati u uobičajenom obliku

$$y = xy' + f(y') \qquad 12.)$$

gde je

$$N(x,y') \equiv xy' + f(y') \qquad \frac{\partial N}{\partial y'} \equiv x + f'(y') = 0 \qquad 13.)$$

pa zato imamo sistem

$$y = xy' + f(y') \qquad x + f'(y') = 0. \qquad 14.)$$

pri čemu iz druge jednačine imamo

$$y' = \kappa(x)$$

tako da pošto je

$$f(y') = \int f'(y')\,dy' \qquad y' = \kappa(x)$$

dobijamo iz same jednačine Clairaut-a

$$\int \kappa(x)\,dx = x\kappa(x) + f[\kappa(x)] \qquad 15.)$$

Da bi ilustrovali primenu Clairaut-ove jednačine uzmimo integral

$$y = \int \arcsin\sqrt{x}\,dx$$

Ovde je

$$y' = \kappa(x) \equiv \arcsin\sqrt{x} \qquad \sqrt{x} = \sin y'$$

A odavde je

$$x = \sin^2 y \qquad f'(y') = -\sin^2 y' \qquad f(y') = -\int \sin^2 y'\,dy' = -\frac{1}{2}(y' - \sin y'\cos y')$$

Lako je na osnovu same jednačine Clairaut-a napisati

$$y = x\arcsin\sqrt{x} - \frac{1}{2}\left[\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right]$$

Dakle, imamo

$$\int \arcsin\sqrt{x}\,dx = x\arcsin\sqrt{x} - \frac{1}{2}\left[\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right]$$

Kao što se vidi dobili smo jedan integral čija integracija ovom metodom ne zadaje nikakve teškoće.

Uzmimo tri poznata integrala

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx, \quad \int\sqrt{x^2-1}\,dx, \quad \int\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad a.)$$

Razumljivo je da možemo računati ove integrale

$$\int\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)dx, \quad \int\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)dx, \quad \int\left(x \pm \sqrt{1-x^2}\right)dx \qquad b.)$$

pa iz njih dobiti gornje. Iz poslednje grupe imamo respektivno za svaki navedeni integral

$$y' = x \pm \sqrt{x^2+1}, \quad y' = x \pm \sqrt{x^2-1}, \quad y' = x \pm \sqrt{1-x^2}$$

Tretirajući navedene obrasce kao korene kvadratne jednačine, imamo odgovarajuće jednačine po y'

$$y'^2 - 2xy' - 1 = 0. \qquad y'^2 - 2xy' + 1 = 0. \qquad y'^2 - 2ixy' - 1 = 0.$$

Odavde imamo respektivno za svaku postojeću jednačinu

$$x = \frac{y'^2 - 1}{2y'} \qquad x = \frac{y'^2 + 1}{2y'}. \qquad x = \frac{y'^2 - 1}{2iy'}$$

Odakle prema 15) za posmatrane slučajeve dobijamo

$$f'(y') = -\frac{y'^2 - 1}{2y'} \qquad f'(y') = -\frac{y'^2 + 1}{2y'} \qquad f'(y') = -\frac{y'^2 - 1}{2iy'}$$

a odavde sleduje opet respektivno

$$f(y') = -\frac{1}{2}\frac{y'^2}{2} + \frac{1}{2}\ln y' \qquad f(y') = -\frac{1}{2}\frac{y'^2}{2} - \frac{1}{2}\ln y' \qquad f(y') = -\frac{1}{i}\cdot\frac{y'^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i}\ln y'$$

Imajući izraze za y' i $f(y')$ dobijamo iz same Clairaut-ove jednačine za prvi integral

$$\int\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx = x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{4}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

a zatim sleduje na isti način i za ostale.

Kao što se vidi, sva tri integrala dobijamo na isti način - dok se obično oni dobijaju pomoću raznih smena.

Sličan je slučaj s integralima

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx \qquad \int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx \qquad \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx \qquad (c)$$

pri čemu se, isto kao malopre, možemo zadržati na integralima oblika

$$\int\frac{1 \pm \sqrt{x^2+1}}{x}dx, \qquad \int\frac{i \pm \sqrt{x^2-1}}{x}dx, \qquad \int\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}dx \qquad (d)$$

Odgovarajuće kvadratne jednačine biće

$$xy'^2 - 2y' - x = 0. \qquad xy'^2 - 2y'i - x = 0 \qquad xy'^2 - 2y' + x = 0.$$

i lako je dalje dobiti respektivno

$$x = \frac{2y'}{y'^2 - 1} \qquad x = \frac{2y'i}{y'^2 - 1}. \qquad x = \frac{2y'}{y'^2 + 1}$$

što prema 15) daje takodje odgovarajuće jednačine

$$f'(y') = -\frac{2y'}{y'^2 - 1} \qquad f'(y') = -\frac{2y'i}{y'^2 - 1} \qquad f'(y') = -\frac{2y'}{y'^2 + 1}$$

Iz ovog imamo respektivno

$$f(y') = -\ln(y'^2 - 1) \qquad f(y') = -i\ln(y'^2 - 1) \qquad f(y') = -\ln(y'^2 + 1)$$

Imajući $y' = K(x)$ i $f(y')$ lako je napisati, na osnovu same Clairaut-ove jednačine, odgovarajuće integrale,

$$\int\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}dx = 1 + \sqrt{x^2+1} - \ln\left[\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^2 - 1\right]$$

$$\int\frac{i+\sqrt{x^2-1}}{x}dx = i + \sqrt{x^2-1} - i\ln\left[\left(\frac{i+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^2 - 1\right]$$

$$\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}dx = 1 + \sqrt{1-x^2} - \ln\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 + 1\right]$$

Sličan je slučaj s integralom

$$\int\arcsin\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$$

kome odgovara

$$y' = K(x) \equiv \arcsin\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

i odakle je

$$\sin y' = x + \sqrt{x^2+1}$$

Što dovodi do kvadratne jednačine

$$(\sin y')^2 - 2x\sin y' - 1 = 0$$

Odavde imamo

$$x = \frac{(\sin y')^2 - 1}{2\sin y'}$$

Što daje

$$f'(y') = -\frac{1}{2}\sin y' + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin y'}$$

i odakle integracijom proizilazi

$$f(y') = \frac{1}{2}\cos y' + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{y'}{2}$$

I iz same Clairaut-ove jednačine imamo

$$\int \arcsin\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = x\arcsin\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{1}{2}\arcsin\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Na isti se način mogu dobiti i integrali sa integrandima

$\arcsin\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $\arcsin\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

dok se $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ lako može dobiti i običnom parcijalnom integracijom bez teškoća.

B.)

Posmatrajući jednačinu 17)

$$\int \kappa(x)dx = x\kappa(x) + f\left[\kappa(x)\right] \qquad 15.)$$

uvidja se da je to parcijalna integracija koja je u ovom slučaju izvedena algebarskim putem. Po parcijalnoj integraciji bilo bi

$$\int \kappa(x)\,dx = x\kappa(x) - \int x\kappa'(x)dx$$

Vidi se da je ovaj drugi integral po našem postupku dobijen drugim načinom - algebarskim načinom ako se izuzme dobijanje $f(y')$ iz $f'(y')$ što obično pretstavlja proste operacije sa jednostavnim funkcijama. Pokazani postupak može da da korisne rezultate ako se kombinuje sa parcijalnom integracijom.

Uzmimo po parcijalnoj integraciji ranije pominjani integral

$$\int \arcsin\sqrt{x}\,dx = x\arcsin\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

Medjutim, po našem postupku, dobijamo

$$\int \arcsin\sqrt{x}\,dx = x\arcsin\sqrt{x} - \frac{1}{2}\left[\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right]$$

a iz poredjenja ova dva rezultata proizilazi drugi integral

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}$$

Sličan je slučaj i sa integralom

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

pri čemu se, po našem postupku, dobija

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$$

a uporedjenjem oba rezultata dobijamo novi integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$$

Pri ovome ne mora se uzimati da je u prvoj etapi parcijalne integracije funkcija koja se integrali uvek x, već to može biti kakva druga funkcija. Uzmimo napr. po parcijalnoj integraciji

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+1}\cdot\ln x - \int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

pa poredeći ovaj rezultat dobijenim po našoj metodi u odeljku A) ove glave, tj.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = 1-\ln x+\sqrt{x^2+1} - \ln\left[\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^2-1\right]$$

dobijamo za novi integral

$$\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\ln x-1\right) + \ln\left[\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^2-1\right]$$

Izbor funkcija za parcijalnu integraciju može uvek biti drugačiji i to nas dovodi do novih integrala. Tako na pr. ovaj isti integral uzet u celini kao primitivna funkcija daje

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+1} - \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

i poredeći ovaj rezultat sa rezultatom po našoj metodi imamo

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln x - 1 + \ln\left[\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^2-1\right]$$

Na analog način moguće je dobiti i integrale koji će imati u imenitelju $x\sqrt{x^2-1}$, $x\sqrt{1-x^2}$.

Na ovaj način integralili smo integrale sa integrandima $\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{1-x^2}$, $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $\arcsin\left(x\pm\sqrt{x^2\pm 1}\right)$, $\arccos\left(x\pm\sqrt{x^2\pm1}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(x\pm\sqrt{x^2\pm1}\right)$, $\arcsin\left(x\pm\sqrt{1-x^2}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(x\pm\sqrt{1-x^2}\right)$.

kao što se vidi, čitava grupa integrala, koja se cela jednim načinom integrali .

C)

Na sličan način, uzimajući funkcionalnu jednačinu

$$y_1 = \frac{1}{3}\alpha x_1^3 + \frac{1}{2}\beta x_1^2 + \gamma x_1 \qquad a)$$

pri čemu je uzeta transformacija

$$x_1 = \frac{y}{y'} \qquad y_1 = \frac{y\ln y}{y'} - x \qquad y_1' = \ln y \qquad b)$$

imamo kao singularni integral dve odgovarajuće diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{y\ln y}{y'} - x = \frac{1}{3}\alpha\left(\frac{y}{y'}\right)^3 + \frac{1}{2}\beta\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + \gamma\frac{y}{y'} \quad c.) \qquad \ln y = \alpha\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + \beta\frac{y}{y'} + \gamma \quad d.)$$

Ispitajmo da li funkcionalna jednačina a) pri transformaciji b) daje diferencijalnu jednačinu koja ima singularni integral. Opšti integral jednačine c) je

$$\mathcal{J}(x,y,C) \equiv C\ln y - x - \frac{1}{3}\alpha C^3 - \frac{1}{2}\beta C^2 - \gamma C = 0.$$

Dakle, onda imamo

$$\Phi_x = -1 \qquad \Phi_y = C - \frac{1}{y} \qquad \Phi_C = \ln y - \alpha C^2 - \beta C - \gamma \qquad \Phi_{CC} = -2\alpha C - \beta$$

pri čemu je

$$D \equiv \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ \Phi_{xC} & \Phi_{yC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & C - \frac{1}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y} \neq 0$$

Kao što se vidi, pošto je determinanta različita od nule, i pošto je za sve C takodje $\Phi_{CC} \neq 0$ sem za $C = -\frac{\beta}{2\alpha}$ – moguće je ipak da ima singularnog integrala. Pošto rezultat, koji ćemo dobiti, diferenciranjem potvrdjuje tačnost pretpostavke, to znači da zaista ima singularnog integrala.

Iz jednačine d) imamo

$$y'^2(\ln y - \delta) - \beta y y' - \alpha y^2 = 0$$

odakle je

$$y' = \frac{\beta y \pm \sqrt{\beta^2 y^2 + 4\alpha y^2(\ln y - \gamma)}}{2(\ln y - \gamma)} \equiv A(y)$$

pri čemu dobijamo

$$\int \frac{1}{y} \frac{2(\ln y - \gamma)}{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha(\ln y - \gamma)}}\, dy = x$$

Na osnovu ovoga, iz jednačine c) dobijamo definitivno neodredjeni integral

$$\int \frac{1}{y} \frac{2(\ln y - \gamma)}{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha(\ln y - \gamma)}}\, dy = \frac{y}{A(y)}(\ln y - \gamma) - \frac{1}{3}\alpha\left[\frac{y}{A(y)}\right]^3 - \frac{1}{2}\beta\left[\frac{y}{A(y)}\right]^2$$

Dakle, ovaj integral smo dobili algebarskim putem mada se može i smenom $\ln y = u$ doći do istog rezultata. Diferenciranjem se lako potvrdjuje ispravnost pretpostavke o singularnom integralu, koji je dat formulama c) i d).

Na sličan način se dobija iz jednačine

$$y_1 = \frac{\alpha}{\gamma} x_1 + \left(\frac{\beta}{\delta} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\, \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\, x_1\right) \qquad e.)$$

pomoću istih transformacija b) singularni integral

$$\frac{y \ln y}{y'} - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{y}{y'} - \left(\frac{\beta}{\delta} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\, \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\frac{y}{y'}\right) = x \quad f.) \qquad \ln y = \frac{\alpha\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + \beta}{\gamma\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + \delta} \quad g.)$$

Iz jednačine g) dobijamo

$$y' = y\sqrt{\frac{\alpha - \gamma \ln y}{\delta \ln y - \beta}}$$

tako da imamo integral

$$\int \frac{1}{y} \cdot \sqrt{\frac{\delta \ln y - \beta}{\alpha - \gamma \ln y}}\, dy = x$$

dok iz jednačine f) dobijamo

$$\int \frac{1}{y}\sqrt{\frac{\delta \ln y - \beta}{\alpha - \gamma \ln y}}\, dy = \ln y \cdot \sqrt{\frac{\delta \ln y - \beta}{\alpha - \gamma \ln y}} - \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{\delta \ln y - \beta}{\alpha - \gamma \ln y}} - \left(\frac{\beta}{\delta} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\, \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\sqrt{\frac{\delta \ln y - \beta}{\alpha - \gamma \ln y}}\right)$$

Ispitajmo da li je ovde u pitanju singularni integral. Opšti integral jednačine f) je

$$\mathcal{J}(x,y,C) \equiv C \ln y - x - \frac{\alpha}{\gamma} C - \left(\frac{\beta}{\delta} - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\, \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\, C\right).$$

a onda je

$$\mathcal{J}_x = -1 \quad \mathcal{J}_y = C \cdot \frac{1}{y}, \quad \mathcal{J}_c = \frac{\alpha C + \beta}{\gamma C + \delta}, \quad \mathcal{J}_{cc} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma C + \delta)^2} \neq 0$$

$$\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$$

kako je

$$D \equiv \begin{vmatrix} \mathcal{J}_x & \mathcal{J}_y \\ \mathcal{J}_{xc} & \mathcal{J}_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y} \neq 0$$

to znači da je ovde u pitanju zaista singularni integral. Tačnost izvedenog rezultata neposredno se može proveriti diferenciranjem. Na ovaj način moguće je naći veći broj integrala, ali smo se ograničili na ova dva integrala. Moguće je kod raznih drugih jednačina na sličan način dobiti znatan broj integrala. Poslednja dva primera su interesantna po tome što ulogu promenjive x u integralu može imati promenljiva y.

II

Klase diferencijalnih jednačina sa singularnim integralima

U vezi sa ovim slučajevima u odeljku I postavlja se pitanje poznavanja što većeg broja diferencijalnih jednačina za koje znamo singularne integrale. To pitanje može da se reši bar za neke klase jednačina zahvaljujući transormacijama dodira.

Poznato je da se kod jednačina funkcionalnog tipa

$$Y(x,y,y') = f\left[X(x,y,y')\right] \qquad 1.)$$

pri čemu je

$$[XY] \doteq 0$$

opšti integral dobija na taj način što se stavi

$$X(x,y,y') = C \qquad C = \text{const.} \qquad 2.)$$

i rešavajuću formulu 2.) po y' dobijamo

$$y' = N(x,y,C)$$

koje zamenjujemo u levu stranu jednačine 1.) i onda imamo za integral jednačine 1.)

$$\mathcal{J}(x,y,C) \equiv \mathcal{Y}\left[x,y,\mathcal{N}(x,y,C)\right] - f(C) = 0.$$

Lako je iz opšteg integrala 3.) ispitati kad će jednačina 1.) imati singularnog integrala.

Kao što je poznato /27/ imajući opšti integral neke diferencijalne jednačine u obliku

$$\mathcal{J}(x,y,C) = 0.$$

možemo znati da li odgovarajuća diferencijalna jednačina ima singularnog integrala. Potrebno je da su zadovoljeni uslovi

$$D \equiv \begin{vmatrix} \mathcal{J}_x & \mathcal{J}_y \\ \mathcal{J}_{xc} & \mathcal{J}_{yc} \end{vmatrix} \gtreqless 0 \qquad 4.) \qquad\qquad \mathcal{J}_{cc} \neq 0 \qquad 5.)$$

Da bi uprostili razmatranje uzimaćemo specijalne slučajeve transformacija dodira i ispitivaćemo da li funkcionalne jednačine obrazovane od njih – zadovoljavaju uslove 4.) i 5.). Treba imati na umu da ako su uslovi 4.) i 5.) zadovoljeni onda je postojanje singularnog integrala sigurno, a ako to nije onda je neizvesnost da li ga ima diferencijalna jednačina ili ne.

Podjimo od transformacije dodira čija je jedna formula

$$x_1 = X(x,y') \qquad a.)$$

odavde je

$$y' = K(x,x_1)$$

Integracijom, po Ermakovu, dobijamo drugu formulu

$$y - \left| \int K(x,x_1)\,dx \right|_{x_1 = X} = y_1 \qquad b.)$$

pri čemu zagrade pored integrala znače da treba posle izvršene integracije zameniti x_1 izrazom iz formule a.)

Funkcionalna jednačina

$$y_1 = f(x_1)$$

za ovaj slučaj biće oblika

$$y - \left| \int K(x,x_1)\,dx \right|_{x_1 = X} = f\left[X(x,y')\right] \qquad c.)$$

Integral jednačine c.) dobićemo kad u samu jednačinu stavimo da je

X = C pa ćemo imati

$$\mathcal{J}(x,y,C) \equiv y - \int \mathcal{K}(x,C)\,dx - f(C) = 0 \,. \qquad d.)$$

Napišimo sad uslove 4.) i 5.) za slučaj opšteg integrala d.) jednačine c.)

Najpre pripremimo obrasce

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{K}(x,C)\,, \quad \mathcal{J}_y = 1\,, \quad \mathcal{J}_{xc} = \mathcal{K}'_c(x,C)\,, \quad \mathcal{J}_{yc} = 0$$

$$\mathcal{J}_c = -\left[\int \mathcal{K}(x,C)\,dx\right]'_c - f'_c(c)$$

Imamo determinantu

$$D \equiv \begin{vmatrix} \mathcal{J}_x & \mathcal{J}_y \\ \mathcal{J}_{xc} & \mathcal{J}_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{K}(x,C) & 1 \\ \mathcal{K}'_c(x,C) & 0 \end{vmatrix} = -\mathcal{K}'_c(x,C) \neq 0$$

i isto tako

$$\mathcal{J}_{cc} = -\left(\int \mathcal{K}(x,c)\right)''_{cc} - f'_c(c) \neq 0$$

Kao što se vidi uslovi 4.) i 5.) za slučaj ovih fukcionalnih jednačina su zadovoljeni - i prema tome funkcionalna jednačina c.) ima singularnog integrala.

Na sličan način za transformacije

$$x_1 = X(y,y') \qquad y' = \varphi(y,x_1)\,, \quad y_1 = x - \left|\int \frac{1}{\varphi(y,x_1)}\,dy\right|_{x_1 = X} \,. \qquad a')$$

imamo funkcionalnu jednačinu

$$x - \left|\int \frac{1}{\varphi(y,x_1)}\,dy\right|_{x_1 = X} = f\left[X(y,y')\right]$$

čiji je integral

$$\mathcal{J}(x,y,C) \equiv x - \int \frac{1}{\varphi(y,C)}\,dy - f(C) = 0$$

Uslovi 4.) i 5.) za ovaj slučaj daju

$$D \equiv -\frac{1}{\varphi^2(y,C)} \cdot \varphi'_c(y,C) \neq 0 \qquad 4.)$$

$$\mathcal{J}_{cc} = -\left(\int \frac{1}{\varphi(y,c)}\,dy\right)''_{cc} - f''_{cc}(c) \neq 0 \qquad 5.)$$

Prema tome i ova klasa jednačina ima singularnih integrala.

Kao dalji slučaj navedimo transformacije

$$x_1 = \mathcal{R}(x) + \mathcal{H}(y \cdot y') \quad , yy' = \mathrm{L}[x_1 - \mathcal{R}(x)] \; , \; y_1 = \int \mathrm{L}[x_1 - \mathcal{R}(x)]dx - \frac{y^2}{2} \qquad d.)$$

koje nam daju jednačinu funkcionalnog tipa

$$\left| \int \mathrm{L}[x_1 - \mathcal{R}(x)]dx \right|_{x_1 = \mathcal{X}} - \frac{y^2}{2} = f\left[\mathcal{R}(x) + \mathcal{H}(yy')\right] \qquad e.)$$

čiji je integral oblika

$$\mathcal{J}(x,y,C) \equiv \int \mathrm{L}[C - \mathcal{R}(x)]\,dx - \frac{y^2}{2} - f(C) = 0$$

lako je izračunati potrebne izvode

$$\mathcal{J}_x = \mathrm{L}[C - \mathcal{R}(x)] \quad \mathcal{J}_y = -y \quad , \quad \mathcal{J}_{xC} = \mathrm{L}'_C[C - \mathcal{R}(x)]$$

$$\mathcal{J}_C = \left(\int \mathrm{L}[C - \mathcal{R}(x)]\,dx \right)'_C - f'_C(C)$$

Zato imamo odgovarajuće uslove 4.) i 5.)

$$D \equiv y \cdot \mathrm{L}'_C[C - \mathcal{R}(x)] \neq 0 \qquad 4.)$$

$$\mathcal{J}_{CC} = \left(\int \mathrm{L}[C - \mathcal{R}(x)]\,dx \right)''_{CC} - f''_C(C) \neq 0 \qquad 5.)$$

Potpuno analog slučaj evim do sada izloženim je i slučaj transformacije

$$x_1 = g(x)\,\mathcal{M}\left(\frac{y^n}{y'}\right) \quad , \frac{y'}{y^n} = \rho\left[\frac{x_1}{\mathcal{R}(x)}\right] \quad , \frac{y^{-n+1}}{-n+1} - \left| \int \rho\left[\frac{x_1}{\mathcal{R}(x)}\right] dx \right|_{x_1 = \mathcal{X}} = y_1$$

gde su g, M kakve bilo funkcije koje daju odgovarajuću funkcionalnu jednačinu kao i njen integral.

Ispitajmo sad opšti slučaj funkcionalne jednačine

$$\mathcal{Y}(x,y,y') = f\left[\mathcal{X}(x,y,y')\right] \qquad 1.)$$

pri čemu su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ u involuciji i kao što smo videli: opšti integral ove jednačine je

$$\mathcal{J}(x,y,C) \equiv \mathcal{Y}\left[x, y, \mathcal{N}(x,y,C)\right] - f(C) = 0. \qquad 3.)$$

Iz ovog odnosa imamo potrebne izvode

$$\mathcal{J}_x = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \mathcal{N}} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \qquad \mathcal{J}_y = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \mathcal{N}} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y}$$

$$\mathcal{J}_{xC} = \frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial \mathcal{N}^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial C} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \mathcal{N}} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial x \partial C} \qquad \mathcal{J}_{yC} = \frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial \mathcal{N}^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial C} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \mathcal{N}} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial y \partial C}$$

$$\mathcal{J}_C = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \mathcal{N}} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial C} - f'(C)$$

poslednji od ovih izvoda daje uslov 5.)

$$J_{cc} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial c}\right)^2 + \frac{\partial \bar{y}}{\partial N}\cdot\frac{\partial^2 N}{\partial c^2} - f''(c) \neq 0 \qquad 5.)$$

Ovaj izraz samo u specijalnim slučajevima može biti ravan nuli inače u opštem slučaju nije jednak nuli.

Za ovaj slučaj determinanta iz uslova 4.) imaće oblik

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial N^2}\cdot\frac{\partial N}{\partial c}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}\right) + \frac{\partial y}{\partial N}\cdot\frac{\partial^2 N}{\partial y\,\partial c}\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial N}\cdot\frac{\partial N}{\partial x}\right) - \frac{\partial y}{\partial N}\,\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial c}\left(\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial N}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\right) \neq 0 \qquad 4.)$$

Na ovaj način se vidi da vrednost determinante u opštem slučaju nije nula i onda zaključujemo da funkcionalne jednačine 1.) u opštem slučaju imaju singularnih integrala.

VI G L A V A

Primena transformacija dodira na integraciju običnih diferencijalnih jednačina II reda.

U II glavi videli smo da tri funkcije od

$$x_1 = X(x,y,y') \qquad y_1 = Y(x,y,y') \qquad y_1' = P(x,y,y') \tag{1.}$$

daju transformaciju dodira ako je zadovoljen uslov

$$[XY] = 0. \tag{2.}$$

i zatim

$$y_1' = P(x,y,y') = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y'}}{\frac{\partial X}{\partial y'}} \tag{3.}$$

Ako su uslovi 2) i 3) ispunjeni, onda funkcije 1) čine transformaciju dodira. Medjutim, gornje transformacije 1) moguće je dopuniti još jednom formulom. Znajući da je prema poslednjem obrascu iz 1)

$$y_1'' = \frac{dy_1'}{dx_1} = \frac{dy_1'}{dx} \Big/ \frac{dx_1}{dx} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}y' + \frac{\partial P}{\partial y'}y''\right) \Big/ \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}y' + \frac{\partial X}{\partial y'}y''\right) \tag{4.}$$

to možemo gornju transformaciju 1) dopuniti i obrascem 4), pa ćemo imati

$$x_1 = X(x,y,y') \qquad y_1 = Y(x,y,y') \qquad y_1' = P(x,y,y') \qquad y_1'' = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}y' + \frac{\partial P}{\partial y'}y''}{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}y' + \frac{\partial X}{\partial y'}y''} \tag{5.}$$

Obrasci 5) pri uslovima 2) i 3), pretstavljaju transformaciju dodira kompletniju nego što je transformacija 1), a sem toga transformacija 5) pruža nove mogućnosti za primenu kod problema integracije. Iako su transformacije 5) navedene kod nekih autora kao S. Lie /7/, Liebmann /8/, Lainé /13/ ipak su nepoznati u literaturi slučajevi primene ovih transformacija na integraljenje običnih diferencijalnih jednačina II reda. U ovoj glavi pozabavićemo se tim problemom.

Neka je data jednačina II reda

$$S(x,y,y',y'') = 0 \tag{6.}$$

i neka se ona transformacijom dodira 5) svodi na jednačinu

$$T(x_1,y_1,y_1',y_1'') = 0. \tag{7.}$$

u novim promenljivim, čiji je prvi integral

$$K(x_1,y_1,y_1',C_1) = 0, \tag{8.}$$

odakle imamo opet integral jednačine 7)

$$L(x_1,y_1,C_1,C_2) = 0$$

Osnovna formula transformacija dodira je

$$\Phi(x_1, y_1, x, y) = 0 \qquad 10.)$$

Jednačine 8),9),10) su algebarski nezavisne, pri čemu u jednačini 8) može biti stavljeno $y_1' = P(x,y)$ - kad y_1' nezavisi od y' što je u velikom broju slučajeva moguće. Ako to nije moguće - onda iz 2) i 3) jednačine sistema 1), može se eliminisati y' i dobiti

$$y_1' = \tau(x, y, x_1, y_1) \qquad 11.)$$

dakle, y_1' izraženo pomoću x, y, x_1, y_1. Na ovaj način možemo obrazovati pomenuti sistem

$$K[x, y, \tau(x, y, x_1, y_1), C_1] = 0 \qquad L(x_1, y_1, C_1, C_2) = 0. \qquad \Phi(x_1, y_1, x, y) = 0. \qquad 12.)$$

Eliminacijom x_1, y_1 iz ovog sistema dobija se

$$J(x, y, C_1, C_2) = 0. \qquad 13.)$$

što pretstavlja integral polazne jednačine 6).

Da bi objasnili izbliže izloženi postupak, uzmimo jednačinu II reda oblika

$$y y'^3 (y' - x y'') = x y'^5 + (y' - x y'')^2 \qquad a.)$$

koju možemo napisati u obliku

$$y = \frac{x}{y'} \frac{y'^3}{y' - x y''} + \frac{y' - x y''}{y'^3} \qquad b.)$$

Ako u ovoj jednačini uočimo izraz

$$\frac{x}{y'} = x_1$$

kao prvu formulu transformacija, onda dobijamo prema formuli 4) - služeći se za dobijanje metodom Ermakov-a-ove obrasce

$$x_1 = \frac{x}{y'}, \qquad \frac{x}{y'} y - \frac{x^2}{2} = y_1 \qquad y_1' = y \qquad y_1'' = \frac{y'^3}{y' - x y''} \qquad c.)$$

Gornja jednačina b), na osnovu transformacija c) postaje

$$y_1' = x_1 y_1'' + \frac{1}{y_1''} \qquad d.)$$

Kako jednačina d) pretstavlja Klairaut-ovu jednačinu po promenljivoj y_1' to imamo najpre

$$y_1' = C_1 x_1 + \frac{1}{C_1} \qquad e.)$$

Integraleći dalje jednačinu e) dobijamo

$$y_1 = C_1 \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{C_1} x_1 + C_2 \qquad f.)$$

Obrazujmo sistem od jednačina e) i f.) i osnovne formule Φ iz sisteme c.) pri čemu ćemo y_1' zameniti vrednošću koju daje treća jednačina iz transformacija c) - pa će biti

$$y = C_1 x_1 + \frac{1}{C_1} \qquad y_1 = C_1 \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{C_1} x_1 + C_2 \qquad y_1 = x_1 y - \frac{x^2}{2} \qquad g.)$$

Eliminacijom $x_1 y_1$ iz poslednjeg sistema dobija se

$$\frac{1}{2}\frac{1}{C_1}\left(y-\frac{1}{C_1}\right)^2=\frac{x^2}{2}+C_2 \qquad h.)$$

kao integral polazne jednačine a).

Navedimo dalje slučaj jednačine

$$xy^2(yy''-y'^2)=y'y^3+(yy''-y'^2)^2 \qquad a_1)$$

koju možemo napisati u obliku

$$x=\frac{y'}{y}\,\frac{y^2}{yy''-y'^2}+\frac{yy''-y'^2}{y^2} \qquad b.)$$

Uočavajući izraz

$$\frac{y'}{y}=x_1$$

možemo na gore pomenuti način obrazovati transformacije

$$x_1=\frac{y'}{y} \qquad y_1=x\frac{y'}{y}-\ln y \qquad y_1'=x \qquad y_1''=\frac{y^2}{yy''-y'^2} \qquad c.)$$

Koristeći ove transformacije jednačina postaje

$$y_1'=x_1y_1''+\frac{1}{y_1''} \qquad d.)$$

koja pretstavlja već korišćenu Clairautovu jednačinu, čiji je integral oblika

$$y_1'=C_1x_1+\frac{1}{C_1} \qquad e.)$$

odakle dobijamo ponovnom integracijom

$$y_1=\frac{1}{2}C_1x_1^2+\frac{1}{C_1}x_1+C_2 \qquad f.)$$

što pretstavlja integral jednačine d.). Po analogiji na raniji slučaj imamo sistem za eliminaciju x_1 i y_1 ovog oblika

$$x=x_1C_1+\frac{1}{C_1} \qquad y_1=\frac{1}{2}C_1x_1^2+\frac{1}{C_1}x_1+C_2 \qquad y_1=xx_1-\ln y \qquad g.)$$

odakle je posle eliminacije x_1 i y_1

$$\frac{1}{2}\frac{1}{C_1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)^2=\ln y+C_2$$

što pretstavlja integral polazne jednačine.

Uzmimo dalje jednačinu

$$yy''+y'^2=1+\frac{1}{x+a} \qquad a.)$$

koju možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{yy''+y'^2-1}=x+a \qquad b.)$$

Uzimajući transformacije

$$x_1=x-yy' \qquad y_1=\frac{x^2+y^2}{2}-xyy' \qquad y_1'=x \qquad y_1''=\frac{1}{yy''+y'^2-1} \qquad c.)$$

gornja jednačina a.) se transformiše u jednačinu

$$y_1''+y_1'=a \qquad d.)$$

čiji je prvi integral

$$y_1'+a=C_1e^{-x_1} \qquad e.)$$

a odavde posle druge integracije proizilazi

$$y_1+ax_1=-C_1e^{-x_1}+C_2 \qquad f.)$$

Prema ovome sistem za eliminaciju x_1 i y_1 imaće ove tri jednačine

$$x+a=C_1 e^{-x_1} \qquad y_1=-ax_1-C_1 e^{-x_1}+C_2 \qquad y_1=\frac{y^2-x^2}{2}+xx_1 \qquad g.)$$

odakle posle eliminacije kao i u malopredjašnjem slučaju dobijamo

$$y^2=x^2-2(x+a)\left[1-\ln\frac{x+a}{C_1}\right]+C_2$$

što pretstavlja integral jednačine d).

Ispravnost svih dobijenih rezultata lako možemo proveriti diferenciranjem, pri čemu eliminacijom konstanata iz I i II izvoda dobijamo diferencijalnu jednačinu odredjenog oblika.

Prema svemu izloženom u ovoj glavi, dali smo postupak kako se mogu pomoću transformacija dodira dobiti integrali običnih diferencijalnih jednačina drugoga reda - što dosad nije bilo navedeno u literaturi. Što se tiče parcijalnih jednačina drugoga reda - njima se je bavio, sa gledišta transformacija dodira, prof. N. Saltikov /28/ i integralio više važnih parcijalnih jednačina drugoga reda.

B.) Drugi deo

Parcijalne diferencijalne jednačine.

I Glava

Transformacije dodira za parcijalne jednačine

1) Opšte napomene i način obrazovanja transformacija.

Kako smo već ranije naveli - u XVIII veku i docnije korišćene su transformacije dodira. Za parcijalne jednačine Euler i Legendre su uveli stare izvode kao nove promenljive. Pored ovih još je i Ampère koristio transformacije koje nose njegovo ime. Medjutim je analitičku teoriju dao Jakobi - a kao što je već pomenuto - S. Lie je dao ovim transformacijama naziv. Medjutim, za praktičnu primenu transformacija dodira u širem obimu - sa mnogo novih priloga - zalaguo se V.P.Ermakov što smo već ranije napomenuli. Dokazi koje je dao S.Lie su jako komplikovani dok je Goudere /29/ dao znatno prostije. Ipak najdoslednije u duhu zamisli V.P. Ermakov-a dao je znatne teorijske priloge i primene prof. N. Saltikov /13,14,26/

Definicija transformacija dodira, potpuno analoga onoj za obične diferencijalne jednačine, za parcijalne jednačine sastoji se u ovome:

Podjimo od pet formula

$$x_1=X(x,y,z,p,q),\ y_1=Y(x,y,z,p,q),\ z_1=Z(x,y,z,p,q),\ p_1=P(x,y,z,p,q),\ q_1=Q(x,y,z,p,q) \quad 1)$$

pri čemu je

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y} \qquad p_1=\frac{\partial z_1}{\partial x_1} \qquad q_1=\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$$

Uzeli smo u razmatranje funkciju $z=z(x,y)$ od dve promenljive mada se sve ovo može izvesti i za funkcije sa više promenljivih. Zadržaćemo se, za naša razmatranja, na funkciji sa dve promenljive.

Za obe funkcije z, z_1 važe izrazi za totalni diferencijal i prema tome će biti

$$dz=p\,dx+q\,dy \quad 2.) \qquad\qquad dz_1=p_1\,dx_1+q_1\,dy_1 \quad 3)$$

Pored ovog jednačine 1) treba da su rešljive po starim promenljivim. Pod ovim uslovima obrasci 1),2) i 3) definišu jednu transformaciju dodira.

Treba napomenuti da ako eliminacija p i q iz prve tri jednačine sist 1) daje samo jednu funkciju

$$\Phi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0. \qquad 4.)$$

onda transformacija 1) pripada prvoj klasi a jednačina 4) pretstavlja osnovnu formulu transformacije 1).

Ako eliminacija p i q iz prve tri jednačine sistema 1) daje dve funkci.

$$\Phi_1(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0. \qquad \Phi_2(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0, \qquad 5.)$$

onda imamo transformaciju druge klase, a obe jednačine pretstavljaju osnovne formule transformacije.

Najzad, ako se x,y,z izražavaju kao funkcije od x_1,y_1,z_1 onda imamo punktualne transformacije gde više ne figuriše izvodi.

Posmatrajmo najpre slučaj transformacija prve klase. Diferenciranjem jednačine 4) dobijamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}dz_1=0 \qquad 6.)$$

Koristeći izraze dz i dz_1 iz formula 2) i 3) dobijamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}p=0 \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}q=0. \quad 7.) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}p_1=0. \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}q_1=0. \quad 8.)$$

jer osim 4) ne postoji nikakva druga relacija pa će formula 6) biti zadovoljena pri uslovima 7.) i 8.) Jednačine 4),7) i 8) ne mogu dati ni jednu drugu relaciju nego transformacije 1) – kao što transformacije 1) daju formulu 4) a iz ove proizilaze formule 7) i 8). Prema ovom formule 4), 7) i 8) odredjuju transformaciju dodira.

Kako jednačine 8) odredjuju

$$p_1=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} \qquad q_1=-\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} \qquad 9.)$$

to jednačine 4) i obe jednačine 7) moraju odrediti prve tri jednačine sistema 1).

Za tri prve jednačine važi uslov involucije

$$[X\,Y]=0. \qquad [X\,Z]=0 \qquad [Y\,Z]=0. \qquad 10.)$$

koji se izvodi na sličan način kao i za obične diferencijalne jednačine.

Predjimo sad na transformacije druge klase. Iz jednačina 5) možemo napisati

$$z=V(x,x_1,y_1,z_1) \qquad y=\varphi(x,x_1,y_1,z_1)$$

a iz ovog imamo

$$dz=V_x dx+V_{x_1}dx_1+V_{y_1}dy_1+V_{z_1}dz_1 \qquad dy=\varphi_x dx+\varphi_{x_1}dx_1+\varphi_{y_1}dy_1+\varphi_{z_1}dz_1$$

Unesemo li ove izraze u relaciju 2) i ako eliminišemo diferencijal dz_1 na osnovu 3) dobijamo

$$\left(p-\bar{V}_x+\varphi_x\cdot q\right)dx+\left[\left(\varphi_{z_1}\cdot q-\bar{V}_{z_1}\right)p_1+\varphi_{x_1}\cdot q-\bar{V}_{x_1}\right]dx_1+\left[\left(\varphi_{z_1}\cdot q-\bar{V}_{z_1}\right)q_1+\varphi_{y_1}\cdot q-\bar{V}_{y_1}\right]dy_1=0.$$

Kako su x, x_1, y_1 nezavisne promenljive količine – to, pošto diferencijali dx, dx_1, dy_1 nisu nule, to su funkcije koje ih množe ravne nuli – dakle

$$p-\bar{V}_x+q_x\cdot q=0 \qquad \left(\varphi_{z_1}\cdot q-\bar{V}_{z_1}\right)p_1+\varphi_{x_1}\cdot q-\bar{V}_{x_1}=0 \qquad \left(\varphi_{z_1}\cdot q-\bar{V}_{z_1}\right)\cdot q_1+\varphi_{y_1}\cdot q-\bar{V}_{y_1}=0.$$

a onda iz ovih jednačina

$$p_1=-\frac{V_{x_1}-\varphi_{x_1}\cdot q}{V_{z_1}-\varphi_{z_1}\cdot q} \qquad q_1=-\frac{\bar{V}_{y_1}-\varphi_{y_1}\cdot q}{V_{z_1}-\varphi_{z_1}\cdot q} \qquad p=V_x-\varphi_x\cdot q$$

Uvodeći oznaku

$$S\equiv \bar{V}-\varphi\cdot q$$

možemo napisati prethodne obrasce

$$p=S_x \quad 12.) \qquad p_1=-\frac{S_{x_1}}{S_{z_1}} \quad 13.) \qquad q_1=-\frac{S_{y_1}}{S_{z_1}} \quad 14.)$$

pri čemu se sve promenljive smatraju kao nezavisne. Odnosi 11) i 12) su ekvivalentni obrascima 1) – prvim trima jednačinama. Zadržaćemo se na ovom načinu obrazovanja transformacija s napomenom da se može još jedan način upotrebiti. Taj drugi način sastoji se u ovome: uzmu se dve funkcije od x, y, z, p, q koje se nalaze u involuciji

$$x_1=X(x,y,z,p,q) \qquad y_1=Y(x,y,z,p,q)$$

i onda se integracijom ovog sistema – smatrajući x_1 i y_1 kao konstante dobija potpuni integral

$$z=\tau(x,y,z,x_1,y_1,z_1)$$

gde z_1 igra ulogu konstante – odnosno nove funkcije. Primer transformacija druge klase je transformacija koja se dobija iz ove dve funkcije

$$z=z_1+x_1x \qquad y=y_1$$

odakle se dobija poznata Ampere-ova transformacija pomoću obrazaca 12) i 13)

$$x_1=p \qquad y_1=y \qquad z_1=z-xp \qquad p_1=-x \qquad q_1=q \qquad 15.)$$

Za transformacije prve klase Ermakov je pokazao način obrazovanja transformacija pomoću izvesnog datog izraza od promenljivih uzetog kao prvi obrazac transformacije – dakle,

$$x_1=X(x,y,z,p,q)$$

smatra kao parcijalnu jednačinu i integrali: ako dobije potpuni integral onda taj integral

$$\Phi(x,y,z,x_1,C_1,C_2)=0$$

smatra kao osnovnu formulu transformacije pri čemu C_1 i C_2 uzima kao y_1. Imajući osnovnu formulu transformacije Φ i x_1 – dobija sve ostale obrasce. Ako je obrazac za x_1 linearna jednačina po p i q onda se uzima d

$$C_1 = f(C_2) \equiv \alpha C_2 + \beta$$

i odatle kao iz osnovne formule transformacija dobijajú se obrasci za p_1 i q_1 jer već C_1 pretstavlja y_1 a C_2 je z_1 Najčešće je dovoljno uzeti $\alpha = 0$. U narednoj glavi prikazaćemo ovaj slučaj.

2) Integracija parcijalnih jednačina pomoću transformacija dodira.

Parcijalna jednačina prvog reda

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \qquad 16.)$$

pomoću transformacija dodira

$$x_1 = X(x,y,z,p,q) \quad y_1 = Y(x,y,z,p,q) \quad z_1 = Z(x,y,z,p,q) \quad p_1 = P(x,y,z,p,q) \quad q_1 = Q(x,y,z,p,q) \qquad 1.)$$

pretvara se u jednačinu u novim promenljivim,

$$L(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0 \qquad 17.)$$

Ako se integrali jednačina u novim promenljivim 17) dobija se njen integral

$$z_1 = U(x_1, y_1, C_1, C_2) \qquad 18.)$$

Iz formule 18) lako dobijamo

$$p_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \qquad q_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1} \qquad 19.)$$

Iz formula 1), 18) i 19) možemo eliminisati $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, p, q$. Dakle, sedam veličina iz osam relacija iako tada dobijemo samo jednu relaciju – onda je ona integral polazne parcijalne jednačine 16). Medjutim, moguće je ovu eliminaciju izvesti i na drugi način. Uzmimo poznate formule 4) i 8), dakle,

$$4.)\ \Phi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_1 = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} q_1 = 0 \qquad 8.)$$

i u njima smenimo z_1, p_1, q_1 iz formula 18) i 19), tada iz tri jednačine 4) i 8) možemo eliminisati x_1, y_1 i dobiti integral polazne jednačine 16) u obliku

$$J(x, y, z, C_1, C_2) = 0. \qquad 20.$$

Može se desiti prilikom transformacije jednačine 16) pomoću transformacija 1) da se dobije funkcionalna jednačina u kojoj se javljaju samo nove promeljive x_1, y_1, z_1 bez parcijalnih izvoda p_1 i q_1.
Da bi smo došli do integrala jednačine 16 u tome slučaju pretpostavimo da je transformisana jednačina

$$z_1 = f(x_1, y_1) \qquad 21.)$$

Ako diferenciramo jednačinu 21) dobijamo

$$dz_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 \qquad 22.)$$

Odakle je, iskoristivši obrazac

$$dz_1 = p_1 dx_1 + q_1 dy_1$$

posle smene u 22)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - q_1\right) dy_1 = 0. \qquad 23.)$$

Izraz na levoj strani može se poništiti pod ovim pretpostavkama

a.) $dx_1 = 0.\ dy_1 = 0;$ b.) $y_1 = \varphi(x_1)$ $\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1 + \varphi'(x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - q_1\right) = 0;$ c.) $\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1 = 0, \frac{\partial f}{\partial y_1} - q_1 = 0$

Prvi slučaj pod a) daje odmah $x_1 = C_1, y_1 = C_2$ odakle se lako uvidja da će biti

$$x_1 \equiv X(x, y, z, p, q) = C_1 \qquad y_1 = Y(x, y, z, p, q) = C_2 \qquad 24.)$$

a ove dve jednačine će dati

$$p_1 = \varkappa_1(x, y, z, C_1, C_2) \qquad q_1 = \varkappa_2(x, y, z, C_1, C_2) \qquad 25.)$$

što posle smene u polaznu jednačinu 16) daje

$$F\left[x, y, z, \varkappa_1(x, y, z, p, q), \varkappa_2(x, y, z, p, q)\right] = 0. \qquad 26.)$$

Ova jednačina svakako pretstavlja potpuni integral jednačine 16).

Slučaj b) daje opšti, a slučaj c) singularni integral jednačine 16), pri uslovima da se opšti integral 26 može napisati u obliku

$$z = V(x, y, C_1, C_2) \qquad 27.)$$

i da su determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2 \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2 \partial y} \end{vmatrix} \gtrless 0 \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial C_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial C_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial C_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2^2} \end{vmatrix} \lessgtr 0$$

različite od nule kako je iscrpnije navedeno u knjizi prof. N. Saltikova /1/ str. 68-72, /36/.

Kako smo već ranije napomenuli u poslednje vreme B.Bašnjski bavio se je proučavanjem ovih funkcionalnih jednačina i ispitivao uslove pri kojima će se parcijalna jednačina izvesnim transformacijama svesti na funkcionalnu i obrnuto.

II G l a v a

U ovoj glavi pozabavićemo se primenom transformacija dodira na parcijalne jednačine prvog reda. Ta primena će biti u duhu onih izlaganja koja smo učinili u odeljku A) koji se odnosi na obične diferencijalne jednačine.

1.

Najpre se zadržimo na jednačini

$$x^2(xp+yq-z)^2=y^2q \qquad 6.108$$

koju navodi Kamke u svom registru pod br. 6108 a koja ustvari pretstavlja jednu od jednačina koje se nalaze u knjizi G.Julia "Exercices d' Analyse" IV t. str. 174-176. U navedenoj knjizi pomenuta jednačina integraljena je na osnovu geometriskih razmatranja, dok je kod Kamke-a primenjena Lagrange-Charpit-eva metoda i nadjen je potpun integral

$$z=-\frac{A^2x^2}{y}+A+Bx$$

Medjutim, ako se iz gornje jednačine uzme izraz

$$z-px-yq=x_1 \qquad a)$$

kao prva formula transformacija dodira - onda se, integraleći je kao linearnu parcijalnu jednačinu prvog reda, dobija po načinu Ermakov-a objašnjenog u prošloj glavi

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-x_1} \qquad b.)$$

odakle dobijamo iz prve dve razmere

$$\frac{y}{x}=C_1 \qquad c.)$$

a iz prve i treće razmere

$$\frac{z-x_1}{x}=C_2 \qquad d.)$$

Uzimajući C_1 za y_1 i C_2 za z_1 pri čemu je dovoljno uzeti

$$C_2=f(C_1)=\beta \qquad e)$$

imamo iz d) obrazac

$$z-x_1=z_1\cdot x$$

koji pretstavlja osnovnu formulu transformacija. Lako dobijamo iz a),c) i f)

$$x_1=z-px-yq \qquad y_1=\frac{y}{x} \qquad z_1=p+\frac{y}{x}\cdot q$$

Pošto su ovo transformacije druge klase to ćemo uzeti

$$z = z_1 x + x_1 \qquad , \qquad y = y_1 x$$

kao osnovne formule pa imamo

$$S = z_1 x + x_1 - q y_1 x$$

odakle dobijamo

$$p_1 = -\frac{S_{x_1}}{S_{z_1}} = -\frac{1}{x} \qquad q_1 = -\frac{S_{y_1}}{S_{z_1}} = q$$

Ova transformacija je navedena u knjizi prof. N. Saltikova / / str. 572–573. Tako, najzad, imamo transformaciju dodira

$$x_1 = z - px - yq \quad y_1 = \frac{y}{x} \quad z_1 = p + \frac{y}{x} \cdot q \quad p_1 = -\frac{1}{x}, \quad q_1 = q \qquad g.)$$

pomoću kojih gornja jednačina 6108 postaje prosta jednačina.

K

$$x_1^2 = y_1^2 \cdot q_1 \qquad h.)$$

koja razdvaja promenljive. Integral ove jednačine je oblika

$$z_1 = -\frac{x_1^2}{y_1} + \mu(x_1)$$

pri čemu možemo za $\mu(x_1)$ uzeti linearnu funkcije tako daintegral ima oblik

$$z_1 = -\frac{x_1^2}{y_1} + \alpha x_1 + \beta \qquad j.)$$

Iz potpunog integrala j) i njegovih izvoda vraćajući se na stare promenljive x, y, y' dobijamo tri jednačine

$$p + \frac{y}{x} q = \alpha(z - px - yq) + \beta - \frac{(z - px - qy)^2}{y} \cdot x$$

$$-\frac{1}{x} = \alpha - 2\frac{z - px - qy}{y} \cdot x \qquad q = \frac{(z - px - qy)^2}{y^2} \cdot x^2$$

iz kojih eliminacijom p i q dobijamo integral jednačine 6108

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \alpha\right)^2 \cdot y + \beta x = z \qquad k.)$$

koji se razlikuje od onog koji Kamke navodi, a koji se nalazi i kod G. Julia.

Postupimo sad prema ranijem našem načinu – uzimajući opštiji polazni obrazac transformacija

$$x_1 = z - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} p - yq \qquad l.)$$

odakle dobijamo kao i u gornjim transformacijama potpuno analogo sve ostale obrasce – tako da imamo transformaciju

$$x_1 = z - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} p - yq, \quad y_1 = \frac{y}{\varphi(x)}, \quad z_1 = \frac{1}{\varphi'(x)} p + \frac{1}{\varphi(x)} y \cdot q, \quad p_1 = -\frac{1}{\varphi(x)}, \quad q_1 = q \qquad m.)$$

Transformacije m) svode se na malopređašnje g.) za $\varphi(x) = x$

Zadržimo istu rezolventu h)

$$x_1^2 = y_1^2 \cdot q_1 \qquad h.)$$

i smenjujući u nju gornje transformacije m) dobićemo jednačinu oblik

$$\left[z - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} p - yq\right]^2 = \left[\frac{y}{\varphi(x)}\right]^2 \cdot q \qquad n.)$$

čiji integral dobijamo iz sistema

$$z_1 = -\frac{x_1^2}{y_1} + \alpha x_1 + \beta \qquad p_1 = \alpha - 2\frac{x_1}{y_1} \qquad q_1 = \frac{x_1^2}{y_1}$$

vraćajući se na stare promenljive x, y, z, p, q. Imaćemo, dakle, sistem

$$\frac{1}{\varphi'(x)}p + \frac{1}{\varphi(x)}yq = \alpha\left(z - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}p - yq\right) + \beta - \frac{\left(z - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}p - yq\right)^2}{y}\cdot\varphi(x)$$

$$-\frac{1}{\varphi} = \alpha - 2\,\frac{z - \frac{\varphi}{\varphi'}p - yq}{y}\cdot\varphi \qquad q = \left(\frac{z - \frac{\varphi}{\varphi'}p - yq}{y}\right)^2$$

Iz ovog sistema se dobija

$$z = \frac{y}{4}\left[\alpha + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^2 + \beta\varphi(x)$$

koji se za $\varphi(x) = x$ svodi na predjašnji integral k).

2.

Posmatrajmo dalje parcijalnu jednačinu

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad 1.)$$

koja se transformacijama dodira

$$x_1 = X(x, y, z, p, q) \qquad y_1 = Y(x, y, z, p, q) \qquad z_1 = Z(x, y, z, p, q) \qquad 2.)$$

svodi na funkcionalnu jednačinu

$$z_1 = f(x_1, y_1) \qquad 3.)$$

Kao i kod običnih diferencijalnih jednačina u glavi V prvoga dela A) ovoga rada – zadržimo se na pitanju singularnog integrala parcijalne jednačine 1). Neka je potpuni integral jednačine 1) dat u obliku

$$z = V(x, y, z, C_1, C_2) \qquad 4.)$$

Imaćemo poznate jednačine

$$z = V(x, y, z, C_1, C_2) \qquad \frac{\partial V}{\partial C_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial C_2} = 0 \qquad 5.)$$

koje odredjuju singularni integral uz uslove

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2 \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2 \partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial C_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial C_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial C_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

što smo naveli u prvoj glavi ovog drugog odeljka.

Kao što je poznato, singularni integral jednačine 1) dobija se isto tako i iz sistema

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad 6)$$

a sistem 5) služi za proveravanje da li je u pitanju zaista singularni integral pri čemu se koriste determinante malopre navedene.

Idući za idejama koje smo u odeljku za obične diferencijalne jednačine izložili u V glavi – u slučaju parcijalnih jednačina možemo smatrati da jednačine

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \qquad 7.)$$

ili isto tako

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad 8.)$$

čine sistem parcijalnih jednačina. Dakle, jedna od jednačina iz sistena 7) i 8) pretstavlja ustvari parcijalnu jednačinu koja ima singularni integral a druga je ustvari njen izvod po p ili q. Da bi proverili da li jednačina ima singularnog integrala, potrebno je da znamo njen opšti integral, a to je moguće za najveći broj ovih parcijalnih jednačina koje se transformacijama dodira svode na funkcionalan tip. Zbog toga, ako smo za jednu od jednačina sigurni da se može svesti na funkcionalan tip pomoću transformacija dodira i na osnovu toga ispitamo da li ima singularnog integrala, kao i to da je druga jednačina njen izvod po jednom od parcijalnih izvoda – onda možemo primeniti ovu metodu kojom se dobija algebarskim putem integral takvog sistema.

Da bi ovo prikazali uzmimo sistem

$$z-px-qy\ln y=(p^2-yq)^2+yq \qquad 4p(p^2-yq)+x=0 \qquad a.)$$

Iz prve jednačine sistema uzimajući

$$x_1=p^2-yq \qquad b.)$$

odakle je po metodi Krenkov-a

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{2p^2-yq}=-\frac{dp}{0}=-\frac{dq}{-q}$$

što daje iz druge i poslednje

$$yq=y_1 \qquad c.)$$

tako da jednačine b) i c) rešene po p i q daju totalni diferencijal zda

$$dz=\sqrt{x_1+y_1}\,dx+\frac{y_1}{y}dy$$

odakle se dobija

$$z=\sqrt{x_1+y_1}\cdot x+y_1\ln y+z_1$$

tako imamo transformacije

$$x_1=p^2-yq \qquad y_1=yq \qquad z_1=z-px-qy\ln y$$

koje prvu jednačinu svode na funkcionalni tip

$$z_1=x_1^2+y_1$$

Prema ovome opšti integral gornje jednačine biće

$$z=\sqrt{C_1+C_2}\,x+C_2(\ln y+1)+C_1^2$$

Proverimo na osnovu opšteg integrala da li gornja jednačina ima singularnog integrala. Izračunavajući determinantu

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 V}{\partial C_1\partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial x}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial C_1\partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial y}\end{vmatrix}=\frac{1}{2y}\cdot\frac{1}{\sqrt{C_1+C_2}}$$

kao i determinantu

$$D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial C_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial C_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial C_1 \partial C_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial C_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\frac{1}{(C_1+C_2)^3}\cdot x^2 - \frac{1}{2\sqrt{(C_1+C_2)^3}}\,x, \qquad x \neq 0$$

uvidjamo da pošto su ove determinanta različite od nule da ova jednačina ima singularnog integrala.

Lako je uvideti da je druga jednačina gornjega sistema njen izvod po p. Tim ovama jednačinama dodajmo i treću koja je ustvari izvod prve jednačine po q pa ćemo imati sistem odakle eliminišući p i q dobijamo

$$z = -\frac{1}{4}\frac{x^2}{\ln y + 1} - \frac{1}{4}(\ln y + 1)^2$$

što pretstavlja integral sistema a).

U knjizi prof. N. Saltikov-a /1/ str. 561 navedeni su slučajevi sistema dve jednačine oblika

$$u = f(w) \qquad v = \varphi(w)$$

gde su u, v, w funkcije x, y, z, p, q koje se nalaze u involuciji. Medjutim, u slučaju gornjeg sistema imamo drugi postupak.

Napomenimo činjenicu koja može imati izvesnih primena u eventualnom proučavanju u pravcu dosadašnjih izlaganja. Kako su p i q nadjeni algebarski iz obe izvodne jednačine – to s druge strane ako se uzme totalni diferencijal

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

imamo za naš slučaj

$$dz = -\frac{1}{2}\frac{x}{\ln y + 1}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{(\ln y + 1)^2} - (\ln y + 1)\right]dy$$

što prema rezultatu, koji smo maločas dobili, daje

$$z = -\frac{1}{4}\frac{x^2}{\ln y + 1} - \frac{1}{4}(\ln y + 1)^2$$

Znači totalni diferencijal dobili smo algebarskim putem. Istina je da u ovom slučaju to ne bi bilo teško i u običajenim načinom – ali ovo navodimo samo kao primer korišćenja jednog drugog postupka.

Prikažimo još jedan slučaj. Uzmimo sistem jednačine

$$z - px - yq\ln y - \frac{x^2}{2} = \frac{p+x}{yq} \qquad\qquad \ln y = \frac{p+x}{(yq)^2} \qquad a)$$

lako se uvidja da je druga jednačina izvod gornje jednačine po q ako dodamo ovoma sistemu izvod gornje jednačine po p imamo prostu jednačinu

$$yq = -\frac{1}{x} \qquad b)$$

Rešavanjem druge jednačine a) i jednačine b) po p i q imamo

$$p = \frac{1}{x^2}\ln y - x \qquad q = -\frac{1}{xy}$$

Zamenimo izraze za p i q u prvu jednačinu sistema a) pod pretpostavkom da ova jednačina ima singularnog integrala i dobijamo

$$z = -\frac{1}{x}\ln y - \frac{x^2}{2}$$

što pretstavlja integral sistema a). Da prva jednačina sistema a) ima singularnog integrala možemo se uveriti lako jer ako se stavi

$$x_1 = p + x \qquad y_1 = yq$$

vidi se odmah da su ovi izrazi u involuciji i onda je

$$p = x_1 - x \qquad q = \frac{y_1}{y}$$

usled čega totalni diferencijala

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

daje osnovnu formulu transformacije dodira

$$z = x_1 x - \frac{x^2}{2} + y_1 \ln y + z_1$$

odakle imamo definitivno transformacije

$$x_1 = p + x \qquad y_1 = yq \qquad z_1 = z - px - qy\ln y - \frac{x^2}{2}$$

pa se onda prva jednačina sistema a) svodi na funkcionalnu jednačinu oblika

$$z_1 = \frac{x_1}{y_1}$$

čiji se opšti integral dobija stavljajući

$$x_1 = C_1 \qquad y_1 = C_2.$$

i izračunavajući

$$p = C_1 - x \qquad q = \frac{C_2}{y}$$

pa zato potpuni integral gornje jednačine ima oblik

$$z = C_1 x + C_2 \ln y + \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{C_2}$$

Poznate determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = \frac{1}{y} \neq 0 \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C_2^2} \\ -\frac{1}{C_2^2} & 2\frac{C_1}{C_2^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{C_2^4} \neq 0$$

su različite od nule - prema tome jednačina ima singularni integral i izvedeni postupak izračunavanja daje ispravno rešenje gornjeg sistema jednačina a).

Ista primedba o totalnom diferencijalu možemo učiniti i ovde mada u pitanju slučaj sasvim jednostavan koji nije od posebnog interesa. Na ova dva slučaja prikazali smo kako je moguće iskoristiti osobin singularnih integrala parcijalnih jednačina za dobijanje integrala sistema jednačina, pri čemu su bile korišćenje funkcionalne jednač na koje možemo uvek naći opšti integral preko koga, kao što je poznato, se vrši proveravanje da li parcijalna jednačina ima singularnog integrala ili ne. U principu moguće je uvek primeniti pokazanu metodu ako smo sigurni da jedna od jednačina ima singularni integral a druga je njen izvod po jednoj od promenljivih p i q. Medjutim, to se može znati za relativno mali broj jednačina , a za ostale je najsigurnije proveravanje preko funkcionalnih jednačina odnosno transformacija dodira. Naravno da je ovo moguće ako se pomenutim transformacijama jednačine transformišu u funkcionalne, da bi preko opšteg integrala, koji je tada lako naći, bilo moguće rešiti ovo pitanje. Ako to nije slučaj, onda je teško proveriti da li jednačine imaju zaista singularnog integrala ili ne. Medjutim, kako je veliki broj jednačina funkcionalnog tipa i kako imamo veliki broj transformacija koje se u datom slučaju mogu formirati , to će svakako biti i znatan broj sistema ovih jednačina na koje je moguće primeniti gornju pokazanu metodu.

L I T E R A T U R A

1) N. SALTIKOV : "Metode integraljenja parcijalnih jednačina prvog reda s jednom nepoznatom funkcijom" S.A.N. 1947-Beograd.

2) V.P. ERMAKOV : "Universitetsskija izvestija" Kijev 1887,1889.

3) N. SALTIKOV : "Etude sur l'application des transformations de contact à l'integration d'équations differentielles" Publications mathématiques de Belgrade t.V. 1936.
"Teorija tangencijalnih transformacija" S.A.N. "Glas" CLXXV 1937 Beograd.
"Linearne tangencijalne transformacije" "Glas" S.A.N. CLXXXV 1941 Beograd.

4) .Mitrinović : "O integraciji jedne važne diferencijalne jednačine prvog reda" - "Glas" S.A.N. CLXXIII 1936 Beograd.

5) B. RAŠAJSKI : "O transformacijama dodira" - "Vesnik" Društva matem. i fizič. N.R.S. V,3-4,1953 -Beograd
"Sur les transformations de contact" Bulletin de la classe des sciences - Académie royale de Belgique 1954,5 série t.XL.

6) Dj. KARAPANDŽIĆ : "Conditions d'intégralité de l'équation de Riccati" Academie royale de Belgique 1941 t. XXVI 5 serie.
"Prilog primeni tangencijalnih transformacija na integraciju običnih diferencijalnih jednačina" "Godišnjak" Poljoprivr.šumar. fakulteta 1948. "Naučna knjiga - Beograd.
"Primedba o singularnim integralima diferencijalnih jednačina" "Vesnik" Društva matem. i fizič. N.R.S. III 1-2.1951.

7) S.Lie : "Theorie der Berührungstransformationen" Bd I Leipzig 1896
"Gesammelte Abhandlungen" Bd II Leipzig-Oslo 1937.

8) LIEBMANN: "Lehrbuch der Differentialgleichungen" 1901 Leipzig, Verlag von Veit.

9) A.MAYER: "Berichte über die Verhandlungen - Gesellschaft der Wissenschafften zu Leipzig 1890 - S.Hirzel Mathematische Annallen Bg. VIII.

10) G.DARBOUX : "Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du première ordre" - Mémoires présentes par divers savants étrangers à l'Académie t.XXVII No2,1883 Paris.

11) Gourçat: "Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du prémier ordre" II éd. 1921 J.Hermann - Paris.

12) E.Cartan : "Sur les groupes de transformations de contact et la cinématique nonvelle" - Soc. Math. t. 40.C.R. des séances.

13) Lainé : "Sur les transformations de contact" - Nouvelle Annales des Mathém. 1923, V. série, t II.

14) G. Hocheisel :"Gewöhnliche Differentialgleichungen" 1938 Sammlung Göschen Bd 920.

15) G.CERF : "Transformationes de contact et problème de Pfaff" Mémorial des sciences mathématiques XXXVII. Paris - Gauthier Villars et Cie 1929.

16) JACOBI : "Gesammelte Werke Bd.IV,V.

17) KURENSKI : "Diferencialnie uravnenia" Leningrad 1933.

18) STEKLOV : "Osnovi teorii integrirovania obiknovenih diferencialnih uravnenia" Moskva 1927 Leningrad.

19) T.PEJOVIĆ : "Novi slučajevi integrabilnosti jedne važne diferencijalne jednačine prvog reda" teza 1923 - Beograd.

D.MITRINOVIĆ :"Istraživanja o jednoj važnoj diferencijalnoj jednačin prvog reda" teza 1935 - Beograd.

[illegible]

[illegible] G.HALPHEN :"Sur les invariants différentielles" (thèse de doctorat) 1878 (Oeuvres de Halphen).

"Sur les invariants de courbes gauches" 1888. (Oeuvres de Halphen).

22) T.PEJOVIĆ :"O invarijantama Riccati-eve jednačine" "Glas" Srp.kralj.Akad. CXI, Beograd 1924.

"Contribution á l'étude de l'equation de Riccati" Société math. de France C.R. de séances 1925, Paris Gauthier Villars et Cie.

"Sur les semi-invariants des équations differentielles linéaires" Bulletin de la société math. de France t.53 1925 Paris.

23) N.ABEL : "Oeuvres complètes t.II.

24) BUGAEV : "Matematičeskii sbornik" Moskva 1893.

25) DJ.KARAPANDŽIĆ: "Jedna primena singularnih integrala običnih diferencijalnih jednačina" - "Vesnik" Društva matem. i fizič. N.R.S. II,1-2,1950 -Beograd.

26) de la VALLÉE POUSSIN : "Cours d'Analyse infinitésimale" t.II 8 éd. 1949 Louvain - Paris Gauthier Villars.

27) Mangoldt-Knopp: "Einfürung in die höhere Mathematik" II Bd.1948, 9 Aufl. S.Hirzel Stuttgart.

28) N.SALTIKOV: "Primena tangencijalnih transformacija za integraljenje parcijalnih jednačina" Srp.kralj.Akad.

"Glas" CLXX 1936 Beograd.

29) Th. de Donděre: Rendiconti del R.Academia dei Lincei 1908,1911.

30) N.SALTIKOV: "Ispitivanje singularnih integrala diferencijalnih jednačina "Glas" Srp.kralj.Adak.-Beograd,1941.