PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U PRIŠTINI

Mr Isak M. Hoxha

NEKE KLASE DIFERENCNIH I INTEGRO-DIFERENCNIH JEDNAČINA SA OSCILIRAJUĆIM KOEFICIJENTIMA

Doktorska disertacija

Priština, 1989

Ova disertacija je data na ocenu Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Prištini u cilju sticanja naučnog stepena doktora prirodnih nauka iz oblasti MATEMATIKE.

Ova disertacija je data na ocenu Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Kosova u Prištini u cilju sticanja naučnog stepena doktora prirodnih nauka iz oblasti MATEMATIKA.

va disertacija je data na ocenu Prirodno-matematičkom fakul-
iverziteta Kosova u Prištini u cilju sticanja naučnog ste-
tora prirodnih nauka iz oblasti MATEMATIKA.

Disertacija je pripremljena na Katedri za teoriju funkcija i funkcionalnu analizu Mehaničko-matematičkog fakulteta Moskovskog državnog univerziteta Lomonosov u Moskvi.

Osećam obavezu da na ovom mestu izrazim svoju duboku zahvalnost prof.dr Anatolju G.Kostjučenku, koji mi je predložio ovu temu i svojim sugestijama i primedbama doprineo da ovaj rad uspešno privedem kraju. Takođe zahvaljujem učesnicima seminara TEORIJA LINEARNIH OPERATORA i NEAUTOADJUNGOVANI OPERATORI na Katedri za teoriju funkcija i funkcionalnu analizu Mehaničko-matematičkog fakulteta MGU Lomonosov školske 1983/84. godine.

Takođe, zahvaljujem se prof.dr Fikretu Vajzoviću, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevo, koji mi je ukazao na mogućnost dobijanja još nekih novih rezultata.

Rad ima 119 stranica

S a d r ž a j

P r e d g o v o r

U Banachovom odnosno Hilbertovom prostoru razmatra se apstraktna eliptička jednačina drugog reda s linearnim neograničenim konstantnim operatorima.

Rad se sastoji iz uvodnog dela i tri glave. Svaka od njih sadrži po nekoliko tačaka.

U uvodnom delu dati su osnovni pojmovi o prostorima Soboljeva i teoreme umetanja, koji se koriste u toku rada.

U prvoj glavi razmatra se nepotpuna eliptička jednačina drugog reda i konturni problemi. Prvo se razmatra homogena, a zatim nehomogena jednačina.

U drugoj glavi razmatra se potpuna eliptička jednačina drugog reda i polugrupa linearnih operatora. Glava se sastoji iz dva paragrafa. U prvom paragrafu se rešava postavljeni problem, dok se u drugom razmatra odgovarajuća polugrupa linearnih operatora. Glava se završava opštim zaključkom, da je odgovarajuća polugrupa operatora polugrupa kontrakcije.

U poslednjoj glavi se razmatra Phragmen-Lindelöfova teorema u harmoniskoj analizi i njena primena u teoriji eliptičkih jednačina. I ova glava se sastoji iz dva paragrafa. U prvom se dokazuje Phragmen-Lindelöfova teorema, a u drugom paragrafu se govori o unutrašnjoj kompaktnosti skupa rešenja i primena Phragmen-Lindelöfove teoreme u tom slučaju. Rad se završava sa spektralnom sintezom operatora translacije.

U V O D

P r o s t o r i S o b o l j e v a i t e o r e m e u m e t a n j a

Prostori Soboljeva predstavljaju prirodni aparat funkcionalne analize za proučavanje eliptičkih jednačina, tj.jednačina Laplaceovog i Poissonovog tipa, Stacionarne Schredingerove jednačine itd. Sada ćemo dati osnovne pojmove o prostorima Soboljeva i teoreme umetanja.

1. Prostori Soboljeva

Neka je G neka oblast u R^n, $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$, $dx = dx_1 \dots dx_n$. Označimo sa $L_2(G)$ prostor funkcija u, kvadratno zbirljivih u G, tj. merljivih funkcija, za koje je

(1) $$\|u\|_{L_2(G)} = \left\{ \int_G |u|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty,$$

često ćemo pisati

(2) $$L_2(G) = W^o(G).$$

$L_2(G)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u,v)_{L_2(G)} = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx.$$

<u>Definicija 1.</u> Neka je G otvoren skup u R^n i f data funkcija u G, koja je integrabilna (po Lebesgue) u svakom kompaktnom podskupu od G. Tada se relacija

$$F(\varphi) = \int_G \varphi(x)f(x)dx, \qquad \varphi \in C_0^\infty(G)$$

[illegible]

<u>Definicija 2.</u> Neka je $s \in Z^+$, tj. $s \geqslant 0$, s celi broj. <u>Prostor Soboljeva</u> $W^s(G)$ reda s u oblasti G se definiše na sledeći način

(3) $$W^s(G) = \left\{ u : D^\alpha u \in L_2(G), \forall \alpha, |\alpha| \leq s \right\},$$

gde je

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Napomenimo, da izvod $D^\alpha u$ u (3), definišemo kao distribuciju u oblasti G.

Neka je

(4) $$\mathcal{D}(G) = \left\{ \varphi : \varphi \text{ beskonačno dif.funkcija s kompaktnim nosačem u } G \right\}.$$

Ako je K kompakt, koji leži u G, onda je

$$\mathcal{D}_K(G) = \left\{ \varphi : \varphi \in \mathcal{D}(G), \ \varphi \text{ s nosačem u } K \right\}.$$

Prostor $\mathcal{D}_K(G)$, snabdeven sistemom normi

$$p_j(\varphi) = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq j}} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad j = 0, 1, \ldots$$

je Fréchetov prostor, tj. kompletan metrizabilan prostor.

Definišemo sada

(5) $$\begin{cases} \mathcal{D}'(G) = \text{dualni prostor od } \mathcal{D}(G) \\ \qquad\quad = \text{prostor distribucija na } G, \end{cases}$$

pri čemu je $\mathcal{D}'(G)$ snabdeven jakom dualnom topologijom.

Ako je $T \in \mathcal{D}'(G)$, i $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, onda ćemo vrednosti T funkcije φ označavati sa

$$\langle T, \varphi \rangle.$$

Ako je $\bar{\varphi}$ konjugovano kompleksno sa φ, onda je

$$\langle T, \bar{\varphi} \rangle = (T, \varphi).$$

Za $T \in L_2(G)$ vrednost (T, φ) poklapa se sa $(T, \varphi)_{L_2(G)}$.

Za $T \in \mathcal{D}'(G)$ izvod $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ je definisana jednalošću

(6) $$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \text{za } \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$$

koja definiše neprekidno linearno preslikavanje

$$T \longmapsto \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

iz $\mathcal{D}'(G)$ u $\mathcal{D}'(G)$.

Iteracijom se, prirodno, definiše $D^{\alpha}T$.

Sada se može rastumačiti relacija (3), uzev u obzir, da je

(7) $$\mathcal{D}(G) \subset L_2(G) \subset \mathcal{D}'(G),$$

i da se svaki elemenat u iz $L_2(G)$ preslikava distribucijom

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle .$$

Skalarni proizvod u $W_2^s(G)$ se može uvesti na jedan od sledeća dva ekvivalentna načina:

(8) $$(u,v)_{W_2^s(G)} = \sum_{|\alpha| \leq s} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L_2(G)} = \sum_{|\alpha|=s} \int_G (D^{\alpha}u)(x)\overline{(D^{\alpha}v)(x)}dx;$$

(9) $$(u,v)_{W_2^s(G)} = (u,v)_{L_2(G)} + \sum_{|\alpha| \leq s} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L_2(G)}$$
$$= \int_G u(x)\overline{v(x)}dx + \sum_{|\alpha| \leq s} \int_G (D^{\alpha}u)(x)\overline{(D^{\alpha}v)(x)}dx.$$

Odgovarajuće *norme date su formulama:*

(10) $$\|u\|_s = (u,u)_s^{1/2} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq s} \int_G |(D^{\alpha}u)(x)|^2 dx \right\}^{1/2};$$

(11) $$\|u\|^s_{W_p^s(G)} = \left\{ \|u\|^p_{L_p(G)} + \sum_{|\alpha|=s} \|D^{\alpha}u\|^p_{L_p(G)} \right\}^{1/p}, \quad s=0,1,\ldots; p \geq 1.$$

Očigledno, da je

$$W_2^s(G) \subset W_2^{s'}(G) \subset L_2(G) = W^0(G), \quad \text{za} \quad s \geq s' > 0.$$

Lema 1. Skalarni proizvod $(\cdot,\cdot)_s$ u $W^s(G)$ definiše strukturu separabilnog *Hilbertovog prostora.*

Dokaz. K o m p l e t n o s t. Neka je $\{u_k\}_1^{\infty}$ Cauchyev niz u $W^s(G)$. To znači, da su svi nizovi $\{D^{\alpha}u_k\}_1^{\infty}$, za $|\alpha| \leq s$, Cauchyevi u $L_2(G)$. Oni su zbog kompletnosti prostora $L_2(G)$ konvergentni,

$$\lim_k D^\alpha u_k = v_\alpha$$

po normi prostora $L_2(G)$. Posebno, ako je

$$u_k \longrightarrow v_o \quad \text{u} \quad L_2(G),$$

onda je

$$D^\alpha u_k \longrightarrow D^\alpha v_o \quad \text{u} \quad \mathcal{D}'(G),$$

odakle, $v_\alpha = D^\alpha v_o$, odnosno, $v_o \in W^s(G)$ i $D^\alpha u_k \longrightarrow D^\alpha v_o$ u $L_2(G)$, za $|\alpha| \leq s$, a ovo znači da

$$u_k \longrightarrow v_o \quad \text{u} \quad W^s(G).$$

S e p a r a b i l n o s t. Preslikavanje $u \longmapsto \{D^\alpha u\}_{|\alpha| \leq s}$ definiše izometričko umetanje $W^s(G)$ u direktnu sumu nekoliko eksemplara prostora $L_2(G)$. Tada separabilnost $W^s(G)$ sledi iz separabilnosti $L_2(G)$.

2. Slučaj celog prostora

U slučaju kada je $G = R^n$, možemo dati drugu definiciju prostora $W^s(R^n)$, pomoću Fourierove transformacije, koja je ekvivalentna sa (3). Ako je funkcija $u \in L_2(R^n)$, onda je njena Fourierova transformacija $\hat{u}$:

$$\hat{u}(y) = (2\bar{u})^{-n/2} \int_{R^n} e^{-ixy} u(x)dx; \; xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

i ona pripada $L_2(R^n)$, pri čemu integral konvergira u smislu L_2. Osim toga, na osnovu teoreme Plancherela, preslikavanje

$$u \longmapsto \hat{u}$$

je izomorfizam od $L_2(R^n)$ na $L_2(R^n)$. Ako stavimo, $\hat{u} = Fu$, onda dobijamo

$$u = F^{-1}\hat{u} = (2\bar{u})^{-n/2} \int_{R^n} e^{ixy} \hat{u}(y)dy.$$

Fourierova transformacija se može po neprekidnosti proširiti na S' prostore sporo rastućih distribucija L.Schwartza, koje ćemo sada definisati.

Pre svega, stavimo

$$S = \left\{ u : x^{\alpha} D^{\beta} u \in L_2(R^n), \forall \alpha \quad i \forall \beta \right\}$$

gde je $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot \cdot \cdot x_n^{\alpha_m}$.

Prostor S, snabdeven polunormom

$$x \longmapsto \| x^{\alpha} D^{\beta} u \|_{L_2(R^n)}$$

je Fréchetov prostor. Svaka funkcija $u \in S$ je beskonačno diferencijabilna u R^n (tačnije, skoro svuda se poklapa sa takvom funkcijom) i brzo opada u beskonačnosti:

$$(\forall \alpha)(\forall \beta) \qquad |x^{\alpha}| \, D^{\beta} u(x) \longrightarrow 0, \quad \text{za } |x| \longrightarrow \infty$$

(ova osobina je ekvivalentna gore navedenoj definiciji).

Uočimo, da je

$$(12) \qquad \begin{cases} F(D^{\alpha} u) = (iy)^{\alpha} Fu, & \text{za } \forall u \in S, \forall \alpha \\ D^{\beta} F(u) = F((-ix)^{\beta} u), & \text{za} \forall \ u \in S, \forall \beta \end{cases}$$

jer je $F \in L(S,S)$.

Slično,

$$F^{-1} \in L(S,S) \quad i \quad FF^{-1}u = F^{-1}Fu = u, \quad \text{za} \quad \forall u \in S.$$

Dakle, F je izomorfizam iz S na S, pri čemu je F^{-1} inverzno preslikavanje od F. Zbog simetričnosti jezgra $(2\pi)^{-n/2} e^{-ixy}$, preslikavanja F je :

$$\int_{R^n} (Fu) v dx = \int_{R^n} u(Fv) dx, \qquad \text{za } \forall u,v \in S.$$

Stavimo dalje

S' = dualan prostor od S, snabdeven jakom dualnom topologijom,

i pomoću adjungovanja definišemo F i F^{-1} kao preslikavanja iz S' u S':

$$F, F^{-1} \in L_2(S', S').$$

Tako za svako $u \in S'$ dobijamo

$$\langle Fu, \varphi \rangle = \langle u, F\varphi \rangle, \quad \text{za} \forall \varphi \in S,$$

gde zagrade $\langle \, , \rangle$ označavaju odnos dualnosti prostora

Formule (12), takođe, važe za svako $u \in S'$.

Lema 2. Prostor $W^s(R^n)$ sastoji se iz onih i samo onih u iz $S'(R^n)$, za koje je

$$(1+|y|^2)^{s/2}\, \hat{u}(y) \in L_2(R^n),$$

u kojem je norma data formulom:

$$\|\!|u|\!\|_{W^s(R^n)} = \|(1+|y|^2\, \hat{u}(y)\|_{L_2(R^n)}\ , \tag{13}$$

koja je ekvivalentna normi (10).

Dokaz. Na osnovu (12) i teoreme Plancherela, imamo

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(R^n)} = \|y^\alpha \hat{u}\|_{L_2(R^n)}\ ,$$

dok (10), za $G = R^n$, daje

$$\|u\|^2_{W^s(R^n)} = \int_G \Big(\sum_{|\alpha|\leq s} y^{2\alpha}\Big) |\hat{u}(y)|^2 dy \tag{14}$$

Isto tako za odgovarajuću konstantu $M > 0$ važi nejednakost

$$(1+|y|^2)^s \leq \sum_{|\alpha|\leq s} y^{2\alpha} \leq M(1+|y|^2)^s,$$

iz koje, koristeći (13) i (14), dobijamo

$$\|\!|u|\!\|_{W^s(R^n)} \leq \|u\|_{W^s(R^n)} \leq M^{1/2}\, \|\!|u|\!\|_{W^s(R^n)}\ .$$

Primedba 1. Prostor $\mathcal{D}(R^n)$ je gust u $W^s(R^n)$, isto tako u opštem slučaju $\mathcal{D}(G)$ nije gust u $W^s(G)$.

Ova lema može poslužiti kao osnova za definiciju prostora $W^s(R^n)$, za makoje realno s.

Definicija 3. Prostor $W^s(R^n)$, za svako $s \in R$, sastoji se iz takvih $u \in S'(R^n)$, za koje je

$$(1+|y|^2)^{s/2}\, \hat{u}(y) \in L_2(R^n).$$

Lako se proverava da, ako je $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ i $u \in W^s(R^n)$, onda je i $\varphi u \in W^s(R^n)$. Prema tome, može se uvesti sledeća

Definicija 4. Neka je G oblast u R^n, $s \in R$. Prostor $W^s_{loc}(G)$ se sastoji iz takvih distribucija $u \in \mathcal{D}'(G)$, za koje je $\varphi u \in W^s(R^n)$, za svako $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Neka je Q n-dimenzionalna glatka mnogostrukost. Prostor $W^s_{loc}(Q)$ sastoji se iz onih distribucija u na Q takvih da ako je G koordinatna okolina na Q, onda je u $W^s_{loc}(G)$ u odnosu na lokalne koordinate na G. Ako je Q kompaktan, onda umesto $W^s_{loc}(Q)$ pišemo $W^s(Q)$ (u tom slučaju $u \in W^s(Q)$ može se uvesti struktura Hilbertovog prostora pomoću dekompozicije jedinice i skalarnog proizvoda u $W^s(G)$ za koordinatne okoline G, koje obrazuju konačni pokrivač.

Za celi broj $s \geqslant 0$, prostor $W^s_{loc}(Q)$ se može definisati na sledeći način:

$u \in W^s(Q)$ ako i samo ako je $Lu \in L_{2,loc}(Q)$ za svaki diferencijalni operator L na Q reda $\leqslant s$ sa glatkim koeficijentima.

Uvedemo sada na R^n Banachov prostor $C^k_b(R^n)$ (ovde je $k \in Z^+$) koji se sastoji iz funkcija $u \in C^k(R^n)$, čiji izvodi $D^\alpha u(x), |\alpha| \leq k$, ograničeni za svako $x \in R^n$. Norma u $C^k_b(R^n)$ se daje formulom

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha|<k} \sup |D^\alpha u(x)| .$$

3. Slučaj poluprostora

Sada ćemo dati drugu, ekvivalentnu definiciju za $W^s(G)$ u slučaju kada je G poluprostor $\{x : x_n > 0\}$.

Neka je X Hilbertov prostor. Označimo sa $L_2(a,b;X)$ prostor funkcija f s vrednostima u X, merljivih u jakom smislu na $[a,b]$ (Lebesguevom merom dt na segmentu $[a,b]$) i takvih da je

$$\left\{ \int_a^b \|f(t)\|^2_X \, dt \right\}^{1/2} = \|f\|_{L_2(a,b;X)} < +\infty . \tag{15}$$

Sa $\|\cdot\|_X$ označavamo Hilbertovu normu u prostoru X.

Prostor $L_2(a,b;X)$ s normom (15) je Hilbertov prostor.

U opštem slučaju za makoja dva topološka vektorska prostora Y i Z koristimo oznaku

(16) $L(Y,Z)$ = prostor linearno neprekidnih preslikavanja iz Y u Z (pri tome se u svakom konkretnom slučaju na tom prostoru definiše odgovarajuća topologija).

Definicija 5. Prostor distribucija na (a,b) sa vrednostima u X, u oznaci $\mathcal{D}'((a,b);X)$, zove prostor:

(17) $$\mathcal{D}'((a,b);X) = L(\mathcal{D}((a,b);X)$$

koji je snabdeven topologijom uniformne konvergencije na ograničenim skupovima iz $\mathcal{D}((a,b))$.

I tako, ako je $f \in \mathcal{D}'((a,b);X)$, onda je $\forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b))$, $\langle f, \varphi \rangle$ (vrednost f na φ) je element iz X, a

$$\varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle$$

je neprekidno preslikavanje iz $\mathcal{D}((a,b))$ u X.

Izvod $\frac{df}{dt}$ od $f \in \mathcal{D}'((a,b);X)$ se definiše kao jedinstveni elemenat tog prostora, koji zadovoljava uslov

(18) $$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle , \quad \text{za} \forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b))$$

(ova jednakost važi i u prostoru X).

Preslikavanje $f \longmapsto \frac{df}{dt}$ je neprekidna u $\mathcal{D}'((a,b);X)$.

Primedba 2. Podrazumeva se da je u gornjim definicijama distribucija sa vrednostima u prostoru X, dok činjenica da je X Hilbertov prostor nije od nikakvog značaja.

Ako f pripada prostoru $L_2(a,b;X)$, onda se pomoću jednakosti

(19) $$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad (\in X), \text{ za svako } \varphi \in \mathcal{D}((a,b))$$

može definisati elemenat $\tilde{f} \in \mathcal{D}'((a,b);X)$; drugim rečima, imamo (linearno neprekidno) preslikavanje

$$f \longmapsto \tilde{f}, \quad L_2(a,b;X) \longrightarrow \mathcal{D}'((a,b);X).$$

Ovo preslikavanje je injektivno, jer se f i $\tilde{f}$ mogu izjednačiti.

odakle sledi da je

(20) $$L_2(a,b;X) \subset \mathcal{D}'((a,b);X).$$

Dakle, važi

Lema 3. Neka je $f \in L_2(a,b;X)$, tada $\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \ldots$, mogu se definisati kao distribucije na (a,b) s vrednostima u X.

Primedba 3. Stavimo

$$W^s(a,b;X) = \left\{ f : f, f^{(1)} = \frac{df}{dt}, \ldots, f^{(s)} = \frac{d^s f}{dt^s} \in L_2(a,b;X) \right\}.$$

Prostor $W^s(a,b;X)$ snabdeven skalarnim proizvodom

$$\sum_{j=0}^{s} \int_a^b (f^{(j)}(t), g^{(j)}(t))_X \, dt$$

je Hilbertov prostor.

Sada se može dokazati sledeća lema.

Lema 4. Ako je $G = \{x : x_n > 0\}$, onda prostor $W^s(G)$ se može definisati ili pomoću (3), ili na sledeći način:

(21) $$W^s(G) = \left\{ u : u \in L_2(0,\infty;W^s(R_x^{n-1})), \ldots, \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \in L_2(0,\infty;W^{s-j}(R_x^{n-1})), \ldots, \frac{\partial^s u}{\partial x_n^s} \in L_2(0,\infty;W^0(R_x^{n-1})) \right\}$$

pri čemu je

$$\|u\|^2_{W^s(G)} = \sum_{j=0}^{s} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \right\|^2_{L_2(0,\infty;W^{s-j}(R_x^{n-1}))}, \text{ gde } x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

Dokaz. Ako je u $L_2(0,\infty;W^s(R_x^{n-1}))$, onda se $\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}$ definiše u smislu prostora $\mathcal{D}'((0,\infty;W^s(R_x^{n-1}))$, tako da ima smisla uslov

$$\ll \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \in L_2(0,\infty;W^{s-j}(R_x^{n-1})) \gg .$$

Neka je $u \in L_2(0,\infty;W^0(R_x^{n-1}))$, tada je, zbog $D_{x'}^{\alpha}$, za svako α, $|\alpha| \leq s$, neprekidno linearno preslikavanje iz $W^s(R_x^{n-1})$ u $W^0(R_x^{n-1})$,

(22) $$D_{x'}^{\alpha} u \in L_2(0,\infty;W^0(R_x^{n-1})), \quad \text{za } \forall \alpha, \ |\alpha| \leq s,$$

a na osnovu Fubinijeve teoreme je

(23) $$L_2(0,\infty;W^0(R_x^{n-1})) = L_2(G)$$

odnosno

(24) $$D_x^{\alpha} u \in L_2(G), \quad \text{za } \forall\alpha\ ,\ |\alpha| \leq s.$$

Obrnuto, ako u zadovoljava (24), onda u zadovoljava i (22) i sledi, da za skoro sve x_n funkcija $u(\cdot,x_n)$ pripada $W^s(R_x^{n-1})$, pri čemu je

$$\int_0^{\infty} \|u(\cdot,x_n)\|^2_{W^s(R_x^{n-1})} dx = \sum_{|\alpha|\leq s} \int_G |(D_x^{\alpha} u)|^2 dx < \infty .$$

Dakle, u pripada $L_2(0,\infty;W^s(R_x^{n-1}))$, jer je u merljiva funkcija na $(0,\infty)$ sa vrednostima u $W^s(R_x^{n-1})$.

Ovim smo pokazali da je pripadnost funkcije u prostoru $L_2(0,\infty;W^s(R_x^{n-1}))$ ekvivalentna sa relacijom (24).

Prema tome,

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \in L_2(0,\infty;W^{s-j}(R_x^{n-1}))\ \forall j \iff D_x^{\alpha} \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \in L_2(G)\ ;$$

$$\forall|\alpha| \leq s-j, \forall j \iff D^{\alpha} u \in L_2(G),\ \forall |\alpha| \leq s.$$

4. Teoreme umetanja

Teorema 1. Za $s > \frac{n}{2} + k$, važi umetanje

(25) $$W^s(R^n) \subset C_b^k(R^n),$$

pri čemu je operator umetanja neprekidan.

Pojasnimo formulaciju teoreme. Na prvi pogled izgleda da je ona besmislena, jer se funkcija $u \in W^s(R^n)$ može proizvoljno menjati na svakom skupu mere 0, a da se ne menja odgovarajuća distribucija funkcije (i elementi prostora $W^s(R^n)$). Ako se izmeni funkcija u u svim tačkama s racionalnim koordinatama, dobićemo da je ona neprekidna svuda. Zbog toga se za umetanje (25) može dati preciznija formulacija :

Ako je $u \in W^s(R^n)$, onda postoji jedinstvena funkcija $u_1 \in C_b^k(R^n)$, koja se poklapa s početnom funkcijom skoro svuda (gde se zbog kratkoće umesto u_1 piše se u).

Primetimo, da je jedinstvenost predstavljanja neprekidnosti očigledna, jer u svakoj okolini tačke $x_0 \in R^n$ postoji tačka makojeg skupa kompletne mere, tako da se izmena neprekidne funkcije na skupu mere 0 svodi na funkciju, koja je prekidna u svakom slučaju u svim tačkama, u kojima vršena izmena.

<u>Dokaz</u> teoreme. Prvo pokažemo, da važi procena

(26) $$\|u\|_k \leq M \|u\|_s \ , \quad u \in S(R^n)$$

gde konstanta M ne zavisi od u. Koristeći Fourierovu transformaciju imamo

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} (iy)^\alpha e^{ixy} \hat{u}(y)dy$$

odatle

$$|D^\alpha u(x)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} |y^\alpha \hat{u}(y)| \, dy$$

kao i

$$\|u\|_k \leq M \int_{R^n} (1+|y|^2)^{k/2} |\hat{u}(y)| \, dy.$$

Podelimo i pomnožimo podintegralni izraz sa $(1+|y|^2)^{s/2}$, i iskoristimo nejednakost Cauchy-Buniakowsky, pa ćemo dobiti

$$\|u\|_k \leq M \int_{R^n} (1+|y|^2)^{(k-s)/2} (1+|y|^2)^{s/2} |\hat{u}(y)| \, dy$$
$$\leq M \left\{ \int_{R^n} (1+|y|^2)^{(k-s)} dy \right\}^{1/2} \left\{ \int_{R^n} (1+|y|^2)^{s/2} \, |\hat{u}(y)|^2 dy \right\}^{1/2}$$

Integral prvog faktora konvergira, jer je $2(k-s) < -n$, i zato, podintegralna funkcija opada brže nego $|y|^{-n-\varepsilon}$, za $|y| \to +\infty$, i dovoljno malo $\varepsilon > 0$. Drugi faktor jednak je $\|u\|_s$, pa se, za $s > \frac{k}{2} + n$ dobija (26).

Primetimo, da je $S(R^n)$ gust u $W^s(R^n)$, za svako $s \in R$. Uvedimo operator T_s, množeći Fourierovu transformaciju $\hat{u}(y)$ sa $(1+|y|^2)^{s/2}$. Ovaj operator izomorfno i izometrično preslikava $W^s(R^n)$ na $L_2(R^n)$, prevodeći $S(R^n)$ izomorfno na $S(R^n)$. Zbog toga, gustoća $S(R^n)$ u $W^s(R^n)$, sledi iz gustoće $S(R^n)$ u $L_2(R^n)$.

Neka je, sada, $v \in W^s(R^n)$, $u_m \in S(R^n)$

$$u_m \to v \qquad \text{u } W^s(R^n).$$

Iz nejednakosti (26) sledi, da

$$u_m \to v_1 \qquad \text{u } C_b^k(R^n),$$

ali tada se v i v_1 poklapaju kao distribucije, i sledi da se poklapaju skoro svuda. Nejednakost (26) po neprekidnosti važi za svako $u \in W^s(R^n)$, čime se dokazuje neprekidnost umetanja (25).

<u>Posledica 1.</u> Ako je G oblast u R^n i $s > \frac{k}{2} + n$, onda je

$$W^s_{loc}(G) \subset C^k(G).$$

Određenije, teorema 1, kaže, da za funkcije $u \in W^s(R^n)$, za $s > \frac{n}{2}$, ima smisla govoriti i o njihovim vrednostima u tačkı. Takođe je interesantno pitanje : Kada ima smisla ograničenje na podmnogostrukosti proizvoljne dimenzije. Odgovor nam u opštem slučaju nije potreban, pa ćemo razmotriti samo najvažniji slučaj mnogostrukosti kodimenzije 1. Zbog jednostavnosti razmatramo slučaj hiperravni $x_n = 0$ u R^n. Označimo tačku $x \in R^n$ ovako $x = (x', x_n)$, gde $x' \in R^{n-1}$.

Teorema 2. (teorema Soboljeva o tragovima). Operator ograničenja

$$u \longmapsto u/_{x_n=0}\ ,\quad \text{za}\quad s>\frac{1}{2}$$

je produživ (sa $S(R^n)$) do linearno neprekidnog preslikavanja

$$W^s(R^n) \longrightarrow W^{s-1/2}(R^{n-1}).$$

Dokaz. Zapišimo operator ograničenja pomoću Fourierove transformacije :

$$u(x',0) = (2\bar{u})^{-n/2}\int_{R^n} e^{ix'y'}\ \hat{u}(y',y_n)dy_n dy'\ ,\quad \text{za } u\in S(R^n).$$

Odavde, ako sa F' označi Fourierova transformacija po x', dobijamo

$$F'u(x',0) = \int_{R^n} \hat{u}(y',y_n)dy_n.$$

Stavimo zbog kratkpće, $v(x') = u(x',0)$; $\hat{v}(y') = F'v(x')$, pa imamo

$$\hat{v}(y') = \int_{R^n} \hat{u}(y',y_n)dy.$$

Traženo tvrdenje zapisujemo u obliku procene

(27) $$\|v\|'_{s-1/2} \leq M\|u\|_s,$$

gde $\|\cdot\|'_{s-1/2}$ označava normu u prostoru $W^{s-1/2}(R^{n-1})$, $u\in S(R^n)$, a M nežavisi od u. Dokažemo tu procenu. Imamo

(28) $$\left\{\|v\|'_{s-1/2}\right\}^2 = \int_{R^n} (1+|y'|^2)^{s-1/2}\ |\hat{v}(y')|^2 dy'.$$

Dalje je, zbog nejednakosti Cauchy-Buniakowskya

$$|\hat{v}(y')|^2 = \left|\int_{R^n} (1+|y|^2)^{-s/2}(1+|y|^2)^{s/2}\ \hat{u}(y)dy_n\right|^2$$

$$\leq \int_{R^n}(1+|y|^2)^{-s}dy_n \int_{R^n} (1+|y|^2)^s|\hat{u}(y)|^2 dy_n.$$

Procenimo prvi faktor. Imamo

$$\int_{R^n} (1+|y|^2)^{-s}dy_n = \int_{R^n} (1+|y'|^2+y_n^{\ 2})^{-s}dy_n$$

$$= (1+|y'|^2)^{-s}\int_{R^n}\left(1+\left|\frac{y_n}{\sqrt{1+|y'|^2}}\right|^2\right)^{-s} dy_n$$

$$= (1+|y'|^2)^{-s+2/2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|^2)^{-s}dt$$

$$= M(1+|y'|^2)^{-s+1/2},$$

(ovde smo koristili činjenicu da je $s > \frac{1}{2}$, zahvaljujući kojoj posljednji integral konvergira). Dakle,

$$|\hat{v}(y')|^2 \leq M(1+|y'|^2)^{-s+1/2} \int_{R^n} (1+|y|^2)^s |\hat{u}(y)|^2 dy.$$

Koristeći ovu nejednakost za procenu $|\hat{v}(y')|^2$ u (28), dobijamo traženu procenu (27).

Teorema 2, označava, da ako je $u \in W^s(R^n)$, za $s > \frac{1}{2}$, onda je korektno definisan trag $u/_{x_n=0}$ funkcije u u hiperravni $x_n = 0$, i da je on elemenat prostora $W^{s-1/2}(R^{n-1})$, a da bismo ga dobili treba u predstaviti u obliku limesa

$$u = \lim_m u_m,$$

po normi $\|\cdot\|_s$ funkcije $u_m \in S(R^n)$. Tada trag

$$u_m/_{x_n=0}\ , \text{ za } m \longrightarrow \infty$$

ima limes, po normi $\|\cdot\|'_{s-1/2}$ u prostoru $W^{s-1/2}(R^{n-1})$, pri čemu taj limes nezavisi od izbora aproksimajućeg niza.

Ako se ograničimo na celim vrednostima od s, onda možemo koristiti umetanje

$$W^{s-1/2}(R^{n-1}) \subset W^{s-1}(R^{n-1}).$$

Prema tome, trag $u/_{x_n=0}$ funkcije $u \in W^s(R^n)$ pripada prostoru $W^{s-1}(R^{n-1})$.

Koristeći prostor $W^s_{loc}(Q)$, gde je Q mnogostrukost, može se pokazati sledeći analogon teoreme 2:

Ako je Q kompaktna hiperpovršina (podmnogostrukost kodimenzije 1) u R^n, onda se operator ograničenja $u \longmapsto u/_Q$, za $s > \frac{1}{2}$, produžava (sa $C_0^\infty(R^n)$) do neprekidnog operatora

$$W^s(R^n) \longrightarrow W^{s-1/2}(Q).$$

Analogno, ako je G ograničena oblast u R^n s glatkim rubom, onda se operator ograničenja $u \longmapsto u/_{\partial G}$, za $s \in Z^+$, $s \geq 1$, produžava (sa $C_0^\infty(\overline{G})$) do neprekidnog operatora

$$W^s(G) \longrightarrow W^{s-1/2}(\partial G),$$

pa sledi i, do neprekidnog operatora

$$W^s(G) \longrightarrow W^{s-1}(\partial G).$$

<u>Teorema 3.</u> Neka je G ograničena oblast sa glatkim rubom u R^n; s, $s' \in Z^+$, $s > s'$. Tada je operator umetanja $W^s(G) \subset W^{s'}(G)$ kompaktan (potpuno neprekidan).

<u>Dokaz.</u> 1° Pre svega, svedimo naše tvrđenje na to da su preslikavanja

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} W^s(G) \longrightarrow W^{s'}(G') \\ u \longmapsto u/_{G'} \end{cases}$$

gde je G' takva oblast u R^n, da je $\overline{G}' \subset G$, kompaktna.

Konstruišemo linearni neprekidni operator

$$\text{(30)} \qquad \ell : W^s(G) \longrightarrow W^s(R^n),$$

koji je operator produženja, tj. takav da je

$$(\ell u)/_G = u, \text{ za svako } u \in W^s(G).$$

Sada se operator umetanja $W^s(G) \subset W^{s'}(G)$ izražava u obliku kompozicije operatora produženja (30) i operatora restrikcije

$$W^s(R^n) \longrightarrow W^{s'}(G)$$

čime je problem sveden na utvrdivanje kompaktnosti operatora (29), tj. zamenu G sa R^n i G' sa G.

2° Neka je $\chi \in C_0^\infty(G)$, $\chi = 1$, u okolini G'. Tada je

$$u/_{G'} = (\chi u)/_{G'} .$$

Osim toga, operator množenja sa χ je ograničen u $W^s(G)$, pa je zbog toga za utvrđivanje kompaktnosti operatora (29) dovoljno proveriti sledeće tvrđenje.

3° Ako je K fiksiran kompakt u G i $\{f_p\}_1^\infty$ takav niz $f_p \in W^s(G)$:

$$\operatorname{supp} f_p \subset K \text{ i } \|f_p\| \leq 1,$$

onda iz njega može izdvojiti podniz koji konvergira u $W^{s'}(G)$.

3° Primetimo, sada, da je dovoljno da razmotrimo slučaj $s=1$, $s'=0$. Zaista, neka je ustanovljena kompaktnost umetanja $W^1(G)\subset L_2(G)$. Iz ograničenosti $\|f_p\|_s$ sledi, da su ograničene i norme $\|D^{\alpha}f_p\|_1$, za $|\alpha|\leqslant s-1$, (a to znači i za $|\alpha|\leqslant s'$), tako da se može preći na podniz, računajući da izvodi $D^{\alpha}f_p$ konvergiraju u $L_2(G)$, za $|\alpha|\leqslant s'$. To znači da $\{f_p\}$ konvergira u prostoru $W^{s'}(G)$, što i trebalo dokazati.

4° Iskoristimo, sada, operaciju usrednjavanja i konstruišemo δ- struku familiju funkcija $\varphi_\varepsilon\in C_0^{\infty}(R^n)$, $\varepsilon>0$. Tačnije, neka su funkcije φ_ε takve da je

$$\varphi_\varepsilon\geqslant 0,\qquad \int_{R^n}\varphi_\varepsilon(x)dx=1 \quad \text{i} \quad \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset\left\{x : |x|\leqslant\varepsilon\right\}.$$

Za svaku funkciju $f\in L_2(R^n)$ konstruišemo konvoluciju (usrednjavanje)

$$f_\varepsilon(x)=\int_{R^n} f(x-z)\varphi_\varepsilon(z)dz$$

$$=\int_{R^n} f(z)\varphi_\varepsilon(x-z)dz.$$

Lako se proverava, da je $f\in C^{\infty}(R^n)$ i da $\operatorname{supp} f$ leži u ε-okolini $\operatorname{supp} f$. Dalje, ako je u smislu distribucija $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L_2(R^n)$, onda je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_\varepsilon(x)=\int_{R^n}\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}\varphi_\varepsilon(x-z)dz=-\int_{R^n} f(z)\frac{\partial}{\partial z_j}\varphi_\varepsilon(x-z)dz$$

$$=\int_{R^n} f(z)\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_\varepsilon(x-z)dz=\frac{\partial f_\varepsilon(x)}{\partial x_j},$$

tj. izračunavanje distribucija je permutabilno sa operacijom usrednjavanja.

5° Neka je, sada, dat ograničen skup $\mathcal{F}\subset W^1(G)$, koji ima osobinu da je

$$\operatorname{supp} f\subset K, \text{ za svako } f\in\mathcal{F}$$

(ovde je K fiksiran kompakt u G, koji nezavisi od f). Treba dokazati da je $\mathcal{F}$ predkompaktan u $L_2(G)$, tj. da iz svakog niza njegovih elemenata može se izabrati podniz, koji konvergira u $L_2(G)$.

Zato, za svako $\varepsilon > 0$ posmatrajmo skup usrednjavanja

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{f_\varepsilon : f \in \mathcal{F}\}$$

gde je f konstruisan pomoću f (kao t.4^0). Dovoljno je dokazati da su ispunjena sledeća dva uslova:

a) $\mathcal{F}_\varepsilon$ predkompaktan u $L_2(G)$;

b) $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{F}$ leži u δ - okolini skupova $\mathcal{F}_\varepsilon$.

Zaista, ako su uslovi ispunjeni, onda se za svako $\varepsilon' > 0$ može konstruisati ε' - mreža skupa $\mathcal{F}$ (treba uzeti $\delta = \frac{\varepsilon'}{2}$ u b), lako se nalazi odgovarajuće $\mathcal{F}_\varepsilon$ a zatim se konstruiše $\frac{\varepsilon'}{2}$ - mreža skupova $\mathcal{F}_\varepsilon$). Odavde, kao što je poznato, sledi predkompaktnost skupa $\mathcal{F}$.

6^0 Da bi dokazali uslov a), uočimo jače tvrđenje:

$\mathcal{F}_\varepsilon$ je predkompaktan u $C(K_\varepsilon)$, gde je K_ε zatvorenje ε-okoline kompakta K. Uočimo, da je $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset K$, za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}_\varepsilon$.

Primetimo da je

$$|f_\varepsilon(x)| \leq M_\varepsilon \int_{R^n} |f(z)|\,dz \leq M'_\varepsilon \int_{R^n} |f(z)|^2 dz, \quad f \in \mathcal{F}$$

(koristili smo izraz za f_ε i nejednakost Cauchy-Buniakowkya), tj. $\mathcal{F}_\varepsilon$ je ograničen u $C(K_\varepsilon)$. Dalje, zbog komutacije usrednjavanja i diferenciranja (t.4^0), dobijamo da je

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right| \leq M'_\varepsilon \int_{R^n} \left|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right|^2 dz, \quad \text{za } f \in \mathcal{F}$$

tako da su izvodi $\frac{\partial f_\varepsilon(x)}{\partial x_j}$ uniformno ograničeni za $f \in \mathcal{F}$ (i za fiksno ε). No otuda sledi i ravnostepena neprekidnost funkcija iz $\mathcal{F}_\varepsilon$. Zajedno sa već dokazanom uniformnom ograničenošću ovih funkcija, to na osnovu Arzela-Ascolieve teoreme povlači predkompaktnost $\mathcal{F}_\varepsilon$ u $C(K_\varepsilon)$.

7° Ostalo, da se još proveri i uslov b) (t.5°). Zato procenimo normu razlike $f-f_{\varepsilon}$ u prostoru $L_2(R^n)$. Normu u $L_2(R^n)$ ćemo obeležavati jednostavno ovako $\|\cdot\|$. Prvo, primetimo da je $f\in C_0^{\infty}(R^n)$.

$$f(x) - f_{\varepsilon}(x) = \int_{R^n} [f(x)-f(x-z)]\, \varphi_{\varepsilon}(z)dz$$

$$= \int_{R^n} dz \int_0^1 dt\cdot \frac{d}{dt} [f(x)-f(x-tz)]\, \varphi_{\varepsilon}(z)$$

$$= \int_0^1 dt \int_{R^n} dz \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-tz)\, \varphi_{\varepsilon}(z).$$

Pa je

$$\|f - f_{\varepsilon}\| \leq \int_0^1 dt \int_{R^n} dz \sum_{j=1}^{n} |z_j| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot -tz)\right\| \varphi_{\varepsilon}(z)dz$$

$$= \int_0^1 dt \int_{R^n} dz \sum_{j=1}^{n} |z_j| \left\| \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_j}\right\| \varphi_{\varepsilon}(z)dz$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\| \cdot \max_{1\leq j\leq n} |z_j| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\| \leq \varepsilon\sqrt{n}\, \|f\|_1 .$$

Tako je, dobijena procena

(31) $$\|f - f_{\varepsilon}\| \leq \varepsilon\sqrt{n}\,\|f\|_1 , \quad \text{za} \quad f\in C_0^{\infty}(R^n).$$

Sada je lako dokazati ovu procenu i za svaku funkciju $f\in W^1(R^n)$ pomoću prelaska na limes, jer je $C_0^{\infty}(R^n)$ gusto u $W^1(R^n)$ (lako se vidi da je $C_0^{\infty}(R^n)$ gusto u $S(R^n)$ u topologiji $S(R^n)$, a $S(R^n)$ gusto u $W^s(R^n)$, za svako $s\in R$). Međutim, iz procene (31) sledi tvrdnja b) (t.5°), čime je dokazana teorema 3.

Glava I NEPOTPUNA ELIPTIČKA JEDNAČINA DRUGOG REDA. KONTURNI PROBLEMI

Niz problema iz matematičke fizike (talasne, teorije hidrodinamike itd.), mogu se tretirati kao konturni problemi diferencijalnih jednačina drugog reda u Banachovom prostoru. U vezi sa tim postavili smo sebi cilj da sistematski ispitujemo konturne probleme takvih jednačina. U ovoj glavi daju se osnovne formule za rešenje konturnih problema i objašnjava veza između problema i njegovog adjungovanog problema. Isto tako će biti razmatrano pitanje koretnosti konturnih problema i objašnjena uloga, koju ima u tom pitanju regularnost konturnih problema.

Neka je na segmentu $[0,T]$ zadata diferencijalna jednačina drugog reda s konstatnim operatorom:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Cu + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

gde je $u(t)$ neka funkcija s vrednostima u kompleksnom Banachovom prostoru E; C zatvoreni linearni operator sa svuda gustim domenom $\mathcal{D}(C)$ u prostoru E; $f(t)$ data neprekidna funkcija na segmentu $[0,T]$ s vrednostima u E.

Zatvoreni linearni operator C koji figuriše u datoj jednačini ima osobinu: za svako $\lambda \leqslant 0$ postoji rezolventa $R(\lambda)$ operatora C, i važi procena

(*) $$\|R(\lambda;C)\| \leqslant \frac{k}{1+|\lambda|}, \quad \text{za} \lambda \leqslant 0.$$

Ovaj slučaj zove se eliptički.

§1. Homogena jednačina

1.1. Opšte rešenje homogene jednačine

Posmatrajmo homogenu jednačinu

(1.1) $$\frac{d^2u}{dt^2} = Cu, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Definicija 1.1. Rešenje jednačine (1.1) je funkcija $u(t)$ s vrednostima u $\mathcal{D}(C)$, dvaput neprekidno diferencijabilna i koja zadovoljava jednačinu (1.1) na segmentu $[0,T]$.

Za operator C mogu se definisati razlomljeni stepeni, posebno, operator $C^{-1/2}$. Uočimo funkciju

(1.2) $$v(t) = C^{-1/2}\frac{du}{dt}.$$

Diferencirajmo $v(t)$ po t i koriščenjem (1.1), dobijamo

(1.3) $$\frac{dv}{dt} = C^{1/2}u.$$

Jednačine (1.2) i (1.3) se mogu zapisati u obliku sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = C^{1/2}v \\ \dfrac{dv}{dt} = C^{1/2}u. \end{cases}$$

Uvodimo smenu: $z = \frac{1}{2}(u-v)$, $w = \frac{1}{2}(u+v)$. Tada za funkcije $z(t)$ i $w(t)$ imamo

(1.4) $$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -C^{1/2}z \\ \dfrac{dw}{dt} = C^{1/2}w. \end{cases}$$

Operator $-C^{1/2}$ je generator analitičke polugrupe $V(t)$, koja zadovoljava C_0 uslove. Dakle, Cauchyev problem za prvu od jednačina (1.4) je uniformno korektan, a za drugu inverzni Cauchyev problem.

Prema tome,

$$z(t) = V(t)z_0 \text{ i } w(t) = V(T-t)w_T. \tag{1.5}$$

Da bi funkcije $z(t)$ i $w(t)$ generisale rešenje jednačine (1.1) potrebno je, da su one dvaput neprekidne diferencijabilne. Ovo će biti ispunjeno, ako su z_0 i $w_T \in \mathcal{D}(C)$. Isto tako, rešenje jednačine (1.1) za $0<t<T$, će biti beskonačno diferencijabilna za svako z_0 i w_T. U vezi time uvedimo sledeće definicije:

Definicija 1.2. Funkcija $u(t)$ zove se oslabljeno rešenje jednačine (1.1), ako je:

1) ona neprekidna i ima neprekidan prvi izvod na segmentu $[0,T]$ i drugi izvod u $(0,T)$;

2) njene vrednosti pripadaju $\mathcal{D}(C)$, za $0<t<T$, a funkcija $C^{1/2}u(t)$ je neprekidna na segmentu $[0,T]$;

3) $u(t)$ zadovoljava jednačinu (1.1) u intervalu $(0,T)$.

Definicija 1.3. Funkcija $u(t)$ je uopšteno rešenje jednačine (1.1), ako je :

1) ona neprekidna na $[0,T]$, i ima neprekidan drugi izvod na $(0,T)$, a funkcija $C^{-1/2}u(t)$ ima neprekidan prvi izvod na $[0,T]$;

2) $u(t) \in \mathcal{D}(C)$, za $0<t<T$;

3) ona zadovoljava jednačinu (1.1) u intervalu $(0,T)$.

Teorema 1.1.I. Svako uopšteno rešenje jednačine (1.1) ima oblik

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)w_T \text{ , i} \tag{1.6}$$

Obrnuto, funkcija oblika (1.6) je uopšteno rešenje jednačine 1.1) za svako $z_0, w_T \in E$.

II. Da bi uopšteno rešenje (1.6) bila oslabljeno, potrebno je i dovoljno, da su $z_0, w_T \in \mathcal{D}(C^{1/2})$.

III. Sva uopštena rešenja jednačine (1.1) su analitičke funkcije od t, za $0<t<T$.

Dokaz. Ako su z_o, $w_T \in \mathcal{D}(C^{1/2})$, onda je funkcija (1.6) oslabljeno rešenje jednačine (1.1). Zaista,

$$C^{1/2}u(t) = V(t)C^{1/2}z_o + V(T-t)C^{1/2}w_T ,$$

$$\frac{du}{dt} = -V(t)C^{1/2}z_o + V(T-t)C^{1/2}w_T, \quad 0 \leq t \leq T$$

i

$$\frac{d^2u}{dt^2} = CV(t)z_o + CV(T-t)w_T = Cu, \text{ za } 0<t<T.$$

Neprekidnost funkcija $C^{1/2}u(t)$ i $\frac{du}{dt}$ na segmentu $[0,T]$ i funkcije $\frac{d^2u}{dt^2}$ u intervalu $(0,T)$, sledi iz osobina polugrupe $V(t)$.

Analogno se proverava da je funkcija (1.6) uopšteno rešenje jednačine (1.1), za svako $z_o, w_T \in E$.

Obrnuto, neka je $u(t)$ uopšteno rešenje jednačine (1.1), tada je funkcija

$$v(t) = \frac{d}{dt}(C^{-1/2}u)$$

neprekidna na $[0,T]$ i zadovoljava jednačine (1.2) i (1.3), za $0<t<T$. To znači, da su funkcije $z(t)$ i $w(t)$ oslabljena rešenje direktnog i inverznog Cauchyevog problema jednačina (1.4), pa je predstvaljivo u obliku (1.5), gde je

$$z_o = z(0) = \frac{1}{2}\left[u(0) - (C^{-1/2}u)'(0)\right],$$

$$w_T = \frac{1}{2}\left[u(T) + (C^{-1/2}u)'(T)\right].$$

Ako je, sada, $u(t)$ oslabljeno rešenje jednačine (1.1), onda je

$$z_o = \frac{1}{2}\left[u(0) - C^{-1/2}u'(0)\right] \in \mathcal{D}(C^{1/2}),$$

$$w_T = \frac{1}{2}\left[u(T) + C^{-1/2}u'(T)\right] \in \mathcal{D}(C^{1/2}).$$

Mi ćemo ubuduće, razmatrati samo oslabljena ili uopštena rešenja jednačine (1.1).

1.2. Konturni problemi

Uvedimo u razmatranje sistem konturnih uslova oblika

$$
(1.7)\qquad \begin{cases} L_1(u) = \alpha_{11}u_o + \alpha_{12}u'_o + \gamma_{11}u_T + \gamma_{12}u'_T = f_1, \\ L_2(u) = \alpha_{21}u_o + \alpha_{22}u'_o + \gamma_{21}u_T + \gamma_{22}u'_T = f_2, \end{cases}
$$

gde su α_{ij}, γ_{ij}; $i, j = 1,2$, kompleksni brojevi; f_1, f_2 dati el Banachovog prostora E; $u_o = u(0)$, $u'_o = u'(0)$, $u_T = u(T)$ i $u'_T = u'(T)$. Pretpostavlja se da su forme $L_1(u)$ i $L_2(u)$ linearno nezavisne.

Definicija 1.4. Ako oslabljeno rešenje $u(t)$ jednačine (1.1) zadovoljava konturne uslove (1.7), onda ga nazivamo oslabljeno rešenje konturnog problema (1.1) - (1.7).

Ako stavimo $C^{1/2}z_o = g_1$ i $C^{1/2}w_T = g_2$, onda se svako oslabljeno rešenje jednačine (1.1) može zapisati u obliku

$$
(1.8)\qquad u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2
$$

gde je

$$
V_1(t) = V(t)C^{-1/2} \text{ ii } V_2(t) = V(T-t)C^{-1/2},
$$

a g_1 i g_2 neki elemnti prostora E.

Zamenimo (1.8) u konturne uslova (1.7), pa ćemo preći na sistem operatorskih jednačina:

$$
(1.9)\qquad \begin{cases} L_1(V_1)g_1 + L_1(V_2)g_2 = f_1 \\ L_2(V_1)g_1 + L_2(V_2)g_2 = f_2 \end{cases}
$$

za definisane elemente g_1 i g_2.

Gornji sistem može se napisati u obliku :

$$
\left[\alpha_{11}C^{-1/2} - \alpha_{12}I + \gamma_{11}V(T)C^{-1/2} - \gamma_{12}V(T)\right]g_1 + \left[\alpha_{11}V(T)C^{-1/2} + \alpha_{12}V(T) + \gamma_{11}C^{-1/2} + \gamma_{12}I\right]g_2 = f_1
$$

$$
\left[\alpha_{21}C^{-1/2} - \alpha_{22}I + \gamma_{21}V(T)C-1/2 - \gamma_{22}V(T)\right]g_1 + \left[\alpha_{21}V(T)C^{-1/2} + \alpha_{22}V(T) + \gamma_{21}C^{-1/2} + \gamma_{22}I\right]g_2 = f_2
$$

Svi su operatori koji figurišu u sistemu (1.9) linearna kombinacije ograničenih međusobno komutirajučih operatora I, $C^{-1/2}$, $V(T)$ i $V(T)C^{-1/2}$. Zbog toga se sitem (1.9) može rešavati isto kao i u skalarnom slučaju. Pri tome, važnu ulogu ima operatorska determinante tog sistema

(1.10) $$D = \begin{vmatrix} L_1(V_1) & L_1(V_2) \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) \end{vmatrix},$$

koja se zove karakteristična determinanta.

Rešavanjem sistema (1.9) dolazimo do jednačina

(1.11) $$\begin{cases} Dg_1 = L_2(V_2)f_1 - L_1(V_2)f_2, \\ Dg_2 = L_1(V_1)f_2 - L_2(V_1)f_1. \end{cases}$$

Ako se na (1.8) primeni ograničeni operator D i zamene Dg_1 i Dg_2 iz formula (1.11), dobijamo relaciju

(1.12) $$Du(t) = S_1(t)f_1 + S_2(t)f_2,$$

gde je

(1.13) $$\begin{cases} S_1(t) = V_1(t)L_2(V_2) - V_2(t)L_2(V_1), \\ S_2(t) = -V_1(t)L_1(V_2) + V_2(t)L_1(V_1). \end{cases}$$

Definicija 1.5. Svaka neprekidna funkcija na $[0,T]$, koja zadovoljava (1.12), zove se uopšteno rešenje konturnog problema (1.1)-(1.7).

Ako pretpostavimo da su operatori $D^{-1}L_i(V_j)$; $i,j = 1,2$, definisani na celom prostoru E, onda se iz (1.11) određuju elemnti g_1 i g_2, čija zamena u (1.8) daje rešenje konturnog problema. Ako samo pretpostavimo da su svuda definisani operatori $D^{-1}S_1(t)$ i $D^{-1}S_2(t)$, za $t>0$, onda se iz (1.8) može se naći samo uopšteno rešenje konturnog problema

(1.14) $$u(t) = D^{-1}S_1(t)f_1 + D^{-1}S_2(t)f_2,$$

Na taj način smo došli do neophodnosti ispitivanja pitanja egzistenciji D^{-1} i njegovu vezu s operatorima $L_i(V_j)$. Razne mogućnosti koje ovde nastupaju su vezane sa različitim osobinama konturnog problema (1.1) - (1.7).

1.3. Homogeni konturni problem

Pitanje egzistencije operatora D^{-1} je prirodno povezano sa rešivošću homogenog konturnog problema jed.(1.1) s konturnim uslovima:

(1.15) $\qquad L_1(u) = L_2(u) = 0.$

Teorema 1.2. Homogeni konturni problem (1.1)-(1.15) ima netrivijalno rešenje $u(t) \neq 0$ ako i samo ako karakteristična determinanta D, kao operator u prostoru E, nema inverzni operator.

Dokaz. Nužnost. Neka problem (1.1)-(1.15) ima netrivijalno rešenje $u(t) \neq 0$, tada je ona, kao i svako oslabljeno rešenje jednačine (1.1) predstavljivo u obliku (1.8), gde je u krajnjem slučaju bar jedan od elemenata g_1, g_2 različit od nule.

Jednačine (1.11) za homogeni problem su oblika

$$Dg_1 = 0 \quad i \quad Dg_2 = 0,$$

tj. u krajnjem slučaju se bar na jednom nenultom elementu operator D anulira. A ovo znači da on nema inverzni operator.

Dovoljnost. Neka operator D nema inverzni. Tada postoji elemenat različit od nule $h \in E$, takav da je $Dh = 0$. Pomoću elementa h može se konstruisati netrivijalno rešenje $u(t)$ homogenog problema. U tom cilju dovoljno je izbarati elemente $g_1, g_2 \in E$, i formule (1.8), daje traženo rešenje. Osnovna poteškoća u tome je, što konstruisano rešenje mora zadovoljavati konturne uslove (1.15), tj. relacije

$$(1.16)\qquad \begin{cases} L_1(V_1)g_1 + L_1(V_2)g_2 = 0, \\ L_2(V_1)g_1 + L_2(V_2)g_2 = 0. \end{cases}$$

Ovde mogu nastupiti dva slučaja:

a) svi koeficijenti sistema (1.16) prevode elemenat h u nulu;

b) jedan od koeficijenata za elemente h je različit od nule.

U prvom slučaju dovoljno je staviti $g_1 = g_2 = h$, i konturni uslovi su zadovoljeni.

U drugom slučaju treba kao rešenje sistema uzeti odgovarajuće algebarske komplemente. Neka je, npr. $L_2(V_2)h \neq 0$, tada stavimo

$$g_1 = L_2(V_2)h, \quad g_2 = -L_2(V_1)h.$$

Pokažemo da su konstruisani elementi rešenje sistema (1.16):

$$L_1(V_1)L_2(V_2)h - L_1(V_2)L_2(V_1)h \equiv Dh = 0,$$

$$L_2(V_1)L_2(V_2)h - L_2(V_2)L_2(V_1)h = 0.$$

Radi potpunog dokaza, treba još jednom da se uverimo, da ako je $g_1 \neq 0$ ili $g_2 \neq 0$, onda je

$$u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2 \neq 0, \quad \text{na } [0,T].$$

(Ovo označava svojevrsnu linearnu nezavisnot partikularnih rešenja $V_1(t)$ i $V_2(t)$ homogene diferencijalne jednačine).

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$(1.17)\qquad V(t)C^{-1/2}g_1 + V(T-t)C^{-1/2}g_2 \equiv 0, \quad \text{za} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Diferenciramo ovu relaciju i na dobijeni rezultat primenimo operator $C^{-1/2}$:

$$(1.18)\qquad -V(t)C^{-1/2}g_1 + V(T-t(C^{-1/2}g_2 \equiv 0, \quad \text{za} \quad 0 < t < T.$$

Sabiranjem (1.17) i (1.18) dobijamo

$$V(T-t)C^{-1/2}g_2 = 0,$$

a obuzimanjem

$$V(t)C^{-1/2}g_1 = 0$$

Posebno, za $t = T$ $t = 0$ imamo

$$C^{-1/2}g_2 = C^{-1/2}g_1 = 0,$$

ili posle primene operatora $C^{1/2}$; $g_1 = g_2 = 0$.

U primeni je zgodno da se teorema 1.2. formuliše ovako:

Teorema 1.2'. Operator D^{-1} postoji tada i samo tada kada homogeni konturni problem (1.1) - (1.15) ima samo trivijalna rešenja $u(t) \equiv 0$.

1.4. Adjungovani konturni problem

Neka je E' adjungovani prostor Banachovog prostora E, C' adjungovani operator od C, koji deluje u E'. Po pretpostavci domen operatora C je gust u E, dakle postoji operator C'. Neka je, dalje $y(t)$ vektorska funkcija s vrednostima u E', definisana na segmentu $[0,T]$. Diferencijalni operator

$$L'(y) \equiv \frac{d^2y}{dt^2} - C'y \tag{1.19}$$

zove se adjungovani operator operatora

$$L(u) \equiv \frac{d^2u}{dt^2} - Cu.$$

Ako se pod proizvodom (y,u) podrazumeva rezultat primene funkcionala $y \in E'$ na elementu $u \in E$, onda se, kao i u skalarnom slučaju, parcijalnom integracijom dobija "Greenova identitet" :

$$\int_0^T [(y, L(u)) - (L'(y), u)]\, dt = B(y,u) \tag{1.20}$$

gde je $B(y,u)$ bilinearna forma

$$B(y,u) \equiv [(y,u') - (y',u)] \Big/_0^T$$

$$= (y_T, u_T') - (y_T', u_T) - (y_0, u_0') + (y_0', u_0). \tag{1.21}$$

Definicija 1.6. Konturni uslovi oblika

$$(1.22)\qquad \begin{cases} L_1'(y) \equiv \delta_{11} y_0 + \delta_{12} y_0' + \Delta_{11} y_T + \Delta_{11} y_T' = 0, \\ L_2'(y) \equiv \delta_{21} y_0 + \delta_{22} y_0' + \Delta_{21} y_T + \Delta_{22} y_T' = 0, \end{cases}$$

gde su δ_{ij}, Δ_{ij} kompleksni brojevi, zovu se agjungovani u odnosu na konturne uslove (1.15), ako je za svaki par funkcija $y(t)$ i $u(t)$ koje zadovoljavaju relacije

$$L_1'(y) = L_2'(y) = 0, \text{ za } y(t) \in \mathcal{D}(L')$$

i

$$L_1(u) = L_2(u) = 0, \text{ za } u(t) \in \mathcal{D}(L),$$

ispunjena jednakost: $B(y,u) = 0$.

Mi smo pretpostavili da sve tačke nepozitivne realne ose pripadaju rezolventnom skupu operatora C, a ta pretpostavka važi i za operator C'. I više toga, iz nejednakosti (*), sledi analogna nejednakost za operator C':

$$(1.23)\qquad \|(C' - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{k}{1+|\lambda|}, \text{ za } \lambda \leq 0.$$

Pretpostavimo, još, da je $\mathcal{D}(C')$ gust u E' (ova pretpostavka je automatski ispunjena za refleksivne Banachove prostore). U tome slučaju na agjungovani konturni problem

$$(1.24)\qquad L'(y) \equiv \frac{d^2y}{dt^2} - C'y = 0,\ L_1'(y) = L_2'(y) = 0$$

se prenose tvrđenja, dokazane za polazni problem. Istu takvu ulogu ima, npr., determinanta $D(C')$ formirana za relaciju (1.24). Karakterističnu determinantu ćemo označavati sa $D(C)$. Vezu između ove dve determinante objašnjava sledeće teorema (uočimo pre toga, da su adjungovani konturni uslovi definisani nejednoznačno) :

Teorema 1.3. U klasi adjungovanih konturnih uslova (1.22) postoje uslovi za koje je karakteristična determinanta $D(C')$ koja odgovara tim uslovima kao operator u E', adjungovana operatoru $D(C)$:

$$(1.25)\qquad D(C') = [D(C)]'.$$

<u>Dokaz.</u> Matrica koeficijenata polaznog konturnog problema je

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Označimo da d_{ij}, za $i<j$, minor ove matrice sastavljen od i-te i j-te kolone. Ako determinantu $D(C)$ sistema (1.9) predstavimo kao zbir determinati

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}C^{-1/2} & \alpha_{11}V(T)C^{-1/2} \\ \alpha_{21}C^{-1/2} & \alpha_{21}V(T)C^{-1/2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}C^{-1/2} & \alpha_{12}V(T) \\ \alpha_{21}C^{-1/2} & \alpha_{22}V(T) \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

onda dobijamo

$$D(C) = -d_{24}I+(d_{14}-d_{23})C^{-1/2}+d_{13}C-1+(d_{12}+d_{34})C^{-1/2}V(T)+ \\ + d_{24}I+(d_{14}-d_{23})C^{-1/2}-d_{13}C-1V(2T). \tag{1.27}$$

Kako je, po pretpostavci, oblast (C') gusta u E', se familija operatora $V'(t)$ poklapa sa polugrupom $W(t)$, generalisanu sa operatorom $-(C')^{1/2}$. Odavde, sledi da je adjungovani operator od $D(C)$:

$$\begin{cases} [D(C)]' = -d_{24}I' +(d_{14}-d_{13})(C')^{-1/2}+d_{13}(C')^{-1}+ 2(d_{12}+d_{34}) \\ (C')^{-1/2}W(T)+d_{24}I' +(d_{14}-d_{23})(C')^{-1/2}-d_{13}(C')^{-1}W(2T). \end{cases} \tag{1.28}$$

Neka su, sada, $\tilde{d}_{ij}$ minori matrice koeficijenata adjungovanog problema:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \delta_{11} & \delta_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Determinantu $D(C')$ (pišemo u razvijenom obliku) za šta je dovoljno da u formuli (1.27) svuda umesto C stavimo operator C', a minor d_{ij} zamenimo sa $\tilde{d}_{ij}$:

$$D(C') = -\tilde{d}_{24}I'+(\tilde{d}_{14}-\tilde{d}_{23})(C')^{-1/2}+\tilde{d}_{13}(C')^{-1}+2(\tilde{d}_{12}+\tilde{d}_{34})(C')^{-1/2}W(T) \\ +\tilde{d}_{24}I'+(\tilde{d}_{14}-\tilde{d}_{23})(C')^{-1/2}-d_{13}(C')^{-1}W(2T). \tag{1.30}$$

Upoređivanje izraza (1.28) i (1.30) pokazuje, da je za dokaz teoreme dovoljno da se uverimo u jednakost koeficijenata operatora u odgovarajućim sabircima pri tome posmatramo sledeće slučajeve:

1^o $d_{12} \neq 0$. Matrica (1.26) sa tačnošću do reda kolone je ekvivalentna matrici

(1.31)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{\beta}_{11} & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & 1 & \tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{22} \end{pmatrix}$$

a uslovi $L_1(u) = L_2(u) = 0$, se mogu zapisati u obliku

$$u_o = -\tilde{\beta}_{11}u_T - \tilde{\beta}_{12}u'_T,$$
$$u'_o = -\tilde{\beta}_{21}u_T - \tilde{\beta}_{22}u'_T.$$

Zamenom ovih izraza u formi $B(y,u)$ iz (1.21) dobijamo

$$B(y,u) = y_T u'_T - y'_T u_T - y_o(-\tilde{\beta}_{21}u'_T - \tilde{\beta}_{22}u'_T) + y'_o(-\tilde{\beta}_{11}u_T - \tilde{\beta}_{21}u'_T)$$
$$= (\tilde{\beta}_{21}y_o - \tilde{\beta}_{11}y'_o - y'_T)u_T + (\tilde{\beta}_{22}y_o - \tilde{\beta}_{12}y'_o + y_T)u'_T.$$

Odavde je, jasno, da se $B(y,u)$ anulira, ako je

$$L'_1(y) \equiv \tilde{\beta}_{21}y_o - \tilde{\beta}_{11}y'_o - y'_T = 0,$$
$$L'_2(y) \equiv \tilde{\beta}_{22}y_o - \tilde{\beta}_{12}y'_T + y_T = 0$$

s matricom

(1.32)
$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{21} & -\tilde{\beta}_{11} & 0 & -1 \\ \tilde{\beta}_{22} & -\tilde{\beta}_{12} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksplicitni oblik matrice (1.31) i (1.32) omogučavanju upoređivanje koeficijenata u (1.28) i (1.30):

$$\tilde{d}_{24} = -\tilde{\beta}_{12} = d_{24};$$
$$\tilde{d}_{14} - \tilde{d}_{23} = \tilde{\beta}_{22} + \tilde{\beta}_{11} = d_{14} - d_{23};$$
$$\tilde{d}_{13} = \tilde{\beta}_{21} = d_{13};$$

$$\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{34} = \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_{21} & -\tilde{\beta}_{11} \\ \tilde{\beta}_{22} & -\tilde{\beta}_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_{11} & \tilde{\beta}_{12} \\ \tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} = d_{12} + d_{34}.$$

Ovim je dokazan prvi slučaj teoreme.

2^o $d_{13} \neq 0$. Matrica (1.26) je ekvivalentna sledećoj:

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{\alpha}_{11} & 0 & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & \tilde{\alpha}_{21} & 1 & \tilde{\beta}_{22} \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

ili, u obliku konturnih uslova,

$$u_0 = -\tilde{\alpha}_{11} u_0' - \tilde{\beta}_{12} u_T' ,$$

$$u_T = -\tilde{\alpha}_{21} u_0' - \tilde{\beta}_{22} u_T' .$$

Za $B(y,u)$ dobijamo

$$B(y,u) = (-y_0 - \tilde{\alpha}_{12} y' + \tilde{\alpha}_{22} y_T') u_0' + (-\tilde{\beta}_{12} y_0' + \tilde{\beta}_{22} y_T') u_T'.$$

Za odjungovane konturne uslove stavimo

$$L_1'(y) \equiv -\tilde{\beta}_{12} y_0' + y_T + \tilde{\beta}_{22} y_T' = 0,$$

$$L_2'(y) \equiv - y_0 - \tilde{\alpha}_{12} y_0' + \tilde{\alpha}_{22} y_T' = 0$$

sa matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\beta}_{12} & [illegible] & [illegible] \\ -1 & -\tilde{\alpha}_{12} & 0 & \tilde{\alpha}_{22} \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

Upoređivanje minora (1.33) i (1.34) dokazuje ispravnost teoreme i u ovom slučaju.

Analogno se razmatraju i preostala četiri

$$d_{14} \neq 0, \ d_{23} \neq 0, \ d_{24} \neq 0, \ d_{34} \neq 0.$$

<u>Posledoca 1.1.</u> Ako je $\mathcal{D}(C')$ gust u E', onda je. da bi homogeni konturni problem imaoonetrivijalno rešenje, potrebno i dovoljno je da kodomen $\mathcal{R}(D)$ operatora D nije gust u prostoru E.

Zaista, poslednji uslov je isp... ako i samo ako jednačina $D'y = 0$ ima netrivijalno rešenje. ... $D' = D(C')$, pa tvrđenje sledi iz teoreme 1.2'.

1.5. Uniformno korektni konturni problem. Regularnost konturnih uslova

Definicija 1.7. Konturni problem (1.1)-(1.7) je uniformno korektan, ako za svako f_1 i f_2 iz E postoji jedinstveno uopšteno rešenje tog problema, koja neprekidno zavisi od $f_1, f_2 \in E$ u normi prostora $C(E)$.

Iz rečenog u tački 3 neposredno sledi

Teorema 1.4. Da bi problem (1.1)-(1.7) bio uniformno korektan potrebno je i dovoljno da operatori $D^{-1}S_1(t)$ i $D^{-1}S_2(t)$ budu uniformno ograničeni na $[0.T]$.

Pokazuje se, da za uniformnu korektnost problema bitnu ulogu ima osobina regularnosti konturnih uslova. U našem slučaju konturni uslovi biće regularni, samo kada je zadovoljen jedan od uslova:

1^o $d_{24} \neq 0$,

2^o $d_{24} = 0$, ali $|\alpha_{12}|+|\beta_{12}|>0$ i $d_{23} - d_{14} \neq 0$,

3^o $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, ali $d_{13} \neq 0$.

Razmatramo detalnije ove slučajeve.

1^o $d_{24} \neq 0$. Stavimo $d_{24} = -1$, tada karakteristična determinanta D, po formuli (1.27) ima oblik $D = I-R_1$, gde je R_1 ograničeni operator tj. linearna kombinacija ograničenih operatora $C^{-1/2}$, $V(T)$ i njihovih proizvoda.

Ako pretpostavimo, da jedinica pripada rezolventnom skupu operatora R_1, onda operator D ima ograničeni inverzni. Otuda, sledi da su operatori $D^{-1}S_1(t)$, $D^{-1}S_2(t)$ uniformno ograničeni na $[0,T]$.

2^o $d_{24} = 0$, $|\alpha_{12}|+|\beta_{12}|>0$ i $d_{23} - d_{14} \neq 0$. Neka je $d_{23} - d_{14} = -1$.

Pod ovim uslovima matrica (1.26) se može transformisati na oblik

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} & 0 & \tilde{\beta}_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

a determinanta D, po formuli (1.27),

$$D = C^{-1/2}(I - R_2),$$

gde R_2 je ograničeni operator.

Prema tome, ako je operator $(I-R_2)^{-1}$ ograničen, onda je operator $D^{-1} = (I-R_2)^{-1}C^{1/2}$ neograničen.

Međutim, kako operatori $S_1(t)$ i $S_2(t)$ imaju kao faktor operator $C^{-1/2}$, to su proizvodi $D^{-1}S_1(t)$ i $D^{-1}S_2(t)$ uniformno ograničeni, ako je ograničen operator $(I-R_2)^{-1}$.

3^o $\alpha_{11} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, ali $d_{13} \neq 0$. Ovi uslovi su ekvivalentni prvom konturnom problemu $u_0 = f_1$, $u_T = f_2$ s matricom

(1.36)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Za determinantu D dobija se formula $D = C^{-1}(I-V(2T))$, tj. operator $D^{-1} = (I-V(2T))^{-1} C$, a ako on i postoji, onda je neograničen za prebrojivo faktora C. Isto tako, zbog toga što konturni uslovi ne sadrže izvode, operatori $L_i(u_j)$ imaju faktor $C^{-1/2}$, pa prema tome i operatori $S_1(t)$ i $S_2(t)$ imaju faktor C^{-1}. Ovaj faktor gasi neograničenost operatora D^{-1}.

<u>Teorema 1.5.</u> I. Neka su konturni uslovi problema (1.1)-(1.7) regularni. Tada operator D ima jedan od sledeća tri oblika

1^o $D = k(I-R)$,

2^o $D = kC^{-1/2}(I-R)$,

3^o $D = kC^{-1/2}(I-R)$,

gde je R ograničeni operator, a k konstanta.

II. Ako jedinica nije tačka spektra operatora R, onda je konturni problem (1.1)-(1.7) uniformno korektan na segmentu $[0,T]$.

III. Sva uopštena rešenja problema su uopštena rešenja jednač-

U dokazu je potrebno samo poslednju tvrđenje. Ono sledi, iz činjenice da su u razmatranim slučajevima uopštena rešenja oblika

$$u(t) = V(t)h_1 + V(T-t)h_2,$$

gde su h_1 i h_2 neki elementi iz E.

Objasnimo, još pitanje, kada će uopšteno rešenje uniformno korektnog problema uz regularne konturne uslove biti oslabljeno ? Zato je dovoljno, da se iz jednačina (1.11) mogu odrediti elementi g_1 i g_2. Posmatrajmo te jednačine u svakoj slučaja regularnosti konturnih uslova

1° Operator D^{-1} je ograničen, pa se g_1 i g_2 nalaze za svako $f_1, f_2 \in E$.

2° Neka matrica (1.26) ima oblik (1.35). Tada njen konnturni uslov

$$L_2(u) = \tilde{\alpha}_{21} u_o + \tilde{\beta}_{21} u_T ,$$

ne sadrži izvode, pa zbog toga operatori $L_2(V_j)$ sadrže faktor $C^{-1/2}$, pa otuda sledi, dasu operatori $D^{-1}L_2(V_j)$ ograničeni. Operatori $D^{-1}L_1(V_j)$ su neograničeni, i imaju oblik $FC^{1/2}$, gde je F ograničeni operator, pa se g_1 i g_2 ne mogu odrediti za svako f_2. Treba da je $f_2 \in \mathcal{D}(C^{1/2})$.

3° Na kraju u slučaju sa matricom (1.36) svi operatori $D^{-1}L_i(V_j)$ imaju oblik $kC^{1/2}$, pasu zbog jednačine (1.11) rešive za $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(C^{1/2})$.

Teorema 1.6.I. Pod uslovima teoreme 1.6 uopšteno rešenje će biti oslabljeno za svako $f_1, f_2 \in E$ u slučaju 1°.

II. Da bi ona bilo oslabljeno u ostalim slučajevima, dovoljno je da su $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(C^{1/2})$.

1.6. Nekorektni konturni problemi

Za neregularne uslove (1.7) ostaje samo jedna mogućnost:

(1.37) $$d_{24} = 0, |\alpha_{11}| + |\beta_{12}| > 0, \quad d_{23} - d_{14} = 0.$$

Determinanta D je oblika

$$D = C^{-1}\left[d_{13}I+2(d_{12}+d_{34})C^{1/2}V(T)-d_{13}V(2T)\right].$$

Za analitičke polugrupe operator $C^{1/2}V(T)$ je ograničen, pa je zbog toga operator u srednjim zagradama takođe ograničen.

Neka je $d_{13} \neq 0$, tada je $D = C^{-1}(d_{13}I - R_4)$, gde je R_4 ograničen operator. Ako d_{13} ne pripada spektru operatora R_4, onda je D^{-1} proporcionalan sa C (s ograničenim operatorskim koeficijentom. Zajdno sa ovim i zbog uslova $|\alpha_{12}|+|\beta_{13}|>0$, operator $L_1(u)$ sadrži diferenciranje, "gasi" faktor $C^{-1/2}$, koji stoji u funkcijama $V_i(t)$, $i = 0,1,2$. Konačno, operator

$$S_2(t) = \begin{vmatrix} C^{-1/2}V(t) & C^{-1/2}V(T-t) \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) \end{vmatrix}$$

sadrži operator $C^{-1/2}$, a proizvod $D^{-1}S_2(t)$ postaje neograničeni operator oblika $RC^{1/2}$. Ovo znači, da je problem (1.1)-(1.7) sa razmatranim konturnim uslovima

$$(1.38) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \tilde{\alpha}_{11} & 0 & \tilde{\beta}_{11} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} |\alpha_{12}| + |\beta_{12}|>0 \\ d_{24} = d_{23} - d_{14} = 0, \end{array}$$

u celini nekorektan. No, ako pretpostavimo da je $f_2 \in \mathcal{D}(C^{1/2})$, onda je elemenat $D^{-1}S_2(t)f_2$ potpuno određen. Dalje, izraz za $S_1(t)$ sadrži faktor C^{-1}. Sledi da je operator $D^{-1}S_1(t)$ ograničen, i iz formule (1.14) se može dobiti uopšteno rešenje.

<u>Definicija 1.8.</u> Za konturni problem oblika (1.38) kažemo da je <u>polukorektan</u>.

Uočimo, da je funkcija $D^{-1}S_2(t)f_2$, za svako $f_2 \in E$, definisana za svako $t \in (0,T)$, jer su za takve t operatori $C^{1/2}V(t)$ i $C^{1/2}V(T-t)$ ograničeni. Isto tako, ta funkcija, što znači i funkcija $V(t)$, može neograničeno rasti, kada $t \to 0$ i $t \to T$. Ako pak smatramo da je funkcija $u(t)$ u nekom smislu rešenje problema, onda to rešenje neće neprekidno zavisiti od f_2 u normi prostora $C(E)$, nego će od njega neprekidno zavisiti za svako fiksirano $t \in (0,T)$.

Na kraju, neka je uslovima (1.36) dodat još jedan $d_{13} = 0$. Tada je

$$D = 2(d_{12} + d_{34})C^{-1/2}V(T),$$

odakle

$$D^{-1} = \frac{1}{2(d_{12}+d_{34})} C^{1/2}V^{-1}(T).$$

U opštem slučaju, operator D^{-1} je neprimenjiv ni na jednom od članova, koji stoje na desnoj strani (1.12). Konturni problem (1.1)-(1.7) postaje "jako nekorektnim".

Opšti oblik odgovarajučih konturnih uslova je:

$$\alpha u'(0) - \beta u'(T) = f_1,$$

$$\alpha u(0) + \beta u(T) = f_2.$$

Za $\beta = 0$ dobijamo uslove Cauchyevog problema.

Teorema 1.7. Cauchyev problem za jednačinu (1.1) je nekorektan.

Cauchyev problem za jednačinu (1.1) prirodno generiše Cauchyev problem za sistem (1.4) sa početnim uslovima

$$z(0) = \frac{1}{2}(u_o - C^{-1/2}u_o') \quad i \quad w(0) = \frac{1}{2}(u_o + C^{-1/2}u_o').$$

Cauchyev problem za prvu od jednačina (1.4) je uniformno korektan, a za drugu nekorektan. Isto tako, pošto je operator $C^{1/2}$ generator analitičke polugrupe, to je za njega inverzni Cauchyev problem korektan u klasi ograničenih rešenja. Prema tome, za drugu jednačinu Cauchyev problem je korektan u klasi uniformno ograničenih rešenja $w(t)$. Tako smo došli do tvrđenja

Teorema 1.8. Cyuchyev problem za jednačinu (1.1) je korektan u klasi rešenja $u(t)$, za koje je funkcija $u(t)+C^{-1/2}u'(t)$ uniformno ograničena na $[0,T]$ nekom konstantom M.

Posledica 1.2. Ako rešenja Cauchyevog problema za jednačinu (1.1) postoji, onda je ona jedninstveno.

1.7. Slučaj potpuno neprekidnog operatora C^{-1}

Sa regularnim konturnim uslovima teorema 1.5 svodi pitanje o uniformnoj korektnosti (1.1)-(1.7) na pitanje o egzistenciji ograničenog inverznog operatora I-R. Takav operator očito ne postoji ako se operator D anulira na nekom elementu različitom od nule. Na osnovu teoreme 1.2′ ovo važi ako i samo ako odgovarajući homogeni konturni problem ima netrivijalna rešenja. Isto tako, operator D može biti neograničen i u drugim slučajevima.

Neka, na primer, operator C ima tačku α u svom neprekidnom spektru. Razmatramo regularne konturne uslove, definisane matricom

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$D = (\alpha I-C)C^{-1}(I-V(2T)) \quad i \quad I-R = \left(I - \frac{1}{\alpha}\right) C\ (I-V(2T)).$$

Ako faktor I-V(2T) ima ograničeni inverzni, onda ga I-R nema iza faktora $\left(I - \frac{1}{\alpha}\right)C$.

Ukazane poteškoće se povlače pri razmatranju posebno, ali važne klase operatora C, koji imaju potpuno neprekidan inverzni. Dobijena teorija u tome slučaju je analogna teoriji skalarnih kontrunih problema. Kao primer za ovo služi sledeća

Teorema 1.9. I. Neka su konturni uslovi (1.7) regularni i operator C potpuno neprekidan. Da bi konturni problem (1.1)-(1.7) bio uniformno korektan, potrebno je i dovoljno, da odgovarajući homogeni konturni problem ima samo trivijalno rešenje.

II. Ako je domen adjungovanog operaotra C' gust u E'_1, onda su ti isti uslovi potrebni i dovoljni za uniformnu korektnost adjungovanog problema

$$\frac{d^2y}{dt^2} = C'y \quad ; \quad L_1'(y) = \psi_1 \ , \ L_1'(y) = \psi_2. \tag{1.39}$$

Dokaz. Ako je operator C^{-1} potpuno neprekidan, onda će takav biti i operator $C^{-1/2}$. Dalje, operator $V(t) = C^{1/2}V(t)C^{-1/2}$, $t>0$, je potpuno neprekidan, kao proizvod ograničenog i potpuno neprekidnog operatora. Na osnovu teoreme 1.5 za regularne konturne uslove operator

$$D = kC^{-\alpha}(I-R),$$

gde $\alpha\in\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, a R neki polinom potpuno neprekidnih operatora $C^{-1/2}$ i $V(T)$, pa je i on potpuno neprekidan. Ali, tada je tačka 1 kompleksne ravni ili sopstvena vrednost operatora R, ili pripada njenom rezolventnom skupu. U prvom slučaju determinanta D nema inverznu, i homogeni problem ima netrivijalna rešenja. U drugom slučaju operator $(I-R)^{-1}$ postoji, ograničen i definisan na celom prostoru, pa je, zbog teoreme 1.5 konturni problem (1.1)-(1.7) uniformno korektan.

Na osnovu teoreme 1.3 determinanta $D(C')$ adjungovanog konturnog problema kao operator u E' adjungovana je sa determinantom $D(C)$. Spektri adjungovanih operatora $D(C)$ i $D(C')$ se poklapaju, i više od toga, iz potpune neprekidnosti operatora R sledi potpuna neprekidnost operatora R'. Zbog toga, sve što je ranije rečeno o problemu (1.1)-(1.7) važi i za nehomogeni adjungovani konturni problem (1.39).

1.8. Ograničena rešenja u beskonačnosti

Neka je $u(t)$ uopšteno rešenje jednačine (1.1), definisano na $[0,\infty)$. Pretpostavimo, da je ona ograničeno:

$$\sup_{0\le t<\infty} \|u(t)\| < \infty . \tag{1.40}$$

Funkcije $u(t)$ i $C^{-1/2}u$ su neprekidne u nuli. Na osnovu teoreme 1.1, za svako $T>0$ i $0\le t\le T$ važi reprezentacija

$$(1.41)\quad u(t) = \frac{1}{2}\, V(t)\left[u(0)-(C^{-1/2}u)'(0)\right] + \frac{1}{2}V(T-t)\left[u(T)+(C^{-1/2}u)'(T)\right].$$

Stavljajući u (1.41) prvo $t = 0$, a zatim $t = T$ dobijamo

$$(1.42)\quad \begin{cases} u(0)+(C^{-1/2}u)'(0) = V(T)\left[u(T)+(C^{-1/2}u)'(T)\right], \\ u(T)-(C^{-1/2}u)'(T) = V(T)\left[u(0)-(C^{-1/2}u)'(0)\right]. \end{cases}$$

Eliminacijom iz ovih jedančina člana sa $(C^{-1/2}u)'(T)$, dolazimo do relacija

$$(1.43)\qquad u(0)+(C^{-1/2}u)' = 2V(T)u(T)-V(2T)\left[u(0)-(C^{-1/2}u)'(0)\right].$$

Za rezolventu operatora $C^{1/2}$ važi procena

$$\left\|R(\lambda\,;C^{1/2})\right\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}\ ,\ \text{za}\ \lambda \leq 0$$

iz koje sledi procena za polugrupu $V(t)$:

$$(1.44)\qquad \left\|V(t)\right\| \leq Me^{-t}.$$

Ako u (1.43) T teži beskonačnosti, imajući u vidu (1.40) i (1.44), dobijamo

$$(.45)\qquad u(0) + (C^{-1/2}u)'(0) = 0.$$

Sada, koristimo činjenicu da se analitička polugrupa $V(t)$ ni za jedno t ne može anulirati na nenultom elementu. Tada prve od jednačina (1.42) dobijamo

$$(1.46)\qquad u(T) + (C^{-1/2}u)'(T) = 0.$$

Imajući u vidu (1.45),(1.46) i 1.41) dobijamo formulu

$$(1.47)\qquad u(t)= V(t)u_0.$$

Na ovaj način smo dokazali tvrđenje

Teorema 1.10. I. Za svako $u_0 \in E$ postoji jedinstveno ograničeno uopšteno rešenje jednačine (1.1) na pluosi $[0,\infty)$, koje zadovoljava početni uslov $u(0) = u_0$.

II. To rešenje dato je formulom (1.47).

§ 2. Nehomogene jednačine

2.1. Opšte rešenje nehomogene jednačine

Pređimo sada na nehomogenu jednačinu

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Cu + f(t) \tag{2.1}$$

s istim operatorom C i funkcijom $f(t)$ neprekidnom na segmentu $[0,T]$.

Definicije rešenja, oslabljenog i uopštenog rešenja jednačine (2.1) ostaju iste, kao i za homogenu jednačinu (1.1).

Jednačina (2.1) se smenama

$$v = C^{-1/2}\frac{du}{dt}, \quad z = \frac{1}{2}(u-v), \quad w = \frac{1}{2}(u+v)$$

svodi na sistem

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -C^{1/2}z + \frac{1}{2}C^{-1/2}f(t), \\ \frac{dw}{dt} &= C^{1/2}w - \frac{1}{2}C^{-1/2}f(t). \end{aligned}\right. \quad \text{za} \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

Rešenje prve jednačine s početnim uslovom $z(0) = z_0$ je oblika

$$z(t) = V(t)z_0 + \frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)C^{-1/2}f(s)ds. \tag{2.3}$$

Za drugu jednačinu rešava se inverzni Cauchyev problem s graničnim uslovom $w(T) = w_T$

$$w(t) = V(T-t)w_T + \frac{1}{2}\int_t^T V(s-t)C^{-1/2}f(s)ds. \tag{2.4}$$

Za opšte rešenje $u(t)$ jednačine (2.1) dobija se formula

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)w_T + \frac{1}{2}\int_0^T V(|t-s|)C^{-1/2}f(s)ds. \tag{2.5}$$

Prva dva sabirka formule (2.5) predstavljaju opšte rešenje homogene jednačine, koje smo ranije proučili.

Razmotrimo detalnije funkciju

$$V_o(t,s) = \frac{1}{2} V(|t-s|)C^{-1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2} V(t-s)C^{-1/2}, & \text{za} \quad t \geqslant s \\ \frac{1}{2} V(s-t)C^{-1/2}, & \text{za} \quad t \leqslant s. \end{cases}$$

Iz definicije funkcije $V_o(t,s)$ se neposredno uočava, da ona ima sledeće osobine, koje karakterišu fundamentalno rešenje diferencijalne jednačine (2.1) :

(i) $V_o(t,s)$ je operatorska funkcija dve promenljive, koja je definisana i jako neprekidna u kvadratu $0 \leqslant t,s \leqslant T$;

(ii) kao funkcija od t ona je jako neprekidno diferencijabilna u svakom od intervala $[0,s)$ i $(s,T]$ i dvaput jako neprekidno diferencijabilna u intervalima $(0,s)$ i (s,T), pri čemu je za svako $x \in E$:

$$\lim_{t \to s-0} \frac{\partial}{\partial t} \left[V_o(t,s)x \right] - \lim_{t \to s+0} \frac{\partial}{\partial t} \left[V_o(t,s)x \right] = x;$$

(iii) funkcija $C^{1/2}V_o(t,s)$ je definisana i jako neprekidna na celom kvadratu $0 \leqslant t,s \leqslant T$, a funkcija $CV_o(t,s)$, posmatrana kao funkcija od t, definisana i jako neprekidna u svakom od intervala $0 < t < s$ i $s < t < T$;

(iv) kao funkcija od t $V_o(t,s)$ u svakom od intervala $0 < t < s$ i $s < t < T$ zadovoljava homogenu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 V_o}{\partial t^2} = CV_o.$$

Pogledajmo, sada, posljednji sabirak u formuli (2.5) :

(2.6) $$g(t) = \frac{1}{2}\int_0^T V(|t-s|)C^{-1/2}f(s)ds$$

i objasnimo, pod kojim će uslovima on biti oslabljeno rešenje jednačine (2.1). Diferenciranjem dobijamo

(2.7) $$\frac{dg}{dt} = -\frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)f(s)ds + \frac{1}{2}\int_t^T V(s-t)f(s)ds$$

Iz formula (2.6) i (2.7) se vidi, da je funkcija $g(t)$ neprekidna i da ima neprekidan prvi izvod na $[0,T]$.

Funkcija
$$C^{1/2}g(t) = \frac{1}{2}\int_0^T V(|t-s|)f(s)ds$$
je takođe neprekidna na $[0,T]$.

Isto tako, u opštem slučaju, funkcija $g(t)$ ne mora imati drugi izvod, i njene vrednosti ne moraju pripadati $\mathcal{D}(C)$. Ako funkcija $f(t)$ zadovoljava Hölderove uslove, onda će obe gornje osobine biti ispunjene, za $0 < t < T$. Diferenciranjem se proverava da tada formula (2.5) daje rešenje jednačine (2.1).

2.2. Konturni problem. Greenova funkcija

Razmotrimo konturni problem sa uslovima (1.7) jednačine (2.1). Ovaj smo problem proučili za homogenu jednačinu, pa je zbog linearnosti jednadžbe (2.1) dovoljno da proučimo problem sa homogenim konturnim uslovima

(2.8) $$L_1(u) = L_2(u) = 0.$$

Rešenje (2.5) ćemo predstaviti u obliku

(2.9) $$u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2 + g(t),$$

gde su $V_1(t)$, $V_2(t)$, g_1 i g_2 kao i u (1.8), a

$$g(t) = \int_0^T V_o(t,s)f(s)ds. \tag{2.10}$$

Zamenimo rešenje u uslove (2.8), i pređimo na sistem za određivanje g_1 i g_2, koji je analogan sa (1.11) :

$$\begin{cases} Dg_1 = -L_2(V_2)L_1(g) + L_1(V_2)L_2(g), \\ Dg_2 = -L_1(V_1)L_2(g) + L_2(V_1)L_1(g). \end{cases} \tag{2.11}$$

Funkcija $g(t)$ je partikularno oslabljeno rešenje jednačine (2.1), neprekidno diferencijabilno na segmentu $[0,T]$, pri čemu je

$$\frac{dg}{dt} = \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t} V_o(t,s)\right] f(s)ds.$$

Zbog toga je

$$L_i(g) = \int_0^T L_i(V_o)_t f(s)ds,$$

gde indeks t pokazuje da operator L_i deluje na $V_o(t,s)$ kao na funkciju od t.

Ako se na (2.9) primeni operator D i skoristi (2.11), onda je

$$Du(t) = \int_0^T G_o(t,s)f(s)ds, \tag{2.12}$$

gde je

$$G_o(t,s) = V_1(t)\left[-L_2(V_2)L_1(V_o)_t + L_1(V_2)L_2(V_o)_t\right] - $$
$$-V_2(t)\left[L_1(V_1)L_2(V_o)_t - L_2(V_1)L_1(V_o)_t\right] + DV_o(t,s).$$

<u>Definicija 2.1.</u> Svaka neprekidna funkcija $u(t)$, koja zadovoljava jednačinu (2.2), zove se <u>uopšteno rešenje problema</u> (2.1)-(2.8).

Funkcija $G_o(t,s)$ se može napisati u obliku determinante

$$G_o(t,s) = \begin{vmatrix} V_1(t) & V_2(t) & V_o(t,s) \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) & L_1(V_o)_t \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) & L_2(V_o)_t \end{vmatrix} . \tag{2.13}$$

Kao što se vidi pitanje rešivosti problema (2.1)-(2.8) se svodi na pitanje egzistencije operatora D^{-1} i njegovu vezu sa operatorom $G_o(t,s)$.

<u>Definicija 2.2.</u> Problem (2.1)-(2.8) je <u>uniformno korektan</u>, ako uopšteno rešenje postoji za svaku neprekidnu funkciju $f(t)$ i neprekidno zavisi od nje u metrici prostora $C(E)$.

Za uniformnu korektnost problema (2.1)-(2.8) potrebno je i dovoljno da integralni operator

$$Gf = D^{-1}\int_0^T G_0(t,s)f(s)ds$$

bude ograničen u $C(E)$.

Neka su konturni uslovi regularni. Tada na osnovu teoreme 1.5 operator D ima jednu od reprezentacija 1° - 3°. Pretpostavimo da 1 nije tačka spektra operatora R.

U slučaju 1° operator D^{-1} je ograničem, operator $G_0(t,s)$ je uniformno ograničen po t,s $(0 \leq t,s \leq T)$, pa sledi da je, operator G ograničen na $C(E)$.

U slučaju 2° operator D^{-1} sadrži neograničeni faktor $C^{1/2}$. Isto tako, u ovom slučaju operator $L_2(u)$ ne sadrži izvod, pa zbog toga svi operatori u donjem redu determinante imaju faktor $C^{-1/2}$. Operator $D^{-1}G_0(t,s)$ će biti uniformno ograničen po t,s.

U slučaju 3°, analogno, operator D^{-1} ima faktor C, a operatori drugog i trećeg reda determinante (2.13) sadrže faktor $C^{-1/2}$, pa je operator $D^{-1}G_0(t,s)$ ponovo uniformno ograničen.

<u>Teorema 2.1.</u> I. Ako su konturni uslovi regularni i jedinica je regularna tačka operatora R, onda je problem (2.1)-(2.8) uniformno korektan.

II. Ako funkcija $f(t)$ zadovoljava Hölderove uslove, onda su uopštena rešenja oslabljena.

Lako se proverava, da je za jednačinu (2.1) uniformno korektan i konturni problem, koji je za nehomogene konturne uslove bio polukorektan. Zadržimo se na funkciji $G(t,s)$ $D^{-1}G_0(t,s)$, koja se prirodno zove <u>Greenova funkcija</u>, pošto ona daje rešenje nehomogene diferencijalne jednačine $u'' = Cu + f(t)$, za homogene konturne uslove

$L_1(u) = L_2(u) = 0$ u obliku

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)f(s)ds.$$

Analogno, kao i u skalarnom slučaju, Greenova funkcija glasi

$$(2.14)\qquad G(t,s) = D^{-1}\begin{vmatrix} V_1(t) & V_2(t) & V_o(t,s) \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) & L_1(V_o)_t \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) & L_2(V_o)_t \end{vmatrix}$$

i po svojim osobinama ona nas podseća na Greenovu funkciju za skalarni konturni problem:

(i) $G(t,s)$ je fundamentalno rešenje jednačine (2.1) ;

(ii) za svako fiksno s $(0 \leq s \leq T)$ kao funkcija od t ona zadovoljava homogene konturne uslove $L_1(G)_t = L_2(G)_t = 0$.

Obe ove osobine nesumnjivo slede iz reprezentacije (2.14).

Zaista, iz nje sledi najpre da je $G(t,s)$ linearna kombinacija (sa ograničenim operatorskim koeficijentima) partikularnih rešenja $V_1(t)$ i $V_2(t)$ i fundamentalnog rešenja $V_o(t,s)$ homogene diferencijalne jednačine, tj. i sama je fundamentalno rešenje, i drugo, posle primene operatora L_i, $i = 1,2$, dobijamo

$$L_i(G)_t = D^{-1}\begin{vmatrix} L_i(V_1) & L_i(V_2) & L_i(V_o)_t \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) & L_1(V_o)_t \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) & L_2(V_o)_t \end{vmatrix}.$$

Prva vrsta ove determinante se poklapa ili sa drugom, za $i = 1$, ili s trećom, za $i = 2$, tj. determinanta se anulira, a to i znači, da $G(t,s)$ zadovoljava homogene konturne uslove.

<u>**Primedba.**</u> U ovoj glavi je korišćena poznata teorija jednačina drugog reda sa apstraktnim operatorom.

Glava II. POTPUNA ELIPTIČKA JEDNAČINA DRUGOG REDA. POLUGRUPA LINEARNIH OPERATORA

§1. Rešivost potpune eliptičke jednačine drugog reda

1.1. Postavljanje problema

Neka je na poluosi $[0,\infty)$ data diferencijalna jednačina

(1.1) $$Lu \equiv -\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Cu = 0$$

gde je $u(t)$ tražena funkcija sa vrednostima u kompleksnom Hilbertovom prostoru H; $B = B^*$ i $C \geq \delta I$ uniformno pozitivni, linearni operatori sa gustim domenima u H. Pretpostavimo da je jednačina (1.1) eliptičkog tipa :

(1.2) $$B^2 < 4C,$$

što znači da je $\mathcal{D}(B^2) \supseteq \mathcal{D}(C)$ i da važi

$$(B^2x,x) \leq 4(Cx,x), \quad \text{za svako} \quad x \in \mathcal{D}(C);$$

odnosno

(1.2′) $$B^2 \leq \theta^2 C, \quad \text{za} \quad \theta^2 < 4, \ \theta > 0$$

sa početnim uslovom

(1.3) $\quad u(0) = u_o$, za $0 \le t \le \infty$.

<u>Definicija 1.1.</u> Funkcija $u(t)$ sa vrednostima u H, definisana na segmentu $[0,T]$, naziva se <u>rešenje</u> jednačine (1.1), ako je ona :

1) dvaput neprekidno diferencijabilna na $[0,T]$ i za nju su definisane i neprekidne funkcije Bu' i Cu na $[0,T]$;

2) zadovoljava jednačinu (1.1) na $[0,T]$.

Uslov (1.2) se može napisati u obliku

(1.4) $\quad \|BC^{-1/2}\| \le \theta$

odnosno

(1.4′) $\quad \|Bx\| \le \theta \|C^{1/2}x\|$, za sve $x \in \mathcal{D}(C)$

(ili u krajnjem slučaju za $x \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C^{1/2})$).

Ako se u jednačinu (1.1) sa uslovom (1.3) uvede smena :

$$u(t) = v(t) + e^{-t}u_o \Longrightarrow v(t) = u(t) - e^{-t}u_o$$

i za

$$u(0) = u_o \Longrightarrow v(0) = 0.$$

Diferenciranjem dobijamo

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} - e^{-t}u_o$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2v}{dt^2} + e^{-t}u_o .$$

Zatim zamenom u (1.1) imamo

$$-\frac{d^2v}{dt^2} - e^{-t}u_o + B(\frac{dv}{dt} - e^{-t}u_o) + C(v(t) + e^{-t}u_o) = 0$$

$$-\frac{d^2v}{dt^2} + B\frac{dv}{dt} + Cv = f(t) \equiv e^{-t}(u_0 + Bu_0 - Cu_0), \quad \text{za} \quad u_0 \in \mathcal{D}(C).$$

Time je homogeni problem sveden na nehomogeni.

Neka su dati prostori

$$H_1 = H_1(0,\infty;H) = \left\{ u(t) \in \mathcal{D}(C) : \int_0^\infty \left[\left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \left\| C^{1/2}u \right\|^2 \right] dt < \infty \right\},$$

$$H_2 = H_2(0,\infty;H) = \left\{ u(t) \in \mathcal{D}(C) : \int_0^\infty \left[\left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \left\| Cu \right\|^2 \right] dt < \infty \right\}.$$

Označimo sa $\overset{\circ}{H}_1$ i $\overset{\circ}{H}_2$ adherenciju skupa svih glatkih finitnih funkcija $u(t) \in \mathcal{D}(C)$ po normi prostora H_1 i H_2.

Treba dokazati da je problem

$$Lu = f$$

rešiv u prostoru $\overset{\circ}{H}_2$.

Pre razmatranja pitanje rešivosti postavljenog problema opisat ćemo neka osnovna svojstva prostora $\overset{\circ}{H}_2$.

Neka niz $\{u_n(t)\}$ finitnih funkcija u normi $\| \cdot \|_{\overset{\circ}{H}_2}$ konvergira ka funkciji $u(t)$, $(u \in \overset{\circ}{H}_2)$.

$$\|u_n'(t) - u_m'(t)\| = \left\| \int_0^t (u_n''(s) - u_m''(s))ds \right\|$$

$$\leq \int_0^t \|u_n''(s) - u_m''(s)\| ds$$

alje

$$\|u_n'(t) - u_m'(t)\| \leq \left\{\int_0^t 1^2 ds\right\}^{1/2} \left\{\int_0^t \|u_n''(s) - u_m''(s)\|^2 ds\right\}^{1/2}$$

$$= t^{1/2} \left\{\int_0^t \|u_n''(s) - u_m''(s)\|^2 ds\right\}^{1/2}$$

$$\leq t^{1/2} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{\overset{o}{H}_2} \longrightarrow 0.$$

Odavde sledi da niz $\{u_n'(t)\}$ konvergira uniformno na svakom konačnom intervalu iz $[0,+\infty)$.

Isto tako iz

$$u_n(t) - u_m(t) = \int_0^t (u_n'(s) - u_m'(s))ds$$

i napred rečenog sledi da niz $\{u_n(t)\}$ konvergira uniformno na svakom konačnom intervalu iz $[0,+\infty)$.

Stavimo

$$\hat{u}(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$$

$$\text{za} \quad t \in [0,\infty),$$

$$v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n'(t).$$

Tada iz teoreme o diferenciranju niza član po član dobijamo da je

$$v(t) = \hat{u}'(t).$$

Dalje, iz

$$u_n \xrightarrow{\overset{o}{H}_2} u$$

sledi da niz $\{u_n'(t)\}$ konvergira u prostoru $L_2 = L_2(0,\infty);H)$ nekoj funkciji $\hat{v}(t) \in L_2$. Odavde, iz relacije

$$u_n'(t) = \int_0^t u_n''(s)ds$$

i iz uniformne konvergencije (na svakom konačnom intervalu) niza $\{u_n'(t)\}$ ka $v(t)$ sledi

$$v(t) = \int_0^t \hat{v}(s)ds, \quad za \quad t \in [0,\infty).$$

Ovo pokazuje da je $v(t)$ (tj. $\hat{u}'(t)$) apsolutno neprekidna funkcija na svakom konačnom intervalu iz $[0,\infty)$ i da gotovo svuda na $[0,\infty)$ važi

$$v'(t) = \hat{v}(t).$$

Konačno, iz

$$u_n \xrightarrow{\overset{o}{H}_2} u$$

sledi da

$$u_n \xrightarrow{L_2} u,$$

pa pošto

$$u_n \xrightarrow{L_2} \hat{u},$$

imamo $u = \hat{u}$.

Znači, ako je $u \in \overset{o}{H}_2$ onda postoji $u'(t)$, za svako $t \in [0,\infty)$, funkcija $u'(t)$ je apsolutno neprekidna na svakom konačnom intervalu iz $[0,\infty)$ i gotovo svuda na $[0,\infty)$ postoji $u''(t)$. Funkcija $u''(t)$ pripada $L_2(0,\infty)$. Osim toga je $u(0) = 0$.

Ako je $u \in \overset{o}{H}_2$ onda je $u(t) \in \mathcal{D}(C)$, za $t \in [0,\infty)$. No, nama će trebati da znamo kada važi : $u'(t) \in \mathcal{D}(C)$ i

$$(Cu(t))' = Cu'(t).$$

S tim u vezi dokazaćemo sledeću lemu.

Lema 1.1. Skup $\hat{H}$ svih onih $u \in \overset{o}{H}_2$ kod kojih je $u'(t) \in \mathcal{D}(C)$ (i $(Cu(t))' = Cu'(t)$) je gust u $\overset{o}{H}_2$.

Dokaz. Za svako $u \in \overset{o}{H}_2$ stavljamo $v(t) = C^{-1}u(t)$. Znamo da svaka funkcija $u \in \overset{o}{H}_2$ ima neprekidan izvod u'. Ovo i neprekidnost operatora C^{-1} pokazuje da je $v(t) = C^{-1}u(t)$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Osim toga je očito da je $v(t) = C^{-1}u(t)$ iz $\mathcal{D}(C)$, za svako $t \in [0,\infty)$ i da $Cv(t)$ ima neprekidan izvod $(Cv(t))'$. Iz ovog i zatvorenosti operatora C sledi

$$(Cv(t))' = Cv'(t).$$

Ostaje da se dokaže da je skup

$$\left\{ v \ : \ v = C^{-1}u, \ u \in \overset{o}{H}_2 \right\}$$

gust u $\overset{2}{H}_2$. Ako to nije tačno, onda (uzevši u obzir da je $\overset{o}{H}_2$ Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$((f,g)) = \int_0^\infty \left[(f'',g'') + (Cf,Cg) \right] dt \Big)$$

postoji $u_o \in \overset{o}{H}_2$, $u_o \neq 0$ takav da je

$$((u_o,v)) = 0,$$

za sve $v \in \left\{ v \ : \ v = C^{-1}u, \ u \in \overset{o}{H}_2 \right\}$.

Specijalno,

$$((u_o,v_o)) = 0,$$

gde je $v_o(t) = C^{-1}u_o(t)$. Odacde lako sledi $u_o(t) \equiv 0$. Kontradikcija sa $u_o \neq 0$.

Lema 1.2. Ako je u finitna funkcija iz $\overset{\circ}{H}_2$, onda je $u' \in L_2$.

Dokaz. Polazeći iz jednakosti

$$\|u'(t)\|^2 = (u'(t),u(t))' - (u''(t),u(t)),$$

integracijom u granicama od a do b dobijamo

$$\int_a^b \|u'(t)\|^2 dt = (u'(t),u(t))\Big/_a^b - \int_a^b (u''(t),u(t))dt.$$

Zbog finitosti prvi član desne strane je nula, pa je

$$\int_a^b \|u'(t)\|^2 dt = -\int_a^b (u''(t),u(t))dt.$$

Dalje,

$$\int_a^b \|u'(t)\|^2 dt \leq \int_a^b \|u''(t)\| \|u(t)\| dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b \|u''(t)\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_a^b \|u(t)\|^2 dt.$$

Ako pustimo da $a \to 0$ i $b \to +\infty$ imamo

$$\int_0^\infty \|u'(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{2}\int_0^\infty (\|u''(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt < +\infty.$$

Kako finitne funkcije čine gust skup u $\overset{\circ}{H}_2$, onda se lako dobija da je $u' \in L_2$, za sve $u \in \overset{\circ}{H}_2$.

Teorema 1.1. Neka je funkcija u iz $\overset{\circ}{H}_2$. Tada je

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} u'(t) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Dokaz. (i)

$$\left|\|u'(t_2)\|^2 - \|u'(t_1)\|^2\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{d(\|u'(t)\|^2)}{dt}\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{t_1}^{t_2}\left[(u''(t),u'(t)) + (u'(t),u''(t)\right]dt\right|$$

$$\leq 2\int_{t_1}^{t_2}\|u''(t)\|\|u'(t)\|dt$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2}\|u''(t)\|^2dt + \int_{t_1}^{t_2}\|u'(t)\|^2dt.$$

Ako t_1 i $t_2 \longrightarrow +\infty$ dobijamo

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u''(t)\|^2dt \longrightarrow 0, \quad \text{jer je} \quad u''\in L_2$$

i

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u'(t)\|^2dt \longrightarrow 0, \quad \text{jer je} \quad u'\in L_2.$$

Dakle,

$$\left|\|u'(t_2)\|^2 - \|u'(t_1)\|^2\right| \longrightarrow 0, \quad \text{kad} \quad t_1,\ t_2 \longrightarrow +\infty.$$

Znači, postoji

$$\lim_{t\to+\infty} \|u'(t)\|^2.$$

Zbog $u'\in L_2$, ovaj limes mora biti nula.

Prema tome,

$$\lim_{t\to\infty} u'(t) = 0.$$

(ii) Analogno, kao pod (i) imamo

$$\left|\|u(t_2)\|^2 - \|u(t_1)\|^2\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{d(\|u(t)\|^2)}{dt}\, dt\right|$$

$$= \left|\int_{t_1}^{t_2} \left[(u'(t),u(t)) + (u(t),u'(t))\right] dt\right|$$

$$\leq 2\int_{t_1}^{t_2} \left|(u'(t),u(t))\right| dt$$

$$\leq 2\int_{t_1}^{t_2} \|u'(t)\|\,\|u(t)\|\, dt$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \|u'(t)\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|^2 dt .$$

Kada t_1 i $t_2 \longrightarrow +\infty$ dobijamo

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u'(t)\|^2 dt \longrightarrow 0, \quad \text{jer je} \quad u' \in L_2$$

i

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|^2 dt \longrightarrow 0, \quad \text{jer je} \quad u \in L_2.$$

Znači,

$$\left|\|u(t_2)\|^2 - \|u(t_1)\|^2\right| \longrightarrow 0, \quad \text{kad} \quad t_1,\ t_2 \longrightarrow +\infty ,$$

i postoji

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|^2 .$$

Ovaj limes mora biti nula , jer je $u \in L_2$.

Dakle,

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0.$$

Time je dokazana teorema.

1.2. Apriorna procena

Dokažemo sledeće tvrdenje:

Lema 1.3. Neka je data jednačina (1.1) sa uslovom (1.4) eliptičkog tipa. Tada se konstanta $M>0$ može izabrati tako da važi procena :

$$\int_0^\infty\left\{\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2+\|Cu\|^2\right\}dt \leqslant M\int_0^\infty\|Lu\|^2\,dt, \text{ za } u\in\hat{H}. \tag{1.5}$$

Dokaz. Neka je

$$Lu = -\frac{d^2u}{dt^2}+B\frac{du}{dt}+Cu = f$$

i familija

$$L_\tau u = -\frac{d^2u}{dt^2}+\tau B\frac{du}{dt}+Cu, \text{ gde je } 0\leqslant\tau\leqslant 1.$$

Tada je procena (1.5) ispunjena za $\tau = 0$:

$$\int_0^\infty\|L_0u\|^2dt = \int_0^\infty\left(-\frac{d^2u}{dt^2}+Cu, -\frac{d^2u}{dt^2}+Cu\right)dt$$

$$= \int_0^\infty\left\{\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2+\|Cu\|^2-\left(\frac{d^2u}{dt^2}, Cu\right)-\left(Cu, \frac{d^2u}{dt^2}\right)\right\}dt.$$

Ali je

$$\int_0^\infty\left(Cu,\frac{d^2u}{dt^2}\right)dt = \int_0^\infty\left(C\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right)dt + \left(Cu, \frac{du}{dt}\right)\Big/_0^\infty, \text{ za } u(0)=0$$

pa sledi

$$\int_0^\infty\left(Cu,\frac{d^2u}{dt^2}\right)dt = \int_0^\infty\left\|C^{1/2}\frac{du}{dt}\right\|^2 dt.$$

I tako je

$$\int_0^\infty\|L_0u\|^2dt = \int_0^\infty\left\{\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2+\|Cu\|^2+2\left\|C^{1/2}\frac{du}{dt}\right\|^2\right\}dt.$$

Dalje za L_τ je:

$$\int_0^\infty\|L_\tau u\|^2dt = \int_0^\infty\left\{\|L_0u\|^2+\tau^2\left\|B\frac{du}{dt}\right\|^2+\tau\left(L_0u, B\frac{du}{dt}\right)+\tau\left(B\frac{du}{dt}, L_0u\right)\right\}dt.$$

Odakle je

$$2\mathrm{Re}\,\tau\left(L_0u, B\frac{du}{dt}\right)\geqslant -\gamma\|L_0u\|^2-\frac{\tau^2}{\gamma}\left\|B\frac{du}{dt}\right\|^2, \text{ za svako } \gamma>0.$$

Mi biramo $\gamma<1$.

Na taj način je

$$\int_0^\infty \|L_\tau u\|^2 dt \geqslant \int_0^\infty \left\{ \|L_o u\|^2 + \tau^2 \left\|B \frac{du}{dt}\right\|^2 - \gamma^2 \|L_o u\|^2 - \frac{\tau^2}{\gamma^2} \left\|B \frac{du}{dt}\right\|^2 \right\} dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{ (1-\gamma^2) \|L_o u\|^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) \tau^2 \left\|B \frac{du}{dt}\right\|^2 \right\} dt$$

$$\geqslant \int_0^\infty \left\{ (1-\gamma^2) \|L_o u\|^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) \left\|B \frac{du}{dt}\right\|^2 \right\} dt, \quad \text{za} \quad 0 < \tau < 1.$$

Koristeći uslov (1.4) imamo

$$\int_0^\infty \|L_\tau u\|^2 dt \geqslant \int_0^\infty \left\{ (1-\gamma^2) \left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 + (1-\gamma^2) \|Cu\|^2 + 2(1-\gamma^2) \left\|C^{1/2} \frac{du}{dt}\right\|^2 - \theta^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) \left\|C^{1/2} \frac{du}{dt}\right\|^2 \right\} dt.$$

Dalje

$$-\theta^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) \left\|C^{1/2} \frac{du}{dt}\right\|^2 = -\frac{\theta^2}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) \left\|C^{1/2} \frac{du}{dt}\right\|^2 - \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) \left\|C^{1/2} \frac{du}{dt}\right\|^2$$

i

$$-2 \int_0^\infty \left\|C^{1/2} \frac{du}{dt}\right\|^2 dt \geqslant - \int_0^\infty \left\{ \left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 + \|Cu\|^2 \right\} dt,$$

odakle sledi

$$\int_0^\infty \|L_\tau u\|^2 dt \geqslant \int_0^\infty \left\{ \left[1 - \gamma^2 - \frac{\theta^2}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\right] \left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 + \left[1 - \gamma^2 - \frac{\theta^2}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\right] \|Cu\|^2 + 2\left[1 - \gamma^2 - \frac{\theta^2}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\right] \left\|C^{1/2} \frac{du}{dt}\right\|^2 \right\} dt.$$

Ako je $\theta^2 < 4$, onda se može izabrati $\gamma < 1$, tako da je

$$M = \left[1 - \gamma^2 - \frac{\theta^2}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\right]^{-1} > 0,$$

a ovo dokazuje nejednakost (1.5).

Neka

$$u_n \xrightarrow{\overset{\circ}{H}_2} u \,, \qquad (u_n,\ u \in \hat{H}).$$

Dokažimo da tada i

$$Bu_n' \xrightarrow{L_2} Bu'.$$

Pošto procena (1.5) važi na gustom skupu $\hat{H}$, za proizvoljno $u \in \overset{\circ}{H}_2$, onda postoji niz $\{u_n(t)\}$ iz $\hat{H}$ koji konvergira ka $u(t)$ (konvergira u normi $\overset{\circ}{H}_2$). Imamo

$$\int_0^\infty \left\{ \left\| \frac{d^2u_n}{dt^2} \right\|^2 + \|Cu_n\|^2 \right\} dt \leq K \int_0^\infty \|Lu_n\|^2 \, dt.$$

Na osnovu napred rečenog leva strana ove nejednakosti teži ka

$$\int_0^\infty \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \|Cu\|^2 \right\} dt.$$

Da se uverimo da desna strana ove nejednakosti kon vergira ka Lu. Polazeći iz

$$Lu_n = -u'' + Bu_n' + Cu_n$$

imamo

$$\|Lu_n\|^2 = (Lu_n, Lu_n)$$

$$= \|u_n''\|^2 + \|Cu_n\|^2 - 2\mathrm{Re}(u_n''; Bu_n') - 2\mathrm{Re}(u_n'', Cu_n) +$$

$$+ (Bu_n', Cu_n) + (Bu_n', Bu_n').$$

Imajući u vidu napred rečenog, dovoljno je posmatrati posljednji član zadnje jednakosti.

$$\int_0^{\infty}(Bu_n',Bu_n')dt = \int_0^{\infty}(B^2u_n',u_n')dt$$

$$\leq \theta^2\int_0^{\infty}(Cu_n',u_n')dt$$

$$= \theta^2\int_0^{\infty}(Cu_n,u_n'')dt + \theta^2\int_0^{\infty}(Cu_n,u_n')'dt$$

$$= \int_0^{\infty}(Cu_n,u_n'')dt + (Cu_n,u_n')\Big/_0^a \text{, za dovoljno veliko } a$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$0 \text{ , zbog finitosti.}$$

Pa je
$$\int_0^{\infty}\|Bu_n'\|^2dt \leq \int_0^{\infty}(Cu_n,u_n'')dt$$

$$\leq \int_0^{\infty}\|Cu_n\|\|u_n''\|dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\|Cu_n\|^2 + \|u_n''\|^2)dt.$$

Stavljajući u_n-u mesto u_n dobijamo

$$\int_0^{\infty}\|B(u_n' - u')\|^2dt \leq \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\|C(u_n-u)\|^2 + \|u_n'' - u''\|^2\right)dt.$$

Odakle sledi da $B(u_n' - u') \longrightarrow 0$.

Iz

$$B(u_n - u) = \int_0^{t} B(u_n' - u')ds$$

i napred izrečenog sledi da $Bu_n \longrightarrow Bu$.

Prema tome,

$$Lu_n \longrightarrow Lu.$$

Ovim je dokazana neprekidnost preslikavanja

$$u \longmapsto Bu'$$

sa $\hat{H} \subseteq \overset{\circ}{H}_2$ u $L_2 = L_2((0,\infty),H)$, i to preslikavanje se može po neprekidnosti proširiti do neprekidnog preslikavanja sa celog $\overset{\circ}{H}_2$ u L_2. Zatim, otuda sledi da se i operator L može proširiti do neprekidnog preslikavanja sa celog $\overset{\circ}{H}_2$ u L_2. Ovako prošireni operator ponovo ćemo označavati sa L. Sada iz (1.5) sledi da ta nejednakost važi za sve $u \in \overset{\circ}{H}_2$.

Prema tome, konačno, je dokazana sledeća teorema.

Teorema 1.2. I. Linearan operator

$$L : \overset{\circ}{H}_2 \longrightarrow L_2$$

je neprekidan.

II. Ako je ispunjena nejednakost (1.5), onda postoji inverzni operator

$$L^{-1} : L_2 \longrightarrow \overset{\circ}{H}_2$$

i da je on neprekidan (i ako ne znamo da li je on definisan na celom prostoru L_2).

1.3. Egzistencija rešenja

Lema 1.3 daje mogućnost da ustanovimo egzistenciju rešenja konturnog problema, čije glatkost jednaka redu jednačine. Koristićemo tzv. metod produženja po parametru, koji nas dovodi do cilja.

Prethodno formuliramo jednu opštu teoremu.

Teorema 1.1. Neka su E_1, E_2 dva kompletna Banachova prostora; T_o i T_1 linearni neprekidni operatori koji deluju iz E_1 u E_2, pri čemu T_o realizuje homeomorfizam izmedu E_1 i E_2. Pretpostavimo da postoje neprekidni operatori R_t iz E_1 u E_2, koji neprekidno (po normi operatora) zavise od $t\in[0,1]$ povezuju T_o i T_1 (tj. $R_o = T_o$, $R_1 = T_1$), i takvi da je

(1.6) $$\|R_t u\|_{E_2} \geq \delta \|u\|_{E_1}, \quad \text{za} \quad u \in E_1$$

i nezavisnim od t, $\delta > 0$.

Tada i operator T_1 realizuje homeomorfizam izmedu E_1 i E_2.

Dokaz. Zahvaljujući uniformnoj neprekidnosti familije operatora R_t po t, postoji $\eta > 0$, takvo da je

$$\|R_{t'} - R_{t''}\| < \delta, \quad \text{za} \quad |t' - t''| < \eta .$$

Dokažemo, sada, da ako je R_{t_o} homeomorfizam izmedu E_1 i E_2, onda će to biti i R_t, za $|t - t_o| < \eta$.

Polazeći od

$$R_t = R_{t_o} - (R_{t_o} - R_t)$$

dobijamo

$$R_{t_o}^{-1} R_t = I - R_{t_o}^{-1}(R_{t_o} - R_t).$$

Na osnovu (1.6), norma operatora $R_{t_o}^{-1}$ je $\leq \frac{1}{\delta}$, pa je zbog toga norma operatora $R_{t_o}^{-1}(R_{t_o} - R_t)$ koji deluje u prostoru E_1 glasi:

$$\left\| R_{t_o}^{-1}(R_{t_o} - R_t) \right\| \leq \left\| R_{t_o}^{-1} \right\| \left\| R_{t_o} - R_t \right\| \leq \frac{1}{\delta} \cdot \delta = 1.$$

Sledi da, operatori $R_{t_o}^{-1}R_t$ u prostoru E_1 imaju inverzne $(R_{t_o}^{-1}R_t)^{-1}$, i tada je $(R_{t_o}^{-1}R_t)^{-1}R_{t_o}^{-1}$ neprekidan inverzni od R_t. Egzistencija R_t^{-1} znači da R_t realizuje homeomorfizam.

Završni dokaz teoreme je očevidan: izvršimo dekompoziciju segmenta $[0,1]$ tačkama:

$$t_o = 0,\ t_1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ t_{N-1},\ t_N = 1$$

sa rastojanjem između susednih tačaka manjim od η. Pošto je, po pretpostavci, $R_{t_o} = T_o$ homeomorfizam, onda ćemo korak po korak R_{t_1}, R_{t_2}, . . . , dobijati homeomorfizme. Na kraju, dobijamo da je $T_1 = R_N$ homeomorfizam.

Teorema 1.4. Neka je L eliptički operator drugog reda sa uslovom (1.4). Razmatramo konturni problem

$$Lu = f \in L_2.$$

Tada taj problem ima ~~dva~~ jedno jedino glatko rešenje, za svako $f \in L_2$, tj. postoji $u \in \overset{o}{H}_2$ takvo da je

$$Lu = f.$$

I više od toga, preslikavanje

$$u \longmapsto Lu, \text{ gde } u \in \overset{o}{H}_2,\ Lu \in L_2$$

je homeomorfizam između prostora $\overset{o}{H}_2$ i celog prostora L_2.

Dokaz. Stavimo $E_1 = \overset{o}{H}_2$ i $E_2 = L_2$. Definišemo familiju diferencijalnih operatora, stavljajući

$$L_\tau = -\frac{d^2}{dt^2} + \tau B \frac{d}{dt} + C,$$

gde je $\tau \in [0,1]$; L eliptičkog tipa.

Preslikavanje

$$u \longmapsto L_\tau u, \quad \text{za } u \in E_1$$

generiše neprekidni operator L_τ, koji deluje iz E_1 u E_2 i neprekidno, po normi, zavisi od τ. Na osnovu leme 1.3 konstanta M se može odabrati tako da operator L_τ zadovoljava nejednakost (1.5), pri čemu se takav izbor može istovremeno realizovati za sve $\tau \in [0,1]$.

Pošto je

$$L_1 = -\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C \qquad \text{i} \quad L_o = -\frac{d^2}{dt^2} + C ,$$

to za dokaz teoreme (sa izrazom $-\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C$), je dovoljno, da se uverimo, da je

$$u \longmapsto \left(-\frac{d^2}{dt^2} + C\right)u$$

homeomorfizam između $\overset{o}{H}_2$ i L_2.

Da bi smo se uverili u ovo, koristeći ideju iz glave I u vezi sa rešenjem jednačine

$$-u'' + Cu = f \quad , \; f \in L_2$$

postupićemo na sledeći način.

Neka je

$$u(t) = V(t)u_o + \frac{1}{2}\int_0^\infty V(|t-s|)C^{-1/2}f(s)ds, \tag{1.7}$$

gde je

$$u_o = -\frac{1}{2}\int_0^\infty V(s)C^{-1/2}f(s)ds.$$

Integral na desnoj strani (1.7) postoji, jer polugrupa $V(t)$ (generirana operatorom $-C^{-1}$) eksponencijalno opada, tj. postoji $p > 0$ tako da je

$$\|V(t)\| \le Me^{-pt}, \quad t > 0,$$

gde je M neka konstanta.

Označimo sa $\hat{L}_2$ skup svih onih funkcija $f \in L_2([0,\infty),H)$ koje se mogu napisati u obliku

$$f(t) = e^{-tC^{-1}}g(t)$$

gde je $g \in L_2$.

Pokazaćemo sledeće:

1) Skup $\hat{L}_2$ je gust u $L_2([0,\infty),H)$.

Pretpostavimo suprotno, onda postoji funkcija $g_0 \in L_2$, $g_0 \neq 0$, koja je okomita na sve funkcije oblika

$$f(t) = e^{-1}C^{-1}g(t).$$

A ovo znači da je

$$\int_0^\infty e^{-t}(C^{-1}g(t),g_0(t))dt = 0, \text{ za svako } g \in L_2.$$

Za $g = g_0$ imamo

$$\int_0^\infty e^{-t}(C^{-1}g_0(t),g_0(t))dt = 0 ,$$

tj.

$$\int_0^\infty e^{-t} \|C^{-1/2}g_0(t)\|^2 dt = 0.$$

Odavde sledi da je

$$\|C^{-1/2}g_0(t)\| = 0,$$

i zbog neprekidnosti operatora C^{-1} mora biti $g_0(t) = 0$. Kontradikcija.

2) Funkcija $u(t)$ data sa (1.7) zadovoljava jednačinu

(1.8) $$L_0 u = f \ , \quad \text{za } f \in \hat{L}_2 .$$

Funkciju **u**(t) datu sa (1.7) napisaćemo u obliku

$$u(t) = V(t)u_0 + \frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)C^{-1/2}f(s)ds + \frac{1}{2}\int_t^\infty V(s-t)C^{-1/2}f(s)ds.$$

Onda diferenciranjem imamo

$$u'(t) = -C^{1/2}V(t)u_0 + \frac{1}{2} V(0)C^{-1/2}f(t) - \frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)C^{1/2}C^{-1/2}f(s)ds -$$

$$- \frac{1}{2} V(0)C^{-1/2}f(t) - \frac{1}{2}\int_t^\infty V(s-t)C^{1/2}C^{-1/2}f(s)ds$$

$$u'(t) = -C^{1/2}V(t)u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)f(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^\infty V(s-t)f(s)ds.$$

$$u''(t) = CV(t)u_o - \frac{1}{2} V(0)f(t) + \frac{1}{2} \int_0^t V(t-s)C^{1/2}f(s)ds -$$

$$- \frac{1}{2} V(0)f(t) + \frac{1}{2} \int_t^\infty V(s-t)C^{1/2}f(s)ds$$

$$u''(t) = CV(t)u_o + \frac{1}{2}\int_0^t V(t-s)C^{1/2}f(s)ds + \frac{1}{2}\int_t^\infty V(s-t)C^{1/2}f(s)ds - f(t),$$

jer je $V(0) = I$.

$$u''(t) = CV(t)u_o + \frac{1}{2}\int_0^\infty V(|t-s|)C^{1/2}f(s)ds - f(t).$$

Zamenom vrednosti za $u(t)$ i $u''(t)$ u jednačini (1.8) :

$$- u''(t) + Cu(t) = f(t),$$

imamo

$$- CV(t)u_o - \frac{1}{2}\int_0^\infty V(|t-s|)C^{1/2}f(s)ds + f(t) + CV(t)u_o +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty V(|t-s|)C^{1/2}f(s)ds = f(t).$$

Posle skračivanja ostaje

$$f(t) = f(t) \quad , \text{ za svako } \quad f \in \hat{L}_2.$$

Što znači da je zadovoljena jednačina (1.8).

3) Funkcija $u(t)$ data sa (1.7) pripada prostoru $\overset{o}{H}_2$, tj.

$u, u'' \in L_2([0,\infty),H)$, za svako $f \in \hat{L}_2$.

Zato, imajući u vidu normu prostora $\overset{o}{H}_2$ i jednačinu (1.8) , dovoljno je pokazati da je

$$\int_0^\infty \|Cu(t)\|^2 dt < + \infty .$$

Prvo razmatramo drugi član jednačine (1.1) pomnožen operatorom C:

$$\left\| C\int_0^{\infty} V(|t-s|)C^{-1/2}f(s)ds\right\| = \left\| C\int_0^{\infty} e^{-s}V(|t-s|)C^{-3/2}g(s)ds\right\|$$

$$\leq \int_0^{\infty} e^{-s}\,\|V(|t-s|)C^{-1/2}g(s)\|ds$$

$$= \int_0^{t} e^{-s}\|V(t-s)C^{-1/2}g(s)\|ds + \int_t^{\infty} e^{-s}\|V(s-t)C^{-1/2}g(s)\|ds$$

$$\leq M\int_0^{t} e^{-s}e^{-p(t-s)}\|C^{-1/2}g(s)\|ds + M\int_t^{\infty} e^{-s}e^{-p(s-t)}\|C^{-1/2}g(s)\|ds$$

$$\leq Me^{-pt}\int_0^{t} e^{-(1-p)s}\|C^{-1/2}g(s)\|ds + Me^{pt}\int_t^{\infty} e^{-(1+p)s}\|C^{-1/2}g(s)\|ds$$

$$\leq Me^{-pt}\left\{\int_0^{t} e^{-2(1-p)s}ds\right\}^{1/2}\left\{\int_0^{t}\|C^{-1/2}g(s)\|^2ds\right\}^{1/2} +$$

$$+ Me^{pt}\left\{\int_t^{\infty} e^{-2(1+p)s}\,ds\right\}^{1/2}\left\{\int_t^{\infty}\|C^{-1/2}g(s)\|^2\,ds\right\}^{1/2}$$

$$= Me^{-pt}\left\{\int_0^{t} e^{-2(1-p)s}ds\right\}^{1/2}\|C^{-1/2}\|\left\{\int_0^{t}\|g(s)\|^2ds\right\}^{1/2} +$$

$$+ Me^{pt}\left\{\int_t^{\infty} e^{-2(1+p)s}\,ds\right\}^{1/2}\|C^{-1/2}\|\left\{\int_t^{\infty}\|g(s)\|^2\,ds\right\}^{1/2}$$

$$= M\|C^{-1/2}\|\|g\|_{L_2}\left\{e^{-pt}\left(\frac{1-e^{-2(1-p)t}}{2(1-p)}\right)^{1/2} + e^{pt}\left(\frac{e^{-2(1+p)t}}{2(1+p)}\right)^{1/2}\right\}$$

$$= 2M\|C^{-1/2}\|\|g\|_{L_2}\,K\,e^{-t}.$$

Znači

$$\left\| C \int_0^{\infty} e^{-s} V(|t-s|)C^{-3/2} g(s)ds \right\| \leq K_1 e^{-t}.$$

Dalje,

$$\int_0^{\infty} \left\| C \int_0^{\infty} V(|t-s|)C^{-1/2} f(s)ds \right\|^2 dt = \int_0^{\infty} \left\| C \int_0^{\infty} V(|t-s|)C^{-3/2} g(s)ds \right\|^2 dt$$

$$\leq \int_0^{\infty} (K_1 e^{-t})^2 dt$$

$$= K_1^2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt$$

$$= K_2 < +\infty.$$

Analogno, se razmatra i drugi član jednačine (1.7) pomnožen operatorom C.

Dakle, funkcija u pripada prostoru $\overset{o}{H}_2$, za svako f iz gustog skupa $\hat{L}_2$.

Ovo bi značilo da skup $L_o(\overset{o}{H}_2)$ (tj. rang operatora L_o) sadrži $\hat{L}_2$, pa je gust u $L_2([0,\infty),H)$. Pošto su operatori L i L^{-1}, prema ranije dokazanom, neprekidni to sledi da je $L_o(\overset{o}{H}_2) = L_2([0,\infty),H)$, pa je L homeomorfizam sa $\overset{o}{H}_2$ u L_2.

Time je dokazana teorema.

Sada, ako se vratimo na staru nepoznatu funkciju $u(t)$, gde je

$$u(t) = v(t) + e^{-t}u_o \quad , \quad \text{za } u_o \in \overline{\mathcal{D}(C)} = H.$$

Onda iz ove teoreme zaključujemo da Cauchyev problem jednačine (1.1) ima jedinstveno rešenje $u(t)$, koja pripada prostoru $\overset{o}{H}_2$, a data je sa

$$u(t) = v(t) + e^{-t}u_o,$$

gde je

$$v(t) = V(t)v_o + \frac{1}{2}\int_0^\infty V(|t-s|)\, C^{-1/2} f(s)ds,$$

i

$$f(t) = e^{-t}(u_o + Bu_o - Cu_o) \ ;$$

$$v_o = -\frac{1}{2}\int_0^\infty V(s)\, C^{-1/2} f(s)ds.$$

2. Polugrupa linearnih operatora

2.1. Korektno postavljanje problema s početnim uslovima

U krajnjem slučaju formalno, čak i ako su dati konturni uslovi, se problem može posmatrati kao Cauchyev problem. Međutim, pri tome se javlja poteškoća u vezi tačne formulacije problema. Da bi izbegli tu poteškoću, mi ćemo koristiti metod polugrupe, koji pripada istoj sferi pojmova, kao što je i Laplaceova transfomacija.

Definicija 2.1. Problem s početnim uslovima (1.3) je korektno postavljen, ako ima sledeće osobine:

1) rešenja su jednoznačno određena početnim elementima;

2) skup $\mathcal{D}$ svih početnih elemenata rešenja je gust u Banachovom prostoru E;

3) za svaki konačni segmenat $[0,T]$ postoji takva konstanta $M = M(T)$, da svako rešenje zadovoljava nejednakost

$$\|u(t)\| \leq M\|u(0)\|, \text{ za } 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

Ima smisla da se uopštena rešenja korektno postavljenog problema definišu na sledeći način. Rešenje $u(t)$ se može posmatrati kao funkcija od t i od početnog elementa $u(0)$. Za fiksirano $u(0)$ i promenljivo t funkcija $u(t)$ je partikularno rešenje. Za fiksirano t i promenljivo $u(0)$ preslikavanje

$$u(0) \longmapsto u(t)$$

predstavlja linearno preslikavanje prostora E, koje označavamo ovako

$$U_0 = U_0(t),$$

sa domenom $\mathcal{D}(U_0)$, jednakim skupu $\mathcal{D}$ svih početnih elemenata rešenja.

Ako se sada i, t posmatra kao promenljiva, onda $U_0(t)$ obrazuje jednoparametarsku familiju operatora, koja je s obzirom na (2.1) ograničena, pri čemu je u stvarnosti uniformno ograničena u odnosu na $t \in [0,T]$, naime

$$\|U_0(t)\| \leq M.$$

Pošto je $\mathcal{D}$ gust u E, to $U_0(t)$, na osnovu teoreme o proširenju, ima jedinstveno linearno ograničeno proširenje za svako t, definisana na celom prostoru E; koje ćemo označavati sa $U(t)$. Na taj način dobijamo

(2.2) $$\mathcal{D}(U(t)) = E,$$

(2.3) $$\|U(t)\| = \|U_0(t)\| \leq M \quad , \quad \text{za} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Definicija 2.2. Za svako $u_0 \in E$ (čak i ako je $u_0 \notin \mathcal{D}$) funkcija

(2.4) $$u(t) = U(t)u_0$$

zove se uopšteno rešenje problema s početnim uslovima, definisanim početnim elementom u_0.

Operator $U(t)$ zove se razrešavajući (uopšteni) operator problema s početnim uslovima.

2.2. Polugrupa linearnih operatora

Definicija 2.3. Familija $\{U(t) : 0 \leq t < \infty\}$ linearnih ograničenih operatora u Banachovom prostoru E zove se jako neprekidna polugrupa ako je :

(i) $U(t+s) = U(t)U(s)$, za $t,s \geq 0$;

(ii) $U(0) = I$;

(iii) funkcija $U(t)x$ je neprekidna po t na $[0,\infty)$, za $x \in E$.

Ako je $u(t)$ makoje rešenje jednačine (1.1), onda je funkcija

$$\tilde{u}(t) = u(t+s),$$

gde je s nenegativna kon stanta, rešenje s početnim uslovom $u(s)$ i zbog toga je

$$\tilde{u}(t) = U(t)u(s).$$

Isto tako je

$$u(s) = U(s)u(0) \quad \text{i} \quad u(t+s) = U(t+s)u(0),$$

pa imamo

$$U(t+s)u(0) = U(t)U(s)u(0), \text{ za svako } u(0) \in \mathcal{D}(C).$$

Pošto je $\mathcal{D}(C)$ gust u prostoru H, a operatori $U(t)$ ograničeni, to je

$$U(t+s) = U(t)U(s), \quad \text{za svako} \quad t,s \geq 0. \tag{2.5}$$

Znači, familija operatora $\{U(t) : t \geq 0\}$ je polugrupa.

Lema 2.1. Rešenje problema (1.1) s uslovima (1.3) i (1.4) je ograničeno :

$$\|u(t)\| = \|U(t)u_0\|_H \leq \|u_0\| . \tag{2.6}$$

Dokaz. Neka je

$$u(t) = U(t)u_0 \quad , u_0 \neq 0 \quad \text{i} \quad u_0 \in \mathcal{D}(C)$$

bilo koje rešenje problema (1.1) s uslovom (1.3). Stavimo

$$y(t) = \|u(t)\|^2.$$

Tada gotovo svuda na $[0,\infty)$ važi

$$\begin{aligned} y''(t) &= (u''(t),u(t)) + (u(t),u''(t)) + 2\|u'(t)\|^2 \\ &= (Bu'(t),u(t)) + (u(t),Bu'(t)) + 2\|u'(t)\|^2 + 2(Cu(t),u(t)) \\ &= (u'(t),Bu(t)) + (Bu(t),u'(t)) + 2\|u'(t)\|^2 + 2(Cu(t),u(t)) \\ &\geq 2\|u'(t)\|^2 + 2(Cu(t),u(t)) - 2\|Bu(t)\|\|u'(t)\| \\ &\geq 2\|u'(t)\|^2 + 2(Cu(t),u(t)) - \gamma\|Bu(t)\|^2 - \frac{1}{\gamma}\|u'(t)\|^2 \\ &\geq 2\|u'(t)\|^2 + 2(Cu(t),u(t)) - \frac{1}{\gamma}\|u'(t)\|^2 - \gamma\theta^2(Cu(t),u(t)) \\ &= \left(2 - \frac{1}{\gamma}\right)\|u'(t)\|^2 + (2-\gamma\theta^2)(Cu(t),u(t)) \quad ; \quad \text{za} \quad 0 \leq \theta < 2. \end{aligned}$$

Ako $\gamma > 0$ odaberemo tako da bude $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{\theta^2}$ (što je moguće zbog $\theta^2 < 4$) dobijamo da gotovo svuda važi

(2.7) $$y''(t) \geq (2 - \gamma\theta^2)(Cu(t),u(t))$$
$$\geq \delta(2 - \gamma\theta^2)\|u(t)\|^2 \geq 0.$$

Kako je u tački t_o maksimum, to je

$$y'(t_o) = 0.$$

Osim toga, možemo naći ili $h > 0$ tako da je

$$y'(t_o+h) < 0$$

ili $h < 0$ da je

$$y'(t_o+h) > 0.$$

Recimo da je $h > 0$ i $y'(t_o+h) < 0$. Sada imamo

$$0 > y'(t_o+h) = y'(t_o+h) - y'(t_o) = \int_{t_o}^{t_o+h} y''(t_o)dt.$$

Odavde i iz (2.7) dobijamo $0 > 0$, što je kontradikcija.

Dakle, strogog maksimuma nema. Odavde sledi da je $y(t)$ ili rastuća ili opadajuća ili ima jedan minimum u nekoj tački t_o i da dalje raste.

Dokažemo da prvi i treći slučaj otpadaju. Ako bi $y(t)$ bila rastuća (tj. neopadajuća) onda bi imali

$$\int_0^{\infty} y(t)dt = +\infty,$$

to jest

$$\int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 dt = +\infty.$$

No,

$$u(t) = v(t) + e^{-t}u_o,$$

gde je $v \in \overset{o}{H}_2$. Odavde sledi da je $\|v\|_{H_2} < +\infty$ i pošto je

$$\|v\|_{\overset{o}{H}_2} \geqslant \|v\|_{L_2}$$

imamo

$$\int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt < +\infty .$$

Kako je

$$\int_0^\infty \|e^{-t}u_o\|^2 dt < +\infty$$

imali bi

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt < +\infty .$$

Kontradikcija sa

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt = +\infty .$$

Prvi slučaj nemoguć.

Isto i treći slučaj.

Prema tome, funkcija

$$\|u(t)\| = \|U(t)u_o\|$$

je nerastuća funkcija.

Naravno, pošto je $\overline{\mathcal{D}(C)} = H$ i $\|U(t)u_o\| \leq \|u_o\|$ sledi da se polugrupa $U(t)$ može proširiti na celi prostor H i da ostaje

$$\|U(t)\| \leq 1.$$

Dakle, $U(t)$ je polugrupa kontrakcije (tačnije nerastežuća polugrupa).

Prema tome, sada na osnovu definicije 2.1, možemo zaključiti da je problem (1.1) sa početnim uslovom korektno postavljen.

Polugrupa $\{U(t) : t \geq 0\}$ razrešavajućih operatora korektno postavljenog problema s početnim uslovom poseduje sledeće osobine:

1^o Ona je komutativna, a to sledi iz (2.5), tj.

$$U(t)U(s) = U(s)U(t).$$

2^o Ona ima jedinični elemenat $U(0) = I$, zbog toga što je

$$U(0)u = u, \quad \text{za svako} \quad u.$$

3^o Ova polugrupa je jako neprekidna.

Prema tome, na osnovu teoreme Hille - Yosida - Phillipsa sledi da se jednačina (1.1) može napisati u obliku

(1.1′) $$\frac{du}{dt} = Au,$$

gde je A generator polugrupe $U(t)$, za $t \geq 0$, razrešavajućih operatora korektno postavljenog problema (1.1) s početnim uslovom.

Iz relacije (1.1′) :

$$\frac{du}{dt} = Au$$

diferenciranjem imamo

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au' = A^2u.$$

S druge strane iz jednačine (1.1) dobijamo

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Bu' + Cu = BAu + Cu.$$

Tada je

$$A^2u = BAu + Cu$$

ili

$$(A^2 - BA - C)u = 0$$

(2.8) $$A^2 - BA - C = 0.$$

Tako se dobija sledeća teorema.

Teorema 2.1. Ako operatori B i C jednačine (1.1) zadovoljavaju uslov (1.2) odnosno (1.4), onda je rešiva i operatorska jednačina (2.8) :

$$A^2 - BA - C = 0.$$

Jednačina

(2.9) $$-\frac{d^2v}{dt^2} + B\frac{dv}{dt} + Cv = f \quad , \quad \text{za} \quad f \in L_2$$

se može napisati u obliku

$$-\frac{d^2v}{dt^2} + Cv = f - B\frac{dv}{dt}$$

tj. u obliku

$$L_0 v = f - BDv,$$

gde je D operator diferenciranja : $Dv = v'$. Kako je L_0 homeomorfizam sa $\overset{o}{H}_2$ na L_2, to imamo

(2.10) $$v = L_0^{-1}f - L_0^{-1}BDv.$$

Ranije je dokazano (t.1.2 ove glave) da je

$$\|L_0 v\|^2_{L_2} \geq \|v\|^2_{\overset{o}{H}_2} + 2\int_0^\infty \|C^{1/2}v\|^2 dt \quad , \quad \text{za svako} \quad v \in \overset{o}{H}_2$$

odakle sledi da je

$$\|L_0^{-1}\| \leq 1.$$

S druge strane , takođe je dokazano da važi

$$\|Bv'\|_{L_2} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2}} \|v\|_{\overset{o}{H}_2} .$$

Iz ovih činjenica sledi da je $L_o^{-1}BD$ ograničen operator sa $\overset{o}{H}_2$ na $\overset{o}{H}_2$ i da mu norma nije veća od $\frac{\theta}{\sqrt{2}}$. Ako je $\theta < \sqrt{2}$, onda je

$$\|L_o^{-1}BD\| < 1,$$

pa iz (2.10) sledi

(2.11)
$$v = (I + L_o^{-1}BD)^{-1}L_o^{-1}f$$
$$= \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n (L_o^{-1}BD)^n L_o^{-1}f.$$

Iz svega ovoga sledi

<u>Teorema 2.2.</u> I. Ako je $\theta < \sqrt{2}$, onda se rešenje (u $\overset{o}{H}_2$) jednačine (2.9) može za svako $f \in L_2$ dobiti metodom sukcesivnih aproksimacija (polazeći od rešenja jednačine $L_o v = f$).

II. Rešenje je dato sa (2.11).

Neka se operatori B_1 i C_1 mogu napisati u obliku

$$B_1 = B + B_2$$
$$C_1 = C + C_2$$

gde B i C imaju ranije opisane osobine, a B_2 i C_2 ograničeni operatori (koji ne moraju biti hermitski) u H sa dovoljno malim normama.

Posmatrajmo jednačinu

$$\tilde{L}u = f, \quad \text{za} \quad f \in L_2, \; u \in \overset{o}{H}_2$$

gde je

$$\tilde{L}u = -\frac{d^2u}{dt^2} + B_1 \frac{du}{dt} + C_1 u.$$

Pošto su preslikavanja

(2.12)
$$\begin{cases} u \longmapsto B_2 u' \\ u \longmapsto C_2 u \end{cases}$$

ograničena preslikavanja sa $\overset{o}{H}_2$ u L_2, onda operator $\tilde{L}$ se može napisati u obliku

$$\tilde{L} = L + \tilde{\tilde{L}} ,$$

gde je $\tilde{\tilde{L}}$ ograničen operator sa $\overset{o}{H}_2$ u L_2. Pri tome, operator $\tilde{\tilde{L}}$ ima po volji malu normu, ako su norme preslikavanja (2.12) dovoljne male, tj. ako su norme preslikavanja B_2 i C_2 dovoljne male. Pošto je, prema dokazanom ranije, L homeomorfizam između $\overset{o}{H}_2$ i L_2, to je i $\tilde{L}$ homeomorfizam između tih prostora, ako su norme B_2 i C_2 dovoljno male.

Tako se dobija sledeća teorema.

<u>Teorema 2.3.</u> Neka se operatori B_1 i C_1 mogu napisati u obliku :

$$B_1 = B + B_2$$

$$C_1 = C + C_2$$

gde su B_2 i C_2 ograničeni, koji ne moraju biti hermitski , operatori u H. Ako su njihove norme dovoljno male, onda Cauchyev problem

$$- \frac{d^2u}{dt^2} + B_1 \frac{du}{dt} + C_1 u = 0$$

$$u(0) = u_o$$

ima jedinstveno rešenje $(u \ \overset{o}{H}_2)$ za svako $u_o \in \mathcal{D}(C)$.

Glava III PHRAGMEN-LINDELÖFOVA TEOREMA U HARMONIJSKOJ ANALIZI I NJENA PRIMENA U TEORIJI ELIPTIČKIH JEDNAČINA

§1. Apstraktna Phragmen-Lindelöfova teorema

1.1. Uvod

Klasični Phragmen - Lindelöfov princip, se može formulisati na sledeći način.

Neka je $u(x,t)$ harmoniska funkcija u polapojasu $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$ jednaka nuli na polupravama, koje obrazuju granicu, tj.

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \text{za} \quad t \geqslant 0.$$

Ako je takva funkcija ograničena u polapojasu, onda ona eksponencijalno opada.

Naš cilj je da ispitamo da li se može ovaj rezultat proširiti na apstraktnu funkciju za $t \geqslant 0$, koja zadovoljava jednačinu

$$Lu = 0$$

gde je L eliptički operator drugog reda (može biti i proizvoljnog i čiji koeficijenti ne zavise od t, a funkcija u zadovoljava nulte konturne Dirichletove uslove

$$u(0) = 0, \quad \text{za} \quad t > 0.$$

Daćemo unutrašnju karakteristiku funkcionalnih prostora, koji dopuštaju analogon Phragmen-Lindelöfovog principa. Ova karakteristika je dobijena iz konkretnog slučaja nul-prostora eliptičkih operatora koji dozvoljavaju izvođenje zakona eksponencijalnog opadanja

Umesto da radimo sa skalarnim funkcijama, mi ćemo računati vrednosti takvih funkcija na svakom preseku elemenata linearnog prostora i razmatraćemo vektor-funkcije $u(t)$ definisane na poluosi $t \geq 0$, čije vrednosti leže u nekom Banachovom prostoru.

Skup rešenja eliptičkih jednačina gore razmatranih tipa obrazuje linearni prostor vektor-funkcija. Ovaj linearan prostor je stabilan u odnosu na translaciju po t, jer koeficijenti razmatranog diferencijalnog operatora, kao i konturni uslovi, nezavise od t. Eliptičnost operatora obezbeduje glatkost rešenja unutar oblasti definicije. Ova osobina je ustvari princip unutrašnje kompaktnosti.

U ovom paragrafu dokazaćemo (teorema 1.1) da za invarijentno u odnosu na translaciju unutrašnjo kompaktnog podprostora važi Phragmen-Lindelöfov princip, tj. ako je za elementa u iz takvog prostora integral

$$\int_0^\infty \|u(t)\| e^{\alpha t} dt$$

konvergira, onda konvergira i integral

$$\int_0^\infty \|u(t)\| e^{\beta t} dt,$$

gde je β konstanta, veća od α, koja zavisi od α, ali ne zavisi od funkcije u.

Ova teorema je važna zbog toga što ona ponašanje funkcije u beskonačnosti stavlja u zavisnost od njenih osobina u konačnoj oblasti. Iz Phragmen-Lindelöfove teoreme slede ovi rezultati:

- asimptotsko razlaganje svakog elementa u Fourierov red po eksponentima;
- pripadnost prostoru;
- jednoznačnost produženja.

Ovi rezultati su ekvivalentni diskretnosti spektra operatora translacije.

1.2. Unutrašnja kompaktnost prostora i formulacija Phragmen-Lindelöfove teoreme

Neka je S linearan prostor funkcija $u(t)$ datih za $t > 0$, čije funkcionalne vrednosti pripadaju nekom Banachovom prostoru B. Neka je S invarijantan u odnosu na translaciju, tj. da ako je $u(t)$ iz S, onda je i $u(t+y)$, za $y>0$ takođe iz S i neka elementi iz S pripadaju prostoru L_2 na svakom konačnom intervalu pozitivne poluose.

Uvedemo oznaku

$$\|u\|_a^b = \left\{\int_a^b \left(\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 + \|Cu\|^2\right) dt\right\}^{1/2}, \quad 0<a<b<\infty$$

gde je $\|u(t)\|$ norma funkcije $u(t)$ u Hilbertovom prostoru H_2.

<u>Definicija 1.1.</u> Prostor S se zove <u>unutrašnje kompakten</u>, ako je jedinična sfera po normi $\|u\|_a^b$ prekompaktna u odnosu na normu $\|u\|_{a'}^{b'}$, za svako a', b' koje zadovoljavaju uslov $a < a' < b' < b$.

Pod prekompaktnošću podrazumevamo, da svaki ograničeni niz po $\|u\|_a^b$ normi sadrži Cauchyev niz po normi $\|u\|_{a'}^{b'}$.

Adherencija unutrašnje kompaktnog prostora S po konvergenciji u L_2 na svakom konačnom intervalu poluose je takođe unutrašnje kompaktna. Zbog toga ćemo u daljem radu pretpostaviti da je S zatvoren u toj topologiji.

Dokazaćemo apstraktnu Phragmen-Lindelöfovu teoremu, tj. analognu teoremu koja važi za svaki element unutrašnje kompaktnog prostora. Opšta Phragmen-Lindelöfova teorema za eliptičke jednačine slediti iz nje.

<u>Teorema 1.1.</u> (Apstraktni Phragmen-Lindelöfov princip). Neka je S invarijantan u odnosu na translaciju unutrašnje kompaktan prostor. Tada postoji takav pozitivan broj α, da je za sve elemente $u(t) \in S$, za koje integral $\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt$ konvergira, konvergira i integral

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2 e^{\alpha t} dt.$$

Primedba 1.1. Phragmen-Lindelöfov princip važi i u slučaju kada se prostor unutrašnje kompaktnosti odnosi na jedan par intervala.

Teorema govori samo o onim elementima iz S koji su integrabilni na celoj poluosi. Isto tako množenje svakog elementa, invarijantnog u odnosu na translaciju kompaktnog prostora, sa fiksiranim eksponentom e^{-st} generiše drugi unutrašnje kompaktni pr[illegible] denje važi i za one elemente iz S, koji ne rastu brže od eksponenta u beskonačnosti.

Dokaz ove teoreme je dosta složen. Mi ćemo povezati unutrašnju kompaktnost sa spektralnim osobinama operatora translacije – ovo će biti osnova dokaza teoreme 1.1. Teorema 1.2 je posledica teoreme 1.1. i uspostavlja ekvivalentnost između unutrašnje kompaktnog prostora i potpuno neprekidnog operatora translacije u tom prostoru.

1.3. Spektralna analiza operatora translacije

Označimo sa Q podprostor od S, koji se sastoji iz takvih funkcija u, za kojih je integral

$$\int_0^\infty \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \|Cu\|^2 \right\} dt$$

konačan. Veličinu tog integrala označimo je sa $\|u\|^2$ i koristićemo je kao normu u prostoru Q. Sa ovom normom prostor Q postaje Banachov prostor. Prema ranije rečenog, možemo smatrati da je prostor Q zatvoren.

Označimo sa $T(y)$, za $y > 0$, polugrupu operatora translacije

$$T(y)u(t) = u(t+y).$$

Operator $T(y)$ je ograničen na Q, i njegova norma ne prelazi jedinicu.

Sada se Phragmen-Lindelöfova teorema može formulisati u terminima operatora $T(y)$ u sledećem obliku.

Iz konvergencije integrala $\int_0^\infty e^{\alpha t} \|u(t)\|^2 \, dt$, sledi da

$$e^{\alpha y} \int_y^\infty \|u(t)\|^2 \, dt$$

ostaje ograničen, za svako u iz Q.

U terminima operatora $T(y)$ ovo znači da je

$$\|T(y)u\| \leq Me^{-\alpha y}$$

za svaku konstantu M i u iz Q. Iz principa uniformne ograničenosti vidimo da je norma operatora $T(y)$ ograničena veličinom $Me^{-\alpha y}$.

Neka je y jednak celom broju n. Koristeći osobine polugrupe, tj. da je

$$T(n) = T^n(1)$$

dobijamo

$$\|T(n)\| = \|T^n(1)\| \leq Me^{-\alpha n}.$$

Ako se iz obe strane uzme n-ti koren i pusti da $n \to \infty$ dobija se nejednakost

$$\lim_n \|T^n(1)\|^{1/n} \leq e^{-\alpha}.$$

Imajući u vidu poznatu Gelfandovu teoremu, veličina koja stoji na levoj strani je spektralni radijus operatora $T(1)$.

Prema tome, ako važi Phragmen-Lindelöfov princip, onda je spektralni radijus operatora $T(y)$ manji od jedinice, za $y > 0$. Obrnuto, ako je spektralni radijus operatora $T(y)$ manji od jedinice, onda važi Phragmen-Lindelöfov princip.

Dokaz Phragmen-Lindelöfovog principa zasniva se na ovoj ekvivalenciji. Dokazaćemo, da se spektar operatora $T(y)$ sastoji iz diskretnog skupa tačaka, koje leže unutar jedinične kružnice i da imaju ne više od jedne granične tačke - nula. Ovo nas navodi na pomisao da je $T(y)$ potpuno neprekidan operator.

Zaista, važi tvrdenje:

Teorema 1.2. Neka je Q linearan prostor vektorskih funkcija $u(t)$, invarijantan u odnosu na translaciju, integrabilnih na pozitivnoj poluosi. Definišemo normu funkcije u u prostoru Q sa

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \|Cu\|^2 \right\} dt.$$

Tada je operator translacije $T(y)$, $y > 0$, potpuno neprekidan ako i samo ako je Q unutrašnje kompaktan prostor.

Mi ćemo izvesti teoremu 1.2 iz teoreme 1.1.

Najpre, dokažimo da ako je prostor Q unutrašnje kompaktan, onda je operator $T(y)$ potpuno neprekidan.

Potrebna nam je sledeća lema.

Lema 1.1. Neka je Q unutrašnje kompaktan prostor, a $\{u\}$ skup svih elemenata iz Q, koji zadovoljavaju uslove:

a) skup $\{u\}$ je ograničen, tj. $\|u\| \leq M$, za sve u iz toga prostora;

b) elementi iz $\{u\}$ su uniformno mali u beskonačnosti, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji takvo N, da je

$$\|u\|_N^{\infty} = \int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 \, dt < \varepsilon ,$$

za sve u iz toga prostora.

Tada operator $T(y)$ preslikava takav skup u kompaktan.

Dokaz. Moramo da dokažemo da svaki niz $\{u_n\}$ iz našeg skupa sadrži podniz, koji konvergira po normi $\|u\|_N^{\infty}$.

Na osnovu definicije unutrašnje kompaktnosti i pretpostavci o unifomnoj ograničenosti, može se izabrati podniz, koji konvergira po normi $\|u\|_y^N$.

Ako N pustimo da teži beskonačnosti po diskretnom nizu i ostvarimo dijagonalni proces, zbog toga što je funkcija u uniformno mala funkvija u beskonačnosti dobijamo, konvergentan niz.

Ranije smo izveli iz Phragmen-Lindelöfovog principa, da $\|T(y)\|$ teži k nuli, kada $y \to \infty$. Ovo znači, da su elementi jedinične sfere uniformno mali u beskonačnosti. Na osnovu leme 1.1, operator $T(y)$ se tada preslikava jediničnu sferu u kompaktan skup prostora Q, tj. operator $T(y)$ je potpuno neprekidan.

Da bi pokazali obrnuto, tj. da potpuna neprekidnost operatora $T(y)$ znači unutrašnju kompaktnost prostora Q, potrebna nam je sledeća

Lema 1.2. Ako je operator $T(y)$ potpuno neprekidan, za svako pozitivno y, onda je $\|T(y)\|$ manje od jedinice, za svako $y>0$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\|T(y)\| = 1$, za neko $y>0$. Ovo znači da postoji niz funkcija u_n jedinične norme takav te $\|T(y)u_n\| \longrightarrow 1$. Pošto je operator $T(y)$ potpuno neprekidan, podniz od u_n konvergira na intervalu (y,∞). No, , integral od $\|u_n(t)\|$ po intervalu $(0,y)$ teži , tj. podniz konvergira na svim intervalima elementu u_0 iz Q, koji je jednak nuli na intervalu $(0,y)$. Dokažemo, sada, da takav elemenat ne postoji. U tom cilju razmotrimo podprostor Q' prostora Q, koji se sastoji iz onih funkcija $u(t) \in Q$, koje se anuliraju u intervalu $(0,\frac{y}{2})$.

Tvrdimo da je Q' konačnodimenzionalan. Zaista, po uslovu operator $T(y/2)$ jediničnu sferu prostora Q preslikava u kompaktan skup. Tada će tim pre preslikavati u kompaktan skup jediničnu sferu podprostora Q'. No, na Q' operator $T(y/2)$ je izometričan, pa je jedinična sfera u podprostoru Q' kompaktna. Iz ovoga, sledi da je Q' konačnodimenzionalan. Označimo sa n njegovu dimenziju.

Sada, razmotrimo $n+1$ različitih ralnih brojeva d_i, $i=1,\dots,n+1$ koji se nalaze između 0 i $y/2$ numerisanih u rastućem poretku, i $n+1$ funkciju $u_i = u_0(t+d_i)$. Pošto se u_0 anulira na $(0,y)$, onda se u_i anuliraju na $(0,y-d_i)$ i pripadaju Q'. Pošto je dimenzija Q' n, mora postojiti netrivijalna linearna veza između funkcija u_i:

$$u_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i u_i .$$

Svaka funkcija koja figuriše u desnoj strani anulira se na intervalu $(0,y-d_{k-1})$. Sledi da će, takođe i u_k. Ali, ovo znači da se u_0 anulira na intervale $(0,y+d_k-d_{k-1})$. Ponavljajući ovaj postupak dobijamo da se u_0 anulira na celom beskonačnom intervalu.

Označimo normu operatora $T(y)$ sa d. Na osnovu leme 1.2, d je manje od jedinice. Pa je

$$\|u\|_0^y = \int_0^\infty \|u(t)\|\,dt = \|u\| - \|Tu\| \geqslant (1-d)\|u\|.$$

Ovo pokazuje, da veličina u_0^y predstavlja normu, koja je ekvivalentna prvobitnoj. Kako je operator $T(x)$ po pretpostavci potpuno neprekidan, to se jedinična sfera po normi $\|u\|_0^y$ o[illegible] svako pozitivno x, preslikava se u kompaktan skup u smislu prvobitne norme. Unutrašnja kompaktnost prostora sledi iz te činjenice.

1.4. Dokaz Phragmen-Lindelöfovog principa

U prethodnoj tački 1.3 pokazali smo da je Phragmen-Lindelöfo princip ekvivalentan sledećem tvrdenju:

Spektar operatora $T(y)$ na unutrašnje kompaktnom prostoru [illegible] je

i) čisto tačkasti spektar;

ii) leži unutra jedinične kružnice;

iii) da nema više od jedne granične tačke - nula.

Primetimo, da kad bismo znali da je operator $T(y)$ potpuno neprekidan, onda bi na osnovu Rieszove teoreme sledile osobine i) i iii). Pošto ne možemo proširiti egzistenciju Rieszove teoreme na naš slučaj, u kojem su pretpostavke slabije, daćemo novi dokaz Rieszove teoreme, kojeg ćemo se pridržavati u celom dokazu, da naš operator translacije $T(y)$ ima osobine i), ii) i iii).

Novi dokaz zasniva se na sledećoj lemi.

<u>Lemi 1.3.</u> Neka je F proizvoljno ograničeno preslikavanje Banachovog prostora u sebe i neka je λ_0 granična tačka njegovog spektra.

Tada je λ_0 približna sopstvena vrednost tj. postoji takav niz elemenata u_i jedinične norme da

$$\|(F-\lambda_i I)u_i\| \longrightarrow 0.$$

Dokaz. Po pretpostavci λ_o je granična tačka niza $\{\lambda_i\}$ rezolventnog skupa. Norma rezolvente u svakoj tački nije manja, od recipročne veličine rastojanja do proizvoljne tačke spektra, tj.

$$\|(F-\lambda_i I)^{-1}\| \geq |\lambda_o-\lambda_i|^{-1},$$

pa postoje takvi elementi v_i da je

$$\|v_i\| \leq 2|\lambda_o-\lambda_i|, \quad \|u_i\| = \|(F-\lambda_i I)^{-1}v_i\| = 1.$$

$\{u_i\}$ i je traženi niz. Zaista,

$$\|(F-\lambda_o I)u_i\| \leq \|v_i+(\lambda_i-\lambda)u_o\| \leq 3|\lambda_o-\lambda_i| \to 0.$$

U daljem ćemo koristiti dobro poznate rezultate,koji se odnose na invarijantni podprostor N preslikavanja F na Banachov prostor Q.

Lema 1.4. U rezolventnom skupu preslikavanja F na Q sadrži se presek,rezolventnog skupa F na N,sa rezolventtnim skupom F na Q/N.

Lema 1.5. Ako je N konačnodimenzionalan,onda rezolmentni skup F na Q/N sadrži rezolventni skup F na Q.

Neka je,sada, F potpuno neprekidan. Dokazaćemo Rieszovu teoremu, tj.da F ima osobine i) i ii).

Neka je λ_o granična tačka spektra, $\lambda_o \neq 0$. Naosnovu leme 1.3 λ_o je približna sopstvena vrednost. Pošto je F potpuno neprekidan postoji takav podniz u_i, da Fu_i konvergira.Pošto $(F-\lambda_o I)u_i \longrightarrow 0$ i $\lambda_o \neq 0$, niz $\{u_i\}$ takođe konvergira nekom elementu u_o. Norma elementa u_o je jednaka jedinici, i $(F- I)u_o = 0$.Ovo pokazuje da sve granične tačke spektra preslikavanja F pripadaju tačkastom spektru.

Dalje, dokažemo da je svaka granična tačka $\lambda_o \neq 0$ spektra preslikavanja F izolovana. Odavde pomoću prostih teorijsko-skupovnih rasudivanja zaključujemo,da su sve tačke spektra granične tačke i da sve one pripadaju tačkastom spektru. Iz osobina potpune neprekidnosti operatora sledi da je : N nula prostor za $(F-\lambda_o I)^k$ konačnodimenzionalan i za neko k imamo $N_k = N_{k+1}$. Obrazujmo sada faktor prostor Q/N_k. F ostaje potpuno neprekidan i nad ovim prostorom.

Tvrdimo da λ_0 ne leži u spektru preslikavanja F nad Q/N_1.

Zaista, ako to nije tako, ona bi, na osnovu leme 1.5, λ_0 bila granična tačka spektra i, kako smo malopre pokazali, pripadala tačkastom spektru. Ali sopstveni elementi preslikavanja F nad Q/N_k sastoje se iz elemenata prostora Q, ne leže u N_k, koji se preslikavaju u N_k pomoću $F-\lambda_0 I$, a takvi elementi ne p[illegible] $= N_{k+1}$. Dakle, λ_0 leži u rezolventnom skupu preslikavanja F nad Q/N_k, kao i svako λ, dovoljno blizu λ_0.

S druge strane, spektar F nad N_k se potpuno sastoji iz tačke λ_0. Dakle, na osnovu leme 1.4, sve tačke λ, dovoljno bliske λ_0, s izuzetkom same λ_0, pripadaju rezolventnom skupu preslikavanja F nad Q.

Ovo dokazuje da su sve granične tačke izolovane.

Sada, dokazujemo teoremu 1.1. Norma operatora $T(y)$ na Q ne prelazi jedinicu. Dakle, spektar $T(y)$ je smešten unutar i na jediničnoj kružnici.

Naš dokaz teoreme 1.1 zasniva se na sledeće tri osobine spektra operatora translacije na unutranje kompaktnom prostoru.

T v r đ e n j e I. Svaka granična tačka spektra smeštena unutar jedinične kružnice i različita od nule, pripada tačkastom spektru.

T v r đ e n j e II. Svaka granična tačka spektra smeštena unutar jedinične kružnice i različita od nule je izolovana.

T v r đ e n j e III. Sve tačke jedinične kružnice ne pripadaju spektru.

Pri dokazu tvrđenja I, II, III mi ćemo, po mogućnosti da se pridržavamo slučaja potpuno neprekidnog preslikavanja F, koje je gore opisano.

<u>Teorema 1.4.</u> (Princip izbora). Neka je λ_0 kompleksan broj, $\lambda_0 \neq 0$ i $|\lambda_0| < 1$. Neka je $\{u_n\}$ uniformno ograničen niz elemenata unutrašnje kompaktnog prostora, a k takav celi broj, da $(T-\lambda_0 I)^k u_n = v_n$ konvergira nekom limesu v. Tada podniz iz $\{u_n\}$ konvergira prema rešenju u jednačine

$$(T-\lambda_0 I)^k u = v.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati ovo tvrdenje za $k = 1$. Označimo sa $v_n = v + e_n$, tada je $\|e_n\| \to 0$. Koristeći jednakost

$$T^N = \lambda^N + \sum_{r=1}^{N} \lambda^{N-r} T^{N-r}(T-\lambda I),$$

imamo

$$u_n(t+y) = \lambda_o^N u_n(t) + \sum_{r=1}^{N} \lambda^{N-r} v_n(t+(r-1)y)$$

$$= \lambda_o^N u_n(t) + \sum_{r=1}^{N} \lambda_o^{N-r} v(t+(r-1)y) + \sum_{r=1}^{N} \lambda_o^{N-r} e_n(t+(r-1)y)$$

Odavde je, jasno da je u_n uniformno mala u beskonačnosti. Na osnovu leme 1.1, podniz iz $\{T(y)u_n\}$ konvergira na (α,∞), pa niz $\{T(y)u_n\}$ konvergira na $(\alpha-y,\infty)$. Ali, po pretpostavci, $\{(T(y)-\lambda_o I)u_n\}$ je Cauchyev niz na $(0,\infty)$, pa kako je tačka $\lambda_o \neq 0$, niz $\{u_n\}$ takođe konvergira na $(\alpha-y,\infty)$. Ponavljajući ovaj postupak $\left[\frac{\alpha}{y}\right]$ puta, zaključujemo da niz $\{u_n\}$ konvergira na $(0,\infty)$.

Tvrđenje I, sada, nesumnjivo sledi iz teoreme 1.4 i leme 1.5.

Dokaz tvrđenja II je mnogo teži. Teškoća je u dokazivanju da je indeks operatora $T(y)$ na λ_o konačan. Potrebna nam je sledeća lema, koju dajemo bez dokaza.

Lema 1.6. Neka je F ograničeno preslikavanje, λ_o granična tačka njegovog spektra. Tada slika prostora pri preslikavanju $F-\lambda_o I$ ne može biti celi prostor.

Ograničenost inverznog preslikavanja omogućava da proširimo preslikavanje, inverzno $(T-\lambda_o I)$, adherencijom. Označimo sa $\overline{N}$ adherenciju od N. Adherencije N/N_k i N/N_{k+1}, zbog konačnodimenzionalnosti N_k i N_{k+1}, su $\overline{N}/N_k$ i $\overline{N}/N_{k+1}$. Tako imamo sledeću lemu:

Lema 1.7. Operator $T-\lambda_o I$ preslikava $\overline{N}/N_{k+1}$ bijektivno na $\overline{N}/N_k$.

Sada, ćemo, bez dokaza, dati sledeću lemu.

Lema 1.8. Tačka λ_0 ne pripada spektru operatora T na $Q/\overline{N}$.

Kombinacijom lema 1.7 i 1.8, imamo da $(T-\lambda_0 I)$ preslikava Q/N_{k+1} bijektivno na Q/N_k, daklem nesumnjivo Q/N_k na sebe. Po lemi 1.6 λ_0 ne može biti granična tačka spektra T na $Q/\overline{N}_k$. S druge strane λ_0 je po pretpostavci bila limes niza λ_i skupa operatora T na Q. Na osnovu leme 1.5, tačke λ_i pripadaju rezolventnom skupu T na Q/N_k. Dakle, λ_0 mora pripadati rezolventnom skupu operatora T na Q/N_k. Ovo pokazuje,da je k indeks od λ_0.

Sve tačke λ, dovoljne bliske λ_0, pripadaju rezolventnom skupu operatora T na Q/N_k. S druge strane, sve tačke λ, osim tačke λ_0, pripadaju rezolventnom skupu operatora T na N_k. Prema tome, na osnovu leme 1.4, sve tačke λ, dovoljno bliske λ_0, koje se ne poklapaju sa λ_0, pripadaju rezolventnom skupu operatora T na Q.

Ovo dokazuje tvrđenje II: λ_0 je izolovana tačka.

Dokaz tvrđenja III.

Definicija 1.2. Neka S označava adherenciju prostora Q po konvergenciji u L_1 na svakom konačnom intervalu.

Primedba 1.2. Jedna od posledica teorije koja je razvijena u ovoj glavi, sastoji se u tome, da se S poklapa sa Q, ali mi ne možemo koristiti tu činjenicu u ovoj etapi.

Lema 1.9. Ako λ pripada spektru operatora T na Q i $|\lambda| = 1$, onda λ pripada tačkastom spektru operatora T na S.

Dokaz. Neka je λ tačka spektra operatora T na Q, $|\lambda| = 1$. Pošto spoljašnost jedinične kružnice pripada rezolventnom skupu, onda je λ približna sopstvena vrednost u smislu leme 1.3, tj. postoji takav niz $\{u_i\}$ da

$$\varepsilon_i = \frac{\|(T-\lambda I)u_i\|}{\|u_i\|} \longrightarrow 0.$$

Neka je a dužina proizvoljnog segmenta. Zapišimo kao količnik dve sume

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \|(T-\lambda I)u_i\|_{an}^{a(n+1)}}{\sum_{n=0}^{\infty} \|u_i\|_{an}^{a(n+1)}} .$$

Tada postoje takvi celi brojevi n_i da je

(1.1) $$\|(T-\lambda I)u_i\|_{an}^{a(n+1)} \leqslant \varepsilon_i \|u_i\|_{an}^{a(n+1)} \neq 0, \quad n = n_i .$$

Definišimo

$$v_i(t) = u_i(t+an_i)$$

i pretpostavimo da su u_i normirani tako da je $\|v_i\|_o^a = 1$. Tada iz (1.1) sledi da je

(1.2) $$\|(T-\lambda I)v_i\|_o^a \leqslant \varepsilon_i .$$

Zbog unutrašnje kompaktnosti postoji podniz iz v_i koji je Cauchyev niz na intervalu (c,d).

<u>Lema 1.10.</u> Ako je $\{v_i\}$ niz funkcija, koji čini Cauchyev niz na intervalu (c,d), takav da je $\{(T-\lambda I)v_i\}$, $\lambda \neq 0$, nula niz na većem intervalu $(0,a)$. Onda je $\{v_i\}$ Cauchyev niz na većem intervalu $(0,a)$.

<u>Dokaz.</u> Kako je $\{v_i\}$ Cauchyev niz na (c,d), onda je $\{Tv_i\}$ Cauchyev niz na $(c-y,d-y)$. Ali, po uslovu, $\{(T-\lambda I)v_i\}$ je nula niz na $(0,a)$. Sledi, pošto je $\lambda \neq 0$, da je $\{v_i\}$ takođe Cauchyev niz na $(c-y,d-y)$. Ponavljajući ovaj postipak konačan broj puta, zaključimo da je $\{v_i\}$ Cauchyev niz na $(0,d)$. Na isti način se pokazuje da je $\{v_i\}$ Cauchyev niz na (c,a), pa prema tome i na celom intervalu $(0,a)$.

Označimo sa v limes od v_i, v ima jediničnu normu na $(0,a)$ i zadovoljava uslov

$$Tv = \lambda v \quad \text{na } (0,a-y).$$

Dalje, neka dužina a našeg intervala raste. Za svako a konstruišemo v_a i normiramo ga tako da ima jediničnu normu na nekom fiksiranom intervalu $(0,b)$, to znači $\|v_a\|_0^b = 1$. Ove funkcije v_a su limes elemenata iz Q, na intervalu $(0,a)$. Primenimo princip unutrašnje kompaktnosti na njih. Posebno, iz njih se može izabrati niz, koji konvergira na nekom podintervalu (c,d) -

Iz funkcionalne jednačine $Tv_a = \lambda v_a$, može se zaključiti, da da niz $\{v_a\}$ konvergira na svakom konačnom intervalu pozitivne poluose i da limes v ima jediničnu normu na $(0,b)$ i zadovoljava jednačinu $Tv = \lambda v$. Naša funkcija v je limes od v_a, a v_a su limesi funkcija v_i na $(0,a)$. Pa kako su v_i iz Q, sledi da v pripada S.

Sada, dokažemo da $\lambda = -1$, (i upštem slučaju svako λ po modulu jednako jedan, osim $\lambda = 1$) ne pripada spektru operatora $T(y)$, za malo y.

Pretpostavimo suprotno da niz vrednosti $y = y_m$, $m = 1,2,\ldots$, teži nuli. Na osnovu leme 1.9 postoje odgovarajuće sopstvene funkcije $v = v_m$ iz S, koje zadovoljavaju funkcionalnu jednačinu

$$v_m(t+y_m) = - v_m(t),$$

pri čemu sve v_m imaju jediničnu normu na $(0,b)$. Takav niz funkcija oscilira sa rastućom frekvencijom, što se protivureči unutrašnjoj kompaktnosti. Dakle, $\lambda = -1$ ne pripada spektru operatora $T(y)$, za malo y.

Iz toga sledi da otvoreni skup, oko $\lambda = -1$ pripada rezolventnom skupu operatora $T(y)$. Ovo i jeste tvrđenje III, za malo y. Iz Tvrđenja II i III zaključujemo da se spektar operatora $T(y)$ unutar jedinične kružnice sastoji iz izolovanih tačaka i jedina moguća granična tačka unutar jedinične kružnice je $\lambda = 0$. Tako je, na osnovu teoreme o preslikavanju spektra, $T(y)$ ima isti karakter i za svaku vrednost y.

Dalje, dokažemo da spektar nema tačaka na jedeničnoj kružnici, a takođe, da na jediničnoj kružnici nema ni graničnih tačaka spektra.

Za svaki elemenat $u \in S$ definišemo

$$u_s = e^{-st}u, \quad \text{za} \quad s > 0.$$

Označimo sa S_s skup svih takvih u_s. S_s je linearan prostor, koji je takođe invarijantan u odnosu na translaciju i unutrašnju kompaktnost.

Primedba 1.3. Ovde koristimo važnu činjenicu, da je eksponencijalna funkcija karakteristična polugrupa, formirana na pozitivnoj poluosi.

Osim toga, ako λ_0 pripada tačkastom spektru operatora translacije $T(y)$, definisanom na S, onda $\lambda_0 e^{-sy}$ leži u tačkastom spektru operatora $T(y)$, definisanom na S_s. Označimo sa Q_s podprostor od S_s, koji se sastoji iz takvih u_s, koji su integrabilni na $(0,\infty)$. Ako spektar operatora $T(y)$ na Q ima graničnu tačku na jediničnoj kružnici, onda će spektar $T(y)$ na Q_s, za $s = 0$, $y > 0$ imati graničnu tačku unutar jedinične kružnice. Ali, po tvrđenju I, ta granična tačka pripada tačkastom spektru, i dakle, po tvrđenju II, ona je izolovana tj. nije granična tačka. Ovo pokazuje da spektar operatora T na Q nema graničnih tačaka na jediničnoj kružnici.

Sada, ćemo dokazati da na samoj jediničnoj kružnici nema tačaka spektra operatora T. Najpre dokažemo, da je skup vrednosti s, za koje spektar T na Q ima tačku na jediničnoj kružnici, diskretan. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji beskonačan ograničen skup takvih tačaka s_i, da spektar T na Q_{s_i} ima tačku λ_i na jediničnoj kružnici. Na osnovu leme 1.9, postoji element

$$(1.3) \qquad v_i(t+y) = \lambda_i v_i(t), \ |\lambda_i| = 1$$

pri čemu v_i leži u adherenciji Q_{s_i} po L_1 norme na svakom konačnom intervalu. Očigledno da je adherencija od Q_{s_i}, S_{s_i}.

Posebno, v_i moraju imati oblik

(1.4) $$v_i = \exp(-s_i t)u_i, \text{ za } u_i \in S.$$

Iz funkcionalne jednačine (1.3), koju zadovoljavaju v_i, sledi da su $v_i e^{-\alpha t}$ integrabilne na $(0,\infty)$, za svako pozitivno α, i ako je s veće od s_i, onda

$$w_i = e^{-st}u_i = e^{(s_i-s)t} v_i$$

pripadaju Q_s. Očigledno, da su w_i sopstveni elementi operatora $T(y)$ na Q_s sa sopstvenim vrednostima $\mu_i = \lambda \exp(s_i-s)y$ i $|\mu_i| = \exp(s_i-s)y$. Ako, sada, bi imali beskonačno mnogo vrednosti s_i manjih od s, onda bi spektar T na Q_s imao graničnu tačku različitu od nule. A ovo je kako smo videli ranije, nemoguće.

Neka je, sada, s pozitivan broj, tako da spektar T na Q_s nema tačaka na jediničnoj kružnici. Ranije pokazali smo da spektar graničnih nema tačaka na jediničnoj kružnici, pa otuda sledi, da je spektralni radijus operatora T manji od jedinice. A ovo, na osnovu tačke 1.3, znači, da na Q_s je primenjiv Phragmen-Lindlöfov principa. Na osnovu teoreme 1.2 operator T je potpuno neprekidan na Q_s.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali, a P operator projektovanja Q_s u sopstveni prostor operatora $T(1)$ na Q_s, koji odgovara sopstvenim vrednostima, čija apsolutna veličina nije manja od ε. Pošto je operator T potpuno neprekidan na Q_s, to je kodomen operatora P konačnodimenzionalan.

Svaki element $u_s \in Q_s$ se može prikazati kao zbir

(1.5) $$u_s = v_s + w_s,$$

gde je $v_s = Pu_s$ i pripada kodomenu operatora P, a w_s se poništava operatorom P. Iz definicije operatora P sledi, da se podprostor Q_s, elemenata w_s, koje poništava operator P, preslikava u sebe operatorom $T(1)$ i spektar $T(1)$ na Q_s, pripada unutrašnosti kružnice radijusa ε. Na osnovu Gelfandove formule za spektralni radijus, sledi da je norma operatora $T^n(1)$ manja od ε^n na Q_s, za dovoljno veliko n. Posebno, ako je w_s makoji element iz Q_s, onda j

(1.6) $\|T^n(1)w_s\| = \|w_s\|_n^\infty \leqslant \varepsilon^n$, za veliko n.

Na osnovu definicije prostora Q_s svaki element w_s iz Q_s je oblika

$$w_s = e^{-st}w; \quad w \in S.$$

Ako w_s pripada Q_s, onda iz (1.6) sledi, da za ε manje od e^{-s}, w je integrabilna i, više od toga, eksponencijalno opada, tj.

(1.6') $\|w\|_n^\infty \leqslant r^n$

za veliko n, gde je $r = \varepsilon e^s$.

Vratimo se, sada, kodomenu operatora P u Q_s. On je invarijantan u odnosu na translaciju konačnodimenzionalnog podprostora od Q_s. Saglasno klasičnim i dobro poznatim Cauchyevim rezultatima jednoparametraska polugrupa linearnih preslikavanja konačnodimenzionalnom prostoru je eksponencijalna, tj.

$$T(y) = e^{Ay},$$

gde je A neko linearno preslikavanje konačnodimenzionalnog prostora u sebe.

Na osnovu spektralne teorije matrica, sopstveni elementi i pridruženi elementi A generišu razmatrani prostor. Po što je polugrupa operatora translacija, to sledi, da sopstveni elementi A moraju biti eksponencijalne funkcije od t, a pridruženi sopstveni elementi t^n, pomnoženi eksponencijalnom funkcijom, Na ovaj način, smo pokazali

Lema 1.11. Kodomen operatora P generiše se eksponencijalnim polinomima, tj.

(1.7) $$v_s(t) = p)t)e^{\mu t}v(0),$$

gde je p polinom, μ pripada konačnom skupu i stepen od p ne prelazi neki broj.

Neka je, sada, u proizvoljni elemenat iz Q. Konstruišemo $u_s = e^{-st}u$ iz Q_s i prikažemo u_s u obliku zbira (1.5). Na taj način dobijamo reprezentaciju za u:

(1.5′) $$u = u + w,$$

gde v je e^{st}, pomnožen elementom iz kodomena P, a w je e^{st}, pomnožen elementom iz Q_s. Na osnovu (1.6′), w pripada Q. [illegible] takođe mora pripadati Q. Iz (1.7), onda sledi da je $v = e^{st}v_s$ takođe eksponencijalni polinom. Pošto on pripada Q, tj. integrabilan je na $0 \leqslant t \leqslant \infty$, svi eksponenti moraju imati realni deo manji od nule. Pošto su eksponenti u reprezentaciji v eksponencijalni polinomi koji pripadaju konačnom skupu sledi, da sve takve funkcije v opadaju eksponencijalno i uniformno, tj.

(1.8) $$\|v\|_n^{\infty} \leqslant \delta^n$$

za veliko n i za neku konstantu δ, manju od jedinice, istoj za sve v oblika $e^{st}v_s$, pri čemu v_s pripada kodomenu P.

Pošto se svaki element iz Q može se prikazati u obliku (1.5′) i kako u (1.6′) i (1.8) obe odgovarajuće komponente v i w eksponencijalno opadaju, sledi da svaki element u iz Q eksponencijalno opada.

Ovim se završava dokaz teoreme 1.1.

1.5. Posledice Phragmen-lindlöfovog principa

Pri dokazu leme 1.2 mi smo dokazali da ne postoji elemenat u(t) unutrašnje kompaktnog prostora, koji se svodi na nulu na int[illegible] t ose i koji nije jednak nuli, za sve velike vrednosti t. Drugim rečima elementi unutrašnje kompaktnog prostora imaju osobinu jednoznačnog produženja u pozitivnom smeru. Prirodno se nameće pitanje :

da li elementi unutrašnje kompaktnog prostora imaju osobinu jednoznačnog produženja u obrnutom pravcu ? Tj. može li se elemenat $u(t)$ takvog prostora Q svesti na nulu, za sve $t > n$, bez anuliranja za sve vrednosti t.

Opštije i povezanije sa prvim pitanjem : može li elemenat $u(t)$ unutrašnje kompaktnog prostora opadati brže od svakog da ne bude identički jednak nuli? Mi ćemo kasnije dokazati § , odgovor na to pitanje negativan ako i samo ako je sistem sopstvenih funkcija operatora translacije kompletan.

Pošto je operator $T(y)$ potpuno neprekidan, svakoj tački njegovog spektra se može pridružiti odgovarajući operator projektovanja, čiji je kodomen sopstveni prostor operatora T, koji odgovara toj tački. Kao što je pokazano u t.1.4, te sopstvene funkcije su eksponenti od t i stepeni od t, pomnoženi eksponentima. Iz tih projekcija može se sastaviti Fourierov red za svaki element u iz Q :

$$u \sim \sum u_i$$

gde je u_i projekcija u u i-ti sopstveni prostor operatora T.

Neka su sopstvene vrednosti λ_i numerisane u opadajućem poretku apsolutnih vrednosti veličina. Interesantno pitanje, naročitu za primenu je, da li konvergira taj Fourierov red ka u i uopšte da li se može koristiti za reprezentaciju u ?

Ovo pitanje konvergencije zavisi od kompletnosti sistema sopstvenih funkcija. Ali, iz razmatranja na kraju t.14, sledi da Fourierov red konvergira u asimptotskom smislu.

<u>Teorema 1.5.</u> Neka je Q, kao ranije, unutrašnje kompaktan prostor integrabilnih funkcija. Tada je Fourierov red, odgovarajući operatora $T(y)$, asimptotski za $t = \infty$, tj. razlika između u i svakog ostatka njenog Fourierovog reda opada u beskonačnosti s istom brzinom kao i prvi izostavljeni član.

Tačnije, ako označimo sa s_n zbir prvih n članova Fourierovog reda funkcije u a sa r_n ostatak reda :

$$u = s_n + r_n .$$

Tada je

$$\|r_n\|_t^{\infty} \leq |\lambda_{n+1}|^t .$$

§2. Konkretna Phragmen-Lindelöfova teorema

U ovom paragrafu ćemo dokazati, da je apstraktna teorema 1.1 iz prvog paragrafa primenjiva u prostoru rešenja apstraktne eliptičke jednačine drugog reda (može i proizvoljnog reda) na poluosi $t>0$.

2.1. Unutrašnja kompaktnost

Najpre ćemo dokazati sledeće dve leme.

Lema 2.1. Neka je K zatvoren ograničen skup u R^n, koji je podskup otvorenog skupa G, tada je rastojanje d od K do $\dot{G}$ pozitivno.

Dokaz. Rastojanje d je definisano sa:

$$d = \inf\left\{\|x - y\| \;:\; x\in K,\ y\notin G\right\}.$$

Pretpostavimo da je $d = 0$. Tada postoji takav niz $\{x_i\}$ iz K, za koji rastojanje između K i G teži nuli. Na osnovu Bolzano-Weierstrassove teoreme iz $\{x_i\}$ može se izdvojiti konvergentan podniz, čija granična vrednost pripada K, a time i samom G, ali, nije unutrašnja tačka za G. Međutim, ovo je u protivurečnosti sa pretpostavkom da je G otvoren skup.

Lema 2.2. Ako je K ograničeni zatvoreni skup u R^n, koji je sadržan u otvorenom skupu G, onda postoji takva funkcija χ (funkcija iz C_0^{∞}), da je

1° $\chi(x) = 1$, za $x\in K$;

2° nosač od χ leži u G;

3° $0\leq \chi(x)\leq 1$, za sve x.

Ova varijanta za C^{∞} je specijalan slučaj Urysonove leme.

Dokaz. Neka je

$$\delta = \frac{1}{3}\inf\left\{\|x - y\| \;:\; x\in K,\ y\notin G\right\}.$$

Zbog leme 2.1 je $\delta > 0$. Neka je $d(x)$ rastojanje od x do G, za svako x. Definišimo funkciju f na sledeći način :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } d(x) \leq \delta, \\ [d(x)-\delta]/\delta & \text{za } \delta \leq d(x) \leq 2\delta, \\ 1 & \text{za } 2\delta \leq d(x). \end{cases}$$

Intuitivno je jasno, da je funkcija $f(x)$ neprekidna. Funkcija $f(x)$ ima sve osobine koje se traže za funkciju $\chi(x)$, sa izuzetkom što je trebo izgladiti, da bi ona postala funkcija klase C^{∞}. Faktor $1/\delta$ u definiciji δ deli polja u oblasti između K i G, da bi glađenje bilo bez gubljenja drugih osobina. Izvršimo glađenje pomoću glađenja funkcije $\gamma(x)$ iz C^{∞}, izabrane tako da

a) nosač od $\gamma(x)$ leži u sferi $\|x\| < \delta$;

b) $\int \gamma(x)dx = 1$, za $x \in R^n$;

c) $\gamma(x) \geq 0$, za sve x.

Tada funkcija

$$\chi(x) = \int f(y)\gamma(x-y)dy, \quad y \in R^n$$

ima osobine tražene u teoremi.

Sada posmatramo skup rešenja našeg problema.

Neka je dat eliptički operator L drugog reda, tj. jednačina (1.1) iz glave II :

$$Lu \equiv -\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Cu = 0 \tag{2.1}$$

s uslovom eliptičnosti

$$\|Bu\| \leq \theta \|C^{1/2}u\|, \quad \text{za } \theta < 2, \; u \in \mathcal{D}(C). \tag{2.2}$$

Dokazaćemo da rešenja eliptičke jednačine (2.1) zadovoljavaju princip unutrašnje kompaktnosti, u smislu definicije 1.1 iz §1 ove glave.

<u>Teorema 2.1.</u> (Princip unutrašnje kompaktnosti). Neka je dat proizvoljni interval $G = (a,b)$ i $G' = (a',b')$ podinterval, koji nema sa njim zajedničkih graničnih tačaka tj. $G' \subset G$. Tada skup rešenja problema (2.1)-(2.2), zadovoljava uslov $\|u\|_G \leq 1$, prekompaktnosti po normi $\|u\|_{G'}$.

Dokaz. Neka je $\chi(t)\in C_0^{\infty}(G)$, $\chi(t) = 1$ u okolini G', gde takva funkcija postoji zbog leme 2.2. Tada je

$$\tilde{u}(t) = (\chi(t)u(t))/_{G'} .$$

Počnimo od nejednakosti

$$\int_a^b \|L\chi u\|^2 dt \geqslant M_1 \int_a^b \left\{ \left\| \frac{d^2(\chi u)}{dt^2} \right\|^2 + \|C\chi u\|^2 \right\} dt$$

ili, imajući u vidu pretpostavke, dobijamo

$$\text{(2.3)} \qquad \int_a^b \|L\chi u\|^2 \, dt \geqslant \int_{a'}^{b'} \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \|Cu\|^2 \right\} dt.$$

Dalje,

$$L\chi u = -\frac{d^2(\chi u)}{dt^2} + B\frac{d(\chi u)}{dt} + C\chi u$$

$$= -\chi\frac{d^2u}{dt^2} - 2\chi'\frac{du}{dt} - u\chi'' + \chi B\frac{du}{dt} + \chi' Bu + \chi Cu$$

$$= \chi\left(-\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Cu\right) - 2\chi'\frac{du}{dt} - \chi'' u + \chi' Bu.$$

Kako je u rešenje jednačine (2.1), tj. $Lu = 0$, onda dobijamo

$$L\chi u = -2\chi'\frac{du}{dt} - \chi'' u + \chi' Bu.$$

Odatle, na osnovu (2.3) imamo

$$\int_{a'}^{b'} \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \|Cu\|^2 \right\} dt \leqslant \int_a^b \left\| -2\chi'\frac{du}{dt} - \chi'' u + \chi' Bu \right\|^2 dt$$

$$\leqslant \left\{ 2\int_a^b |\chi'(t)|^2 \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \right\}^{1/2} + \left\{ \int_a^b |\chi'(t)|^2 \|Bu\|^2 dt \right\}^{1/2} + \left\{ \int_a^b |\chi''(t)|^2 \|u\|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Na osnovu uslova eliptičnosti (2.2) i stavljajući

$$M_2 = \max\{\max|\chi(t)|, \max|\chi'(t)|, \max|\chi''(t)|\}$$

dobijamo

$$\text{(2.4)} \qquad \int_{a'}^{b'} \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \|Cu\|^2 \right\} dt \leqslant M_3 \int_a^b \left\{ \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \|C^{1/2}u\|^2 \right\} dt.$$

Po pretpostavci je $\|u\|_G \leqslant 1$, tj.

$$\int_a^b \left\{ \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \| C^{1/2} u \|^2 \right\} dt \leq 1,$$

odatle, zbog (2.4), sledi da je

(2.5) $$\int_a^b \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \| Cu \|^2 \right\} dt \leq M_4.$$

Ali, skup (2.5) u metrici

$$\int_a^b \left\{ \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \| C^{1/2} u \|^2 \right\} dt$$

je komapaktan. Drugim rečima treba pokazati da je skup $\{u(t)\}$

$$\int_a^b \left\{ \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \| C^{1/2} u \|^2 \right\} dt \leq 1$$

u metrici

(2.6) $$\int_{a'}^{b'} \left\{ \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \| C^{1/2} u \|^2 \right\} dt$$

kompaktan, gde je $(a',b') \subset (a,b)$.

Možemo staviti da je $(a',b') = (-\bar{u},\bar{u})$. U prostoru $L_2(-\bar{u},\bar{u};H)$ uzmimo

$$e_{n,m} = e^{int} e_m ,$$

gde je

$$Ce_m = \lambda_m e_m \ ; \ \lambda_m \to \infty, \text{ jer je } 0 < C^{-1} \in \sigma_\infty .$$

Sistem $e_{n,m}$ je potpuno ortonormiran.

$$u(t) = \sum_{n,m} a_{n,m} e^{int} e_m \ ; \quad a_{n,m} = \frac{1}{2\bar{u}i} \int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} (u(t),e_m) e^{int} dt$$

Dokazali smo da iz (2.6) sledi

$$\int_{a'}^{b'} \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \| Cu \|^2 \right\} dt \leq M.$$

Dalje,

$$u'' = \sum_{n,m} n^2 a_{n,m} e^{int} e_m \ ; \quad Cu = \sum_{n,m} {}_m a_{n,m} e^{int} e_m$$

ili

(2.7) $$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|^2 + \| Cu \|^2 \right\} dt = \sum_{n,m} (n^4 + \lambda_m^2) a_{n,m}^2 \leq M.$$

Treba dokazati da je skup (2.7) kompaktan u metrici

$$\sum_{n,m} (n^2+\lambda_m)a^2_{n,m} .$$

Ocenimo "rep" $\sum_{n,m>N} (n^4+\lambda^2_m)a^2_{n,m}$ uniformno po $a_{n,m}$.

$$\geqslant \sum_{n,m>N} (n^4+\lambda^2_m)a^2_{n,m} \geqslant \sum_{n,m>N} (N^2n^2+\lambda_N\lambda_n)a^2_{n,m} \geqslant \min(N,\lambda_N) \sum_{n,m>N}$$

$$\sum_{n,m>N} (n^2+\lambda_m)a^2_{n,m} \leqslant \frac{M}{\min(N,\lambda_N)} < \varepsilon .$$

Ovo i jeste kompaktnost, zbog toga što je

$$\sum_{n,m\leqslant N} (n^2+\lambda_m)a^2_{n,m} \leqslant 1,$$

kompaktno, i dalje na osnovu Hausdorffovog stava o egzistenciji konačne ε- mreže.

<u>Primedba 2.1.</u> Primetimo da se ovaj rezultat se može proširiti na slučaj kada G' i G imaju zajedničke granične tačke, pod uslovom, da razmatrana rešenja zadovoljavaju Dirichletove uslove nulte na delovima granice, koji sadrži zajedničke granične tačke G i G'. Za se tada primeni uopšteni princip unutrašnje kompaktnosti.

2.2. Primena Phragmen-Lindelöfovog principa

Primenom apstraktnog Phragmen-Lindelöfovog principa (Teorema 1.1) dobijamo sledeću teoremu. Osim toga, dokazaćemo, teoremu 2.3, da je konkretni Phragmen-Lindelöfov princip primenjiv za rešavanje eliptičkih jednačina u svakoj neograničenoj oblasti, pod uslovom da je eliptički operator pozitivan u razmatranoj oblasti.

Teorema 2.2. Neka je L eliptički operator date jednačine (2.1) čiji koeficijenti ne zavise od t. Neka je u rešenje jednačine (2.1) : $Lu = 0$; Dirichletovim uslovima nultim: $u(0) = 0$; integral uzet po normi prostora H_2 je konačan:

$$\int_0^{\infty}\left\{\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2 + \|Cu\|^2\right\}dt < \infty .$$

Tada rešenje u eksponencijalno opada po t, u tom smislu da je integral u, uzet po oblasti polucilindra $t \geqslant H$, manji od $Ke^{-\alpha H}$. Veličina α, je pozitivna i zavisi samo od operatora L i razmatrane oblasti, ali ne od konkretnog rešenja u.

Sada, nas interesuje uopštena teorema 2.2. Koristićemo sledeću terminologiju.

Neka je D polucilindar $t > 0$ s osnovom D_o, pretpostavimo da je D_o ograničena oblast s glatkim rubom. Neka je L eliptički operator reda $2m$, čiji su koeficijenti glatke funkcije nezavisne od promenljive t. Označimo sa S prostor rešenja jenačine $Lu = 0$ u oblasti D Dirichletovim uslovima nultim na vertikalnim delovima ruba. Smatraćemo da su te funkcije u funkcije jedne promenljive t, čije funkcionalne vrednosti, pripadaju prostoru funkcija definisanih na D_o, normiranim kvadratnim korenom iz "Dirichletovog integrala" nad D_o. Očigledno, da je prostor S invarijantan u odnosu na translaciji.

Definicija 2.1. Kaže se da je eliptički operator L pozitivan u oblasti D, ako nejednakost

(2.8) $$M\|u\|^2 \leq (u,Lu)$$

važi za sve glatke funkcije u sa kompaktnim nosačem u D, tj. jednaka nuli van nekog zatvorenog ograničenog podskupa od D, pri čemu konstanta M ne zavisi od u.

Adherenciju prostora glatkih funkcija s konačnim "Dirichletovim integralom", u smislu "Dirichletove norme", označićemo sa Q. Operacija množenja sa ψ, gde je funkcija Ψ sa m neprekidnim ograničenim izvodima, je ograničena operacija i, sledi, ima potpuno definisane vrednosti za elemente iz Q. Adherenciju prostora glatkih funkcija s kompaktnim nosačem u D označićemo sa Q^{o}.

<u>Definicija 2.2.</u> Kažemo da elemenat u iz Q ima <u>nulte Dirichletove uslove na otvorenom delu ruba</u> γ na D, ako Ψu pripada Q^{o} uvek kada je faktor Ψ glatka funkcija definisana na celom prostoru, čiji je nosač kompaktan podskup celog prostora i sadrži samo one granične tačke oblasti D, koje leže u γ.

Očigledno, da ako u uzima nulte Dirichletove uslove na celom D, onda ustvari, u pripada Q^{o}.

<u>Teorema 2.3.</u> Neka je D neograničena oblast, L eliptički operator s glatkim koeficijentima, pozitivan na D. Neka je u rešenje jednačine $Lu = 0$ sa nultim Dirichletovim uslovima na onom delu ruba D, koji leži u poluprostoru $t > 0$, i neka u ima konačan "Dirichletov integral" na D.

Tada u eksponencijalno opada, kada t raste, tj. "Dirichletov integral" od u po tom delu D, koji je sadržan u poluprostoru $t \quad N$, manji od $Ke^{-\alpha N}$. Veličina α zavisi samo od infimuma operatora L (od konstante u nejednakosti (2.8)), i od veličine, koja ograničava koeficijente L i nekog broja njihovih izvoda.

<u>Dokaz.</u> Uvedimo pomoćnu funkciju

$$f_N(t) = \begin{cases} t & \text{za} \quad t < N-1 \\ N & \text{za} \quad N < t, \end{cases}$$

glatko zatvorljivu između $N-1$ i N. Očigledno, da se može tako udesiti da prvih $2m$ izvoda od f_N, ali ne sama funkcije f_N, budu uniformno ograničeni nekom konstantom, za svako t i N.

Ako u zadovoljava jednačinu $Lu = 0$, onda će funkcija $u_N = \exp(\alpha f_N)u$ zadovoljiti jednačinu $L_N u_N = 0$. Operatori L_N i L vezani su formulom

$$Lu = e^{-\alpha f_N} L_N e^{\alpha f_N} u.$$

Operator L_N razlikuje se od L za $\alpha\tilde{L}$, gde je $\tilde{L}$ operator reda $2m-1$, čiji su koeficijenti polinomi od α i izvodi od f_N do reda $2m$. Pošto se operator malo razlikuje od pozitivno definitnog, i sam je pozitivno definitan, i kako je osim toga, operator L, po pretpostavci, pozitivno definitan, otuda sledi da je za dovoljno malo α i L_N pozitivno definitan. Izbor α i vrednosti infimuma kvadratne forme, generisane operatorom L_N, zavisi samo od veličina pomenutih u teoremi 2.3, ali ne i od N.

Uvedimo, dalje, još jednu pomoćnu funkciju

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 1/3 \\ 1 & \text{za } 2/3 < t, \end{cases}$$

glatku u intervalu $(1/3,2/3)$. Definišimo $v_N = cu_N = ce^{\alpha f_N}u$. Ako u ima nulte Dirichletove uslove u svim graničnim tačkama D u poluprostoru pozitivnih t, onda je jasno, da v_N pripada Q^o.

Koristićemo ovu činjenicu umesto pozitivne kvadratne forme, generisane sa L_N, da bismo dokazali nejednakost, koja figuriše u teoremi 2.3. Iz pozitivnosti L_N imamo

$$(2.9)\qquad (v_N, L_N v_N) \geqslant M\|v_N\|^2.$$

Dalje, ako je u rešenje jednačine $Lu = 0$, onda je $v_N = cu_N$ rešenje jednačine $L_N v_N = 0$ u tom slučaju, kada je faktor c identički jednak nuli ili jedinici, tj. van oblasti $(1/3 < t < 2/3)$. U toj oblasti funkcija v_N i operator L_N faktički ne zavise od parametra N. Otud leva strana nejednakosti (2.9) ne zavisi od N. Desna nesumnjivo nije manja od konstante, pomnožene "Dirichletovim integralom" od v_N, uzetim po podskupu oblasti D, a naime po $t > N$. Na tom podskupu, isto tako, je v_N jednako $e^{\alpha N} u$. Dakle, iz (2.9) sledi da proizvod $e^{\alpha N}$ i "Dirichletovog integrala" od u uzet po delu D, koji je sadržan u $t > N$, uniformno ograničen, kao što se tvrdi u teoremi 2.3.

Ostao je još jedan problem, koji treba rešiti: pri izvođenju nejednakosti (2.9), smo pretpostavili, da je kvadratna forma, generisana sa L_N pozitivna za v_N, pošto pozitivnost znači, da je $(w, L_N w)$ pozitivno za glatke funkcije s kompaktnim nosačem. Da bi opravdali primenu toga uslova za $w = v_N$, potrebno je da pređemo na limes, što ćemo sada i učiniti.

Zbog jednostavnijeg pitanja pisanja ćemo izostaviti indeks N i umesto v_N pisati v i L umesto L_N.

Najpre transformišimo bilinearnu formu $(w, Lz) = B(w,z)$, definisanu za glatke funkcije w, z sa kompaktnim nosačem pomoću m-strukog parcijalnog integrisanja, u integralu bilinearne forme b od w, z i njenih parcijalnih izvoda do reda m

$$B(w,z) = \int_D b(w,z) \ . \tag{2.10}$$

Iz ove jednakosti za B vidi se da B neprekidno zavisi od svojih argumenata u m-normi i predstavlja reprezentaciju proširenja B na Q^o. Po neprekidnosti, funkcija B, je pozitivno definisana na Q^o. Određenije pošto $v = v_N$ pripada Q^o, imamo

$$B(v,v) \geqslant M \|v\|^2 \ . \tag{2.11}$$

Neka je, sada, $\{v_n\}$ niz glatkih elemenata sa kompaktnim nosačem, koji teži ka v u m-normi. Zbog neprekidnosti funkcije B imamo

$$B(v,v) = \lim_{n} B(v_n, v). \tag{2.12}$$

Pošto je funkcija v integrabilna s kvadratom izvoda do reda $2n$ u svakom kompaktnom podskupu oblasti D i pošto su nosači v_n kompaktni, možemo desnu stranu (2.12) integraliti parcijalno. Dobijamo

$$B(v_n,v) = (v_n,Lv).$$

Što je primećeno gore, Lv jednako nuli izvan intervala $(1/3,2/3)$, pa je, ako se pomoćna funkcija $d(t)$ izabere tako da je ona jednaka jedinici na $(1/3,2/3)$, a nuli van $(0,1)$ i da je glatka na ostalim delovima, onda će (v_n,Lv) biti jednako sa

$$(dv_n,Lv) = B(dv_n,v).$$

Ako se pusti da $n \to \infty$, imamo

$$B(v,v) = B(dv,v). \tag{2.13}$$

Koristeći reprezentaciju (2.10) za $B(dv,v)$, uočavamo, da njegova veličina zavisi samo oblasti vrednosti v na $0<t<1$, tj. ne zavisi od N. Ovo otklanja nedostatak u našem izvodenju nejednakosti (2.9), pa je time dokaz teoreme potpuno završen.

2.3. Spektralna sinteza

U ovoj tački ćemo tretirati problem kompletnosti sistema sopstvenih funkcija operatora translacije, pri čemu ćemo raditi u okviru paragrafa jedan.

Neka je Q, invarijantan u odnosu na translaciju, unutrašnje kompaktan prostor vektorskih funkcija $u(t)$ na pozitivnoj poluosi. Pretpostimo da svaka funkcija $u(t)$ pripada prostoru L_2 na pozitivnoj poluosi, i označimo normu funkcije u sa $\|u\|$ u prostoru L_2. Neka je Q zatvoren u toj normi.

Na osnovu teoreme 1.2, operator translacije $T(y)$, $y>0$ je potpuno neprekidan. Neka je $\{u_n\}$ skup svih sopstvenih funkcija.

Definicija 2.3. Kažemo da je sistem $\{u_n\}$ kompletan u Q, ako je jedinstveni element u iz Q, čiji su svi Fourierovi koeficijenti jednaki nuli, je nulti element.

Lema 2.3. Ako su svi Fourierovi koeficijenti za $\bar{u}$ jednaki nuli, onda u opada brže od svakog eksponenta od t, i obrnuto.

Dokaz. Ako je a_k k-ti koeficijenat funkcije u, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_k operatora T(1), onda su Fourierovi koeficijenti za $T(n)u = T^n(1)u$, $\lambda_k^n a_k$. Ali, Fourierovi koeficijenti su linearno ograničeni funkcionali. Otuda, ako T(n)u teži nuli brže od λ_k^n, onda a_k mora biti nula. Ako T(n)u opada, kada n raste, brže od svakog eksponenta, onda svi koeficijenti od u moraju biti nula.

Obrnuto, neka je $\tilde{Q}$ skup svih funkcija u, čiji su svi Fourierovi koeficijenti jednaki nuli. Prostor $\tilde{Q}$ je zatvoren, trans invarijentno i kao podprostor od Q je unutrašnje kompaktan. Spektar operatora T(1) na $\tilde{Q}$ sastoji se iz $\lambda = 0$, jer su sve sopstvene funkcije operatora T isključene iz $\tilde{Q}$. Sledi, po Gelfandovoj formuli spektralnog radijusa

$$\lim_{n} \|T(n)\|^{1/n} = 0 \qquad \text{na } \tilde{Q}.$$

Ovo i jeste opadanje, "brže od eksponencijalnog" za elemente iz $\tilde{Q}$.

Sada, ćemo dati dokaz kompletnosti sistema sopstvenih funkcija unutrašnje kompaktnog prostora funkcija, kao posledicu Beurlingove teoreme.

Teorema 2.4. (Beurling). Neka je Q invarijentan u odnosu na translaciju (ne mora biti obavezno unutrašnje kompaktan) prostor skalarnih funkcija u(t), pri čemu svaka funkcija pripada L_2, za $0 < t < \infty$. Neka je Q zatvoren u L_2 normi. Tada spektar operatora translacije T(y), y 0, sadrži tačke, osim $\lambda = 0$, isključujući slučaj, kada su sve funkcije $u(t) \in Q$ jednake nuli izvan fiksiranog intervala.

Uzev u obzir Gelfandovu teoremu o spektralnom radijusu, ova se teorema može formulisati i na sledeći način.

Ako je operator $T(y)$ kvazinilpotentan, onda je on nilpotentan.

Primenom Beurlingove teoreme na prostor Q, koji se sastoji od funkcija unutrašnje kompaktnog prostora, čiji su svi Fourierovi koefi- cijenti jednaki nuli, zaključujemo, da su takve funkcije identički jednake nuli za dovoljno veliko t. Zaista, što smo dokazali ranije, takve funkcije su jednake nula za svako t.

<u>Dokaz</u> teoreme. Neka je $T(y)$ kvazinilpotentan, tada $\|T(y)\| \to 0$, kada $y \to \infty$. Izaberemo a toliko veliko da je norma $T(a)$ manje od jedinice, i $b > a$. Prostor funkcija iz Q, na posmatranom intervalu $(0, b)$ nije gust među svih funkcija $u \in L_2$ na tom intervalu. Npr. funkcija

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 < t < a \\ 1 & \text{za } a < t < b \end{cases}$$

se ne može aproksimirati dovoljno tačno, jer bi norma $T(a)$ bilo jed- naka jedinici. Dakle, možemo tvrditi da ortogonalni komplement od Q na $(0,b)$ nije prazan, tj. da postoji takva funkcija $h(t)$ iz L_2 na $(0,b)$, da integral

$$\int_0^b h(t)u(t)dt = 0, \quad \text{za svako } u \in Q.$$

Odredenije, uzmemo proizvoljnu funkciju $f(t)$ i njenu translaciju $f(t+y)$:

$$\int_0^b h(t)f(t+y)dt = 0, \quad \text{za } y > 0.$$

Pretpostavimo, da je $f(t)$ jednaka nuli za negativne t, a $h(t)$ jednaka nuli, za t izvan $(0,b)$. Tada formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)f(t+y)dt = g(y) \tag{2.14}$$

definiše funkciju g, za sve vrednosti y, koja se anulira za pozitiv- vne y. Da bi smo gornju formulu sveli na konvoluciju, zamenimo t sa $-t$ i označimo $h(-t)$ sa $k(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t)f(y-t)dt = g(t). \tag{2.14'}$$

Pošto je $k(t)$ jednako nuli izvan $(-b,0)$, a f za negativne vredno- sti svojeg argumenta, to je $g(y)$, takođe, jednako nuli za y manje od

-b, i veće od nule, što smo već ustanovili. Otuda, sledi da funkcija g pripada prostoru L_2 (pošto je g jednako nuli izvan konačnog intervala) i prostoru L_1. Ovo važi i za funkciju k.

Označimo sa $K(z)$, $F(z)$ i $G(z)$ Fourierove transformacije funkcija k, f i g. Funkcije $K(z)$ i $G(z)$ su analitičke i ograničene u poluravni $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, jer su $k(y)$ i $g(y)$ jednake nuli za pozitivno y i apsolutno integrabilne za negativno y. Pošto je funkcija $f(t)$ jednaka nuli za negativno t, $F(z)$ je cela funkcija, ograničena na realnoj osi. Pretpostavimo sada, da je operator T na Q kvazinilpotentan, tada $f(t)$ opada brže od svakog eksponenta, za negativno t.

Pošto je g konvulucija k i f, to je G proizvod od K i F:

$$F(z) \cdot K(z) = G(z), \tag{2.15}$$

ili

$$F(z) = \frac{G(z)}{K(z)} . \tag{2.16}$$

Dalje, koristeći teoremu disjunkcije iz teorije funkcija, zasnovanu na faktorizaciju funkcije, koja je analitička i ograničena u poluravni u Blascheovom proizvodu, i pomnožena ograničenom funkcijom bez nula i, reprezentaciju pozitivne harmoniske funkcije u poluravni Poissonovim integralom sa nenegativnom distribucijom mase, plus $N \cdot t$.

Neka su G i K ograničene funkcije na realnoj osi, koje imaju eksponencijalni rast u donjoj poluravni. Ako je količnik $F = G/K$ ograničen na realnoj osi i regularan u donjoj poluravni, onda on takođe ima eksponencijalni rast u donjoj poluravni. Iz teoreme disjunkcije zaključujemo da $F(z)$ ima eksponencijalni rast u donjoj poluravni. Dalje, na osnovu Paley-Wienerove teoreme dobijamo da je $f(t)$ konačna Fourierova transformacija, tj. da je $f(t)$ jednako nuloi izvan konačnog intervala.

Ako je g konvolucija funkcija k i f, onda je nosač od g zbir nosača k i f. Odredenije, dužina nosača f ne može biti veća od dužine nosača g. Pošto posljednji nije veći od b, zaključujemo da nosač f ima dužinu ne veću od b.

Jedino ograničenje za b bi bilo ono da za neko a, manje od b, $\|T(a)\|$ mora biti manje od jedinice. Na osnovu leme 1.2, za unutrašnje kompaktne prostore, to važi za svako pozitivno a. Sledi da je nosač $f(t)$ jednak nuli. Pošto je f proizvoljan element iz $\tilde{Q}$, ovo dokazuje, da $\tilde{Q}$ sadrži samo nula funkcije, tj. dokazana je sledeća

<u>Teorema 2.5.</u> Neka je Q, unutrašnje kompaktan i invarijantan u odnosu na translaciju, linearni prostor skalarnih funkcija $u(t)$ na intervalu $0<t<\infty$ klase L_2 i zatvoren u toj normi.- Tada sopstvene funkcije operatora translacije $T(y)$ čine kompletan sistem.

Podrazumeva se, da su sopstvene funkcije operatora $T(y)$ eksponenti od t, i polinomi, pomnoženi sa eksponentima.

Teoreme 2.4 i 2.5 mogu se lako proširiti na funkcije $u(t)$, čije vrednosti pripadaju nekom konačnodimezionalnom, recimo n-dimenzionalnom vektorskom prostoru X. Uzmimo u teoremi 2.4 podprostor Q' prostora Q, generisan, u smislu L_2, svim translacijama jedne funkcije $f(t)$. Radeći na isti način, posmatrajmo skup svih funkcije $k(t)$, ortogonalnih na $f(t+y)$ na intervalu $(0,b)$. Tada relacija analogna sa (2.15) ima oblik

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(z)K_j(z) = G(z), \tag{2.15'}$$

gde su F_j i K_j Fouriererove transformacije komponenti f i k.

Sada, ćemo dokazati, da za svako z_0 u donjoj poluravni vrednosti $K(z_0)$ generišu celi adjungovani prostor X'.

Zaista, pretpostavimo suprotno, neka postoji vektor W, ortogonalen na svim $K(z_0)$, tj. $W\cdot K(z_0) = 0$. U terminima inverzne Fourierove transformacije funkcija K ovo znači da je

$$\int_0^b We^{-iz_0t}h(t)dt = 0,$$

za sve h, ortogonalno na svim funkcijama $f(t+y)$ na $(0,b)$. Ali, kako je Q' zatvoreno, to znači, na osnovu teoreme o projektovanju, da postoji funkcija $m(t)$ iz Q', koja je na intervalu $(0,b)$ jednaka We^{-iz_0t}.

Pokažemo, sada, da je $m(t)$ jednaka We^{-iz_0t}, za sve pozitivne t. Posmatrajmo element $n(t) = m(t+y) - e^{-iz_0t}$ iz Q, gde je y neki mali pozitivan broj. Funkcija $n(t)$ se anulira na intervalu $(0,b-y)$, koji za dovoljno malo y, sadrži interval $(0,a)$. Pošto je norma $T(\cdot)$ manja od jedinice, takav elemenat mora biti nula za svako t. Iz jednakosti

$$m(t+y) = e^{-iz_0 y} m(t), \text{ za } t > 0,$$

i iz činjenice, da se $m(t)$ poklapa sa $We^{-iz_0 t}$ na $(0,b)$, zaključujemo da se $m(t)$ poklapa sa $We^{-iz_0 t}$ na $(0,b+y)$. Pa sledi, i celoj pozitivnoj osi. Ali, ovo je kontradikcija, jer je $m(t)$ element prostora Q, sa fiksiranim eksponentom, a tada kao što je poznato svi elementi iz Q opadaju brže od svakog eksponenta. Sledi, vrednosti $K(z_0)$ moraju generalisati celi prostor X', a to znači, recimo da n od njih $K^r(z)$, $r = 1,2,\dots,n$, generišu X'. Jednakost tipa (2.15′) važi za svako K^r:

$$\sum_{j=1}^{n} F_j K_j^r = G^r, \text{ za } r = 1,2,\dots,n. \tag{2.15″}$$

Rešimo jednačinu (2.15″) u odnosu na F_j. Determinanta je različita od nule, za $z = z_0$, tako da imamo

$$F_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \tag{2.16′}$$

Elementi determinanata Δ_j i Δ su analitičke funkcije, ograničene u donjoj poluravni. Sledi da su i same Δ i Δ_j funkcije takvog tipa. Osim toga, Δ nije identički jednaka nuli. Dalja razmatranja vrše se analogno kao i u skalarnom slučaju.

Primedba 2.2. Nula prostori eliptičkih operatora su netrivijalan primer prostora vektorskih funkcija invarijantnih u odnosu na translaciju za koje je moguća odgovarajuća spektralna sinteza.

Primedba 2.3. U opštem slučaju, teorema analogna teoremi 2.4 za funkcije, čije vrednosti pripadaju beskonačnodimenzionalnom prostoru ne važi. Međutim, ona važi u našem beskonačnom Hilbertovom prostoru H_γ na osnovu dobijenih rezultata u glavi II i III.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ АБСТРАКТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Резюме

В работе постановлена следующая задача. На полуоси $[0,\infty)$ рассматривается абстрактное эллиптическое уравнение второго порядка:

(1) $$Lu \equiv -\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Cu = 0$$

с начальными данными

(2) $$u(0) = u_0, \quad 0 < t < \infty$$

где функция $u(t)$ из гильбертова пространства H, а операторы $B = B^*$ и $C \geq \delta I$.

В данной работе помюстью разрешена следующая из трех задач:

I. Доказано, что задача (1)-(2) т.е. $Lu = f$ разрешима в пространстве $\overset{o}{H}_2 = \overset{o}{H}_2(0,\infty;H)$. Потом, с помощью теоремы 1.1 гл.II показано что достаточно рассматриваеть уравнение

$$-\frac{d^2u}{dt^2} + Cu = 0,$$

которое вполне разрешивается в первой главе.

II. Доказано, что решение $u(t)=U(t)u_0$ полугруппа класса C_0.

III. Доказано, что множество решения $\{u(t)\}$ имеет свойство внутреней компактности, т.е. может примениватся теорема Фрагмена – – Линделефа. Это доказано в третей главе.

Наконец, напомним, что верна теорема 2.4 ,Берлинга, для функций, значения которых лежат в бесконечномерном пространстве, так знаем, что она в общем случае не верна в бесконечномерном пространстве.

B i o g r a f i j a

Rodio se 15.10.1944.god. u selu Junik, Opština Dečane, SAP Kosovo, u siromašnoj seoskoj porodici. Osnovnu školu završio u rodnom mestu, a gimnaziju u Peći. Diplomirao na temu: "Kvadratne jednačine sa jednom nepoznatom".

Školske godine 1965/66 upisao se na Filozofski fakultet u Prištini, na Odseku za matematiku. Po završetku prvog stepena pomenutog fakulteta radio kao nastavnik matematike.

Zatim, školske godine 1969/70 nastavio drugi stepen Filozofskog fakulteta, na Odseku za matematiku, i isti završio 1971.god. u junskom roku. Od početka septembra 1971 počeo raditi kao asistent matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Prištini.

Školske godine 1974/75 upisao se na postdiplomske studije na katedri za Funkcionalnu analizu, Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Zagrebačkog sveučilišta, da bi magistrirao 1981.godine s temom: "Diferencijalne jednadžbe u Banachovom prostoru ".

Aprila 1982 izabran je za predavača Matematičke analize III na Odseku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Prištini, sa dopunom norme iz Matematike za studente Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta Kosova u Prištini, gde i sada radi.

L i t e r a t u r a

[1] АХИЕЗЕР Н.И., ГЛАЗМАН И.М.; Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Москва, 1966.

[2] ALJANČIĆ S.; Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Beograd, 1968.

[3] АТКИНСОН Ф.В.; Дискретные и непрерывные граничные задачи, Москва, 1968.

[4] ATKINSON F., EVANS W.D.; On solutions of a fiff.eqution which are not of integrable square, Math.Z., 127,4, 1972.

[5] БАЙМОВ Ш.К.; Распределение собственных значений некоторых эллиптических операторов в неограниченной области, ДАН Азерб. ССР, 30,9, 1974.

[6] – ; Распределение собственных значений некоторых эллиптических операторов с растущими коэффициентами, В.сб.: Спектральная теория операторов, Баку, ЭЛМ, 1977.

[7] BALAKRISHNAN A.V.; Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them, Pac.J.of Math.10,2,1960.

[8] – ; Applied functional analysis, New York, 1976.

[9] БЕРЕЗАНСКИЙ Ю.М.; Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.

[10] – ; Обзор по спектральной теории самосопряженных диффер. и разностных операторов, Тр.сем.по Функ анализ Ин.мат. АН УССР, вып. 2, 1970.

[11] БЕРЕЗИН Ф.А., ШУБИН М.А.; Уравнение Шредингера, Изд.МГУ, Москва, 1983.

[12] BEURLING A.; A theorem of functions definined on a semi-group, Math.Scand., 1, 1953.

[13] БОЙМАТОВ К.Х.; Распределение собственных значений эллиптических операторов, ДАН СССР, т.221, 2, 1975.

[14] – ; $\mathcal{L}_2$ оценки обобщенных решений эллиптических дифф. уравнений, ДАН СССР, т.223, 3, 1975.

[15] – ; Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряженных операторов, Функц.анализ и его приложения, т.11, 4, 1977.

[16] БОЙМАТОВ К.Х., КОСТЮЧЕНКО А.Г.; Распределение собственных значений несамосопряженных операторов во всем пространстве, Тр. сем. МГУ, 2, 1976.

[17] - - ; Асимптотическое поведение средних Рисса спектральной функции эллиптического оператора, ДАН СССР, т.231, 2, 1976.

[18] EDWARDS R.E.; Functional Analysis. Theory and Applications, Reinhart and Winston Inc., New York, 1965 (ruski preved: Moskva, 1969).

[19] ГОРБАЧУК В.И., ГОРБАЧУК М.Л.; Некоторые вопросы спектральной теории дифф. уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций, Укр. мат. журнал, т.26, 3, 1974.

[20] ГОРБАЧУК М.Л.; Самосопряженные граничные задачи для дифф. уравнений второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом, Функ. анализ и его прил., 5, 1, 1971.

[21] ГОХБЕРГ И.Ц., КРЕЙН М.Г.; Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Мир, Москва, 1965.

[22] ДАЛЕЦКИЙ Ю.Л., КРЕЙН М.Г.; Устойчивост решений дифф. уравнений в банаховом пространстве, Москва, 1970.

[23] ДАЛЕЦКИЙ Ю.Л., ФОМИН С.В.; Меры и дифф. уравнения в бесконечномерних пространсв, Наука, Москва, 1983.

[24] DUNFORD N. and SCHWARTZ J.T.; Linear Operators, New York, 1958 (Part I, General Theory); 1963 (Part II Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert Space); 1971 (Part III Spectral operators), (ruski prevodi: Nauka, Moskva, 1962, 1966, 1974).

[25] HALMOS P.R.; Introduktion to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

[26] - ; Measure Theory, D. Van Nostrand, New York, 1950 (ruski prevod: Moskva, 1953).

[27] HILLE E and PHILLIPS R.S.; Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Colloquiu Publ., 31, Providence, 1957 (ruski prevod: Moskva, 1962).

[28] HORMANDER L.: On the theory of general partial differential operators, Acta Math., 94, 1955.

[29] HORMANDER L.; The spectral functions of an elliptic operator, Acta Math., 121, 1968.

[30] HUTSON V.C., PYM J.S.; Applications of Funvtional Analysis and Operators theory, Ac.Press, London, New York, 1980 (ruski prevod: Moskva, 1983).

[31] YOSIDA D.; Functional Analysis, Berlin-Göttingen-Heid., Springer, 1965, (ruski prevod: Moskva, 1967).

[32] KANTOROVICH L., AKILOV G.; Analyse Fonctionnelle, Ed.de Moscou, 1981.

[33] KATO T.; Pertubation theory for linear operators, Springer-Verlad, New York, 1966 (ruski prevod: Moskva, 1972).

[34] КОСТЮЧЕНКО А.Г.; Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов, ДАН СССР, I58, I, I964.

[35] - ; О некоторых спектральных свойствах дифф.операторов, Докторска диссертация, МГУ, Москва, I966.

[36] - ; О некоторых спектральных свойствах дифф.операторов, Матем.заметки, т.I, 3, I967.

[37] КОСТЮЧЕНКО А.Г., ОРАЗОВ М.Б.; Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки, Тр.сем.Петр., МГУ, 6, I981.

[38] - - ; О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного пучка, Функц.анализ и его приложения, т.9, 4, I975.

[39] - - ; О полноте корневых векторов некоторых самосопряженных квадратичных пучков, Функц.анализ и его приложения, т.II, 4, I977.

[40] КОСТЮЧЕНКО А.Г., ШКАЛИКОВ А.А.; Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи, Функц.анализ и его приложения, т.I7, 2, I983.

[41] KUREPA S.; Konačnodimezionalni vektorski prostori i primjene, Teh. knjiga, Zagreb, 1975.

[42] - ; Funkcionalna analiza, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[43] КРЕЙН С.Г.; Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1967.

[44] — ; Линейные уравнения в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1971.

[45] КРЕЙН С.Г., ЛАПТЕВ Г.И.; Граничные задачи для дифф. уравнений второго порядка в банаховом пространстве I, Дифф. уравнения, март 1966, т.2, 3.

[46] — — ; Корректность граничных задач для дифф. уравнения второго порядка в банаховом пространстве II, Дифф. уравнения, июль 1966, т.2, 7.

[47] КРЕЙН С.Г., ПЕТУНИН Ю.И., СЕМЕНОВ Е.М.; Интерполяция линейных операторов, Наука, Москва, 1978.

[48] КРЕЙН С.Г., СОБОЛЕВСКИЙ П.Е.; Дифф. уравнения с абстрактным эллиптическим оператором в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 118, 2, 1958.

[49] КРЕЙН М.Г.; Введение в геометрия индефинитных пространств и теорию операторов в э тих пространств, Вторая летняя матем. школа, Киев, 1965.

[50] КРЕЙН М.Г., ЛАНГЕР Г.К.; К теории квадратических пучков самосопряженых операторов, ДАН СССР, т.154, 6, 1964.

[51] LAX P.D.; Paragmen-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some quations in the theory of elliptic equations, Comm. Pure appl. Math., 10, 1957 (ruski prevod: Matematika, T-3, 4, 1959, Moskva).

[52] ЛАПТЕВ Г.И.; Задачи на собственные значения для дифф. уравнений второго порядка в банаховом и гильбертовом пространствах, Дифф. уравнения, сентябрь 1966, т.II, 9.

[53] ЛИОНС Ж.Л., МАДЖЕНЕС Е.; Неоднородные граничные задачи и их приложения, Москва, 1971.

[54] ЛЮСТЕРНИК Л.А., СОБОЛЕВ В.И.; Элементы функционального анализа, Москва, 1965.

[..] MARDEŠIĆ S.; Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru I, II, Školska knjiga, Zagreb, 1974, 1977.

[..] MASSERA J.L., SCHAFFER J.J.; Linear differential equations and funktion Space, Ac.Press, New York and Lond , 1966 (ruski prevod: Moskva, 1970).

[47] МИХАЙЛОВ В.П.; Дифференциальные уравнения в частных производных, Наука, Москва, I969.

[48] МИХЛИН С.Г.; Линейные уравнения в частных производных, Москва, I977.

[49] МИЗОХАТА С.; Дифференциальные уравнения в частных производных, Мир, Москва, I977.

[50] НАТАНСОН И.П.; Теория функции вещественной переменной, Москва, I969.

[51] ПЛЕСНЕР А.И.; Спектральная теория линейных операторов, Москва, I965.

[52] PROSSDORF S.; Einige Klassen singulërer Gleichungen, Akademie-Ver. Berlin, 1974 (ruski prevod: Moskva, 1979)

[53] РАДЗИЕВСКИЙ Г.В.; О некоторых признаках кратной полноты корневых векторов аналитических в угле оператор-функций, Укр.матем.журнал, т.28, 2, I976.

[54] — ; О полноте производных цепочек отвечающих краевым задачам на конечном отрезке, Укр.мат.журнал, т.31, 3, I979.

[55] RICHTMYER R.D.; Principles of advanced mathematical physics, Volume 1, Springer-Verlag, New York, Heid.Berlin, 1978 (ruski prevod: Moskva, 1982).

[56] РИСС Ф.С., НАДЬ Б.; Лекции по функциональному анализу, Москва, I954.

[57] RUDIN W.; Real and Complex Analysis, Mc.Graw-Hill Com., New York, 1974.

[58] — ; Functional analysis, Mc.Graw-Hill Com., New York, 1973 (ruski prevod: Moskva, 1975).

[69] СОБОЛЕВ С.Л.; Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд.ЛГУ, I950.

[70] STICKLER D.C.; Bounds for the solution of the linear self-adjoint second-order differential equation, J.Math.Analysis and Applic., IO, 2, 1965.

[71] STONE M.N.; Linear Transformations in Hilbert Space, Amer.Math.. Soc.Coll.Publ., Vol.15, New York, 1932 (1966, 17 izdanje)

[72] ŠEHU I.; Diferecijalne jednadžbe u Banachovom prostoru, Magistarski rad, Zagreb, 1981.

[73] ТИЧМАРШ Е.Ч.; Разложения по собственним функциям связанные с дифференциальних уравнений второго порядка, Москва, I960.

[74] ТРЕНОГИН В.А.; Функциональный анализ, Наука, Москва, I980.

[75] TRIEBEL H.; Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators, Veb Deutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin, 1978 (ruski prevod: Moskva, 1980).

[76] УЛАМ С.; Нерешенные математические задачи, Москва, I964.