Dragomir Djoković

O NEKIM KLASAMA CIKLIČNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

Doktorska disertacija za sticanje akademskog stepena doktora matematičkih nauka

Beograd

januara 1963.

S A D R Ž A J

NOTACIJE I SKRAĆENICE

Pojedini delovi teze su numerisani rimskim ciframa . Delovi su podeljeni na paragrafe (koji su numerisani arapskim ciframa) od kojih svaki ima svoje ime , izuzev paragrafa u uvodu i u prvom delu teze .

Pri pozivanju na neku jednačinu (relaciju) iz istog dela , pisana je njena oznaka koja se sastoji od dva broja. Prvi broj je u stvari redni broj paragrafa u kome se jednačina nalazi . Jednakost iz nekog drugog dela označavana je sa tri broja pri čemu je prvi - broj odeljka (dela teze) a drugi - broj paragrafa u kome se jednačina nalazi .

Slova N i R , u čitavom radu , označavaju skupove prirodnih i realnih brojeva , respektivno .

UVOD

Teza je sastavljena iz tri dela :

I deo - Generalizacija jednog rezultata do kojeg su došli Aczél , Ghermanescu i Hosszú ;

II deo - Funkcionalna jednačina

$$F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})-F(x_2,x_3,\dots,x_{n+1},x_1) = f(x_1,x_2,\dots,x_n\cdot x_{n+1}) ;$$

III deo - Rešavanje izvesnih klasa funkcionalnih jednačina u realnoj oblasti .

1.

U prvom delu dobio sam opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & F(x_1,x_2,\dots,x_p)+F(x_2,x_3,\dots,x_{p+1})+\dots \\ & +F(x_{n-p+1},x_{n-p+2},\dots,x_n)+F(x_{n-p+2},x_{n-p+3},\dots,x_n,x_1)+\dots \\ & +F(x_n,x_1,\dots,x_{p-1}) = o \qquad (n\geqslant 2p-1) ,\end{aligned}$$

kao i jednačine

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad & F_1(x_1,x_2,\dots,x_p)+F_2(x_2,x_3,\dots,x_{p+1})+\dots \\ & +F_{n-p+1}(x_{n-p+1},x_{n-p+2},\dots,x_n) \\ & +F_{n-p+2}(x_{n-p+2},x_{n-p+3},\dots,x_n,x_1)+\dots \\ & +F_n(x_n,x_1,x_2,\dots,x_{p-1}) = o \qquad (n\geqslant 2p-1) ,\end{aligned}$$

pod sledećim pretpostavkama

1^o $x_i \in S$, gde se skup S ne podvrgava nikakvim ograničenjima ;

2^o Funkcija F, odnosno funkcije F_i, (koje su nepoznate) uzimaju vrednosti iz jedne aditivne Abel-ove grupe M.

Jednačinu (1.1), za proizvoljno $n \geq p$, rešili su 1960. godine J.Aczél, M.Ghermanescu i M.Hosszú u svom članku |2| "On cyclic equations". Oni su takodje našli opšte rešenje, ali su morali, zbog prirode upotrebljenog dokaza, da uvedu i treću pretpostavku:

3^o Jednačina $mX = A$ $(X, A \in M)$, za svako $m \leq n$ $(m \in N)$, ima jedinstveno rešenje $X = A/m$.

Rezultate iz članka |2| generalisao je takodje M.Hosszú u svom radu |7|. U ovom radu on nije pokušao da oslabi pretpostavke već daje generalizaciju u drugom smislu, modifikujući jednačinu (1.1).

Moj dokaz je znatno jednostavniji od onog koji su, u slučaju $n \geq 2p-1$, dali pomenuti autori u |2|.

Jednačina (1.2) je prirodno uopštenje jednačine (1.1) i njeno opšte rešenje sam odredio istim metodom.

Ostaje nerešeno sledeće pitanje: Da li se takodje može naći opšte rešenje jednačina (1.1) i (1.2) ako je $p < n < 2p-1$ i ako se odbaci pretpostavka 3^o ?

2.

U drugom delu sam rešavao jednačinu

$$(2.1)\quad F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})-F(x_2,x_3,\dots,x_{n+1},x_1) = f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n\cdot x_{n+1}).$$

Pretpostavio sam da su nezavisno promenljive $x_i \in S$; da je S polugrupa u odnosu na internu binarnu operaciju "." i da za tu operaciju postoji jedinični element e $(\in S)$. Za nepoznate funkcije $\underline{F}$ i $\underline{f}$ sam pretpostavio da uzimaju vrednosti iz jedne aditivne Abel-ove grupe M u kojoj jenačina $(n+1)X = A$ za svako $A \in M$ ima jedinstveno rešenje po $X \in M$, naime $X = A/(n+1)$. Može se dokazati da iz poslednje pretpostavke sleduje da takodje i jednačina

$$m^k X = A \qquad (m \mid (n+1) \; ; \; k \in N)$$

za svako $A \in M$ ima jedinstveno rešenje po X. Ovu posledicu sam koristio u dokazu i bez pozivanja na nju.

Eliminacijom funkcije F, jednačinu (2.1) sam sveo na cikličnu jednačinu

$$(2.2) \qquad f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n \cdot x_{n+1}) + f(x_2,x_3,\ldots,x_n,x_{n+1} \cdot x_1) + \ldots + f(x_{n+1},x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_{n-1} \cdot x_n) = 0 .$$

Ovo je upravo ona jednačina koju smo posmatrali prof. D.S.Mitrinović i ja u članku |8|. U tom članku navedena su izvesna rešenja jednačine (2.2) ali u opštem slučaju nije utvrdjena priroda tih rešenja. U članku |3| dokazao sam da je rešenje koje je navedeno u |8| opšte ako je $n = 3$.

Ovde sam nastavio rad na ispitivanju karaktera onih rešenja jednačine (2.2) na koje je ukazano u |8|. Dokazao sam da su ta rešenja opšta i u slučajevima $n = 5$ i $n = 7$.

Ovo mi je sugeriralo da pretpostavim da su ta rešenja opšta i u slučaju proizvoljnog neparnog $\underline{n}$. Da li je to tačno, zasad ostaje nepoznato.

S obzirom na vrlo opšte pretpostavke o $\underline{S}$ i $\underline{M}$ dokazi su elementarni ma da vrlo dugački. Da bi se ovi dokazi učinili što preglednijim uveo sam relaciju ekvivalencije $\doteq$ u skupu funkcija $E = \{ f \; ; \; S^n \to M \}$. Pisano je $g \doteq h$ $(f,g \in E)$ tada i samo tada ako je funkcija $g-h$ rešenje jednačine (2.2) koje ima oblik

$$f_1(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1} \cdot t_n) - f_1(t_2,t_3,\ldots,t_n \cdot t_1) + \sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \{ f_\nu(t_1,t_2,\ldots,t_{n-\nu} \cdot t_{n-\nu+1},t_{n-\nu+2},\ldots,t_{n-1},t_n) - f_\nu(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_{\nu-1} \cdot t_\nu) \},$$

gde su f_i proizvoljne funkcije naznačenih argumenata .

U istom cilju , umesto $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)$ pisano je samo 1234567.8 i slično u drugim slučajevima . Drugim rečima izostavljana su slova **f** i **x** , zapete i zagrade.

3.

U trećem delu posmatrao sam više klasa funkcionalnih jednačina u realnom području . Evo tih jednačina :

$$(3.1)\quad F(x,y,z)-F(y,z,x) = f(x,y+z) ,$$

$$(3.1\text{ bis})\quad f(x,y+z)+f(y,z+x)+f(z,x+y) = 0 ,$$

$$(3.2)\quad \sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1+\dots+x_m,x_{m+1}+\dots+x_{m+n},x_{m+n+1}+\dots+x_{m+n+p}) = 0 ,$$

$$(3.3)\quad \sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1+x_2+\dots+x_m,x_{m+1}+x_{m+2}+\dots+x_{m+n}) = 0 ,$$

$$(3.4)\quad \sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F_i(x_1+x_2+\dots+x_m,x_{m+1}+x_{m+2}+\dots+x_{m+n}) = 0 .$$

Ovde je C ciklični operator , perioda $m+n+p$, koji je definisan pomoću jednakosti

$$C\ f(x_1,x_2,\dots,x_{m+n+p}) = f(x_2,x_3,\dots,x_{m+n+p},x_1)$$

gde je **f** proizvoljna funkcija .

Jednačina (3.1) je specijalni slučaj jednačine (2.1) iz drugog dela (naime ovde je S=M=R a operacija "." sabiranje) . Ova jednačina se svodi na (3.1 bis) . Jednačinu (3.1 bis) rešio sam u članku |4| pod pretpostavkom da je funkcija **f** neprekidna. Koristeci opšte rešenje Cauchy-eve jednačine ovde sam formirao opšte rešenje jednačina (3.1) i (3.1 bis) .

Jednačinu (3.2) rešio sam u članku |5| pod pretpostavkom da je funkcija F neprekidna .

Jednačine (3.3) i (3.4) se ovde prvi put pojavljuju . Prva se svodi na Cauchy-evu jednačinu te sam na taj način odredio njeno opšte rešenje . Jednačina (3.4) je izgleda znatno komplikovanija . Zato sam posmatrao samo jedan njen partikularan slučaj i to kada je $m=2$, $n=p=1$. Pretpostavljajući tada da su funkcije F_i $(i=1,2,3,4)$ neprekidne , dobio sam opšte rešenje te jednačine . Sve ove funkcije se javljaju u obliku polinoma drugog stepena po dvema promenljivim pri čemu koeficijenti zadovoljavaju izvesne uslove .

Na kraju želim da istaknem činjenicu , da me je prof. D.S.Mitrinović podstakao na naučni rad u matematici i posebno u ovoj oblasti . Profesor Mitrinović je takodje prodiskutovao sa mnom plan teze , pročitao prvu verziju rukopisa i dao niz saveta i sugestija koji su znatno poboljšali tekst .

I deo

GENERALIZACIJA JEDNOG REZULTATA DO KOJEG SU DOŠLI ACZÉL, GHERMANESCU I HOSSZÚ

1.

J. Aczél, M. Ghermanescu i M. Hosszú u svom radu |2| : On cyclic equations, posmatrali su osnovnu cikličnu funkcionalnu jednačinu

$$(1.1)\quad F(x_1,x_2,\ldots,x_n)+F(x_2,x_3,\ldots,x_n,x_1)+\ldots+F(x_n,x_1,\ldots,x_{n-1}) = o$$

kao i iz nje izvedenu jednačinu

$$(1.2)\quad F(x_1,x_2,\ldots,x_p)+F(x_2,x_3,\ldots,x_{p+1})+\ldots+F(x_{n-p+1},x_{n-p+2},\ldots,x_n)+F(x_{n-p+2},x_{n-p+3},\ldots,x_n,x_1)+\ldots+F(x_n,x_1,\ldots,x_{p-1}) = o\,,$$

gde su <u>p</u> i <u>n</u> $(p<n)$ dva proizvoljna pozitivna broja.

U navedenom radu oni su formulisali tri teoreme od kojih druga glasi :

<u>Opšte rešenje funkcionalne jednačine</u> (1.2), <u>ako je</u> $n \geqslant 2p-1$, <u>je</u>

$$(1.3)\quad F(x_1,x_2,\ldots,x_p) = f(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1})-f(x_2,x_3,\ldots,x_p).$$

Ova teorema, kao i druge dve, dokazana je pod sledećim pretpostavkama :

1^o $x_i \in S$, gde se za skup S ne postavljaju nikakva ograničenja ;

2^o Funkcija F uzima vrednosti iz jedne aditivne Abelove grupe M ;

3^o Za grupu M pretpostavlja se da u njoj jednačina $mX = A$ $(X, A \in M)$, za svako $m \leq n$ $(m \in N)$, ima jedinstveno rešenje $X = A/m$.

Treća teorema, koja se odnosi na jednačinu (1.2) u slučaju $p < n < 2p-1$, dokazana je u pomenutom članku samo na jednom primeru. M. Hosszú |7| je dokazao jednu teoremu koja generališe rezultate dveju spomenutih teorema. Taj generalniji rezultat je dobijen pod istim pretpostavkama $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$.

2.

U ovom paragrafu naći ćemo opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.2) za $n \geq 2p-1$, gde su uzete u obzir samo pretpostavke 1° i 2° iz prethodnog paragrafa.

T e o r e m a 1. Pod pretpostavkama 1° i 2°, opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.2), za $n \geq 2p-1$, je

$$(2.1)\qquad F(x_1,x_2,\ldots,x_p) = f(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1})-f(x_2,x_3,\ldots,x_p)+A ,$$

gde je f proizvoljna funkcija (posmatranog tipa) i A proizvoljan element iz M za koji je $nA = o$.

Dokaz. Zamenom se može proveriti, da svaka funkcija F oblika (2.1) zadovoljava funkcionalnu jednačinu (1.2). Ostaje da se dokaže obrnuto, tj. da iz (1.2) sleduje da funkcija F ima oblik (2.1). Da bismo to dokazali, poći ćemo od jednačine (1.2).

Neka je c proizvoljno fiksirani element iz skupa S. Pretpostavljajući da je $n \geq 2p-1$ i stavljajući

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = c ,$$

jednačina (1.2) dobija oblik

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &F(x_1,x_2,\ldots,x_p)+F(x_2,x_3,\ldots,x_p,c)+\cdots \\ &+F(x_p,c,c,\ldots,c)+(n-2p+1)F(c,c,\ldots,c) \\ &+F(c,c,\ldots,c,x_1)+F(c,c,\ldots,c,x_1,x_2)+\cdots \\ &+F(c,x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}) = o . \end{aligned}$$

Stavljajući u poslednjoj jednakosti $x_p = c$, dobija se

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad & F(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},c)+F(x_2,x_3,\ldots,x_{p-1},c,c)+\ldots \\
& +F(x_{p-1},c,c,\ldots,c)+(n-2p+2)F(c,c,\ldots,c) \\
& +F(c,c,\ldots,c,x_1)+F(c,c,\ldots,c,x_1,x_2)+\ldots \\
& \qquad +F(c,x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}) = o .
\end{aligned}
$$

Oduzimanjem jednakosti (2.3) od (2.2) i sredjivanjem dolazi se do relacije

$$
\begin{aligned}
(2.4)\qquad & F(x_1,x_2,\ldots,x_p) = \\
& = F(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},c)-F(x_2,x_3,\ldots,x_p,c) \\
& +F(x_2,x_3,\ldots,x_{p-1},c,c)-F(x_3,x_4,\ldots,x_p,c,c) \\
& +\ldots \\
& +F(x_{p-1},c,c,\ldots,c)-F(x_p,c,c,\ldots,c) \\
& \qquad +F(c,c,\ldots,c) .
\end{aligned}
$$

Uvodeći notacije

$$
\begin{aligned}
(2.5)\qquad & f(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}) = F(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},c) \\
& +F(x_2,x_3,\ldots,x_{p-1},c,c)+\ldots +F(x_{p-1},c,c,\ldots,c),
\end{aligned}
$$

$$(2.6)\qquad A = F(c,c,\ldots,c) ,$$

relacija (2.4) dobija upravo oblik (2.1). Element A $(\in M)$ zadovoljava uslov $nA = o$, što se zaključuje stavljajući u jednačini (1.2)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c .$$

Ovim je završen dokaz teoreme 1.

3.

Ovaj paragraf posvetićemo daljoj generalizaciji jednačine (1.2). Naime, posmatraćemo funkcionalnu jednačinu

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1,x_2,\dots,x_p)+F_2(x_2,x_3,\dots,x_{p+1})+\dots \\ &+F_{n-p+1}(x_{n-p+1},x_{n-p+2},\dots,x_n) \\ &+F_{n-p+2}(x_{n-p+2},x_{n-p+3},\dots,x_n,x_1)+\dots \\ &\qquad +F_n(x_n,x_1,\dots,x_{p-1}) = 0 \qquad (p < n), \end{aligned}$$

pod pretpostavkama 1^o i 2^o iz paragrafa 1 (pretpostavka 2^o važi za svaku od funkcija F_i).

T e o r e m a 2. <u>Opšte rešenje funkcionalne jednačine</u> (3.1) , <u>za</u> $n \geqslant 2p-1$, <u>dato je formulama</u>

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &F_i(x_1,x_2,\dots,x_p) \\ &\quad = f_i(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})-f_{i+1}(x_2,x_3,\dots,x_p) \\ &\qquad\qquad\qquad (i = 1,2,\dots,n-1), \\ &F_n(x_1,x_2,\dots,x_p) \\ &\quad = f_n(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})-f_1(x_2,x_3,\dots,x_p), \end{aligned}$$

<u>gde su</u> f_i $(i = 1,2,\dots,n)$ <u>proizvoljne funkcije definisane na skupu</u> S , <u>sa vrednostima iz</u> M .

<u>Dokaz</u>. Radi uprošćenja, smatraćemo da je

$$F_i \equiv F_{i+n}, \quad x_i \equiv x_{i+n}.$$

Koristeći te konvencije, jednačini (3.1) možemo dati oblik

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &F_i(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+p-1})+F_{i+1}(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+p})+\dots \\ &+F_{i+n-p}(x_{i+n-p},x_{i+n-p+1},\dots,x_{i+n-1}) \\ &+F_{i+n-p+1}(x_{i+n-p+1},x_{i+n-p+2},\dots,x_{i+n-1},x_i)+\dots \\ &\qquad +F_{i+n-1}(x_{i+n-1},x_i,\dots,x_{i+p-2}) = 0. \end{aligned}$$

Stavljajući u (3.3)

$$x_{i+p} = x_{i+p+1} = \dots = x_{i+n-1} = c ,$$

gde je <u>c</u> proizvoljno fiksirani element iz S, dobijamo

$$(3.4) \quad F_i(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+p-1})+F_{i+1}(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+p-1},c)$$
$$+F_{i+2}(x_{i+2},x_{i+3},\dots,x_{i+p-1},c,c)+ \dots$$
$$+F_{i+p-1}(x_{i+p-1},c,c,\dots,c)+F_{i+p}(c,c,\dots,c)$$
$$+F_{i+p+1}(c,c,\dots,c)+ \dots +F_{i+n-p}(c,c,\dots,c)$$
$$+F_{i+n-p+1}(c,c,\dots,c,x_i)+F_{i+n-p+2}(c,c,\dots,c,x_i,x_{i+1})$$
$$+ \dots +F_{i+n-1}(c,x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+p-2}) = 0 .$$

Ako se u (3.4) stavi $x_{i+p-1} = c$, dolazi se do jednačine

$$(3.5) \quad F_i(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+p-2},c)+F_{i+1}(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+p-2},c,c)$$
$$+ \dots +F_{i+p-2}(x_{i+p-2},c,c,\dots,c)+F_{i+p-1}(c,c,\dots,c)$$
$$+F_{i+p}(c,c,\dots,c)+ \dots +F_{i+n-p}(c,c,\dots,c)$$
$$+F_{i+n-p+1}(c,c,\dots,c,x_i)+F_{i+n-p+2}(c,c,\dots,c,x_i,x_{i+1})$$
$$+ \dots +F_{i+n-1}(c,x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+p-2}) = 0 .$$

Oduzimanjem jednakosti (3.5) od (3.4) i sredjivanjem, dolazimo do relacije

$$(3.6) \quad F_i(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+p-1})$$
$$= F_i(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+p-2},c)$$
$$-F_{i+1}(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+p-1},c)$$
$$+F_{i+1}(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+p-2},c,c)$$
$$-F_{i+2}(x_{i+2},x_{i+3},\dots,x_{i+p-1},c,c)$$
$$+ \dots$$

$$+F_{i+p-2}(x_{i+p-2},c,c,\dots,c)$$
$$-F_{i+p-1}(x_{i+p-1},c,c,\dots,c)$$
$$+F_{i+p-1}(c,c,\dots,c)\ ,$$

koja važi za svako $i = 1,2,\dots,n$.

Uvedimo notacije

(3.7) $$g_i(x_1,x_2,\dots,x_{p-1}) = F_i(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},c) + F_{i+1}(x_2,x_3,\dots,x_{p-1},c,c)+ \dots + F_{i+p-2}(x_{p-1},c,c,\dots,c)\ ,$$

(3.8) $$A_i = F_{i+p-1}(c,c,\dots,c)\ .$$

Koristeći konvenciju $F_i \equiv F_{i+n}$, zaključujemo da je takodje $g_i \equiv g_{i+n}$. Konstante A_i $(\in M)$ zadovoljavaju uslov

(3.9) $$A_1+A_2+ \dots +A_n = 0\ ,$$

jer se on dobija iz jednačine (3.1) ako se stavi $x_1=x_2=\dots=x_n=c$.
Na osnovu (3.7) i (3.8), umesto (3.6) možemo pisati

(3.1o) $$F_i(x_1,x_2,\dots,x_p) = g_i(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})-g_{i+1}(x_2,x_3,\dots,x_p)+A_i \quad (i = 1,2,\dots,n)\ .$$

Na kraju, uvodeći funkcije

$$f_1 = g_1\ ,$$
$$f_2 = g_2-A_1\ ,$$
$$f_3 = g_3-A_1-A_2\ ,$$
$$\vdots$$
$$f_n = g_n-A_1-A_2- \dots -A_{n-1}\ ,$$

i koristeći se relacijom (3.9) , zaključujemo da funkcije (3.1o) dobijaju oblik

$$(3.11) \quad F_i(x_1,x_2,\ldots,x_p) = f_i(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1})-f_{i+1}(x_2,x_3,\ldots,x_p) \qquad (i = 1,2, \ldots ,n)$$

gde se podrazumeva da je $f_1 \equiv f_{n+1}$.

Kako je oblik (3.11) identičan sa oblikom (3.2), dokazali smo da iz (3.1) sleduje (3.2) . Obrnuto tvrdjenje, tj. tvrdjenje da funkcije (3.2), pri proizvoljnim f_i , zaista zadovoljavaju jednačinu (3.1), može se proveriti zamenom.

Ovim je završen dokaz teoreme 2.

U slučaju $p < n \leqslant 2p-1$ nismo mogli da dodjemo do teorema koje su analogne teoremama 1 i 2.

II deo

FUNKCIONALNA JEDNAČINA

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})-F(x_2,x_3,\ldots,x_1) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n\cdot x_{n+1})$$

1. Egzistencija rešenja

Neka nezavisno promenljive x_i pripadaju skupu S u kome je definisana interna binarna operacija "$\cdot$" . Za ovu operaciju pretpostavljamo da je asocijativna i da ima jedinični element e $(\in S)$; drugim rečima pretpostavljamo da je S polugrupa sa jedinicom .

Pretpostavljamo da nepoznate funkcije F,f uzimaju vrednosti iz jedne aditivne Abel-ove grupe M. Za grupu M pretpostavljamo da jednačina $(n+1)X = A$ $(X,A\in M)$ ima jedinstveno rešenje $X = A/(n+1)$. Iz toga sleduje da takodje i jednačine $m^kX = A$ $(\, m|(n+1)\,,\ k\in N\,)$ imaju u M jedinstveno rešenje po X .

Problem se sastoji u odredjivanju svih mogućih parova funkcija (F,f) za koje je

$$(1.1)\quad F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})-F(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1},x_1) = f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\cdot x_{n+1}) \quad (n\in N) .$$

Dokažimo da za svako n $(\in N)$ postoje netrivijalna rešenja funkcionalne jednačine (1.1) .

Zaista , neka je

$$(1.2)\quad F(t_1,t_2,\ldots,t_{n+1}) = \sum_{\nu=0}^{n} C^{\nu}\, f_o(t_1,t_2,\ldots,t_{n+1}) + f_1(t_1,t_2,\ldots,t_{n-2},t_{n-1}\cdot t_n\cdot t_{n+1}) + \sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sum_{i=0}^{\nu-1} C^{i}\, f_{\nu}(t_1,t_2,\ldots,t_{n-\nu}\cdot t_{n-\nu+1},\ldots,t_n\cdot t_{n+1}) ,$$

$$(1.3)\quad f(t_1,t_2,\dots,t_n)$$
$$= f_1(t_1,t_2,\dots,t_{n-1}\cdot t_n)-f_1(t_2,t_3,\dots,t_n\cdot t_1)$$
$$+\sum_{\nu=2}^{[\frac{n+1}{2}]}\{f_\nu(t_1,t_2,\dots,t_{n-\nu}\cdot t_{n-\nu+1}\cdot t_{n-\nu+2},\dots,t_n)$$
$$-f_\nu(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\dots,t_n,t_1,\dots,t_{\nu-1}\cdot t_\nu)\}\ ,$$

gde su f_o i f_ν ($\nu = 1,2, \dots ,\left[\frac{n+1}{2}\right]$) proizvoljne funkcije koje uzimaju vrednosti iz grupe M. Ako je $n = 1$, na desnoj strani formule (1.2) treba zadržati samo prvu sigmu, a ako je $n=2$ tu sigmu i član sa f_1. Na desnoj strani formule (1.3), ako je $n = 2$ treba zadržati samo dva člana sa f_1, a ako je $n = 1$ treba smatrati da je desna strana jednaka nuli. Slovo C, u formulama (1.2) i (1.3), označava ciklični operator, perioda $n+1$, koji je definisan pomoću jednakosti

$$(1.4)\qquad C\,\varphi(t_1,t_2,\dots,t_{n+1}) = \varphi(t_2,t_3,\dots,t_{n+1},t_1)\ ,$$

gde je φ proizvoljna funkcija.

Dokazaćemo da funkcije F i f koje su definisane jednakostima (1.2) i (1.3) zadovoljavaju jednačinu (1.1).

Najpre imamo

$$(1-C)\sum_{\nu=0}^{n} C^\nu f_o(t_1,t_2,\dots,t_{n+1})$$
$$= (1-C)\sum_{\nu=0}^{n} C^\nu f_o$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} C^\nu f_o - \sum_{\nu=0}^{n+1} C^{\nu+1} f_o$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} C^\nu f_o - \sum_{\nu=1}^{n+1} C^\nu f_o$$
$$= f_o - C^{n+1} f_o$$
$$= 0\ .$$

Zatim je

$$(1-C)\sum_{i=0}^{\nu-1} C^i f_\nu(t_1,t_2,\dots,t_{n-\nu},t_{n-\nu+1},\dots,t_n,t_{n+1})$$

$$= (1-C)\sum_{i=0}^{\nu-1} C^i f_\nu$$

$$= \sum_{i=0}^{\nu-1} C^i f_\nu - \sum_{i=0}^{\nu-1} C^{i+1} f_\nu$$

$$= \sum_{i=0}^{\nu-1} C^i f_\nu - \sum_{i=1}^{\nu} C^i f_\nu$$

$$= f_\nu - C^\nu f_\nu$$

$$= f_\nu(t_1,t_2,\dots,t_{n-\nu},t_{n-\nu+1},\dots,t_n,t_{n+1})$$

$$- f_\nu(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\dots,t_n,t_{n+1},t_1,\dots,t_{\nu-1},t_\nu) .$$

Stoga iz (4.2) sleduje

$$(4.5)\quad (1-C)\,F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$$

$$= f_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n,x_{n+1}) - f_1(x_2,x_3,\dots,x_n,x_{n+1},x_1)$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \Big\{ f_\nu(x_1,x_2,\dots,x_{n-\nu},x_{n-\nu+1},\dots,x_n,x_{n+1})$$

$$- f_\nu(x_{\nu+1},x_{\nu+2},\dots,x_n,x_{n+1},x_1,\dots$$

Iz (1.3) dobija se

$$(1.6)\quad f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n,x_{n+1})$$

$$= f_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n,x_{n+1})$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \Big\{ f_\nu(x_1,x_2,\dots$$

Uporedjivanjem ...

$$(1\text{-}C)\quad F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) = f(x_1,x_2,\dots,x_n\cdot x_{n+1})$$

što je identično sa (1.1).

<u>Primedba</u>. Gornje granice zbirova u formulama (1.2) i (1.3), u kojima je sumacioni indeks označen sa ν, nisu morale biti baš $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, već su mogle biti i veće, na primer n. Ali, kao što ćemo pokazati svi ti dopunski članovi mogli bi da se pridruže onim članovima koji već figurišu u tim zbirovima. Posmatrajmo, na primer, u sumi koja se javlja u (1.3), one sabirke koji bi se dobili za $\nu = k$ i $\nu = n+1-k$ gde je $k = 2,3,\dots,\left[\frac{n+1}{2}\right]$, naime

$$(1.7)\quad f_k(t_1,t_2,\dots,t_{n-k}\cdot t_{n-k+1},\dots,t_n) - f_k(t_{k+1},t_{k+2},\dots,t_n,t_1,\dots,t_{k-1}\cdot t_k)\qquad (\nu=k)$$

$$(1.8)\quad f_{n+1-k}(t_1,t_2,\dots,t_{k-1}\cdot t_k,\dots,t_n) - f_{n+1-k}(t_{n+2-k},\dots,t_n,t_1,\dots,t_{n-k}\cdot t_{n-k+1})\qquad (\nu=n+1-k).$$

Ako uvedemo novu funkciju

$$g_k(t_1,t_2,\dots,t_{k-1},t_k,\dots,t_{n-1}) = -f_{n+1-k}(t_k,t_{k+1},\dots,t_{n-1},t_1,t_2,\dots,t_{k-1})$$

izraz (1.8) dobija oblik

$$g_k(t_1,t_2,\dots,t_{n-k}\cdot t_{n-k+1},\dots,t_n) - g_k(t_{k+1},t_{k+2},\dots,t_n,t_1,\dots,t_{k-1}\cdot t_k),$$

koji se može sažeti sa izrazom (1.7) u samo jedan izraz istog oblika. Za to je dovoljno uvesti umesto funkcije f_k novu funkciju f_k+g_k.

Isto rezonovanje se može primeniti i na formulu (1.2).

Navedimo posebno tri najjednostavnija slučaja $n=1$, $n=2$, i $n=3$. Zamenjujući ove vrednosti za n u (1.1),(1.2) i (1.3) dobija se

1^o Za $n = 1$,

$$(1.9)\quad F(x_1,x_2)-F(x_2,x_1) = f(x_1\cdot x_2) ,$$

$$(1.10)\quad F(t_1,t_2) = f_o(t_1,t_2)+f_o(t_2,t_1) ,$$

$$(1.11)\quad f(t_1) = o ;$$

2^o Za $n = 2$,

$$(1.12)\quad F(x_1,x_2,x_3)-F(x_2,x_3,x_1) = f(x_1,x_2\cdot x_3) ,$$

$$(1.13)\quad F(t_1,t_2,t_3) = f_o(t_1,t_2,t_3)+f_o(t_2,t_3,t_1)+f_o(t_3,t_1,t_2) +f_1(t_1\cdot t_2\cdot t_3) ,$$

$$(1.14)\quad f(t_1,t_2) = f_1(t_1\cdot t_2)-f_1(t_2\cdot t_1) ;$$

3^o Za $n = 3$,

$$(1.15)\quad F(x_1,x_2,x_3,x_4)-F(x_2,x_3,x_4,x_1) = f(x_1,x_2,x_3\cdot x_4) ,$$

$$(1.16)\quad \begin{aligned} F(t_1,t_2,t_3,t_4) = {} & f_o(t_1,t_2,t_3,t_4)+f_o(t_2,t_3,t_4,t_1) \\ & +f_o(t_3,t_4,t_1,t_2)+f_o(t_4,t_1,t_2,t_3) \\ & +f_1(t_1,t_2\cdot t_3\cdot t_4) \\ & +f_2(t_1\cdot t_2,t_3\cdot t_4)+f_2(t_2\cdot t_3,t_4\cdot t_1) ,\end{aligned}$$

$$(1.17)\quad \begin{aligned} f(t_1,t_2,t_3) = {} & f_1(t_1,t_2\cdot t_3)-f_1(t_2,t_3\cdot t_1) \\ & +f_2(t_1\cdot t_2,t_3)-f_2(t_3,t_1\cdot t_2) .\end{aligned}$$

2. Svodjenje na jednačinu sa jednom nepoznatom funkcijom

Dokažimo sledeći rezultat :

L e m a 1. Da bi funkcionalna jednačina

$$(2.1)\qquad (1-C)\,F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = g(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$$

(F nepoznata, g poznata funkcija) imala bar jedno rešenje, potrebno je i dovoljno da funkcija g ispunjava uslov

$$(2.2)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} C^{\nu}\, g(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = 0\ .$$

Dokaz. a) Uslov je potreban.

Primenom operatora C^{ν}, iz (2.1) dobijamo

$$(C^{\nu}-C^{\nu+1})\,F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = C^{\nu}\, g(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\ ,$$

za svako $\nu = 0,1,2,\ldots,n$. Sabiranjem ovih jednakosti dobija se uslov (2.2).

b) Uslov je dovoljan. Ovo sleduje iz rezultata koji su dobili Aczél, Ghermanescu i Hosszú (videti |2|).

Napomenimo samo, da se jedno rešenje F_0 jednačine (2.1) ,kad je uslov (2.2) ispunjen, može napisati u obliku

$$(2.3)\qquad F_0(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{\nu-1} C^{i}\, g(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n-i}{n+1}\, C^{i}\, g(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\ .$$

O ovome videti |7| i |10| .

L e m a 2. Ako funkcija g zadovoljava uslov (2.2) i ako je F_0 jedno rešenje jednačine (2.1) , opšte rešenje te jednačine je

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = F_0(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$$

$$+\,\mathrm{Cyc}^{n+1} f_0(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\ ,$$

gde je f_0 proizvoljna funkcija i Cyc^{n+1} operator definisan sa

$$(2.4)\qquad \mathrm{Cyc}^{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} C^{\nu}\ .$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavki je

$$(1-C)\ F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) = g(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) ,$$

$$(1-C)\ F_o(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) = g(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) .$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobija se

$$F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})-F_o(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$$
$$= C\ \ F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})-F_o(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) .$$

Odavde sleduje (videti |1e|)

$$F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})-F_o(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$$
$$= \mathrm{Cyc}^{n+1}\ f_o(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) ,$$

gde je f_o proizvoljna funkcija.

Ovim je dokaz završen .

T e o r e m a 1. _Ako funkcije_ F _i_ f _zadovoljavaju jednačinu_ (1.1) , _tada je_

$$(2.5)\qquad \mathrm{Cyc}^{n+1}\ f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n\cdot x_{n+1}) = 0 ,$$

i obrnuto , ako funkcija f _ispunjava uslov_ (2.5), _postoji funkcija_ F _takva da važi_ (1.1) .

Ova teorema sleduje direktno iz leme 1 .

Primenom formule (2.5) i leme 2 može se odrediti opšte rešenje jednačine (1.1) kada je poznato opšte rešenje jednačine (2.5) . Time je rešavanje jednačine (1.1) svedeno na rešavanje jednačine (2.5) , u kojoj se javlja samo jedna nepoznata funkcija _f_ .

Primedba. Hronološki posmatrano , jednačina (2.5) je prethodila jednačini (1.1) . Na jednačinu (2.5) ukazano je u članku |8| , gde je prvi put konstatovano da funkcija (1.3) zadovoljava tu jednačinu . Tek kasnije je primećeno da je pogodnije posmatrati jednačinu (1.1) ma da ona sadrži dve nepoznate funkcije, jer je ona vrlo jednostavnog oblika.

Jednačina (2.5) dobijena je iz jednačine (1.1) eliminacijom nepoznate funkcije F . S druge strane , može se iz jednačine (1.1) eliminisati nepoznata funkcija f .

Zaista, ako u (1.1) stavimo $x_{n+1} = e$ (= jedinični element) , dobija se

$$(2.6)\qquad f(x_1,x_2,\dots,x_n) = F(x_1,x_2,\dots,x_n,e)-F(x_2,x_3,\dots,x_n,e,x_1) .$$

Zamenom funkcije f iz (2.6) , jednačina (1.1) postaje

$$(2.7)\qquad F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})-F(x_2,x_3,\dots,x_{n+1},x_1) = F(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n\cdot x_{n+1},e)-F(x_2,\dots,x_n\cdot x_{n+1},e,x_1)$$

Problem rešavanja jednačine (1.1) sveden je sada na rešavanje jednačine (2.7) . Ako pretpostavimo da je jednačina (2.7) rešena, funkcija f dobija se iz (2.6) .

Jednačina (2.7) je na prvi pogled prostija jer sadrži samo četiri člana pri proizvoljnom n , dok jednačina (2.5) ima $n+1$ članova . Medjutim, svi rezultati koji će biti u daljem izloženi dobijeni su iz jednačine (2.5) a ne iz jednačine (2.7) .

3. Glavni rezultati

Slučaj $n = 2$. Jednačina (1.1) ima oblik (1.9) i njeno opšte rešenje dato je formulama (1.1o) i (1.11) , što je sasvim jednostavno za proveravanje .

Slučaj $n = 3$. U članku |3| dokazana je , pod pretpostavkama navedenim na početku ovog odeljka , sledeća teorema .

T e o r e m a 2. Opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$(3.1)\qquad f(x_1\cdot x_2\cdot \dots \cdot x_p, x_{p+1}\cdot \dots \cdot x_{2p}, x_{2p+1}\cdot \dots \cdot x_{4p})$$
$$+f(x_2\cdot x_3\cdot \dots \cdot x_{p+1}, x_{p+2}\cdot \dots \cdot x_{2p+1}, x_{2p+2}\cdot \dots \cdot x_{4p}\cdot x_1)$$
$$+ \dots$$

$$+f(x_{4p},x_1, \dots ,x_{p-1},x_p, \dots ,x_{2p-1},x_{2p}, \dots ,x_{4p-1}) = 0$$

je funkcija

$$f(t_1,t_2,t_3) = f_1(t_1,t_2,t_3)-f_1(t_2,t_3,t_1) +f_2(t_1,t_2,t_3)-f_2(t_3,t_1,t_2) , \tag{1.17}$$

gde su f_1 **i** f_2 **dve proizvoljne funkcije.**

Za $n = 3$ jednačina (2.5) ima oblik

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)+f(x_2,x_3,x_4,x_1) +f(x_3,x_4,x_1,x_2)+f(x_4,x_1,x_2,x_3) = 0 , \tag{3.2}$$

tj. identična je sa jednačinom (3.1) za $p = 1$. Prema teoremi 2 , opšte rešenje jednačine (3.2) je dato sa (1.17). Na osnovu računa izvedenog u § 1 zaključujemo da je funkcija

$$F_0(t_1,t_2,t_3,t_4) = f_1(t_1,t_2,t_3,t_4)+f_2(t_1,t_2,t_3,t_4)+f_2(t_2,t_3,t_4,t_1)$$

jedno partikularno rešenje jednačine (1.15) gde je f definisano sa (1.17) . Primenjujući lemu 2 , dobija se opšte rešenje jednačine (1.15) po F u obliku

$$F(t_1,t_2,t_3,t_4) = F_0(t_1,t_2,t_3,t_4)+\mathrm{Cyc}^4\, f_0(t_1,t_2,t_3,t_4) ,$$

gde je f_0 proizvoljna funkcija. Poslednja formula se poklapa sa formulom (1.16) .

Dakle, dokazali smo da je (1.16) i (1.17) opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.15) .

Slučajevi $n = 5$ i $n = 7$. U sledeća dva paragrafa dokazaćemo da je opšte rešenje jednačine (1.1) u ovim slučajevima dato formulama (1.2) i (1.3) . Dokazi su prilično glomazni .

Slučaj $n = 2$. Rešenje jednačine (1.1) dato formulama (1.2) i (1.3) nije u ovom slučaju opšte .

Da bismo se u to uverili, dovoljan je sledeći primer. Neka je $S = M = R$ i neka je "." operacija sabiranja realnih brojeva. Jednačina (2.5), za $n = 2$, ima tada oblik

$$f(x_1,x_2+x_3)+f(x_2,x_3+x_1)+f(x_3,x_1+x_2) = o .$$

Ova jednačina biće detaljno ispitana u sledećem odeljku. Njeno opšte rešenje je dato sa (3.1.8). Medjutim, formula (1.3) tj. (1.14) daje samo trivijalno rešenje $f(x,y) = o$. Ovim je naše tvrdjenje dokazano.

Ovi rezultati nam sugeriraju da pretpostavimo da je rešenje jednačine (1.1), dato formulama (1.2) i (1.3), opšte za $\underline{n}$ neparno i da nije opšte za $\underline{n}$ parno. Ne znamo šta uslovljava ovu razliku izmedju slučajeva kada je $\underline{n}$ parno i slučajeva kada je $\underline{n}$ neparno. Medjutim, mogu se navesti neki formalni razlozi za to. Prvo, broj proizvoljnih funkcija koje figurišu na desnoj strani relacije (1.3) je za neparno $\underline{n}$ veći od $n/2$ a za parno $\underline{n}$ on je baš jednak $n/2$. Znači kad je $\underline{n}$ parno, ne postoji "dovoljan" broj proizvoljnih funkcija u rešenju (1.3). Drugo, postoji jedan razlog zbog koga se ne može dokaz iz slučajeva $n = 1,3,5,7$ preneti na slučajeve kada je $\underline{n}$ parno. Taj razlog će biti naveden u sledećem paragrafu.

Čak i pri dopunskoj pretpostavci da je operacija "." komutativna, navedeno rešenje jednačine (1.1) u slučaju parnog $\underline{n}$ nije opšte. Ovo sleduje iz već navedenog primera.

Opšti dokaz u slučaju neparnog $\underline{n}$ nismo našli, ali izgleda da se isti metod dokaza (koji je primenjen u slučajevima $n=5$ i $n=7$) može primeniti i za $n = 9,11, \ldots$

<u>Generalizacija.</u> Umesto funkcionalne jednačine (1.1) može se posmatrati jednačina

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})-F(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1},x_1) = f(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k\cdot x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_{n+1}) \tag{3.3}$$

gde je $1 \leq k \leq n$.

Za $k = n$ jednačina (3.3) je identična jednačini (1.1). Za $1 \leq k < n$, jednačina (3.3) se svodi na jednačinu (1.1). Zaista, ako stavimo

$$F(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) = G(x_{k+2},x_{k+3},\dots,x_{n+1},x_1,x_2,\dots,x_{k+1}),$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = g(x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_{n+1},x_1,x_2,\dots,x_k),$$

jednačina (3.3) dobija oblik

$$G(x_{k+2},x_{k+3},\dots,x_{n+1},x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$$
$$-G(x_{k+3},x_{k+4},\dots,x_{n+1},x_1,x_2,\dots,x_{k+1},x_{k+2})$$
$$= g(x_{k+2},x_{k+3},\dots,x_{n+1},x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_k\cdot x_{k+1}).$$

Na kraju, ako stavimo

$$x_{k+2} = t_1,\ x_{k+3}=t_2,\dots,x_{n+1}=t_{n-k},x_1=t_{n-k+1},\dots,x_{k+1}=t_{n+1},$$

prethodna jednačina postaje

$$G(t_1,t_2,\dots,t_{n+1})-G(t_2,t_3,\dots,t_{n+1},t_1)$$
$$= g(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},t_n\cdot t_{n+1}),$$

tj. dobija se jednačina (1.1) samo što umesto slova F,f,x stoje respektivno G,g,t.

Primedba. Ako je $S = M = R$, mogu se na osnovu navedenih rezultata formirati mnogobrojni specijalni slučajevi jednačina (1.1) ili (2.5) sa $n = 3,5,7$. Dovoljno široka klasa asocijativnih operacija sa jediničnim elementom data je sa

$$x\cdot y = \varphi(\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(y)),$$

gde je φ proizvoljna neprekidna strogo rastuća funkcija definisana na čitavoj realnoj osi a φ^{-1} njoj inverzna funkcija. Jedinični element ove operacije je $\varphi(o)$.

O ovome detaljnije videti knjigu |1|.

4. Rešavanje funkcionalne jednačine u slučaju n=5

Funkcionalna jednačina (2.5) u ovom slučaju glasi

(4.1) $$\mathrm{Cyc}^6\, f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.x_6) = o .$$

Radi uprošćenja formula, umesto $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.x_6)$ pisaćemo samo 12345.6 i slično u drugim slučajevima. Takodje ćemo koristiti sledeće skraćenice

$$f(x_1,e,x_3,x_4,x_5.x_6) = 1o345.6 ,$$

$$nf(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = n(12345) .$$

Drugim rečima, izostavlja se slovo f i zagrade (,) ; umesto promenljive x_i piše se samo njen indeks i , a umesto jediničnog elementa stavlja se o .

Koristeći ove skraćenice jednačina (4.1) dobija oblik

(4.1 bis) $$12345.6+23456.1+34561.2+45612.3+56123.4+61234.5 = o .$$

T e o r e m a 3. <u>Opšte rešenje jednačine</u> (4.1) <u>je dato sa</u> (1.3) <u>tj.</u>

(4.2) $$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = {} & f_1(x_1,x_2,x_3,x_4.x_5)-f_1(x_2,x_3,x_4,x_5.x_1)\\ & +f_2(x_1,x_2,x_3.x_4,x_5)-f_2(x_3,x_4,x_5,x_1.x_2)\\ & +f_3(x_1,x_2.x_3,x_4,x_5)-f_3(x_4,x_5,x_1,x_2.x_3), \end{aligned}$$

<u>gde su</u> f_1,f_2,f_3 <u>proizvoljne funkcije</u> .

P o s l e d i c a. <u>Iz teoreme</u> 3 <u>i rezultata iz</u> § 1 <u>sleduje da je</u> (1.2) <u>i</u> (1.3) <u>opšte rešenje jednačine</u> (1.1) <u>u slučaju</u> n = 5 .

Pre nego što predjemo na dokaz teoreme 3 , uvedimo sledeću definiciju .

D e f i n i c i j a. Za funkcije g i h reći ćemo da su u relaciji $\doteq$, tj. da je $g \doteq h$, ako je njihova razlika oblika

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)-h(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$
$$= f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)-f_1(x_2,x_3,x_4,x_5,x_1)$$
$$+f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)-f_2(x_3,x_4,x_5,x_1,x_2)$$
$$+f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)-f_3(x_4,x_5,x_1,x_2,x_3) ,$$

gde su f_1,f_2,f_3 pogodno izabrane funkcije .

Uvedena relacija je relacija ekvivalencije. Može se dokazati da iz $g_1 \doteq h_1$ i $g_2 \doteq h_2$ sleduje $g_1+g_2 \doteq h_1+h_2$. Takodje iz $2^m g \doteq o$ $(m \in N)$ sleduje $g \doteq o$.

Teorema 3 može se ukratko napisati

(4.3) $\qquad (4.1) \Longleftrightarrow (12345 \doteq o)$.

Dokaz teoreme 3. Implikacija

$$(12345 \doteq o) \Longrightarrow (4.1)$$

dokazana je u § 1 . Ostaje još da se dokaže

(4.4) $\qquad (4.1) \Longrightarrow (12345 \doteq o)$.

Stavljajući u jednačini (4.1 bis) $6 = o$ (tj. $x_6 = e$) , dobijamo

(4.5) $\quad 12345+23451+345o1.2+45o12.3+5o123.4+o1234.5 = o$.

Cikličkim permutovanjem nezavisno promenljivih , iz (4.5) dobijamo

$$-23451-34512-451o2.3-51o23.4-1o234.5-o2345.1 = o ,$$
$$34512+45123+512o3.4+12o34.5+2o345.1+o3451.2 = o ,$$
$$-45123-51234-123o4.5-23o45.1-3o451.2-o4512.3 = o ,$$
$$51234+12345+234o5.1+34o51.2+4o512.3+o5123.4 = o .$$

Sabirajući poslednje četiri jednakosti i (4.5) , dobijamo

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} 2(12345) = &-o1234.5-5o123.4-45o12.3-345o1.2\\ &+o2345.1+1o234.5+51o23.4+451o2.3\\ &-o3451.2-2o345.1-12o34.5-512o3.4\\ &+o4512.3+3o451.2+23o45.1+123o4.5\\ &-o5123.4-4o512.3-34o51.2-234o5.1 \;. \end{aligned}$$

Kako je

$$-o1234.5+o2345.1 \doteq o \;,\quad 1o234.5-2o345.1 \doteq o \;,$$
$$-12o34.5+23o45.1 \doteq o \;,\quad 123o4.5-234o5.1 \doteq o \;,$$

iz (4.6) izlazi

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} 2(12345) \doteq\; &-o5123.4-5o123.4+51o23.4-512o3.4\\ &-o3451.2+3o451.2-34o51.2-345o1.2\\ &+o4512.3-4o512.3-45o12.3+451o2.3 \;. \end{aligned}$$

Primenom formule (4.6) (ili preciznije, zamenom $1\to 3$, $2\to 4$, $3\to 5$, $4\to o$, $5\to 1.2$) , dobijamo

$$\begin{aligned} -2(345o1.2) = &\;o3451.2+1.2o345+o1.2o34.5+5o1.2o3.4\\ &-o45o1.2.3-3o451.2-1.23o45-o1.23o4.5\\ &+o5o1.23.4+4o5o1.2.3+34o51.2+1.234o5\\ &-oo1.234.5-5oo1.23.4-45oo1.2.3-345o1.2\\ &+o1.2345+oo1.234.5+5oo1.23.4+45oo1.2.3 \end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} o = &\;o3451.2+1.2o345+o1.2o34.5+5o1.2o3.4\\ &-o45o1.2.3-3o451.2-1.23o45-o1.23o4.5\\ &+o5o1.23.4+4o5o1.2.3+34o51.2+1.234o5\\ &+o1.2345+345o1.2 \;. \end{aligned}$$

"Sabirajući" poslednju jednakost sa (4.7) , nalazimo

$$\begin{aligned} 2(12345) \doteq\; &-o5123.4-5o123.4+51o23.4-512o3.4\\ &+o4512.3-4o512.3-45o12.3+451o2.3\\ &+o1.2345+1.2o345-1.23o45+1.234o5\\ &+o1.2o34.5+5o1.2o3.4+o5o1.23.4+4o5o1.2.3\\ &-o45o1.2.3-o1.23o4.5 \;. \end{aligned}$$

Kako je

$$-o5123.4+o1.2345 \doteq o\ ,\quad -5o123.4+1.2o345 \doteq o\ ,$$
$$51o23.4-1.23o45 \doteq o\ ,\quad -512o3.4+1.234o5 \doteq o\ ,$$

iz prethodne formule sleduje

$$(4.8)\qquad 2(12345) \doteq o4512.3-4o512.3-45o12.3+451o2.3 +o1.2o34.5+5o1.2o3.4+o5o1.23.4+4o5o1.2.3 -o45o1.2.3-o1.23o4.5\ .$$

U cilju daljeg uprošćenja desne strane ove relacije primenićemo formulu (4.6) na prva četiri člana . Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned}2(12345) = {}&-oo451.2.3-2.3oo45.1-12.3oo4.5-512.3o4\\&+o4512.3+oo451.2.3+2.3oo45.1+12.3oo4.5\\&-o512.34-4o512.3-o4o51.2.3-2.3o4o5.1\\&+o12.3o4.5+5o12.34+45o12.3+o45o1.2.3\\&-o2.3o45.1-1o2.3o4.5-51o2.34-451o2.3\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2(4o512.3) = {}&o4o51.2.3+2.3o4o5.1+12.3o45+512.3o4\\&-oo512.3.4-4oo51.2.3-2.34oo5.1-12.34o5\\&+o512.34+oo512.3.4+4oo51.2.3+2.34oo5.1\\&-o12.345-5o12.34-o5o12.3.4-4o5o1.2.3\\&+o2.34o5.1+1o2.345+51o2.34+o51o2.3.4\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2(45o12.3) = {}&o45o1.2.3+2.3o451+12.3o45+o12.3o4.5\\&-o5o12.3.4-4o5o1.2.3-2.34o51-12.34o5\\&+oo12.34.5+5oo12.3.4+45oo1.2.3+2.345o1\\&-o12.345-oo12.34.5-5oo12.3.4-45oo1.2.3\\&+o2.3451+1o2.345+o1o2.34.5+5o1o2.3.4\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(451o2.3) = {}&-o4512.3-2.3o451-o2.3o45.1-1o2.3o4.5\\&+o51o2.3.4+4o512.3+2.34o51+o2.34o5.1\\&-o1o2.34.5-5o1o2.3.4-45o12.3-2.345o1\\&+oo2.345.1+1oo2.34.5+51oo2.3.4+451o2.3\\&-o2.3451-oo2.345.1-1oo2.34.5-51oo2.3.4\ .\end{aligned}$$

Ako saberemo ove četiri jednakosti i svedemo izraz na desnoj strani , dobijamo

$$
\begin{aligned}
&2(o4512.3-4o512.3-45o12.3+451o2.3)\\
&\qquad = 2(-o12.345+1o2.345+12.3o45-12.34o5\\
&\qquad\qquad +o12.3o4.5+o45o1.2.3-o2.3o45.1-1o2.3o4.5\\
&\qquad\qquad -o5o12.3.4-4o5o1.2.3+o2.34o5.1+o51o2.3.4) .
\end{aligned}
$$

Odavde izlazi

$$
\begin{aligned}
&2(o4512.3-4o512.3-45o12.3+451o2.3)\\
&\qquad = o4512.3-4o512.3-45o12.3+451o2.3\\
&\qquad\quad -o12.345+1o2.345+12.3o45-12.34o5\\
&\qquad\quad +o12.3o4.5+o45o1.2.3-o2.3o45.1-1o2.3o4.5\\
&\qquad\quad -o5o12.3.4-4o5o1.2.3+o2.34o5.1+o51o2.3.4 .
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&o4512.3-o12.345 \doteq o , \quad -4o512.3+1o2.345 \doteq o ,\\
&-45o12.3+1o2.345 \doteq o , \quad 451o2.3-12.34o5 \doteq o ,
\end{aligned}
$$

iz prethodne jednakosti sleduje

$$
\begin{aligned}
&2(o4512.3-4o512.3-45o12.3+451o2.3)\\
&\qquad \doteq o12.3o4.5+o45o1.2.3-o2.3o45.1-1o2.3o4.5\\
&\qquad\quad -o5o12.3.4-4o5o1.2.3+o2.34o5.1+o51o2.3.4 .
\end{aligned}
$$

Množeći relaciju (4.8) sa 2 i sabirajući je sa poslednjom relacijom , nalazimo

$$
\begin{aligned}
4(12345) \doteq\ & o12.3o4.5-o45o1.2.3-o2.3o45.1-1o2.3o4.5\\
&-o5o12.3.4+4o5o1.2.3+o2.34o5.1+o51o2.3.4\\
&+2(o1.23o4.5+5o1.2o3.4+o5o1.23.4-o1.23o4.5) .
\end{aligned}
$$

Grupišući članove na desnoj strani , imamo

$$
\begin{aligned}
4(12345) \doteq\ & (o12.3o4.5-o45o1.2.3)+(4o5o1.2.3-1o2.3o4.5)\\
&+(o1.2o34.5-o5o12.3.4)+(o1.2o34.5-o2.3o45.1)\\
&+(o2.34o5.1-o1.23o4.5)+(o51o2.3.4-o1.23o4.5)\\
&+2(5o1.2o3.4+o5o1.23.4) .
\end{aligned}
$$

Kako je

$$o12.3o4.5-o45o1.2.3 \doteq o\ ,\quad 4o5o1.2.3-1o2.3o4.5 \doteq o\ ,$$
$$o1.2o34.5-o5o12.3.4 \doteq o\ ,\quad o1.2o34.5-o2.3o45.1 \doteq o\ ,$$
$$o2.34o5.1-o1.23o4.5 \doteq o\ ,\quad o51o2.3.4-o1.23o4.5 \doteq o\ ,$$

iz prethodne relacije sleduje

$$(4.9)\qquad 4(12345) \doteq 2(5o1.2o3.4+o5o1.23.4)\ .$$

Da bismo redukovali dalje desnu stranu ove relacije , poći ćemo od jednakosti (4.5) . Stavljajući u njoj $2 = 4 = o$, dobijamo

$$1o3o5+o1o35+5o1o3+o5o13+3o5o1+o3o51 = o\ .$$

Odavde sleduje

$$5o1o3+o5o13 = -1o3o5-o1o35-3o5o1-o3o51\ ,$$

$$3(5o1o3+o5o13) = (5o1o3-1o3o5)+(5o1o3-3o5o1)$$
$$+(o5o13-o1o35)+(o5o13-o3o51)\ .$$

Zamenjujući u poslednjoj formuli 1 sa 1.2 i 3 sa 3.4 , dolazimo do

$$3(5o1.2o3.4+o5o1.23.4)$$
$$= (5o1.2o3.4-1.2o3.4o5)+(5o1.2o3.4-o3.4o51.2)$$
$$+(o5o1.23.4-o1.2o3.45)+(o5o1.23.4-o3.4o51.2)\ .$$

Kako je

$$5o1.2o3.4-1.2o3.4o5 \doteq o\ ,\quad 5o1.2o3.4-o3.4o51.2 \doteq o\ ,$$
$$o5o1.23.4-o1.2o3.45 \doteq o\ ,\quad o5o1.23.4-o3.4o51.2 \doteq o\ ,$$

iz poslednje relacije sleduje

$$3(5o1.2o3.4+o5o1.23.4) \doteq o\ ,$$

tj.

$$5o1.2o3.4+o5o1.23.4 \doteq o\ .$$

Na osnovu toga , iz (4.9) dobijamo $4(12345) \doteq o$, odakle sleduje $12345 \doteq o$.

Ovim je završen dokaz implikacije (4.4) a samim tim i teoreme 3 .

Primedbe. 1° Pošto je u dokazu korišćena samo jednačina (4.5) , zaključujemo da je ta jednačina ekvivalentna jednačini (4.1) .

2° Prvi korak u rešavanju jednačine (4.5) sastojao se u formiranju jednakosti (4.6) . U slučaju kada je n parno , ovaj prvi korak nije moguće učiniti .

5. Rešavanje funkcionalne jednačine u slučaju n=7

Funkcionalna jednačina (2.5) u ovom slučaju ima oblik

$$\text{(5.1)} \qquad \mathrm{Cyc}^8\, f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = o \; .$$

Kao i u prethodnom paragrafu koristićemo uprošćene oznake :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = 1234567 \; ,$$

$$f(x_1,e,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = 1o34567.8 \; ,$$

$$nf(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = n(1234567) \; ,$$

i slično u drugim slučajevima .

Jednačina (5.1) može se napisati u obliku

$$\text{(5.1 bis)} \quad \begin{aligned} &1234567.8+2345678.1+3456781.2+4567812.3 \\ &+5678123.4+6781234.5+7812345.6+8123456.7 = o \; . \end{aligned}$$

T e o r e m a 4. Opšte rešenje jednačine (5.1) je dato sa (1.3) , tj.

$$(5.2)\quad \begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) &= f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_1(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_1)\\ &+f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_2(x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_1,x_2)\\ &+f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_3(x_4,x_5,x_6,x_7,x_1,x_2,x_3)\\ &+f_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_4(x_5,x_6,x_7,x_1,x_2,x_3,x_4), \end{aligned}$$

gde su f_1,f_2,f_3,f_4 *proizvoljne funkcije* .

P o s l e d i c a. *Iz teoreme* 4 *i rezultata iz* §1 , *sleduje da je* (1.2) *i* (1.3) *opšte rešenje jednačine* (1.1) *u slučaju* $n = 7$.

Pre nego što predjemo na dokaz teoreme 4 , postavićemo sledeću definiciju .

D e f i n i c i j a. *Za funkcije* g *i* h *reći ćemo da su u relaciji* $\doteq$, *tj. da je* $g \doteq h$, *ako je njihova razlika oblika*

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-h(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) &= f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_1(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_1)\\ &+f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_2(x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_1,x_2)\\ &+f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_3(x_4,x_5,x_6,x_7,x_1,x_2,x_3)\\ &+f_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)-f_4(x_5,x_6,x_7,x_1,x_2,x_3,x_4) , \end{aligned}$$

gde su f_1,f_2,f_3,f_4 *pogodno izabrane funkcije* .

Uvedena relacija je relacija ekvivalencije. Može se dokazati da iz $g_1 \doteq h_1$ i $g_2 \doteq h_2$ sleduje $g_1+g_2 \doteq h_1+h_2$. Takodje iz $2^m g \doteq o$ $(m \in N)$ sleduje $g \doteq o$.

Teorema 4 može se ukratko napisati

$$(5.3)\qquad (5.1) \Longleftrightarrow (1234567 \doteq o) .$$

<u>Dokaz</u> <u>teoreme</u> 4 . Implikacija

$$(1234567 \stackrel{*}{=} o) \Longrightarrow (5.1)$$

dokazana je u §1 . Ostaje da se dokaže

$$(5.4) \qquad (5.1) \Longrightarrow (1234567 \stackrel{*}{=} o) .$$

Stavljajući u jednačini (5.1 bis) $8 = o$ (tj. $x_8 = e$) , dobijamo

$$(5.5) \quad \begin{aligned} &1234567+2345671+34567o1.2+4567o12.3 \\ &+567o123.4+67o1234.5+7o12345.6+o123456.7 = o . \end{aligned}$$

Cikličkim permutovanjem nezavisno promenljivih , iz (5.5) dobijamo

$$\begin{aligned} &-2345671-3456712-45671o2.3-5671o23.4 \\ &-671o234.5-71o2345.6-1o23456.7-o234567.1 = o , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3456712+4567123+56712o3.4+6712o34.5 \\ &+712o345.6+12o3456.7+2o34567.1+o345671.2 = o , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-4567123-5671234-67123o4.5-7123o45.6 \\ &-123o456.7-23o4567.1-3o45671.2-o456712.3 = o , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &5671234+6712345+71234o5.6+1234o56.7 \\ &+234o567.1+34o5671.2+4o56712.3+o567123.4 = o , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-6712345-7123456-12345o6.7-2345o67.1 \\ &-345o671.2-45o6712.3-5o67123.4-o671234.5 = o , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &7123456+1234567+23456o7.1+3456o71.2 \\ &+456o712.3+56o7123.4+6o71234.5+o712345.6 = o . \end{aligned}$$

Sabiranjem poslednjih šest jednakosti i (5.5) , dobija se

$$(5.6) \quad 2(1234567) = \begin{aligned} &-o123456.7-7o12345.6-67o1234.5 \\ &-567o123.4-4567o12.3-34567o1.2 \\ &+o234567.1+1o23456.7+71o2345.6 \\ &+671o234.5+5671o23.4+45671o2.3 \end{aligned}$$

$$-o345671.2-2o34567.1-12o3456.7$$
$$-712o345.6-6712o34.5-56712o3.4$$

$$+o456712.3+3o45671.2+23o4567.1$$
$$+123o456.7+7123o45.6+67123o4.5$$

$$-o567123.4-4o56712.3-34o5671.2$$
$$-234o567.1-1234o56.7-71234o5.6$$

$$+o671234.5+5o67123.4+45o6712.3$$
$$+345o671.2+2345o67.1+12345o6.7$$

$$-o712345.6-6o71234.5-56o7123.4$$
$$-456o712.3-3456o71.2-23456o7.1 .$$

Kako je

$$-o123456.7+o234567.1 \triangleq o\ , \quad 1o23456.7-2o34567.1 \triangleq o\ ,$$
$$-12o3456.7+23o4567.1 \triangleq o\ , \quad 123o456.7-234o567.1 \triangleq o\ ,$$
$$-1234o56.7+2345o67.1 \triangleq o\ , \quad 12345o6.7-23456o7.1 \triangleq o\ ,$$

iz (5.6) izlazi

$$(5.7) \quad 2(1234567) \triangleq -o345671.2+3o45671.2-34o5671.2$$
$$+345o671.2-3456o71.2-34567o1.2$$

$$+o456712.3-4o56712.3+45o6712.3$$
$$-456o712.3-4567o12.3+45671o2.3$$

$$-o567123.4+5o67123.4-56o7123.4$$
$$-567o123.4+5671o23.4-56712o3.4$$

$$+o671234.5-6o71234.5-67o1234.5$$
$$+671o234.5-6712o34.5+67123o4.5$$

$$-o712345.6-7o12345.6+71o2345.6$$
$$-712o345.6+7123o45.6-71234o5.6 .$$

Zamenom $1\to 3$, $2\to 4$, $3\to 5$, $4\to 6$, $5\to 7$, $6\to o$, $7\to 1.2$, u jednakosti (5.6) , dobijamo

$$-2(34567o1.2) \triangleq o345671.2+1.2o34567+o1.2o3456.7$$
$$+7o1.2o345.6+67o1.2o34.5+567o1.2o3.4$$

$$-o4567o1.2.3-3o45671.2-1.23o4567$$
$$-o1.23o456.7-7o1.23o45.6-67o1.23o4.5$$

$$+o567o1.23.4+4o567o1.2.3+34o5671.2$$
$$+1.234o567+o1.234o56.7+7o1.234o5.6$$

$$-o67o1.234.5-5o67o1.23.4-45o67o1.2.3$$
$$-345o671.2-1.2345o67-o1.2345o6.7$$

$$+o7o1.2345.6+6o7o1.234.5+56o7o1.23.4$$
$$+456o7o1.2.3+3456o71.2+1.23456o7$$

$$
\begin{aligned}
&-ool\cdot 23456\cdot 7-7ool\cdot 2345\cdot 6-67ool\cdot 234\cdot 5\\
&-567ool\cdot 23\cdot 4-4567ool\cdot 2\cdot 3-34567ol\cdot 2\\
&+ol\cdot 234567+ool\cdot 23456\cdot 7+7ool\cdot 2345\cdot 6\\
&+67ool\cdot 234\cdot 5+567ool\cdot 23\cdot 4+4567ool\cdot 2\cdot 3 \ .
\end{aligned}
$$

Sredjivanjem poslednje jednakosti i "sabiranjem" sa (5.7) , dobijamo

$$
\begin{aligned}
2(1234567) \doteq\ & o456712\cdot 3-4o56712\cdot 3+45o6712\cdot 3\\
&-456o712\cdot 3-4567o12\cdot 3+45671o2\cdot 3\\
&-o567123\cdot 4+5o67123\cdot 4-56o7123\cdot 4\\
&-567o123\cdot 4+5671o23\cdot 4-56712o3\cdot 4\\
&+o671234\cdot 5-6o71234\cdot 5-67o1234\cdot 5\\
&+671o234\cdot 5-6712o34\cdot 5+67123o4\cdot 5\\
&-o712345\cdot 6-7o12345\cdot 6+71o2345\cdot 6\\
&-712o345\cdot 6+7123o45\cdot 6-71234o5\cdot 6\\
&+ol\cdot 234567+1\cdot 2o34567-1\cdot 23o4567\\
&+1\cdot 234o567-1\cdot 2345o67+1\cdot 23456o7\\
&+ol\cdot 2o3456\cdot 7-ol\cdot 23o456\cdot 7+ol\cdot 234o56\cdot 7\\
&\qquad -ol\cdot 2345o6\cdot 7\\
&+o7ol\cdot 2345\cdot 6+7ol\cdot 2o345\cdot 6-7ol\cdot 23o45\cdot 6\\
&\qquad +7ol\cdot 234o5\cdot 6\\
&-o67ol\cdot 234\cdot 5+6o7ol\cdot 234\cdot 5+67ol\cdot 2o34\cdot 5\\
&\qquad -67ol\cdot 23o4\cdot 5\\
&+o567ol\cdot 23\cdot 4-5o67ol\cdot 23\cdot 4+56o7ol\cdot 23\cdot 4\\
&\qquad +567ol\cdot 2o3\cdot 4\\
&-o4567ol\cdot 2\cdot 3+4o567ol\cdot 2\cdot 3-45o67ol\cdot 2\cdot 3\\
&\qquad +456o7ol\cdot 2\cdot 3 \ .
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&ol\cdot 234567-o712345\cdot 6 \doteq o \ , \quad 1\cdot 2o34567-7o12345\cdot 6 \doteq o \ ,\\
&-1\cdot 23o4567+71o2345\cdot 6 \doteq o \ , \quad 1\cdot 234o567-712o345\cdot 6 \doteq o \ ,\\
&-1\cdot 2345o67+7123o45\cdot 6 \doteq o \ , \quad 1\cdot 23456o7-71234o5\cdot 6 \doteq o \ ,
\end{aligned}
$$

iz prethodne formule sleduje

$$
\begin{aligned}
(5.8)\quad 2(1234567) \doteq\ & o456712\cdot 3-4o56712\cdot 3+45o6712\cdot 3\\
&-456o712\cdot 3-4567o12\cdot 3+45671o2\cdot 3\\
&-o567123\cdot 4+5o67123\cdot 4-56o7123\cdot 4\\
&-567o123\cdot 4+5671o23\cdot 4-56712o3\cdot 4\\
&+o671234\cdot 5-6o71234\cdot 5-67o1234\cdot 5\\
&+671o234\cdot 5-6712o34\cdot 5+67123o4\cdot 5\\
&+ol\cdot 2o3456\cdot 7-ol\cdot 23o456\cdot 7+ol\cdot 234o56\cdot 7\\
&\qquad -ol\cdot 2345o6\cdot 7
\end{aligned}
$$

$$+o7o1.2345.6+7o1.2o345.6-7o1.23o45.6+7o1.234o5.6$$
$$-o67o1.234.5+6o7o1.234.5+67o1.2o34.5-67o1.23o4.5$$
$$+o567o1.23.4-5o67o1.23.4+56o7o1.23.4+567o1.2o3.4$$
$$-o4567o1.2.3+4o567o1.2.3-45o67o1.2.3+456o7o1.2.3 .$$

Radi daljeg uprošćenja desnog strane ove relacije , primenićemo formulu (5.6) na prvih šest članova , tj. izvršićemo u (5.6) redom sledeće zamene :

1° $1\to o$, $2\to 4$, $3\to 5$, $4\to 6$, $5\to 7$, $6\to 1$, $7\to 2.3$;

2° $1\to 4$, $2\to o$, $3\to 5$, $4\to 6$, $5\to 7$, $6\to 1$, $7\to 2.3$;

3° $1\to 4$, $2\to 5$, $3\to o$, $4\to 6$, $5\to 7$, $6\to 1$, $7\to 2.3$;

4° $1\to 4$, $2\to 5$, $3\to 6$, $4\to o$, $5\to 7$, $6\to 1$, $7\to 2.3$;

5° $1\to 4$, $2\to 5$, $3\to 6$, $4\to 7$, $5\to o$, $6\to 1$, $7\to 2.3$;

6° $1\to 4$, $2\to 5$, $3\to 6$, $4\to 7$, $5\to 1$, $6\to o$, $7\to 2.3$.

Na taj način , posle svodjenja , dobijaju se sledeće formule :

$$2(o456712.3)+56712.3o4-o456712.3$$
$$+o56712.34+4o56712.3+o4o5671.2.3$$
$$+2.3o4o567.1+12.3o4o56.7+712.3o4o5.6$$
$$-o6712.3o4.5-5o6712.34-45o6712.3$$
$$-o45o671.2.3-2.3o45o67.1-12.3o45o6.7$$
$$+o712.3o45.6+6o712.3o4.5+56o712.34$$
$$+456o712.3+o456o71.2.3+2.3o456o7.1$$
$$-o12.3o456.7-7o12.3o45.6-67o12.3o4.5$$
$$-567o12.34-4567o12.3-o4567o1.2.3$$
$$+o2.3o4567.1+1o2.3o456.7+71o2.3o45.6$$
$$+671o2.3o4.5+5671o2.34+45671o2.3 \quad = o ,$$

$$-2(4o56712.3)+6712.34o5-o56712.34$$
$$-o4o5671.2.3-2.3o4o567.1-12.3o4o56.7$$
$$-712.3o4o5.6-6712.3o45-56712.3o4$$
$$+o6712.345+5o6712.34+o5o6712.3.4$$
$$+4o5o671.2.3+2.34o5o67.1+12.34o5o6.7$$

-o712.34o5.6-6o712.345-56o712.34
-o56o712.3.4-4o56o71.2.3-2.34o56o7.1

+o12.34o56.7+7o12.34o5.6+67o12.345
+567o12.34+o567o12.3.4+4o567o1.2.3

-o2.34o567.1-1o2.34o56.7-71o2.34o5.6
-671o2.345-5671o2.34-o5671o2.3.4 = o ,

2(45o6712.3)+712.345o6-o6712.345

+o45o671.2.3+2.3o45o67.1+12.3o45o6.7
+712.3o456+6712.3o45+o6712.3o4.5

-o5o6712.3.4-4o5o671.2.3-2.34o5o67.1
-12.34o5o6.7-712.34o56-6712.34o5

+o712.3456+6o712.345+o6o712.34.5
+5o6o712.3.4+45o6o71.2.3+2.345o6o7.1

-o12.345o6.7-7o12.3456-67o12.345
-o67o12.34.5-5o67o12.3.4-45o67o1.2.3

+o2.345o67.1+1o2.345o6.7+71o2.3456
+671o2.345+o671o2.34.5+5o671o2.3.4 = o ,

-2(456o712.3)+12.3456o7-o712.3456

-o456o71.2.3-2.3o456o7.1-12.3o4567
-712.3o456-o712.3o45.6-6o712.3o4.5

+o56o712.3.4+4o56o71.2.3+2.34o56o7.1
+12.34o567+712.34o56+o712.34o5.6

-o6o712.34.5-5o6o712.3.4-45o6o71.2.3
-2.345o6o7.1-12.345o67-712.345o6

+o12.34567+7o12.3456+o7o12.345.6
+6o7o12.34.5+56o7o12.3.4+456o7o1.2.3

-o2.3456o7.1-1o2.34567-71o2.3456
-o71o2.345.6-6o71o2.34.5-56o71o2.3.4 = o ,

-2(4567o12.3)-2.34567o1+o12.34567

-o4567o1.2.3-2.3o45671-12.3o4567
-o12.3o456.7-7o12.3o45.6-67o12.3o4.5

+o567o12.3.4+4o567o1.2.3+2.34o5671
+12.34o567+o12.34o56.7+7o12.34o5.6

-o67o12.34.5-5o67o12.3.4-45o67o1.2.3
-2.345o671-12.345o67-o12.345o6.7

+o7o12.345.6+6o7o12.34.5+56o7o12.3.4
+456o7o1.2.3+2.3456o71+12.3456o7

-o2.345671-1o2.34567-o1o2.3456.7
-7o1o2.345.6-67o1o2.34.5-567o1o2.3.4 = o ,

$$2(4567lo2.3)+o2.34567-4567lo2.3$$
$$+o456712.3+2.3o45671+o2.3o4567.1+lo2.3o456.7$$
$$+7lo2.3o45.6+67lo2.3o4.5$$
$$-o567lo2.3.4-4o56712.3-2.34o5671$$
$$-o2.34o567.1-lo2.34o56.7-7lo2.34o5.6$$
$$+o67lo2.34.5+5o67lo2.3.4+45o6712.3$$
$$+2.345o671+o2.345o67.1+lo2.345o6.7$$
$$-o7lo2.345.6-6o7lo2.34.5-56o7lo2.3.4$$
$$-456o712.3-2.3456o71-o2.3456o7.1$$
$$+olo2.3456.7+7olo2.345.6+67olo2.34.5$$
$$+567olo2.3.4+4567o12.3+2.34567ol = o .$$

Sabiranjem ovih šest jednakosti , sredjivanjem i deljenjem sa 2 , dobijamo formulu

$$o456712.3-4o56712.3+45o6712.3$$
$$-456o712.3-4567o12.3+4567lo2.3$$
$$+o2.3o4567.1+lo2.3o456.7+7lo2.3o45.6+67lo2.3o4.5$$
$$-o567lo2.3.4-o2.34o567.1-lo2.34o56.7-7lo2.34o5.6$$
$$+o67lo2.34.5+5o67lo2.3.4+o2.345o67.1+lo2.345o6.7$$
$$-o7lo2.345.6-6o7lo2.34.5-56o7lo2.3.4-o2.3456o7.1$$
$$-o4567ol.2.3-o12.3o456.7-7o12.3o45.6-67o12.3o4.5$$
$$+o567o12.3.4+4o567ol.2.3+o12.34o56.7+7o12.34o5.6$$
$$-o67o12.34.5-5o67o12.3.4-45o67ol.2.3-o12.345o6.7$$
$$+o7o12.345.6+6o7o12.34.5+56o7o12.3.4+456o7ol.2.3 = o .$$

"Sabirajući" poslednje jednakosti sa (5.8) i koristeći relacije

$$o671234.5-o12.34567 \doteq o , -6o71234.5+lo2.34567 \doteq o ,$$
$$-67o1234.5+12.3o4567 \doteq o , 67lo234.5-12.34o567 \doteq o ,$$
$$-6712o34.5+12.345o67 \doteq o , 67123o4.5-12.3456o7 \doteq o ,$$
$$o1.2o3456.7-o2.3o4567.1 \doteq o , -o1.23o456.7+o2.34o567.1 \doteq o ,$$
$$o1.234o56.7-o2.345o67.1 \doteq o , -o1.2345o6.7+o2.3456o7.1 \doteq o ,$$

dobijamo

(5.9) $2(1234567)$

$$\doteq -o567123.4+5o67123.4-56o7123.4$$
$$-567o123.4+567lo23.4-56712o3.4$$
$$+o7o1.2345.6+7o1.2o345.6-7o1.23o45.6+7o1.234o5.6$$

-o67o1.234.5+6o7o1.234.5+67o1.2o34.5-67o1.23o4.5
+o567o1.23.4-5o67o1.23.4+56o7o1.23.4+567o1.2o3.4
+o5671o2.3.4-1o2.3o456.7-71o2.3o45.6-671o2.3o4.5
-o671o2.34.5-5o671o2.3.4+1o2.34o56.7+71o2.34o5.6
+o71o2.345.6+6o71o2.34.5+56o71o2.3.4-1o2.345o6.7
-o567o12.3.4+o12.3o456.7+7o12.3o45.6+67o12.3o4.5
+o67o12.34.5+5o67o12.3.4-o12.34o56.7-7o12.34o5.6
-o7o12.345.6-6o7o12.34.5-56o7o12.3.4+o12.345o6.7 .

Da bismo izvršili dalju redukciju desne strane ove formule , primenićemo formulu (5.6) na prvih šest članova , tj. izvršićemo u (5.6) redom sledeće zamene :

1° 1→o , 2→5 , 3→6 , 4→7 , 5→1 , 6→2 , 7→3.4 ;
2° 1→5 , 2→o , 3→6 , 4→7 , 5→1 , 6→2 , 7→3.4 ;
3° 1→5 , 2→6 , 3→o , 4→7 , 5→1 , 6→2 , 7→3.4 ;
4° 1→5 , 2→6 , 3→7 , 4→o , 5→1 , 6→2 , 7→3.4 ;
5° 1→5 , 2→6 , 3→7 , 4→1 , 5→o , 6→2 , 7→3.4 ;
6° 1→5 , 2→6 , 3→7 , 4→1 , 5→2 , 6→o , 7→3.4 .

Na taj način , posle svodjenja dolazimo do sledećih formula :

-2(o567123.4)-67123.4o5+o567123.4
-o67123.45-5o67123.4-o5o6712.3.4
-3.4o5o671.2-23.4o5o67.1-123.4o5o6.7
+o7123.4o5.6+6o7123.45+56o7123.4
+o56o712.3.4+3.4o56o71.2+23.4o56~~7.1~~ o7.1
6.7 -o123.4o5~~6.7~~-7o123.4o5.6-67o123.45
-567o123.4-o567o12.3.4-3.4o567o1.2
+o23.4o567.1+1o23.4o56.7+71o23.4o5.6
+671o23.45+5671o23.4+o5671o2.3.4
-o3.4o5671.2-2o3.4o567.1-12o3.4o56.7
-712o3.4o5.6-6712o3.45-5671 2o3.4 = o ,

2(5o67123.4)-7123.45o6+o67123.45
+o5o6712.3.4+3.4o5o671.2+23.4o5o67.1
+123.4o5o6.7+7123.4o56+67123.4o5

-o7123.456-6o7123.45-o6o7123.4.5
-5o6o712.3.4-3.45o6o71.2-23.45o6o7.1

+o123.45o6.7+7o123.456+67o123.45
+o67o123.4.5+5o67o12.3.4+3.45o67o1.2

-o23.45o67o1-1o23.45o6.7-71o23.456
-671o23.45-o671o23.4.5-5o671o2.3.4

+o3.45o67o1+2o3.45o67.1+12o3.45o6.7
+712o3.456+6712o3.45+o6712o3.4.5 = o ,

-2(56o7123.4)-123.456o7+o7123.456

-o56o712.3.4-3.4o56o71.2-23.4o56o7.1
-123.45o67-7123.4o56-o7123.4o5.6

+o6o7123.4.5+5o6o712.3.4+3.45o6o71.2
+23.45o6o7.1+123.45o67+7123.45o6

-o123.4567-7o123.456-o7o123.45.6
-6o7o123.4.5-56o7o12.3.4-3.456o7o1.2

+o23.456o7.1+1o23.4567+71o23.456
+o71o23.45.6+6o71o23.4.5+56o71o2.3.4

-o3.456o71.2-2o3.456o7.1-12o3.4567
-712o3.456-o712o3.45.6-6o712o3.4.5 = o ,

-2(567o123.4)+23.4567o1-o123.4567

-o567o12.3.4-3.4o567o1.2-23.4o5671
-123.4o567-o123.4o56.7-7o123.4o5.6

+o67o123.4.5+5o67o12.3.4+3.45o67o1.2
+23.45o671+123.45o67+o123.45o6.7

-o7o123.45.6-6o7o123.4.5-56o7o12.3.4
-3.456o7o1.2-23.456o71-123.456o7

+o23.45671+1o23.4567+o1o23.456.7
+7o1o23.45.6+67o1o23.4.5+567o1o2.3.4

-o3.4567o1.2-2o3.45671-12o3.4567
-o12o3.456.7-7o12o3.45.6-67o12o3.4.5 = o ,

2(5671o23.4)+3.45671o2-o23.4o567.1

+o5671o2.3.4+3.4o56712+23.4o5671
+o23.4o567.1+1o23.4o56.7+71o23.4o5.6

-o671o23.4.5-5o671o2.3.4-3.45o6712
-23.45o671-o23.45o67.1-1o23.45o6.7

+o71o23.45.6+6o71o23.4.5+56o71o2.3.4
+3.456o712+23.456o71+o23.456o7.1

-o1o23.456.7-7o1o23.45.6-67o1o23.4.5
-567o1o2.3.4-3.4567o12-23.4567o1

+o3.456712+2o3.45671+o2o3.4567.1
+1o2o3.4567.4+71o2o3.45.6+671o2o3.4.5 = o ,

-2(56712o3.4)+56712o3.4-o3.456712
-o567123.4-3.4o56712-o3.4o5671.2
-2o3.4o567.1-12o3.4o56.7-712o3.4o5.6
+o6712o3.4.5+5o67123.4+3.45o6712
+o3.45o671.2+2o3.45o67.1+12o3.45o6.7
-o712o3.45.6-6o712o3.4.5-56o7123.4
-3.456o712-o3.456o71.2-2o3.456o7.1
+o12o3.456.7+7o12o3.45.6+67o12o3.4.5
+567o123.4+3.4567o12+o3.4567o1.2
-o2o3.4567.1-1o2o3.456.7-71o2o3.45.6
-671o2o3.4.5-5671o23.4-3.45671o2 = o .

Sabiranjem poslednjih šest jednakosti , svodjenjem sličnih članova i deljenjem sa 2 , nalazimo

(5.1o) -o567123.4+5o67123.4-56o7123.4
-567o123.4+5671o23.4-56712o3.4
-o123.4567+1o23.4567-12o3.4567
-123.4o567+123.45o67-123.456o7
-o567o12.3.4-3.4o567o1.2-o123.4o56.7-7o123.4o5.6
+o67o123.4.5+5o67o12.3.4+3.45o67o1.2+o123.45o6.7
-o7o123.45.6-6o7o123.4.5-56o7o12.3.4-3.456o7o1.2
+o5671o2.3.4+o23.4o567.1+1o23.4o56.7+71o23.4o5.6
-o671o23.4.5-5o671o2.3.4-o23.45o67.1-1o23.45o6.7
+o71o23.45.6+6o71o23.4.5+56o71o2.3.4+o23.456o7.1
-o3.4o5671.2-2o3.4o567.1-12o3.4o56.7-712o3.4o5.6
+o6712o3.4.5+o3.45o671.2+2o3.45o67.1+12o3.45o6.7
-o712o3.45.6-6o712o3.4.5-o3.456o71.2-2o3.456o7.1 = o .

Množeći ekvivalenciju (5.9) sa 2 i sabirajući je zatim sa (5.1o) , svodjenjem sličnih članova i pogodnim grupisanjem dobijamo :

4(1234567) ≗ (o123.4567-o567123.4)+(5o67123.4-1o23.4567)
+(12o3.4567-56o7123.4)+(123.4o567-567o123.4)
+(5671o23.4-123.45o67)+(123.456o7-56712o3.4)
+(o123.4o56.7-o567o12.3.4)+(o5671o2.3.4-o123.45o6.7)
+(5o67o12.3.4-1o23.4o56.7)+(1o23.45o6.7-5o671o2.3.4)
+(12o3.4o56.7-56o7o12.3.4)+(56o71o2.3.4-12o3.45o6.7)

+(o12.3o456.7−o67o123.4.5)+(6o7o123.4.5−1o2.3o456.7)
+(o671o23.4.5−o12.34o56.7)+(1o2.34o56.7−6o71o23.4.5)
+(o12.345o6.7−o6712o3.4.5)+(6o712o3.4.5−1o2.345o6.7)
+(o12.3o456.7−o23.4o567.1)+(2o3.4o567.1−1o2.3o456.7)
+(o23.45o67.1−o12.34o56.7)+(1o2.34o56.7−2o3.45o67.1)
+(o12.345o6.7−o23.456o7.1)+(2o3.456o7.1−1o2.345o6.7)
+(3.4o567o1.2−7o123.4o5.6)+(3.45o67o1.2−71o23.4o5.6)
+(o3.4o5671.2−o7o123.45.6)+(3.456o7o1.2−712o3.4o5.6)
+(o3.45o671.2−o71o23.45.6)+(o3.456o71.2−o712o3.45.6)

+2{o7o1.2345.6+7o1.2o345.6−7o1.23o45.6+7o1.234o5.6
−o67o1.234.5+6o7o1.234.5+67o1.2o34.5−67o1.23o4.5
+o567o1.23.4−5o67o1.23.4+56o7o1.23.4+567o1.2o3.4
+o71o2.345.6−7o12.34o5.6−71o2.3o45.6+71o2.34o5.6
−o671o2.34.5+6o71o2.34.5+67o12.3o4.5−671o2.3o4.5
+o7o123.45.6+o712o3.45.6+7o123.4o5.6+712o3.4o5.6
+7o12.3o45.6−o7o12.345.6+o67o12.34.5−6o7o12.34.5
−3.45o67o1.2−o3.45o671.2} .

Kako je svaka mala zagrada , na desnoj strani ove relacije , oblika (5.2) (≐ o) , posle skraćivanja sa 2 , dobija se :

(5.11) 2(1234567)

≐ o7o1.2345.6+7o1.2o345.6−7o1.23o45.6+7o1.234o5.6
−o67o1.234.5+6o7o1.234.5+67o1.2o34.5−67o1.23o4.5
+o567o1.23.4−5o67o1.23.4+56o7o1.23.4+567o1.2o3.4
+o71o2.345.6−7o12.34o5.6−71o2.3o45.6+71o2.34o5.6
−o671o2.34.5+6o71o2.34.5+67o12.3o4.5−671o2.3o4.5
+o7o123.45.6+o712o3.45.6+7o123.4o5.6+712o3.4o5.6
+7o12.3o45.6−o7o12.345.6+o67o12.34.5−6o7o12.34.5
−3.45o67o1.2−o3.45o671.2 .

Stavljajući u (5.5) 4 = 6 = o , dobija se

(5.12) 123o5o7+23o5o71+3o5o7o1.2+o5o7o12.3
+5o7o123+o7o1235+7o123o5+o123o57 = o .

Ako se u (5.5) stavi 3 = 6 = o , dobija se

(5.13) 12o45o7+2o45o71+o45o7o1.2+45o7o12
+5o7o124+o7o12o4.5+7o12o45+o12o457 = o .

Vršeći u formuli (5.12) sledeće zamene

1° 1 → 1 , 2 → 2.3 , 3 → 4 , 5 → 5.6 , 7 → 7 ;

2° 1 → 1.2 , 2 → 3 , 3 → 4 , 5 → 5.6 , 7 → 7 ;

3° 1 → 1 , 2 → 2 , 3 → 3.4 , 5 → 5.6 , 7 → 7 ;

a u formuli (5.13) , zamene

1° 1 → 6 , 2 → 7 , 4 → 1.2 , 5 → 3 , 7 → 4.5 ;

2° 1 → 1.2 , 2 → 3 , 4 → 4 , 5 → 5.6 , 7 → 7 ;

3° 1 → 1.2 , 2 → 3 , 4 → 4.5 , 5 → 6 , 7 → 7 ;

4° 1 → 1 , 2 → 2.3 , 4 → 4 , 5 → 5.6 , 7 → 7 ;

dobijamo sledećih sedam jednakosti :

o = 12.34o5.6o7+2.34o5.6o71+4o5.6o7o1.2.3+o5.6o7o12.3.4
+5.6o7o12.34+o7o12.345.6+7o12.34o5.6+o12.34o5.67 ,

o = -1.234o5.6o7-34o5.6o71.2-4o5.6o7o1.2.3-o5.6o7o1.23.4
-5.6o7o1.234-o7o1.2345.6-7o1.234o5.6-o1.234o5.67 ,

o = -123.4o5.6o7-23.4o5.6o7-3.4o5.6o7o1.2-o5.6o7o12.3.4
-5.6o7o123.4-o7o123.45.6-7o123.4o5.6-o123.4o5.67 ,

o = 67o1.23o4.5+7o1.23o4.56+o1.23o4.5o6.7+1.23o4.5o67
+3o4.5o671.2+o4.5o67o1.2.3+4.5o67o1.23+o67o1.234.5 ,

o = 1.23o45.6o7+3o45.6o71.2+o45.6o7o1.2.3+45.6o7o1.23
+5.6o7o1.234+o7o1.23o4.5.6+7o1.23o45.6+o1.23o45.67 ,

o = -1.23o4.56o7-3o4.56o71.2-o4.56o7o1.2.3-4.56o7o1.23
-6o7o1.234.5-o7o1.23o4.5.6-7o1.23o4.56-o1.23o4.567 ,

o = -12.3o45.6o7-2.3o45.6o71-o45.6o7ol.2.3-45.6o7o12.3
-5.6o7o12.34-o7o12.3o4.5.6-7o12.3o45.6-o12.3o45.67 .

Sabiranjem (5.11) i poslednjih sedam jednakosti i sredjivanjem, dobijamo

2(1234567) ≐ (7ol.2o345.6-5.6o7o123.4)+(67ol.2o34.5-45.6o7o12.3)
+(o567ol.23.4-12o3.4o5.67)+(3o45.6o71.2-5o67ol.23.4)
+(56o7ol.23.4-34o5.6o71.2)+(567ol.2o3.4-123.4o5.6o7)
+(1.23o4.5o67-71o2.3o45.6)+(12.34o5.6o7-671o2.3o4.5)
+(o12.34o5.67-o671o2.34.5)+(71o2.34o5.6-1.23o4.56o7)
+(o71o2.345.6-o1.23o4.567)+(6o71o2.34.5-3o4.56o71.2)
+(67o12.3o4.5-12.3o45.6o7)+(o67o12.34.5-o12.3o45.67)
+(3o4.5o671.2-6o7o12.34.5)+(1.23o45.6o7-3.45o67ol.2)
+(712o3.4o5.6-1.234o5.6o7)+(o1.23o4.567-o3.45o671.2)
+(o712o3.45.6-o1.234o5.67)+(2.34o5.6o71-4.56o7ol.23)
+(45.6o7ol.23-23.4o5.6o71)+(o1.23o4.5o6.7
-o4.56o7ol.2.3)
+(o4.5o67ol.2.3-o7o12.3o4.5.6)
+(4.5o67ol.23-2.3o45.6o71)
+3.4o5.6o7ol.2+o5.6o7ol.23.4 .

Kako je svaka mala zagrada , na desnoj strani poslednje relacije , oblika (5.2) (≐ o) , dobijamo

(5.14) 2(1234567) ≐ 3.4o5.6o7ol.2+o5.6o7ol.23.4 .

Stavljajući u (5.12) 2 = o , dolazimo do

3o5o7ol+o5o7ol3 = -1o3o5o7-o3o5o71
-5o7olo3-o7olo35
-7olo3o5-olo3o57 .

Ako ovde izvršimo zamenu

1→1.2 , 3→3.4 , 5→5.6 , 7→7 ,

imamo jednakost

$$
\begin{aligned}
3\cdot 4o5\cdot 6o7o1\cdot 2+o5\cdot 6o7o1\cdot 23\cdot 4 = & -1\cdot 2o3\cdot 4o5\cdot 6o7-o3\cdot 4o5\cdot 6o71\cdot 2\\
& -5\cdot 6o7o1\cdot 2o3\cdot 4-o7o1\cdot 2o3\cdot 45\cdot 6\\
& -7o1\cdot 2o3\cdot 4o5\cdot 6-o1\cdot 2o3\cdot 4o5\cdot 67 \ .
\end{aligned}
$$

Iz poslednje jednakosti i (5.14) izlazi

$$
\begin{aligned}
8(1234567) \doteq & (3\cdot 4o5\cdot 6o7o1\cdot 2-1\cdot 2o3\cdot 4o5\cdot 6o7)\\
& +(o5\cdot 6o7o1\cdot 23\cdot 4-o3\cdot 4o5\cdot 6o71\cdot 2)\\
& +(3\cdot 4o5\cdot 6o7o1\cdot 2-5\cdot 6o7o1\cdot 2o3\cdot 4)\\
& +(o5\cdot 6o7o1\cdot 23\cdot 4-o7o1\cdot 2o3\cdot 45\cdot 6)\\
& +(3\cdot 4o5\cdot 6o7o1\cdot 2-7o1\cdot 2o3\cdot 4o5\cdot 6)\\
& +(o5\cdot 6o7o1\cdot 23\cdot 4-o1\cdot 2o3\cdot 4o5\cdot 67) \ .
\end{aligned}
$$

Odavde sleduje $8(1234567) \doteq o$, tj. $1234567 \doteq o$, jer je svaka od zagrada na desnoj strani oblika (5.2) .

Time je završen dokaz teoreme 4 .

<u>Primedbe.</u> 1^o Kao i u prethodnom paragrafu , vidimo da je u dokazu teoreme 4 iskorišćena samo jednačina (5.5) . Prema tome , zaključujemo da su jednačine (5.1) i (5.5) ekvivalentne .

2^o Funkcije f_i $(i=1,2,3,4)$ čija egzistencija sleduje iz teoreme 4 , mogu se efektivno odrediti koristeći formule koje se javljaju u dokazu .

III deo

REŠAVANJE IZVESNIH KLASA FUNKCIONALNIH JEDNAČINA U REALNOJ OBLASTI

1. Rešenje jednačine

$$F(x,y,z)-F(y,z,x) = f(x,y+z)$$

U prethodnom odeljku videli smo da se pri vrlo opštim pretpostavkama može naći opšte rešenje jednačine (2.1.1) , a takodje jednačine (2.2.5) , za $n = 1,3,5,7$. Za parno $\underline{n}$ nismo mogli naći opšte rešenje .

U ovom paragrafu analiziraćemo jednačinu (2.1.1) za $n = 2$, tj. jednačinu

$$F(x,y,z)-F(y,z,x) = f(x,y\circ z) \tag{1.1}$$

pri dopunskim pretpostavkama :

1° $S = R$, tj. nezavisno promenljive x,y,z uzimaju proizvoljne vrednosti iz skupa ~~realnih brojeva~~ realnih brojeva.

2° $M = R$, tj. funkcije $\underline{F}$ i $\underline{f}$ uzimaju takodje vrednosti iz skupa realnih brojeva ;

3° Operacija "$\circ$" je operacija sabiranja realnih brojeva (ona je asocijativna i ima jedinični element) .

Dakle , umesto (1.1) možemo pisati

$$F(x,y,z)-F(y,z,x) = f(x,y+z) \; . \tag{1.2}$$

Eliminacijom funkcije $\underline{F}$ dobijamo jednačinu

$$f(x,y+z)+f(y,z+x)+f(z,x+y) = 0 \; , \tag{1.3}$$

koja odgovara jednačini (2.2.5) .

Jednačina

$$g(y+z,x)+g(z+x,y)+g(x+y,z)=0\ , \qquad (1.4)$$

koja se iz (1.3) dobija stavljajući $f(x,y)=g(y,x)$, rešena je u članku |4| pod pretpostavkom da je funkcija g neprekidna . Naime, u tom članku je dokazana sledeća teorema :

T e o r e m a 1. <u>Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine</u> (1.4) <u>je</u>

$$g(x,y)=(x-2y)\,\psi(x+y)\ , \qquad (1.5)$$

<u>gde je</u> ψ <u>proizvoljna neprekidna funkcija</u> .

Iz navedenog članka , neposredno sleduje i opštija teorema koju ćemo ovde formulisati .

T e o r e m a 2. <u>Opšte rešenje funkcionalne jednačine</u> (1.4) <u>je dato sa</u>

$$g(x,y)=\varphi(x-2y)\,\psi(x+y)\ , \qquad (1.6)$$

<u>gde je</u> $\varphi(x)$ <u>opšte rešenje Cauchy-eve funkcionalne jednačine</u>

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ , \qquad (1.7)$$

<u>i</u> $\psi(x)$ <u>proizvoljna funkcija</u> .

P o s l e d i c a. <u>Opšte rešenje jednačine</u> (1.3) <u>je</u>

$$f(x,y)=\varphi(2x-y)\,\psi(x+y) \qquad (1.8)$$

<u>gde</u> φ <u>i</u> ψ <u>imaju isto značenje kao u teoremi</u> 2 .

Zamenjujući funkciju f iz (1.8) u (1.2) , dobijamo

$$F(x,y,z)-F(y,z,x)=\varphi(2x-y-z)\,\psi(x+y+z)\ .$$

Koristeći se činjenicom da je φ rešenje jednačine (1.7), odavde sleduje

$$F(x,y,z)-F(y,z,x)=\varphi(x-z)\,\psi(x+y+z)-\varphi(y-x)\,\psi(x+y+z)\ ,$$

tj.

$$\{F(x,y,z)-\varphi(x-z)\psi(x+y+z)\}-\{F(y,z,x)-\varphi(y-x)\psi(y+z+x)\}=0 .$$

Funkcija $F(x,y,z)-\varphi(x-z)\psi(x+y+z)$ je, dakle, invarijantna pri cikličkoj permutaciji promenljivih x,y,z. Na osnovu toga, prema |10| (str. 8-9), zaključujemo da je

$$(1.9)\qquad F(x,y,z)=\varphi(x-z)\psi(x+y+z)+\phi(x,y,z)+\phi(y,z,x)+\phi(z,x,y) ,$$

gde je ϕ proizvoljna funkcija.

Prema tome, dokazali smo sledeći rezultat:

T e o r e m a 3. <u>Opšte rešenje jednačine</u> (1.2), <u>gde su</u> F <u>i</u> f <u>nepoznate funkcije, dato je pomoću</u> (1.8) <u>i</u> (1.9), <u>gde su</u> ψ <u>i</u> ϕ <u>proizvoljne funkcije a</u> φ <u>proizvoljno rešenje jednačine</u> (1.7).

P o s l e d i c a. <u>Opšte neprekidno rešenje jednačine</u> (1.2) <u>dato je sa</u>

$$(1.10)\qquad f(x,y)=(2x-y)\psi(x+y) ,$$

$$(1.11)\qquad F(x,y,z)=(x-z)\psi(x+y+z)+\phi(x,y,z)+\phi(y,z,x)+\phi(z,x,y) ,$$

<u>gde su</u> ψ <u>i</u> ϕ <u>proizvoljne neprekidne funkcije</u>.

<u>Generalizacija.</u> Operaciju "." umesto uslovom 3° možemo definisati sa

$$x.y=g(g^{-1}(x)+g^{-1}(y))$$

gde je g proizvoljna striktno monotona funkcija koja je definisana na čitavoj realnoj osi a g^{-1} njoj inverzna funkcija. Ovako definisana operacija je asocijativna i ima jedinični element $e=g(0)$ (videti |1|).

Rešavanje jednačine (1.1), u ovom generalnijem slučaju, svodi se opet na rešavanje jednačine (1.2) (videti |4|).

U pomenutom članku je rešena na taj način funkcionalna jednačina

$$f(xy,z)+f(yz,x)+f(zx,y)=0 ,$$

pod pretpostavkom da je f neprekidna funkcija.

2. Rešenje jedne klase funkcionalnih jednačina

U radu |9| odredjeno je opšte neprekidno rešenje jedne klase funkcionalnih jednačina koja generališe jednačinu (1.2).

Neka je ciklički operator C definisan sa

$$Cf(x_1,x_2,\dots,x_{m+n}) = f(x_2,x_3,\dots,x_{m+n},x_1) ,$$

gde je f proizvoljna funkcija.

U pomenutom radu posmatrana je jednačina

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} F_i(x_1+x_2+\dots+x_m, x_{m+1}+x_{m+2}+\dots+x_{m+n}) = 0 ,$$

gde su m i n $(m+n > 2)$ prirodni brojevi, x_i realne nezavisno promenljive i F_i nepoznate realne funkcije i dokazana je sledeća teorema.

T e o r e m a 4. Opšte neprekidno rešenje jednačine (2.1) dato je sa

$$(2.2) \quad \begin{aligned} F_i(x,y) &= (nx-my)f(x+y)+g_i(x+y) \quad (i=1,2,\dots,m+n-1) , \\ F_{m+n}(x,y) &= (nx-my)f(x+y)-\sum_{i=1}^{m+n-1} g_i(x+y) , \end{aligned}$$

gde su f i g_i $(i = 1,2,\dots,m+n-1)$ proizvoljne neprekidne funkcije.

Primetimo da iz teoreme 4 možemo neposredno dobiti i opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} F(x_1+x_2+\dots+x_m, x_{m+1}+x_{m+2}+\dots+x_{m+n}) = 0 ,$$

koja se iz (2.1) dobija stavljajući $F_1 = F_2 = \dots = F_{m+n} = F$. (U opštem slučaju to ne mora biti tačno).

Zaista, ako iskoristimo (2.2), dobijamo

$$g_1 = g_2 = \dots = g_{m+n-1} = -\sum_{i=1}^{m+n-1} g_i = -(m+n-1)g_1 = 0 .$$

Dakle, opšte neprekidno rešenje jednačine (2.3) dato je sa

$$(2.4) \quad F(x,y) = (nx-my)f(x+y) ,$$

gde je $\underline{f}$ proizvoljna neprekidna funkcija .

3. Rešenje druge klase funkcionalnih jednačina

U članku |5| rešena je jednačina koja generališe jednačinu (2.3) . Neka je ciklični operator C definisan sa

$$C\, f(x_1,x_2,\ldots,x_{m+n+p}) = f(x_2,x_3,\ldots,x_{m+n+p},x_1)$$

gde je $\underline{f}$ proizvoljna funkcija . Posmatrana jednačina glasi

$$(3.1)\qquad \sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1}\, F(x_1+\ldots+x_m,\, x_{m+1}+\ldots+x_{m+n},\, x_{m+n+1}+\ldots+x_{m+n+p}) = 0 .$$

gde su m,n,p prirodni brojevi ~~[illegible]~~ , x_i realne nezavisno promenljive i $\underline{F}$ nepoznata realna funkcija .

U radu je dokazana sledeća teorema .

T e o r e m a 5. <u>Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine</u> (3.1) <u>dato je sa</u>

$$1^{\circ}\quad F(x,y,z) = \left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)f(x+y+z)+\left(y-n\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)g(x+y+z) ,$$

<u>za</u> $m,n < p\ ;\ m \neq n\ ;\ m+n \neq p\ ;$

$$2^{\circ}\ F(x,y,z) = f\left(x+y-p\,\frac{x+y+z}{m+n+p},\ x+y+z\right)$$
$$-f\left(-x-y+p\,\frac{x+y+z}{m+n+p},\ x+y+z\right)+\left(x-m\,\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)g(x+y+z) ,$$

<u>za</u> $m,n < p\ ,\ m \neq n\ ,\ m+n = p\ ;$

$$3^{\circ}\quad F(x,y,z) = f\left[x+y-(m+n)\,\frac{x+y+z}{m+n+p},\ x+y+z\right]$$
$$-f\left(-y+n\,\frac{x+y+z}{m+n+p},\ x+y+z\right)+\left(y-n\,\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)g(x+y+z) ,$$

<u>za</u> $m < n = p\ ;$

$$4^\circ \quad F(x,y,z) = f\left[x+y-(m+n)\frac{x+y+z}{m+n+p}\,,\ x+y+z\right]$$

$$-f\left(-x+m\frac{x+y+z}{m+n+p}\,,\ x+y+z\right)+\left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)g(x+y+z)\,,$$

<u>za</u> $n < m = p$;

$$5^\circ \quad F(x,y,z) = f\left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+p}\,,\ x+y+z\right)$$

$$-f\left(y-n\frac{x+y+z}{m+n+p}\,,\ x+y+z\right)+\left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)g(x+y+z)\,,$$

<u>za</u> $2m = 2n \neq p$;

$$6^\circ \quad F(x,y,z) = f(x,y+z)-f(y,z+x)+g(x+y,z)-g(z,x+y)\,,$$

<u>za</u> $2m = 2n = p$;

7° $F(x,y,z) = f(x,y,z)-f(y,z,x)$, <u>za</u> $m = n = p$;

<u>gde su f i g proizvoljne neprekidne funkcije</u> .

Primetimo da su teoremom obuhvaćeni samo slučajevi kada je $p = \max(m,n,p)$ dok se svi ostali slučajevi , kao što je to u članku pokazano svode na posmatrane .

Iz teoreme 2.2 i rezultata iz članka |2| sleduje da su rešenja koja su navedena u slučajevima 6° i 7° poslednje teoreme opšta ako se pretpostavi samo da su <u>f</u> i <u>g</u> proizvoljne funkcije . Taj rezultat je dobijen i u članku |5| .

4. <u>Još jedna klasa funkcionalnih jednačina</u>

Za proizvoljnu funkciju <u>f</u> stavimo

$$C\,f(x_1,x_2,\ldots,x_{m+n+p}) = f(x_2,x_3,\ldots,x_{m+n+p},x_1)\,.$$

Posmatraćemo funkcionalnu jednačinu

$$(4.1) \qquad \sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1+x_2+\dots+x_m \, , \, x_{m+1}+x_{m+2}+\dots+x_{m+n}) = 0 \, ,$$

gde su m,n,p prirodni brojevi . Ova jednačina je , u izvesnom smislu , generalizacija jednačine (2.3) i specijalni slučaj jednačine (3.1) . Za ovu jednačinu mi ćemo odrediti ne samo neprekidno već i opšte rešenje , što nam onemogućava da iskoristimo rezultate prethodnog paragrafa .

T e o r e m a 6. <u>Opšte rešenje jednačine</u> (4.1) <u>je funkcija</u>

$$(4.2) \qquad F(x,y) = \varphi(nx-my) \qquad (n \neq m) \; ;$$

$$(4.3) \qquad F(x,y) = \psi(x)-\psi(y) \qquad (n = m) \, ,$$

<u>gde je</u> φ <u>proizvoljno rešenje Cauchy-eve jednačine</u> (1.7) <u>a</u> ψ <u>proizvoljna funkcija</u> .

<u>Dokaz</u>. Stavljajući $x_i = 0$ $(i = 1,2, \dots ,m+n+p)$ iz (4.1) dobijamo $F(0,0) = 0$. Na osnovu toga , stavljajući $x_1 = x$, $x_i = 0$ $(i = 2,3, \dots ,m+n+p)$ iz (4.1) izlazi $mF(x,0)+nF(0,x) = 0$, tj.

$$(4.4) \qquad F(0,x) = -\frac{m}{n} F(x,0) \, .$$

Ako u jednačini (4.1) stavimo $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_i = 0$ $(i = 3,4, \dots ,m+n+p)$, dobićemo

$$(m-1)F(x+y,0)+F(x,y)+(n-1)F(0,x+y)+F(0,x)+F(y,0) = 0 \, ,$$

tj. prema (4.4)

$$(4.5) \qquad F(x,y) = \left(1-\frac{m}{n}\right)F(x+y,0)+\frac{m}{n}F(x,0)-F(y,0) \, .$$

Ako stavimo $F(x,0) = f(x)$, prethodna relacija će glasiti

$$(4.5 \text{ bis}) \qquad F(x,y) = \left(1-\frac{m}{n}\right)f(x+y)+\frac{m}{n}f(x)-f(y) \, .$$

Na osnovu toga jednačina (4.1) postaje

$$(4.6)\quad (1-\frac{m}{n})\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} f(x_1+x_2+\dots+x_{m+n})$$
$$+\frac{m}{n}\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} f(x_1+x_2+\dots+x_m)$$
$$=\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} f(x_{m+1}+x_{m+2}+\dots+x_{m+n}) .$$

Ako je $m=n$, jednačina (4.6) je identički zadovoljena , pa funkcija $\underline{f}$ može biti proizvoljna . Iz (4.5 bis) tada izlazi (4.3) . Obrnuto nije teško proveriti .

Ako je $m \neq n$, pokazaćemo da iz (4.6) sleduje da funkcija $\underline{f}$ zadovoljava Cauchy-evu jednačinu (1.7) .

Zaista , stavljajući u (4.6)

1° $x_1=x$, $x_{m+1}=y$, $x_i=o$ $(i\neq 1,m+1)$ $(p\geq m>n)$;

2° $x_m=x$, $x_{m+n}=y$, $x_i=o$ $(i\neq m,m+n)$ $(p\geq n>m)$;

3° $x_1=x$, $x_{m+1}=y$, $x_i=o$ $(i\neq 1,m+1)$ $(m>p,n\ ;\ p+n\geq m)$;

4° $x_1=x$, $x_{m+1}=y$, $x_i=o$ $(i\neq 1,m+1)$ $(m>p,m\ ;\ p+n<m)$;

5° $x_m=x$, $x_{m+n}=y$, $x_i=o$ $(i\neq m,m+n)$ $(n>p,m\ ;\ p+m\geq n)$;

6° $x_m=x$, $x_{m+n}=y$, $x_i=o$ $(i\neq m,m+n)$ $(n>p,m\ ;\ p+m<n)$,

dobijaju se respektivno jednačine

$$1^\circ\quad (1-\frac{m}{n})\Big[nf(x+y)+mf(x)+mf(y)\Big]$$
$$+\frac{m}{n}\Big[mf(x)+mf(y)\Big] = nf(x)+nf(y) ;$$

$$2^\circ\quad (1-\frac{m}{n})\Big[mf(x+y)+nf(x)+nf(y)\Big]$$
$$+\frac{m}{n}\Big[mf(x)+mf(y)\Big] = nf(x)+nf(y) ;$$

$$3^\circ\quad (1-\frac{m}{n})\Big[(m+n-p)f(x+y)+pf(x)+pf(y)\Big]$$

$$+\frac{m}{n}\left[mf(x)+mf(y)\right] = nf(x)+nf(y) \;;$$

4° $$(1-\frac{m}{n})\left[(m+n-p)f(x+y)+pf(x)+pf(y)\right]$$

$$+\frac{m}{n}\left[(n+p)f(x)+(n+p)f(y)+(m-n-p)f(x+y)\right] = nf(x)+nf(y) \;;$$

5° (jednačina 3°) ;

6° $$(1-\frac{m}{n})\left[(m+n-p)f(x+y)+pf(x)+pf(y)\right]+\frac{m}{n}\left[mf(x)+mf(y)\right]$$

$$= (m+p)f(x)+(m+p)f(y)+(n-m-p)f(x+y) \;.$$

Sve ove jednačine se svode , posle sredjivanja , na Cauchy-evu jednačinu

(1.7) $$f(x+y) = f(x)+f(y) \;.$$

Koristeći jednačinu (1.7) i stavljajući $f(x) = n\varphi(x)$, formula (4.5 bis) dobija oblik (4.2) . Obrnuto , tj. da svaka funkcija oblika (4.2) , gde je φ rešenje jednačine (1.7), zadovoljava jednačinu (4.1) , neposredno se proverava . Kako slučajevi 1°-6° obuhvataju sve mogućnosti pri kojima je $m \neq n$, teorema je dokazana .

P o s l e d i c a. Opšte neprekidno rešenje jednačine (4.1) je funkcija

(4.7) $$F(x,y) = c(nx-my) \qquad (n \neq m) \;;$$

(4.8) $$F(x,y) = \varphi(x)-\varphi(y) \qquad (n = m) \;,$$

gde je c proizvoljna konstanta a φ proizvoljna neprekidna funkcija .

5. Jednačina

$$F_1(x_1+x_2,x_3)+F_2(x_2+x_3,x_4)+F_3(x_3+x_4,x_1)+F_4(x_4+x_1,x_2) = 0$$

Neka je C operator definisan u prethodnom paragrafu .

Funkcionalna jednačina

$$(5.1)\qquad \sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F_i(x_1+x_2+\dots+x_m, x_{m+1}+x_{m+2}+\dots+x_{m+n}) = o \,,$$

($m,n,p \in N$) , gde su F_i nepoznate funkcije , generališe jednačinu (2.1) u istom smislu kao što i jednačina (4.1) generališe jednačinu (2.3) .

U ovom paragrafu mi ćemo rešiti jednačinu (5.1) u slučaju kada je $m = 2$, $n = p = 1$, pod pretpostavkom da su funkcije F_i neprekidne . Opšti slučaj je vrlo komplikovan .

T e o r e m a 7. Ako su realne funkcije F_i ($i=1,2,3,4$) neprekidne i ako je

$$(5.2)\qquad F_1(x_1+x_2,x_3)+F_2(x_2+x_3,x_4)+F_3(x_3+x_4,x_1)+F_4(x_4+x_1,x_2)= o \,,$$

funkcije F_i ($i=1,2,3,4$) mogu se predstaviti u obliku

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} F_1(x,y) &= ax^2+(a-\lambda)y^2-2\lambda xy+bx+cy+p \,, \\ F_2(x,y) &= \lambda x^2+(a+\lambda)y^2+2axy+\beta x+\gamma y+q \,, \\ F_3(x,y) &= -ax^2-(a-\lambda)y^2+2\lambda xy-(c+\beta)x+(\gamma-\beta-b-c)y+r \,, \\ F_4(x,y) &= -\lambda x^2-(a+\lambda)y^2-2axy+(c+\beta-\gamma)x-(b+\beta)y-p-q-r \,, \end{aligned}$$

gde su $a,b,c,\lambda,\beta,\gamma,p,q,r$ konstante . Obrnuto , pri proizvoljnim vrednostima ovih konstanata , funkcije F_i , definisane sa (5.3) zadovoljavaju jednačinu (5.2) .

Dokaz. Obrnuto tvrdjenje može se proveriti zamenom funkcija F_i iz (5.3) u (5.2) , na čemu se nećemo zadržavati . Treba još dokazati da iz (5.2) sleduje (5.3) .

Stavljajući $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = x_4 = o$, jednačina (5.2) daje

$$(5.4)\qquad F_4(x,y) = -F_1(x+y,o)-F_2(y,o)-F_3(o,x) \,.$$

Na osnovu toga (5.2) će glasiti

$$(5.5)\quad F_1(x_1+x_2,x_3)+F_2(x_2+x_3,x_4)+F_3(x_3+x_4,x_1)$$
$$= F_1(x_4+x_1+x_2,o)+F_2(x_2,o)+F_3(o,x_4+x_1) .$$

Stavljajući ovde $x_3=x$, $x_4=y$, $x_1=x_2=o$, dobijamo

$$(5.6)\quad F_2(x,y) = -F_1(o,x)-F_3(x+y,o)+F_1(y,o)+F_3(o,y)+F_2(o,o) .$$

Eliminacijom funkcije F_2 iz (5.5) i (5.6) , dolazi se do jednakosti

$$(5.7)\quad F_1(x_1+x_2,x_3)+F_3(x_3+x_4,x_1)+F_1(x_4,o)+F_3(o,y)+F_2(o,o)$$
$$= F_1(x_4+x_1+x_2,o)+F_3(x_2+x_3+x_4,o)+F_1(o,x_2+x_3)$$
$$+F_3(o,x_4+x_1)+F_1(o,o)+F_3(o,o) .$$

Odavde za $x_2=x$, $x_3=y$, $x_1=x_4=o$ odnosno $x_4=x$, $x_1=y$, $x_2=x_3=o$, imamo respektivno jednakosti

$$(5.8)\quad F_1(x,y) = F_1(o,x+y)+F_3(x+y,o)+F_1(x,o)-F_1(o,x)$$
$$-F_3(x,o)-F_3(y,o)+F_3(o,o) ,$$

$$(5.9)\quad F_3(x,y) = F_3(o,x+y)+F_1(x+y,o)+F_3(x,o)-F_3(o,x)$$
$$-F_1(x,o)-F_1(y,o)+F_1(o,o) .$$

Uvodeći notacije

$$F_1(x,o) = f_1(x) , F_1(o,x) = f_2(x) ,$$
$$F_3(x,o) = g_1(x) , F_3(o,x) = g_2(x) ,$$
$$p = F_1(o,o) = f_1(o) = f_2(o) ,$$
$$r = F_3(o,o) = g_1(o) = g_2(o) ,$$

jednakosti (5.8) i (5.9) uzimaju sledeću formu :

(5.8 bis) $F_1(x,y) = f_2(x+y)+g_1(x+y)+f_1(x)-f_2(x)-g_1(x)-g_1(y)+r$,

(5.9 bis) $F_3(x,y) = g_2(x+y)+f_1(x+y)+g_1(x)-g_2(x)-f_1(x)-f_1(y)+p$.

Zamenom u (5.7) i sredjivanjem dolazi se do jednačine

$$
\begin{aligned}
(5.10)\qquad & f_1(x_3+x_4+x_1)-f_1(x_4+x_1+x_2)+f_1(x_1+x_2)-f_1(x_3+x_4) \\
& \qquad +f_1(x_4)-f_1(x_1) \\
& +g_1(x_1+x_2+x_3)-g_1(x_2+x_3+x_4)+g_1(x_3+x_4)-g_1(x_1+x_2) \\
& \qquad +g_1(x_2)-g_1(x_3) \\
& +f_2(x_1+x_2+x_3)-f_2(x_1+x_2)-f_2(x_2+x_3)+f_2(x_2) \\
& +g_2(x_3+x_4+x_1)-g_2(x_3+x_4)-g_2(x_4+x_1)+g_2(x_4) = 0 .
\end{aligned}
$$

Za $x_1=x$, $x_3=y$, $x_2=x_4=0$, odavde se dobija

$$
\begin{aligned}
& f_1(x+y)-f_1(x)-f_1(y)+p \\
& +g_1(x+y)-g_1(x)-g_1(y)+r \\
& +f_2(x+y)-f_2(x)-f_2(y)+p \\
& +g_2(x+y)-g_2(x)-g_2(y)+r = 0 .
\end{aligned}
$$

Dakle, funkcija $f_1(x)+g_1(x)+f_2(x)+g_2(x)-2p-2r$ zadovoljava Cauchy-evu jednačinu (1.7) , odakle sleduje

$$(5.11)\qquad f_1(x)+g_1(x)+f_2(x)+g_2(x)-2p-2r = C_1x \quad (C_1 = \text{const}) ,$$

jer su funkcije f_1, f_2, g_1, g_2 po pretpostavci neprekidne .
Eliminacijom funkcije g_2 iz (5.11) i (5.10) , dolazimo do jednačine :

$$(5.12)\qquad f_1(x_1+x_2)+f_1(x_2+x_4)-f_1(x_4+x_1+x_2)-f_1(x_1)$$

$$+g_1(x_1+x_2+x_3)-g_1(x_1+x_2)+g_1(x_4+x_1)+2g_1(x_3+x_4)$$
$$-g_1(x_2+x_3+x_4)-g_1(x_3+x_4+x_1)+g_1(x_2)-g_1(x_3)-g_1(x_4)$$
$$+f_2(x_1+x_2+x_3)-f_2(x_1+x_2)-f_2(x_2+x_3)+f_2(x_2)$$
$$-f_2(x_3+x_4+x_1)+f_2(x_3+x_4)+f_2(x_4+x_1)-f_2(x_4) = o .$$

Zamenom $x_2=x$, $x_4=y$, $x_1=x_3=o$, nalazimo

$$f_1(x)+f_1(y)-f_1(x+y)-p$$
$$+g_1(x)+g_1(y)-g_1(x+y)-r = o ,$$

odakle sleduje

(5.13) $$f_1(x)+g_1(x)-p-r = C_2x \qquad (C_2 = \text{const}) .$$

Eliminacijom funkcije g_1 iz (5.12) i (5.13) , dobija se

(5.14) $$f_1(x_2+x_3+x_4)+f_1(x_3+x_4+x_1)-f_1(x_1+x_2+x_3)-f_1(x_4+x_1+x_2)$$
$$+2f_1(x_1+x_2)-2f_1(x_3+x_4)-f_1(x_1)-f_1(x_2)+f_1(x_3)+f_1(x_4)$$
$$+f_2(x_1+x_2+x_3)-f_2(x_3+x_4+x_1)+f_2(x_3+x_4)+f_2(x_4+x_1)$$
$$-f_2(x_1+x_2)-f_2(x_2+x_3)+f_2(x_2)-f_2(x_4) = o .$$

Stavljajući ovde $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=o$, dolazimo do jednakosti

$$-f_1(x+y+z)+f_1(y+z)+f_1(z+x)+f_1(x+y)-f_1(x)-f_1(y)-f_1(z)+f_1(o)$$
$$+f_2(x+y+z)-f_2(y+z)-f_2(z+x)-f_2(x+y)+f_2(x)+f_2(y)+f_2(z)-f_2(o) = o .$$

Dakle , funkcija f_2-f_1 zadovoljava Fréchet-ovu funkcionalnu jednačinu (videti |6|)

(5.15) $$f(x+y+z)-f(y+z)-f(z+x)-f(x+y)+f(x)+f(y)+f(z)-f(o) = o .$$

Kako je opšte neprekidno rešenje ove jednačine polinom drugog stepena i kako je $f_1(o) = f_2(o) = p$, zaključujemo da je

(5.16) $$f_2(x)-f_1(x) = Ax^2+Bx \qquad (A,B = \text{const}) .$$

Eliminacijom funkcije f_2 iz (5.14) i (5.16) , dobijamo sledeću funkcionalnu jednačinu

$$(5.17)\quad f_1(x_2+x_3+x_4)+f_1(x_3+x_4+x_1)-f_1(x_4+x_1+x_2)+f_1(x_1+x_2)$$
$$-2f_1(x_3+x_4)-f_1(x_3+x_1)-f_1(x_2+x_3)+2f_1(x_3)+f_1(x_4)-p = o .$$

Za $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=o$, $x_4=z$, iz (5.17) sleduje

$$f_1(x+y+z)-f_1(y+z)-f_1(z+x)-f_1(x+y)+f_1(x)+f_1(y)+f_1(z)-f_1(o) = o ,$$

tj. funkcija f_1 zadovoljava Fréchet-ovu jednačinu (5.15) . Prema tome , postoji relacija

$$(5.18)\qquad f_1(x) = Cx^2+Dx+p \qquad (C,D = \text{const}) .$$

Iz (5.16),(5.13) i (5.11) redom izlazi

$$(5.19)\qquad f_2(x) = (A+C)x^2+(B+D)x+p ,$$

$$(5.2o)\qquad g_1(x) = -Cx^2+(C_2-D)x+r ,$$

$$(5.21)\qquad g_2(x) = -(A+C)x^2+(C_1-C_2-B-D)x+r .$$

Stavljajući

$$A= -\alpha , B=c-b , C=a , D=b , C_1=\gamma-2\beta-c , C_2=b-c-\beta ,$$

prethodne četiri formule transformišu se u

$$(5.18\text{ bis})\qquad f_1(x) = ax^2+bx+p ,$$

$$(5.19\text{ bis})\qquad f_2(x) = (a-\alpha)x^2+cx+p ,$$

$$(5.2o\text{ bis})\qquad g_1(x) = -ax^2-(c+\beta)x+r ,$$

$$(5.21\text{ bis})\qquad g_2(x) = -(a-\alpha)x^2+(\gamma-\beta-b-c)x+r .$$

Unoseći ove izraze za funkcije f_1,f_2,g_1,g_2 u (5.8 bis) i (5.9 bis) dobijaju se prva i treća od formula (5.3) . Zamenjujući F_1 i F_3 iz (5.3) u (5.6) i označavajući $F_2(o,o)$ sa q dobija se druga formula (5.3) . Konačno , iz (5.4) izlazi i poslednja formula (5.3) .

Ovim je teorema 7 dokazana .

LITERATURA :

|1| J. A c z é l : Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Basel 1961.

|2| J. A c z é l - M. G h e r m a n e s c u - M. H o s s z ú : On cyclic equations, Publications of the Mathematical Institut of the Hungarian Academy of Sciences, vol.5, series A, fasc.1-2, 1960, p.215-221.

|3| D. Ž. D j o k o v i ć : Sur une équation fonctionnelle, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université de Belgrade, série : Mathématiques et Physique, No.50, 1961, p.15-16.

|4| D. Ž. D j o k o v i ć : Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et Physique, No.63, 1961, p.21-28.

|5| D. Ž. D j o k o v i ć : Rešenje jedne ciklične funkcionalne jednačine, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie, vol.13, 1961, p.185-198.

|6| M. F r é c h e t : Une définition fonctionnelle des polynômes, Nouvelles annales de Mathématiques, quatrième série, t.9, 1909, p.145-162.

|7| M. H o s s z ú : A lineáris függvenyegyenletek egy osztályáról, A Magyar Tudományos Akadémia matematikai és fizikai tudományok osztályának Közleményei, t.11, No.3, p.249-261.

|8| D. S. M i t r i n o v i ć - D. Ž. D j o k o v i ć : Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques, Comptes Rendus, Paris, t.252, 1961, p.1090-1092.

|9| S. P r e š i ć - D. Ž. D j o k o v i ć : Sur une équation fonctionnelle, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie, vol.13, 1961, p.149-152.

|10| Izabrana poglavlja iz matematike II, Beograd 1962, (prvi članak).