JEDNA GENERALIZACIJA ALGORITMA EKSHAUSTIJE I NEKI PRILOZI PRIMENI EKSHAUSTIJE

Doktorska disertacija
Ernesta Stipanića

docenta Gradjevinskog fakulteta
u Beogradu

S A D R Ž A J

UVOD

0.1. E k s h a u s t i j a /iscrpljivanje/, kao infinitezimalna metoda, javila se u matematici starih Grka, prvenstveno u rešavanjima problema kvadrature i kubature.

O s n o v n a i d e j n a s a d r ž i n a e k s h a u s t i j e s a s t o j a l a s e u o d r e d j i v a n j u a l g o r i t m a p o m o ć u k o j e g s e p o s m a t r a n a v e l i č i n a Ω /d u ž i n a, p o v r š i n a, z a p r e m i n a/ m o ž e i s c r - p s t i p r e k o s v o j i h d e l o v a d o v e l i č i n e, m a n j e o d s v a k e u n a p r e d z a d a t e, v e l i č i n e i s t e v r s t e. Moralo se, prirodno, odmah nametnuti pitanje, k a k v i m s e n i z o m s v o j i h d e l o v a v e l i č i n a Ω, n a n a v e d e n i n a č i n, m o ž e s i g u r n o i s c r p- s t i. Prva teorema u desetoj knjizi E u k l i d o v i h E l e m e- n a t a utvrdjuje za takvu operaciju izvesne dovoljne uslove. Ta teorema glasi:

"Neka su date dve nejednake veličine; ako se od veće oduzme više od njene polovine, a zatim od dobivenog ostatka više od njegove polovine i ako se ova operacija sukcesivno ponovi dobiće se za ostatak veličina koja će biti manja od date manje veličine".[1, 19]

Na kraju E u k l i d primećuje da se teorema slično dokazuje i za slučaj kad se od veće veličine oduzme njena polovina, zatim od ostatka njegova polovina itd.

Svoju teoremu E u k l i d izvodi kao posledicu jednog osnovnog stava, sada poznatog pod imenom E u d o k s-A r h i m e d o v o g p o s t u l a t a /aksioma/, koji, prema A r h i m e d u, glasi:

"Neka su date dve nejednake duži, ili dve nejednake površine, ili dve nejednake zapremine; ako se višak jedne od ovih veličina nad drugom sabere samim sobom izvestan broj puta, onda će taj zbir premašiti jednu, ili drugu od veličina, koje se medju sobom uporedjuju".[2, 6]

Citirani postulat je implicite dat u četvrtoj E u d o k s-ovoj definiciji razmere:

"Kaže se da su dve veličine u razmeri jedna prema drugoj ako neku multiplum ma koje od njih može biti veći od druge".[3, 8]

Navedena E u k l i d o v a teorema bila je od primarnog značaja za razvitak ekshaustije kao praktičnog infinitezimalnog algoritma matematike antičke epohe. Njegova primena kulminirala je i zablistala, po ostvarenim rezultatima, u delima A r h i m e d a.

Mi ćemo istaći dokaz E u k l i d o v e teoreme u jednom obliku koji je od interesa za predmet istraživanja kojim se bavimo dalje u ovoj raspravi.

Neka su date dve veličine a i b i neka je $a < b$. Ako se od veličine b oduzme veličina α_1, dobiće se

$$b_1 = \alpha_1 = \lambda(1)\, b$$

Ovim je učinjen prvi korak u iscrpljivanju veličine b. Ako se sad ponovo, prema E u k l i d u, od $b - b_1$ oduzme veličina α_2, dobiće se

$$b_2 = b_1 + \alpha_2 = \lambda(2)(b - b_1)$$

Ovim je učinjen drugi korak u iscrpljivanju veličine b. Ponovi li se ista operacija k-puta, dobiće se

$$b_K = b_{K-1} + \alpha_K = \lambda(K)(b - b_{K-1})$$

odnosno

$$(0.1;1) \qquad \frac{b_K - b_{K-1}}{b - b_{K-1}} = \lambda(K) \qquad (b_0 = 0)$$

i time je učinjen k-ti korak u iscrpljivanju veličine b. Prema E u k l i d o v o j pretpostavci očigledno je:

$$(0.1;2) \qquad 1/2 \leq \lambda(i) < 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots K)$$

Iz relacije $(0.1;1)$ lako sledi relacija

$$\frac{b - b_K}{b - b_{K-1}} = 1 - \lambda(K)$$

odnosno

$$(0.1;3) \qquad r_K = b \cdot \prod_{i=1}^{k} (1 - \lambda(i))$$

Dakle, posle k-tog koraka u iscrpljivanju veličine b dobija se veličina r_k. Usled hipotetičke relacije $(0.1;2)$ biće

$$(0.1;4) \qquad \prod_{i=1}^{K} (1 - \lambda(i)) \leq 1/2^K$$

Ako se sad, shodno E u d o k s-A r h i m e d o v o m postulatu, pretpostavi da se sabiranjem veličine a, dovoljan broj puta same sobom, može dobiti veličina koja će biti veća od veličine b, tj. ako se pretpostavi da uvek postoji prirodan broj n takav da je

$$\frac{b}{n} < a$$

i ako se Euklidovo iscrpljivanje veličine b izvrši toliko puta da je $2^k \geq n$, onda je

$$\frac{b}{2^k} \leq \frac{b}{n} < a$$

ili, s obzirom na $(0.1;3)$ i $(0.1;4)$

$$r_k < a$$

a ovo upravo tvrdi Euklidova teorema.

Što se $\lambda(i)$ manje razlikuje od 1 biće potreban manji broj koraka u iscrpljivanju veličine b da bi se postigao željeni ostatak r_k, a što se $\lambda(i)$ manje razlikuje od $1/2$ biće potreban veći broj koraka u iscrpljivanju veličine b da bi se postigao ostatak r_k. Prema tome, preko količnika $\lambda(i)$ može se oceniti "brzina iscrpljivanja" veličine b. Svojom pretpostavkom $(0.1;2)$ Euklid je u suštini dao interval u kome je dovoljno da se nalazi $\lambda(i)$, pa da se iscrpljivanjem veličine b dodje sigurno do veličine manje od svake unapred date veličine a. Ovde je očigledna i potpuna analogija sa pojmom konvergentnog beskrajnog reda, posebno sa pojmom brzine njegove konvergencije. Tako se jasno otkriva duboka i prirodna srodnost izmedju jednog infinitezimalnog algoritma matematike antičke epohe i jednog infinitezimalnog algoritma matematike moderne epohe. Stoga je upravo značajno podvući da je u najnovije vreme ekshaustija dovedena u vezu i s principom totalne indukcije u okviru generalisanog problema iscrpljivanja na bazi savremene teorije skupova.[4, 110-118]

Prethodne činjenice, posebno smo istakli, jer su nam one dale neposrednog povoda da pristupimo, usev u celini, istraživanjima koja su predmet ove rasprave.

0.2. Našu raspravu podelićemo dalje u tri odeljka. U prvom odeljku učinićemo kratak osvrt na istorisku genezu ekshaustije kao infinitezimalnog algoritma, zasnovanog na pomenutoj Euklidovoj teoremi, tačnije na Eudoks-Arhimedovom postulatu. U tom osvrtu posebno ćemo se zadržati na poznatim aporijama Dihotomija i Ahil eleatskog filozofa Zenona, jer se one u naučnoj literaturi često, posredno, ili neposredno, dovode u vezu sa genezom ekshaustije.[5, 225-270; 6, 64-70; 7, 10-28; 8, 153-159; 9a, 77-94; 9b, 83-86; 9c, 8-9; 9d, 9; 9e, 13-28; 10, 106-116; 11, 176-195].
Mi ćemo te aporije matematički tretirati u opštijem obliku od onog koji

se do sad javljao u naučnoj i filozofskoj literaturi s ciljem da se što tačnije sagleda njihova moguća uloga u genezi ekshaustije, kao infinitezimalnog algoritma matematike antičke epohe. Odeljak ćemo završiti kratkom analizom A r h i m e d o v e ekshaustije, s posebnim pogledom na onu stranu njenog idejnog sadržaja, kojom se anticipiraju moderni infinitezimalni algoritmi: beskrajni niz, odnosno, beskrajni red.

Činjenica upravo pomenuta u vezi s A r h i m e d o v o m ekshaustijom redovno se ističe u odgovarajućoj naučnoj literaturi. Pri tome se prave vrlo uopštene opservacije koje ne izlaze van okvira elementarnih pojmova o beskrajnom redu. Ne uočava se značaj idejne sadržine količnika $(0,1;1)$, adekvatnog infinitezimalnom algoritmu u A r h i m e d o v o j ekshaustiju, kad ova treba da se dovede u vezu s beskrajnim konvergentnim redom, odnosno, beskrajnim konvergentnim nizom. U cilju da se ta veza u aspektu navedenog količnika sagleda mi ćemo u drugom odeljku naše rasprave, uvodjenjem generalisanog količnika $\lambda(i)$ – specijalno nazvanog F u n k c i j a e k s h a u s t i j e –, uopštiti E u k l i d-A r h i m e d o v u ekshaustiju, kao infinitezimalni algoritam, i dokazaćemo nekoliko teorema o ekshaustiji koristeći pojam f u n k c i j e e k s h a u s t i j e.

U trećem odeljku naše rasprave daćemo izvesne primene na beskrajne redove nekih rezultata, dobivenih u drugom odeljku. Zatim ćemo dati nekoliko novih stavova o numeričkim redovima sa članovima stalnog i naizmeničnog znaka, s naročitim pogledom na karakter i ulogu funkcije ekshaustije u tim stavovima.

Pomenuli bismo, na kraju, da su neki rezultati, koje ćemo i izložiti u ovoj raspravi, sadržani u nekim radovima koje smo već objavili.[12; 13; 14] Ti su rezultati ovde detaljnije razradjeni i upotpunjeni.

Svaki smo odeljak podelili na paragrafe. Upotrebili smo pozicionu numeraciju i neke skraćenice: T -teorema, D -definicija, L -lema, PT -posledica teoreme i $Prim.$ -primedba. Brojevi u uglastoj zagradi odnose se na spisak literature koja se nalazi na kraju rasprave; crno napisani pretstavljaju redne brojeve u spisku, a ostali brojevi, napisani plavo, pretstavljaju strane u delu koje je navedeno pod brojem napisanim crno.

1. O EUDOKS-EUKLIDOVOJ I ARHIMEDOVOJ EKSHAUSTIJI

1.1. Arhimed je jednom saopštio [15, 179-181] da su neki geometri pre njega, u rešavanju geometrijskih problema, koristili stav koji je u uvodu ove rasprave istaknut kao Eudoks-Arhimedov postulat.

Prema Hankel-u i Lorii /G.Loria/ navedena Arhimedova konstatacija mogla bi se odnositi na Hipokrata sa Hiosa, koji je, kako se pretpostavlja, sredinom V stoleća pokušao da dokaže teoremu da se površine krugova odnose kao kvadrati prečnika. To je dalo povoda Enriques-u da smatra da je Hipokrat prvi nagovestio ekshaustiju kao metodu [9e, 21-22]

Prema Rufini-u, napred navedena Arhimedova konstatacija, mogla bi se odnositi na Eudoksa, ako je u pitanju zapremina piramide i kupe [1,22]

E.Frank, poznati istoričar antičke nauke i filozofije, zaključuje da bi se Anaksagora mogao smatrati tvorcem ekshaustije, kao infinitezimalne metode, zbog svog vrlo poznatog i sasvim jasno formulisanog infinitezimalnog principa [10, 111]

"U odnosu na malo, ne postoji najmanje, ali uvek postoji manje, jer je nemoguće da biće bude uništeno delenjem. Isto tako, u odnosu na veliko, postoji uvek veće i ono je jednako malom u mnoštvu, i po tome je svaka stvar u isto vreme velika i mala". [5, 312]

Uzev uopšte, nije dat pouzdan odgovor na pitanje o tome za čije se ime sigurno može vezati prvo stvaranje ekshaustije kao infinitezimalne metode. No, izgleda nam da to i nije od bitnog gnoseološkog značaja za problem geneze ekshaustije. Sigurno je dosad utvrdjeno da se ona, kao odredjena matematička metoda, prvi put javlja u Euklidovim Elementima, s jedne strane u formi konkretnih primena [16, 371, 386, 394, 400], a s druge strane, u formi dva stava, koji su joj teoriska podloga, a naime: jednog, implicite datog u IV Eudoksovoj definiciji razmere i drugog, izvedenog iz prvog, u vidu praktične, već istaknute, Euklidove teoreme. Stoga bi bilo osnovano Eudoksa i Euklida smatrati tvorcima ekshaustije kao matematičke metode.

1.2. U naučnoj literaturi, kao što smo u uvodu istakli, koja tretira pitanje razvitka grčke matematike i posebno problem geneze ekshaustije, vrlo se značajna uloga u tom razvoju, odnosno genezi ekshaustije, dodeljuje Zenonovim aporijama Dihotomija i Ahil.

Kratki izvodi navedenih aproija nalaze se u Aristotelovoj fizici. Nije poznat njihov originalan tekst, jer je izgubljen spis u kome ga je Zenon izložio. Poznati komentator Aristotelove fizike, Simplicije, opširno se zadržao u svojim komentarima na pomenutim aporijama. Na osnovu tih komentara B.Petronijević je dao hipotetičku rekonstrukciju originalnih formulacija aporija Dihotomija i Ahil, koje bi, prema toj rekonstrukciji, na srpsko-hrvatskom jeziku, trebalo da glase:

"Ako postoji kretanje, pokretno mora najpre preći polovinu puta, a pre polovine celog puta polovinu njegove polovine, i opet polovinu ove polovine. A ako je broj polovina beskrajan, nemoguće je da beskrajno bude predjeno u konačnom vremenu. Kretanje dakle ne postoji". [17, 76-77]

"Ako postoji kretanje ni najsporiji ne može nikada biti dostignut ni od najbržeg. Jer onaj koji goni mora nužnim načinom, pre nego što dostigne /onog koji bega/, najpre doći na mesto odakle je pošao onaj koji bega. A ako se pretpostavi, da se razdaljina izmedju njih može smanjivati u beskonačnost, ne samo da Ahil nikada ne može stići Hektora, nego /ne može stitći/ ni kornjaču". [17, 84]

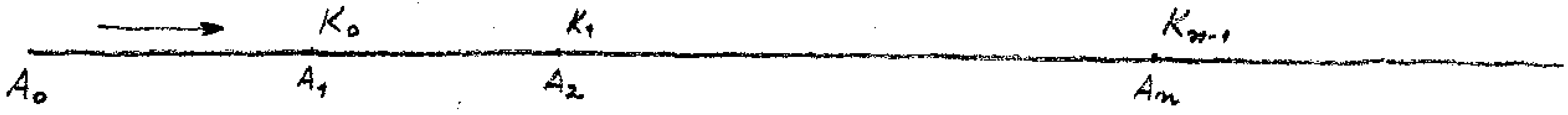
Navedene formulacije su po formi i sadržaju ekvivalentne onim formulacijama pomenutih aporija koje susrećemo u naučnoj i filozofskoj literaturi. Stoga ćemo se u daljem izlaganju Petronijevićevih formulacija držati.

U aporijama Dihotomija i Ahil postulirana je mogućnost da se data duž deli u beskrajnost i da se delenjem kao ostatak dobije duž koja će biti manja od svake unapred zadate duži.

Jasno je da se pomenuti ostatak, u slučaju Dihotomije, dobija, kad se od date duži oduzme njena polovina, zatim od preostale polovine njena polovina i tako dalje, ponavljajući sukcesivno isti postupak sve dotle, dok se ne dobije ostatak koji će biti manji od unapred zadate duži.

Shvati li se u aporiji Ahil početna razdaljina izmedju Ahila i kornjače kao data duž, onda postupak kojim se dolazi do ostatka, manjeg od unapred zadate dužu, nije precizno formulisan, kao u aporiji Dihotomija, jer se samo pretpostavlja da se razdaljina izmedju Ahila i kornjače "može smanjivati u beskonačnost".

Neka je $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n \ldots$ jedan niz uzastopnih položaja Ahila i $K_0, K_1, K_2 \ldots K_n \ldots$ korespondnetni niz uzastopnih položaja kornjače.



U naučnoj i filozofskoj literaturi [6; 9a; 9b; 9c; 11; 17; 18; 19; 20; 21; 22] matematičko tretiranje postupka o kome je reč u aporiji A h i l zasniva se na pretpostavci:

$$(1.2;1) \qquad \overline{K_{i-1}K_i} \equiv q\,\overline{A_{i-1}A_i} \qquad (A_i \equiv K_{i-1};\ 0<q<1,\ i=1,2,3,\ldots n\ldots)$$

Tretira li se kretanje Ahila i kornjače shodno pretpostavci $(1.2;1)$ i tretira li se početna razdaljina $\overline{A_0K_0}$ izmedju Ahila i kornjače kao data duž, onda se postupak, koji dovodi do duži, manje od unapred zadate duži, sastoji očigledno u sledećem:

Od duži $\overline{A_0K_0}$ treba oduzeti duž $\overline{A_0K_0}(1-q)$, zatim od preostale duži duž $\overline{A_0K_0}q(1-q)$ i tako dalje sve dotle dok preostala duž ne bude manja od unapred zadate duži, tj. dok razdaljina izmedju Ahila i kornjače ne bude manja, od unapred zadate razdaljine. Prema tome opisani postupak dovodi do ostatka

$$(1.2;2) \qquad \overline{A_nK_n} = \overline{A_0K_0}\,q^n$$

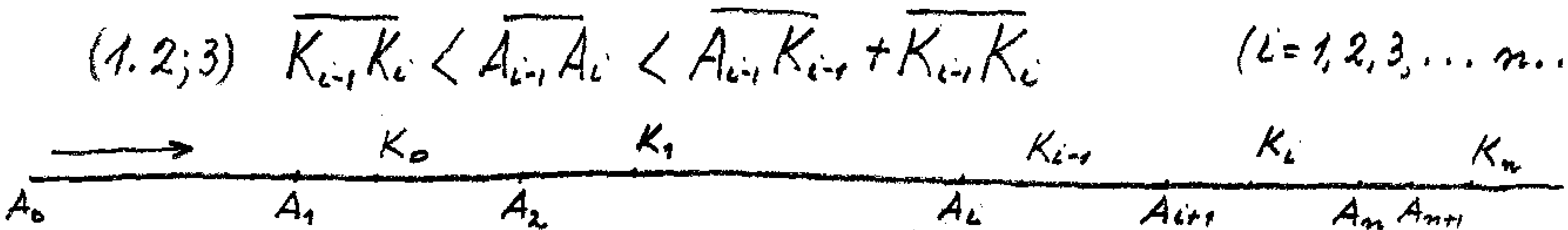
koji će sigurno biti manji od unapred zadate duži, samo ako je n dovoljno veliko, tj. ako se opisana operacija nad duži $\overline{A_0K_0}$ dovoljno veliki broj puta ponovi.

Generalno formulisana pretpostavka u aporiji A h i l, a naime, da se razdaljina izmedju Ahila i kornjače „može smanjivati u beskonačnost" dozvoljava da se postupak, o kome je reč, može opštije matematički tretirati, no što se dosad u naučnoj i filozofskoj literaturi tretirao.

Mi ćemo sad pokazati kako se taj postupak, shodno formulaciji aporije A h i l, može matematički generalizirati.

Podjimo zato od pretpostavke

$$(1.2;3) \qquad \overline{K_{i-1}K_i} < \overline{A_{i-1}A_i} < \overline{A_{i-1}K_{i-1}} + \overline{K_{i-1}K_i} \qquad (i=1,2,3,\ldots n\ldots)$$



koja je očigledno opštija od pretpostavke $(1.2;1)$ i teoriski je osnovana na formulaciji aporije A h i l, kad se odnos brzine Ahila prema brzini kornjače uopšteno uzme kao odnos brzine onoga koji se brže kreće prema brzini onoga koji se sporije kreće /Ahil-Hektor/. Stavimo li sad

$$\frac{\overline{A_{i-1}A_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = a(i) \qquad \frac{\overline{K_{i-1}K_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = k(i) \qquad (i=1,2,3,\dots n\dots)$$

tada uslov ~~(1.2;3)~~ postaje

$$0 < a(i) - k(i) < 1 \qquad (i=1,2,3,\dots n\dots)$$

ili

$$(1.2;4) \qquad 0 < q(i) < 1 \qquad (i=1,2,3,\dots n\dots)$$

gde je $a(i) - k(i) = q(i)$

Ako se tačka A_i nalazi levo od tačke K_{i-1}, onda je

$$0 < a(i) < 1$$

a ako se nalazi izmedju tačaka K_{i-1} i K_i, onda je $a(i) > 1$. Oba slučaja stoje u saglasnosti s formulacijom aporije A h i l. Ne uzimamo u obzir slučaj u kome se tačka A_i može nalaziti i na desno od tačke K_i, jer nije u saglasnosti s formulacijom aporije A h i l, mada ga, sa čisto matematičkog stanovišta, ima smisla tretirati.

Kako je

$$\frac{\overline{A_{i-1}A_i} - \overline{K_{i-1}K_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = q(i) \qquad (i=1,2,3,\dots n\dots)$$

i

$$1 - \frac{\overline{A_{i-1}K_i} - \overline{K_{i-1}K_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = 1 - q(i) \qquad (i=1,2,3,\dots n\dots)$$

odnosno

$$\frac{\overline{A_iK_i}}{\overline{A_{i-1}K_{i-1}}} = 1 - q(i) \qquad (i=1,2,3,\dots n\dots)$$

to dobijamo

$$\overline{A_nK_n} = \overline{A_0K_0} \prod_{i=1}^{n} (1 - q(i))$$

Tretira li se kretanje Ahila i kornjače shodno pretpostavci (1.2;3) i tretira li se početna razdaljina $\overline{A_0K_0}$ izmedju Ahila i kornjače, kao data duž, onda se postupak koji dovodi do duži manje od unapred zadate duži sastoji u sledećem:

Od duži $\overline{A_0K_0}$ treba oduzeti duž $\overline{A_0K_0}\,q(1)$, zatim od preostale duži duž $\overline{A_0K_0}(1-q(1))\,q(2)$, pa od preostale duži duž $\overline{A_0K_0}(1-q(1))(1-q(2))\,q(3)$ i tako dalje ponavljajući sukcesivno sparzatju istu operaciju.

Uporedi li se aporija A h i l s E u k l i d e v o m teoremom, onda se jasno vidi da E u k l i d o v a pretpostavka eksplicitno ističe uslov

$$(1.2;5) \qquad 1/2 \le q(i) < 1 \qquad (i=1,2,3,\dots n\dots)$$

dok generalno formulisana pretpostavka u aporiji A h i l /da se razdaljina izmedju Ahila i kornjače "može smanjivati u beskonačnost"/ implicira širi uslov

$$0 < g(i) < 1$$

Prirodno je pretpostaviti da se diskusijom, potstaknutom Z e n o n o v o m aporijom A h i l, u Grčkoj, preeuklidovskoj matematici i filozofiji, moglo u nekoj formi istaći pitanje pod kojim će se uslovima razdaljina izmedju Ahila i kornjače /odnosno Ahila i Hektora/, smanjivati u beskonačnost". Na jedno takvo moguće pitanje sadržan je delimično odgovor u E u k l i d o v o j teoremi, jer ona daje dovoljne uslove pod kojima se navedena razdaljina sigurno, "može smanjivati u beskonačnost".

Ako je $a(i)=1/2$ i $k(i)\equiv 0$, tj. $g(i)=1/2$ $(i=1,2,3,\ldots n,\ldots)$, onda imamo slučaj Dihotomije, a ako je $a(i)\equiv 1$ i $k(i)=q$, tj. $g(i)=1-q$ onda je to slučaj matematičkog tretiranja aporije A h i l, dobro poznatog u literaturi.

Izloženo tumačenje aporija D i h o t o m i j a i A h i l u svetlosti E u k l i d o v e teoreme pokazuje da je matematički osnovano gledati u njima stavove koji u izvesnom smislu anticipiraju, odnosno, nagoveštavaju Euklidovu teoremu i infinitezimalni algoritam u ekshaustiji, kao matematičkoj metodi uopšte. Ovu su misao izrazili mnogi autori koji su proučavali razvitak matematike antičke epohe, a naročito E n r i q u e s [9a; 9b, 83-86], Z e u t h e n [6, 64-70] i M a n d o l f o [11, 176-195] No, svi oni aporiju A h i l tretiraju u okviru užeg uslova (1,2; 5), smatrajući čak da je $g(i)$ konstanta. Očigledno je da se na taj način neopravdano sužava podloga sa koje je osnovano dovoditi u vezu aporiju A h i l sa E u k l i d o v o m teoremom i s ekshaustijom kao infinitezimalnim algoritmom.

Kad se odredjuje Z e n o n o v o mesto u razvitku matematike antičke epohe i kad se posebno ocenjuje uloga koju su mogle odigrati aporije D i h o t o m i j a i A h i l u tom razvitku potrebno je imati u vidu sledeće činjenice:

a/ Tokom V stoleća pre nove ere u grčkoj matematici dominira problem inkomensurabilnih veličina i problem aktuelne infinitezimale /P i t a g o r e j s k a monada i D e m o k r i t o v matematički atom/ [5, 253-270; 9e, 8-27; 10, 106-180]. Ti se problemi susreću s idejom beskrajne deljivosti i s idejom veličine koja je manja od svake unapred zadate veličine.

b/ Aporije D i h o t o m i j a i A h i l javljaju se tokom V stoleća i to najverovatnije u njegovoj prvoj polovini. One svojom sadržinom idejno impliciraju beskrajnu deljivost duži i potencijalnu infinitezimalu, odnosno, duž koja je manja od svake unapred zadate duži.

c/ U IV stoleću pre nove ere, shodno vremenu i stanju matematičke nauke, E u d o k s teorijom proporcija rešava problem inkomensurabilnih veličina [9c; 23]. Četvrta definicija u sklopu te teorije:"Kaže se da su dve veličine u razmeri jedna prema drugoj ako neki multiplum ma koje od njih može biti veći od druge"; u osnovi je isto što i Eudoks-Arhimedov postulat kojim se postulira beskrajna deljivost i potencijalna infinitezimala. Posledica tog postulata, kao što smo već naglasili, je Euklidova teorema. Pojava ove teoreme, kako je već u izvesnim smislu istakao Luria [10, 112] istoriska je značajna. Ona, s jedne strane, označava kraj etape u razvitku matematike antičke epohe, kad je u shvatanju prirode geometriskih veličina /duži, površine, zapremine/ dominirala ideja aktuelne infinitezimale /Pitagorejska monada i Demokritov matematički atom/, i s druge strane, označava početak etape za koju će biti karakteristična ekshaustija, kao infinitezimalna metoda, kojom se kroz praktičnu realizaciju ideje potencijelne infinitezimale /geometriska veličina koja je manja od svake unapred date geometriske veličine iste vrste/ rešio niz konkretnih problema geometrije /Euklid - Arhimed/.

Ako je reč od kakvog su značaja mogle biti aporije Dihotomija i Ahil za razvitak matematike antičke epohe, onda smatramo da nije od primarnog značaja postavljati i rešavati pitanje kakve je stvarne ciljeve hteo postići Zenon navedenim aporijama, kao što se to ponekad u naučnoj literaturi posebno ističe /napr.Luria [10, 14] /. Pogotovo ne može biti od primarnog značaja postavljanje pitanja u formi alternative, da li su Zenonovi ciljevi bili matematičkog, ili filozofskog /metafizičkog/ karaktera, jer je dobro poznato da je baš za epohu grčke antike karakteristično vrlo tesno prožimanje, upravo stapanje nauke i filozofije, odnosno naučnih i filozofskih problema, a naročito problema matematike i filozofije [24a; 24b]. No, opšte je poznata činjenica da se u filozofskoj literaturi navedenim aporijama pripisuju ciljevi isključivo filozofskog karaktera. Stoga, ako se želi oceniti njihova moguća uloga u razvitku matematike antičke epohe, onda je bitno utvrditi njihovu stvarnu matematičku sadržinu i na osnovu toga proceniti koliko su one kao takve objektivne

gle, nezavisno od ciljeva koje im je po-
avio njihov autor, stimulisati razvi-
k matematičke antičke epohe. Matematič-
sadržina koju smo, u svetlosti Euklido-
teoreme u navedenim aporijama prethod-
utvrdili, kao i mesto koje te aporije
uzimaju u kompleksu činjenica pod a/, b/
c/, dovoljno jasno govore da su one mora-
e stimulativno delovati na razvitak ma-
ematike antičke epohe, posebno na genezu
kshaustije.

1.3. Euklidovom teoremom i primenama koje je posredstvom
teoreme Euklid ostvario u svojim Elementima [16, 371, 386
94, 400] ekshaustija se kao metoda afirmirala u matematici grčke anti-
s. U teoriskom i praktičnom pogledu ona je doživela svoj puni rascvat u
elima Arhimeda na problemima kvadrature i kubature.

U čemu se sastoji Arhimedova ekshaustija kao infinitezi-
malna metoda i kako se ona primenjuje i nizu problema kvadrature i kubature
dgovorimo kratko na postavljeno pitanje.

Neka je Ω zadana veličina - površina, odnosno, zapremina. Postavlja
je problem: odrediti merni broj $m(\Omega)$ zadane veličine Ω. Po Arhi-
edu postojanje mernog broja $m(\Omega)$ je nesumnjivo. On je implicite a
priori pretpostavlja na osnovu očiglednosti koju pruža geometriska intui-
cija. Za njega se ne postavlja pitanje kako treba shvatiti merni broj $m(\Omega)$,
odnosno, šta treba podrazumevati pod mernim brojem $m(\Omega)$, tačnije kako ga
treba definisati. To je, naprimer, polazno pitanje kojim se bavi u rešava-
nju postavljenog problema moderni matematičar, odnoseći se kritički prema
očiglednosti koju pruža geometriska intuicija.

Arhimed neposredno prilazi odredjivanju praktičnog geometri-
skog algoritma iscrpljivanja veličine Ω. Tu je za njega težište postav-
ljenog problema. Genijalno spretnim primenama geometriskog aparata Ar-
himed odabire izvanredno praktične puteve koji ga sigurno vode rešenju
postavljenog problema - utvrdjivanju mernog broja $m(\Omega)$. On najpre, bespre-
kornom tačnosti, odredjuje geometriski postupak pomoću kova formira monoto-
no rastući niz veličina c_n koje su sve manje od veličine Ω /i sve su
iste vrste kao veličina Ω/ i monotono opadajući niz veličina d_n, koje
su sve veće od veličine Ω /i sve su iste vrste kao veličina Ω/.

Tako naprimer, kad je u pitanju kvadratura prvog zavoja spirale
[25, 68-72], ili kvadratura kruga [2, 196-198], Arhimed deli pun ugao
na

$$2^n \ (n=2,3,4,\dots)$$

mogle, nezavisno od ciljeva koje im je postavio njihov autor, stimulisati razvitak matematičke antičke epohe. Matematička sadržina koju smo, u svetlosti Euklidove teoreme u navedenim aporijama prethodno utvrdili, kao i mesto koje te aporije zauzimaju u kompleksu činjenica pod a/, b/ i c/, dovoljno jasno govore da su one morale stimulativno delovati na razvitak matematike antičke epohe, posebno na genezu ekshaustije.

1.3. Euklidovom teoremom i primenama koje je posredstvom te teoreme Euklid ostvario u svojim Elementima [16, 371, 386 394, 400] ekshaustija se kao metoda afirmirala u matematici grčke antike. U teoriskom i praktičnom pogledu ona je doživela svoj puni rascvat u delima Arhimeda na problemima kvadrature i kubature.

U čemu se sastoji Arhimedova ekshaustija kao infinitezimalna metoda i kako se ona primenjuje i nizu problema kvadrature i kubature Odgovorimo kratko na postavljeno pitanje.

Neka je Ω zadana veličina - površina, odnosno, zapremina. Postavlja se problem: odrediti merni broj $m(\Omega)$ zadane veličine Ω. Po Arhimedu postojanje mernog broja $m(\Omega)$ je nesumnjivo. On je implicite a priori pretpostavlja na osnovu očiglednosti koju pruža geometriska intuicija. Za njega se ne postavlja pitanje kako treba shvatiti merni broj $m(\Omega)$, odnosno, šta treba podrazumevati pod mernim brojem $m(\Omega)$, tačnije kako ga treba definisati. To je, naprimer, polazno pitanje kojim se bavi u rešavanju postavljenog problema moderni matematičar, odnoseći se kritički prema očiglednosti koju pruža geometriska intuicija.

Arhimed neposredno prilazi odredjivanju praktičnog geometriskog algoritma iscrpljivanja veličine Ω. Tu je za njega težište postavljenog problema. Genijalno spretnim primenama geometriskog aparata Arhimed odabire izvanredno praktične puteve koji ga sigurno vode rešenju postavljenog problema - utvrdjivanju mernog broja $m(\Omega)$. On najpre, besprekornom tačnosti, odredjuje geometriski postupak pomoću kova formira monotono rastući niz veličina c_n koje su sve manje od veličine Ω /i sve su iste vrste kao veličina Ω/ i monotono opadajući niz veličina d_n, koje su sve veće od veličine Ω /i sve su iste vrste kao veličina Ω/.

Tako naprimer, kad je u pitanju kvadratura prvog zavoja spirale [25, 68-72], ili kvadratura kruga [2, 196-198], Arhimed deli pun ugao na

$$2^n \; (n = 2, 3, 4, \dots)$$

jednakih delova. Zatim konstruiše u spiralnom savoju

$$2^n-1 \quad (n=2,3,4,\dots)$$

upisanih kružnih sektora i

$$2^n \quad (n=2,3,4,\dots)$$

oko njega opisanih kružnih sektora; u krugu konstruiše

$$2^n \quad (n=2,3,4\dots)$$

upisanih pravilnih poligona i

$$2^n \quad (n=2,3,4,\dots)$$

oko njega opisanih pravilnih poligona. Ovde su veličine c_n sume

$$s_{2^n-1} \quad (n=2,3,4,\dots)$$

upisanih sektora, odnosno površine

$$p_{2^n} \quad (n=2,3,4,\dots)$$

upisanih poligona, a veličine d_n su sume

$$S_{2^n} \quad (n=2,3,4,\dots)$$

opisanih sektora, odnosno površine

$$P_{2^n} \quad (n=2,3,4,\dots)$$

opisanih poligona.

Na sličan način postupa i za slučaj kvadrature i kubature lopte i njenih delova [2, 78-80, 92-94]

Ako je u pitanju kubatura paraboloida /respektive hiperboloida i elipsoida/, onda A r h i m e d deli osnu duž parabole /respektive hiperbole i elipse/ na n jednakih delova i konstruiše zatim upisano u paraboloidu /respektive hiperboloidu i elipsoidu/ i oko njega opisano stepenasto telo koje je sastavljeno od

$$n-1 \quad (n=2,3,4,\dots)$$

odnosno od

$$n \quad (n=2,3,4,\dots)$$

kružnih cilindara [2, 277-281, 287, 309, 326]. Ovde su veličine c_n zapremine

$$v_{n-1} \quad (n=2,3,4\dots)$$

sukcesivno upisanih stepenastih tela, a veličina d_n su zapremine

$$V_n \quad (n=2,3,4,\dots)$$

sukcesivno opisanih stepenastih tela.

Pošto je definisao postupak po kome se konstruiše veličine c_n i d_n, a time i sam proces iscrpljivanja veličine Ω, A r h i m e d dokazuje da se definisanim postupkom veličina Ω može iscrpsti do veličine koja je manja od svake unapred zadate veličine, tj.da se može postići da razlika

$$d_n - c_n$$

bude manja od svake unapred zadate veličine [25, 68-72; 2, 196-198, 280, 287-289, 309, 326-327], odnosno u slučaju lopte i njenih delova, da količnik

$$d_n/c_n$$

bude manji od količnika proizvoljno uzete veće i manje veličine [2, 10-12, 15-17, 105, 109].

Dokaze u problemu kvadrature zavoja spirale i kruga, kao i u problemu komplanacije i kubature lopte, A r h i m e d, izmedju ostalog, zasniva i na E u k l i d o v o j teoremi.

Nadalje A r h i m e d tvrdi, u svakom pojedinom slučaju, da korespondentna veličina Δ zadovoljava uslov

$$c_n < \Delta < d_n \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

i dokazuje pomoću reductio ad absurdum da nije moguća niti jedna od relacija

$$\Delta > \Omega \,, \quad \Delta < \Omega$$

tj. da mora biti

$$\Delta = \Omega$$

odnosno

$$m(\Delta) = m(\Omega)$$

U slučaju kvadrature parabolinog segmenta [25, 218-250] A r h i m e d formira samo monotono rastući niz veličina c_n /iste vrste kao parabolin segment Ω/ koje zadovoljavaju uslov:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k < \Omega \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

pa zatim na osnovu E u k l i d o v e teoreme dokazuje [25, 218-220] da se može postići da razlika

$$\Omega - \sum_{k=1}^{n} c_k$$

bude manja od svake unapred zadate veličine. Nadalje se tvrdi da korespondentna veličina Δ zadovoljava uslov

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} c_k + g_n \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

gde je $g_n < c_n$ i pomoću reductio ad absurdum se, potpuno analogno prethodno navedenim slučajevima, dokazuje da mora biti

$$m(\Delta) = m(\Omega)$$

To bi bio odgovor na pitanje koje smo napred postavili.

A r h i m e d unosi u ekshaustiju, s obzirom na svoje prethodnike, značajnu novinu, time što posmatra istovremeno monotono rastući niz veličina

$$(1,3;1) \qquad 0 < c_{n-1} < c_n < \Omega \qquad (n = 2, 3, 4 \ldots)$$

i monotono opadajući niz veličina

$$(1,3;2) \qquad \Omega < d_n < d_{n-1} < d_1 \qquad (n = 2, 3, 4 \ldots)$$

Ta je činjenica istaknuta u literaturi o A r h i m e d u, naročito kad je u pitanju njegov doprinos teoriji ekshaustije, kao infinitezimalne metode, s obzirom na doprinos njegovih prethodnika [26, 117]

Za slučaj monotono rastućeg niza veličina $(1.3;1)$ dobija se u A r h i m e d o v o j ekshaustiji količnik

$$A(i) = \frac{c_i - c_{i-1}}{\Omega - c_{i-1}} \qquad (i = 1,2,3,\ldots;\ c_0 = 0) \tag{1.3;3}$$

koji je analogan količniku $(0.1;1)$ u E u d o k s-E u k l i d o v o j ekshaustiji.

Ako se radi o monotono opadajućem nizu veličina $(1.3;2)$ onda se, u smislu E u d o k s-E u k l i d o v e ekshaustije, može protumačiti, da se veličina $d_1 - \Omega$ iscrpljuje nizom veličina

$$d_1 - d_n \qquad (n = 2,3,4\ldots)$$

pa će odgovarajući količnik biti

$$A'(i) = \frac{(d_1 - d_i) - (d_1 - d_{i-1})}{(d_1 - \Omega) - (d_1 - d_{i-1})} \qquad (i = 1,2,3\ldots;\ d_0 = 0)$$

odnosno

$$A'(i) = \frac{d_i - d_{i-1}}{\Omega - d_{i-1}} \qquad (i = 1,2,3,\ldots;\ d_0 = 0) \tag{1.3;4}$$

N a p o z n a t i n a č i n l a k o j e p o k a z a t i d a s u k o l i č n i c i $(1.3;3)$ i $(1.3;4)$ n e s a m o m a n j i o d $1/2$ k o d p o j e d i n i h p r i m e r a A r h i m e d o v e e k s h a u s t i j e k o j e s m o n a p r e d i s t a k l i, n e g o d a č a k m o g u n e o g r a n i č e n o o p a d a t i k a n u l i. T a k o, n a p r i m e r, z a s l u č a j A r h i m e d o v e k u b a t u r e o b r t n o g p a r a b o l o i d a b i ć e:

$$A(i) = \frac{1}{i} \qquad (i = 2,3,4\ldots)$$

i

$$A'(i) = \frac{1}{i+1} \qquad (i = 2,3,4,\ldots)$$

O v i m s e j a s n o p o k a z u j e k a k o s u o k v i r i infinitezimalnog algoritma u A r h i m e d o v o j e k s h a u s t i j i d a l e k o š i r i o d o n i h k o j e d a j e E u k l i d o v a t e o r e m a, n a k o j o j j e u s t v a r i b i o z a s n o v a n infinitezimalni algoritam u p r e-Ar h i m e d o v s k o j e k s h a u s t i j i. M i s m o o v u č i n j e n i c u o v d e p o s e b n o p o d v u k l i u n a v e d e n o m a s p e k t u, j e r n i s m o n a i š l i u l i t e r a t u r i d a s e A r h i m e d o v a e k s h a u s t i j a p o s m a t r a u t o m a s p e k t u k a o g e n e r a l i z a c i j a E u d o k s-E u k l i d o v e e k s h a u s t i j e /ma da je dobro poznato da se ona u izvesnom smislu u literaturi tretira, kao nagoveštaj, odnosno anticipacija odredjenog integrala, i time joj se poglavito daje karakter generalnije matematičke metode u uporedjenju sa prearhimedovskom ekshaustijom/, a š t o j e p o t p u n o p r i r o d n o p o s m a t r a t i k a k o s a s t a n o v i š t a n j e n e i d e j n e s a d r ž i n e k a o i n f i n i t e z i m a l n e m e t o d e, t a k o i s t o i s a s t a n o v i š t a f o r m a l n o g a l g o r i t m a k o j i o n a i m p l i c i r a.

Želimo li da naročito podvučemo koji su bitni momenti u A r h i m e d o v o j ekshaustiji, onda mislimo da su sledeći:

a/ Implicitna pretpostavka da *a priori* postoji $m(\Omega)$

c/ Fiksiranje praktičnog algoritma iscrpljivanja veličine Ω u okvirima koji, u pojedinim slučajevima, daleko prelaze okvire, odredjene E u k l i d o v o m teoremom, da bi veličina Ω bila iscrpljena do veličine koja je manja od svake unapred date veličine iste vrste.

d/ Dokaz da je

$$m(\Delta) = m(\Omega)$$

Činjenica c/ je od primarnog značaja kad se u A r h i m e d o v o j ekshaustiji žele odrediti oni elementi koji anticipiraju, odnosno nagoveštavaju, moderni infinitezimalni algoritam, beskrajni red, odnosno beskrajni niz. Ona pokazuje da je prirodno pretpostaviti da se pred A r h i m e d o m postavljalo pitanje: kakav mora biti niz veličina pomoću kojih se veličina Ω može iscrpati do veličine koja će biti manja od svake unapred date veličine? Odgovor na to pitanje, kao što smo već istakli, A r h i m e d je nalazio u okvirima koje pruža E u k l i d o v a teorema /naprimer: kvadratura parabolinog segmenta i kvadratura kruga/, kao i u daleko širim okvirima /naprimer: kubatura paraboloida i hiperboloida/, odredjujući u svakom konkretnom slučaju, pomoću geometriskog, kao formalnog aparata, algoritam formiranja željenog niza veličina. Tako je A r h i m e d zaista anticipirao, možda tačnije, nagovestio, beskrajni red, odnosno, beskrajni niz.

2. F U N K C I J A E K S H A U S T I J E I N E K E T E O R E M E O E K S H A U S T I J I

2.1. Uopštićemo sad pojam ekshaustije kao pojam infinitesimalnog algoritma sledećom definicijom:

DEFINICIJA 2.1.1. D a t j e b r o j /r e s p e k t i v e v e l i- č i n e/ a . N e k a s e o d a o d u z m e b r o j /r e s p e k t i- v e v e l i č i n a/ α_1 , o d d o b i j e n o g o s t a t k a b r o j α_2 ; o d p o n o v n o d o b i j e n o g o s t a t k a b r o j α_3 i n e k a s e t a o p e r a c i j a i n i n f. s u k c e s i v n o p o n a v l j a. O p i s a n u o p e r a c i j u z v a ć e m o e k s- h a u s t i j e /i s c r p l j i v a n j e/ b r o j a /r e s p e k t i- v e v e l i č i n e/ a .

Dakle, ako je

$$a_1 = a_0+\alpha_1 = a_0+(a_1-a_0) = E(1)(a-a_0)+a_0 \qquad (a_0=0)$$

$$a_2 = a_1+\alpha_2 = a_1+(a_2-a_1) = E(2)(a-a_1)+a_1$$

$$\vdots$$

$$a_i = a_{i-1}+\alpha_i = a_{i-1}+(a_i-a_{i-1}) = E(i)(a-a_{i-1})+a_{i-1}$$

$$\vdots$$

in inf.

onda se relacijom

$$E(i)=\frac{a_i-a_{i-1}}{a-a_{i-1}} \qquad (i=1,2,3,\dots;\ a_0=0) \tag{2.1;1}$$

definiše algoritam ekshaustije broja /respektive veličine/ a , gde je funkcija $E(i)$ u n a p r e d d a t a.

F u n k c i j u

$$E(i),\ i\in(N)$$

g d e j e (N) s k u p p r i r o d n i h b r o j e v a, z v a ć e m o f u n k c i j a e k s h a u s t i j e.

DEFINICIJA 2.1.2. A k o

$$a_i \to a,\ i\to\infty$$

k a z a ć e m o d a j e e k s h a u s t i j a k o n v e r g e n t n a, u p r o t i v n o m s l u č a j u e k s h a u s t i j a j e d i v e r- g e n t n a.

U Eudoks-Euklidovoj i Arhimedovoj ekshaustiji za svaki konkretan problem funkcija $E(i)$ je ustvari tako geometriski definisana da ekshaustija sigurno konvergira. Tu je funkcija $E(i)$ kao pojam implicite determinirana nizom geometriskih stavova.

Zada li se unapred broj /respektive veličina/ a i funkcija $E(i), i \in (N)$ mogu se postaviti pitanja: kakve uslove mora zadovoljavati funkcija $E(i), i \in (N)$ da bi ekshaustija bila konvergentna? Kakve je uslove dovoljno da funkcija $E(i), i \in (N)$ zadovoljava pa da ekshaustija konvergira? Izvesni odgovori na ova pitanja biće sadržani u teoremama koje slede. Ovde ćemo odmah podvući da te teoreme dokazujemo na taj način što u generalisanom obliku koristimo poznatu Cauchy-evu ideju ispitivanja beskrajnih proizvoda pomoću logaritamskog reda [27, 459-461; 22, 231]. Neke od tih teorema /napr.: T. 2.1.1; T. 2.1.2/ su posledice poznatih stavova u teoriji beskrajnih proizvoda. Mi smo ih ipak posebno istakli, jer se svakom od njih nešto odredjeno iskazuje o funkciji eksjaustije, pa su kao takve ovde od interesa.

TEOREMA 2.1.1. Da bi ekshaustija, definisana relacijom (2.1;1), bila konvergentna potrebno je i dovoljno da

$$\sum_{i=1}^{n} \ln|1-E(i)| \to -\infty, \quad n \to \infty$$

D o k a z. Kako iz relacije (2.1;1) sledi

$$1 - \frac{a_i - a_{i-1}}{a - a_{i-1}} = 1 - E(i) \qquad (i = 1, 2, 3, \dots n \dots)$$

ili

$$\frac{a - a_i}{a - a_{i-1}} = 1 - E(i)$$

odnosno

$$(2.1;2) \qquad |a - a_n| = |a| \prod_{i=1}^{n} |1 - E(i)|$$

to na osnovu dobro poznatog stava u teoriji beskrajnih proizvoda [22, 230] sledi teorema.

P.T.2.1.1. Ako je ekshaustija definisana relacijom (2,1;1), konvergentna, onda funkcija ekshaustije $E(i)$ ne može biti stalno veća od 2, niti stalno manja od 0.

TEOREMA 2.1.2. D a b i e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m (2.1;1), b i l a k o n v e r g e n t n a p o t r e b n o j e da

$$\sum_{i=1}^{n} |E(i)| \to \infty, \; n \to \infty$$

D o k a z. Pretpostavimo li suprotno da red

$$\sum_{i=1}^{\infty} |E(i)|$$

konvergira, onda na osnovu poznatih stavova u teoriji beskrajnih proizvoda [22, 229] sledi

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - E(i)\right) \to g \neq 0, \; n \to \infty$$

i dalje na osnovu relacije (2.1;2)

$$|a - a_n| \to g' \neq 0, \; n \to \infty$$

tj. ekshaustija definisana relacijom (2.1;1) ne bi konvergirala. Dakle, mora

$$\sum_{i=1}^{n} |E(i)| \to \infty, \; n \to \infty$$

TEOREMA 2.1.3. A k o

$$(2.1;3) \qquad \sum_{i=1}^{n} |E(i)|^{p} \to e_p, \; n \to \infty$$

g d e j e $p \geq 2$ p r i r o d a n b r o j, o n d a j e p o t r e b n o i d o v o l j n o d a

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{E^{k}_{(i)}}{k} \right) \to \infty, \; n \to \infty$$

d a b i e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m (2.1;1), k o n v e r g i r a l a.

D o k a z. Iz pretpostavke (2.1;3) sledi

$$E(i) \to 0, \; i \to \infty$$

pa se može uvek odrediti prirodan broj i_0 tako da za svako $i \geq i_0$ bude

$$0<|E(\iota)|<1$$

Dakle, možemo staviti

$$\log\left(1-E(\iota)\right)=-E(\iota)-\frac{E^2_{(\iota)}}{2}-\frac{E^3_{(\iota)}}{3}-\dots-\frac{E^p_{(\iota)}}{p}-\dots \qquad (\iota\geq\iota_0)$$

odakle sledi

$$(2.1;5)\quad \omega_p(\iota)=\frac{\log\left(1-E(\iota)\right)+\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{E^k_{(\iota)}}{k}\right)}{E^p(\iota)}=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{E^{\nu-1}_{(\iota)}}{p+\nu-1} \qquad (\iota\geq\iota_0)$$

tj. na osnovu $(2.1;5)$

$$(2.1;6)\qquad \omega_p(\iota)\rightarrow -1/p\,,\ \iota\rightarrow\infty \qquad (p\geq 2)$$

Dalje je

$$\log\left(1-E(\iota)\right)=-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{E^k_{(\iota)}}{k}+\omega_p(\iota)\,E^p_{(\iota)} \qquad (\iota\geq\iota_0)$$

ili

$$(2.1;7)\quad \sum_{\iota=\iota_0}^{n}\log\left(1-E(\iota)\right)=-\sum_{\iota=\iota_0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{E^k_{(\iota)}}{k}\right)+\sum_{\iota=\iota_0}^{n}\omega_p(\iota)\,E^p_{(\iota)}$$

Kako na osnovu pretpostavke $(2.1;3)$ i relacije $(2.1;6)$ red

$$\sum_{\iota=\iota_0}^{\infty}\omega_p(\iota)\,E^p_{(\iota)} \qquad (p\geq 2)$$

sigurno konvergira, to iz relacije $(2.1;7)$ a na osnovu $T.2.1.1$ sledi $T.2.1.3$

TEOREMA 2.1.4. A k o

$$(2.1;8)\qquad E(\iota)\in(-1,1) \qquad (\iota\geq\iota_0)$$

i a k o e k s h a u s t i j a k o n v e r g i r a, a n i z

$$\sum_{\iota=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{E^k_{(\iota)}}{k}\right),\ n\rightarrow\infty$$

j e o g r a n i č e n, o n d a m o r a

$$\sum_{i=1}^{n} |E(i)|^{p} \to \infty, \; n \to \infty$$

g d e j e $p \geq 2$ p r i r o d a n b r o j

D o k a z. Zbog $(2.1;8)$ važi relacija $(2.1;7)$ i na osnovu $(2.1;5)$ važi relacija

$$-\infty < \omega_p(i) < -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{p+\nu-1} \qquad (p \geq 2)$$

Dalje je dokaz teoreme na osnovu relacije $(2.1;8)$ jasan.

P.T.2.1.4. A k o j e e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2.1;1)$, k o n v e r g e n t n a i a k o r e d

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(i)$$

k o n v e r g i r a, o n d a r e d

$$\sum_{i=1}^{\infty} E^{2}(i)$$

m o r a d i v e r g i r a t i.

P r i m e d b a. S obzirom na $D.\,2.1.2$ i relaciju $(2.1;2)$ P.T.2.1.4 može se smatrati kao posledica poznate C a u c h y-P r i n g s h e i m-ove teoreme:

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ konvergira tada proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)$ konvergira, ili divergira ka nuli, prema tome, da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ konvergira, ili divergira. [27, 460; 28a 150-154; 28b, 652]

TEOREMA 2.1.5. A k o

$$(2.1;9) \qquad E(i) \in (-1,1) \qquad (i \geq i_0)$$

i a k o j e n i z

$$(2.1;10) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{2m-1} \frac{E^{k}(i)}{k} \right), \; n \to \infty$$

o g r a n i č e n, a

$$(2.1;11) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(E(i)\right)^{2m} \to \infty, \; n \to \infty \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

onda je ekshaustija definisana relacijom $(2.1;1)$ konvergentna.

D o k a z. Za $p=2m$ relacija $(2.1;7)$ postaje

$$(2.1;12)\quad \sum_{i=i_0}^{n} \log(1-E(i)) = -\sum_{i=i_0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{E^k(i)}{k}\right)+\sum_{i=i_0}^{n}\omega_{2m}(i)E^{2m}(i)$$

i relacija $(2.1;5)$

$$\omega_{2m}(i) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{E^{\nu-1}(i)}{2m+\nu-1}$$

Iz relacije $(2.1;13)$ a na osnovu $(2.1;9)$ sledi

$$-\infty < \omega_{2m}(i) < -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2m+\nu-1}$$

pa zbog $(2.1;11)$

$$\sum_{i=i_0}^{n}\omega_{2m}(i)E^{2m}(i) \to -\infty,\ n\to\infty$$

a kako je niz $(2.1;10)$ po pretpostavci, ograničen, to iz $(2.1;12)$ sledi

$$\sum_{i=i_0}^{n}\log(1-E(i)) \to -\infty,\ n\to\infty$$

pa na osnovu $T.2.1.1$ zaključujemo da je ekshaustija, definisana relacijom $(2.1;1)$, konvergentna.

PT 2.1.5. A k o r e d

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(i)$$

k o n v e r g i r a, a r e d

$$\sum_{i=1}^{\infty} E^2(i)$$

d i v e r g i r a, o n d a e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2.1;1)$ k o n v e r g i r a.

P r i m e d b a. S obziron na $D.2.1.2$ i relaciju $(2.1;2)$ PT $2.1.5$ može se smatrati kao posledica ~~xxx~~ maločas navedene C a u c h y-P r i n g s h e i m-ove teoreme.

TEOREMA 2.1.6. A k o

$$E(i) \in (0,1) \qquad (i \geq i_0) \tag{2.1;14}$$

o n d a j e p o t r e b n o i d o v o l j n o d a

$$\sum_{i=1}^{n} E(i) \to \infty, \quad n \to \infty \tag{2.1;15}$$

d a b i e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2.1;1)$, k o n v e r g i r a l a.

D o k a z. Da je uslov $(2.1;15)$ potreban sledi neposredno iz $T.\,2.1.2$ jer je prema $(2.1;14)$

$$|E(i)| = E(i)$$

Dokažimo da je i dovoljan. Na osnovu $(2.1;7)$ sledi

$$\sum_{i=i_0}^{n} \log(1-E(i)) = \sum_{i=i_0}^{n} \omega_1(i)\,E(i) \tag{2.1;16}$$

gde je

$$\omega_1(i) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{E^{\nu-1}_{(i)}}{\nu} \qquad (i \geq i_0)$$

ili zbog $(2.1;14)$

$$-\infty < \omega_1(i) < -1 \qquad (i \geq i_0) \tag{2.1;17}$$

Prema pretpostavci $(2.1;15)$ i na osnovu $(2.1;16)$ i $(2.1;17)$ i $T.2.1.1$ neposredno sledi $T.2.1.6$

TEOREMA 2.1.7. A k o

$$E(i) \in (1,2) \qquad (i \geq i_0) \tag{2.1;18}$$

o n d a j e p o t r e b n o i d o v o l j n o d a

$$\sum_{i=1}^{n} (2-E(i)) \to \infty, \quad n \to \infty$$

d a b i e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2.1;1)$, k o n v e r g i r a l a.

D o k a z. Stavimo li

$$E'(i) = 2 - E(i) \qquad (i \geqslant i_0)$$

tada, s obzirom na $(2,1;18)$

$$E'(i) \in (0,1) \qquad (i \geqslant i_0)$$

Kako je dalje

$$\log|1-E(i)| = \log[1-E'(i)] = \omega_1'(i)E'(i) \qquad (i \geqslant i_0)$$

ili

$$\sum_{i=i_0}^{n} \log[1-E'(i)] = \sum_{i=i_0}^{n} \omega_1'(i)E'(i)$$

gde je

$$\omega_1'(i) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{E'^{\nu-1}(i)}{\nu} \qquad (i \geqslant i_0)$$

to je očigledno da T.2.1.7 sledi na osnovu T.2.1.6

2.2. Na osnovu pojma funkcije ekshaustije definisaćemo u ovome što sledi dva posebna oblika ekshaustije: m o n o t o n u i a l t e r n a t i v n u e k s h a u s t i j u. Zatim ćemo u vezi sa njima dati nekoliko teorema.

Posebno isticanje monotone i alternativne ekshaustije pokazalo se svrsishodnim, kao što će se to videti iz daljeg izlaganja.

DEFINICIJA 2.2.1. A k o j e f u n k c i j a e k s h a u s t i j e $E(i)$ t a k v a d a j e

$$a_{i-1} < a_i < a \qquad (i \geqslant i_0)$$

o d n o s n o

$$a_{i-1} > a_i > a$$

o n d a ć e m o k a z a t i d a j e e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2,1;1)$ m o n o t o n o u z l a z n a, o d n o s n o, m o n o t o n o s i l a z n a.

TEOREMA 2.2.1. D a b i e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2,1;1)$, b i l a m o n o t o n a /u z l a z n a, o d n o s n o, s i l a z n a/ p o t r e b n o j e i d o v o l j n o d a

$$(2,2;1) \qquad E(i) \in (0,1) \qquad (i \geqslant i_0)$$

D o k a z. Dokažimo najpre da je uslov $(2.2;1)$ potreban. Pretpostavimo li da je taj uslov ispunjen za $i=\nu>i_0$, biće

$$(2.2;2) \qquad 0<E(\nu)<1$$

tj. /s obzirom na 2.1;1/

$$0<\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{a - a_{\nu-1}}<1$$

a to može biti samo ako je

$$a_{\nu-1}<a_\nu<a$$

ili

$$a_{\nu-1}>a_\nu>a$$

No, kako prema D.2.2.1 u prvom slučaju mora biti

$$a_\nu<a_{\nu+1}<a$$

a u drugom

$$a_\nu>a_{\nu+1}>a$$

to očigledno hipotetička relacija $(2.2;2)$, pod pretpostavkom da je ekshaustija monotona, mora imati za posledicu relaciju

$$(2.2;3) \qquad 0<E(\nu+1)<1$$

Pošto je relacija $(2.2;1)$ po D.2.2.1 sigurno zadovoljena za $\nu=i_0$, to na osnovu relacije $(2,2;3)$ i principa potpune indukcije sledi da će biti zadovoljena za svaki prirodan broj $\nu\geqslant i_0$

Neka sad važi nejednakost

$$0<E(i)<1 \qquad (i\geqslant i_0)$$

tj.

$$(2.2;4) \qquad 0<\frac{a_i - a_{i-1}}{a - a_{i-1}}<1 \qquad (i\geqslant i_0)$$

i uzmimo da je za $i=\nu>i_0$

$$a_{\nu-1}<a$$

tada je na osnovu $(2,2;4)$

$$0<a_\nu - a_{\nu-1}<a-a_{\nu-1}$$

odnosno

$$(2.2;5) \qquad a_{\nu-1} < a_\nu < a$$

Iz (2.2;5) sledi

$$a - a_\nu > 0$$

pa se na osnovu (2.2;4) dobija

$$a_{\nu+1} - a_\nu > 0$$

te najzad

$$(2.2;6) \qquad a_\nu < a_{\nu+1} < a$$

Isto tako, pretpostavimo li za $i = \nu > i_0$

$$a_{\nu-1} > a$$

dobijamo da je

$$(2.2;5') \qquad a < a_\nu < a_{\nu-1}$$

i zatim nužno dalje sledi na osnovu (2.2;4) da je

$$(2.2;6') \qquad a < a_{\nu+1} < a_\nu$$

Kako očigledno mora važiti jedna od nejednakosti

$$a_{i_0-1} < a, \qquad a < a_{i_0-1}$$

to iz (2.2;4) mora slediti relacija

$$a_{i_0-1} < a_{i_0} < a$$

odnosno

$$a < a_{i_0} < a_{i_0-1}$$

pa zato na osnovu relacije (2.2;6) /respektive (2.2;6')/ i principa potpune indukcije sledi da će relacija (2.2;5) /respketive (2.2;5')/ biti zadovoljena za svaki prirodan broj $\nu \geqslant i_0$

TEOREMA 2.2.2. Da bi monotona ekshaustija, definisana relacijom (2.1;1), bila konvergentna potrebno je i dovoljno da

$$\sum_{i=1}^{n} E(i) \to \infty, \; n \to \infty$$

Dokaz ove teoreme neposredno sledi na osnovu T.2.1.6 i T.2.2.1

P r i m e d b a. Sadržaj T.2.2.2 je naročito značajan u odnosu na E u d o k s-E u k l i d o v u i A r h i m e d o v u ekshaustiju.

Prva teorema u desetoj knjizi E u k l i d o v i h E l e m e n a t a, koju smo u uvodu istakli, specijalan je slučaj T.2.2.2, jer se zasniva na pretpostavci da funkcija ekshaustije nije manja od $1/2$. A r h i m e d o v algoritam monotone ekshaustije, kao što smo pokazali, u pojedinim slučajevima /napr.: kubatura paraboloida i hiperboloida/, takav da funkcija ekshaustije postaje manja od svakog unapred datog broja. T a k o j e v e ć A r h i m e d o v o m e k s h a u s t i j o m i m p l i c i t e u k a z a n o n a m o g u ć n o s t š i r o k o g u o p š t a v a n j a E u k l i d o v o g a l g o r i t m a m o n o t o n e e k s h a u s t i j e. T e o r e m o m 2.2.2 p o s t i g n u t a j e m a k s i m a l n a g r a n i c a u o p š t a v a n j a t o g a l g o r i t m a, p a s m a t r a m o d a j e u p r a v o s t o g a o d z n a č a j a p o s e b n o p o d v u ć i t u t e o r e m u.

T.2.2.2 sadrži potpun odgovor na pitanje postavljeno u početku uvoda naše rasprave a naime: koji je potreban i dovoljan uslov da bi se nizom svojih delova veličina Ω iscrpla do veličine, manje od svake unapred date veličine? I n t e r e s a n t n o j e p r i m e t i t i d a j e p a ž n j i k o m e n t a t o r a E u k l i d o v i h E l e m e n a t a, n a r o č i t o k a d j e u p i t a n j u n j e g o v a p r v a t e o r e m a u d e s e t o j k n j i z i [1, 20-24; 29, 361-363; 16, 15-16; 30, 107; 31, 144-146; 32, 258-278] i s b e g l o, k o l i k o p r i r o d n o, t o l i k o i s t o m a t e m a t i č k i i l o g i č k i o s n o v a n o, p o s t a v l j a n j e n a v e d e n o g p i t a n j a i k o m e n t a r p o m e n u t e E u k l i d o v e t e o r e m e, a d e k v a t a n p o s t a v l j e n o m p i t a n j u.

Teoremom 2.2.2 dat je potpun odgovor na pitanje koje je istaknuto i prvom odeljku ove rasprave, povodom Z e n o n o v e aporije A h i l, a naime: pod kojim će se uslovima rastojanja izmedju Ahila i kornjače /odnosno Ahila i Hektora/ "smanjivati u beskonačnost". Stavi li se $E(i) = q(i)$, onda sledi da je potreban i dovoljan uslov da

$$\sum_{i=1}^{n} q(i) \to \infty, \quad n \to \infty$$

Jedan od najtipičnijih klasičnih primera primene E u k l i d o v o g algoritma monotone ekshaustije nalazimo u A r h i m e d o v o j kvadraturi paraboličnog segmenta [12, 216-222]. Ako je Δ površina inicijalnog trougla, upisanog na poznati način u parabolinom segmentu, onda se, s obzirom na A r h i m e d o v postupak dobija lako

$$a_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{\Delta}{4^{k-1}} \qquad (i=1,2,3,\dots)$$

a sem toga je $a = 4/3\Delta$. Prema definicionoj relaciji $(2.1;1)$ lako sledi $E(i)=3/4$ $(i=1,2,3,\dots)$, tj. funkcija ekshaustije se svodi na konstantu koja pripada intervalu $[1/2, 1)$ fiksiranom E u k l i d o v o m teoremom.

DEFINICIJA 2.2.2. A k o j e f u n k c i j a e k s h a u s t i j e $E(i)$ t a k v a d a j e

$$a_i < a_{i+2} < a < a_{i+1} < a_{i-1} \qquad (i=2i_0, 2i_0+2, 2i_0+4,\dots)$$

{respektive

$$a_{i-1} < a_{i+1} < a < a_{i+2} < a_i \qquad (i=2i_0, 2i_0+2, 2i_0+4,\dots)\}$$

o n d a ć e m o k a z a t i d a j e e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2.1;1)$, a l t e r n a t i v n a.

TEOREMA 2.2.3. D a b i e k s h a i s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m $(2.1;1)$, b i l a a l t e r n a t i v n a p o t r e b n o j e á d o v o l j n o d a b u d e

$$(2.2;7) \qquad E(i) > 1 \qquad (i \geq 2i_0)$$

i

$$(2.2;8) \qquad 0 < E(i) + E(i+1) - E(i)E(i+1) < 1 \qquad (i \geq 2i_0)$$

D o k a z. Dokažimo najpre da su uslovi $(2.2;7)$ i $(2.2;8)$ potrebni. Pretpostavimo li da je uslov $(2.2;7)$ ispunjen za $i = \nu > 2i_0 - 1$ biće

$$(2.2;9) \qquad E(\nu) > 1$$

tj.

$$\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{a - a_{\nu-1}} > 1$$

a to znači biti samo ako je

$$a_{\nu-1} < a < a_\nu$$

ili

$$a_\nu < a < a_{\nu-1}$$

Kako je prema $D.2.2.2$ u prvom slučaju

$$a_{\nu-1} < a_{\nu+1} < a < a_\nu$$

a u drugom

$$a_\nu < a < a_{\nu+1} < a_{\nu-1}$$

to očigledno hipotetička relacija $(2.2;9)$, pod uslovom da je ekshaustija alternativna, mora imati za posledicu relaciju

$$(2.2;10) \qquad E(\nu+1) > 1$$

Pošto je relacija $(2.2;9)$ po $D.2.2.2$ sigurno zadovoljena za $\nu = 2i_0$, to na osnovu $(2.2;10)$ i principa potpune indukcije sledi da je ona zadovoljena za svaki prirodan broj $\nu \geqslant 2i_0$

Primetimo najpre da je

$$E(i)+E(i+1)-E(i).E(i+1) = \frac{(a_i-a_{i-1})(a-a_i)+(a_{i+1}-a_i)(a-a_{i-1})-(a_{i+1}-a_i)(a_i-a_{i-1})}{(a-a_{i-1})(a-a_i)}$$

$$= \frac{a a_{i+1} - a a_{i-1} - a_i a_{i+1} + a_i a_{i-1}}{(a-a_{i-1})(a-a_i)} = \frac{a_{i+1}-a_{i-1}}{a-a_{i-1}}$$

tj.

$$(2.2;11) \quad E(i)+E(i+1)-E(i)E(i+1) = \frac{a_{i+1}-a_{i-1}}{a-a_{i-1}} \qquad (i \geqslant 2i_0)$$

Pretpostavimo li sad da je uslov $(2.2;8)$ ispunjen za $i = \nu > 2i_0$ biće

$$(2.2;12) \qquad 0 < E(\nu)+E(\nu+1)-E(\nu)E(\nu+1) < 1$$

ili, s obzirom na $(2.2;11)$

$$(2.2;13) \qquad 0 < \frac{a_{\nu+1}-a_{\nu-1}}{a-a_{\nu-1}} < 1$$

a to može biti samo ako je

$$a_{\nu-1} < a_\nu < a$$

odnosno

$$a < a_{\nu+1} < a_{\nu-1}$$

No kako po D.2.2.2 u prvom slučaju mora biti

$$a < a_{\nu+2} < a_\nu$$

a u drugom

$$a_\nu < a_{\nu+2} < a$$

to je očigledno

$$0 < \frac{a_{\nu+2} - a_\nu}{a - a_\nu} < 1$$

odnosno, s obzirom na $(2.2;11)$

$$(2.2;14) \qquad 0 < E(\nu+1) + E(\nu+2) - E(\nu+1)\cdot E(\nu+2) < 1$$

tj. hipotetička relacija $(2.2;12)$ pod uslovom da je ekshaustija alternativna, mora imati za posledicu relaciju $(2.2;14)$. Pošto je relacija $(2.2;13)$ odnosno $(2.2;12)$ zadovoljena po D.2.2.2 sigurno za $\nu = 2i_0$, to će ona na osnovu $(2.2;14)$ i principa potpune indukcije biti zadovoljena za svaki prirodan broj $\nu \geq 2i_0$

Dokažimo sad da su uslovi $(2,2;7)$ i $(2,2;8)$ dovoljni. Pretpostavimo da važe uslovi, tj.

$$(2.2;15) \qquad \frac{a_i - a_{i-1}}{a - a_{i-1}} > 1 \qquad (i \geq 2i_0)$$

i

$$(2.2;16) \qquad 0 < \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{a - a_{i-1}} < 1 \qquad (i \geq 2i_0)\,.$$

i uzmemo da je za $i = \nu > 2i_0$

$$a < a_{\nu-1}$$

tada na osnovu $(2.2;15)$ lako dobijamo

$$(2.2;17) \qquad a_\nu < a < a_{\nu-1}$$

i na osnovu $(2.2;16)$

$$(2.2;17') \qquad a < a_{\nu+1} < a_{\nu-1}$$

Iz $(2.2;17)$ sledi

$$a - a_\nu > 0$$

pa se na osnovu $(2.2;16)$ lako dobija

$$a_\nu < a_{\nu+2} \quad i \quad a_{\nu+2} < a$$

tj.

$$(2.2;18) \qquad a_\nu < a_{\nu+2} < a$$

Iz $(2,2;17)$ i $(2,2;18)$ sledi, dakle,

$$(2.2;19) \qquad a_\nu < a_{\nu+2} < a < a_{\nu+1} < a_{\nu-1}$$

Kako je na osnovu $(2.2;19)$

$$a - a_{\nu+1} < 0 \quad i \quad a - a_{\nu+2} > 0$$

to iz $(2.2;16)$ lako sledi

$$(2.2;20) \qquad a_{\nu+2} < a_{\nu+4} < a < a_{\nu+3} < a_{\nu+1}$$

Isto tako podjemo li od pretpostavke da važi

$$a_{\nu-1} < a$$

na sličan način dolazimo do relacije

$$(2.2;19') \qquad a_{\nu-1} < a_{\nu+1} < a < a_{\nu+2} < a_\nu$$

i

$$(2.2;20') \qquad a_{\nu+1} < a_{\nu+3} < a < a_{\nu+4} < a_{\nu+2}$$

Kako očigledno mora važiti jedna od relacija

$$a_{2i_0-1} > a \quad , \quad a_{2i_0-1} < a$$

to iz uslova $(2.2;15)$ i $(2.2;16)$ mora slediti relacija

$$a_{2i_0} < a_{2i_0+2} < a < a_{2i_0+1} < a_{2i_0-1}$$

na osnovu $(2.2;19)$ odnosno, relacija

$$a_{2i_0-1} < a_{2i_0+1} < a < a_{2i_0+2} < a_{2i_0}$$

na osnovu $(2.2;19')$. Stoga, s obzirom na $(2.2;20)$ /respektive $(2.2;20')$/, a po principu potpune indukcije, sledi da će relacija $(2.2;19)$ /respektive relacija $(2.2;19')$/ biti zadovoljena za svaki parni broj $\nu \geq 2i_0$.

TEOREMA 2.2.4. Da bi ekshaustija, definisana relacijom (2.1;1), bila alternativna dovoljno je da

$$(2.2;21) \qquad E(i) \in (1,2] \qquad (i \geq 2i_0)$$

Dokaz. Pretpostavimo li da važi uslov (2.2;21), odnosno

$$(2.2;22) \qquad 1 < \frac{a_i - a_{i-1}}{a - a_{i-1}} \leq 2 \qquad (i \geq 2i_0)$$

i usmemo li da je za $i = \nu > 2i_0$

$$a < a_{\nu-1}$$

tada na osnovu (2.2;22) lako dobijamo

$$(2.2;23) \qquad a_\nu < a < a_{\nu-1}$$

Iz (2.2;23) i (2,2;22) lako sledi

$$(2.2;23') \qquad a_\nu < a < a_{\nu+1}$$

Kako je

$$a - a_{\nu+1} < 0$$

to na osnovu (2.2;21) i (2.2;23') lako dobijamo

$$(2.2;24) \qquad a_{\nu+2} < a < a_{\nu+1}$$

Isto tako podjemo li od pretpostavke da važi

$$a_{\nu-1} < a$$

dolazimo lako do relacija

$$(2.2;25) \qquad a_{\nu-1} < a < a_\nu$$

i

$$(2.2;26) \qquad a_{\nu+1} < a < a_{\nu+2}$$

Kako očigledno mora važiti jedna od relacija

$$a < a_{2i_0-1} \quad , \quad a_{2i_0-1} < a$$

to na osnovu (2.2;23) mora, u slučaju prve relacije biti

$$a_{2i_0} < a < a_{2i_0-1}$$

odnosno. na osnovu $(2,2;25)$, u slučaju druge relacije

$$a_{2i_0-1} < a < a_{2i_0}$$

Zato, s obzirom na relaciju $(2.2;24)$/respektive $(2.2;26)$/, a prema principu potpune indukcije, sledi da će relacija $(2.2;23)$ /respketive relacije $(2.2;25)$ / biti zadovoljena za svaki parni broj $\nu \geq 2i_0$

Stavimo sad

$$\frac{a_i - a_{i-1}}{a - a_{i-1}} = 2 - \alpha_i \qquad (0 \leq \alpha_i < 1;\ i \geq 2i_0)$$

odakle sledi

$$a_i = 2a - a_{i-1} - \alpha_i (a - a_{i-1})$$

$$(i \geq 2i_0)$$

$$a_{i+1} = 2a - a_i - \alpha_{i+1} (a - a_i)$$

odnosno

$$(2.2;27) \qquad a_{i+1} - a_{i-1} = \alpha_i (a - a_{i-1}) - \alpha_{i+1} (a - a_i)$$

Za $i = \nu > 2i_0$ iz $(2.2;27)$ sledi

$$(2.2;28) \qquad a_{\nu+1} - a_{\nu-1} = \alpha_\nu (a - a_{\nu-1}) - \alpha_{\nu+1} (a - a_\nu)$$

a za $i = \nu+1 > 2i_0$

$$(2.2;29) \qquad a_{\nu+2} - a_\nu = \alpha_{\nu+1} (a - a_\nu) - \alpha_{\nu+2} (a - a_{\nu+1})$$

S obzirom da je

$$0 \leq \alpha_i < 1 \qquad (i \geq 2i_0)$$

na osnovu $(2.2;23)$ i $(2.2;24)$ {/respektive na osnovu $(2.2;25)$ i $(2.2;26)$} iz relacije $(2.2;28)$ i $(2.2;29)$ lako sledi

$$(2.2;30) \qquad a_{\nu+1} < a_{\nu-1} \quad \text{i} \quad a_\nu < a_{\nu+2}$$

{respektive

$$(2.2;30') \qquad a_{\nu-1} < a_{\nu+1} \quad \text{i} \quad a_{\nu+2} < a_\nu \}$$

Relacije $(2.2;24)$ i $(2.2;30)$ daju

$$(2.2;31) \qquad a_\nu < a_{\nu+2} < a < a_{\nu+1} < a_{\nu-1}$$

{respektive relacije (2.2; 25) i (2.2; 30') daju

$$(2.2;31') \qquad a_{\nu-1} < a_{\nu+1} < a < a_{\nu+2} < a_{\nu} \}$$

Ako stavimo u (2.2;27) $i = \nu + 2$, a zatim $i = \nu + 3$ na sličan način dobijamo

$$(2.2;32) \qquad a_{\nu+2} < a_{\nu+4} < a < a_{\nu+3} < a_{\nu+1}$$

odnosno

$$(2.2;32') \qquad a_{\nu+1} < a_{\nu+3} < a < a_{\nu+4} < a_{\nu+2}$$

Kako je (2.2;31) {respektive (2.2; 31')} sigurno zadovoljena za $\nu = 2i_0$, to je s obzirom na (2.2;32) , a prema principu potpune indukcije, relacija (2.2.31) /respektive (2.2; 31')/ zadovoljena za svaki parni broj $\nu \geq 2i_0$

TEOREMA 2.2.4. A k o j e e k s h a u s t i j a, d e f i n i s a n a r e l a c i j o m (2.1; 1) a l t e r n a t i v n a, o n d a b a r j e d - n a o d s u k c e s i v n i h v r e d n o s t i

$$E(i) \quad , E(i+1)$$

m o r a b i t i m a n j a o d 2

D o k a z. Pretpostavimo suprotno bar za jedan prirodan broj $i = \nu \geq 2i_0$, a naime:

$$(2.2;33) \qquad E(\nu) = 2+\delta(\nu) \quad , \quad E(\nu+1) = 2+\delta(\nu+1)$$

gde je

$$(2.2;34) \qquad \delta(\nu) \geq 0 \quad i \quad \delta(\nu+1) \geq 0$$

Prema pretpostavci ekshaustija je alternarivna, pa zato na osnovu T. 2.2.3 mora biti zadovoljen uslov

$$0 < E(\nu) + E(\nu+1) - E(\nu)E(\nu+1) < 1$$

ili, s obzirom na (2.2; 33)

$$0 < 2+\delta(\nu) + 2 + \delta(\nu+1) - [2+\delta(\nu)][2+\delta(\nu+1)] < 1$$

odnosno

$$(2.2;35) \qquad \delta(\nu)+\delta(\nu+1) + \delta(\nu).\delta(\nu+1) < 0$$

Relacija $(2.2;35)$ je, s obzirom na pretpostavku $(2.2;34)$ apsurdna; prema tome, a vodeći računa o $T.2.2.4$ zaključujemo da mora postojati bar jedna od nejednakosti

$$\delta(\nu)<0 \quad , \quad \delta(\nu+1)<0$$

odnosno bar jedna od nejednakosti

$$E(\nu)<2 \quad , \quad E(\nu+1)<2$$

TEOREMA 2.2.5. Da bi alternativna ekshaustija, definisana relacijom $(2.1;1)$, konvergirala potrebno je i dovoljno da

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{E(2i-1)+E(2i)-E(2i-1)E(2i)\right\}\to\infty,\ n\to\infty$$

i

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{E(2i)+E(2i+1)-E(2i)\,E(2i+1)\right\}\to\infty,\ n\to\infty$$

Dokaz. Prema $(2.2;11)$ biće

$$\frac{a_{2i}-a_{2i-2}}{a-a_{2i-2}}=E(2i-1)+E(2i)-E(2i-1)E(2i)$$

i

$$\frac{a_{2i+1}-a_{2i-1}}{a-a_{2i-1}}=E(2i)+E(2i+1)-E(2i)E(2i+1)$$

Dakle, jasno je, s obzirom na $D.2.2.2$, da dokaz teoreme neposredno sledi na osnovu $T.2.2.2$

PT 2.2.5. Ako je alternativna ekshaustija, definisana relacijom $(2.1;1)$, konvergentna, onda

$$\sum_{i=1}^{n}\left[E(i)+E(i+1)-E(i)E(i+1)\right]\to\infty,\ n\to\infty \tag{2.2;36}$$

D o k a z. Prema $(2.2;8)$ biće:

$$\sum_{i=2i_0}^{\nu}\left[E(i)+E(i+1)-E(i)E(i+1)\right]<\sum_{i=2i_0}^{\nu+1}\left[E(i)+E(i+1)-E(i)E(i+1)\right] \qquad (\nu\geq 2i_0)$$

a kako je dalje

$$\sum_{i=1}^{2n}\left[E(i)+E(i+1)-E(i)E(i+1)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[E(2i-1)+E(2i)-E(2i-1)E(2i)+E(2i)+E(2i+1)-E(2i)E(2i+1)\right]$$

to na osnovu $T.2.2.5$ sledi $(2.2;36)$

P r i m e d b a. Primeri A r h i m e d o v e ekshaustije, koje smo već istakli u prvom podeljku ove rasprave, klasični su i tipični primeri alternativne konvergentne ekshaustije.

Tako je, naprimer:

a/ U slučaju kvadrature prvog zavoja spirale $(\rho=k\theta)$

$$a_{2i-1}=\frac{\pi^3k^2}{2^{3i-1}}\,\frac{2^i(2^i-1)(2^{i+1}-1)}{3},\quad a_{2i}=\frac{\pi^3k^2}{2^{3i-1}}\,\frac{2^i(2^i+1)(2^{i+1}+1)}{3},\quad a=\frac{4\pi^3k^2}{3} \qquad (i=1,2,3,\dots)$$

i

$$E(2i)=\frac{6.2^{i+1}}{3.2^{i+1}-2}>2,\quad E(2i+1)=\frac{3}{2}\,\frac{3.2^{i+1}+1}{3.2^{i+1}+2}<2 \qquad (i=1,2,3,\dots)$$

b/ U slučaju kubature obrtnog paraboloida: $(z^2+y^2=2px)$

$$a_{2i-1}=\frac{h^2\pi p\, i}{i+1},\quad a_{2i}=\frac{h^2\pi p\,(i+2)}{i+1},\quad a=h^2\pi p \qquad (i=1,2,3\dots)$$

i

$$E(2i)=2,\quad E(2i-1)=2-\frac{1}{i+2}<2 \qquad (i=1,2,3\dots)$$

c/ U slučaju kubature obrtnog elipsoida $\left(\frac{x^2+z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$

$$a_{2i-1}=\frac{b\pi c^2(4i^2+5i)}{6(i+1)^2},\quad a_{2i}=\frac{b\pi c^2(4i^2+11i+6)}{6(i+1)^2},\quad a=\frac{2}{3}b\pi c^2 \qquad (i=1,2,3\dots)$$

i $$E(2i) = 2 - \frac{2}{3i+4} < 2, \qquad E(2i+1) = \frac{6i^3+11i^2+53i+15}{3i^3+14i^2+30i+8} = 2 - \frac{17i^2+7i+1}{3i^3+14i^2+30i+8} < 2$$

3. NEKOLIKO TEOREMA O NEKIM NUMERIČKIM BESKRAJNIM REDOVIMA

U prvom paragrafu ovog odeljka dokazaćemo, primenom nekih teorema koje se odnose na ekshaustiju nekoliko stavova o konvergentnim numeričkim i o jednoj klasi divergentnih numeričkih redova. Medju pomenutim stavovima dva će pretstavljati [redacted] neke klasične, D i n i-A b e lčove, stavove.

U drugom paragrafu dokazaćemo, ili ćemo samo navesti /gde smatramo da je pomoćni stav dobro poznat, ili je njegov dokaz jasan prema onome, što smo pretohodno izložili/, nekoliko pomoćnih stavova koje ćemo koristiti u dokazima nekih teorema u trećem i četvrtom paragrafu.

Sadržina trećeg paragrafa biće nekoliko teorema koje se odnose na izvesnu klasu konvergentnih redova sa pozitivnim članovima, odnosno na izvesnu klasu konvergentnih alternativnih redova koji zadovoljavaju L e i b n i z-ov kriterijum konvergencije. Kao osnovu u dokazima i formulacijama svih tih teorema koristićemo jednu D i n i-evu teoremu.

Naposletku u četvrtom paragrafu bavićemo se beskrajnim numeričkim redom koji se dobija kao razlika dvaju numeričkih D i n i-evih, odnosno D i n i-A b e l-ovih divergentnih redova. Taj red stoji u direktonoj vezi sa onim konvergentnim redovima koji se tretiraju u trećem paragrafu, kao i sa jednom klasom divergentnih redova sa pozitivnim članovima.

Ovde je od interesa odmah istaći da se niz teorema koje dokazujemo u trećem i četvrtom paragrafu zasniva na takvim pretpostavkama kojima se implicite zahteva da je f u n k c i j a e k s h a u s t i j e k o n v e r g e n t n a i m o n o t o n a. Mi ćemo u posebnim primedbama, uz teoreme u trećem i četvrtom paragrafu, obratiti naročitu pažnju na uslove kojima se podvrgava f u n k c i j a e k s h a u s t i j e, korespondentna konvergentnom redu koji je u pitanju.

3.1. Ako je zadan konvengertan niz

$$s_n \to s, \quad n \to \infty$$

onda je, s obzirom na $(2.1;1)$ i D. 2.1.2. funkcija ekshaustije

$$E(n) = \frac{s_n - s_{n-1}}{s - s_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{3.1;1}$$

U slučaju konvergentnog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \tag{3.1;2}$$

biće

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \to s, \quad n \to \infty$$

pa je

$$E(n) = \frac{u_n}{r_{n-1}} \qquad \left(n = 1, 2, 3 \ldots;\ r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} u_k\right) \tag{3.1;3}$$

Na osnovu nekih teorema iz drugog odeljka ove rasprave dokazaćemo sad kao što smo već i napred istakli, nekoliko teorema koje se odnose na konvergentan red $(3.1;2)$

TEOREMA 3.1.1. Ako red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{r_{n-1}} \right|^p$$

konvergira, gde je $p \geq 2$ prirodan broj, onda red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \left(\frac{u_n}{r_{n-1}} \right)^k \right]$$

mora divergirati ka $+\infty$.

Dokaz neposredno sledi na osnovu T. 2.1.3 kad se uzme u obzir funkcija ekshaustije data u obliku $(3.1;3)$

Za $p = 2$ imamo:

PT. 3.1.1. Ako red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_n}{r_{n-1}} \right)^2$$

konvergira, onda red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_{n-1}}$$

m o r a d i v e r g i r a t i ka $+\infty$.

TEOREMA 3.1.2. A k o

$$\frac{u_n}{r_{n-1}} \in (-1,1) \qquad (n \geqslant n_0)$$

i a k o j e n i z

$$\sum_{n=1}^{\nu} \left[\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \left(\frac{u_n}{r_{n-1}} \right)^k \right], \quad \nu \to \infty$$

o g r a n i č e n, o n d a r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{r_{n-1}} \right|^p$$

m o r a d i v e r g i r a t i, g d e j e $p \geqslant 2$ p r i r o d a n b r o j.

D o k a z. neposredno sledi na osnovu $T.\,2.1.4$ kad se funkcija ekshaustije uzme u obliku $(3.1;3)$

Za $p=2$ imamo:

PT. 3.1.2. A k o r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_{n-1}}$$

k o n v e r g i r a, on d a r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_n}{r_{n-1}} \right)^2$$

m o r a d i v e r g i r a t i

TEOREMA 3.1.3. A k o r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

k o n v e r g i r a, o n d a r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n}{r_{n-1}} \right|$$

m o r a d i v e r g i r a t i.

D o k a z neposredno sledi na osnovu T.2.1.2, kad se funkcija ekshaustije uzme u obliku (3.1;3)

P r i m e d b a 1. Kada je $u_n > 0$ $(n=1,2,3,\dots)$, onda se T.3.1.3 svodi na D i n i-evu teoremu:

Ako

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

konvergentan red s pozitivnim članovima, onda je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_{n-1}} \tag{3.1;3'}$$

divergentan [32, 33; 22, 302]

P r i m e d b a 2. Navedena D i n i-eva teorema neposredno sledi iz T.2.2.2 jer

$$E(n) = \frac{u_n}{r_{n-1}} \in (0,1) \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

kada su članovi konvergentnog reda (3.1;2) pozitivni.

P r i m e d b a 3. Ako je unapred zadan konvergentan niz

$$a_n \to a, \quad n \to \infty$$

onda se može uvek staviti

$$r_{n-1} = a - a_{n-1}$$

i

$$u_n = a_n - a_{n-1}$$

pa na osnovu T.3.1.3 sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{a - a_{n-1}} \right|$$

divergira. U slučaju kada je

$$a_{n-1} > a_n \to 0, \quad n \to \infty$$

dobijemo drugi oblik D i n i-eve teoreme:

Ako

$$a_{n-1} > a_n \to 0, \; n \to \infty$$

onda red

$$(3.1;3'') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}}$$

divergira [32, 31]

Pokazaćemo sad kako na osnovu T.3.1.3 sledi:

TEOREMA 31.4. A k o j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

b e s k r a j n i r e d i a k o

$$(3.1;4) \qquad |D_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} d_k\right| \to \infty, \; n \to \infty$$

o n d a r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{d_n}{D_n}\right|$$

d i v e r g i r a.

D o k a z. Pošto prema (3.1;4)

$$\frac{1}{D_n} \to 0, \; n \to \infty$$

to možemo staviti

$$\tau_{n-1} = \frac{1}{D_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

pa na osnovu T.3.1.3 sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{D_n - D_{n-1}}{D_n}\right|$$

odnosno red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{d_n}{D_n}\right|$$

divergira

P r i m e d b a 1. Kada je $d_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, onda se T.3.1.4 svodi na A b e l-D i n i-evu teoremu.

Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

divergentan red sa pozitivnim članovima, onda je red

$$(3.1;4') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$$

divergentan [38;22,299]

Poznato je da je A b e l-D i n i-eva teorema značajna za teoriju divergentnih redova, kad je u pitanju brzina divergencije reda s pozitivnim članovima [cf. 22, 308] O n a d a j e n e g a t i v a n o d g o v o r n a p i t a n j e: P o s t o j i l i d i v e r g e n t a n r e d s p o z i t i v n i m č l a n o v i m a k o j i n a j s p o r i j e d i v e r g i r a ? J e r, u z m e l i s e d a r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

najsporije divergira, onda je jasno da od tog reda divergira sporije red (3.1;4')

3.2. Sad ćemo dokazati, ili samo navesti, nekoliko pomoćnih stavova koje ćemo dalje koristiti u dokazima nekih teorema.

Lema 3.2.1. A k o s u

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n$$

k o n v e r g e n t n i r e d o v i s p o z i t i v n i m č l a n o v i m a i a k o j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c'_n} = c$$

o n d a j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r'_n} = c \qquad \left(r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k;\ r'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c'_k\right)$$

Lema je dobro poznata, pa njen dokaz ne izvodimo.

Lema 3.2.2. A k o j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

konvergentan red s pozitivnim članovima i ako je

$$(3.2;1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = k < 1$$

onda red

$$(3.2;2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r_n$$

konvergira.

Dokaz. Stavimo li

$$c_{n-1} = c'_n \qquad i \qquad r_{n-1} = r'_n$$

onda se, s obzirom na $(3,2;1)$, neposredno na osnovu $L.3.2.1$ dobija

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_{n-1}} = k < 1$$

pa prema Cauchy-evom količničkom kriterijumu red $(3,2;2)$ konvergira.

Lema 3.2.3. Neka je

$$(3.2;3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = s$$

konvergentan red s pozitivnim članovima i neka je

$$(3.2;4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = k < 1$$

Uzme li se

$$(3.2;5) \qquad r_m^{(k)} = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} r_\nu^{(k-1)} \qquad (k \in (N);\ r_\nu^{(0)} = c_\nu)$$

tada će za svaki prirodan broj k red

$$(3.2;6) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(k-1)} = s^{(k-1)} \qquad (s^{(0)} = s)$$

konvergirati i za svaki prirodan broj k biće

$$(3.2;7) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_n^{(k-1)}}{r_{n-1}^{(k-1)}} = k < 1$$

D o k a z. Pretpostavimo da red (3.2;6) konvergira i da važi (3.2;7) onda, s obzirom na (3.2;5), a na osnovu L.3.1.1 sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n^{(k)}}{r_{n-1}^{(k)}} = \varkappa < 1$$

što znači da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{(k)} = s^{(k)}$$

konvergira. Prema tome s obzirom na (3.2;3) i (3.2;4), a na osnovu principa potpune indukcije, sledi da će red (3.2;6) konvergirati za svaki prirodan broj k i da će istovremeno za svaki prirodan broj k biti zadovoljena relacija (3.2;7)

Lema 3.2.4. N e k a je

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

k o n v e r g e n t a n r e d s p o z i t i v n i m č l a n o v i m a

A k o j e

$$(3.2;8) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_{n-1}} = \varkappa < 1$$

on d a j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = \varkappa < 1$$

D o k a z. Kako je

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{r_{n-1}-r_n}{r_{n-2}-r_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \, \frac{1-\dfrac{r_n}{r_{n-1}}}{1-\dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}}$$

to je na osnovu (3.2;8) jasno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = \varkappa$$

Lema 3.2.5. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n\to\infty)$$

k o n v e r g e n t a n r e d.

Ako je

$$(3.2;9) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \varkappa < 1$$

onda je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = -k$$

D o k a z. Očigledno je

$$(3.2;10) \qquad \frac{r_{n+1}}{r_n} = -\left|\frac{r_{n+1}}{r_n}\right| = -\frac{(c_{n+2}-c_{n+3})+\cdots+(c_{n+2\nu}-c_{n+2\nu+1})+\cdots}{(c_{n+1}-c_{n+2})+\cdots+(c_{n+2\nu-1}-c_{n+2\nu})+\cdots}$$

i

$$(3.2;11) \qquad \frac{c_{n+2\nu}-c_{n+2\nu+1}}{c_{n+2\nu-1}-c_{n+2\nu}} = \frac{c_{n+2\nu}}{c_{n+2\nu-1}}\,\frac{1-\dfrac{c_{n+2\nu+1}}{c_{n+2\nu}}}{1-\dfrac{c_{n+2\nu}}{c_{n+2\nu-1}}}$$

S obzirom na $(3.2;9)$ i $(3.2;11)$ sledi

$$(3.2;12) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{c_{n+2\nu}-c_{n+2\nu+1}}{c_{n+2\nu-1}-c_{n+2\nu}} = k$$

Pošto se proizvoljno malom pozitivnom broju ε može korespondirati indeks $n_0(\varepsilon)$ takav da je nejednakost

$$k-\varepsilon < \frac{c_{n+2\nu}-c_{n+2\nu+1}}{c_{n+2\nu-1}-c_{n+2\nu}} < k+\varepsilon$$

zadovoljena za svako $n > n_0(\varepsilon)$ i za svako $\nu \geq 1$ to će prema $(3.2;10)$ biti

$$k-\varepsilon < \left|\frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < k+\varepsilon \qquad (n > n_0)$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = -k$$

Lema 3.2.6. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = G \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n\to\infty)$$

konvergentan red i neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = k < 1$$

Uzme li se

$$\tau_n^{(k)} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \left| \tau_\nu^{(k-1)} \right| \qquad \left(k \in (N);\ |\tau_\nu^{(0)}| = c_\nu\right)$$

tada će za svaki prirodan broj k red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left| \tau_n^{(k-1)} \right| = \sigma^{(k-1)}$$

konvergirati i za svaki prirodan broj k biće

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\tau_{n+1}^{(k-1)}}{\tau_n^{(k-1)}} \right| = h$$

D o k a z ove leme je analogan dokazu L.3.2.3

Lema 3.2.7. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n \to \infty)$$

k o n v e r g e n t a n r e d i n e k a j e

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right| = h \le 1$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = h \le 1$$

D o k a z ove leme je analogan dokazu L.3.2.4.

3.3. U dokazima i formulacijama teorema koje slede, kao što smo u uvodu ovog odeljka već istakli, poslužićemo se jednom D i n i-evom teoremom [cf. 22, 302] koju ćemo ovde najpre formulisati u obliku pogodnom za ciljeme naših ispitivanja, a naime:

A k o

$$a_{n-1} > a_n \to 0,\ n \to \infty$$

o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}^{s}}$$

divergirati za $\delta \geqslant 1$ i konvergiraće za $\delta < 1$

P r i m e d b a 1. Ako se ovde uzme poznata smena [cf. 22, 302]

$$a_n / a_{n-1} = q^{\frac{1}{1-\delta}} \qquad (n \geq 1,\ \delta < 1)$$

i iskoristi poznata nejednakost

$$1 - q^t < t(1-q) \qquad (t \text{ prirodan broj};\ 0<q<1)$$

onda se lako dobija

$$\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}^{\delta}} < t\left(a_{n-1}^{1-\delta} - a_n^{1-\delta}\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

i najzad

$$(3.3;1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}^{\delta}} = \vartheta \cdot a_0^{1-\delta} \qquad \left(\delta<1;\ 0<\vartheta<\left[\tfrac{1}{1-\delta}\right]+1\right)$$

gde je

$$t-1 \leq \frac{1}{1-\delta} \leq t$$

i $\left[\frac{1}{1-\delta}\right]$ najveći prirodan broj koji je manji od $\frac{1}{1-\delta}$

P r i m e d b a 2. Ako je

$$(3.3;2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$$

konvergentan red i ako

$$(3.3;3) \qquad E(n) \in (0,2) \qquad (n > n_0)$$

onda je lako pokazati da važi

$$|r_n| < |r_{n-1}| \qquad (n > n_0)$$

Zaista, kako iz (3.3;3) sledi

$$0 < \frac{u_n}{r_{n-1}} < 2 \qquad (n > n_0)$$

ili

$$0 < \frac{r_{n-1}-r_n}{r_{n-1}} < 2 \qquad (n > n_0)$$

[odn]nosno

$$-1 < \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} < 1 \qquad (n > n_0)$$

[št]o je

$$(3.3;4) \qquad |\tau_n| < |\tau_{n-1}| \qquad (n > n_0)$$

[J]asno je da iz $(3.3;4)$ sledi $(3.3;3)$

Na osnovu navedene D i n i-eve teoreme i relacije $(3.3;1)$ može se, [d]akle, formulisati:

TEOREMA 3.3.1. A k o j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$$

k o n v e r g e n t a n r e d i a k o

$$E(n) \in (0,2) \qquad (n > n_0)$$

o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\tau_{n-1}| - |\tau_n|}{|\tau_{n-1}|^{\delta}}$$

d i v e r g i r a t i z a $\delta \geq 1$, a k o n v e r g i r a ć e za $\delta < 1$ i i m a ć e s u m u

$$S = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|\tau_{n-1}| - |\tau_n|}{|\tau_{n-1}|^{\delta}} + \vartheta |\tau_{n_0}| \qquad \left(\delta < 1;\ 0 < \vartheta < \left[\tfrac{1}{1-\delta}\right] + 1\right)$$

P r i m e d b a 1. Ako

$$E(n) \in (0,1)$$

onda na osnovu T.2.2.1 red $(3.3;2)$ može pripadati samo akupu konvergentnih redova s pozitivnim /respektive s negativnim/ članovima. U ovom se slučaju T.3.3.1 svodi na navedenu D i n i-evu teoremu u poznatoj formulaciji:

Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

konvergentan red s pozitivnim članovima, onda red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\tau_{n-1}^{\delta}}$$

divergira za $\delta \geq 1$ i konvergira za $\delta < 1$ [cf. 22, 302]

Poznato je da ova teorema igra značajnu ulogu u teoriji redova, kad je u pitanju problem brzine konvergencije beskrajnog konvergentnog reda [Cf. 22, 368]. O n a d a j e n e g a t i v a n o d g o v o r n a p i t a n j e: P o s t o j i l i r e d k o j i n a j s p o r i j e k o n v e r g i r a? Jer, pretpostavili se da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

najsporije konvergira, onda je jasno da će od tog reda sporije konvergirati red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r_{n-1}^{\delta}} \qquad (0<\delta<1)$$

Ako

$$E(n) \in (1,2) \qquad (n>n_0)$$

onda na osnovu T.2.2.4 red (3.3;2) pripada skupu alternativnih redova koji konvergiraju po L e i b n i z-ovom kriterijumu konvergencije.

Medjutim, ako je

$$E(n) \in (0, 1-\alpha) \qquad (0<\alpha<1)$$

za beskrajno mnogo indeksa n i ako

$$E(n) \in (1, 1+\beta) \qquad (0<\beta<1)$$

takodje za beskrajno mnogo indeksa n, onda je jasno na osnovu T. 2.2.1 i T. 2.2.3 da red (3.3;2) ne pripada ni skupu konvergentnih redova s pozitivnim /respektive negativnim/ članovima, ni skupu alternativnih redova koji konvergiraju po L e i b n i z-ovom kriterijumu konvergencije.

P r i m e d b a 2. Ako stavimo

$$r_n = \frac{1}{D_n}$$

gde

$$|D_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} d_k\right| \to \infty, \; n \to \infty$$

onda dobijamo

$$E(n) = \frac{u_n}{r_{n-1}} = \frac{d_n}{D_n}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}|-|r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|D_n|-|D_{n-1}|}{|D_{n-1}|^{\lambda} \cdot |D_n|} \qquad (1-\delta=\lambda)$$

pa neposredno sledi teorema:

N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

b e s k r a j a n r e d i n e k a

$$|D_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} d_k \right| \to \infty, \; n \to \infty$$

A k o

$$\frac{d_n}{D_n} \in (0,2) \qquad (n > n_0)$$

o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|D_n| - |D_{n-1}|}{|D_{n-1}|^{\lambda} \cdot |D_n|}$$

d i v e r g i r a t i z a $\lambda \leq 0$, a k o n v e r g i r a ć e z a $\lambda > 0$ i i m a ć e s u m u

$$\sigma = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|D_n| - |D_{n-1}|}{|D_{n-1}|^{\lambda} \cdot |D_n|} + \vartheta \left| \frac{1}{D_{n_0}} \right| \qquad \left(\lambda > 0;\; 0 < \vartheta < \left[\frac{1}{\lambda}\right] + 1\right)$$

Za $|D_n| = D_n$ i $\lambda > 0$ teorema se svodi na P r i n g s h e i m-ovu teoremu:

Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

divergentan red s pozitivnim članovima, onda red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n \cdot D_{n-1}^{\lambda}}$$

konvergira za $\lambda > 0$ [cf. 22, 300]

Na osnovu L.3.2.3 i navedene D i n i-eve teoreme lako sledi:

TEOREMA 3.3.2. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$$

k o n v e r g e n t a n r e d s p o z i t i v n i m č l a n o v i m a.

A k o j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \kappa < 1 \tag{3.3;5}$$

o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^{(k-1)}}{[t_n^{(k)}]^{\delta}}$$

d i v e r g i r a t i z a $\delta \geq 1$, a k o n v e r g i r a ć e z a $\delta < 1$ i i m a ć e s u m u

$$S^{(k)} = \vartheta_k [t_0^{(k)}]^{1-\delta} \qquad (\delta < 1;\ 0 < \vartheta_k < [\tfrac{1}{1-\delta}] + 1)$$

g d e $k \in (N)$

P r i m e d b a. Kako je

$$E(n) = \frac{c_n}{r_{n-1}} = 1 - \frac{t_n}{r_{n-1}} \qquad (n \geq 1)$$

to je, na osnovu (3.3;5) i L. 3.2.1

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = 1 - \kappa = \kappa' \qquad (0 < \kappa' \leq 1) \tag{3.3;5'}$$

Obrnuto, na osnovu L.3.2.4 lako iz (3.3;5')sledi (3.3;5)
P r e m a t o m e s e p r e t p o s t a v k a (3.3;5) u T.3.3.2 m o ž e z a m e n i t i e k v i v a l e n t n o m p r e t p o s t a v k o m (3.3;5')

Na osnovu L.3.2.5 i navedene D i n i-eve teoreme lako sledi

TEOREMA 3.3.3. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = \sigma \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n \to \infty)$$

k o n v e r g e n t a n r e d
A k o j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \kappa < 1 \tag{3.3;6}$$

o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_n|}{|r_{n-1}|^{\delta}}$$

d i v e r g i r a t i z a $\delta \geq 1$ a k o n v e r g i r a ć e z a $\delta < 1$ i i m a ć e s u m u

$$\sigma' = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|\tau_{n-1}| - |\tau_n|}{|\tau_{n-1}|^{\delta}} + \vartheta |\tau_{n_0}|^{1-\delta} \qquad (\delta < 1;\ 0 < \vartheta < [\tfrac{1}{1-\delta}] + 1)$$

P r i m e d b a 1. Kako je

$$E(n) = \frac{(-1)^{n-1} c_n}{\tau_{n-1}} = 1 + \left|\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right| \qquad (n \geq 1)$$

to je, na osnovu $(3.3;6)$ i $L.\ 3.2.5$.

$$\lim_{n \to \infty} E(n) = 1 + k = k' \qquad (1 \leq k' < 2)$$

Obrnuto, na osnovu $L.3.2.7$ lako iz $(3.3;6')$ sledi $(3.3;6)$. P r e m a t o m e, p r e t p o s t a v k a $(3.3;6)$ u $T.3.3.3$ m o ž e s e z a m e n i t i e k v i v a l e n t n o m p r e t p o s t a v k o m $(3.3;6')$

P r i m e d b a 2. Ako je

$$(3.3;7) \qquad c_\nu - c_{\nu+1} < c_{\nu-1} - c_\nu \qquad (\nu > n_0)$$

onda je

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}{}' (c_\nu - c_{\nu+1}) < \sum_{\nu=n+1}^{\infty}{}' (c_{\nu-1} - c_\nu) \qquad (\nu \geq n_0)$$

odnosno

$$|\tau_n| < |\tau_{n-1}| \qquad (n \geq n_0)$$

pa se, dakle, na osnovu $(3.3;7)$ može formulisati teorema analogna $T.3.3.3$

P r i m e d b a 3. Na osnovu $L.3.2.6$ možemo $T.3.3.3$ formulisati u generalnijem obliku:

N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = \sigma \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n \to \infty)$$

k o n v e r g e n t a n r e d

A k o j e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = k < 1$$

o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\tau_{n-1}^{(k-1)}| - |\tau_n^{(k-1)}|}{|\tau_{n-1}^{(k-1)}|^{\delta}}$$

d i v e r g i r a t i z a $\delta \geq 1$, a k o n v e r g i r a ć e z a $\delta < 1$ i i m a ć e s u m u

$$\sigma^{(k)} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|r_{n-1}^{(k-1)}| - |r_n^{(k-1)}|}{|r_{n-1}^{(k-1)}|^{\delta}} + \vartheta_k |r_{n_0}^{(k-1)}| \qquad \left(\delta < 1;\ 0 < \vartheta_k < \left[\tfrac{-1}{1-\delta}\right] + 1\right)$$

g d e $k \in (N)$

Pošto je

$$E_{(n)}^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1} |r_n^{(k-1)}|}{r_{n-1}^{(k)}} \qquad \left(k \in (N);\ E_{(n)}^{(0)} = E(n)\right)$$

to se u ovom slučaju može formulisati primedba analogna primedbi 1

P r i m e d b a 4. Ako je konvergentan red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0, n \to \infty)$$

onda je

$$|r_{n-1}| = (c_n - c_{n+1}) + (c_{n+2} - c_{n+3}) + \cdots$$

i

$$|r_{n+1}| = (c_{n+2} - c_{n+3}) + (c_{n+4} - c_{n+5}) + \cdots$$

pa je, dakle, jasno da će u vezi s redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_{n-1}| - |r_{n+1}|}{|r_{n-1}|^{\delta}}$$

važiti teorema analogna T. 3.3.3

Uočimo li sada količnik r_n / r_{n+1} dva sukcesivna ostatka konvergentnog reda s pozitivnim članovima, onda se može formulisati:

TEOREMA 3.3.4. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s$$

k o n v e r g e n t a n r e d s p o z i t i v n i m č l a n o v i m a

A k o j e

$$(3.3;8) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0$$

i

$$(3.3;9) \qquad c_{n+\nu} (c_n)^{\nu-1} \leq (c_{n+1})^{\nu}$$

a sve indekse $n \geq 1$ istovremeno za sve indekse $\nu \geq 1$ nezavisno od n, onda će red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n/r_{n-1} - r_{n+1}/r_n}{(r_n/r_{n-1})^{\delta}}$$

divergirati za $\delta \geq 1$, a konvergiraće za $\delta < 1$ i imaće sumu

$$S = \theta\left(1 - \frac{c_1}{s}\right)^{1-\delta} \qquad \left(\delta < 1;\ 0 < \theta < \left[\frac{1}{1-\delta}\right] + 1\right)$$

D o k a z. Iz $(3.3;8)$ na osnovu $L.3.2.1$ sledi

$$(3.3;10) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 0$$

dok se iz $(3.3;9)$ dobija

$$(3.3;11) \qquad \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{n+\nu} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{\nu-1}$$

Kako se usled $(3.3;8)$ može uzeti

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \qquad (n > n_0)$$

to iz $(3.3;11)$ sledi

$$\frac{r_n}{c_{n+1}} \leq \frac{c_n}{c_n - c_{n+1}} \qquad (n > n_0)$$

ili

$$r_n c_n \leq c_{n+1}(r_n + c_n)$$

odnosno

$$\frac{c_n}{r_{n-1}} \leq \frac{c_{n+1}}{r_n} \qquad (n > n_0)$$

i dalje

$$\frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} \leq \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} \qquad (n > n_0)$$

tj.

(3.3;12)
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \frac{c_n}{c_{n-1}} \qquad (n > n_0)$$

Na osnovu (3.3;10), (3.3;12) i D i n i-eve teoreme jasno sledi dalje dokaz T.3.3.4

P r i m e d b a 1. Ako se pretpostavka (3.3;9) zameni pretpostavkom

(3.3;9')
$$\frac{c_{n+\nu}}{c_{n+\nu-1}} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \qquad (n \geq 1, \nu \geq 1)$$

dobija se

$$c_n \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{n+\nu} \leq c_{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{n+\nu-1}$$

odnosno

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

tj. dobija se (3.3;12). Prema tome pod pretpostavkom (3.3;9') može se formulisati teorema analogna T.3.3.4

P r i m e d b a 2. Na osnovu L.3.2.2 i L.3.2.4 lako je videti da je uslog

(3.3;10')
$$\lim_{n\to\infty} E(n) = 1$$

ekvivalentan uslovu (3.3;8)

Uslovi (3.3;8) i (3.3;9) odnosno uslov (3.3;9') dovode, kao što smo videli do relacije

(3.3;12')
$$E(n) \leq E(n+1) \qquad (n \geq n_0)$$

a ova relacija (3.3;12). P r e m a t o m e, j e j a s n o k a k o s e u g e n e r a l n i j e m o b l i k u m o ž e f o r m u l i s a t i T.3.3.4 p o m o ć u f u n k c i j e e k s h a u s t i j e $E(n)$

P r i m e d b a 3. Na osnovu L.3.2.3 može se T.3.3.4 formulisati u generalnijem obliku na sledeći način

N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s$$

konvergentan red s pozitivnim članovima.

ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0$$

(3.3;13) $$\tau_{n+\nu}^{(k-1)}\left[\tau_n^{(k-1)}\right]^{\nu-1} \leq \left[\tau_{n+1}^{(k-1)}\right]^{\nu}$$

jedan prirodan broj $k=p$ i za sve indekse ≥ 1 i istovremeno za sve indekse $\nu \geq 1$, nezavisno od indeksa n, onda će red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^{(p)}/\tau_{n-1}^{(p)} - \tau_{n+1}^{(p)}/\tau_n^{(p)}}{(\tau_n^{(p)}/\tau_{n-1}^{(p)})^{\delta}}$$

ivergirati za $\delta \geq 1$, a konvergiraće za $\delta < 1$ imaće sumu

$$S^{(p)} = \theta_p \left(\frac{\tau_1^{(p)}}{\tau_0^{(p)}}\right)^{1-\delta} \qquad \left(\delta<1;\ 0\leq\theta_p<\left[\frac{1}{1-\delta}\right]+1\right)$$

Jasno je da zamena uslova (3.3;13) s uslovom

(3.3;13') $$\frac{\tau_{n+\nu}^{(k-1)}}{\tau_{n+\nu-1}^{(k-1)}} \leq \frac{\tau_{n+1}^{(k-1)}}{\tau_n^{(k-1)}}$$

dopušta primedbu analognu primedbi 1

Kako je

$$E_{(n)}^{(k-1)} = \frac{\tau_n^{(k-1)}}{\tau_{n-1}^{(k)}} \qquad \left(E_{(n)}^{(0)} = E(n)\right)$$

to se i u ovom slučaju može dati primedba analogna primedbi 2

Za konvergentne alternativne redove koji zadovoljavaju Leibniz-ov kriterijum konvergencije može se formulisati teorema analogna T. 3.3.4

TEOREMA 3.3.5. Neka je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = 6 \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n\to\infty)$$

konvergentan red

Ako je

$$(3.3;14) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0$$

$$(3.3;15) \qquad \left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{2\nu+1} \leq \frac{c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2}}{c_n - c_{n+1}}$$

i sve indekse $n \geq 1$ i istovremeno za sve in-
skse $\nu \geq 0$ nezavisno od indeksa n, onda će
ed

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n/z_{n-1}| - |z_{n+1}/z_n|}{|z_n/z_{n-1}|^{\delta}}$$

ivergirati za $\delta \geq 1$, a konvergiraće za $\delta < 1$
imaće sumu

$$\sigma' = \vartheta \left|1 - \frac{c_1}{\sigma}\right|^{1-\delta} \qquad \left(\delta < 1;\ 0 < \vartheta < \left[\frac{1}{1-\delta}\right] + 1\right)$$

Dokaz. Iz $(3.3;14)$ na osnovu $L.3.2.5$ sledi

$$(3.3;16) \qquad \lim_{n\to\infty} |z_n/z_{n-1}| = 0$$

dok se iz $(3.3;15)$ dobija

$$c_{n+1}\left[\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{2\nu} - \left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{2\nu+1}\right] \leq c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2} \qquad (n \geq 1, \nu \geq 0)$$

odnosno

$$c_{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{2\nu} - \left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{2\nu+1}\right] \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2}\right)$$

tj.

$$(3.3;17) \qquad \frac{c_{n+1}}{1 + \frac{c_{n+1}}{c_n}} \leq |z_n| \qquad (n \geq n_0)$$

jer se, s obzirom na $(3.3;14)$ može uzeti

$$0 < \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \qquad (n \geq n_0)$$

Pošto je

$$|r_n| = (-1)^n r_n \qquad (n \geq 1)$$

to iz (3,3;17) sledi

$$c_{n+1} \cdot c_n \leq (-1)^n r_n (c_n + c_{n+1})$$

ili

$$c_{n+1} \cdot c_n \leq r_n \left[(-1)^n c_{n+1} - (-1)^{n-1} c_n\right]$$

i dalje

$$(-1)^{n-1} c_n \cdot r_n \leq (-1)^n c_{n+1} \left[r_n + (-1)^{n-1} c_n\right]$$

tj.

$$(-1)^{n-1} c_n \cdot r_n \leq (-1)^n c_{n+1} \cdot r_n$$

i najzad

$$(3.3;18) \qquad \frac{(-1)^n c_{n+1}}{r_n} \leq \frac{(-1)^{n-1} c_n}{r_{n-1}}$$

Relacija (3.3;18) daje

$$\frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} \leq \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} \qquad (n \geq n_0)$$

ili

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \geq \frac{r_n}{r_{n-1}}$$

odnosno

$$(3.3;19) \qquad \left|\frac{r_{n+1}}{r_n}\right| \leq \left|\frac{r_n}{r_{n-1}}\right| \qquad (n \geq n_0)$$

Na osnovu (3.3;16) i (3.3;19) i D i n i-eve teoreme jasno sledi dokaz

P r i m e d b a 1. Ako se pretpostavka (3.3;15) zameni pretpostavkom

$$(3.3;15') \qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \frac{c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2}}{c_{n+2\nu} - c_{n+2\nu+1}} \qquad (n \geq 1, \nu \geq 0)$$

dobija se

$$c_{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{n+2\nu} - c_{n+2\nu+1}) \leq c_n \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2})$$

ali kako je

$$|r_{n-1}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{n+2\nu} - c_{n+2\nu+1}) \quad i \quad |r_n| = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2})$$

to je

$$c_{n+1} |r_{n-1}| \leq c_n |r_n|$$

odnosno

$$\frac{(-1)^n c_{n+1}}{r_n} \leq \frac{(-1)^{n-1} c_n}{r_{n-1}}$$

tj.dobija se(3.3;19) Dakle, pod pretpostavkom (3.3;15')može se formulisati teorema analogna T.3.3.5

P r i m e d b a 2. Lako se vidi na osnovu L.3.2.5 i L.3.2.7 da je uslov

$$(3.3;14') \qquad \lim_{n\to\infty} E(n) = 1$$

ekvivalentan uslovu (3.3;14)

Uslovi (3.3;15) i (3.3;15') dovode, kao što smo videli, do relacije

$$(3.3;18') \qquad E(n+1) \leq E(n) \qquad (n > n_0)$$

a ova do (3.3;19) P r e m a t o m e j e o č i g l e d n o k a k o s e T.3.3.5 m o ž e g e n e r a l n i j e f o r m u l i s a t i p o m o ć u f u n k c i j e e k s h a u s t i j e $E(n)$.

P r i m e d b a 3. Na osnovu L.3.2.6 možemo T.3.3.5 formulisati generalnije na sledeći način:

N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = 6 \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n\to\infty)$$

k o n v e r g e n t a n r e d

A k o j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0$$

i

$$(3.3;20) \qquad \left| \frac{r_{n+1}^{(k-1)}}{r_n^{(k-1)}} \right| \leq \frac{|r_{n+2\nu+1}^{(k-1)}| - |r_{n+2\nu+2}^{(k-1)}|}{|r_n^{(k-1)}| - |r_{n+1}^{(k-1)}|}$$

z a j e d a n p r i r o d a n b r o j $k=p$ i z a s v e i n d e k -

s e $n \geq 1$ i i s t o v r e m e n o z a s v e i n d e k s e $\nu \geq 0$ n e z a v i s n o o d i n d e k s a n , o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{\tau_n^{(p)}}{\tau_{n-1}^{(p)}}\right| - \left|\frac{\tau_{n+1}^{(p)}}{\tau_n^{(p)}}\right|}{\left|\frac{\tau_n^{(p)}}{\tau_{n-1}^{(p)}}\right|^{\delta}}$$

d i v e r g i r a t i z a $\delta \geq 1$, a k o n v e r g i r a ć e z a $\delta < 1$ i i m a ć e s u m u

$$\sigma^{(p)} = \vartheta_p \left|\frac{\tau_1^{(p)}}{\tau_0^{(p)}}\right|^{1-\delta} \qquad \left(\delta < 1;\ 0 \leq \vartheta_p < \left[\frac{1}{1-\delta}\right] + 1\right)$$

Jasno je da zamena uslova (3.3;20) uslovom

$$(3.3;20') \qquad \left|\frac{\tau_{n+1}^{(k-1)}}{\tau_n^{(k-1)}}\right| \leq \frac{|\tau_{n+2\nu+1}^{(k-1)}| - |\tau_{n+2\nu+2}^{(k-1)}|}{|\tau_{n+2\nu}^{(k-1)}| - |\tau_{n+2\nu+1}^{(k-1)}|}$$

dozvoljava primedbu analognu primedbi 1

Kako je

$$E_{(n)}^{(k-1)} = \frac{(-1)^{n-1}|\tau_n^{(k-1)}|}{\tau_{n-1}^{(k)}} \qquad \left(E_{(n)}^{(0)} = E(n)\right)$$

to se i u ovom slučaju može dati primedba analogna primedbi 2

3.4. U ovome što dalje sledi i čime završavamo ovu našu raspravu bavićemo se ispitivanjem reda

$$(3.4;1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n)$$

kada su redovi

$$(3.4;2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

D i n i ćevi (3.1;3') i (3.1;3'') odnosno A b e l-D i n i-evi divergentni redovi (3.1;4') . Dokazaćemo nekoliko teorema u kojima će biti istaknuti neki dovoljni uslovi za konvergenciju, odnosno apsolutnu divergenciju, reda (3.4;1)

TEOREMA 3.4.1. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s$$

k o n v e r g e n t a n r e d s p o z i t i v n i m č l a n o v i m a

$$(3.4;14)\quad \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left| \frac{c_{n-1}/r_{n-1} - c_n/r_n}{c_{n-1}/r_{n-1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{r_{n-1}}{r_n} \left| \frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}} \right|$$

to se na osnovu $(3.4;12)$ i $(3.4;14)$ lako zaključuje da red $(3.4;8)$ mora takodje divergirati.

Primedba 1. Lako se vidi da se red $(3.4;5)$ može napisati u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}} - \frac{c_n}{r_{n-1}} \right)$$

pa je, s obzirom na $(3.4;1)$ i $(3.4;2)$

$$A_n = \frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}} \qquad B_n = \frac{c_n}{r_{n-1}}$$

Prema Dini-evoj teoremi [cf. T.3.13] redovi

$$(3.4;15)\quad \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{c_{n-1} - c_n}{c_{n-1}} \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{c_n}{r_{n-1}}$$

su divergentni. Na taj način T.3.4.1 daje dovoljne uslove, da bi red $(3.4;5)$, dobijen oduzimanjem korespondentnih članova Dini-evih divergentnih redova $(3.4;15)$ konvergirao, odnosno apsolutno divergirao.

Primedba 2. Ako se pretpostavka $(3.4;4)$ zameni pretpostavkom

$$(3.4;4')\qquad (c_n)^{\nu+1} \geqslant c_{n+\nu} \cdot (c_{n-1})^{\nu}$$

dobija se teorema analogna T.3.4.1

Primedba 3. Zameni li se pretpostavka $(3.4;4)$ pretpostavkom

$$(3.4;16)\qquad \frac{c_n}{c_{n-1}} \leqslant \frac{c_{n+\nu+1}}{c_{n+\nu}} \qquad (n \geqslant 1,\ \nu \geqslant 0)$$

odnosno, pretpostavkom

$$(3.4;16')\qquad \frac{c_n}{c_{n-1}} \geqslant \frac{c_{n+\nu+1}}{c_{n+\nu}} \qquad (n \geqslant 1,\ \nu \geqslant 0)$$

lako je videti da će važiti teorema analogna T.3.4.1

a/ A k o j e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n-1}} = k < 1 \tag{3.4;3}$$

i

$$(c_n)^{\nu+1} \leq c_{n+\nu}\,(c_{n-1})^{\nu} \tag{3.4;4}$$

z a s v e i n d e k s e $n \geq 1$ i i s t o v r e m e n o z a s v e i n d e k s e $\nu \geq 0$ n e z a v i s n o o d i n d e k s a n , t a d a r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}}\right) \tag{3.4;5}$$

k o n v e r g i r a i i m a s u m u

$$S = \theta\left[\frac{c_{n_0-1}}{r_{n_0-1}}\left(\frac{k}{1-k} - \frac{s}{c_0}\right) + \sum_{n=1}^{n_0-1}\left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}}\right)\right] \qquad (0 \leq \theta < 1) \tag{3.4;6}$$

b/ A k o j e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 \tag{3.4;7}$$

t a d a r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}}\right| \tag{3.4;8}$$

d i v e r g i r a

D o k a z. Dokazaćemo najpre tvrdjenje a/. Prema $(3.4;3)$ i na osnovu $L.3.2.1$ sledi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_{n-1}} = k$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_{n-1} - r_n} = \frac{k}{1-k}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{c_n} - \frac{r_{n-1}}{c_{n-1}}\right) = \frac{k}{1-k} - \frac{s}{c_0} \qquad (r_0 = s) \tag{3.4;9}$$

Kako se usled $(3.4;3)$ može uzeti

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \qquad (n \geq n_0)$$

to se iz (3.3;4) slično kao u T. 3.3.4 dobija

$$\frac{1}{1-c_n/c_{n-1}} \leq \frac{r_{n-1}}{c_n} \qquad (n \geq n_0)$$

odnosno

$$(3.4;10) \qquad \frac{r_{n-1}}{c_{n-1}} \leq \frac{r_n}{c_n}$$

Pošto je

$$\frac{c_n}{r_{n-1}} < \frac{c_n}{r_n}$$

to se, vodeći računa o relaciji (3.4;10) lako zaključuje da važi nejednakost

$$(3.4;11) \qquad \frac{c_n}{r_{n-1}} < \frac{c_{n_0-1}}{r_{n_0-1}} \qquad (n \geq n_0)$$

Kako je dalje

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r_{n-1}}\left(\frac{r_n}{c_n} - \frac{r_{n-1}}{c_{n-1}}\right)$$

to na osnovu (3.4;9), (3.4;10) i (3.4;11) neposredno sledi

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}}\right) < \sum_{n=1}^{n_0-1}\left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{c_n}{c_{n-1}}\right) + \frac{c_{n_0-1}}{r_{n_0-1}}\left(\frac{u}{1-\kappa} - \frac{s}{c_0}\right)$$

tj. red (3.4;5) konvergira i ima sumu (3.4;6)

Dokažimo sad tvrdjenje b/. Prema (3.4;7) i na osnovu L. 3.2.1 sledi

$$(3.4;12) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n-1}}{r_n} = 1$$

i dalje

$$(3.4;13) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n-1}-r_n}{r_n} = 0$$

Na osnovu (3.4;13) i T. 3.1.3 - Prim. 3 neposredno sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_{n-1}/r_{n-1} - c_n/r_n}{c_{n-1}/r_{n-1}}\right|$$

mora divergirati, a kako je

$$(3.4;14)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_{n-1}/r_{n-1}-c_n/r_n}{c_{n-1}/r_{n-1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{n-1}}{r_n}\left|\frac{r_n}{r_{n-1}}-\frac{c_n}{c_{n-1}}\right|$$

to se na osnovu $(3.4;12)$ i $(3.4;14)$ lako zaključuje da red $(3.4;8)$ mora takodje divergirati.

P r i m e d b a 1. Lako se vidi da se red $(3.4;5)$ može napisati u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_{n-1}-c_n}{c_{n-1}}-\frac{c_n}{r_{n-1}}\right)$$

pa je, s obzirom na $(3.4;1)$ i $(3.4;2)$

$$A_n=\frac{c_{n-1}-c_n}{c_{n-1}}\qquad B_n=\frac{c_n}{r_{n-1}}$$

Prema D i n i-evoj teoremi [cf. T. 3.1.3] redovi

$$(3.4;15)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n-1}-c_n}{c_{n-1}}\quad i\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{r_{n-1}}$$

su divergentni. N a t a j n a č i n T. 3.4.1. d a j e d o v o l j n e u s l o v e, d a b i r e d $(3.4;5)$, d o b i j e n o d u z i m a n j e m k o r e s p o n d e n t n i h č l a n o v a D i n i-e v i h d i v e r g e n t n i h r e d o v a $(3.4;15)$ k o n v e r g i r a o, o d n o s n o a p s o l u t n o d i v e r g i r a o.

P r i m e d b a 2. Ako se pretpostavka $(3.4;4)$ zameni pretpostavkom

$$(3.4;4')\qquad (c_n)^{\nu+1}\geqslant c_{n+\nu}\cdot(c_{n-1})^{\nu}$$

dobija se teorema analogna T. 3.4.1

P r i m e d b a 3. Zameni li se pretpostavka $(3.4;4)$ pretpostavkom

$$(3.4;16)\qquad \frac{c_n}{c_{n-1}}\leq\frac{c_{n+\nu+1}}{c_{n+\nu}}\qquad (n\geqslant 1,\ \nu\geqslant 0)$$

odnosno, pretpostavkom

$$(3.4;16')\qquad \frac{c_n}{c_{n-1}}\geqslant\frac{c_{n+\nu+1}}{c_{n+\nu}}\qquad (n\geqslant 1,\ \nu\geqslant 0)$$

lako je videti da će važiti teorema analogna T. 3.4.1

P r i m e d b a 4. Na osnovu $L.3.2.2$ i $L.3.2.4$ neposredno sledi ekvivalentnost uslova

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = \mathcal{M}' \qquad (0 < \mathcal{M}' \leq 1)$$

slovu $(3.4;3)$

Lako je pokazati da je relacija $(3.4;10)$ koja je posledica uslova $(3.4;3)$ $(3.4;4)$, ekvivalentna relaciji

$$E(n-1) \geq E(n)$$

Uslovi $(3.4;3)$ i $(3.4;4')$ dovode do relacije

$$(3.4;10') \qquad \frac{\tau_{n-1}}{c_{n-1}} \geq \frac{\tau_n}{c_n}$$

za koju nije teško pokazati da je ekvivalentna relaciji

$$E(n-1) \leq E(n)$$

Analogno važi kad je u pitanju uslov $(3.4;16)$ odnosno $(3.4;16')$

P r e m a t o m e j e j a s n o k a k o s e m o ž e $T.3.4.1$ g e n e r a l n i j e f o r m u l i s a t i p o m o ć u f u n k c i j e e k s h a u s t i j e $E(n)$

P r i m e d b a 5. Na osnovu $L.3.2.3$ može se tvrdjenje a/ u $T.3.4.1$ generalisati na sledeći način:

A k o j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = \mathcal{M} < 1$$

i

$$\left[\tau_n^{(k-1)}\right]^{\nu+1} \leq \tau_{n+\nu}^{(k-1)} \left[\tau_{n-1}^{(k-1)}\right]^{\nu}$$

z a j e d a n p r i r o d a n b r o j $k=p$ i z a s v e i n d e k s e $n \geq 1$ i i s t o v r e m e n o z a s v e i n d e k s e $\nu \geq 0$ n e z a v i s n o o d i n d e k s a n , t a d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau_n^{(p)}}{\tau_{n-1}^{(p)}} - \frac{\tau_n^{(p-1)}}{\tau_{n-1}^{(p-1)}} \right)$$

k o n v e r g i r a t i i i m a ć e s u m u

$$S^{(p)} = \theta_p \frac{r_{n_0-1}^{(p-1)}}{r_{n_0-1}^{(p)}} \left(\frac{h}{1-h} - \frac{r_0^{(p)}}{r_0^{(p-1)}} \right) \qquad (0 \leq \theta_p < 1)$$

Jasno je da se tvrdjenje a/ u $T.3.4.1$ **može analogno generalisati i u slučaju uslova** $(3.4;4')$ **, odnosno** $(3.4;16)$ **i** $(3.4;16')$

Pošto je

$$E_{(n)}^{(k-1)} = \frac{r_n^{(k-1)}}{r_{n-1}^{(k)}} \qquad \left(E_{(n)}^{(0)} = E(n)\right)$$

to se u slučaju navedenog generaliziranog tvrdjenja a/ može u pogledu funkcije ekshaustije $E_{(n)}^{(p-1)}$ **formulisati primedba analogna primedbi** 4.

TEOREMA 3.4.2. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = \sigma \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n \to \infty)$$

k o n v e r g e n t a n r e d

A k o j e

$$(3.4;17) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = h < 1$$

i

$$(3.4;18) \qquad \left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{2\nu+1} \leq \frac{c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2}}{c_n - c_{n+1}}$$

z a s v e i n d e k s e $n \geq 1$ **i i s t o v r e m e n o z a s v e i n d e k s e** $\nu \geq 0$ **, n e z a v i s n o o d** n **, o n d a ć e r e d**

$$(3.4;19) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{r_n}{r_{n-1}} \right| - \frac{c_{n+1}}{c_n} \right)$$

k o n v e r g i r a t i i i m a ć e s u m u

$$(3.4;20) \qquad \sigma' = \vartheta \left[\frac{c_1}{\sigma(1+h)} - 1 \right] \qquad (0 \leq \vartheta < 1)$$

D o k a z. Kao i u $T.3.3.5$ **na osnovu** $(3.4;17)$ **i** $(3.4;18)$ **biće**

$$(3.4;21) \qquad \frac{(-1)^n c_{n+1}}{r_n} \leq \frac{(-1)^{n-1} c_n}{r_{n-1}} \qquad (n \geq 1)$$

Iz $(3.4;17)$ na osnovu $L.3.2.5$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = -k$$

odnosno

$$(3.4;22) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n k_{n+1}}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} = 1+k$$

i dalje

$$(3.4;23) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k_n}{|r_{n-1}|} - \frac{k_{n+1}}{|r_n|} \right) = \frac{k_1}{\sigma} - (1+k) \qquad (|r_0| = \sigma)$$

Pošto je

$$\left| \frac{r_n}{r_{n-1}} \right| - \frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{|r_n|}{k_n} \left(\frac{k_n}{|r_{n-1}|} - \frac{k_{n+1}}{|r_n|} \right)$$

i

$$\frac{|r_n|}{k_n} < \frac{|r_n|}{k_{n+1}} \qquad (n \geq 1)$$

a, s obzirom na $(3.4;21)$ i $(3.4;22)$

$$\frac{|r_n|}{k_n} < \frac{1}{1+k} \qquad (n \geq 1)$$

to je

$$(3.4;24) \qquad \left| \frac{r_n}{r_{n-1}} \right| - \frac{k_{n+1}}{k_n} < \frac{1}{1+k} \left(\frac{k_n}{|r_{n-1}|} - \frac{k_{n+1}}{|r_n|} \right) \qquad (n \geq 1)$$

pa je, dakle na osnovu $(3.4;23)$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{r_n}{r_{n-1}} \right| - \frac{k_{n+1}}{k_n} \right) < \frac{k_1}{\sigma(1+k)} - 1$$

tj. red $(3.4;19)$ konvergira i njegova je suma $(3.4;20)$

P r i m e d b a 1. Dobiće se teorema analogna $T.3.4.2$ ako se uslov $(3.4;18)$ zameni uslovom

$$(3.4;18') \qquad \left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{2\nu+1} \leq \frac{c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2}}{c_n - c_{n+1}}$$

ili uslovom

$$(3.4;25) \qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \frac{c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2}}{c_{n+2\nu} - c_{n+2\nu+1}}$$

odnosno uslovom

$$(3.4;25') \qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} \geqslant \frac{c_{n+2\nu+1} - c_{n+2\nu+2}}{c_{n+2\nu} - c_{n+2\nu+1}}$$

Za slučaj uslova $(3.4;18)$ i $(3.4;25)$ dobija se relacija

$$E(n+1) \leq E(n)$$

a za slučaj uslova $(3.4;18')$ i $(3.4;25')$ relacija

$$E(n+1) \geqslant E(n)$$

P r i m e d b a 2. Lako se uočava da se red $(3.4;19)$ može napisati u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n - c_{n+1}}{c_n} - \frac{|z_{n-1}| - |z_n|}{|z_{n-1}|}\right)$$

gde je, prema $(3.4;1)$ i $(3.4;2)$

$$A_n = \frac{c_n - c_{n+1}}{c_n} \qquad i \qquad B_n = \frac{|z_{n-1}| - |z_n|}{|z_{n-1}|}$$

D a k l e, o v d e v a ž i p r i m e d b a, a n a l o g n a Prim. 1 u z T. 3.4.1

P r i m e d b a 3. Na osnovu L. 3.2.5 i L. 3.2.7 sledi ekvivalentnost uslova $(3.4;17)$ uslovu

$$(3.4;17') \qquad \lim_{n\to\infty} E(n) = 1 + k$$

Već smo utakli da $(3.4;18)$ i $(3.4;25)$ dovode do relacije

$$E(n+1) \leq E(n)$$

i uslovi $(3.4;18')$ i $(3.4;25')$ do relacije

$$E(n+1) \geqslant E(n)$$

p a j e, d a k l e, j a s n o k a k o s e p o m o ć u f u n k c i j e e k s h a u s t i j e $E(n)$ m o ž e g e n e r a l n i j e f o r m u l i s a- t i $T.3,4,2$

P r i m e d b a 4. Na osnovu $L.3.2.6$ može se $T.3.4.2$ formulisati u generalisanom obliku na sledeći način:

N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = \sigma \qquad (c_{n-1} > c_n \to 0,\ n \to \infty)$$

k o n v e r g e n t a n r e d i n e k a j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = k < 1$$

i

$$\left| \frac{\tau_{n+1}^{(k-1)}}{\tau_n^{(k-1)}} \right|^{2\nu+1} \leq \frac{|\tau_{n+2\nu+1}^{(k-1)}| - |\tau_{n+2\nu+2}^{(k-1)}|}{|\tau_n^{(k-1)}| - |\tau_{n+1}^{(k-1)}|}$$

z a j e d a n p r i r o d a n b r o j $k=p$ i z a s v e i n d e k- s e $n \geq 1$ i i s t o v r e m e n o z a s v e i n d e k s e $\nu \geq 0$, n e z a v i s n o o d i n d e k s a n, t a d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{\tau_n^{(p)}}{\tau_{n-1}^{(p)}} \right| - \left| \frac{\tau_{n+1}^{(p-1)}}{\tau_n^{(p-1)}} \right| \right)$$

konvergirati i imaće sumu

$$\sigma^{(p)} = \vartheta_p \left[\frac{|\tau_1^{(p-1)}|}{|\tau_0^{(p)}|(1+k)} - 1 \right] \qquad (0 \leq \vartheta_p < 1)$$

Analogna generalizacija $T.3.4.2$ važiće i u slučaju uslova $(3.4;\ 18')$, odnosno uslova $(3.4;\ 25)$ ili $(3.4;\ 25')$

U pogledu funkcije ekshaustije $E_{(n)}^{(p-1)}$ slično se može primetiti kao u primedbi 3

TEOREMA 3.4.3. N e k a j e

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

d i v e r g e n t a n r e d i n e k a j e

$$(3.4;26) \qquad d_{n-1} > d_n \to 0,\ n \to \infty$$

a/ A k o j e

$$(3.4;27)\qquad D_p \geq \frac{d_p \cdot d_{p-1}}{d_{p-1}-d_p}\,, \qquad \frac{d_n \cdot d_{n-1}}{d_{n-1}-d_n} \geq \frac{d_{n+1}^2}{d_n - d_{n+1}} \qquad \left(D_p = \sum_{k=1}^{p} d_k\right)$$

i

$$(3.4;28)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{d_n^2 \cdot d_{n-1}}{d_{n-1}-d_n} = k \neq 0$$

g d e j e $p \leq n$ o d r e d j e n i p r i r o d a n b r o j, o n d a ć e r e d

$$(3.4;29)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}} \right) \qquad \left(D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k\right)$$

k o n v e r g i r a t i i i m a ć e s u m u

$$(3.4;30)\qquad \sigma = \vartheta \left(\frac{d_0^2}{k} - 1 \right) \qquad (0 \leq \vartheta < 1)$$

b/ A k o j e

$$(3.4;31)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{d_n^2\, d_{n-1}}{d_{n-1}-d_n} = 0$$

o n d a ć e r e d

$$(3.4;32)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{D_{n-1}}{D_n} - \frac{d_n}{d_{n-1}} \right|$$

d i v e r g i r a t i.

D o k a z. Dokazaćemo najpre tvrdjenje a/. Prema prvoj pretpostavci $(3.4;27)$ sledi

$$(D_p - d_p)\, d_{p-1} \geq D_p \cdot d_p$$

odnosno

$$(3.4;33)\qquad D_{p-1}\, d_{p-1} \geq D_p \cdot d_p$$

s druge strane, prema drugoj pretpostavci $(3.4;27)$ sledi

$$(3.4;34) \qquad \frac{d_n d_{n-1}}{d_{n-1}-d_n} + d_{n+1} \geqslant \frac{d_{n+1}\cdot d_n}{d_n - d_{n+1}}$$

Ako se pretpostavi

$$(3.4;35) \qquad D_{n-1}\, d_{n-1} \geqslant D_n\, d_n$$

odnosno

$$D_n \geqslant \frac{d_{n-1}\, d_n}{d_{n-1}-d_n}$$

onda mora biti

$$D_{n+1} \geqslant \frac{d_{n-1}\, d_n}{d_{n-1}-d_n} + d_{n+1}$$

Vodeći računa o relaciji (3.4;34) dobija se

$$D_{n+1} \geqslant \frac{d_{n+1}\, d_n}{d_n - d_{n+1}}$$

tj.

$$(3.4;36) \qquad D_n\, d_n \geqslant D_{n+1}\, d_{n+1}$$

Hipotetička relacija (3.4;35) prema drugoj pretpostavci (3.4;27) daje nužno relaciju (3.4;36) ; s druge strane, prema (3.4;33) relaciji (3.4;35) je zadovoljena za $n=p$. Prema principu potpune indukcije, sledi, dakle, d a relacija (3.4;35) odnosno relacija

$$(3.4;37) \qquad \frac{1}{D_{n-1}\, d_{n-1}} \leq \frac{1}{D_n\, d_n}$$

mora biti zadovoljena za svaki prirodan broj $n \geqslant p$

Pošto

$$D_{n-1} < D_n \to \infty\,, \quad \frac{1}{d_{n-1}} < \frac{1}{d_n} \to \infty\,, \quad n\to\infty$$

biće

$$(3.4;38) \qquad \lim_{n\to\infty} D_n d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n - D_{n-1}}{\frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n^2\, d_{n-1}}{d_{n-1}-d_n}$$

prema dobro poznatoj S t o l z-J e n s e n-ovoj teoremi [22, 78]

Jasno je da se može staviti

$$(3.4;39)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n}-\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} D_{n-1}d_n\left(\frac{1}{D_n d_n}-\frac{1}{D_{n-1}d_{n-1}}\right)$$

Pošto je

$$\sup D_{n-1}d_n=\sup\left(D_n d_n-d_n^2\right)=\sup D_n d_n-\inf d_n^2$$
$$=D_0 d_0=d_0^2$$

i vodeći računa o $(3.4;28)$, $(3.4;38)$ i $(3.4;39)$ dobija se neposredno

$$0\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n}-\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)<d_0^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{d_0^2}\right)$$

tj.red $(3.4;29)$ konvergira i ima sumu $(3.4;30)$

Dokažimo sad tvrdjenje b/. Na osnovu $(3.4;31)$ i $(3.4;38)$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} D_n d_n=0$$

pa će zato na osnovu T.3.13 Prim. 3 red

$$(3.4;40)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{D_{n-1}d_{n-1}-D_n d_n}{D_{n-1}d_{n-1}}\right|$$

divergirati

Jasno je

$$(3.4;41)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{D_{n-1}d_{n-1}-D_n d_n}{D_{n-1}d_{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{D_{n-1}}\left|\frac{D_{n-1}}{D_n}-\frac{d_n}{d_{n-1}}\right|$$

i

$$(3.4;42)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{D_{n-1}}=1$$

Pošto red $(3.4;40)$ divergira na osnovu $(3.4;41)$ i $(3.4;42)$ sledi da i red $(3.4;32)$ mora divergirati.

P r i m e d b a 1. Lako se vidi da se red (3.4;29) može napisati u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_{n-1}-d_n}{d_{n-1}}-\frac{d_n}{D_n}\right)$$

Prema (3.4;1) i (3.4;2) biće

$$A_n=\frac{d_{n-1}-d_n}{d_{n-1}}\quad i\quad B_n=\frac{d_n}{D_n}$$

Red

$$(3.4;43)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{n-1}-d_n}{d_{n-1}}$$

je D i n i-ev divergentni red, a red

$$(3.4;44)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n}$$

je A b e l-D i n i-ev divergentan red [cf. T.3.1.4 - Prim. 1]. N a t a j n a č i n T.3.4.3 d a j e d o v o l j n e u s l o v e, d a b i r e d (3.4;29) d o b i j e n o d u z i m a n j e m k o r e s p o n d e n t n i h č l a n o v a D i n i-e v o g d i v e r g e n t n o g r e d a (3.4;43) i A b e l-D i n i-e v o g d i v e r g e n t n o g r e d a (3.4;44) k o n v e r g i r a o, o d n o s n o a p s o l u t n o d i v e r g i r a o.

P r i m e d b a 2. S obzirom na (3.4;37) i (3.4;38) jasno je da μ ne može biti beskrajno.

P r i m e d b a 3. Ako še uslovi (3.4;27) zamene uslovima

$$(3.4;27')\qquad D_p\le\frac{d_{p-1}\,d_p}{d_{p-1}-d_p}\,,\qquad \frac{d_{n-1}\,d_n}{d_{n-1}-d_n}\le\frac{d_{n+1}^2}{d_n-d_{n+1}}$$

dobiće se teorema analogna T.3.4.3. Iz uslova (3.4;27') slediće

$$D_{n-1}\,d_{n-1}\le D_n\,d_n$$

pa na osnovu (3.4;38) lako se vidi da μ ne može biti 0, a ako je μ beskrajno, onda se dokazuje, da će red (3.4;32) divergirati, slično kao i u slučaju T.3.4.3, kad je $\mu=0$.

TEOREMA 3.4.4. Neka su

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n = s'$$

dva konvergentna reda s positivnim članovima

a/ Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c'_n} = k \neq 0 \tag{3.4;45}$$

i

$$\frac{c_{n+\nu}}{c'_{n+\nu}} \leq \frac{c_n}{c'_n} \tag{3.4;46}$$

za sve indekse $n \geq 1$ i za sve indekse $\nu \geq 0$ nezavisno od indeksa n, onda će red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{r_{n-1}} - \frac{c'_n}{r'_{n-1}} \right) \tag{3.4;47}$$

konvergirati i imaće sumu

$$S = \frac{\theta}{m}\left(\frac{s}{s'} - k\right) \qquad (0 \leq \theta < 1) \tag{3.4;48}$$

b/ Ako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c'_n} = 0 \tag{3.4;49}$$

onda će red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_n}{r_n} - \frac{c'_n}{r'_n} \right| \tag{3.4;50}$$

divergirati.

Dokaz. Kako je

$$\frac{c_n}{r_{n-1}} - \frac{c'_n}{r'_{n-1}} = \frac{r'_n}{r'_{n-1}} - \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{r'_n}{r_{n-1}}\left(\frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}} - \frac{r_n}{r'_n} \right)$$

sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{r_{n-1}} - \frac{c'_n}{r'_{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'_n}{r_{n-1}} \left(\frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}} - \frac{r_n}{r'_n} \right) \tag{3.4;51}$$

Iz pretpostavke (3.4;45) na osnovu L.3.2.1 sledi

$$(3.4;52) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r'_n} = k \neq 0$$

pa je zato

$$(3.4;53) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}} - \frac{r_n}{r'_n} \right) = \frac{s}{s'} - k$$

Iz pretpostavke (3.4;46) sledi

$$c'_n \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu} \leq c_n \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' c'_{n+\nu}$$

ili

$$\frac{c'_n}{r'_{n-1}} \leq \frac{c_n}{r_{n-1}} \qquad (n \geq 1)$$

tj.

$$\frac{r'_{n-1} - r'_n}{r'_{n-1}} \leq \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}}$$

odnosno

$$(3.4;54) \qquad \frac{r_n}{r'_n} \leq \frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}} \qquad (n \geq 1)$$

Na osnovu (3.4;52) i (3.4;54) dobija se

$$(3.4;55) \qquad \inf \frac{r_n}{r'_n} = k \qquad i \qquad \sup \frac{r_n}{r'_n} = \frac{s}{s'}$$

Pošto je

$$0 < \frac{r'_n}{r_{n-1}} < \frac{r'_n}{r_n}$$

to s obzirom na (3.4;55) mora biti

$$(3.4;56) \qquad 0 < \frac{r'_n}{r_{n-1}} < \frac{1}{k}$$

Dakle, na osnovu (3.4;51), (3.4;53), (3.4;54) i (3.4;56), sledi neposredno

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{c_n}{r_{n-1}} - \frac{c'_n}{r'_{n-1}} \right) < \frac{1}{h}\left(\frac{s}{s'} - h \right)$$

tj.red (3.4.47) konvergira i ima sumu (3.4.48)

Dokažimo sad tvrdjenje b/. Iz pretpostavke (3.4;49) i na osnovu L.3.2.1 sledi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{r'_n} = 0$$

pa prema T.3.1.3-Prim.3 red

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left| \frac{r_{n-1}/r'_{n-1} - r_n/r'_n}{r_{n-1}/r'_{n-1}} \right|$$

mora divergirati, a kako je

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left| \frac{r_{n-1}/r'_{n-1} - r_n/r'_n}{r_{n-1}/r'_{n-1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{r_{n-1}} \left| \frac{r_{n-1}}{r_n} - \frac{r'_{n-1}}{r'_n} \right|$$

i

$$0 < \frac{r_n}{r_{n-1}} < 1$$

to neposredno sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left| \frac{r_{n-1}}{r_n} - \frac{r'_{n-1}}{r'_n} \right|$$

mora divergirati, tj.red (3.4;50)

P r i m e d b a 1. Ako se pretpostavka (3.4;46) zameni pretpostavkom

$$(3.4;46') \qquad \frac{c_{n+\nu}}{c'_{n+\nu}} \ge \frac{c_n}{c'_n} \qquad (n \ge 1,\ \nu \ge 0)$$

dobija se teorema analogna T.3.4.4 Na isti način kao ~~što~~ što pretpostavka (3.4;46) dovodi do relacije (3.4;54), pretpostavka (3.4;46') dovodi do relacije

$$(3.4;54') \qquad \frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}} \le \frac{r_n}{r'_n}$$

Jasno je da u slučaju pretpostavke $(3.4;46)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ može biti 0, dok u slučaju pretpostavke $(3.4;46')$ ne može biti 0.

P r i m e d b a 2. R e d o v i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{C_{n-1}} \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_n}{C'_{n-1}}$$

s u D i n i-evi d i v e r g e n t n i r e d o v i, p a z a t o i o v d e v a ž i p r i m e d b a a n a l o g n a Prim. 1 u z T. 3.4.1

P r i m e d b a 3. Iz uslova $(3.4;45)$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(n)}{E'(n)} = 1$$

Relacija $(3.4;54)$ koja je posledica uslova $(3.4;46)$, ekvivalentna je relaciji

$$E'(n) \leq E(n)$$

Isto tako relacija $(3.4;54')$ koja je posledica uslova $(3.4;46')$ ekvivalentna je relaciji

$$E'(n) \geq E(n)$$

J a s n o j e, d a k l e, k a k o s e T. 3.4.4 m o ž e g e n e r a l n i j e f o r m u l i s a t i p o m o ć u f u n k c i j a e k s h a u s t i j e $E'(n)$ i $E(n)$.

TEOREMA 3.4.5. N e k a s u

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n$$

d v a d i v e r g e n t n a r e d a s a p o z i t i v n i m č l a n o v i m a

a/ A k o j e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d'_n} = g \tag{3.4;57}$$

i

$$\frac{d_\nu}{d_n} \leq \frac{d'_\nu}{d'_n} \qquad (n \geq 1;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{3.4;58}$$

o n d a ć e r e d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_n}{D_n} - \frac{d'_n}{D'_n} \right) \tag{3.4;59}$$

k o n v e r g i r a t i i i m a ć e s u m u

$$\sigma = \vartheta \frac{d'_1}{d_1}\left(g - \frac{d_1}{d'_1}\right) \qquad (0 \leq \vartheta < 1)$$

b/ A k o j e

$$(3,4;61) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d'_n} = 0$$

o n d a ć e r e d

$$(3.4;62) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{d_n}{D_{n-1}} - \frac{d'_n}{D'_{n-1}} \right|$$

d i v e r g i r a t i.

D o k a z. Pošto je

$$\frac{d_n}{D_n} - \frac{d'_n}{D'_n} = \frac{D_n - D_{n-1}}{D_n} - \frac{D'_n - D'_{n-1}}{D'_n} = \frac{D'_{n-1}}{D'_n} - \frac{D_{n-1}}{D_n}$$

to je

$$(3.4;63) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{d_n}{D_n} - \frac{d'_n}{D'_n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D'_{n-1}}{D_n} \left(\frac{D_n}{D'_n} - \frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}} \right)$$

Na osnovu S t o l z-J e n s e n-ove teoreme [22, 78] iz pretpostavke (3.4;57) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{D'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d'_n} = g \neq 0$$

pa je zato

$$(3.4;64) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{D_n}{D'_n} - \frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}} \right) = g - \frac{d_1}{d'_1}$$

Iz pretpostavke (3.4;58) sledi

$$d'_n \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \leq d_n \sum_{\nu=1}^{n} d'_\nu$$

ili

$$\frac{d'_n}{D'_n} \leq \frac{d_n}{D_n}$$

odnosno

$$\frac{D'_n - D'_{n-1}}{D'_n} \leq \frac{D_n - D_{n-1}}{D_n} \qquad (D_0 = D'_0 = 0)$$

tj.

$$(3.4;65) \qquad \frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}} \leq \frac{D_n}{D'_n} \qquad (n \geq 2)$$

što znači

$$\inf. \frac{D_n}{D'_n} = \frac{d_1}{d'_1} \quad i \quad \sup \frac{D_n}{D'_n} = g$$

Kako je

$$0 < \frac{D'_{n-1}}{D_n} < \frac{D'_n}{D_n}$$

to na osnovu $(3.4;65)$ sledi

$$(3.4;66) \qquad 0 < \frac{D'_{n-1}}{D_n} < \frac{d'_1}{d_1}$$

Dakle, na osnovu $(3.4;63)$, $(3.4;64)$ i $(3.4;66)$ dobija se neposredno

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_n}{D_n} - \frac{d'_n}{D'_n} \right) < \frac{d'_1}{d_1} \left(g - \frac{d_1}{d'_1} \right)$$

tj. red $(3.4;59)$ konvergira i ima sumu $(3.4;60)$

Dokažimo sad tvrdjenje b/. Iz pretpostavke $(3.4;61)$ se dobija

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{D'_n} = 0$$

pa na osnovu T.3.1.3-Prim 3 sledi neposredno da red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}} - \frac{D_n}{D'_n}}{\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}}} \right|$$

divergira.

Pošto je

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}} - \frac{D_n}{D'_n}}{\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D'_{n-1}}{D'_n} \left| \frac{D'_n}{D'_{n-1}} - \frac{D_n}{D_{n-1}} \right|$$

i

$$0 < \frac{D'_{n-1}}{D'_n} < 1$$

to sledi da red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{D'_n}{D'_{n-1}} - \frac{D_n}{D_{n-1}} \right|$$

mora divergirati, a tako isto i red $(3.4;62)$, jer je

$$\frac{D'_n}{D'_{n-1}} - \frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{d_n}{D_{n-1}} - \frac{d'_n}{D'_{n-1}}$$

P r i m e d b a 1. Zameni li se pretpostavka $(3.4;58)$ sa pretpostavkom

$$(3.4;58') \qquad \frac{d_\nu}{d_n} \geqslant \frac{d'_\nu}{d'_n} \qquad (n \geq 1,\ \nu = 1,2,3,\ldots n)$$

dobija se teorema analogna $T.\ 3.4.5$

Jasno je da u slučaju uslova $(3.4;58)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d'_n}$ ne može biti 0, a ako je beskrajna, onda će red $(3.4;62)$ divergirati, jer je tada $\lim_{n\to\infty} \frac{d'_n}{d_n} = 0$

Uslov $(3.4;58)$ dovodi do relacije

$$\frac{d'_n}{D'_n} \leq \frac{d_n}{D_n}$$

odnosno do

$$\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}} \leq \frac{D_n}{D'_n}$$

a uslov $(3.4;58')$ do relacije

$$\frac{d'_n}{D'_n} \geqslant \frac{d_n}{D_n}$$

odnosno do

$$\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}} \geqslant \frac{D_n}{D'_n}$$

pa je stoga jasno kako se $T.3.4.5$ može formulisati pod generalnijom pretpoš stavkom no što je $(3.4;58)$, odnosno $(3.4;58')$

P r i m e d b a 2. R e d o v i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_n}{D'_n}$$

su Abel-Dini-evi divergentni redovi. Isto su to i redovi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{D_{n-1}} \quad i \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d'_n}{D'_{n-1}}$$

Stoga će i ovde važiti primedba analogna Prim. 1 uz T. 3.4.1

Primedba 3. Ako se uzme

$$D_n^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu^{(k-1)} \quad i \quad D_n'^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu'^{(k-1)} \qquad (D_n^{(0)} = d_n;\ D_n'^{(0)} = d'_n)$$

i ako se pretpostavi da postoji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n^{(k-1)}}{D_n'^{(k-1)}}$$

za jedan prirodan broj k, onda sledi da će na osnovu Stolz-Jensen-ove teoreme i relacija (3.4;57) i (3.4;61), a prema principu potpune indukcije, biti zadovoljena relacija

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n^{(k)}}{D_n'^{(k)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n^{(k-1)}}{D_n'^{(k-1)}}$$

za svaki broj $k \in (N)$

Dakle, sad T. 3.4.5 možemo generalizirati:

Neka su

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n$$

dva divergentna reda s pozitivnim članovima

a/ Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d'_n} = g \neq 0$$

i

$$\frac{D_n'^{(k-1)}}{D_n'^{(k)}} \leq \frac{D_n^{(k-1)}}{D_n^{(k)}}$$

za jedan prirodan broj $k=p$, tada će red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_n^{(p-1)}}{D_n^{(p)}}-\frac{D_n^{\prime(p-1)}}{D_n^{\prime(p)}}\right)$$

konvergirati i imaće sumu

$$\sigma^{(p)}=\vartheta_p\,\frac{D_1^{\prime(p-1)}}{D_1^{(p-1)}}\left(g-\frac{D_1^{(p-1)}}{D_1^{\prime(p-1)}}\right)\qquad (0\leq\vartheta_p<1)$$

b/ Ako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_n'}=0$$

onda će red

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{D_n^{\prime(k-1)}}{D_{n-1}^{(k)}}-\frac{D_n^{\prime(k-1)}}{D_{n-1}^{\prime(k)}}\right|$$

divergirati za svaki broj $k\in(N)$

Formulacija generalisane teoreme će biti analogna za slučaj kada je

$$\frac{D_n^{\prime(k-1)}}{D_n^{\prime(k)}}\geqslant\frac{D_n^{(k-1)}}{D_n^{(k)}}$$

TEOREMA 3.4.6. Neka su

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=s\quad i\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n'=s'$$

dva konvergentna reda s pozitivnim članovima.

Ako je

$$(3.4;67)\qquad 0<g\leq\frac{c_{n+2}'}{c_{n+2}}\leq\frac{c_{n+1}'}{c_{n+1}}\qquad (n\geqslant 0)$$

onda će red

$$(3.4;68)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}r_\nu}-\frac{r_n'}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}r_\nu'}\right)\qquad \left(r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k\,;\ r_n'=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k'\right)$$

konvergirati.

D o k a z. Iz uslova (3.4;67) neposredno sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c'_n}{c_n} = k \neq 0$$

i na osnovu L.3.2.1

$$(3.4;69) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r'_n}{r_n} = k \neq 0$$

pa zato oba reda

$$(3.4;70) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r_n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} r'_n$$

moraju konvergirati, ili divergirati.

Ako redovi (3.4;70) konvergiraju, onda neposredno sledi da i red (3.4;68) konvergira.

Pokazaćemo sad da red (3.4;68) konvergira i u slučaju kad redovi (3.4;70) divergiraju. Iz (3.4;67) sledi nejednakost

$$\frac{c'_{n+\nu+1}}{c_{n+\nu+1}} \leq \frac{c'_{n+1}}{c_{n+1}}$$

za svaki indeks $n \geq 0$ i za svaki indeks $\nu \geq 0$, nezavisno od n, odnosno sledi nejednakost

$$c_{n+1} \cdot c'_{n+\nu+1} \leq c'_{n+1} \cdot c_{n+\nu+1}$$

ili

$$c_{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c'_{n+\nu+1} \leq c'_{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \qquad (n \geq 0)$$

i dalje

$$(r_n - r_{n+1})\, r'_n \leq (r'_n - r'_{n+1})\, r_n \qquad (n \geq 0)$$

tj.

$$\frac{r_n}{r'_n} \leq \frac{r_{n+1}}{r'_{n+1}}$$

pa je stoga

$$(3.4;71) \qquad \frac{r_\nu}{r_n} \leq \frac{r'_\nu}{r'_n} \qquad (n \geq 0;\ \nu = 1,2,3,\ldots,n)$$

Dakle, na osnovu (3.4;69) i (3.4;71) i T.3.4.5 neposredno sledi da red (3.4;68) konvergira i u slučaju kad redovi (3.4;70) divergiraju.

Primedba 1. Analogna se teorema može formulisati, ako se u mesto uslova (3.4;67) uzme uslov

$$(3.4;67') \qquad \frac{c'_{n+1}}{c_{n+1}} \leq \frac{c'_{n+2}}{c_{n+2}} \leq G < +\infty \qquad (n \geq 0)$$

Primedba 2. Važi primedba koja je potpuno analogna Prim. 3 uz T. 3.4.4

Primedba 3. Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c'_n} = 0$$

onda je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r'_n}{r_n} = 0$$

pa oba reda (3.4;70) a/ ili konvergiraju; b/ ili samo jedan konvergira, a drugi divergira; c/ ili oba divergiraju.

U slučaju a/ sledi neposredno da red (3.4;68) konvergira; u slučaju b/ sledi, s obzirom na Abel-Dini-evu teoremu [cf. T. 3.1.4 - Prim. 1] da red (3.4;68) divergira, a u slučaju c/ na osnovu T. 3.4.5 sledi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r_n}{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu} - \frac{r'_n}{\sum_{\nu=1}^{n} r'_\nu} \right|$$

divergira.

B I B L I O G R A F I J A

/1/ F.Enriques, Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna X, Bologna, 1932.

/2/ F.Peyrard, Oeuvres d'Archimede, T.I, Paris, 1844.

/3/ F.Enriques, Ibid., V.

/4/ Dj.Kupera, O principima indukcije, Zbornik radova matematičkog instituta, br.1, SAN, Beograd, 1951.

/5/ P.Tannery, Pour l'histoire de la science hellene, Paris, 1930.

/6/ H.G.Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen, 1896.

/7/ H.Hasse und H.Scholz, Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik, Charlottenburg 2, 1928.

/8/ L.Brunschvicg, Les étapes de la philosphie mathématique, Paris, 1929.

/9/ F.Enriques, a/ La relatività del movimento nell'antica Grecia, Periodico di matematiche, Vol.I, N° 2, Bologna, 1921
b/ La problemica eleatica per il concetto razionale della geometria, Ibid, Vol.III, N° 2, Bologna, 1923
c/ Gli elementi d'Euclide, V, Bologna, 1930
d/ Ibid, X, Bologna, 1932
e/ L'évolution des idées géomètriques dans la pensée grecque, Paris, 1927

/10/ S.Luria, Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik, Bd.2, Heft 2, Berlin, 1932.

/11/ R.Mandolfo, L'infinito nel pensiero dei Greci, Firence, 1934.

/12/ E.Stipanić, O jednom matematičkom aspektu Zenonove aporije Ahil, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije VII, 3-4, Beograd, 1955.

/13/ E.Stipanić, Un teorema sulle serie convergenti a termini di segno alternato, Boll.Un.Mat.Ital.Serie III, Num.2, Bologna, 1956.

/14/ E.Stipanić, Due teoremi sulle serie a termini positivi Boll.Un.Mat. Ital., Serie III, Num.1, Bologna, 1957.

/15/ F.Peyrard, Ibid., T.II, Paris, 1844.

/16/ T.L.Heath, The thirteen books of Euclid's Elements, Vol.III, Cambridge, 1908.

/17/ B.Petronijević, Istoriske i kritičke primedbe na prva dva Zenonova dokaza protiv kretanja, SAN, Glas CLXXIV, Beograd, 1941

/18/ Fr.Evellin, Infini et Quantité, Paris, 1881.

/19/ G.Frontera, Étude sur les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement, Paris, 1891.

/20/ П.С. Кудрявцев, История физики, Т.1., Москва 1949

/21/ A.Bernhart, Curves of pursuit, Scripta Mathematica, Vol.XX, Nos 3-4, New York, 1954

/22/ K.Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin, 1931

/23/ Ž. Marković, Kako matematika stvara svoje teorije, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Serija, II, T.1, N°2, Zagreb, 1946.

/24/ Ž. Marković, a/ Matematika u Platona i Aristotela, Rad, knj.261, Zagreb, 1938
b/ Platonova nauka o mjerenju, Rad, knj.267, Zagreb, 1940

/25/ F. Peyrard, Ibid., T.II, Paris, 1844

/26/ С.Я. Лурье, Архимед, Академии Наук СССР, Москва, 1945

/27/ A.Cauchy, Oeuvres, Cours d'analyse algebrique, Serie II, T.III, Paris, 1897

/28/ A.Pringsheim, a/ Über die Convergenz unendlichen Producte, Math. Ann. Bd.XXXIII, Leipzig, 1889
b/ Vorlesungen über Zahlen und Funktionenlehre, I_3, Leipzig, 1921

/29/ Д.Д. Болтовски, Начала Евклида, к. VII-IX, Москва-Ленинград 1949

/30/ C. Thaer, Die Elemente von Euklid, T.IV, Leipzig, 1936

/31/ A. Bilimović, Euklidovi elementi, knj.I, SAN, Beograd, 1956

/32/ M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd.I, Leipzig-Berlin, 1922

/33/ U. Dini, Sulle serie a termini positivi, Ann.Univ.Toscana, Fasc. 9, 1867