J. L. Simovljević

GENERALIZACIJA VEKTORSKIH ELEMENATA KEPLEROVA KRETANJA

SADRŽAJ

UVOD

Pitanje izbora elemenata planetskog kretanja postaje vrlo aktualno kad je reč o poremećenom kretanju planete. Koji će se elementi definitivno upotrebiti, zavisi sa kog stanovišta se pristupa posmatranju problema: sa stanovišta teoriske matematike, ili sa stanovišta numeričkog izračunavanja, ili sa stanovišta mehanike (kinematike i dinamike).

Mi smo u ovom radu stali na stanovište dinamike: rastavljajući poremećajnu silu u komponente, razmatramo kako pojedine od njih utiču na geometriske i kinematičke elemente kretanja i obrnuto; usled dejstva koje komponente se neki od ovih elemenata u poremećenom kretanju menja. Pri tome smo uspeli, generališući pojam vektorskog elementa Keplerova kretanja, da ova razmatranja izvodimo u opštem obliku, koji kao specijalne slučajeve sadrži sve dosada poznate i korišćene vektorske elemente.

I. NEPOREMEĆENO PLANETSKO KRETANJE

1. Za neporemećeno (Keplerovo) planetsko kretanje važi sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x\, r^{-3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y\, r^{-3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu z\, r^{-3}, \qquad (1.1)$$

$$\mu = k^2(1 + m), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Iz njega se dobivaju dve grupe tzv. prvih integrala: integrali površine (ili sektorske brzine)

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C_1, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C_2, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_3 \qquad (1.2)$$

i Laplace-ovi integrali:

$$\begin{aligned} C_3\frac{dy}{dt} - C_2\frac{dz}{dt} - \mu\frac{x}{r} &= D_1, \\ C_1\frac{dz}{dt} - C_3\frac{dx}{dt} - \mu\frac{y}{r} &= D_2, \\ C_2\frac{dx}{dt} - C_1\frac{dy}{dt} - \mu\frac{z}{r} &= D_3, \end{aligned} \qquad (1.3)$$

gde su C_i i D_i konstante ($i = 1, 2, 3$). Medjutim, ovim integralima još nije u potpunosti rešen problem kretanja planete, jer izmedju šest konstanti $C_1, \dots, D_3$ postoji relacija

$$C_1D_1 + C_2D_2 + C_3D_3 = 0. \qquad (1.4)$$

Raznim algebarskim operacijama mogu se iz ovih šest integrala, (1.2) i (1.3), dobiti i drugi - koliko hoćemo - no svi su oni njihova posledica, pa ne daju ništa novo; samo mogu da posluže za analizu rezultata ili da uproste ili komplikuju račune. Iz (1.1) se može lako dobiti tzv. integral žive sile

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h,$$

gde je v brzina planete, a h konstanta. No, ni on ne daje ništa novo, jer se iz (1.2) i (1.3) može kao posledica izvesti da je

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2} \frac{D^2 - \mu^2}{C^2},$$

gde je

$$C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2, \qquad D^2 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2, \tag{1.5}$$

pa je

$$h = \frac{1}{2} \frac{D^2 - \mu^2}{C^2}.$$

Prema tome, sa h nismo dobili novu nezavisnu konstantu. Nova nezavisna konstanta dobiva se tek u Keplerovoj jednačini

$$n(t - T) = E - e \sin E, \tag{1.6}$$

naime trenutak prolaza kroz perihel, T. Ova nezavisna konstanta integraljenja sistema (1.1) može se, opet, slično kao i konstante C_i i D_i, smeniti nekom drugom: srednjom, ekscentričnom ili pravom anomalijom za usvojenu epohu, ili srednjom longitudom za epohu, i tsl.

2. Kojih će se šest nezavisnih konstanti definitivno upotrebiti, zavisi sa kog stanovišta se pristupa rešavanju problema ili korišćenju dobivenih integrala. Sa gledišta matematike biraju se konstante tako da rešavanje i izrazi budu što prostiji i što dostupniji matematičkoj analizi. Sa gledišta mehanike najprirodnije je uzeti koordinate planete (x_o, y_o, z_o) i komponente njene brzine (x_o', y_o', z_o') u odredjenom trenutku (t_o) (početni uslovi kretanja ili tzv. Lagrange-ovi posredni elementi). Najzad, sa gledišta astronomije najpre praktičnije je usvojiti astronomske elemente

Ω - longitudu uzlaznog čvora,
ω - argument latitude perihela,
i - nagib putanjske ravni,
a - veliku poluosu eliptičke putanje (ili parametar p),
e - ekscentričnost putanje, i
M_o - srednju anomaliju za epohu t_o,

koji najbolje odgovaraju geometrisko-kinematičkoj prirodi problema.

Poznate su veze izmedju ovih astronomskih elemenata i konstanti C, D, C_i, D_i iz (1.2), (1.3) i (1.5):

$$\frac{D_1}{D} = \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i,$$
$$\frac{D_2}{D} = \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i, \qquad (2.1)$$
$$\frac{D_3}{D} = \sin\omega\sin i;$$

$$\frac{C_2D_3 - C_3D_2}{C\ D} = -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i,$$
$$\frac{C_3D_1 - C_1D_3}{C\ D} = -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i, \qquad (2.2)$$
$$\frac{C_1D_2 - C_2D_1}{C\ D} = \cos\omega\sin i;$$

$$\frac{C_1}{C} = \sin\Omega\sin i,$$
$$\frac{C_2}{C} = -\cos\Omega\sin i, \qquad (2.3)$$
$$\frac{C_3}{C} = \cos i;$$

$$a = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2}, \qquad e = \frac{D}{\mu}; \qquad (2.4)$$

$$p = \frac{C^2}{\mu}. \qquad (2.5)$$

3. Mesto tri skalarne jednačine (1.1) može se napisati jedna vektorska:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\mu r^{-3}\,\bar{r}. \qquad (3.1)$$

Iz nje će se dobiti prva dva integrala u vektorskom obliku: integral površina

$$\bar{F}_1(\bar{r}, \bar{v}) \equiv [\bar{r}\ \bar{v}] = \bar{C} \qquad (3.2)$$

i Laplace-ov integral

$$[\bar{v}\ \bar{C}] - \frac{\mu}{r}\,\bar{r} = \bar{D}, \qquad (3.3)$$

to jest, s obzirom na (3.2),

$$\bar{F}_2(\bar{r}, \bar{v}) \equiv (v^2 - \frac{\mu}{r})\bar{r} - (\bar{r}\ \bar{v})\bar{v} = \bar{D}. \qquad (3.4)$$

To u skalarnom obliku znači (1.2) i (1.3). No, vektori $\bar{C}$ i $\bar{D}$ nisu nezavisni, jer medju njima postoji veza

$$(\bar{C}\ \bar{D}) = 0, \qquad (3.5)$$

što u skalarnom obliku znači (1.4).

Kao što se iz formula (2.1) - (2.4) vidi, astronomski elementi Ω, ω i i su odredjeni jediničnim vektorima $\bar{C}:C$, $\bar{D}:D$, a elementi a i e - apsolutnim vrednostima vektora $\bar{C}$ i $\bar{D}$. Za potpuno rešenje problema potrebno je, naravno, opet dati i element T.

Kombinujući na razne načine integrale (3.2) i (3.4), mogu se dobiti i drugi, no oni - kao što smo ranije kazali za (1.2) i (1.3) - ne daju ništa novo. Tako, na primer, kad pomnožimo vektorski (3.2) i (3.4), dobićemo tzv. Hamilton-ov integral Keplerova kretanja:

$$F_3(\bar{r}, \bar{v}) \equiv \frac{\mu}{r}(\bar{r}\,\bar{v})\bar{r} + \left\{ ([\bar{r}\,\bar{v}][\bar{r}\,\bar{v}]) - \mu r \right\}\bar{v} = [\bar{C}\,\bar{D}] \,. \tag{3.6}$$

Ništa nam ne stoji na putu da mesto šest (skalarnih) nezavisnih konstanti uzmemo sedam konstanti, medju kojima postoji jedna relacija, ili osam sa dve relacije, itd. - ako nam to olakšava račune ili daje bolji uvid u mehanizam kretanja.

Ako je v prava anomalija, biće

$$r = C^2(\mu + D\cos v)^{-1}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\bar{r}}{r} = \frac{\bar{D}}{D}\cos v + \frac{[\bar{C}\,\bar{D}]}{C\,D}\sin v, \tag{3.8}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{C}\left\{ -\frac{\bar{D}}{D}\sin v + \frac{[\bar{C}\,\bar{D}]}{C\,D}(D + \mu\cos v) \right\} . \tag{3.9}$$

Odavde se jasno vidi da je za potpuno rešenje problema potrebno još da se zna kakva je funkcija v od t. To se dobiva kada se prava anomalija v izrazi, poznatom geometriskom vezom, pomoću ekscentrične anomalije E, a ova - preko Keplerove jednačine (1.6) - veže sa vremenom t. Tu će se pojaviti nova nezavisna konstanta T.

4. Kao što smo već rekli, raznim kombinacijama integrala (3.2) i (3.4) mogu se dobiti drugi, u kojima će se pojaviti drugi konstantni vektori - označimo ih, recimo, sa $\bar{A}$ i $\bar{B}$ - kao funkcije vektora $\bar{C}$ i $\bar{D}$. Tako ćemo umesto vektorskih elemenata planetskog kretanja $\bar{C}$ i $\bar{D}$ imati vektorske elemente $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Cilj je ovog rada da ispita: kako se mogu konstruisati vektori $\bar{A}$ i $\bar{B}$ i može li se, specifikacijom tih vektora, dobiti neka korist u teoriji i praksi računa planetskog kretanja. Pri tome ćemo obratiti naročitu pažnju na mogućnost formiranja nezavisnih vektora $\bar{A}$ i $\bar{B}$; drugim rečima takvih, da šest njihovih komponenata mogu da jednoznačno zamene šest nezavisnih elemenata Keplerova kretanja.

5. U koordinatnom sistemu Oxyz, u kojem važe jednačine (1.1) - tj. vektorska (3.1) - uzmimo ma kakav konstantni vektor $\bar{A} \neq 0$, sa komponentama A_1, A_2 i A_3:

$$\bar{A} = A_1\bar{I} + A_2\bar{J} + A_3\bar{K} \ . \qquad (5.1)$$

U svemu daljem pretpostavljaćemo da imamo posla sa eliptičkim kretanjem. Tada je sigurno $\bar{C} \neq 0$, $\bar{D} \neq 0$, $\bar{Q} = [\bar{C}\,\bar{D}] \neq 0$, a vektori $\bar{D}$, $\bar{Q}$ i $\bar{C}$ čine ortogonalan trijedar. Moći ćemo, dakle, pisati i

$$\bar{A} = a_1\bar{D} + a_2\bar{Q} + a_3\bar{C}, \qquad (5.2)$$

gde bar jedan od konstantnih skalara a_1, a_2 i a_3 nije jednak nuli. Ako u (5.2), umesto $\bar{D}$, $\bar{Q}$ i $\bar{C}$, uvrstimo leve strane jednačina (3.4), (3.6) i (3.2), dobićemo

$$\bar{g}_1(\bar{r}, \bar{v}) \equiv a_1\bar{f}_2(\bar{r}, \bar{v}) + a_2\bar{f}_3(\bar{r}, \bar{v}) + a_3\bar{f}_1(\bar{r}, \bar{v}) = \bar{A}, \qquad (5.3)$$

što je opet integral diferencijalne jednačine (3.1).

Tako smo jednačinom (5.2) izvršili generalisanje vektorskih elemenata Keplerova kretanja: svaka tri uredjena konstantna skalara, od kojih bar jedan nije nula, odredjuju - označivši ih sa a_1, a_2 i a_3 - posredstvom jednačine (5.2), jedan vektor koji je konstanta integraljenja diferencijalne jednačine neporemećena kretanja (3.1) Drugim rečima: takav vektor možemo usvojiti za element eliptičkog kretanja. S druge strane, sve operacije sa ovakvim vektorima moći ćemo izvoditi sa njihovim karakterističnim skalarima a_i ($i = 1, 2, 3$), po jedinstvenim obrascima. No, ovo pitanje ćemo ovde ostaviti po strani, pošto nam se odmah nameće drugo, mnogo važnije.

6. Odmah posle ovakve generalizacije postavlja se pitanje celishodnosti traženja novih vektorskih elemenata. Naime, izborom šest konstantnih veličina a_i i b_i ($i = 1, 2, 3$) odredjena su dva vektorska elementa kretanja:

$$\bar{A} = a_1\bar{D} + a_2\bar{Q} + a_3\bar{C}, \qquad \text{i} \qquad \bar{B} = b_1\bar{D} + b_2\bar{Q} + b_3\bar{C}. \qquad (6.1)$$

Pretpostavimo da su oni nezavisni, to jest da su šest njihovih komponenata A_i i B_i dovoljne da potpuno opišu neporemećeno planetsko kretanje. No i u tome slučaju teško je očekivati da će odgovarajući izrazi

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{A}, \bar{B}) \qquad \text{i} \qquad \bar{v} = \bar{v}(\bar{A}, \bar{B})$$

biti jednostavniji od onih (3.8) i (3.9), koje treba da zamene i koje bismo dobili izražavajući $\bar{C}$ i $\bar{D}$ pomoću $\bar{A}$ i $\bar{B}$ iz (6.1) i unoseći ih u (3.8) i (3.9). Stoga ćemo ovde našu glavnu pažnju posvetiti ulozi opšteg vektorskog elementa $\bar{A}$ iz (5.2) u poremećenom - to jest stvarnom - planetskom kretanju.

II. POREMEĆENO PLANETSKO KRETANJE

7. Pretpostavimo da na planetu deluje neka "poremećajna sila" $\bar{F}$. Tada ćemo, umesto jednačine (3.1), imati jednačinu

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\mu r^{-3}\,\bar{r} + \bar{F}. \tag{7.1}$$

Ako i sad označimo $\bar{r}\,\bar{v}$ sa $\bar{C}$, neće više ovaj vektor biti konstanta, kao što je to bio u slučaju jednačine (3.1), nego neka funkcija od t. Diferenciranjem ćemo dobiti

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = [\bar{v}\,\bar{v}] + \left[\bar{r}\,\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right] = \left[\bar{r}\,(-\mu r^{-3}\,\bar{r} + \bar{F})\right] ,$$

dakle

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = [\bar{r}\,\bar{F}] . \tag{7.2}$$

Slično, ako - povodeći se za (3.3) - stavimo da je

$$\bar{D} = [\bar{v}\,\bar{C}] - \frac{\mu}{r}\,\bar{r},$$

neće $\bar{D}$ biti konstanta kao ranije, već neka funkcija vremena. Diferenciranjem nalazimo:

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = \left[\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\,\bar{C}\right] + \left[\bar{v}\,\frac{d\bar{C}}{dt}\right] - \frac{\mu}{r}\,\bar{v} + \frac{\mu}{r^2}\,\frac{dr}{dt}\,\bar{r} .$$

No, kako je

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\,\bar{C}\right] &= \left[(-\mu r^{-3}\,\bar{r} + \bar{F})\,\bar{C}\right] = -\mu r^{-3}[\bar{r}[\bar{r}\,\bar{v}]] + [\bar{F}\,\bar{C}] = \\ &= -\mu r^{-3}(\bar{r}\,\bar{v})\bar{r} + \mu r^{-3}(\bar{r}\,\bar{r})\bar{v} + [\bar{F}\,\bar{C}] = \\ &= -\mu r^{-3} r\,\frac{dr}{dt}\,\bar{r} + \mu r^{-3} r^2\,\bar{v} + [\bar{F}\,\bar{C}] ,\end{aligned}$$

to je

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = [\bar{F}\,\bar{C}] + \left[\bar{v}\,\frac{d\bar{C}}{dt}\right] . \tag{7.3}$$

Kako smo, dakle, i u poremećenom kretanju definisali vektore $\bar{C}$ i $\bar{D}$ na isti način kao i u Keplerovu kretanja, to će i dalje važi-ti jednačine (3.7), (3.8) i (3.9), samo što u njima neće $\bar{C}$ i $\bar{D}$ biti konstante, već funkcije za koje važe diferencijalne jednačine (7.2) i (7.3). - Ne gubimo iz vida da i opet nedostaje šesta skalarna konstanta, pošto je i dalje u važnosti jednačina (3.5). I ta dopunska "konstanta", bez obzira kako je odaberemo, biće sada neka funkcija vremena, za koju ćemo samo moći izvesti diferencijalnu jednačinu, analognu onima (7.2) i (7.3).

8. Vektore $\bar{C}$ i $\bar{D}$ upotrebljavao je konzekventno M. Milanković /1/ i to tako što je u (7.2) i (7.3) mesto poremećajne sile $\bar{F}$ uveo funkciju poremećaja R, za koju je

$$\bar{F} = \operatorname{grad} R.$$

Do definitivnih rezultata došao je preko Lagrange-ovih zagrada. - Sa istim vektorima operiše i B. Popović, /2/ i /3/, koji je, pošavši od (7.2) i (7.3), dobio i jednačine sa funkcijom poremećaja, no bez upotrebe Lagrange-ovih zagrada. Postupak za neposredni prelaz sa jednog sistema ovakvih jednačina na drugi dao je autor ovog rada /4/, bez obzira na vrste vektorskih elemenata.

Jednačine (7.2) i (7.3) izgledaju proste, ali se prilikom njihova rešavanja nailazi na velike teškoće, bilo da se radi sa poremećajnom silom, bilo sa funkcijom poremećaja. U računu specijalnih poremećaja neposredno ih je primenio autor ovog rada /5/, a nešto transformisane B. Popović /6/. Ove teškoće su navele neke autore na ideju da mesto vektora $\bar{C}$ i $\bar{D}$ uvedu neke druge vektore. Tako S. Herrick, /7/ i /8/, radi sa vektorima

$$\bar{a} = \frac{1}{\mu}\bar{D}, \qquad \bar{b} = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}}\left[\bar{C}\,\bar{D}\right], \tag{8.1}$$

a P. Musen /9/ sa vektorima

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\bar{C}, \qquad \bar{g} = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}\,p}\left[\bar{C}\,\bar{D}\right]. \tag{8.2}$$

Vektori u parovima $\bar{C}$ i $\bar{D}$, $\bar{a}$ i $\bar{b}$, $\bar{c}$ i $\bar{g}$, nisu nezavisni, jer je

$$(\bar{C}\,\bar{D}) = (\bar{a}\,\bar{b}) = (\bar{c}\,\bar{g}) = 0.$$

Zbog toga se, u sva tri ova slučaja, mora uzeti u obzir još i neki skalarni element kretanja (u citiranim radovima: trenutak prolaza kroz perihel ili srednja anomalija za epohu). A. Bilimović /10/ je uveo par nezavisnih vektora

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\overline{C}, \qquad \overline{Q} = \frac{1}{\mu}\,\overline{D} + \frac{nT}{\sqrt{\mu p}}\,\overline{C}, \tag{8.3}$$

gde je n srednje sideričko dnevno kretanje, i dao za njih diferencijalne jednačine sa funkcijom poremećaja, izvedene Pfaff-ovom metodom.

9. Uvodjenjem opšteg vektorskog elementa $\overline{A}$, koji kao posebne slučajeve sadrži i elemente (3.2), (3.3), (8.1), (8.2) i (8.3), došli smo u mogućnost da izvedemo i njegovu diferencijalnu jednačinu. Time izboru vektorskog elementa poremećena kretanja možemo da pristupimo na obrnuti način; drugim rečima, možemo ga birati tako, da mu diferencijalna jednačina bude što prostija.

No, da bismo izrazom (5.2) mogli obuhvatiti sve vektorske elemente, moramo pretpostaviti da a_i mogu biti, u opštem slučaju, funkcije šest nezavisnih elemenata kretanja. To nam sugerišu jednačine (8.2) i (8.3). Neka ti elementi budu

$$C,\ D,\ \Omega,\ \omega,\ i,\ T. \tag{9.1}$$

Tada će u Keplerovu kretanju vektor $\overline{A}$ biti konstantan, a za poremećeno kretanje treba odrediti $\frac{d\overline{A}}{dt}$, pomoću poremećajne sile $\overline{F}$ iz (7.1).

Ovu silu ćemo prikazati komponentama F_1, F_2 i F_3 u ortogonalnom trijedru jediničnih vektora

$$\overline{x} = \frac{\overline{r}}{r}, \qquad \overline{y} = \frac{[\overline{C}\ \overline{r}]}{C\ r}, \qquad \overline{z} = \frac{\overline{C}}{C}. \tag{9.2}$$

Dakle:

$$\overline{F} = F_1\overline{x} + F_2\overline{y} + F_3\overline{z}. \tag{9.3}$$

Da bismo $\frac{d\overline{A}}{dt}$ izrazili pomoću F_1, F_2 i F_3, potrebno je, prvo, pomoću istih veličina, izraziti izvode po t vektora $\overline{C}$, $\overline{D}$ i $\overline{Q}$ i skalara iz (9.1).

III. IZVODI PO VREMENU ELEMENATA PLANETSKOG KRETANJA

10. Radi kraćeg pisanja uvešćemo oznake

$$s = (\overline{r}\ \overline{v}), \qquad q = C^2 - \mu r. \tag{10.1}$$

Iz prve jednačine u (9.2) je odmah $\overline{r} = r\,\overline{x}$. Za brzinu $\overline{v}$ imamo:

$$\overline{v} = (\overline{v}\ \overline{x})\overline{x} + (\overline{v}\ \overline{y})\overline{y} + (\overline{v}\ \overline{z})\overline{z}.$$

Medjutim je, prema (9.2),

$$(\overline{v}\ \overline{x}) = \frac{1}{r}(\overline{v}\ \overline{r}) = \frac{s}{r},$$

$$(\overline{v}\ \overline{y}) = \frac{1}{Cr}(\overline{v}[\overline{C}\ \overline{r}]) = \frac{C}{r},$$

$$(\overline{v}\ \overline{z}) = 0.$$

I tako je

$$\overline{r} = r\,\overline{x}, \qquad \overline{v} = \frac{1}{r}(s\,\overline{x} + C\,\overline{y}). \tag{10.2}$$

Unesemo li ovo u (3.2) i (3.3), dobićemo:

$$\overline{D} = \frac{1}{r}(q\,\overline{x} - Cs\,\overline{y}), \qquad \overline{Q} = \frac{C}{r}(Cs\,\overline{x} + q\,\overline{y}), \qquad \overline{C} = C\,\overline{z}. \tag{10.3}$$

Na osnovi toga, iz (7.2) i (7.3) izlazi:

$$\frac{d\overline{C}}{dt} = r(-F_3\overline{y} + F_2\overline{z}), \tag{10.4}$$

$$\frac{d\overline{D}}{dt} = 2CF_2\overline{x} - (CF_1 + sF_2)\overline{y} - sF_3\overline{z}. \tag{10.5}$$

Odavde ćemo izračunati

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}[\overline{C}\ \overline{D}] = \left[\frac{d\overline{C}}{dt}\ \overline{D}\right] + \left[\overline{C}\ \frac{d\overline{D}}{dt}\right],$$

naime

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = C(CF_1 + 2sF_2)\overline{x} + (q + 2C^2)F_2\overline{y} + qF_3\overline{z}. \tag{10.6}$$

Pomnožimo li jednačinu (10.4) skalarno sa $\overline{C}$, dobićemo, uzevši u obzir treću jednačinu u (10.3),

$$\frac{dC}{dt} = rF_2. \tag{10.7}$$

Pomnožimo li jednačinu (10.5) skalarno sa $\overline{D}$, dobićemo, uzevši u obzir prvu jednačinu u (10.3),

$$\frac{dD}{dt} = \frac{C}{Dr}\left\{CsF_1 + (2q + s^2)F_2\right\} \; . \qquad (10.8)$$

Tako smo izrazili, pomoću F_1, F_2 i F_3, izvode vektora $\bar{D}$, $\bar{Q}$ i $\bar{C}$, kao i izvode skalara C i D iz (9.1). -

Što se tiče izvoda skalarnog elementa Ω , njega možemo dobiti diferenciranjem prve dve jednačine (2.3)

$$(\bar{C}\,\bar{I}) = C \sin\Omega \sin i, \qquad (\bar{C}\,\bar{J}) = - C \cos\Omega \sin i,$$

i eliminisanjem izvoda $\frac{di}{dt}$. Jedinični vektori $\bar{I}$, $\bar{J}$ i $\bar{K}$ odredjuju pravce osa pravouglog heliocentričnog ekliptičkog koordinatnog sistema, u kojem skalari Ω , ω i i imaju poznato, ranije navedeno, geometrisko tumačenje. Iskoristimo li činjenicu da koordinatni sistem sa pravcima osa (9.2) možemo dobiti rotacijom koordinatnog sistema sa pravcima osa $\bar{D}$:D, $\bar{Q}$:Q, $\bar{C}$:C - oko zajedničke ose $\bar{C}$, u direktnom smeru - za ugao $u = \omega + v$, to komponente jediničnih vektora (9.2) u sistemu $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ dobivamo iz jednačina (2.1) - (2.3), u kojima ω smenjujemo sa u. Ako iskoristimo ovo, kao i jednačinu (10.7), dobićemo

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{C}\frac{\sin u}{\sin i} F_3.$$

No, kako je

$$\sin u = \sin\omega \cos v + \cos\omega \sin v,$$

a

$$\sin v = \frac{Cs}{Dr}, \qquad \cos v = \frac{q}{Dr},$$

to je, konačno,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{C\,D}(q \sin\omega + Cs \cos\omega)F_3. \qquad (10.9)$$

Za nalaženje $\frac{di}{dt}$ najpogodnije je diferencirati poslednju jednačinu u (2.3)

$$(\bar{C}\,\bar{K}) = C \cos i.$$

Na sličan način kao i ranije, dobićemo

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{C} \cos u \, F_3,$$

to jest

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{CD}(q \cos\omega - Cs \sin\omega)F_3. \qquad (10.10)$$

Sličan postupak ćemo primeniti i na treću jednačinu u (2.1)

$$(\bar{D}\,\bar{K}) = D \sin\omega \sin i,$$

u cilju dobivanja

$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{C}{D} \cos v \, F_1 + \frac{1}{CD}(C^2 + \mu r)\sin v \, F_2 - \frac{r}{C}\sin u \operatorname{ctg} i \, F_3.$$

Dakle, sa promenljivim (10.1),

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{C\,q}{D^2 r}F_1 + \frac{s}{D^2 r}(C^2 + \mu r)F_2 - \frac{\operatorname{ctg} i}{C\,D}(q \sin\omega + Cs\cos\omega)F_3. \tag{10.11}$$

Najzad, izvod trenutka prolaza kroz perihel, $\frac{dT}{dt}$, nalazimo iz Keplerove jednačine (1.6), koju pišemo u obliku

$$\varepsilon^3(t - T) = \mu E - D \sin E, \qquad \varepsilon^2 = (\mu^2 - D^2)C^{-2}.$$

Izvod pomoćne veličine ε dobivamo pomoću (10.7) i (10.8), a ekscentrične anomalije E - recimo iz jednačine putanje

$$\varepsilon^2 r = \mu - D \cos E.$$

Jednostavnosti radi, dobiveni rezultat ćemo pisati u obliku

$$\frac{dT}{dt} = \alpha F_1 + \beta F_2, \tag{10.12}$$

gde je

$$\alpha = -\frac{\varepsilon^3}{D^2}qr + \frac{s}{r}\gamma, \quad \beta = \frac{C}{r}\gamma, \quad \gamma = \frac{s}{D^2}(C^2 + \mu r) - \frac{3}{\varepsilon^2}(t - T). \tag{10.13}$$

Tako imamo pripremljene i izvode svih skalara iz (9.1). -

<u>11</u>. Kako već napomenusmo, pretpostavili smo da je

$$a_i = a_i(C, D, \Omega, \omega, i, T), \qquad i = 1, 2, 3,$$

dakle, u poremećenom kretanju,

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial C}\frac{dC}{dt} + \dots + \frac{\partial a_i}{\partial T}\frac{dT}{dt}.$$

Ako ovamo unesemo izraze (10.7) - (10.13), izvode od a_i ćemo grupisati, po komponentama poremećajne sile, u

$$\frac{da_i}{dt} = U_i F_1 + V_i F_2 + W_i F_3, \tag{11.1}$$

gde će biti

$$U_i = \frac{C^2 s}{D\,r}\frac{\partial a_i}{\partial D} + \alpha\frac{\partial a_i}{\partial T} - \frac{C\,q}{D^2 r}\frac{\partial a_i}{\partial \omega},$$

$$V_i = r\frac{\partial a_i}{\partial C} + \frac{C}{Dr}(2q + s^2)\frac{\partial a_i}{\partial D} + \beta\frac{\partial a_i}{\partial T} + \frac{s}{D^2 r}(C^2 + \mu r)\frac{\partial a_i}{\partial \omega}, \tag{11.2}$$

$$W_i = \frac{1}{CD}(q\cos\omega - Cs\sin\omega)R_i - \frac{\operatorname{ctg} i}{C\,D}(q\sin\omega + Cs\cos\omega)\frac{\partial a_i}{\partial \omega},$$

$$R_i = \operatorname{cosec} i\,\frac{\partial a_i}{\partial \Omega} + \frac{\partial a_i}{\partial i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Indeks "i" nećemo mešati sa istom oznakom za ugao nagiba putanjske ravni planete, u odnosu na ravan ekliptike. -

Diferenciranjem definicione jednačine opšteg vektorskog elementa (5.2), nalazimo

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{da_1}{dt}\overline{D} + \frac{da_2}{dt}\overline{Q} + \frac{da_3}{dt}\overline{C} + a_1\frac{d\overline{D}}{dt} + a_2\frac{d\overline{Q}}{dt} + a_3\frac{d\overline{C}}{dt}.$$

Kako su nam sada već poznati svi izvodi na desnoj strani ove jednačine, to ćemo je grupisati, po vektorima (9.2), u

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = X\,\overline{x} + Y\,\overline{y} + Z\,\overline{z}. \tag{11.3}$$

Vrednosti skalara X, Y i Z su:

$$\begin{aligned} X &= X_1F_1 + X_2F_2 + X_3F_3,\\ Y &= Y_1F_1 + Y_2F_2 + Y_3F_3,\\ Z &= Z_1F_1 + Z_2F_2 + Z_3F_3, \end{aligned} \tag{11.4}$$

a onih X_i, Y_i i Z_i $(i = 1, 2, 3)$ su:

$$\begin{aligned} X_1 &= C^2a_2 + \frac{1}{r}(qU_1 + C^2sU_2),\\ X_2 &= 2C(a_1 + sa_2) + \frac{1}{r}(qV_1 + C^2sV_2),\\ X_3 &= \frac{1}{r}(qW_1 + C^2sW_2); \end{aligned} \tag{11.5}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -Ca_1 + \frac{C}{r}(-sU_1 + qU_2),\\ Y_2 &= -sa_1 + (q + 2C^2)a_2 + \frac{C}{r}(-sV_1 + qV_2),\\ Y_3 &= -ra_3 + \frac{C}{r}(-sW_1 + qW_2); \end{aligned} \tag{11.6}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= CU_3,\\ Z_2 &= ra_3 + CV_3,\\ Z_3 &= -sa_1 + qa_2 + CW_3. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Time imamo, konačno, izvod opšteg vektorskog elementa $\overline{A}$ izražen pomoću poremećajne sile $\overline{F}$ i veličinâ a_i, koje karakterišu uočeni element $\overline{A}$.

IV. SPECIFIKACIJA VEKTORSKIH ELEMENATA

12. Pretpostavimo da smo se opredelili za neke odredjene funkcije a_1, a_2 i a_3 veličina C, D, Ω, ω, i, T. Ako pomoću njih i komponenata F_1, F_2 i F_3 poremećajne sile $\overline{F}$ izrazimo, na napred navedeni način, izvod $\frac{d\overline{A}}{dt}$, imaćemo podatak kako vektor $\overline{A}$, formiran po (5.2), varira sa vremenom. Jasno je da se uvek može odabrati i druga trojka b_1, b_2 i b_3, pa pomoću ove formirati i drugi vektor $\overline{B}$, i to nezavismo od $\overline{A}$. Možemo, dakle, formirati beskonačno mnogo raznih parova nezavisnih vektora $\overline{A}$ i $\overline{B}$, koji odredjuju planetsko kretanje, a u slučaju poremećenog kretanja još i videti, po (11.3), kako oni variraju sa vremenom.

Izvod $\frac{d\overline{A}}{dt}$, dat u (11.3), odredjen je svojim komponentama X, Y i Z, a ove su, prema (11.4), funkcije komponenata F_1, F_2 i F_3 poremećajne sile $\overline{F}$. Poći ćemo sa gledišta dinamike i postaviti zahtev da izvod $\frac{d\overline{A}}{dt}$ ne zavisi od nekih komponenata poremećajne sile i da nema komponentu duž nekog od vektora $\overline{x}$, $\overline{y}$ ili $\overline{z}$. To znači da ćemo zahtevati anuliranje izvesnog broja veličina X_i, Y_i ili Z_i. Time će se i diferencijalna jednačina (11.3) uprostiti.

Zbog toga je potrebno da ispitamo mogućnosti ispunjavanja uslova za anuliranje veličina X_i, Y_i i Z_i $(i = 1, 2, 3)$.

13. Kako je izračunavanje uslova za anuliranje pomenutih veličina dosta dugo, mi ćemo ga, da ne bismo prekidali izlaganje, na ovom mestu izostaviti, pa navesti samo rezultate; računanje je dato u Dodatku.

Tako dolazimo do ovih uslova za anuliranje X_i, Y_i i Z_i:

$$X_1 = 0:$$

$$D\frac{\partial a_1}{\partial D} - C\frac{\partial a_2}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \omega} + CD\frac{\partial a_2}{\partial D} = 0, \quad D\frac{\partial a_2}{\partial D} + a_2 = 0, \qquad (13.1)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial T} = \frac{\partial a_2}{\partial T} = 0;$$

$$X_2 = 0:$$

$$a_1 = 0, \quad C\frac{\partial a_2}{\partial C} + 2a_2 = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial D} = \frac{\partial a_2}{\partial \omega} = \frac{\partial a_2}{\partial T} = 0; \tag{13.2}$$

$$X_3 = 0:$$

$$R_1 - \mathrm{tg}\,\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_1}{\partial \omega} = 0, \quad R_2 + \mathrm{ctg}\,\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_2}{\partial \omega} = 0, \tag{13.3}$$

$$R_1\,\mathrm{tg}\,\omega + \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_1}{\partial \omega} - C\left(R_2 - \mathrm{tg}\,\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_2}{\partial \omega}\right) = 0;$$

$$Y_1 = 0:$$

$$D\frac{\partial a_1}{\partial D} - C\frac{\partial a_2}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \omega} + CD\frac{\partial a_2}{\partial D} = 0, \quad C\frac{\partial a_2}{\partial \omega} + a_1 = 0, \tag{13.4}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial T} = \frac{\partial a_2}{\partial T} = 0;$$

$$Y_2 = 0:$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial D} = \frac{\partial a_1}{\partial \omega} = \frac{\partial a_1}{\partial T} = 0, \quad C\frac{\partial a_1}{\partial C} + a_1 = 0, \quad a_2 = 0; \tag{13.5}$$

$$Y_3 = 0:$$

$$R_1 - \mathrm{tg}\,\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_1}{\partial \omega} + C\left(R_2\,\mathrm{tg}\,\omega + \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_2}{\partial \omega}\right) = 0,$$

$$R_1\,\mathrm{tg}\,\omega + \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_1}{\partial \omega} - C\left(R_2 - \mathrm{tg}\,\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_2}{\partial \omega}\right) = 0, \tag{13.6}$$

$$D\left(R_2\cos\omega - \sin\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_2}{\partial \omega}\right) - a_3 = 0;$$

$$Z_1 = 0:$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial D} = \frac{\partial a_3}{\partial \omega} = \frac{\partial a_3}{\partial T} = 0; \tag{13.7}$$

$$Z_2 = 0:$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial D} = \frac{\partial a_3}{\partial \omega} = \frac{\partial a_3}{\partial T} = 0, \quad C\frac{\partial a_3}{\partial C} + a_3 = 0; \tag{13.8}$$

$$Z_3 = 0:$$

$$C\left(R_3\sin\omega + \cos\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_3}{\partial \omega}\right) + Da_1 = 0, \tag{13.9}$$

$$R_3\cos\omega - \sin\omega\ \mathrm{ctg}\,i\,\frac{\partial a_3}{\partial \omega} + Da_2 = 0.$$

Sve ove uslove ćemo ostaviti u ovom obliku, ma da se neke parcijalne jednačine mogu elementarno integraliti.

14. Ako sad sa ovog gledišta posmatramo vektore $\overline{C}$ i $\overline{D}$, vidimo, prema (10.4) i (10.5), da $\frac{d\overline{C}}{dt}$ ne zavisi od F_1 i nema komponentu duž vektora $\overline{x}$. Medjutim, $\frac{d\overline{D}}{dt}$ zavisi od F_1, F_2 i F_3 i ima sve tri komponente u trijedru $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$. Vektor $\overline{c}$, naveden u (8.2), ima istu osobinu kao i vektor $\overline{C}$, a $[\overline{C}\,\overline{D}]$ kao $\overline{D}$. Isto je i sa vektorima uvedenim u (8.3). Medjutim, oba vektora $\overline{a}$ i $\overline{b}$, uvedena u (8.1), imaju osobinu kao vektor $\overline{D}$.

Sa istog gledišta mogu se posmatrati i astronomski elementi iz (9.1). Iz (10.9) i (10.10) vidi se da $\frac{d\Omega}{dt}$ i $\frac{di}{dt}$ zavise samo od F_3; iz (10.7) izlazi da $\frac{dC}{dt}$ zavisi samo od F_2; medjutim, prema (10.8) i (10.12), $\frac{dD}{dt}$ i $\frac{dT}{dt}$ su funkcije od F_1 i F_2. Najkomplikovanije je sa $\frac{d\omega}{dt}$: prema (10.11) ovaj izvod zavisi i od F_1, i od F_2, i od F_3.

15. Od dosad posmatranih vektora najjednostavniji je $\overline{C}$: njegov izvod ne zavisi od F_1 i nema komponentu duž vektora $\overline{x}$. Poći ćemo sad obrnutim putem: pošavši od (11.3) i (11.4), potražićemo vektor $\overline{A}$ u koga je

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0. \tag{15.1}$$

Biće, dakle,

$$X = 0, \quad Y = Y_2F_2 + Y_3F_3, \quad Z = Z_2F_2 + Z_3F_3,$$

pa je

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = (Y_2F_2 + Y_3F_3)\overline{y} + (Z_2F_2 + Z_3F_3)\overline{z}.$$

Izvod takvog vektora, dakle, ne zavisi od F_1 i nema komponentu duž vektora $\overline{x}$; isto kao vektor $\overline{C}$.

Za $X_2 = 0$ prvi uslov u (13.2) daje $a_1 = 0$. Ako to unesemo u prvi i drugi uslov za $X_1 = 0$ u (13.1), dobićemo za a_2

$$\frac{\partial a_2}{\partial D} = \frac{\partial a_2}{\partial \omega} = \frac{\partial a_2}{\partial T} = 0,$$

pa onda treći uslov u (13.1) daje $a_2 = 0$. Sa $a_1 = a_2 = 0$ zadovoljeni su naši uslovi $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ i $Y_1 = 0$, a osim toga je još, prema (13.6), i $Y_2 = 0$.

Ostao nam je još uslov $Z_1 = 0$. On nam, prema (13.7), daje

$$a_3 = a_3(C, \Omega, i).$$

I tako je, prema (5.2),

$$\bar{A} = a_3(C, \Omega, i)\bar{C}, \tag{15.2}$$

a za njegov izvod dobivamo

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = Y_3F_3\bar{y} + (Z_2F_2 + Z_3F_3)\bar{z}. \tag{15.3}$$

Šta će biti Y_3, Z_2 i Z_3 - zavisi od a_3. Možemo ih izračunati po opštem postupku (11.6) i (11.7), no u našem konkretnom slučaju brže će ići neposredno iz (15.2):

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{da_3}{dt}\bar{C} + a_3\frac{d\bar{C}}{dt}.$$

Uzevši u obzir (10.3) i (10.4), dobićemo

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= -a_3rF_3\bar{y} + (C\frac{da_3}{dt} + a_3rF_2)\bar{z}, \\ a_3 &= a_3(C, \Omega, i). \end{aligned} \tag{15.4}$$

Tako smo došli do najopštijeg vektora $\bar{A}$ (15.2) koji, što se izvoda tiče, ima istu osobinu kao i vektor $\bar{C}$.

16. Pitanje je sad: možemo li za $\bar{A}$, izabravši zgodno $a_3 = a_3(C, \Omega, i)$, dobiti nešto još prostije nego što je $\bar{C}$? Iz (15.3) i (13.6) se vidi da se komponenta duž vektora $\bar{y}$ ne može anulirati, jer bi za to trebalo uzeti da je i $a_3 = 0$. Iz istog razloga se ne može ukloniti ni član koji sadrži F_3. Ostaje, dakle, jedino da se pokuša da ukloni komponenta duž vektora $\bar{z}$, tj. da se uzme, ako je moguće,

$$C\frac{da_3}{dt} + a_3r\,F_2 = 0.$$

To, na osnovi (10.7), znači

$$C\frac{da_3}{dt} + a_3\frac{dC}{dt} = 0, \quad \text{dakle} \quad a_3 = \frac{k}{C},$$

gde je k konstanta koja se tokom kretanja (vremena) ne menja. Prema tome je

$$\bar{A} = \frac{k}{C}\bar{C}.$$

No ovaj vektor ima stalan intenzitet (k), pa daje svega dva nezavisna skalarna elementa. Ništa nećemo izgubiti u opštosti ako uzmemo da je $k = 1$, tj.

$$\bar{A} = \frac{1}{C}\bar{C} = \bar{z}. \tag{16.1}$$

Iz (15.4) izlazi onda

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = -\frac{r}{C}F_3\,\bar{y}. \tag{16.2}$$

Kako je

$$\bar{y} = [\bar{z}\,\bar{x}]\,,\quad r\,\bar{x} = \bar{r},$$

a stavimo li

$$\bar{w} = \frac{1}{C} F_3\,\bar{r}, \tag{16.3}$$

dobićemo konačno

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = [\bar{w}\,\bar{z}]\,. \tag{16.4}$$

Tako smo u (16.1) došli, istina, do jednog specijalnog vektorskog elementa $\bar{z}$, koji ne zavisi ni od F_1, ni od F_2 i ima samo komponentu duž vektora $\bar{y}$, no koji daje samo dva nezavisna skalarna elementa, pošto je on jedinični vektor. Dakle, nešto prostije od vektora $\bar{C}$ sa tog gledišta ne može se postići. - Iz (2.3) se vidi da vektor $\bar{z}$ odredjuje skalarne elemente Ω i i.

17. Na osnovi izloženoga, vektor $\bar{A}$ specifikovaćemo tako što ćemo uzeti $\bar{A} = \bar{C}$. Prema (2.3) i (2.5). vektor $\bar{C}$ odredjuje tri skalarna elementa: Ω , i, p; u (10.9), (10.10) i (10.7) dato je kako oni variraju sa vremenom. Izabravši $\bar{A} = \bar{C}$, ostaje da se izabere i drugi vektor

$$\bar{B} = b_1\bar{D} + b_2\bar{Q} + b_3\bar{C},$$

koji bi trebalo da odredi preostala tri elementa ω , e, T.

Kako, prema (10.11), $\frac{d\omega}{dt}$ zavisi od sve tri komponente poremećajne sile, to i vektor $\bar{B}$ mora zavisiti od sve te tri komponente. Takav vektor postoji; na primer, vektor $\bar{G}$ u (8.3). Medjutim, prema (2.4), (10.8) i (10.12), e (odnosno D) i T ne zavise od F_3. Pońjima, mogao bi se specifikovati vektor $\bar{B}$ tako da ne sadrži komponentu F_3, ali zbog ω ne može. Ma kako, dakle, izabrali vektor $\bar{B}$ nezavisan od F_3, pomoću njega će se, eventualno, moći odrediti $\frac{dD}{dt}$ i $\frac{dT}{dt}$, ali neće moći $\frac{d\omega}{dt}$.

V. ODREDJIVANJE KRETANJA POMOĆU SEDAM SKALARNIH ELEMENATA

18. Vektor $\bar{G}$ u (8.3) je nezavisan od $\bar{C}$; stoga $\bar{C}$ i $\bar{G}$ odredjuju kretanje. Par $\bar{C}$ i $\bar{D}$ svakako je prostiji od para $\bar{C}$ i $\bar{G}$, ali je zbog $(\bar{C}\,\bar{D}) = 0$ potrebna, pored jednačina (10.4) i (10.5), još i jednačina (10.12). Uostalom, ni jednačina (10.5) nije tako prosta, ma da je prostija od jednačine za $\frac{d\bar{G}}{dt}$. Polazeći sa našeg gledišta uprošćavanja vektora $\bar{E}$, nije važno pitanje da li će on sadržavati T (kao $\bar{G}$) ili ne (kao $\bar{D}$), već da mora, zbog ω, sadržavati i F_1, i F_2, i F_3, a uprošćavanje bi trebalo, s obzirom na e i T, da se sastoji u tome da ne sadrži F_3.

Izlazak iz ove teškoće moguć je samo na jedan način: da se ugao ω u ravni putanje rastavi u dva ugla:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{18.1}$$

tako da se mesto jedne jednačine (10.11) dobiju dve:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{\operatorname{ctg} i}{C\,D}(q \sin\omega + Cs\cos\omega)F_3, \tag{18.2}$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{C\,q}{D^2 r}F_1 + \frac{s}{D^2 r}(C^2 + \mu\, r)F_2. \tag{18.3}$$

Time se, istina, mesto jednog elementa ω uvode dva, ω_1 i ω_2, i mesto jedne jednačine (10.11) dobivaju dve, (18.2) i (18.3), ali prva sadrži samo F_3, a druga samo F_1 i F_2. Stoga ω_1 spada u grupu u koju i Ω i i, a ω_2 u onu u koju e i T. Izvod $\frac{dp}{dt}$ (odnosno $\frac{dC}{dt}$) zavisi samo od F_2.

Kad se operiše sa vektorima $\bar{C}$ i $\bar{D}$, dve vektorske jednačine (10.4) i (10.5) daju šest skalarnih jednačina za izvode šest skalarnih veličina: C_1, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3, tj. komponenata vektora $\bar{C}$ i $\bar{D}$; uz to još dolazi i jednačina (10.12) za skalar T. Ukupno je, dakle, postavljeno sedam skalarnih jednačina za sedam skalara. Šta će se posle, i kako, izračunavati iz njih za praktične potrebe astronomije, to je drugo pitanje. Isti je slučaj i kad se radi sa vektorima (8.1) i (8.2).

Isto u osnovi radimo i mi rastavljajući ω u ω_1 i ω_2 : ope-

rišemo sa sedam skalarnih elemenata. Samo, mi smo do njih došli držeći se izvesnog principa: birali smo ih tako da se vide uticaji pojedinih komponenata F_1, F_2 i F_3 poremećajne sile $\overline{F}$.

19. Polazeći sa sasvim drugog gledišta, razložio je argument latitude perihela u dva sabirka i R. Kašanin /11/, stavivši

$$\omega = \widetilde{\omega} + \chi , \qquad \frac{d\chi}{dt} = \left(\frac{[\overline{C}\,\overline{D}]}{CD^2} \frac{d\overline{D}}{dt} \right); \qquad (19.1)$$

χ se meri od čvorne linije prema apsidnoj liniji u istom smeru u kome i ω, a u početnom trenutku može se χ uzeti proizvoljno. Pomoću ugla χ u /11/ je definisan trijedar medju sobom ortogonalnih jediničnih vektora $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ i $\overline{\zeta} = \overline{z}$ sa početkom u središtu (O) Sunca, koji zadovoljavaju diferencijalne jednačine

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = [\overline{w}\,\overline{u}] , \qquad \overline{u} = \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta},$$

/na koju smo i mi naišli u (16.4) za $\overline{z}$/ i pokazano je da se poremećeno kretanje može razložiti u dva: obrtanje ovog trijedra oko tačke O (prenosno kretanje) i kretanje u ravni $O\xi\eta$ (relativno kretanje). Ravan $O\xi\eta$ je upravna na $\overline{z}$, pa sadrži vektore $\overline{D}$ i $\overline{r}$.

Potražimo vezu izmedju ovog razlaganja (19.1) i našeg razlaganja (18.1), definisanog sa (18.2) i (18.3). U /11/ je pokazano da je $\frac{d\widetilde{\omega}}{dt}$ proporcionalno koordinati F_3 (kao i naše $\frac{d\omega_1}{dt}$), a $\frac{d\chi}{dt}$ je homogena linearna funkcija komponenata F_1 i F_2 (kao naše $\frac{d\omega_2}{dt}$). Stavimo li

$$\omega_1 = \widetilde{\omega} + \widetilde{\omega}_1, \qquad \omega_2 = \chi + \chi_1,$$

biće

$$\widetilde{\omega}_1 + \chi_1 \equiv 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{d\widetilde{\omega}_1}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{d\widetilde{\omega}}{dt}, \qquad \frac{d\chi_1}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} - \frac{d\chi}{dt} .$$

Prema tome, $\frac{d\widetilde{\omega}_1}{dt}$ je proporcionalno komponenti F_3 (jer su takvi $\frac{d\omega_1}{dt}$ i $\frac{d\widetilde{\omega}}{dt}$), a $\frac{d\chi_1}{dt}$ je homogena linearna funkcija od F_1 i F_2 (jer su takvi i $\frac{d\omega_2}{dt}$ i $\frac{d\chi}{dt}$):

$$\frac{d\widetilde{\omega}_1}{dt} = \lambda_3 F_3, \qquad \frac{d\chi_1}{dt} = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 .$$

Iz

$$\widetilde{\omega}_1 + \chi_1 \equiv 0 \qquad \text{izlazi} \qquad \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 \equiv 0.$$

Kako se F_1, F_2 i F_3 moraju dati proizvoljno, to znači da je

$$\lambda_1 \equiv 0, \qquad \lambda_2 \equiv 0, \qquad \lambda_3 \equiv 0.$$

Prema tome su $\widetilde{\omega}_1$ i χ_1 konstante (tj. ne zavise od vremena ni u poremećenom kretanju), tj. ω_1 i $\widetilde{\omega}$, a isto tako i ω_2 i χ razlikuju se samo za aditivnu konstantu.

Kako ove aditivne konstante nemaju nikakve važnosti, jer se moše u početnom trenutku χ uzeti proizvoljno, to možemo reći da su ω_1 i $\tilde{\omega}$, a isto tako ω_2 i χ, iste veličine, samo što se do njih došlo polazeći sa dva razna gledišta: do $\tilde{\omega}$ i χ razlažući kretanje u dva prostija; do ω_1 i ω_2 uklanjanjem nekih od komponenata poremećajne sile.

20. Naravno, astronomi će uvek tražiti da im se u krajnjoj liniji dadu Ω, ω, i, a, e i T, bez obzira na to preko kakvih se posrednih veličina do njih došlo, jer su im ovi elementi najpogodniji za njihove ciljeve. Kalkulatori će ići za tim da numerička izračunavanja budu što prostija i da se izvrše u što kraćem vremenu; no, to zavisi i od tehničkih sredstava kojima za račun raspolažu. Matematičari teoretičari će ove elemente birati u zavisnosti - naravno, posrednoj - od diferencijalnih jednačina tih elemenata, iz kojih mogu analizom iznaći osobine nepoznatih funkcija.

Sa gledišta kinematike, treba komplikovano kretanje razložiti u više prostijih, pa se onda elementi moraju birati tako da omoguće to razlaganje i da se na taj način dobije uvid u mehanizam pojave. Sa gledišta dinamike, treba videti kako izvesne komponente poremećajne sile utiču na geometriske i kinematičke elemente kretanja i, obrnuto, usled koje komponente se neki od ovih elemenata u poremećenom kretanju menja.

Mi smo u ovom radu pošli sa gledišta dinamike, rastavljajući poremećajnu silu u tri komponente: jednu, upravnu na ravan putanje; drugu, duž radijusvektora planete; treću, upravnu na ove dve. Bilo je razloga da se baš za ove tri opredelimo. Prva od njih, $F_3\bar{z}$, i samo ona, menja ravan putanje; druga, $F_1\bar{x}$, ima isti pravac kao i privlačna sila Sunca; treća, $F_2\bar{y}$, sa prve dve čini ortogonalni trijedar, u kome je računanje lakše nego li u kosouglom.

Tražeći elemente, vektorske i skalarne, koji zavise od što manjeg broja komponenata poremećajne sile, došli smo do sedam skalarnih elemenata, i to baš istih do kojih se došlo i sa gledišta kinematike, kad se poremećeno kretanje rastavljalo u dva prostija - prenosno i relativno. U tim zajedničkim elementima su se složila oba gledišta: kinematike i dinamike.

DODATAK

Izvodjenje uslovnih jednačina (13.1) - (13.9)

Jednačine (13.1) - (13.9) pretstavljaju, kako rekosmo, uslove pod kojima će se anulirati funkcije S_i ($S = X, Y, Z$; $i = 1, 2, 3$). Ove veličine zavise od karakterističnih funkcija a_i uočenog vektorskog elementa $\bar{A}$, njihovih parcijalnih izvoda po elementima (9.1) i vremena; ono se implicitno sadrži u r, s i q.

Da bismo videli kada se S_i mogu da anuliraju za svako t, pomenute tri funkcije vremena, r, s i q, izrazićemo pomoću jedne jedine, ekscentrične anomalije E. Tada će se naš zadatak svesti na nalaženje uslova anuliranja S_i za svako E. U tu svrhu ćemo iskoristiti poznate jednačine

$$r = \varepsilon^{-2}(\mu - D\cos E), \qquad s = D\varepsilon^{-1}\sin E, \qquad q = D\varepsilon^{-2}(\mu\cos E - D). \quad (1)$$

No, prema (11.2) i (10.13), pojaviće se u S_i i članovi sa množiteljem $t - T$. Da i njega izrazimo pomoću ekscentrične anomalije, poslužićemo se Keplerovom jednačinom, odakle nalazimo da je

$$t - T = \varepsilon^{-2}(\mu\varepsilon^{-1} E - s). \qquad (2)$$

Unesemo li, dakle, jednačine (1) i (2) u (11.2.) i (11.5) - (11.7), veličine S_i moći ćemo da svedemo na oblik

$$S_i = \frac{1}{R}\left\{ P(\sin E, \cos E) + kN\,E \right\}. \qquad (3)$$

Tu će P da bude polinom po naznačenim argumentima; njegovi koeficijenti su funkcije od a_i i parcijalnih izvoda. Takva je i veličina k. R je oblika $k_1 r$ ili $k_2 r^2$, pa neće uticati na anuliranje celog izraza (3). Što se tiče promenljive N, nju smo definisali, kako se iz (3) vidi, na taj način da nam kN pretstavlja skup svih funkcija u odgovarajućem S_i koje se, zbog (2), neposredno množe ekscentričnom anomalijom, a ne nekom njenom goniometriskom funkcijom. Zato ćemo zaključiti, kada na pomenuti način formiramo N za svako S_i, da je

$$N = \begin{cases} q\,\frac{\partial a_1}{\partial T} + C^2 s\,\frac{\partial a_2}{\partial T} & \text{za } X_1 \text{ i } X_2, \\ s\,\frac{\partial a_1}{\partial T} - q\,\frac{\partial a_2}{\partial T} & \text{za } Y_1 \text{ i } Y_2, \\ \frac{\partial a_3}{\partial T} & \text{za } Z_1 \text{ i } Z_2, \\ 0 & \text{za } X_3,\ Y_3 \text{ i } Z_3. \end{cases} \tag{4}$$

Ovde nismo imali potrebe za izražavanjem s i q pomoću ekscentrične anomalije; dovoljno nam je bilo da znamo da se N, oblika (4) u pojedinim slučajevima, množi sa E.

Kada smo ovako, jednačinom (3), odredili opšti oblik na koji se može svesti svako S_i, možemo pristupiti nalaženju uslova za njihovo anuliranje.

Ti uslovi su, očigledno, oni koji dovode do anuliranja kako polinom P, tako i veličinu N, za proizvoljnu vrednost ekscentrične anomalije. Kako N zavisi samo od prisustva parcijalnih izvoda po T u nekim a_i, to odmah možemo, prema (4), ispisati sledeće zaključke:

$$\begin{array}{lll} X_1,\ X_2,\ Y_1 \text{ i } Y_2 & \text{mogu se anulirati samo ako je} & \frac{\partial a_1}{\partial T} = \frac{\partial a_2}{\partial T} = 0, \\ Z_1 \text{ i } Z_2 & \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} & \frac{\partial a_3}{\partial T} = 0, \\ X_3,\ Y_3 \text{ i } Z_3 & \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} & \text{bez obzira na } \frac{\partial a_i}{\partial T},\ i=1,2,3. \end{array} \tag{5}$$

Ovi uslovi su navedeni u odgovarajućim jednačinama (13.1) - (13.9).

Ako, dakle, želimo da nam neko S_i bude identički jednako nuli, uslovi (5) moraju biti ispunjeni. No, oni su, kako već napomenusmo, samo potrebni, ali ne i dovoljni.

Zato sada obratimo pažnju na polinom P u (3). Pretpostavljajući da su odgovarajući uslovi iz (5) zadovoljeni, a zadržavajući još promenljive r, s i q, pomenuti polinom se, u slučajevima $S_1 = 0$ i $S_3 = 0$, svodi na

$$Fr^2 + Gs^2 + Hq^2 + Isr + Ksq + Ks + Lq = 0, \tag{6}$$

a u slučajevima $S_2 = 0$, na

$$s(F_1r^2 + G_1s^2 + I_1sr) + q(F_2r^2 + G_2s^2 + I_2sr) + \\ + F_3r^2 + G_3s^2 + H_3q^2 + J_3sq = 0. \tag{7}$$

Veličine označene velikim slovima su funkcije od a_i i parcijalnih izvoda, izuzev po T.

Polinomi po r^2, s^2, ... u (6) i (7) svode se, primenom jednačina (1), na

$$u_o + u_1 \sin E + u_2 \cos E + u_3 \sin E \cos E +$$
$$+ u_4 \sin^2 E + u_5 \cos^2 E = 0. \tag{8}$$

Koeficijenti u_j ($j = 0, 1, \ldots, 5$) su funkcije od $F, \ldots, F_1, \ldots$ ..., dakle: od a_i i parcijalnih izvoda. Prema tome, $S_i = 0$ biće identički zadovoljeno za svako t kada su ispunjeni uslovi (5) i kada odgovarajuće jednačine (8) predju u identičnosti. A to će za svako E (dakle, za svako t) biti kada je

$$u_o = - u_4 = - u_5, \qquad u_1 = u_2 = u_3 = 0. \tag{9}$$

Tako smo u (5) i (9) došli do potrebnih i dovoljnih uslova za anuliranje svake funkcije S_i. Uvedemo li jednačine (1) u onu (6), uslovi (9) se svode na

$$\begin{aligned}
&\mu^2 F + D^2 \varepsilon^2 G + D^4 H - D^2 \varepsilon^2 L = 0,\\
&(D^2 + \mu^2)F + D^2(D^2 + \mu^2)H - D^2 \varepsilon^2 L = 0,\\
&I - \mu J = 0,\\
&\mu I - D^2 J + \varepsilon^2 K = 0,\\
&2F + 2D^2 H - \varepsilon^2 L = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Ostavljajući po strani mogućnosti njihovih redukovanja, primetimo samo da isto važi, mutatis mutandis, i u slučajevima (7).

Tako, na primer, jednačina $X_1 = 0$, prema (11.5), glasi:

$$C^2 a_2 r + U_1 q + C^2 U_2 s = 0.$$

Unesemo li ovamo, iz (11.2), izraze za U_1 i U_2 - vodeći računa o (5) - prethodna jednačina prelazi u

$$CD^2 a_2 r^2 + C^3 D \frac{\partial a_2}{\partial D} s^2 - \frac{\partial a_1}{\partial \omega} q^2 + C(D \frac{\partial a_1}{\partial D} - C \frac{\partial a_2}{\partial \omega})sq = 0.$$

To znači da je u ovom slučaju, prema (6),

$$F = CD^2 a_2, \qquad I = 0,$$

$$G = C^3 D \frac{\partial a_2}{\partial D}, \qquad J = C\left(D \frac{\partial a_1}{\partial D} - C \frac{\partial a_2}{\partial \omega}\right),$$

$$H = -\frac{\partial a_1}{\partial \omega}, \qquad K = L = 0.$$

Udjemo li sa ovim u (10), dobićemo uslove (13.1), gde smo dodali i odgovarajuće iz (5). Istim postupkom smo izveli i jednačine (13.2) - (13.9).

\+ + +

Koristim i ovu priliku da izrazim svoju duboku zahvalnost profesoru R. Kašaninu, koji mi je, tokom izrade ovog rada, dao niz korisnih saveta i sugestija.

Isto tako, trajnu zahvalnost dugujem profesorima V. V. Miškoviću i T. P. Andjeliću na pomoći koju su mi pružili tokom rada.

LITERATURA

/1/ M. Milankovitch, Kanon der Erdbestrahlung ... , Ed. spec. de l'Acad. Roy. Serbe CXXXII (1941);

/2/ B. Popović, Novi oblici jednačina poremećaja u kretanju planeta, Glas SAN CXCVIII (1950), 129-139 = Bull. Acad. Serbe Sci. V (1952), 123-126;

/3/ B. Popović, Liaison entre deux systemes d'equations des perturbations des elements vectoriels, Memoires de l'Obs. astr. de Belgrade V (1949), 53-63;

/4/ J. L. Simovljević, Partial gradients of the perturbation function and the perturbation force, Notes et Travaux de la Sect. d'Astr. de l'Acad. Serbe Sci. II (1958), 73-80;

/5/ J. L. Simovljević, O jednoj varijanti računa specijalnih poremećaja vektorskih elemenata, Glas SAN CCLIV (1963), 67-73;

/6/ B. Popović, Specialperturboj de vektoraj elementoj de planedetorbito, Bull. Soc. math. phys. Serbie VIII (1956), 47-52;

/7/ S. Herrick, A modification of the "Variation-of-con - stans" method for special perturbations, Publ. ASP 60 (1948), 321-323;

/8/ Planetary Co-ordinates for the years 1960-1980, H.M.S.O. London (1958), 156-157;

/9/ P. Musen, Special perturbations of the vectorial elements, AJ 59 (1954), 262-267;

/10/ A. Bilimovitch, Ueber die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie, AN 273 (1943), 161--178;

/11/ R. Kašanin, Aproksimacija proizvoljnog kretanja materijalne tačke pomoću kretanja po konusnom preseku, Zbornik radova SAN XLII, Astr,-num. inst. 1 (1954), 13-51.