U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

OSNOVNA ORGANIZACIJA UDRUŽENOG RADA ZA MATEMATIKU, MEHANIKU I ASTRONOMIJU

MR JOVO M. ŠAROVIĆ

APROKSIMACIJA FUNKCIJA ANALITIČKIH U POJASU

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

BEOGRAD, 1987. GODINE

Izražavam iskrenu zahvalnost

Dr MIHAILU KONSTANTINOVIČU POTAPOVU,
profesoru Mehaničko-matematičkog fakulteta
Moskovskog državnog univerziteta, za pomoć i
podrušku u radu.

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

U disertaciji se razmatraju pitanja aproksimacije funkcija analitičkih u pojasu pomoću trigonometrijskih polinoma u metrici nekog maksimalnog simetričnog prostora. U njoj su, uglavnom, izloženi rezultati iz navedenog područja teorije približenja koje je dobio autor.

Rad se sastoji iz četiri dijela (glave).

U početku prve glave uvedene su definicije pojmova i oznake koje će se koristiti u radu. U drugom paragrafu definisane su klase funkcija $Б^{\delta}H_{p}^{\psi}$ i $Б^{\delta}B_{p\theta}^{\psi}$. Formulacija problema i njegova istorija je sadržana u trećem i četvrtom paragrafu.

U drugoj glavi definišu se klase funkcija $Б^{\delta}H_{E}^{\psi}$ i $Б^{\delta}B_{p\theta}^{\psi}$.

Da bi se olakšalo čitanje rada, u ovoj glavi su navedene teoreme različitih autora i pomoćne tvrdnje (leme) i njihovi dokazi koje je formulisao i dokazao sam autor. Ovdje nijesu navedeni opšte poznati stavovi.

Treća i četvrta glava predstavljaju glavni (osnovni) dio disertacije. U njima su formulisane i dokazane direktne i obrnute teoreme aproksimacija za funkcije iz klasa koje su definisane u drugoj glavi. Te teoreme i leme iz druge glave su osnovni rezultati disertacije.

Ako se citira neka formula iz prethodne glave, u zagradi se navodi redni broj glave, paragrafa i formule. Ako se radi o formuli iz te iste glave, ali iz prethodnog paragrafa, u zagradi se navode redni brojevi paragrafa i formule a u slučaju formule iz tog istog paragrafa, navodi se samo broj formule. Takav se princip primjenjuje i pri citiranju lema i teorema.

Autor

GLAVA I

POSTAVLJANJE PROBLEMA I NJEGOVA ISTORIJA

U skoro svim oblastima matematike značajnu ulogu imaju zadaci o aproksimaciji složenih objekata pomoću manje složenih. U većini takvih slučajeva veoma je korisno poznavanje osnovnih metoda, rezultata i problema teorije aproksimacija tj. teorije približenja. U posljednje vrijeme, u okviru teorije aproksimacija, uglavnom se izučavaju aproksimacije individualnih funkcija ili čitavih klasa, pomoću zadanih potprostora čiji su elementi funkcije u izvjesnom smislu prostije od funkcija koje se aproksimiraju.

Najčešće ulogu takvih potprostora imaju skup algebarskih polinoma ili, pak, (u periodičnom slučaju) skup trigonometrijskih polinoma.

U ovome radu biće razmatrana pitanja aproksimacije funkcija $f(z) = f(x+iy)$, realnih na osi x, 2π-periodičnih po promjenljivoj x i analitičkih u pojasu $\Delta = \{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$, pomoću trigonometrijskih polinoma čiji stepen nije veći od $n-1$, u normi nekog maksimalno simetričnog prostora.

§1. DEFINICIJE I OZNAKE

DEFINICIJA 1.1.1. Kažemo da funkcija $F(x)$ pripada prostoru L_p i pišemo $F(x)\varepsilon L_p$ ako je $F(x)$ realna 2π - periodična funkcija:

a) izmjeriva, ako je $p\varepsilon[1,+\infty)$, pri čemu je

$$\|F\|_p = \{\int_0^{2\pi}|F(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

b) neprekidna, ako je $p = \infty$, pri čemu je

$$\|F\|_\infty = \|F\|_C = \max_x |F(x)|.$$

DEFINICIJA 1.1.2. Sa $\omega_k(F,t)_p$ označavamo m o d u l g l a t k o s t i reda k za funkciju $F(x)\varepsilon L_p$ u metrici prostora L_p , tj.

$$\omega_k(F,t)_p = \sup_{|h|\leqslant t} \|\Delta_h^k F(x)\|_p \quad ,$$

gdje je

$$\Delta_h^k F(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^\nu F(x+\nu h) \quad ,$$

DEFINICIJA 1.1.3. Sa $E_n(F)_p$ označavamo n a j b o l j u a p r o k s i m a c i j u funkcije $F(x)\varepsilon L_p$ u metrici prostora L_p pomoću trigonometrijskih polinoma čiji stepen nije veći od $n-1$, tj.

$$E_n(F)_p = \inf_{T_{n-1}(x)} \|F(x)-T_{n-1}(x)\|_p \quad ,$$

gdje je

$$T_{n-1}(x) = \sum_{\nu=o}^{n-1} \alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x,$$

a α_ν i β_ν - realni brojevi.

DEFINICIJA 1.1.4. Kažemo da je $F(x)\varepsilon H_p^r$ ako je $F(x)\varepsilon L_p$ i

$$\omega_k(F,\delta)_p \leq M\delta^r,$$

gdje je $k>r>o$, $p\varepsilon[1,+\infty]$ i M - neka pozitivna konstanta.

DEFINICIJA 1.1.5. Kažemo da je $F(x)\varepsilon B_{p\theta}^r$, ako je $F(x)\varepsilon L_p$ i

$$\int_o^1 t^{-r\theta-1}\omega_k^\theta(F,t)_p dt<\infty,$$

gdje je $k>r>o$, $\theta\varepsilon(o,+\infty)$, $p\varepsilon[1,+\infty]$.

DEFINICIJA 1.1.6. Kažemo da je funkcija $\psi(\delta)$ funkcija t i p a m o d u l a g l a t k o s t i i pišemo $\psi(\delta)\varepsilon MH(\sigma)$ ako je:

1. $\psi(\delta)$ nenegativna i neprekidna na $[o,+\infty)$, $\psi(\delta)\not\equiv o$,

2. postoji $\sigma\geq o$ takvo da za bilo koje $\lambda\geq o$ vrijedi nejednakost

$$\psi(\lambda\delta)\leq C(\lambda+1)^\sigma\psi(\delta),$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od δ i λ .

DEFINICIJA 1.1.7. Sa H_p^ψ označavamo skup svih funkcija iz $F(x)\varepsilon L_p$ za koje vrijedi nejednakost

$$\omega_k(F,\delta)_p \leq M\psi(\delta),$$

gdje je $\psi(\delta)\varepsilon MH(\sigma)$, M neka pozitivna konstanta.

Primijetimo da se klasa funkcija H_p^ψ poklapa sa klasom

H_p^r ako je $\psi(\delta) = \delta^r$ i $k > r > o$.

DEFINICIJA 1.1.8. Sa $B_{p\theta}^{\psi}$ označavamo skup svih funkcija $F(x) \varepsilon L_p$ za koje vrijedi nejednakost

$$\int_o^1 \left[\frac{\omega_k(F,t)_p}{\psi(t)}\right]^{\theta} \frac{dt}{t} < \infty \quad ,$$

gdje je $\psi(\delta) \varepsilon MH(\sigma)$ i $\theta \varepsilon (o,+\infty)$.

Očito je da se klase $B_{p\theta}^{\psi}$ i $B_{p\theta}^{r}$ poklapaju ako je $\psi(\delta) = \delta^r$ i $k > r > o$.

§ 2. DEFINICIJE KLASA $Б^{\delta} H_p^{\psi}$ i $Б^{\delta} B_{p\theta}^{\psi}$

Za funkcije, koje su analitičke u pojasu, poznate su (V. [1] i [2]) sljedeće činjenice:

1. Neka je $f(z) = f(x+iy)$ realna funkcija na osi $x(y=o)$, 2π-periodična po x, analitička u pojasu $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$.

Ako za bilo koje y takvo da je $|y| < \delta$ i neko $p \varepsilon (1,+\infty]$ funkcija $\phi_y(x) = \mathrm{Re} f(x+iy)$ (kao funkcija nezavisno promjenljive x) ima osobinu

$$\| \phi_y(x) \|_p \leq M,$$

gdje je M pozitivna konstanta koja ne zavisi od y, to postoji, i pri tome samo jedna funkcija $\phi(x) \varepsilon L_p$ takva da za skoro sve x postoje granične vrijednosti $\lim\limits_{y \to -\delta} \mathrm{Re} f(x+iy)$ i

$\lim_{y\to+\delta} \mathrm{Re} f(x+iy)$ i pri tome skoro svuda vrijede jednakosti

$$\lim_{y\to-\delta} \mathrm{Re} f(x+iy) = \lim_{y\to+\delta} \mathrm{Re} f(x+iy) = \phi(x),$$

pri čemu je

$$\|\phi(x)\|_p \leq M,$$

i

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{1+4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos m(x-t)\}\phi(t)dt, \qquad (1)$$

gdje je $q = e^{-\delta}$.

2. Ako je $\phi(x)\in L_p$ za neko $p\in(1,\infty]$ i

$$\|\phi(x)\|_p \leq M,$$

gdje je M pozitivna konstanta, tada je funkcija f(x) definisana desnom stranom jednakosti (1), takva da je $f(z) = f(x+iy)$ realna funkcija na osi $x(y=o)$, 2π-periodična po promjenljivoj x, analitička u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$ i za svako y takvo da je $|y|<\delta$, funkcija $\phi_y(x)=\mathrm{Re} f(x+iy)$ (kao funkcija jedne promjenljive x) ima osobinu

$$\|\phi_y(x)\|_p \leq M,$$

i pri tome za skoro sve x vrijede jednakosti

$$\lim_{y\to-\delta} \mathrm{Re} f(x+iy) = \lim_{y\to+\delta} \mathrm{Re} f(x+iy) = \phi(x) .$$

Funkciju $\phi(x)$ nazivaju graničnom funkcijom funkcije f(z).

DEFINICIJA 1.2.1 Kažemo da je $f(x) \in Б^{\delta}H_p^{\psi}$ ako je $f(x)$ realna, 2π-periodična funkcija, koja se može predstaviti u obliku (1) i takva da njena granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi H_p^{ψ} .

DEFINICIJA 1.2.2. Kažemo da je $f(x) \in Б^{\delta}B_{p\theta}^{\psi}$, ako je $f(x)$ realna, 2π-periodična funkcija takva da se može predstaviti u obliku (1) i takva da njena granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B_{p\theta}^{\psi}$.

§3. POZNATI REZULTATI ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}H_p^{\psi}$

Prve rezultate o aproksimaciji funkcija analitičkih u pojasu dobio je S.N. Bernštajn 1912. godine. Njemu pripadaju sljedeće dvije teoreme:

TEOREMA I ([3]). Ako je $f(z) = f(x+iy)$ realna funkcija na osi $x(y=o)$, 2π-periodična po promjenljivoj x, analitička u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$, tada njena najbolja aproksimacija $E_n(f)$ u metrici prostora C pomoću trigonometrijskih polinoma, čiji stepen nije veći od $n-1$, zadovoljava uslov

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_n(f)} \leqslant e^{-\delta}. \tag{2}$$

TEOREMA II ([4]). Ako je $f(x)$ realna 2π-periodična funkcija i ako za nju vrijedi nejednakost (2), gdje je $\delta > o$, tada je funkcija $f(z) = f(x+iy)$ analitička u pojasu $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$.

Ako se od funkcije $f(z) = f(x+iy)$ zahtijeva nešto više od analitičnosti u pojasu $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$, može se dobiti bolja procjena od procjene (2) za $E_n(f)$.

N.I. Ahiezer je pojačao tvrdjenje teoreme I dokazujući sljedeću teoremu:

TEOREMA I_1 ([2]). Ako je $f(z) = f(x+iy)$ realna funkcija na osi $x(y=o)$, 2π-periodična po promjenljivoj x, analitička u pojasu $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$ i takva da je

$$-1 < \operatorname{Re} f(x+iy) < 1,$$

tada vrijedi procjena

$$E_n(f) \leq \frac{8}{\pi} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{e^{(2k+1)n\delta}}{1+e^{2(2k+1)n\delta}}$$

koja se ne može poboljšati pri uslovima navedenim u teoremi.

Nametanjem jačih ograničenja na funkciju $f(x+iy)$ dobijena su preciznija tvrdjenja od tvrdjenja I, II i I_1. U nizu radova (V. [1] i [5] - [9]) poboljšana su tvrdjenja I, II i I_1 za funkcije iz klasa $Б^{\delta} H_p^{\psi}$ i $Б^{\delta} B_{p\theta}^{\psi}$.

U radovima [1] i [5] dokazane su sljedeće tvrdnje za funkcije iz klase $Б^{\delta}H_p^r$:

I_2. Ako je $f(x) \varepsilon Б^{\delta}H_p^r$ tada je

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{C}{e^{n\delta} n^r} ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od $n(n=1,2,3,...)$.

II_1. Ako je

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{C}{e^{n\delta} n^{r+1}}$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od $n(n=1,2,3,...)$, tada je

$$f(x) \varepsilon Б^{\delta}H_p^r .$$

U radovima [6] i [7] rezultati I_2 i II_1 su poboljšani. Dokazane su sljedeće tvrdnje:

I_3. Ako je $f(x) \varepsilon Б^{\delta}H_p^r$, tada za bilo koje $q \varepsilon [1,+\infty]$ vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_q \leqslant \frac{C}{e^{n\delta} n^r} ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od $n(n=1,2,3,...)$. Tvrdjenje se ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}H_p^r$.

II_2. Ako je

$$E_n(f)_q \leqslant \frac{C}{e^{n\delta} n^r} ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$, i ako postoji p takvo da je $2\leqslant p\leqslant\infty$ i $r>1-\frac{1}{p}$, tada je

$$f(x)\in Б^{\delta}H_p^{r-1+\frac{1}{p}} .$$

Navedeno tvrdjenje se ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}H_p^{r-1+\frac{1}{p}}$.

U radu [8] ti su rezultati poopšteni na sljedeći

način:

I_4. Ako je $f(x)\in Б^{\delta}H_p^{\psi}$, tada za bilo koje $q\in[1,+\infty]$ vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_q \leqslant \frac{C}{e^{n\delta}} \psi(\tfrac{1}{n}) ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$.

II_3. Ako je

$$E_n(f)_q \leqslant \frac{C}{e^{n\delta}} \psi(\tfrac{1}{n}) ,$$

gdje je $\psi(\delta)\in MH(^{\sigma})$ i pozitivna konstanta C ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$ i ako postoje prirodan broj k i $p\in[2,+\infty]$ takvi da funkcija $\psi_1(\delta) = \psi(\delta)\delta^{\frac{1}{p}-1}$ ima sljedeća svojstva:

a) $\psi_1(\delta)\varepsilon MH(\sigma_1)$,

b) $\{\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu}\psi_1{}^p(\frac{1}{\nu})\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1\psi_1(\frac{1}{n})$ za $p < \infty$,

c) $\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu}\psi_1(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_1\psi_1(\frac{1}{n})$ za $p = \infty$,

gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od n (n=1,2,3,...), tada je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}H_p^{\psi_1} ,$$

i tvrdjenje se ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}H_p^{\psi_1}$.

U ovome radu je pojačano tvrdjenje II_3. Osim toga, tvrdjenja I_4, II_3 i njihova pojačanja prenesena su na maksimalne simetrične prostore.

§ 4. POZNATI REZULTATI ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}B_{p\theta}^{\psi}$

Za funkcije iz klase $Б^{\delta}B_{p\theta}^{r}$ u radu [7] su dokazane sljedeće tvrdnje:

III_1 . Ako je $f(x)\varepsilon Б^{\delta}B_{p\theta}^{r}$, tada je

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_{k-1}^{\theta_1}(f)_q e^{k\delta\theta_1} k^{r\theta_1-1} < \infty$$

za bilo koje $q\varepsilon[1,+\infty]$ i bilo koje $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$; tvrdjenje se ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}B^{r}_{p\theta}$.

IV_1. Ako je

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_{k-1}^{p}(f)_q e^{k\delta p} k^{rp-1} < \infty$$

i ako je $r > 1 - \frac{1}{p}$ i $p\varepsilon[2,+\infty)$, tada je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}B^{r-1+\frac{1}{p}}_{p\theta_1}$$

za bilo koje $\theta_1\varepsilon[p,+\infty)$.

Tvrdjenje se za θ_1=p ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}B^{r-1+\frac{1}{p}}_{pp}$.

U radu [9] ti su rezultati poopšteni na sljedeći način. Dokazana je tačnost sljedećih tvrdnji:

III_2. Ako je $f(x)\varepsilon Б^{\delta}B^{\psi}_{p\theta}$, tada za bilo koje $q\varepsilon[1,+\infty]$ i bilo koje $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta_1}}{\nu\psi^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu-1}^{\theta_1}(f)_q <\infty;$$

to tvrdjenje za θ_1 =θ nije moguće poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}B^{\psi}_{p\theta}$;

IV_2. Ako je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta p}}{\nu\psi^p(\frac{1}{\nu})} E^p_{\nu-1}(f)_q < \infty,$$

gdje je $\psi(\delta)\varepsilon MH(\sigma)$ i $p\varepsilon[2,+\infty)$ i ako postoje prirodni k i $\Theta_1\varepsilon[p,+\infty)$ takvi da funkcija $\psi_1(\delta)=\psi(\delta)\delta^{\frac{1}{p}-1}$ ima sljedeće osobine

a) $\psi_1(\delta)\varepsilon MH(\sigma_1)$,

b) $$\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_1^p(\frac{1}{\nu})}\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{C}{\psi_1(\frac{1}{n})},$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od n (n=1,2,3,...), tada je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}B^{\psi_1}_{p\theta_1} .$$

To se tvrdjenje za $\Theta_1 = p$ ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}B^{\psi_1}_{pp}$.

U radu su poboljšana i pojačana navedena tvrdjenja za funkcije iz klase $Б^{\delta}B^{\psi}_{p\theta}$.

Osim toga tvrdjenja III_2 i IV_2 kao i njihova pojačanja prenesena su na maksimalne simetrične prostore.

Rezultati rada su izlagani na Seminaru za teoriju aproksimacija Mehaničko-matematičkog fakulteta MGU kojim rukovodi prof. M.K. Potapov za vrijeme boravka na MGU.

Neki rezultati su publikovani u radu [20] . Dio rezultata je predat u štampu (V. [21], [22]).

G L A V A II

DEFINICIJE I POMOĆNE TVRDNJE

§1. OZNAKE I DEFINICIJE

DEFINICIJE 2.1.1. Funkcionalni banahov prostor E, 2π-periodičnih realnih izmjerivih funkcija (u daljem radu ne pravimo razliku medju ekvivalentnim funkcijama) naziva se simetričnim, ako

1. iz toga što je $g(x) \in E$ i $|f(x)| \leq |g(x)|$ skoro svuda na $[0,2\pi]$ slijedi da je $f(x) \in E$ i

$$\|f\|_E \leq \|g\|_E ,$$

2. iz toga što je $g(x) \in E$ i funkcija $|f(x)|$ jednakoizmjeriva sa funkcijsom $|g(x)|$ slijedi da je $f(x) \in E$ i

$$\|f\|_E = \|g\|_E .$$

DEFINICIJA 2.1.2. Simetrični prostor E na kome je definisana norma desnom stranom jednakosti

$$\|f\|_E = \sup_{\|g\|_{E'}\leq 1} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \;,$$

gdje je E'-dualni prostor simetričnog prostora E, naziva se maksimalnim simetričnim prostorom.

U daljem radu razmatraćemo samo maksimalne simetrične prostore.

Sa A označavamo klasu prostora E, gdje su E maksimalni simetrični prostori.

Primijetimo da su za $p\in[1,+\infty]$ prostori L_p maksimalni simetrični prostori. Pri tome pod L_∞ podrazumijevamo prostor C - neprekidnih realnih 2π-periodičnih funkcija.

DEFINICIJA 2.1.3. Za normirani prostor E_1 kažemo da je uložen u normirani prostor E_2 i pišemo

$$E_1 \subseteq E_2$$

ako vrijedi:

1. ako je $F(x)\in E_1$ tada je $F(x)\in E_2$
2. postoji konstanta C koja zavisi samo od E_1 i E_2 takva da vrijedi

$$\|F\|_{E_2} \leq C\|F\|_{E_1}$$

za svako $F(x)\in E_1$.

DEFINICIJA 2.1.4. Sa $\omega_k(F,t)_E$ označava se modul glatkosti (u metrici prostora E, $E\in A$) reda k funkcije $F(x)\in E$, tj.

$$\omega_k(F,t)_E = \sup_{|h|\leq t} \| \Delta_h^k F(x) \|_E ,$$

gdje $\Delta_h^k F(x)$ označava k-tu razliku funkcije F(x).

DEFINICIJA 2.1.5. Sa H_E^ψ označavamo skup svih funkcija $F(x)\in E$ takvih da za svaku od njih vrijedi nejednakost

$$\omega_k(F,\delta)_E \leq M\psi(\delta) ,$$

gdje je $\psi(\delta)\in MH(\sigma)$ (V. definiciju 1.1.6), $k > \sigma$, $E\in A$ i M neka pozitivna konstanta.

Primijetimo da se za $\psi(\delta) = \delta^r$, $E = L_p$ i $k > r > o$ klasa funkcija H_E^ψ poklapa sa klasom H_p^ψ

DEFINICIJA 2.1.6. Sa $B_{E\theta}^\psi$ označavamo skup svih funkcija $F(x)\in E$, za koje vrijedi nejednakost

$$\int_o^1 \left[\frac{\omega_k(F,t)_E}{\psi(t)} \right]^\theta \frac{dt}{t} < \infty ,$$

gdje je $\psi(\delta)\in MH(\sigma)$ i $\theta\in(o,+\infty)$.

Očito je da se klase $B_{E\theta}^\psi$ i $B_{p\theta}^r$ poklapaju ako je $E = L_p$, $\psi(\delta) = \delta^r$ i $k > r > o$.

klase funkcija $B^{\psi}_{E\theta}$ i $B^{r}_{p\theta}$ poklapaju.

DEFINICIJA 2.1.8. Sa $E_n(F)_E$ označava se najbolja aproksimacija (približenje) funkcije $F(x)\varepsilon E$ u metrici prostora E, $(E\varepsilon A)$ pomoću trigonometrijskih polinoma čiji stepen nije veći od n-1, tj.

$$E_n(F)_E = \inf_{T_{n-1}(x)} \| F(x) - T_{n-1}(x) \|_E ,$$

gdje je

$$T_{n-1}(x) = \sum_{\nu=o}^{n-1} (\alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x)$$

a α_ν i β_ν-realni brojevi.

DEFINICIJA 2.1.9. Sa Λ_2 označavamo klasu 2π-periodičnih realnih integrabilnih funkcija $\phi(x)$ sa lakunarnim Furierovim redom

$$\phi(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos 2^\nu x .$$

DEFINICIJA 2.1.10. Sa M označavamo klasu 2π-periodičnih realnih integrabilnih funkcija $\phi(x)$, čiji Furierov red

$$\phi(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$$

ima monotono opadajuće koeficijente, tj. vrijedi

$$a_o \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \quad i \quad a_\nu \to o \quad za \ \nu \to \infty.$$

Furierov red funkcije $f(x)\varepsilon L_1$ zapisivaćemo ili u realnom obliku

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \ ,$$

ili u kompleksnom obliku

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \ ,$$

gdje je

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi} f(t)\cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi} f(t)\sin kt dt \ ,$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi} f(t)dt \ , \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} f(t)e^{ikt}dt \ .$$

Parcijalne sume Furierovog reda funkcije f(x) označavaćemo sa $S_N(f,x)$, tj.

$$S_N(f,x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

DEFINICIJA 2.1.11. Kažemo da funkcija f(x) pripada klasi $Б^{\delta}H_E^{\psi}$ $(\delta>o, \psi(\delta)\varepsilon MH(\sigma),\ E\varepsilon A)$ ako je f(x) realna, 2π-periodična funkcija i takva da se može napisati u obliku

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \{1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos m(x-t)\}\phi(t)dt, \tag{1}$$

gdje je $q = e^{-\delta}$, i pri tome njena granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi H_E^{ψ} .

DEFINICIJA 2.1.12. Kažemo da je funkcija $f(x)$ iz klase $Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$, $(\delta>0, \psi(\delta)\in MH(\sigma),\ 0<\theta<\infty,\ E\in A)$, ako je $f(x)$-realna, 2π-periodična funkcija, takva da se može predstaviti u obliku (1), pri čemu njena granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi funkcija $B^{\psi}_{E\Theta}$.

Neka je $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ Furierov red funkcije $f(x)$ a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(y)e^{ikx}$ Furierov red funkcije $\phi_y(x)=\mathrm{Re}f(x+iy)$, tada za Furierove koeficijente c_k i $A_k(y)$ funkcija $f(x)$ i $\phi_y(x)$ vrijedi

$$A_k(y) = c_k \frac{e^{ky}+e^{-ky}}{2} \ . \tag{2}$$

Ako se funkcija $f(x)$ može prikazati u obliku (1) i ako $\phi(x)$ ima Furierov red $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{ikx}$, tada je

$$\alpha_k = c_k \frac{e^{k\delta}+e^{-k\delta}}{2} \ . \tag{3}$$

Primijetimo da iz (2) i (3) slijede nejednakosti

$$|A_k(y)| \leq e^{|k|\delta}|c_k| \quad , \quad |c_k| \leq 2e^{-|k|\delta}|A_k(y)| , \tag{4}$$

$$|\alpha_k| \leq e^{|k|\delta}|c_k| \quad , \quad |c_k| \leq 2e^{-|k|\delta}|\alpha_k| \ . \tag{5}$$

§2. POMOĆNE TVRDNJE

LEMA 2.2.1. Ako se $f(x)$ može prikazati u obliku (1) i ako je $K_o(x) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \phi(t)dt$ i

$$K_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \{1+4\sum_{m=1}^{n-1} \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos m(x-t)\}\phi(t)dt ,$$

tada za bilo koje $E,F \in A$ vrijede nejednakosti

$$E_n(f)_F \leqslant \|f(x)-K_{n-1}(x)\|_F \leqslant \frac{C}{e^{n\delta}} E_n(\phi)_E ,$$

gdje pozitivna konstanta C zavisi samo od E i δ.

DOKAZ. Funkcija $K_o(x)$ je trigonometrijski polinom stepena nula a $K_{n-1}(x)$ je trigonometrijski polinom čiji stepen nije veći od n-1 $(n\geqslant 2)$.

Neka je $T_{n-1}(x)$ trigonometrijski polinom čiji stepen nije veći od n-1 a koji najbolje aproksimira funkciju $\phi(x)$ u metrici prostora E, tj.

$$E_n(\phi)_E = \|\phi(x)-T_{n-1}(x)\|_E .$$

Kako je polinom $T_{n-1}(x)$ ortogonalan na cosmx za $m\geqslant n$ i kako je E uloženo u L_1, to vrijede sljedeće nejednakosti

$$E_n(f)_F \leqslant \|f(x)-K_{n-1}(x)\|_F \leqslant C_1 \sup_{o\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)-K_{n-1}(x)| =$$

$$= C_1 \sup_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\sum_{m=n}^{\infty} (e^{m\delta}+e^{-m\delta})^{-1} \cos m(x-t)\left[\phi(t)-T_{n-1}(t)\right]\} dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2}{e^{n\delta}} \int_0^{2\pi} |\phi(t)-T_{n-1}(t)|dt = \frac{C_2}{e^{n\delta}} \|\phi(t)-T_{n-1}(t)\|_{L_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{e^{n\delta}} \|\phi(t)-T_{n-1}(t)\|_E = \frac{C_3}{e^{n\delta}} E_n(\phi)_E .$$

LEMA 2.2.2. Neka je $f(x)\varepsilon E$, $(E\varepsilon A)$. Tada za Furierove koeficijente funkcije $f(x)$ vrijede nejednakosti

$$|c_o| \leqslant C\|f\|_E \ , \quad |c_k| \leqslant CE_{|k|}(f)_E \ , \quad (|k| \geqslant 1),$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od $f(x)$ i k, $(k=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots)$.

DOKAZ. Neka je $T_{k-1}(x)$ polinom stepena $|k|-1$ koji najbolje aproksimira funkciju $f(x)$ u metrici prostora E, $(E\varepsilon A)$. Taj polinom je ortogonalan sa e^{ikx}, pa je zbog toga

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x)-T_{k-1}(x)\right] e^{ikx}dx .$$

Kako je prostor E uložen u L_1, to iz posljednje jednakosti i činjenice da je $T_{k-1}(x)$ polinom najbolje aproksimacije funkcije $f(x)$ u metrici prostora E, slijedi

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-T_{k-1}(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\|f(x)-T_{k-1}(x)\|_{L_1} \leq$$

$$\leq c_4\|f(x)-T_{k-1}(x)\|_E = C_4 E_{|k|}(f)_E ,$$

$$|c_o| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_1} \leq C_5\|f\|_E .$$

Lema je dokazana.

Primijetimo da iz nejednakosti (4) i tek dokazane procjene za $|c_k|$ slijedi nejednakost

$$|A_k(y)| \leq Ce^{|k|\delta}E_{|k|}(f)_E , \quad (|k| \geq 1). \tag{6}$$

Ako se funkcija f(x) može predstaviti u obliku (1.1), to koristeći nejednakost (5) i procjenu za $|c_k|$ možemo pisati

$$|\alpha_k| \leq Ce^{|k|\delta}E_{|k|}(f)_E , \quad (|k| \geq 1). \tag{7}$$

TEOREMA 2.2.1 ([10]). Neka je $f(x)\in L_p$, $p\in[1,+\infty)$, $q\in(p,+\infty]$ i neka vrijedi nejednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n(f)_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} < \infty ,$$

tada je $f(x)\in L_q$, pri čemu je

$$E_n(f)_q \leq C_{pq}\Big[E_n(f)_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_p k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\Big] ,$$

gdje pozitivna konstanta C_{pq} zavisi samo od p i q.

LEMA 2.2.3. Neka je $f(x)\varepsilon E, \psi(\delta)\varepsilon MH(\sigma)$, $(E\varepsilon A)$. Ako je

$$E_n(f)_E \leqslant \frac{C_6}{e^{n\delta}}\psi\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (\delta>0)$$

gdje pozitivna konstanta C_6 ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$, to se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$, tj. funkcija $f(z) = f(x+iy)$ je analitička u pojasu Δ.

DOKAZ. Kako je E uložen u L_1, to je prema pretpostavci leme

$$E_n(f)_{L_1} \leqslant C_7 E_n(f)_E \leqslant \frac{C_8}{e^{n\delta}}\psi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Primjenjujući teoremu Stečkina-Konjuškova (T.1), tek dokazanu procjenu za $E_n(f)_{L_1}$ i svojstva funkcije $\psi(\delta)\varepsilon$ $\varepsilon MH(\sigma)$ dobijamo

$$E_n(f)_C \leqslant C_9\left[E_n(f)_{L_1} n + \sum_{\nu=n}^{\infty} E_\nu(f)_{L_1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\left[\frac{n}{e^{n\delta}}\psi\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{e^{\nu\delta}}\psi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\left[\frac{n}{e^{n\delta}}\psi\left(\frac{1}{n}\right)+\psi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{e^{\nu\delta}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\left[\frac{n}{e^{n\delta}}\psi\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{e^{n\delta}}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\leqslant C_{13}\frac{n}{e^{n\delta}}.$$

Tako smo dokazali da vrijedi

$$E_n(f)_C \leqslant C_{13}\frac{n}{e^{n\delta}},$$

otkuda slijedi da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f)_C}\leqslant e^{-\delta}.$$

Prema Bernštajnovoj teoremi (T. 1.3.II), to znači da se funkcija $f(x)$ može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty,|y|<\delta\}$, tj. funkcija $f(z)=f(x+iy)$ je analitička u pojasu Δ. Lema je dokazana.

LEMA 2.2.4. Neka je $\psi(\delta)$ funkcija tipa modula glatkosti, tj. $\psi(\delta)\in MH(\sigma)$, tada za bilo koji prirodan broj k vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi\left(\frac{1}{\nu}\right)\leqslant C_{15}n^k\psi\left(\frac{1}{n}\right),$$

gdje pozitivna konstanta C_{15} ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$.

DOKAZ. Ako se koriste svojstva funkcije $\psi(\delta)\in MH(\sigma)$, jednostavnim transformacijama nalazimo da je

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi(\tfrac{1}{\nu}) = \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi(\tfrac{n}{\nu}\cdot\tfrac{1}{n}) \leqslant C_{16}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}(\tfrac{n}{\nu}+1)^{\sigma}\psi(\tfrac{1}{n}) \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}(\tfrac{2n}{\nu})^{\sigma}\psi(\tfrac{1}{n}) = C_{16}(2n)^{\sigma}\psi(\tfrac{1}{n})\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1-\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant C_{17}(2n)^{\sigma}\psi(\tfrac{1}{n})n^{k-\sigma} \leqslant C_{18}n^{k}\psi(\tfrac{1}{n}) .$$

Lema je dokazana.

LEMA 2.2.5. Neka je $f(x)\varepsilon E$, $(E\varepsilon A)$ i neka vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_E \leqslant \frac{C_{19}}{e^{n\delta}}\psi(\tfrac{1}{n}) ,$$

tada za Furierove koeficijente c_k funkcije $f(x)$ vrijede nejednakosti

$$|c_k| \leqslant \frac{C_{2o}}{e^{|k|\delta}}\psi(\frac{1}{|k|}) ,$$

gdje pozitivna konstanta C_{2o} ne zavisi od k $(k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

DOKAZ. Primjenjujući lemu 2 i pretpostavku leme zaključujemo da vrijedi

$$|c_k| \leqslant C_{21}E_{|k|}(f)_E \leqslant \frac{C_{22}}{e^{|k|\delta}}\psi(\frac{1}{|k|}) .$$

Lema je dokazana.

Primijetimo da iz nejednakosti (4.1) i tek dokazane procjene za $|c_k|$ slijedi da je

$$|A_k(y)| \leqslant C_{22}\psi(\frac{1}{|k|}) \ . \tag{8}$$

TEOREMA 2.2.2 ([12]). Ako je $f(x) \varepsilon L_p$ i $1<p<\infty$, tada vrijedi nejednakost

$$\| f(x) - S_{N-1}(x,f) \|_p \leqslant CE_N(f)_p \ ,$$

pri tome pozitivna konstanta C zavisi jedino od p.

LEMA 2.2.6. Neka je $L_{p_1} \subset E \subset L_{p_2}$, $(1<p_2 \leqslant p_1 < \infty,\ E \varepsilon A)$ i $f(x) \varepsilon E \cap \Lambda_2$ tada za $2^{m-1}<n\leqslant 2^m$ vrijede relacije

$$E_n(f)_E \asymp E_{2^m}(f)_E \asymp (\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu^2)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Ovdje i dalje u radu zapis $A(n) \asymp B(n)$ označava da postoje pozitivne konstante C' i C'' koje ne zavise od n (n=1,2,3,...) takve da vrijede nejednakosti

$$C'B(n) \leqslant A(n) \leqslant C''B(n) \ .$$

DOKAZ. Koristeći ulaganje $L_{p_1} \subset E$ jednakost

$$S_{n-1}(x,f) = S_{2^m-1}(x,f)$$

Zigmundovu lemu (V. [17], str. 217), teoremu 2 i ulaganje $E \subset L_{p_2}$ dobiće se

$$E_n(f)_E \leq \|f(x)-S_{n-1}(x,f)\|_E \leq C_{23}\|f(x)-S_{n-1}(x,f)\|_{p_1} =$$

$$= C_{23}\|f(x)-S_{2^m-1}(x,f)\|_{p_1} \leq C_{24}\{\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu^2\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C_{25}\|f(x)-S_{2^m-1}(x,f)\|_{p_2} = C_{25}\|f(x)-S_{n-1}(x,f)\|_{p_2} \leq$$

$$\leq C_{26}E_n(f)_{p_2} \leq C_{26}\|f(x)-T_{n-1}(x)\|_{p_2} \leq$$

$$\leq C_{27}\|f(x)-T_{n-1}(x)\|_E = C_{27}E_n(f)_E ,$$

gdje je $T_{n-1}(x)$ polinom čiji stepen nije veći od n-1 a koji najbolje aproksimira funkciju f(x) u metrici prostora E.

Koristeći tek dokazanu procjenu i nejednakosti

$$E_{2^m}(f)_E \leq \|f(x)-S_{2^m-1}(x,f)\|_E \leq C_{28}E_{2^m}(f)_E ,$$

dobićemo sljedeće nejednakosti

$$E_n(f)_E \leqslant C_{29}\{\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{30}E_{2^m-1}(f)_E \leqslant$$

$$\leqslant C_{31}\{\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{32}E_n(f)_E \ .$$

LEMA 2.2.7. Neka je $f(x)\varepsilon E, \psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$, $o<\theta<\infty$, $\delta>o$, $(E\varepsilon A)$.

Ako je

$$\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(f)_E\}^{\frac{1}{\theta}}<\infty,$$

tada se funkcija $f(x)$ može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$, tj. funkcija $f(z)=f(x+iy)$ je analitička u tom pojasu.

DOKAZ. Iz uslova leme slijedi da je

$$E_n(f)_E \leqslant \frac{C_1}{e^{n\delta}} n^{\frac{1}{\theta}} \ , \ n = 1,2,3,\ldots$$

Kako je E uloženo u L_1, to je

$$E_n(f)_{L_1} \leqslant \frac{C_2}{e^{n\delta}} n^{\frac{1}{\theta}} \quad .$$

Primjenjujući teoremu Stečkina-Konjuškova (T.1) dobijamo

$$E_n(f)_C \leqslant C_3\Big[E_n(f)_{L_1} n + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{L_1}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \quad C_4\Big(\frac{n^{\frac{1}{\theta}+1}}{e^{n\delta}} + \frac{n^{\frac{1}{\theta}}}{e^{n\delta}}\Big) \leqslant C_5\,\frac{n^{\frac{1}{\theta}+1}}{e^{n\delta}}\,,$$

otkuda neposredno slijedi da je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{E_n(f)_C} \leqslant e^{-\delta}.$$

Prema Bernštajnovoj teoremi, posljednja nejednakost znači da se funkcija $f(x)$ može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Lema je dokazana.

LEMA 2.2.8. Neka je

$$I^\theta = \int_0^1 \Big[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\Big]^\theta \frac{dt}{t}\,, \qquad I_1^\theta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\Big[\frac{\omega_k(\phi,\frac{1}{\nu})_E}{\psi(\frac{1}{\nu})}\Big]^\theta,$$

tada vrijede nejednakosti

$$C_1 I_1 \leqslant I \leqslant C_2 I_1\,,$$

gdje pozitivne konstante C_1 i C_2 ne zavise od funkcije $\phi(x)$.

DOKAZ. Koristeći svojstva funkcije $\psi(\delta)\in MH(\sigma)$ i svojstva modula glatkosti, možemo pisati

$$I^{\theta}=\int_{0}^{1}\left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\right]^{\theta}\frac{dt}{t}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\right]^{\theta}\frac{dt}{t}\geqslant$$

$$\geqslant C_3\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\omega_k(\phi,\frac{1}{\nu+1})_E}{\psi(\frac{1}{\nu})}\right]^{\theta}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\frac{dt}{t}\geqslant C_4\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left[\frac{\omega_k(\phi,\frac{1}{\nu})_E}{\psi(\frac{1}{\nu})}\right]^{\theta}=$$

$$=C_4 I_1^{\theta}\ .$$

Analogno

$$I^{\theta}=\int_{0}^{1}\left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\right]^{\theta}\frac{dt}{t}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\right]^{\theta}\frac{dt}{t}\leqslant$$

$$\leqslant C_5\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\omega_k(\phi,\frac{1}{\nu})_E}{\psi(\frac{1}{\nu+1})}\right]^{\theta}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\frac{dt}{t}\leqslant C_6\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left[\frac{\omega_k(\phi,\frac{1}{\nu})_E}{\psi(\frac{1}{\nu})}\right]^{\theta}=$$

$$=C_6 I_1^{\theta}\ .$$

Lema je dokazana.

TEOREMA 2.2.3 ([13],[14]). Neka je $F(x)\in E$, $(E\in A)$, tada je

$$E_n(F)_E\leqslant C\omega_k(F,\tfrac{1}{n})_E\ ,$$

$$\omega_k(F,\tfrac{1}{n})_E\leqslant\frac{C}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(F)_E\ ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od funkcije $F(x)$ i n $(n=1,2,3,\dots)$.

LEMA 2.2.9. Ako je

$$I^{\theta} = \int_{0}^{1} \left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)} \right]^{\theta} \frac{dt}{t} \quad , \quad I_2^{\theta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E \; ,$$

tada vrijedi nejednakost

$$I_2 \leqslant C_1 I \; ,$$

gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od funkcije $\phi(x)$.

DOKAZ. Prema teoremi 3 i lemi 8 vrijedi

$$I_2^{\theta} \leqslant C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left[\frac{\omega_k(\phi,\frac{1}{\nu})_E}{\psi(\frac{1}{\nu})} \right]^{\theta} \leqslant C_3 \int_{0}^{1} \left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)} \right]^{\theta} \frac{dt}{t} = C_3 I^{\theta} .$$

LEMA 2.2.10. Neka je $\psi(\delta) \in MH(\sigma)$, tada za bilo koji prirodan broj $k>\sigma$ i bilo koje $\theta \in (0,+\infty)$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{k\theta+1}\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \leqslant \frac{C}{n^{k\theta}\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} \; ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od n (n=1,2,3,...).

DOKAZ. Neka je $\nu \geqslant n$. Prema svojstvu 2 funkcije $\psi(\delta)$ vrijedi

$$\psi(\frac{1}{n}) = \psi(\frac{1}{\nu}.\frac{\nu}{n}) \leqslant C_1(\frac{\nu}{n}+1)^{\sigma}\psi(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_2(\frac{\nu}{n})^{\sigma}\psi(\frac{1}{\nu}) \; .$$

Iz posljednje nejednakosti očito je

$$\frac{1}{\psi(\frac{1}{\nu})} \leqslant C_3 \; (\frac{\nu}{n})^{\sigma} . \; \frac{1}{\psi(\frac{1}{n})} \; .$$

Iz te nejednakosti, za $k>\sigma$ slijede nejednakosti

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{k\theta+1}\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \leqslant C_4 \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{k\theta+1}} \cdot \frac{\nu^{\sigma\theta}}{n^{\sigma\theta}\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} =$$

$$= C_4 \frac{1}{n^{\sigma\theta}\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{(k-\sigma)\theta+1}} \leqslant \frac{C}{n^{k\theta}\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} .$$

Lema je dokazana.

TEOREMA 2.2.4. ([15]). Neka su brojevi a_ν, b_ν i β_ν takvi da je

$$a_\nu \geqslant 0, \quad b_\nu \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n \beta_n ,$$

tada:

1. za p iz razmaka $1\leqslant p<\infty$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Big(\sum_{\xi=\nu}^{\infty} b_\xi\Big)^p \leqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p ,$$

2. a za p iz razmaka $0<p\leqslant 1$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Big(\sum_{\xi=\nu}^{\infty} b_\xi\Big)^p \geqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p .$$

TEOREMA 2.2.5 ([16]). Neka je $a_\nu \geqslant 0$, $b_\nu \geqslant 0$, $a_\nu \downarrow$, $b_\nu \downarrow$, β- realan broj i $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n \xi_n$, $n=1,2,3,\ldots$ tada:

1. za p iz razmaka $0<p\leqslant 1$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Big(\sum_{n=\nu}^{\infty} b_n n^{\beta}\Big)^p \leqslant C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \nu^{\beta})^p \xi_\nu \nu^{p-1} ,$$

2. a za p iz razmaka $1 \leqslant p < \infty$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Big(\sum_{n=\nu}^{\infty} b_n n^{\beta}\Big)^p \geqslant C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \nu^{\beta})^p \xi_\nu \nu^{p-1} ,$$

gdje pozitivne konstante C_1 i C_2 zavise samo od p i β.

LEMA 2.2.11 Neka je $o < \theta < \infty$, $(E\varepsilon A), \psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$, tada je uslov

$$\Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(\phi)_E \Big\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty \tag{9}$$

potreban i dovoljan da bi funkcija $\phi(x)$ pripadala klasi $B^{\psi}_{E\Theta}$.

DOKAZ. Neka je ispunjen uslov (9) i $1 \leqslant \theta < \infty$. Primjenjujući lemu 8, teoremu 3 i teoremu 9 dobićemo nejednakosti

$$I^{\theta} = \int_o^1 \Big[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\Big]^{\theta} \frac{dt}{t} \leqslant C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\omega_k^{\theta}(\phi,\frac{1}{\nu})_E}{\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{k\theta+1}\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \Big[\sum_{m=1}^{\nu} m^{k-1} E_m(\phi)_E\Big]^{\theta} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{k\theta+1}\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \Big[\nu^{k-1} E_\nu(\phi)_E \beta_\nu\Big]^{\theta} ,$$

gdje se β_ν odredjuje iz uslova

$$\sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{m^{k\theta+1}\psi^{\theta}(\frac{1}{m})} = \frac{1}{\nu^{k\theta+1}\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\,\beta_{\nu} .$$

Prema lemi 10, za β_ν vrijedi

$$\beta_{\nu} \leqslant C_4 \nu ,$$

i tada

$$I^{\theta} \leqslant C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E < \infty .$$

Neka je sada $o < \theta \leqslant 1$. Provodeći postupak kao u prvom slučaju, zamjenjujući teoremu 4 sa teoremom 5, zaključujemo da je

$$I^{\theta} < \infty .$$

I tako smo dokazali da za bilo koje $\theta\varepsilon(o,\infty)$ za koje vrijedi (9) funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B_{E\Theta}^{\psi}$.

Neka je sada $\phi(x)\varepsilon B_{E\Theta}^{\psi}$. Primjenjujući teoremu 3, lemu 8 na osnovu definicije klase $B_{E\Theta}^{\psi}$ imamo

$$I_2^{\theta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E \leqslant C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \omega_k^{\theta}(\phi,\frac{1}{\nu})_E \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \int_o^1 \left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\right]^{\theta} \frac{dt}{t} < \infty .$$

Lema je dokazana.

TEOREMA 2.2.6 ([17]). Neka su α, β i a_ν takvi da je $o < \alpha < \beta < \infty$, $a_\nu \geqslant o$, tada vrijedi nejednakost

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

LEMA 2.2.12 Ako je

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(\phi)_E\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

gdje je $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$, $\theta\varepsilon(o,+\infty)$, $(E\varepsilon A)$ tada za bilo koje $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$ vrijedi nejednakost

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_E\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(\phi)_E\right\}^{\frac{1}{\theta}} ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od funkcije $\phi(x)$.

DOKAZ. Koristeći svojstvo funkcije $\phi(t)$, teoremu 6 i provodeći jednostavne transformacije, dobijamo da je

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_E\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} = \left\{\sum_{m=o}^{\infty} \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{\nu\psi^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_E\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left\{\sum_{m=o}^{\infty} E_{2^m}^{\theta_1}(\phi)_E \frac{1}{\psi^{\theta_1}(\frac{1}{2^m})} \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}} \frac{1}{\nu}\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left\{\sum_{m=o}^{\infty} E_{2^m}^{\theta_1}(\phi)_E \frac{1}{\psi^{\theta_1}(\frac{1}{2^m})}\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant$$

$$C_2\left\{\sum_{m=o}^{\infty} E_{2^m}^{\theta}(\phi)_E \frac{1}{\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})}\right\}^{\frac{1}{\theta}} = C_2\left\{\frac{E_1^{\theta}(\phi)_E}{\psi^{\theta}(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} E_{2^m}^{\theta}(\phi)_E \frac{1}{\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})}\right\}^{\frac{1}{\theta}} .$$

Koristeći osobine najbolje aproksimacije i činjenicu da je $\psi(\delta)\varepsilon MH(\sigma)$, lako je vidjeti da vrijedi

$$\{\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E\}^{\frac{1}{\theta}}=\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E\}^{\frac{1}{\theta}}\geq$$

$$\geq\{\sum_{m=1}^{\infty}E_{2^m}^{\theta}(\phi)_E\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\}^{\frac{1}{\theta}}\geq C_3\{\sum_{m=1}^{\infty}E_{2^m}^{\theta}(\phi)_E\frac{1}{\psi^{\theta}(\frac{1}{2^{m-1}+1})}\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{1}{\nu}\}^{\frac{1}{\theta}}\geq$$

$$\geq C_4\{\sum_{m=1}^{\infty}E_{2^m}^{\theta}(\phi)_E\frac{1}{\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})}\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Prema tome, vrijede nejednakosti

$$\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta_1}(\phi)_E\}^{\frac{1}{\theta_1}}\leqslant C_2\{\frac{E_1^{\theta}(\phi)_E}{\psi^{\theta}(1)}+C_5\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E\}^{\frac{1}{\theta}}\leqslant$$

$$\leqslant C_6\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Lema je dokazana.

Da bi dokazali osnovne rezultate rada biće nam potrebne i sljedeće teoreme.

TEOREMA 2.2.7 ([19]). Ako je $F(x)\varepsilon C$ i za sve $x\varepsilon[-\pi,\pi]$ vrijedi jednakost

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

gdje je $a_k\geq 0$, to vrijede nejednakosti

$$\sum_{k=2n}^{\infty}a_k\leqslant 4E_n(F)_C\ ,\ n=1,2,3,\dots\ .$$

TEOREMA 2.2.8 ([10], [11]). Neka je $F(x) \in M \cap L_p$ za neko p, $1 < p < \infty$. Tada vrijede nejednakosti

$$E_n(F)_p \leq C_1 \{ a_n n^{1-\frac{1}{p}} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right]^{\frac{1}{p}} \},$$

$$E_n(F)_p \geq C_2 \{ \sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \}^{\frac{1}{p}} ,$$

gdje pozitivne konstante C_1 i C_2 ne zavise od $F(x)$ i n.

LEMA 2.2.13 Ako je

$a_o \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ i $a_\nu \to o$ za $\nu \to \infty$, to za nizove $\{b_\nu(y)\}_{\nu=o}^{\infty}$, gdje je

$$b_\nu(y) = \alpha_\nu \frac{e^{\nu y} + e^{-\nu y}}{e^{\nu\delta} + e^{-\nu\delta}}, \qquad (|y| \leq \delta)$$

vrijede nejednakosti

$$b_o(y) \geq b_1(y) \geq b_2(y) \geq b_3(y) \geq \ldots$$

Osim toga, $b_\nu(y) \to o$ za $\nu \to \infty$, tj. niz $\{b_\nu(y)\}_{\nu=o}^{\infty}$ je monotono opadajući.

DOKAZ. Dokazaćemo da je

$b_\nu(y) \geq b_{\nu+1}(y)$, $\nu=o,1,2,3,\ldots$ za bilo koje y ($|y| \leq \delta$), tj. dokazaćemo tačnost nejednakosti

$$\alpha_\nu \frac{e^{\nu y} + e^{-\nu y}}{e^{\nu\delta} + e^{-\nu\delta}} \geq \alpha_{\nu+1} \frac{e^{(\nu+1)y} + e^{-(\nu+1)y}}{e^{(\nu+1)} + e^{-(\nu+1)\delta}} .$$

Kako vrijedi

$\alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1}$, $\nu=o,1,2,3,\ldots$, to je dovoljno dokazati da je

$$\frac{e^{\nu y}+e^{-\nu y}}{e^{\nu\delta}+e^{-\nu\delta}} \geqslant \frac{e^{(\nu+1)y}+e^{-(\nu+1)y}}{e^{(\nu+1)\delta}+e^{-(\nu+1)\delta}} .$$

Posljednja nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$\frac{e^{(2\nu+2)\delta}+1}{e^{(2\nu+1)\delta}+e^{\delta}} \geqslant \frac{e^{(2\nu+2)y}+1}{e^{(2\nu+1)y}+e^{y}} ,$$

tj. nejednakosti

$$\left[e^{(2\nu+2)\delta}+1\right]\left[e^{(2\nu+1)y}+e^{y}\right] \geqslant \left[e^{(2\nu+2)y}+1\right]\left[e^{(2\nu+1)\delta}+e^{\delta}\right] ,$$

otkuda dobijamo

$$(e^{\delta}-e^{y})\left[e^{(2\nu+1)(y+\delta)}-1\right]+(e^{\nu+\delta}-1)\left[e^{(2\nu+1)\delta}-e^{(2\nu+1)y}\right] \geqslant 0 .$$

Iz uslova $|y|\leqslant\delta$ slijedi da je

$$e^{\delta} \geqslant e^{y},\ e^{(2\nu+1)(\delta+y)} \geqslant 1,\ e^{y+\delta} \geqslant 1,\ e^{(2\nu+1)\delta} \geqslant e^{(2\nu+1)y} ,$$

i tačnost posljednje nejednakosti je očigledna.

Kako $\alpha_\nu \to o$ to i $b_\nu \to o$ za $\nu\to\infty$.

LEMA 2.2.14 Neka je $L_{p_1} \subset E \subset L_{p_2}$, $\psi(t)\in MH(\sigma)$, $(1 < p_2 \leqslant p_1 < \infty)$, $(E\in A)$, $f(x)\in\Lambda_2 \cap E$, tada za $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ i $o < \theta < \infty$ vrijedi procjena

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(f)_E \asymp \sum_{m=o}^{\infty} \frac{e^{2^m\delta\theta}}{2^m\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})} E_{2^m}^{\theta}(f)_E .$$

DOKAZ. Koristeći lemu 6, osobine funkcije $\phi(t)\in MH(\sigma)$ i provodeći jednostavne transformacije dobijamo nejednakosti

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(f)_E = \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^{\theta}(1)} E_1^{\theta}(f)_E + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(f)_E =$$

$$= \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^{\theta}(1)} E_1^{\theta}(f)_E + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(f)_E \asymp$$

$$\asymp \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^{\theta}(1)} E_1^{\theta}(f)_E + \sum_{m=1}^{\infty} E_{2^m}^{\theta}(f)_E \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} =$$

$$= \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^{\theta}(1)} E_1^{\theta}(f)_E + \sum_{m=1}^{\infty} E_{2^m}^{\theta}(f)_E \cdot I ,$$

gdje je

$$I = \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Procijenićemo I odozgo i odozdo.

Prema svojstvima funkcije $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$ dobijamo da je

$$I = \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \leqslant \frac{1}{(2^{m-1}+1)\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})} \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} e^{\nu\delta\theta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2^m\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})} \cdot I_1 ,$$

gdje je

$$I_1 = \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} e^{\nu\delta\theta} .$$

S druge strane vrijedi

$$I = \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \geqslant \frac{1}{2^m\psi^{\theta}(\frac{1}{2^{m-1}+1})} \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} e^{\nu\delta\theta} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C}{2^m\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})} \cdot I_1 .$$

Procijenićemo I_1 odozgo i odozdo. Očigledno vrijedi nejednakost

$$I_1 = \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} e^{\nu\delta\theta} = \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} (e^{\delta\theta})^\nu = \frac{e^{\delta\theta}(2^m+1) - e^{\delta\theta}(2^{m-1}+1)}{e^{\delta\theta}-1}$$

$$= \frac{e^{\delta\theta}(e^{2^m\delta\theta} - e^{2^{m-1}\delta\theta})}{e^{\delta\theta}-1} .$$

Kako za $m \geq 1$ vrijede nejednakosti:

a) $e^{2^m\delta\theta} - e^{2^{m-1}\delta\theta} < e^{2^m\delta\theta}$

b) $e^{2^m\delta\theta} - e^{2^{m-1}\delta\theta} \geq C\, e^{2^m\delta\theta}$, gdje je

$C = 1 - \frac{1}{e^{\delta\theta}}$, $(C<1)$, zaključujemo da je

$$I_1 \asymp e^{2^m\delta\theta} .$$

Prema tome vrijedi

$$I \asymp \frac{e^{2^m\delta\theta}}{2^m\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} ,$$

tj.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(f)_E \asymp \sum_{m=o}^{\infty} \frac{e^{2^m\delta\theta}}{2^m\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} E_{2^m}^\theta(f)_E .$$

Lema je dokazana.

LEMA 2.2.15 Ako je $f(x) \varepsilon E$, $(E \varepsilon A)$ i ako vrijedi

$$E_\nu(f)_p \asymp e^{-\nu\delta}\psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right) ,$$

gdje je $\psi_1(t)\varepsilon MH(\sigma_1)$, tada vrijedi procjena

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^\theta(f)_p \asymp \sum_{m=o}^{\infty} \frac{e^{2^m\delta\theta}}{\psi^\theta\left(\frac{1}{2^m}\right)} E_{2^m}^\theta(f)_p .$$

DOKAZ. Koristeći pretpostavku teoreme osobine funkcija $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$ i $\psi_1(t)\varepsilon MH(\sigma_1)$, provodeći jednostavne transformacije dobićemo nejedrakosti

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^\theta(f)_p = \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(f)_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^\theta(f)_p =$$

$$= \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(f)_p + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^\theta(f)_p \asymp$$

$$\asymp \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(f)_p + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{\psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu\psi^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} \asymp$$

$$\asymp \frac{\psi_1^\theta(1)}{\psi^\theta(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_1^\theta\left(\frac{1}{2^m}\right)}{\psi^\theta\left(\frac{1}{2^m}\right)} \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{\nu} \asymp \frac{\psi_1^\theta(1)}{\psi^\theta(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_1^\theta\left(\frac{1}{2^m}\right)}{\psi^\theta\left(\frac{1}{2^m}\right)} \asymp$$

$$\asymp \frac{e^{\delta\theta}}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(f)_p + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2^m\delta\theta}}{\psi^\theta\left(\frac{1}{2^m}\right)} E_{2^m}^\theta(f)_p = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{e^{2^m\delta\theta}}{\psi^\theta\left(\frac{1}{2^m}\right)} E_{2^m}^\theta(f)_p .$$

Lema je dokazana.

TEOREMA 2.2.9. ([15]). Neka su brojevi a_ν, b_ν i β_ν takvi da je

$$a_\nu \geq o, \quad b_\nu \geq o, \quad \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = a_n \beta_n ,$$

tada:

1. za p iz razmaka $1 \leq p < \infty$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\xi=1}^{\nu} b_\xi \right)^p \leq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p ,$$

2. a za p iz razmaka $o < p \leq 1$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\xi=1}^{\nu} b_\xi \right)^p \geq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p .$$

GLAVA III

DIREKTNE I OBRNUTE TEOREME APROKSIMACIJA ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}H_E^{\psi}$

§1. DIREKTNA TEOREMA APROKSIMACIJE ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}H_E^{\psi}$

Svaku teoremu koja utvrdjuje procjenu odstupanja, u nekom smislu, date funkcije (ili klase funkcija) od polinoma ili od nekih elemenata u koje se ta funkcija (klasa funkcija) preslikava pomoću nekog niza operatora, nazivamo direktnom teoremom.

U ovom paragrafu nas će interesovati odgovor na pitanje, kako ta procjena za funkcije iz klase $Б^{\delta}H_E^{\psi}$ zavisi od glatkosti granične funkcije $\phi(x)$.

TEOREMA 3.1.1 Ako je $f(x)\in Б^{\delta}H_E^{\psi}$, $(E\in A)$ tada za bilo koje $F\in A$ vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_F \leqslant \frac{C}{e^{n\delta}}\psi\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od n $(n=1,2,\dots)$. Tvrdjenje se ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}H_E^{\psi}$ uz uslov da postoje p_1 i p_2 takvi da je

$$L_{p_1} \subset E \subset L_{p_2} \ , \quad L_{p_1} \subset F \subset L_{p_2} \ .$$

DOKAZ. Neka je $f(x) \in Б^{\delta} H_E^{\psi}$. Primjenjujući lemu 2.2.1, teoremu 2.2.3 i definiciju klase H_E^{ψ}, možemo pisati

$$E_n(f)_F \leqslant \frac{C_1}{e^{n\delta}} E_n(\phi)_E \leqslant \frac{C_2}{e^{n\delta}} \omega_k(\phi, \tfrac{1}{n})_E \leqslant \frac{C_3}{e^{n\delta}} \psi(\tfrac{1}{n}) \ ,$$

gdje pozitivna konstanta C_3 ne zavisi od n ($n=1,2,3,\ldots$).

Dokazaćemo da se tvrdjenje teoreme ne može poboljšati.

Neka se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1) i neka je njena granična funkcija $\phi(x) \in \Lambda_2$ i takva da je

$$|b_\nu| \asymp \psi(\tfrac{1}{\nu}) \ , \tag{1}$$

gdje je funkcija $\psi(\delta) \in MH(\sigma)$ koja zadovoljava uslov

$$\{\sum_{\xi=n}^{\infty} \tfrac{1}{\xi} \psi^2(\tfrac{1}{\xi})\}^{\frac{1}{2}} \asymp \psi(\tfrac{1}{n}) \ . \tag{2}$$

Neka je $E, F \in A$ i neka postoje p_1 i p_2 takvi da je $1 < p_2 < p_1 < \infty$ i

$$L_{p_1} \subset E \subset L_{p_2} \ , \quad L_{p_1} \subset F \subset L_{p_2} \ . \tag{3}$$

Tada vrijedi:

1. za $2^{m-1} < n \leqslant 2^m : E_n(f)_F \asymp E_{2^m}(f)_F \asymp e^{-2^m \delta} \psi(\frac{1}{2^m})$, (4)

2. $\omega_k(\phi, \delta)_E \asymp \psi(\delta)$.

Dokazaćemo tvrdjenje pod 1.

Prema nejednakosti (2.1.5) uslovu (1) za $|b_\nu|$ i svojstvu funkcije $\psi(\delta)$ dobićemo nejednakosti

$$E_{2^m}(f)_F \leqslant \|f(x)-S_{2^m-1}(x,f)\|_F \leqslant C_4\|f(x)-S_{2^m-1}(x,f)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \sum_{\nu=m}^{\infty} e^{-2^\nu\delta}|b_\nu| \leqslant C_6 \sum_{\nu=m}^{\infty} e^{-2^\nu\delta}\psi\left(\frac{1}{2^\nu}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_7\psi\left(\frac{1}{2^m}\right) \sum_{\nu=m}^{\infty} e^{-2^\nu\delta} \leqslant C_8 e^{-2^m\delta}\psi\left(\frac{1}{2^m}\right) .$$

Ako se iskoristi uslov (1) za $|b_\nu|$, nejednakost (2.1.5) i lema 2.2.2, može se pisati

$$e^{-2^m\delta}\psi\left(\frac{1}{2^m}\right) \leqslant C_9 e^{-2^m\delta}|b_m| = C_9 e^{-2^m\delta}|c_{2^m}+c_{-2^m}| \leqslant C_{10}|c_{2^m}| < C_{11}E_{2^m}(f)_F .$$

I tako je dokazano da vrijedi

$$E_{2^m}(f)_F \asymp e^{-2^m\delta}\psi\left(\frac{1}{2^m}\right) .$$

Primjenjujući lemu 2.2.6 i uslov $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$, dobijamo da je

$$E_n(f)_F \asymp E_{2^m}(f)_F \asymp e^{-2^m\delta}\psi\left(\frac{1}{2^m}\right) .$$

Dokazaćemo tvrdjenje 2, tj. dokazaćemo da granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi H_E^ψ i da ne pripada široj klasi.

Zaista, primjenjujući lemu 2.2.6, uslov (1) za b_ν i uslov (2) za funkciju $\psi(\delta)$, dobićemo da za $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ vrijedi

$$E_n(\phi)_E \asymp E_{2^m}(\phi)_E \asymp \{\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu^2\}^{\frac{1}{2}} \asymp \{\sum_{\nu=m}^{\infty} \psi^2(\frac{1}{2^\nu})\}^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \{\sum_{\xi=2^m}^{\infty} \frac{1}{\xi}\psi^2(\frac{1}{\xi})\}^{\frac{1}{2}} \asymp \psi(\frac{1}{2^m}) \asymp \psi(\frac{1}{n}) \ . \tag{5}$$

Prema teoremi 2.2.3, tek dokazanoj nejednakosti i lemi 2.2.4, utvrdjujemo da za $k>\sigma$ vrijedi

$$\omega_k(\phi,\frac{1}{n})_E \leqslant \frac{C_{12}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}E_\nu(\phi)_E \leqslant \frac{C_{13}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\psi(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_{14}\psi(\frac{1}{n}) \ .$$

I tako, uzimajući u obzir da je

$$E_n(\phi)_E \leqslant C_{15}\omega_k(\phi,\frac{1}{n})_E$$

i da vrijedi nejednakost (5), dobićemo nejednakosti

$$C_{16}\psi(\frac{1}{n}) \leqslant \omega_k(\phi,\frac{1}{n})_E \leqslant C_{17}\psi(\frac{1}{n}) \ . \tag{6}$$

Poznato je da za bilo koje $\delta\varepsilon(o,1]$ postoji $n\geqslant 1$ takvo da je

$$\frac{1}{n+1} < \delta \leqslant \frac{1}{n} \ .$$

Koristeći svojstva modula glatkosti i funkcije $\psi(\delta)$ iz nejednakosti (6) dobićemo da za $\delta\varepsilon(o,1]$ vrijedi procjena

$$\omega_k(\phi,\delta)_E \asymp \psi(\delta) \ .$$

Tako je dokazano, da za funkciju $\psi(\delta)$ koja ima svojstvo 2) i za prostore E i F sa svojstvom 3), postoji funkcija $f(x)\varepsilon Б^\delta H_E^\psi$ takva da vrijede tvrdnje (4). To upravo znači da se tvrdjenje teoreme ne može poboljšati na svim takvim klasama funkcija $Б^{\delta}H_{E}^{\psi}$.

§2. OBRNUTA TEOREMA APROKSIMACIJA ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}H_{E}^{\psi}$

Obrnutom teoremom u teoriji aproksimacija funkcija nazivamo svaku teoremu koja utvrdjuje stepen glatkosti funkcije (ili klase funkcija) u zavisnosti od brzine konvergencije ka nuli njene (njihove) najbolje aproksimacije.

Pojam obrnute teoreme u teoriju aproksimacija uveo je Bernštajn 1912. godine. Njemu pripadaju prvi rezultati iz te oblasti.

Nas će interesovati uslovi koje treba nametnuti na najbolju aproksimaciju funkcije $f(x)$, tako da njena granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi Nikoljskog u nekom maksimalnom simetričnom prostoru 2π-periodičnih realnih funkcija.

TEOREMA 3.2.1 Neka je $f(x)\varepsilon E$, $(E\varepsilon A)$, $\delta>0$ $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$. Ako vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_E \leqslant \frac{C}{e^{n\delta}}\psi\left(\frac{1}{n}\right) , \tag{7}$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$, i ako postoje broj $p\in[2,+\infty]$ i funkcija $\psi_1(\delta)$ takvi da je

a) $\psi_1(\delta)\in MH(\sigma_1)$,

b) $\{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\psi^p(\frac{1}{\nu})\nu^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2\psi_1(\frac{1}{n})$ za $2 \leqslant p < \infty$,

c) $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\psi(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_2\psi_1(\frac{1}{n})$ za $p = \infty$,

gdje pozitivna konstanta C_2 ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$, tada je

$$f(x)\in Б^{\delta}H_p^{\psi_1} .$$

To tvrdjenje se ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}H_p^{\psi_1}$.

DOKAZ. Neka je ispunjena nejednakost (7), tada prema lemi 2.2.3, utvrdjujemo da se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty,|y|<\delta\}$.

Dokazaćemo da se funkcija f(x) može predstaviti u obliku (1.2.1). Razmotrićemo dva slučaja:

1. Neka je $p\in[2,+\infty)$. Prema teoremi Peli (V. [18], str. 202), nejednakosti (2.2.8), uslovu b) za funkciju $\psi(\delta)$ i prema ulaganju $E\subset L_1$, dobijamo

$$\|\phi_y(x)\|_p \leqslant C_3\Big[\,|A_o(y)|+\big(\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|A_\nu(y)|^p|\nu|^{p-2}\big)^{\frac{1}{p}}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_4\Big[\,|c_o|+\big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi^p(\tfrac{1}{\nu})\,\nu^{p-2}\big)^{\frac{1}{p}}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_5(\|f\|_{L_1}+\psi_1(1)) \leqslant C_6(\|f\|_E+1)\ .$$

2. Neka je sada $p=\infty$. Tada iz nejednakosti (2.2.8), uslova c) za funkciju $\psi(\delta)$ i ulaganja $E\subset L_1$, slijedi

$$\|\phi_y(x)\|_C \leqslant |A_o(y)|+\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|A_\nu(y)| \leqslant |c_o|+C_8\sum_{|\nu|=1}^{\infty}\psi(\tfrac{1}{|\nu|}) \leqslant$$

$$\leqslant C_9\big[\|f\|_{L_1}+\psi_1(1)\big] \leqslant C_{10}(\|f\|_E+1)\ .$$

I tako je dokazano da za bilo koje y ($|y|<\delta$) vrijedi

$$\|\phi_y(x)\|_p \leqslant M\ ,$$

gdje konstanta M ne zavisi od y. Kako je $p\in[2,+\infty]$, to znači (V. [1], str. 150) da postoji granična funkcija $\phi(x)\in L_p$ takva da se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $H_p^{\psi_1}$. Kako se $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1), to prema nejednakosti (2.1.5) i tvrdjenju leme 2.2.5 slijedi procjena

$$|\alpha_\nu| \leqslant C_{11}\psi(\tfrac{1}{|\nu|})\ . \tag{8}$$

Razmotrimo dva slučaja:

1. neka je $p\in[2,+\infty)$. Primjenjujući teoremu Peli, nejednakost (8) i uslov b) za funkciju $\psi(\delta)$ dobijamo

$$E_n(\phi)_p \leqslant \|\phi(x)-S_{n-1}(x,\phi)\|_p \leqslant C_{12}\{\sum_{|\nu|=n}^{\infty}|\alpha_\nu|^p|\nu|^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}\{\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi^p(\tfrac{1}{\nu})\nu^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_{14}\psi_1(\tfrac{1}{n}) \;;$$

2. neka je sada $p=\infty$. Primjenjujući nejednakost (8) i uslov c) za $\psi(\delta)$ vrijedi

$$E_n(\phi)_C \leqslant \|\phi(x)-S_{n-1}(x,\phi)\|_C \leqslant \sum_{|\nu|=n}^{\infty}|\alpha_\nu| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\tfrac{1}{\nu}) \leqslant C_{16}\psi_1(\tfrac{1}{n}) \;.$$

Tako je dokazano da uz pretpostavke teoreme vrijedi

$$E_n(\phi)_p \leqslant C_{17}\psi_1(\tfrac{1}{n}) \;,$$

gdje pozitivna konstanta C_{17} ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$.

Prema teoremi 2.2.3,tek dokazanoj nejednakosti i lemi 2.2.4 za $k>\sigma$ vrijedi

$$\omega_k(\phi,\tfrac{1}{n})_p \leqslant \frac{C_{18}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(\phi)_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{19}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi_1(\tfrac{1}{\nu}) \leqslant C_{20}\psi_1(\tfrac{1}{n}) \;.$$

Za bilo koje $\delta(o < \delta \leqslant 1)$ postoji $n \geqslant 1$ takvo da je

$$\frac{1}{n+1} < \delta \leqslant \frac{1}{n} .$$

Koristeći osobine modula glatkosti i funkcije $\psi_1(\delta)$ dobija se

$$\omega_k(\phi,\delta)_p \leqslant \omega_k(\phi,\frac{1}{n})_p \leqslant \omega_k(\phi,\frac{2}{n+1})_p \leqslant$$

$$\leqslant C_{21}\psi_1(\frac{2}{n+1}) \leqslant C_{22}\psi_1(\frac{1}{n+1}) \leqslant C_{23}\psi_1(\delta) .$$

I tako smo dokazali da je

$$\phi(x)\varepsilon H_p^{\psi_1} .$$

Dokazaćemo da se tvrdjenje teoreme 1 ne može poboljšati.

Neka se funkcija f(x) može prikazati u obliku (1.2.1), gdje je

1. $\phi(x)\varepsilon M\cap L_p$ ako je $p\varepsilon[2,+\infty)$,

2. $\phi(x)\varepsilon C$ i za svako $x\varepsilon[-\pi,\pi]$ vrijedi jednakost

$$\phi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x ,$$

gdje je $a_\nu \geqslant o$ i $p=\infty$.

Neka su funkcije $\psi(t)$ i $\psi_1(t)$ takve da je:

a) $\psi(t)\in MH(\sigma)$, $\psi_1(t)\in MH(\sigma_1)$

b) $\{\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi^p(\frac{1}{\nu})\nu^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \asymp \psi_1(\frac{1}{n})$ za $p\in[2,+\infty)$,

c) $\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\frac{1}{\nu}) \asymp \psi_1(\frac{1}{n})$ za $p=\infty$,

d) $a_\nu \asymp \psi(\frac{1}{\nu+1})$, $\nu = 0,1,2,3,\ldots$,

tada vrijedi:

1. $E_n(f)_E \asymp e^{-n\delta}\psi(\frac{1}{n})$ za bilo koje $E\in A$,

2. $\omega_k(\phi,\delta)_p \asymp \psi_1(\delta)$.

Dokazaćemo tvrdjenje pod 1. Koristeći nejednakost (2.1.5), uslov d) za a_ν i osobine funkcije $\psi(\delta)$ dobijamo da je

$$E_n(f)_E \leqslant \| f(x)-S_{n-1}(x,f)\|_E \leqslant C_1\| f(x)-S_{n-1}(x,f)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{|\nu|=n}^{\infty}|c_\nu| \leqslant C_2 \sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\nu\delta}a_\nu \leqslant C_3 \sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\nu\delta}\psi(\frac{1}{\nu}) \leqslant$$

$$\leqslant C_4\psi(\frac{1}{n})\sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\nu\delta} \leqslant \frac{C_5}{e^{n\delta}}\psi(\frac{1}{n}) .$$

Dalje, prema osobini d), nejednakosti (2.1.5) i lemi 2.2.2 vrijedi:

$$\frac{C_6}{e^{n\delta}}\psi(\frac{1}{n}) \leqslant \frac{C_7}{e^{n\delta}}a_n \leqslant C_8(c_n+c_{-n}) \leqslant C_9E_n(f)_E .$$

I tako je dokazano da je

$$E_n(f)_E \asymp e^{-n\delta}\psi(\tfrac{1}{n}) \ .$$

Dokazaćemo tvrdjenje 2. Ako je $p\in[2,+\infty)$, tada za monotono opadajuće koeficijente a_n vrijedi nejednakost

$$a_n n^{1-\frac{1}{p}} \leqslant C_{10}\{\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} a_k^p\, k^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \ , \tag{9}$$

gdje pozitivna konstanta C_{10} zavisi samo od p .

Primjenjujući poznate nejednakosti

$$(x\geqslant o,\ y\geqslant o,\ (x+y)^{\alpha} \leqslant x^{\alpha}+ y^{\alpha} \leqslant 2(x+y)^{\alpha},\ o < \alpha < 1)$$

teoremu 2.2.8 i koristeći osobine funkcija $\psi(\delta)$ i $\psi_1(\delta)$ dobija se

$$E_n(f)_p \leqslant C_{11}\{a_n n^{1-\frac{1}{p}} +[\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p\, k^{p-2}]^{\frac{1}{p}}\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\{[\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} a_k^p\, k^{p-2}]^{\frac{1}{p}} +[\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p\, k^{p-2}]^{\frac{1}{p}}\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}[\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} a_k^p\, k^{p-2}+ \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p\, k^{p-2}]^{\frac{1}{p}}=C_{13}[\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{\infty} a_k^p\, k^{p-2}]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{14}[\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{\infty} \psi^p(\tfrac{1}{k+1})k^{p-2}]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_{15}[\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{\infty} \psi^p(\tfrac{1}{k})k^{p-2}]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}\psi_1(\frac{1}{[\frac{n}{2}]+1}) \leqslant C_{17}\psi_1(\tfrac{1}{n}) \ .$$

Ako je $p=\infty$, tada prema osobini c) vrijedi

$$E_n(\phi)_C \leqslant \| \phi(x)-S_{n-1}(x,\phi)\|_C \leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \leqslant C_{18}\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_{19}\psi_1(\frac{1}{n}) .$$

Tako smo dokazali da vrijedi

$$E_n(\phi)_p \leqslant C_{20}\psi_1(\frac{1}{n}) ,$$

gdje pozitivna konstanta C_{20} ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$.

Primjenjujući teoremu 2.2.3, tek dokazanu nejednakost i lemu 2.2.4, za $k>\sigma$ vrijedi

$$\omega_k(\phi,\frac{1}{n})_p \leqslant \frac{C_{21}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(\phi)_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi_1(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_{23}\psi_1(\frac{1}{n}) . \qquad (10)$$

Za bilo koje $\delta (o < \delta \leqslant 1)$ postoji $n \geqslant 1$, takav da je

$$\frac{1}{n+1} < \delta \leqslant \frac{1}{n} .$$

Koristeći svojstva modula glatkosti i funkcije $\psi(\delta)$ dobijamo

$$\omega_k(\phi,\delta)_p \leqslant \omega_k(\phi,\frac{1}{n})_p \leqslant \omega_k(\phi,\frac{2}{n+1})_p \leqslant$$

$$\leqslant C_{24}\psi_1(\frac{2}{n+1}) \leqslant C_{25}\psi_1(\frac{1}{n+1}) \leqslant C_{26}\psi_1(\delta) .$$

Tako smo dokazali da je

$$\phi(x)\varepsilon H_p^{\psi_1}.$$

Dokazaćemo da funkcija $\phi(x)$ ne pripada široj klasi od klase $H_p^{\psi_1}$. Zaista, za $p\varepsilon[2,+\infty)$, primjenjujući teoremu 2.2.8, uslov b) i osobine funkcije $\psi(\delta)$ dobijamo

$$E_n(\phi)_p \geq C_{27}\{\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \geq C_{28}\{\sum_{\nu=2n}^{\infty} \psi^p(\tfrac{1}{\nu})\nu^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq C_{29}\psi_1(\tfrac{1}{2n}) \geq C_{30}\psi_1(\tfrac{1}{n}) .$$

Za $p = \infty$, koristeći teoremu 2.2.7, uslove d) i c) dobijamo

$$E_n(\phi)_C \geq C_{31}\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu \geq C_{32} \sum_{\nu=2n}^{\infty} \psi(\tfrac{1}{\nu}) \geq C_{33}\psi_1(\tfrac{1}{2n}) \geq C_{34}\psi_1(\tfrac{1}{n}) .$$

Tako je dokazana tačnost nejednakosti

$$E_n(\phi)_p \geq C_{35}\psi_1(\tfrac{1}{n}) .$$

Iz te nejednakosti i teoreme 2.2.3, slijedi da je

$$\omega_k(\phi,\tfrac{1}{n})_p \geq C_{36}E_n(\phi)_p \geq C_{37}\psi_1(\tfrac{1}{n}) .$$

Iz posljednje nejednakosti i nejednakosti (10) slijede nejednakosti

$$C_{38}\psi_1(\tfrac{1}{n}) \leq \omega_k(\phi,\tfrac{1}{n})_p \leq C_{39}\psi_1(\tfrac{1}{n}) .$$

Za bilo koje $\delta(o < \delta \leq 1)$ postoji $n\geq 1$ takvo da je

$$\frac{1}{n+1} < \delta \leq \frac{1}{n} .$$

Korištenjem osobina modula glatkosti i funkcije $\psi(\delta)$ za $\delta\varepsilon(o,1]$ dobija se da je

$$\omega_k(\phi,\delta)_p \asymp \psi_1(\delta).$$

I tako je dokazano, da uz pretpostavke teoreme postoji funkcija f(x) takva da je

$$E_n(f)_p \asymp e^{-n\delta}\psi(\tfrac{1}{n})$$

$$\omega_k(\phi,\delta)_p \asymp \psi_1(\delta) \qquad \text{za } \delta\varepsilon(0,1].$$

Prema tome, funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $H_p^{\psi_1}$ i ne pripada široj klasi, što znači da se tvrdjenje teoreme ne može poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^\delta H_p^{\psi_1}$.

§3. POTREBNI I DOVOLJNI USLOVI PRIPADANJA KLASI $Б^\delta H_E^\psi$ ZA FUNKCIJE SA MONOTONIM ILI LAKUNARNIM FURIEROVIM KOEFICIJENTIMA

TEOREMA 3.3.1 Neka je $f(x)\varepsilon E\cap\Lambda_2$, $E\varepsilon A$, $\delta>o$. Neka funkcija $\psi(t)$ zadovoljava uslove

a) $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$

b) $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\psi(\frac{1}{2^\nu}) \leqslant C_1\psi(\frac{1}{2^n})$,

tada

$$f(x) \in Б^{\delta} H_E^{\psi}$$

ako i samo ako za bilo koje $F \in A$ i $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_F \leqslant \frac{C_2}{e^{2^m\delta}} \psi\left(\frac{1}{2^m}\right) , \qquad (11)$$

gdje pozitivne konstante C_1 i C_2 ne zavise od $n(n=1,2,3,\ldots)$.

DOKAZ. Neka je $f(x) \in Б^{\delta} H_E^{\psi}$. Koristeći jednakost

$$S_{n-1}(x,f) = S_{2^m 1}(x,f) = K_{2^m 1}(x)$$

i lemu 2.2.1, dobijamo

$$E_n(f)_F \leqslant \| f(x)-S_{m-1}(x,f)\|_F = \| f(x)-S_{2^m 1}(x,f)\|_F =$$

$$= \| f(x)-K_{2^m 1}(x,f)\|_F \leqslant \frac{C_3}{e^{2^m\delta}} \psi\left(\frac{1}{2^m}\right) .$$

Neka je ispunjena nejednakost (11). Uzimajući u obzir da za $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ vrijedi

$$e^{-2^m\delta} \psi\left(\frac{1}{2^m}\right) \leqslant C_4 e^{-n\delta} \psi\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

to iz nejednakosti (11) slijedi da je

$$E_n(f)_F \leqslant C_5 e^{-n\delta} \psi\left(\frac{1}{n}\right) . \qquad (12)$$

Prema lemi 2.2.3, zaključujemo da je funkcija $f(x+iy)$ analitička u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokažimo da se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1). Iz tačnosti nejednakosti (11) i leme 2.2.5, slijedi procjena

$$|c_{-2^\nu}|=|c_{2^\nu}| \leqslant C_6 E_{2^\nu}(f)_F \leqslant \frac{C_7}{e^{2^\nu\delta}}\psi(\frac{1}{2^\nu}).$$

Tada prema nejednakosti (2.1.4) vrijedi

$$|A_{-2^\nu}(y)| =|A_{2^\nu}(y)| \leqslant C_8\psi(\frac{1}{2^\nu}).$$

Koristeći tek dokazanu procjenu za $|A_{2^\nu}(y)|$ i uslov b) dobijamo

$$\|\phi_y(x)\|_C \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[|A_{-2^\nu}(y)|+|A_{2^\nu}(y)|\right] \leqslant C_9\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(\frac{1}{2^\nu}) \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\psi(1) ,$$

tj. $\phi_y(x)\in C$.

I tako za bilo koje y ($|y|<\delta$) vrijedi

$$\|\phi_y(x)\|_C \leqslant M,$$

gdje je M pozitivna konstanta koja ne zavisi od y. A to znači (V. [1], str. 150.), da postoji granična funkcija $\phi(x)\in C$ a samim tim i $\phi(x)\in L_p$, takva da se $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1).

Iz činjenice da se funkcija f(x) može prikazati u obliku (1.2.1), procjene za $|c_{2^\nu}|$ i nejednakosti (2.1.5) slijedi da je $\phi(x)\varepsilon\Lambda_2$ i da je

$$|b_{2^\nu}| \leqslant C_{10}\psi(\frac{1}{2^\nu}) .$$

Dokazaćemo da granična funkcija $\phi(x)$pripada klasi H_E^ψ. Zaista, koristeći osobine najbolje aproksimacije, procjenu za $|b_{2^\nu}|$ i uslov b) dobićemo da za $2^{m-1}< n \leqslant 2^m$ vrijedi

$$E_n(\phi)_E \leqslant E_{2^{m-1}}(\phi)_E \leqslant C_{11}\|\phi(x)-S_{2^{m-1}-1}(x,\phi)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\sum_{\nu=m-1}^{\infty}|b_{2^\nu}| \leqslant C_{12}\sum_{\nu=m-1}^{\infty}\psi(\frac{1}{2^\nu}) \leqslant C_{13}\psi(\frac{1}{2^{m-1}}) \leqslant$$

$$\leqslant C_{14}\psi(\frac{1}{2^m}) \leqslant C_{15}\psi(\frac{1}{n}) .$$

I tako je dokazano da uz pretpostavke teoreme vrijedi nejednakost

$$E_n(\phi)_E \leqslant C_{15}\psi(\frac{1}{n}) ,$$

gdje pozitivna konstanta C_{15} ne zavisi od n (n=1,2,3,...).

Prema teoremi 2.2.3, tek dokazanoj nejednakosti i lemi 2.2.4 za $k>\sigma$ vrijedi

$$\omega_k(\phi,\tfrac{1}{n})_E \leqslant \frac{C_{16}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(\phi)_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{17}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi(\tfrac{1}{\nu}) \leqslant C_{18}\psi(\tfrac{1}{n}) \ ,$$

gdje pozitivna konstanta C_{18} ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$. Tada koristeći činjenicu da za bilo koje $\delta\varepsilon(o,1]$ postoji $n\geqslant 1$ takvo da je

$$\frac{1}{n+1} < \delta \leqslant \frac{1}{n} \ .$$

Prema osobinama modula glatkosti i funkcije $\psi(\delta)$ dobijamo da je

$$\omega_k(\phi,\delta)_E \leqslant \omega_k(\phi,\tfrac{1}{n})_E \leqslant \omega_k(\phi,\tfrac{2}{n+1})_E \leqslant$$

$$\leqslant C_{19}\psi(\tfrac{2}{n+1}) \leqslant C_{20}\psi(\tfrac{1}{n+1}) \leqslant C_{21}\psi(\delta) \ ,$$

gdje pozitivna konstanta C_{21} ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$. A to znači da funkcija $\phi(x)$ pripada klasi H_E^ψ . Teorema je dokazana.

Primijetimo da je desna strana nejednakosti (12) veća od desne strane nejednakosti (11). Zbog toga je procjena (11) bolja od procjene (12), tj. za funkciju f(x) sa lakunarnim Furierovim koeficijentima, teorema 3.3.1 poboljšava tvrdjenje teoreme 3.1.1.

TEOREMA 3.3.2 Neka je

$$f(x) \sim \frac{d_o}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \cos \nu x \ ,$$

gdje je

$$d_\nu \frac{e^{\delta\nu} + e^{-\delta\nu}}{2} \downarrow 0 \ .$$

Neka je funkcija $\psi(t)$ takva da vrijedi:

a) $\psi(t) \varepsilon MH(\sigma)$,

b) $\{\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu}\psi^p(\frac{1}{\nu})\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1 \psi(\frac{1}{n})$, $p \varepsilon (1,+\infty)$,

tada je

$$f(x) \varepsilon Б^\delta H_p^\psi \ ,$$

ako i samo ako za bilo koje $E \varepsilon A$ vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_E \leqslant \frac{C_2}{e^{n\delta} n^{1-\frac{1}{p}}} \psi(\frac{1}{n}) \ ,$$

gdje pozitivna konstanta C_2 ne zavisi od n (n=1,2,3,...).

DOKAZ. Neka je $f(x) \varepsilon Б^\delta H_p^\psi$, tj. f(x) može biti prikazana u obliku (1.2.1), gdje je $\phi(x) \varepsilon H_p^\psi$, tada $a_\nu \downarrow 0$. Koristeći teoremu 2.2.3 i definiciju klase H_p^ψ dobijamo

$$E_n(\phi)_p \leqslant C_3 \omega_k(\phi, \frac{1}{n})_p \leqslant C_4 \psi(\frac{1}{n}) \ .$$

Kako je $p\in(1,+\infty)$, to za monotono opadajuće koeficijente a_n vrijedi nejednakost (9). Prema toj nejednakosti, teoremi 2.2.8, procjeni za $E_n(\phi)_p$ i osobinama funkcije $\psi(t)\in MH(\sigma)$ imamo

$$a_n n^{1-\frac{1}{p}} \leqslant C_5\Big[\sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} a_\nu^p \nu^{p-2}\Big]^{\frac{1}{p}} \leqslant C_6 E_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\phi)_p \leqslant C_7\psi\left(\frac{1}{n}\right), \text{ tj.}$$

$$a_n \leqslant \frac{C_8}{n^{1-\frac{1}{p}}}\,\psi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{13}$$

Kako se funkcija $f(x)$ može prikazati u obliku (1.2.1), to prema nejednakostima (2.1.5), (13) i svojstvima funkcije $\psi(t)$ za bilo koje $E\in A$ vrijedi

$$E_n(f)_E \leqslant \|f(x)-S_{n-1}(x,f)\|_E \leqslant C_9\|f(x)-S_{n-1}(x,f)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant C_9\sum_{\nu=n}^{\infty} d_\nu \leqslant C_{10}\sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\nu\delta} a_\nu \leqslant C_{11}\sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\nu\delta}\nu^{\frac{1}{p}-1}\psi\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} n^{\frac{1}{p}-1}\psi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\nu\delta} \leqslant C_{13}\frac{1}{e^{n\delta}n^{1-\frac{1}{p}}}\psi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Neka za neko $E\in A$ vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_E \leqslant C_{13}\frac{1}{e^{n\delta}n^{1-\frac{1}{p}}}\psi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{14}$$

Na osnovu leme 2.2.3, utvrdjujemo da je funkcija $f(x+iy)$ analitička u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo da se funkcija f(x) može prikazati u obliku (1.2.1). Zaista, prema lemi 2.2.2 i nejednakostima (14) vrijedi

$$|c_\nu| \leqslant C_{14}E_{|\nu|}(f)_E \leqslant \frac{C_{15}}{e^{|\nu|\delta}}|\nu|^{\frac{1}{p}-1}\psi\left(\frac{1}{|\nu|}\right) .$$

Tada iz nejednakosti (2.1.4) slijedi

$$|A_\nu(y)| \leqslant C_{15}|\nu|^{\frac{1}{p}-1}\psi\left(\frac{1}{|\nu|}\right) .$$

Poznato je (V.T. 2.2.2) da za bilo koje $p\varepsilon(1,+\infty)$ i $F(x)\varepsilon L_p$ vrijedi nejednakost

$$\|F(x)-S_{n-1}(x,F)\|_p \leqslant C_1E_n(F)_p .$$

Neka je $F(x) = \phi_y(x)$, $n=1$, $S_o(x,\phi_y) = \frac{A_o(y)}{2}$.

Tada vrijedi

$$\left\|\phi_y(x) - \frac{A_o(y)}{2}\right\|_p \leqslant C_1E_1(\phi_y)_p ,$$

$$\|\phi_y(x)\|_p \leqslant \left\|\phi_y(x) - \frac{A_o(y)}{2}\right\|_p + (2\pi)^{\frac{1}{p}}\frac{A_o(y)}{2} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left[E_1(\phi_y)_p + A_o(y)\right] \leqslant C_3\left[E_1(\phi_y)_p + \|f\|_E\right] .$$

Kako je $c_o(f) = A_o(y)$ i $|c_o(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}|f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_1}$

to je $A_o(y)<M$. Dokazaćemo ograničenost za $E_1(\phi_y)_p$.

U lemi 2.2.13 je dokazano da koeficijenti $A_\nu(y)$ zadovoljavaju uslov

$$A_o(y) \geq A_1(y) \geq A_2(y) \geq \ldots,\ A_\nu(y)\to 0 \quad \text{za } \nu\to\infty, |y|\leq\delta.$$

Ako je $p\in(1,+\infty)$, tada za monotono opadajuće koeficijente $A_n(y)$ vrijedi nejednakost (9).

Primjenjujući teoremu 2.2.8, nejednakosti (9) i (13) i osobine funkcije $\psi(\delta)$ dobijamo

$$E_n(\phi)_p \leq \|\phi(x)-S_{n-1}(x,\phi)\|_p \leq C_7\{a_n n^{1-\frac{1}{p}} + [\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}]^{\frac{1}{p}}\} \leq$$

$$\leq C_8\{[\sum_{\nu=[\frac{n}{2}]}^{n} a_\nu^p \nu^{p-2}]^{\frac{1}{p}} + [\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}]^{\frac{1}{p}}\} \leq C_9[\sum_{\nu=[\frac{n}{2}]}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_{10}[\sum_{\nu=[\frac{n}{2}]}^{\infty} \frac{1}{\nu}\psi^p(\frac{1}{\nu})]^{\frac{1}{p}} \leq C_{11}\psi(\frac{1}{n}) .$$

Tako je dokazano da uz pretpostavke teoreme vrijedi nejednakost

$$E_n(\phi)_p \leq C_{25}\psi(\frac{1}{n}) ,$$

gdje pozitivna konstanta C_{25} ne zavisi od n $(n=1,2,\ldots)$.

Tada prema teoremi 2.2.3, procjeni za $E_n(\phi)_p$, lemi 2.2.4 za $k>\sigma$ vrijedi

$$\omega_k(\phi,\frac{1}{n})_p \leqslant \frac{C_{26}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(\phi)_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{27}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_{28}\psi(\frac{1}{n}) .$$

Za bilo koje $\delta(o<\delta\leqslant 1)$ postoji $n\geqslant 1$ takvo da je

$$\frac{1}{n+1} < \delta \leqslant \frac{1}{n} .$$

Koristeći svojstva modula glatkosti i funkcije $\psi(\delta)$ očito vrijedi

$$\omega_k(\phi,\delta)_p \leqslant \omega_k(\phi,\frac{1}{n})_p \leqslant \omega_k(\phi,\frac{2}{n+1})_p \leqslant$$

$$\leqslant C_{29}\psi(\frac{2}{n+1}) \leqslant C_{30}\psi(\frac{1}{n+1}) \leqslant C_{31}\psi(\delta) .$$

A to znači da je

$$\phi(x)\varepsilon H_p^\psi .$$

Teorema je dokazana.

§ 4. DODATNI REZULTATI OBRNUTOJ TEOREMI

TEOREMA 3.4.1 Neka je $f(x)\varepsilon E$, $(E\varepsilon A)$, $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$, $\delta > o$. Ako vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_E \leqslant \frac{C_1}{e^{n\delta}}\psi(\frac{1}{n}) ,$$

gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od n (n=1,2,3,...), i ako postoje broj $p\varepsilon[2,+\infty]$ i funkcija $\psi_1(\delta)$ takvi da je:

a) $\psi_1(\delta)\varepsilon MH(\sigma_1)$,

b) $\{\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi^p(\frac{1}{\nu})\,\nu^{p-2}\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2\psi_1(\frac{1}{n})$ za $2 \leqslant p < \infty$,

c) $\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi(\frac{1}{\nu}) \leqslant C_2\psi_1(\frac{1}{n})$ za $p = \infty$,

gdje pozitivna konstanta C_2 ne zavisi od n (n=1,2,...), tada za bilo koje $p_1\varepsilon[2,p]$ vrijedi

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}H_{p_1}^{\psi_2} ,$$

gdje je

$$\psi_2(\delta) = \psi_1(\delta)\,\delta^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} .$$

DOKAZ. Ponavljajući dokaz teoreme 2.1 utvrdjujemo da je funkcija f(x+iy) analitička u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$, i da postoji njena granična funkcija $\phi(x)$ takva da se funkcija f(x) može predstaviti u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $H_{p_1}^{\psi_2}$.

Neka je $2 \leqslant p_1 < p < \infty$ (slučaj $p_1=p$ razmatran je u teoremi 2.1). Prema teoremi Peli (V. [18], str. 202) i nejednakosti (8) vrijedi

$$E_n^{p_1}(\phi)_{p_1} \leqslant \| \phi(x) - S_{n-1}(x,\phi) \|_{p_1}^{p_1} \leqslant C_3 \Big(\sum_{|\nu| \geqslant n} |\alpha_\nu|^{p_1} |\nu|^{p_1-2} \Big) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \Big[\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi^p(\tfrac{1}{\nu}) \nu^{p_1-2} \Big] = C_4 \Big\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} \Big[\psi(\tfrac{1}{\nu}) \nu^{1-\frac{2}{p}} \Big]^{p_1} \cdot \frac{1}{\nu^{2(1-\frac{p_1}{p})}} \Big\} .$$

Primjenjujući Helderovu nejednakost sa eksponentom $\frac{p}{p_1} > 1$ vrijedi

$$E_n^{p_1}(\phi)_{p_1} \leqslant C_4 \Big[\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi^p(\tfrac{1}{\nu}) \nu^{p-2} \Big]^{\frac{p_1}{p}} \Big[\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2(1-\frac{p_1}{p})p''}} \Big]^{\frac{1}{p''}} ,$$

gdje je $\frac{1}{p''} = 1 - \frac{p_1}{p}$.

Odakle je

$$E_n^{p_1}(\phi)_{p_1} \leqslant C_5 \Big[\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi^p(\tfrac{1}{\nu}) \nu^{p-2} \Big]^{\frac{p'}{p}} \cdot \frac{1}{n^{1/p''}} =$$

$$= C_5 \Big[\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi^p(\tfrac{1}{\nu}) \nu^{p-2} \Big]^{\frac{p'}{p}} \frac{1}{n^{1-p_1/p}} \leqslant C_6 \psi_1^{p_1}(\tfrac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n^{1-p_1/p}} =$$

$$= C_6 \Big[\psi_1(\tfrac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n^{1/p_1 - 1/p}} \Big]^{p_1} ,$$

tj.

$$E_n(\phi)_{p_1} \leqslant C_7 \psi_1(\tfrac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n^{1/p_1 - 1/p}} = C_7 \psi_2(\tfrac{1}{n}) .$$

Neka je $p=\infty$ i $2\leqslant p_1<\infty$. Tada prema teoremi Peli, nejednakosti (8) i uslovu c) za $\psi(\delta)$ vrijedi

$$E_n(\phi)_{p_1}\leqslant\|\phi(x)-S_{n-1}(x,\phi)\|_{p_1}\leqslant C_8\Big(\sum_{|\nu|\geqslant n}|\alpha_\nu|^{p_1}|\nu|^{p_1-2}\Big)^{\frac{1}{p_1}}\leqslant$$

$$\leqslant C_9\Big[\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi^{p_1}\big(\tfrac{1}{\nu}\big)\nu^{p_1-2}\Big]^{\frac{1}{p_1}}\leqslant C_9\Big[\sum_{\xi=[\lg_2 n]}^{\infty}\sum_{\nu=2^{\xi}}^{2^{\xi+1}}\psi^{p_1}\big(\tfrac{1}{\nu}\big)\nu^{p_1-2}\Big]^{\frac{1}{p_1}}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\Big[\sum_{\xi=[\lg_2 n]}^{\infty}\psi^{p_1}\big(\tfrac{1}{2^{\xi}}\big)2^{\xi(p_1-1)}\Big]^{\frac{1}{p_1}}\leqslant\frac{C_{10}}{n^{1/p_1}}\Big[\sum_{\xi=[\lg_2 n]}^{\infty}\psi^{p_1}\big(\tfrac{1}{2^{\xi}}\big)2^{\xi p_1}\Big]^{\frac{1}{p_1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{10}}{n^{1/p_1}}\sum_{\xi=[\lg_2 n]}^{\infty}\psi\big(\tfrac{1}{2^{\xi}}\big).2^{\xi}\leqslant\frac{C_{10}}{n^{1/p_1}}\sum_{\nu=2^{[\lg_2 n]}}^{\infty}\psi\big(\tfrac{1}{\nu}\big)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{11}}{n^{1/p_1}}\psi\Big(\frac{1}{2^{[\lg_2 n]}}\Big)\leqslant\frac{C_{12}}{n^{1/p_1}}\psi\big(\tfrac{1}{n}\big)\ .$$

Koristeći teoremu 2.2.3, tek dokazanu nejednakost i lemu 2.2.4 za $k>\sigma$ vrijedi

$$\omega_k\big(\phi,\tfrac{1}{n}\big)_{p_1}\leqslant\frac{C_{13}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(\phi)_{p_1}\leqslant\frac{C_{14}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\psi_2\big(\tfrac{1}{\nu}\big)\leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\psi_2\big(\tfrac{1}{n}\big)\ .$$

Za bilo koje $\delta\,(0<\delta\leqslant 1)$ postoji $n\geqslant 1$ takav da je

$$\frac{1}{n+1}<\delta\leqslant\frac{1}{n}\ .$$

Koristeći osobine modula glatkosti i funkcije $\psi_2(t)$ vrijedi

$$\omega_k(\phi,\delta)_{p_1} \leq \omega_k(\phi,\frac{1}{n})_{p_1} \leq \omega_k(\phi,\frac{2}{n+1})_{p_1} \leq$$

$$\leq C_{16}\psi_2(\frac{2}{n+1}) \leq C_{17}\psi_2(\frac{1}{n+1}) \leq C_{18}\psi_2(\delta) \;.$$

A to znači da je

$$\phi(x)\,\varepsilon H_{p_1}^{\psi_2} \;.$$

Teorema je dokazana.

TEOREMA 3.4.2 Neka je $f(x)\,\varepsilon E$, $(E\varepsilon A)$, $\psi(\delta)\,\varepsilon MH(\sigma)$, $\delta > 0$. Ako vrijedi nejednakost

$$E_n(f)_E \leq \frac{C_1}{e^{n\delta}}\psi(\frac{1}{n}) \;,$$

gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$ i ako postoji funkcija $\psi_1(\delta)$ takva da je:

a) $\psi_1(\delta)\,\varepsilon MH(\sigma_1)$,

b) $\{\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi^2(\frac{1}{\nu})\}^{\frac{1}{2}} \leq C_2\psi_1(\frac{1}{n})$,

gdje pozitivna konstanta C_2 ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$, tada je

$$f(x)\,\varepsilon Б^{\delta}H_{E_1}^{\psi_1} \;,$$

za bilo koje E_1 takvo da je $L_2 \subset E_1$.

DOKAZ. Kao i u teoremi 2.1 utvrdjujemo da je funkcija $f(x+iy)$ analitička u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$, i da se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1). Dokazaćemo da granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $H_{E_1}^{\psi_1}$.

Iz činjenice da je prostor L_2 uložen u prostor E_1, Parsevalove jednakosti, nejednakosti (8) i uslova b) slijedi

$$E_n(\phi)_{E_1} \leqslant C_3 E_n(\phi)_{L_2} \leqslant \Big(\sum_{|\nu|=n}^{\infty} \alpha_\nu^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_4\Big[\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi^2\big(\tfrac{1}{\nu}\big)\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \psi_1\big(\tfrac{1}{n}\big) .$$

Tada, prema teoremi 2.2.3, lemi 2.2.4, za bilo koje $k>\sigma$ vrijedi

$$\omega_k\big(\phi,\tfrac{1}{n}\big)_{E_1} \leqslant \frac{C_6}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(\phi)_{E_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_7}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \psi_1\big(\tfrac{1}{\nu}\big) \leqslant C_8 \psi_1\big(\tfrac{1}{n}\big) .$$

Za bilo koje $\delta (o < \delta \leqslant 1)$ postoji $n \geqslant 1$ takvo da je

$$\frac{1}{n+1} < \delta \leqslant \frac{1}{n} .$$

Koristeći svojstva modula glatkosti i funkcije $\psi_1(\delta) \varepsilon MH(\sigma_1)$ dobija se

$$\omega_k(\phi,\delta)_{E_1} \leqslant \omega_k(\phi,\tfrac{1}{n})_{E_1} \leqslant \omega_k(\phi,\tfrac{2}{n+1})_{E_1} \leqslant$$

$$\leqslant C_9\psi_1(\tfrac{2}{n+1}) \leqslant C_{10}\psi_1(\tfrac{1}{n+1}) \leqslant C_{11}\psi_1(\delta).$$

A to znači da je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}H_{E_1}^{\psi_1} .$$

Teorema je dokazana.

G L A V A IV

DIREKTNE I OBRNUTE TEOREME APROKSIMACIJA ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}B_{E\Theta}^{\psi}$

§1. DIREKTNE TEOREME APROKSIMACIJE ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}B_{E\Theta}^{\psi}$

TEOREMA 4.1.1 Neka je $f(x)\varepsilon Б^{\delta}B_{E\Theta}^{\psi}$ tada vrijedi

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta_1}}{\nu\psi^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta_1}(f)_F\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} < \infty$$

za bilo koje $F\varepsilon A$ i $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$.

DOKAZ. Neka je $f(x)\varepsilon Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$ tj. neka se f(x) može predstaviti u obliku (1.2.1). Prema lemi 2.2.1 za bilo koje $F\varepsilon A$ vrijedi

$$E_{\nu}(f)_F \leqslant \frac{C_1}{e^{\nu\delta}} E_{\nu}(\phi)_E ,$$

gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od f, ϕ,ν $(\nu=1,2,\dots)$.

Primjenjujući tu nejednakost, lemu 2.2.12, teoremu Džeksona (T. 2.2.3), lemu 2.2.8 i definiciju klase $B^{\psi}_{E\Theta}$ dobiće se nejednakosti

$$\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta_1}}{\nu\psi^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta_1}(f)_F\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_2\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta_1}(\phi)_E\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_4\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\omega_k^{\theta}(\phi,\frac{1}{\nu})_E}{\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_5\{\int_0^1 \left[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)}\right]^{\theta} \frac{dt}{t}\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

Teorema je dokazana.

TEOREMA 4.1.2 Ako je $f(x)\varepsilon Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$, tada je

$$\{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{e^{2^m\delta}}{\psi(\frac{1}{2^m})} E_{2^m}(f)_F\right]^{\theta_1}\}^{\frac{1}{\theta_1}} <\infty,$$

za bilo koje $F\varepsilon A$ i $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$. Tvrdjenje teoreme se ne može poboljšati za $\theta_1 = \theta$ na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$.

DOKAZ. Neka je $f(x) \in Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$, tj. neka se $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1). Prema lemi 2.2.1 za bilo koje $F \in A$ vrijedi

$$E_{\nu}(f)_F \leqslant \frac{C}{e^{\nu\delta}} E_{\nu}(\phi)_E ,$$

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od f, ϕ i ν $(\nu=1,2,\ldots)$.

Primjenjujući tek navedenu nejednakost, teoremu 2.2.6, teoremu Džeksona (T.2.2.3), lemu 2.2.8 i definiciju klase $B^{\psi}_{E\Theta}$ dobija se

$$\Big\{ \sum_{m=o}^{\infty} \Big[\frac{e^{2^m\delta}}{\psi(\frac{1}{2^m})} E_{2^m}(f)_F \Big]^{\theta_1} \Big\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_1 \Big\{ \sum_{m=o}^{\infty} \Big[\frac{1}{\psi(\frac{1}{2^m})} E_{2^m}(\phi)_E \Big]^{\theta_1} \Big\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big\{ \sum_{m=o}^{\infty} \Big[\frac{1}{\psi(\frac{1}{2^m})} E_{2^m}(\phi)_E \Big]^{\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_2 \Big\{ \sum_{m=o}^{\infty} \Big[\frac{1}{\psi(\frac{1}{2^m})} \omega_k(\phi, \frac{1}{2^m})_E \Big]^{\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \omega_k(\phi, \frac{1}{\nu})_E \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_4 \Big\{ \int_o^1 \Big[\frac{\omega_k(\phi,t)_E}{\psi(t)} \Big]^{\theta} \frac{dt}{t} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty .$$

Da se tvrdjenje teoreme ne može poboljšati slijedi iz teoreme 4.3.1.

PRIMJEDBA. U ovom paragrafu smo dokazali dvije direktne teoreme, teoremu 4.1.1 i teoremu 4.1.2. To je u vezi sa sljedećim: prema lemi 2.2.14, za funkcije sa lakunarnim Furierovim koeficijentima tvrdjenje teoreme 1 je slabije od tvrdjenja teoreme 2.

Prema lemi 2.2.15, postoji klasa funkcija za koju su tvrdjenja teorema 1 i 2 identična. Zbog toga smo naveli dvije direktne teoreme.

§ 2. OBRNUTA TEOREMA APROKSIMACIJE ZA FUNKCIJE IZ KLASE $Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$

TEOREMA 4.2.1 Neka je $f(x)\varepsilon E$, $(E\varepsilon A)$, $0 < \theta < \infty$, $\delta > 0$, $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$. Ako: 1) vrijedi nejednakost

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(f)_E\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \tag{1}$$

2) Postoji broj p takav da je $p\varepsilon[2,+\infty]$ i $\theta \geq p'$ gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, a funkcija $\psi_1(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{p}-1}$ ima osobine

a) $\psi_1(t)\varepsilon MH(\sigma_1)$,

b) $\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \frac{C_1}{\psi_1(\frac{1}{n})}$, gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od n $(n=1,2,3,\dots)$, tada je

$$f(x)\in Б^{\delta}B^{\psi_1}_{p\theta_1} \quad ,$$

za bilo koje $\theta_1 \in [\theta,+\infty)$.

Tvrdjenje teoreme za $\theta_1 = \theta$ nije moguće poboljšati na cijeloj klasi funkcija $Б^{\delta}B^{\psi_1}_{p\theta}$.

DOKAZ. Iz tačnosti nejednakosti (1), prema lemi 2.2.7, utvrdjujemo da se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo postojanje granične funkcije $\phi(x)$. Poznato je da za $p\in[1,+\infty]$ i $F(x)\in L_p$ vrijedi nejednakost

$$\| F(x)-S_{n-1}(x,F)\|_p \leqslant C_2 \log(n+2) E_n(F)_p \ .$$

Neka je $F(x) = \phi_y(x)$, $n=1$, $S_o(x,\phi_y) = \dfrac{A_o(y)}{2}$,

tada je

$$\left\| \phi_y(x) - \frac{A_o(y)}{2} \right\|_p \leqslant C_3 E_1(\phi_y)_p \ ,$$

$$\| \phi_y(x)\|_p \leqslant \left\| \phi_y(x) - \frac{A_o(y)}{2}\right\|_p + (2\pi)^{\frac{1}{p}} \left|\frac{A_o(y)}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_4\left[E_1(\phi_y)_p + |A_o(y)|\right] \ .$$

Kako je $c_o(f) = A_o(y)$ i

$$|c_o(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_1} \leqslant C\|f\|_E ,$$

to je $|A_o(y)| \leqslant M$.

Dokazaćemo ograničenost za $E_1(\phi_y)_p$. Prema teoremi Hausdorfa-Janga (V. [18], str. 191.), teoremi 2.2.4, uslovu b) za $\psi(\delta)$, nejednakosti (2.2.6) i pretpostavci teoreme dobija se

$$E_1^\theta(\phi_y)_p \leqslant C\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^\theta(\frac{1}{\nu})}E_\nu^\theta(\phi_y)_p \leqslant C\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^\theta(\frac{1}{\nu})}\left[\sum_{|n|=\nu}^{\infty}|A_n(y)|^{p'}\right]^{\frac{\theta}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant C_5\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^\theta(\frac{1}{\nu})}\left[|A_\nu(y)|^{p'_\nu}\right]^{\frac{\theta}{p'}} = C_5\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^\theta(\frac{1}{\nu})}|A_\nu(y)|^{\theta\,\nu^{\frac{\theta}{p'}}} =$$

$$= C_5\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|A_\nu(y)|^\theta}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} \leqslant C_6\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})}\,e^{\nu\delta\theta}E_\nu^\theta(f)_E < \infty .$$

I tako je dokazano, da za bilo koje $y(|y|<\delta)$ vrijedi

$$\|\phi_y(x)\|_p \leqslant M .$$

Kako je $p\in[2,+\infty]$, to znači (V. [1], str. 150.) da postoji funkcija $\phi(x)\in L_p$ takva da se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B_{p\theta_1}^{\psi_1}$, za bilo koji $\theta_1 \varepsilon [\theta,+\infty)$. Zaista, prema lemi 2.2.12, teoremi Hausdorfa-Janga, uslovu b) za funkciju $\psi(\delta)$, nejednakosti (2.2.7) i nejednakosti (1) vrijedi

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_p\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_7\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(\phi)_p\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left[\sum_{|k|\geqslant\nu} |\alpha_k|^{p'}\right]^{\frac{\theta}{p'}}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_8\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left[|\alpha_\nu|^{p'}\nu\right]^{\frac{\theta}{p'}}\right\}^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_8\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\alpha_\nu|^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_9\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} e^{\nu\delta\theta} E_\nu^{\theta}(f)_E\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

Iz te nejednakosti, prema lemi 2.2.11, slijedi da je

$$\phi(x)\varepsilon B_{p\theta_1}^{\psi_1}.$$

Dokaz da se tvrdjenje teoreme ne može poboljšati slijedi iz tačnosti teoreme 4.3.2.

§3. POTREBNI I DOVOLJNI USLOVI PRIPADANJA KLASI $\delta B_{E\theta}^{\psi}$ FUNKCIJA SA MONOTONIM ILI LAKUNARNIM FURIEROVIM KOEFICIJENTIMA

TEOREMA 4.3.1 Neka je $f(x)\varepsilon\Lambda_2$ E, $(E\varepsilon A)$, $0<\theta<\infty$. Neka funkcija $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$ ima osobine:

$$\text{a)}\ \left[\sum_{m=0}^{\nu} \frac{1}{\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})}\right]^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C'\psi(\frac{1}{2^{\nu}}) \ ,$$

$$\text{b)}\ \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi(\frac{1}{2^{\nu}}) < C'' \ ,$$

gdje pozitivne konstante C' i C'' ne zavise od ν $(\nu=1,2,3,\dots)$. Tada funkcija $f(x)$ pripada klasi $Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$ ako i samo ako za bilo koje $F\varepsilon A$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2^{m}\delta\theta}}{\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})} E^{\theta}_{2^m}(f)_F < \infty. \tag{2}$$

DOKAZ. Ako je $f(x)\varepsilon Б^{\delta}B^{\psi}_{E\Theta}$, to, kako je dokazano u teoremi 2, za bilo koje $F\varepsilon A$ vrijedi nejednakost (2).

Neka vrijedi nejednakost (2) za neko $F\varepsilon A$. Iz te nejednakosti slijedi da je

$$E_{2^m}(f)_F \leqslant \frac{C_1}{e^{2^m\delta}}\psi(\frac{1}{2^m}) \ . \tag{3}$$

Uzimajući u obzir da za $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ vrijedi

$$e^{-2^m\delta}\psi(\frac{1}{2^m}) \leqslant C_2 e^{-n\delta}\psi(\frac{1}{n}) \ ,$$

to, koristeći lemu 2.2.6, nejednakost (3) i tek dokazanu nejednakost, slijedi

$$E_n(f)_F \leqslant \frac{C_3}{e^{n\delta}}\psi(\frac{1}{n}) \ .$$

Prema lemi 2.2.7, utvrdjujemo da se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo da se f(x) može predstaviti u obliku (1.2.1). Koristeći lemu 2.2.2 i nejednakost (3), dobijamo procjenu

$$|c_{-2^\nu}| = |c_{2^\nu}| \leqslant C_4 E_{2^\nu}(f)_F \leqslant C_5 e^{-2^m\delta}\,\psi\left(\frac{1}{2^m}\right) .$$

Zbog nejednakosti (2.1.4) i tek dokazane procjene dobijamo

$$|A_{-2^\nu}(y)| = |A_{2^\nu}(y)| \leqslant C_6 \psi\left(\frac{1}{2^\nu}\right).$$

Iz te procjene i uslova b) za funkciju $\psi(t)$ slijedi

$$\|\phi_y(x)\|_C \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[|A_{2^\nu}(y)| + |A_{-2^\nu}(y)|\right] \leqslant C_7 \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi\left(\frac{1}{2^\nu}\right) \leqslant C_8 .$$

I tako, za bilo koje y ($|y| < \delta$) vrijedi

$$\|\phi_y(x)\|_C \leqslant M ,$$

gdje je M pozitivna konstanta koja ne zavisi od y. A to znači, da postoji granična funkcija $\phi(x)\in C$, tj. $\phi(x)\in L_p$ za bilo koje $p\in[1,+\infty]$ takva da se funkcija f(x) može predstaviti u obliku (1.2.1).

Kako se f(x) može predstaviti u obliku (1.2.1), to iz nejednakosti (2.1.5) slijedi da je $\phi(x)\varepsilon\Lambda_2$ i da vrijedi

$$|b_m| \leqslant C_9 e^{2^m\delta} E_{2^m}(f)_F .$$

Dokazaćemo da granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B^{\psi}_{E\theta}$. Zaista, koristeći osobine najbolje aproksimacije, svojstva funkcije $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$ i provodeći jednostavne transformacije, dobiće se

$$I_2^\theta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi)_E = \frac{1}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(\phi)_E + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi)_E =$$

$$= \frac{1}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(\phi)_E + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi)_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(\phi)_E + C_{10} \sum_{m=1}^{\infty} E^\theta_{2^m}(\phi)_E \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^{m+1}-1})} \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{\nu} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\left\{\frac{1}{\psi^\theta(1)} E_1^\theta(\phi)_E + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E^\theta_{2^m}(\phi)_E}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})}\right\} \leqslant C_{11} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E^\theta_{2^m}(\phi)_E}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\| \phi(x) - S_{2^m_1}(x,\phi)\|^\theta_E}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \leqslant C_{12} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|\phi(x)-S_{2^m_1}(x,\phi)\|^\theta_C}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \leqslant$$

$$\leqslant C_{13} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \Big[\sum_{|\nu|=m}^{\infty} |b_\nu| \Big]^\theta \leqslant C_{14} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \Big[\sum_{\nu=m}^{\infty} |b_\nu| \Big]^\theta .$$

Razmotrićemo dva slučaja:

a) Neka je $o < \theta \leq 1$, tada, koristeći teoremu 2.2.6 i uslov a) za funkciju $\psi(t)$ dobijamo

$$I_2^\theta \leq C_{14} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \Big[\sum_{\nu=m}^{\infty} |b_\nu|\Big]^\theta \leq C_{14} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \sum_{\nu=m}^{\infty} |b_\nu|^\theta \leq$$

$$\leq C_{14} \sum_{\nu=o}^{\infty} |b_\nu|^\theta \sum_{m=o}^{\nu} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \leq C_{14} \sum_{\nu=o}^{\infty} \frac{|b_\nu|^\theta}{\psi^\theta(\frac{1}{2^\nu})} ;$$

b) Neka je $\theta \geq 1$. Prema teoremi 2.2.4 vrijedi

$$I_2^\theta < C_{14} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} \Big[\sum_{\nu=m}^{\infty} |b_\nu|\Big]^\theta \leq C_{15} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} |b_m|^\theta \xi_m^\theta ,$$

gdje se ξ_m odredjuje iz uslova

$$\sum_{\nu=o}^{m} \frac{1}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} = \frac{\xi_m}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} .$$

Tada iz uslova za $\psi(t)$ slijedi

$$\xi_m \leq C_{16} ,$$

tj.

$$I_2^\theta \leq C_{17} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{|b_m|^\theta}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} .$$

I tako je dokazano da vrijedi nejednakost

$$I_2^\theta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi)_E \leq C_{18} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{|b_m|^\theta}{\psi^\theta(\frac{1}{2^m})} ,$$

za bilo koje $\theta\varepsilon(o,+\infty)$.

Koristeći procjenu za $|b_m|$, tek dokazanu nejednakost i pretpostavku teoreme, dobijamo

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(\phi)_E \leq C_{19} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{e^{2^m\delta\theta}}{\psi^{\theta}(\frac{1}{2^m})} E_{2^m}^{\theta}(f)_F < \infty.$$

Na osnovu leme 2.2.11 zaključujemo da je

$$\phi(x)\varepsilon B_{E\theta}^{\psi},$$

tj.

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}B_{E\theta}^{\psi}.$$

Teorema je u potpunosti dokazana.

TEOREMA 4.3.2 Neka je $o < \theta < \infty$,

$$f(x) \sim \frac{d_o}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{\nu}\cos\nu x ,$$

gdje je $d_{\nu}\frac{e^{\nu\delta}+e^{-\nu\delta}}{2}\downarrow 0$. Neka je funkcija $\psi_1(t)=\psi(t)t^{\frac{1}{p}-1}$ takva da je

a) $\psi_1(t)\varepsilon MH(\sigma_1)$,

b) $\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\}^{\frac{1}{\theta}} \asymp \frac{1}{\psi_1(\frac{1}{n})}$.

Tada je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}B_{p\theta}^{\psi_1} ,$$

ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(f)_E < \infty, \tag{4}$$

za bilo koje $E\varepsilon A$.

DOKAZ. Ako funkcija $f(x)$ zadovoljava nejednakost (4), to, kako je dokazano u teoremi 4.2.1 za $p\varepsilon[2,+\infty]$ vrijedi

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta} B_{p\theta}^{\psi_1} .$$

Neka je $1 < p < 2$. Iz tačnosti nejednakosti (4), prema lemi 2.2.7, utvrdjujemo da se funkcija $f(x)$ može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo postojanje granične funkcije $\phi(x)$. Poznato je (T.2.2.2) da za bilo koje $p\varepsilon(1,+\infty)$ i $F(x)\varepsilon L_p$ vrijedi nejednakost

$$\| F(x)-S_{n-1}(x,F)\|_p \leq C_1 E_n(F)_p .$$

Neka je $F(x) = \phi_y(x)$, $n=1$, $S_o(x,\phi_y) = \dfrac{A_o(y)}{2}$.

Tada vrijedi

$$\| \phi_y(x) - \frac{A_o(y)}{2}\|_p \leq C_2 E_1(\phi_y)_p$$

$$\|\phi_y(x)\|_p \leq \|\phi_y(x) - \frac{A_o(y)}{2}\|_p + (2\pi)^{\frac{1}{p}} \frac{|A_o(y)|}{2} \leq$$

$$\leq C_3\left[E_1(\phi_y)_p + |A_o(y)|\right].$$

Kako je $c_c(f) = A_o(y)$ i

$$|c_o(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} |f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_1} \leq C_4\|f\|_E \text{ , to je}$$

$$|A_o(y)| \leq M .$$

Primjenjujući lemu 2.2.13 utvrdjujemo da Furierovi koeficijenti $A_\nu(y)$ funkcije $\phi_y(x) = \mathrm{Re} f(x+iy)$, $(|y| \leq \delta)$ zadovoljavaju uslov

$$A_o(y) \geq A_1(y) \geq A_2(y) \geq \dots \text{ i } A_\nu(y) \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Dokazaćemo ograničenost $E_1(\phi_y)_p$.

Kako je $p \in (1,+\infty)$, to za monotono opadajuće koeficijente $A_\nu(y)$ vrijedi teorema 2.2.8. Primjenjujući tu teoremu i poznate nejednakosti, dobijamo da je

$$E_1^\theta(\phi_y)_p \leq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi_y)_p \leq$$

$$\leq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^\theta(\frac{1}{\nu})}\left[A_\nu \nu^{1-\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=\nu+1}^{\infty} A_n^p\, n^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^\theta \leq$$

$$\leqslant C_7\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}[\sum_{n=\nu}^{\infty}A_n^p\, n^{p-2}]^{\frac{\theta}{p}}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu^{\theta}\nu^{\theta(1-\frac{1}{p})}}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\}$$

Razmotrićemo dva slučaja:

a) $o < \frac{\theta}{p} \leqslant 1$, b) $\frac{\theta}{p} \geqslant 1$

a) Neka je $o < \frac{\theta}{p} \leqslant 1$. Prema teoremi 2.2.5 vrijedi

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}[\sum_{n=\nu}^{\infty}A_n^p\, n^{p-2}]^{\frac{\theta}{p}} \leqslant C_8\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}(A_\nu^p\nu^{p-2})^{\frac{\theta}{p}}\nu^{\frac{\theta}{p}-1}\xi_\nu,$$

gdje se ξ_ν odredjuje iz uslova

$$\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{n})}=\frac{\xi_\nu}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}.$$

Uzimajući u obzir posljednju jednakost iz pretpostavke teoreme, slijedi da je

$$\xi_\nu \leqslant C_9\nu$$

Tada je

$$E_1^{\theta}(\phi_Y)_p \leqslant C_{10}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}.$$

b) Neka je $\frac{\theta}{p} > 1$. Prema teoremi 2.2.4 vrijedi

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}[\sum_{n=\nu}^{\infty}A_n^p\, n^{p-2}]^{\frac{\theta}{p}} \leqslant C_{11}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}[A_\nu^p\nu^{p-2}\beta_\nu]^{\frac{\theta}{p}},$$

gdje se β_ν odredjuje iz uslova

$$\sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{n\psi_1^{\theta}(\frac{1}{n})} = \frac{\beta_\nu}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Iz posljednje jednakosti i pretpostavke b) teoreme slijedi da je

$$\beta_\nu \leqslant C_{12}\nu .$$

Tada je

$$E_1^{\theta}(\phi_y)_p \leqslant C_{13} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Tako smo dokazali da uz pretpostavke teoreme vrijedi nejednakost

$$E_1^{\theta}(\phi_y)_p \leqslant C_{14} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Koristeći nejednakosti (2.2.6) i (4), dobijamo da je

$$E_1^{\theta}(\phi_y)_p \leqslant C_{15} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(f)_E < \infty .$$

I tako je dokazano da za bilo koje y ($|y|<\delta$) vrijedi

$$\|\phi_y(x)\|_p \leqslant M .$$

Kako je $p\in(1,2)$, to znači (V. [1], str. 150) da postoji funkcija $\phi(x)\in L_p$ takva da se $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B_{p\theta}^{\psi_1}$. Zaista, primjenjujući teoremu 2.2.8 i poznate nejednakosti zaključujemo da je

$$I=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(\phi)_p\leqslant C_{16}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left[a_\nu\nu^{1-\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=\nu+1}^{\infty}a_\nu^p\nu^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\theta}\leqslant$$

$$\leqslant C_{17}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left[\sum_{n=\nu}^{\infty}a_\nu^p\nu^{p-2}\right]^{\frac{\theta}{p}}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^{\theta}\nu^{(1-\frac{1}{p})\theta}}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\right\}=I_1+I_2\ .$$

Razmotrićemo dva slučaja: a) $o<\frac{\theta}{p}\leqslant 1$, b) $\frac{\theta}{p}\geqslant 1$.

a) Neka je $o<\frac{\theta}{p}\leqslant 1$. Primjenjujući teoremu 2.2.5 vrijedi

$$I_1\leqslant C_{18}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}(a_\nu^p\nu^{p-2}\nu)^{\frac{\theta}{p}}=C_{18}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\ .$$

Otkuda je

$$I\leqslant C_{19}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\ .$$

b) Neka je $\frac{\theta}{p}\geqslant 1$. Prema teoremi 2.2.4 vrijedi

$$I_1\leqslant C_{20}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left[a_\nu^p\nu^{p-2}\nu\right]^{\frac{\theta}{p}}=C_{20}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\ .$$

Otkuda je

$$I\leqslant C_{21}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\ .$$

I tako je dokazano da uz pretpostavke teoreme vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(\phi)_p\leqslant C_{22}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\ .$$

Koristeći nejednakost (2.2.7) i nejednakost (4) dobija se

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(\phi)_p \leqslant C_{23}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(f)_E <\infty .$$

Prema lemi 2.2.11, iz posljednje nejednakosti zaključujemo da je

$$\phi(x)\in B_{p\theta}^{\psi_1} .$$

Prema tome, dokazano je da za bilo koje $p\in(1,+\infty]$ funkcija $f(x)$ koja zadovoljava uslov (4) pripada klasi $\text{Б}^{\delta}B_{p\theta}^{\psi_1}$.

Neka je $f(x)\in\text{Б}^{\delta}B_{p\theta}^{\psi_1}$, tj. funkcija $f(x)$ može biti predstavljena u obliku (1.2.1), gdje je $\phi(x)\in M\cap L_p$.

Zbog činjenice da se $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1), nejednakosti (2.1.5) i monotonosti koeficijenta a_n, slijedi

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(f)_E \leqslant C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}(\sum_{n=\nu}^{\infty}d_n)^{\theta} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}(\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{a_n}{e^{n\delta}})^{\theta} \leqslant C_2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}a_{\nu}^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}(\sum_{n=\nu}^{\infty}e^{-n\delta})^{\theta}\leqslant C_3\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_{\nu}^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Prema teoremi Konjuškova (T.2.2.8), vrijedi

$$\|\phi\|_p^{\theta}+I_2^{\theta}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(\phi)_p+\|\phi\|_p^{\theta}\geqslant C_4\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}(\sum_{n=2\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2})^{\frac{\theta}{p}}+\|\phi\|_p^{\theta} .$$

Procijenićemo izraz:

$$\|\phi\|_p^{\theta}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left(\sum_{n=2\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}} .$$

Očito je da vrijedi

$$I=\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left(\sum_{n=\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}=\sum_{\xi=1}^{\infty}\frac{1}{2\xi\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{2\xi})}\left(\sum_{n=2\xi}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}+$$

$$+\sum_{\xi=1}^{\infty}\frac{1}{(2\xi+1)\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{2\xi+1})}\left(\sum_{n=2\xi+1}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}=\overline{I_1}+\overline{I_2} .$$

Koristeći osobine funkcije $\psi_1(\delta)$, dobija se

$$\overline{I_2}=\sum_{\xi=1}^{\infty}\frac{1}{(2\xi+1)\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{2\xi+1})}\left(\sum_{n=2\xi+1}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant C_5\sum_{\xi=1}^{\infty}\frac{1}{2\xi\,\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{2\xi})}\left(\sum_{n=2\xi}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}=C_6\overline{I_1} .$$

Otkuda, na osnovu teoreme Peli, nakon jednostavnih transformacija, dobijamo

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left(\sum_{n=\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}=$$

$$=\frac{C_7}{\psi_1{}^{\theta}(1)}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}+\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left(\sum_{n=\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant C_8\left[\|\phi\|_p^{\theta}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1{}^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\left(\sum_{n=2\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}}\right].$$

Razmotrićemo dva slučaja: a) $o < \frac{\theta}{p} \leq 1$ b) $\frac{\theta}{p} \geq 1$

a) Neka je $o < \frac{\theta}{p} \leq 1$. Prema teoremi 2.2.4, vrijedi

$$\|\phi\|_p^\theta + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi)_p \geq C_9 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}} \geq$$

$$\geq C_{10} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} (a_\nu^p \nu^{p-2} \mu_\nu)^{\frac{\theta}{p}} ,$$

gdje se μ_ν odredjuje iz uslova

$$\sum_{\xi=1}^{\nu} \frac{1}{\xi\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\xi})} = \frac{\mu_\nu}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Uzimajući u obzir posljednju jednakost i pretpostavku b) teoreme, slijedi da je

$$\mu_\nu \asymp \nu .$$

Tada je

$$\|\phi\|_p^\theta + I_2^\theta \geq C_{11} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} (a_\nu^p \nu^{p-2} \nu)^{\frac{\theta}{p}} = C_{11} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^\theta}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} .$$

b) Neka je $\frac{\theta}{p} \geq 1$. Primjenjujući teoremu 2.2.5, vrijedi

$$\|\phi\|_p^\theta + I_2^\theta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi)_p \geq C_9 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right)^{\frac{\theta}{p}} \geq$$

$$\geq C_{12}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}(a_\nu^p\nu^{p-2})^{\frac{\theta}{p}} = C_{12}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}a_\nu^{\theta}\left[\frac{1}{\nu^{1-\frac{1}{p}}\psi_1(\frac{1}{\nu})}\right]^{\theta} =$$

$$= C_{12}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Tako je dokazano da uz pretpostavke teoreme vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(f)_E \leq C_{13}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_1^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(\phi)_p+\|\phi\|_p^{\theta}\right] .$$

Iz te nejednakosti, uzimajući u obzir da je $\phi(x)\in B_{p\theta}^{\psi_1}$, prema lemi 2.2.11, zaključujemo da vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(f)_E <\infty.$$

Teorema je dokazana.

§ 4. DODATNI REZULTATI OBRNUTE TEOREME

TEOREMA 4.4.1 Neka je $f(x)\in E$, $E\in A$, $\psi(t)\in MH(\sigma)$, $\delta > 0$, $0 < \theta < \infty$. Ako: 1) vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(f)_E <\infty,$$

2) postoji broj $p\in[2,+\infty]$ i $p'\geq\theta$, gdje je $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$,

3) postoji funkcija $\psi_2(t)$ takva da je:

a) $\psi_2(t)\in MH(\sigma_2)$,

b) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \leqslant \frac{C_1}{n\psi^{\theta}(\frac{1}{n})}$,

gdje pozitivna konstanta C ne zavisi od n (n = 1,2,3,...), tada je

$$f(x)\in Б^{\delta}B^{\psi_2}_{p\theta_1} ,$$

za bilo koje $\theta_1\in[\theta,+\infty)$.

DOKAZ. Prema lemi 2.2.7, utvrdjujemo da se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo da postoji granična funkcija $\phi(x)$. U dokazu teoreme 2.1 dokazano je da vrijedi nejednakost

$$\|\phi_y(x)\|_p \leqslant C_2[E_1(\phi_y)_p+\|f\|_p].$$

Dokazaćemo ograničenost za $E_1(\phi_y)_p$. Kako je $p\in[2,+\infty]$, to prema teoremi Hausdorfa-Janga (V. [18], str. 191), teoremi 2.2.2, uslovu b) za funkciju $\psi_2(t)$, nejednakosti (2.2.6) i pretpostavci teoreme, vrijede nejednakosti

$$E_1(\phi_y)_p \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(\phi_y)_p \leqslant C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \Big(\sum_{|n|\geqslant\nu} |A_n(y)|^{p'}\Big)^{\frac{\theta}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \sum_{|n|=\nu}^{\infty} |A_n(y)|^{\theta} = C_3 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(y)|^{\theta} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(y)|^{\theta} \frac{1}{n\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} \leqslant C_5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\delta\theta}}{n\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} E_n(f)_E < \infty .$$

I tako je dokazano da za bilo koje y $(|y|<\delta)$ vrijedi

$$\| \phi_y(x) \|_p \leqslant M ,$$

gdje je M konstanta koja ne zavisi od y $(|y|<\delta)$. Kako je $p\varepsilon[2,+\infty]$, to znači (V. [1], str. 150) da se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B^{\psi_2}_{p\theta_1}$ za bilo koje $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$. Zaista, prema lemi 2.2.12, teoremi Hausdorfa-Janga, teoremi 2.2.6, uslovu b) za funkciju $\psi_2(t)$, nejednakosti (2.2.7) i pretpostavci teoreme, vrijedi

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta_1}(\phi)_p \right\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_6 \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(\phi)_p \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left[\sum_{n=\nu}^{\infty} |\alpha_n|^{p'} \right]^{\frac{\theta}{p'}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_6 \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \sum_{n=\nu}^{\infty} |\alpha_n|^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_6 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^{\theta} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_7 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^{\theta} \frac{1}{n\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\delta\theta}}{n\psi^{\theta}(\frac{1}{n})} E_n^{\theta}(f)_E \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty .$$

I tako je dokazano da vrijedi nejednakost

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_2^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_p\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} < \infty .$$

Iz te nejednakosti, na osnovu leme 2.2.11 utvrdjujemo da je

$$\phi(x) \varepsilon B_{p\theta_1}^{\psi_2} ,$$

za bilo kcje $\theta_1 \varepsilon [\theta,+\infty)$, tj.

$$f(x) \varepsilon Б^\delta B_{p\theta_1}^{\psi_2} .$$

Teorema je dokazana.

TEOREMA 4.4.2 Neka je $f(x)\varepsilon E, E\varepsilon A, \psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$, $\delta>o$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Ako: 1) vrijedi nejednakost

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(f)_E\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

2) postoji broj p takav da je $p\varepsilon[2,+\infty]$ i $\theta \geqslant p'$ gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 3) postoji funkcija $\psi_3(t)$ takva da je

a) $\psi_3(t)\varepsilon MH(\sigma_3)$

b) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_3^\theta(\frac{1}{\nu})} \leqslant \frac{C_1\psi_3^{p'}(\frac{1}{n})}{n\psi_3^\theta(\frac{1}{n})\psi^{p'}(\frac{1}{n})}$, gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od n (n=1,2,3,...), tada je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta} B_{p\theta_1}^{\psi_3} ,$$

za bilo koje $\theta_1 \varepsilon [\theta,+\infty)$.

DOKAZ. Na osnovu leme 2.2.7 utvrdjujemo da se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo postojanje granične funkcije $\phi(x)$. Već je dokazano da vrijedi nejednakost

$$\|\phi_y(x)\|_p < C_2[E_1(\phi_y)_p+\|f\|_E].$$

Ostaje da dokažemo ograničenost za $E_1(\phi_y)_p$. Prema teoremi Hausdorfa-Janga (V. [18], str. 191) i teoremi 2.2.4 vrijedi

$$E_1^{\theta}(\phi_y)_p \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_{\nu}^{\theta}(\phi_y)_p \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left[\sum_{n=\nu}^{\infty} |A_n(y)|^{p'}\right]^{\frac{\theta}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left[|A\ (y)|^{p'} \beta(\nu)\right]^{\frac{\theta}{p'}} ,$$

gdje se $\beta(\nu)$ odredjuje iz uslova

$$\sum_{m=1}^{\nu} \frac{1}{m\psi_3^{\theta}(\frac{1}{m})} = \frac{\beta(\nu)}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Iz posljednje jednakosti na osnovu uslova b) slijedi

$$\Xi(\nu) \leqslant C_4 \frac{\psi_3^{p'}(\frac{1}{\nu})}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Koristeći tek navedenu nejednakost, nejednakost (2.2.6) i pretpostavku teoreme, slijedi

$$E_1^{\theta}(\phi_y)_p \leqslant C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} |A_\nu(y)|^{\theta} \frac{\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})}{\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} =$$

$$= C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} |A_\nu(y)|^{\theta} \leqslant C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(f)_E < \infty .$$

I tako je dokazano da za bilo koje y ($|y|<\delta$) vrijedi

$$\| \phi_y(x) \|_p \leqslant M .$$

Kako je $p \varepsilon [2,+\infty]$, to znači da se funkcija f(x) može prikazati u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B_{p\theta_1}^{\psi_3}$. Zaista, prema lemi 2.2.12, teoremi Hausdorfa-Janga i teoremi 2.2.4, vrijedi

$$\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_p \}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_7 \{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left[|\alpha_\nu|^{p'} \beta(\nu) \right]^{\frac{\theta}{p'}} \}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left[\sum_{|k|\geqslant\nu} |\alpha_k|^{p'} \right]^{\frac{\theta}{p'}} \}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_8 \{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} \left[|\alpha_\nu|^{p'} \beta(\nu) \right]^{\frac{\theta}{p'}} \}^{\frac{1}{\theta}} ,$$

gdje se $\beta(\nu)$ odredjuje iz uslova

$$\sum_{m=1}^{\nu} \frac{1}{m\psi_3^{\theta}(\frac{1}{m})} = \frac{\beta(\nu)}{\nu\psi_3^{\theta}(\frac{1}{\nu})} .$$

Iz posljednje jednakosti i uslova b) slijedi

$$\beta(\nu) \leqslant C_9 \frac{\psi_3^{p'}(\frac{1}{\nu})}{\psi^{p'}(\frac{1}{\nu})} .$$

Iz te nejednakosti, nejednakosti (2.2.7) i uslova teoreme slijedi da je

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_p\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_{10}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\alpha_\nu|^{\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta}(f)_E\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty .$$

I tako je dokazano da vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_3^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})} E_\nu^{\theta_1}(\phi)_p < \infty .$$

Iz te nejednakosti, na osnovu leme 2.2.11, utvrdjujemo da je

$$\phi(x) \varepsilon Б^{\delta} B_{p\theta_1}^{\psi_3} ,$$

za bilo koje $\theta_1 \varepsilon [\theta, +\infty)$, tj.

$$f(x) \varepsilon Б^{\delta} B_{p\theta_1}^{\psi_3} .$$

Teorema je dokazana.

TEOREMA 4.4.3 Neka je $f(x)\varepsilon E$, $(E\varepsilon A)$, $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$, $\delta>o$, $2\leqslant\theta<\infty$. Ako: 1) vrijedi nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(f)_{E}<\infty,$$

2) postoji funkcija $\psi_4(t)$ takva da je

a) $\psi_4(t)\varepsilon MH(\sigma_4)$,

b) $$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu\psi_4^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\leqslant C_1\frac{\psi_4^{2-\theta}(\frac{1}{n})}{n\psi^{2}(\frac{1}{n})},$$

gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od n (n=1,2,3,...), tada je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}B_{F\theta_1}^{\psi_4}$$

za bilo koje F takvo da je $L_2\subset F$ i bilo koje $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$.

DOKAZ. Na osnovu leme 2.2.7, utvrdjujemo da se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojas $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo postojanje granične funkcije. Već je dokazano da vrijedi nejednakost

$$\|\phi_y(x)\|_2\leqslant C_2[E_1(\phi_y)_2+\|f\|_E].$$

Dokazaćemo ograničenost za $E_1(\phi_y)_2$. Koristeći Parsevalovu jednakost, dobijamo da je

$$E_1^\theta(\phi_y)_2 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(\phi_y)_2 \leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\|\phi_y(x)-S_{n-1}(x,\phi_y)\|_2^\theta}{\nu\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})} =$$

$$= C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})} \Big[\sum_{|n|\geq\nu} |A_\nu(y)|^2\Big]^{\frac{\theta}{2}},$$

Prema teoremi 2.2.4, vrijedi

$$E_1^\theta(\phi_y)_2 \leq C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})} \Big[|A_\nu(y)|^2 \beta(\nu)\Big]^{\frac{\theta}{2}},$$

gdje se $\beta(\nu)$ odredjuje iz uslova

$$\sum_{m=1}^{\nu} \frac{1}{m\psi_4^\theta(\frac{1}{m})} = \frac{\beta(\nu)}{\nu\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})}.$$

Iz te jednakosti i uslova za funkciju $\psi_4(t)$ vrijedi

$$[\beta(\nu)]^{\frac{\theta}{2}} \leq C_5 \frac{\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})}{\psi^\theta(\frac{1}{\nu})}.$$

Na osnovu nejednakosti (2.2.6), tek dokazane nejednakosti i pretpostavke teoreme, slijedi

$$E_1^\theta(\phi_y)_2 \leq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(f)_E \frac{\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})}{\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} =$$

$$= C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi_4^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(f)_E < \infty.$$

I tako je dokazano, da za bilo koje y ($|y|<\delta$) vrijedi

$$\|\phi_y(x)\|_2 \leq M.$$

A to znači da se funkcija f(x) može predstaviti u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B^{\psi_4}_{F\theta_1}$. Zaista, prema lemi 2.2.12, ulaganju $L_2 \subset F$, teoremi Parsevala, teoremi 2.2.4, nejednakosti 2.2.7 i pretpostavci tereme, vrijedi

$$\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_4^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta_1}(\phi)_F\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_7\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_4^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(\phi)_F\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_8\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_4^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(\phi)_2\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_8\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_4^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\Big[\sum_{|n|\geqslant\nu}|\alpha_n|^2\Big]^{\frac{\theta}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_9\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\alpha_\nu|^\theta}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_{10}\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(f)_E\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

I tako je dokazana nejednakost

$$\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_4^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta_1}(\phi)_F\}^{\frac{1}{\theta_1}} < \infty.$$

Iz te nejednakosti i leme 2.2.11, utvrdjujemo da je

$$\phi(x)\in B^{\psi_4}_{F\theta_1},$$

za bilo koje $\theta_1 \in [\theta,+\infty)$, tj.

$$f(x)\in Б^{\delta}B^{\psi_4}_{E\theta_1}.$$

Teorema je u potpunosti dokazana.

TEOREMA 4.4.4 Neka je $f(x)\varepsilon E$, $E\varepsilon A$, $\psi(t)\varepsilon MH(\sigma)$, $\delta>o$, $o<\theta\leqslant 2$. Ako: 1) vrijedi nejednakost

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_{\nu}^{\theta}(f)_{E}\right\}^{\frac{1}{\theta}}<\infty,$$

2) postoji funkcija $\psi_5(t)$ takva da je

a) $\psi_5(t)\varepsilon MH(\sigma_5)$,

b) $$\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{\nu\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}\leqslant\frac{C_1}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})},$$

gdje pozitivna konstanta C_1 ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$, tada je

$$f(x)\varepsilon Б^{\delta}B_{F\Theta_1}^{\psi_5},$$

za bilo koje F takvo da je $L_2\subset F$ i za bilo koje $\theta_1\varepsilon[\theta,+\infty)$.

DOKAZ. Na osnovu leme 2.2.7, utvrdjujemo da se funkcija f(x) može analitički produžiti u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty,|y|<\delta\}$.

Dokazaćemo postojanje granične funkcije $\phi(x)$. Već je dokazano da vrijedi

$$\|\phi_y(x)\|_2\leqslant C_2[E_1(\phi_y)_2+\|f\|_E].$$

Ostaje da dokažemo ograničenost za $E_1(\phi_y)_p$.

Prema Parsevalovoj jednakosti, teoremi 2.2.6, uslovu b) za funkciju $\psi_5(t)$, nejednakosti (2.2.6) i uslovu teoreme, vrijedi

$$E_1^\theta(\phi_y)_2 \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi_5^\theta(\frac{1}{n})} E_n^\theta(\phi_y)_2 \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\phi_y(x)-S_{n-1}(x,\phi_y)\|_2^\theta}{n\psi_5^\theta(\frac{1}{n})} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi_5^\theta(\frac{1}{n})} \Big[\sum_{|\nu|=n}^{\infty} |A_\nu(y)|^2\Big]^{\frac{\theta}{2}} \leqslant C_4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi_5^\theta(\frac{1}{n})} \sum_{\nu=n}^{\infty} |A_\nu(y)|^\theta =$$

$$= C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu(y)|^\theta \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{n\psi_5^\theta(\frac{1}{n})} \leqslant C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu(y)|^\theta \frac{1}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^\theta(\frac{1}{\nu})} E_\nu^\theta(f)_F < \infty \ .$$

I tako je dokazano da za bilo koje y ($|y|<\delta$) vrijedi nejednakost

$$\|\phi_y(x)\|_2 < M \ .$$

A to znači da se funkcija $f(x)$ može predstaviti u obliku (1.2.1).

Dokazaćemo da granična funkcija $\phi(x)$ pripada klasi $B_{F\theta_1}^{\psi_5}$. Zaista, prema lemi 2.2.12, Parsevalovoj jednakosti, teoremi 2.2.6, uslovu b) za funkciju $\psi_5(t)$, nejednakosti (2.2.7) i pretpostavci teoreme, vrijedi

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\psi_5^{\theta_1}(\frac{1}{n})}E_n^{\theta_1}(\phi)_F\}^{\frac{1}{\theta_1}} \leqslant C_7\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}E_n^{\theta}(\phi)_F\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$< C_7\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\phi(x)-S_{n-1}(x,\phi)\|_F^{\theta}}{n\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_8\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\phi(x)-S_{n-1}(x,\phi)\|_2^{\theta}}{n\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_8\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}[\sum_{|\nu|=n}^{\infty}|a_\nu|^2]^{\frac{\theta}{2}}\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_8\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}\sum_{|\nu|=n}^{\infty}|a_\nu|^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_8\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^{\theta}\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{n\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}\}^{\frac{1}{\theta}} < C_8\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\psi_5^{\theta}(\frac{1}{n})}\sum_{|\nu|=n}^{\infty}|a_\nu|^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu\psi^{\theta}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta}(f)_F\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

I tako je dokazana tačnost nejednakosti

$$\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_5^{\theta_1}(\frac{1}{\nu})}E_\nu^{\theta_1}(\phi)_F\}^{\frac{1}{\theta_1}} < \infty.$$

Iz te nejednakosti, na osnovu leme 2.2.11, zaključujemo da je

$$\phi(x)\,\varepsilon B_{F\theta_1}^{\psi_5} ,$$

za bilo koje $\theta_1 \varepsilon [\theta,+\infty)$, tj.

$$f(x)\,\varepsilon Б^{\delta}B_{F\theta_1}^{\psi_5} .$$

Teorema je u potpunosti dokazana.

Z A K L J U Č A K

Izloženi rezultati pojačavaju, preciziraju, dopunjavaju i poopštavaju sve poznate rezultate o aproksimaciji funkcija analitičkih u pojasu $\Delta=\{-\infty<x<+\infty, |y|<\delta\}$.

Dokazaćemo to navodeći posljedice teorema dokazanih u radu.

1. Uzimajući u teoremi 3.1.1 $E = F = L_p$, $\psi(\delta) = \delta^r$, dobiće se teorema 1 iz rada [1], teorema 1 iz rada [5] i teorema 1 iz rada [6].

2. Uzimajući u teoremi 3.1.1 $E = L_p$, $F = L_{\bar{q}}$, $\psi(\delta) = \delta^r$ dobiće se teorema 1 iz rada [7] .

3. Stavljajući u teoremu 3.1.1 $E = L_p$, $F = L_{\bar{q}}$ dobiće se teorema 1 iz rada [8] .

4. Stavljajući u teoremi 3.2.1 $E = L_p$, $\psi(\delta) = \delta^r$ dobiće se poboljšanje teoreme 2 iz rada [1] , poboljšanje teoreme 2 iz rada [5] , teorema 2 iz rada [6] i teorema 2 iz rada [7].

5. Stavljajući u teoremi 3.2.1 $E = L_p$, $F = L_q$, $\psi_1(\delta) = \psi(\delta)\delta^{1-\frac{1}{p}}$, dobiće se teorema 2 iz rada [8] .

6. Stavljajući u teoremi 3.2.1 $E = L_p$, $F = L_q$, $\psi(\delta) = \delta^{1-\frac{1}{p}}(\ln\frac{2}{\delta})^{-\xi}$, $\xi > \frac{1}{p}$ dobiće se tvrdjenje:

ako je

$$E_n(f)_q \leqslant \frac{C}{e^{n\delta}n^{1-\frac{1}{p}}[\ln(n+1)]^{\xi}},$$

gdje je $\xi > \frac{1}{p}$, $p \in [2, +\infty)$, $q \in [1, +\infty]$,

i pozitivna konstanta C ne zavisi od n $(n=1,2,3,\ldots)$, tada je

$$f(x) \in Б^{\delta} H_p^{\psi_2},$$

gdje je

$$\psi_2(\delta) = (\ln\frac{2}{\delta})^{-\xi+\frac{1}{p}}.$$

To tvrdjenje je novo, ono ne može biti dobijeno iz rezultata prethodnih radova.

7. Uzimajući u teoremi 3.2.1 $E = L_p$, $F = L_q$, $\psi(\delta) = \delta^{1-\frac{1}{p}}(\ln\frac{2}{\delta})^{-1/p}(\ln\ln\frac{10}{\delta})^{-\beta}$ dobiće se tvrdjenje:

ako je

$$E_n(f)_q \leqslant \frac{C}{e^{n\delta}n^{1-\frac{1}{p}}[\ln(n+1)]^{\frac{1}{p}}[\ln\ln(n+10)]^{\beta}},$$

gdje je $\beta > \frac{1}{p}$, $p \in [2, +\infty)$, $q \in [1, +\infty]$

i pozitivna konstanta C ne zavisi od n (n=1,2,3,...), tada je

$$f(x)\in\mathfrak{G}\,{}^{\delta}H_p^{\psi_3},$$

gdje je

$$\psi_3(\delta) = (\ln\ln\frac{10}{\delta})^{-\beta+\frac{1}{p}}.$$

Ovo tvrdjenje je novo, ono ne može biti dobijeno iz rezultata prethodnih radova.

8. Stavljajući u teoremi 3.2.1 $E = L_p$, $F = L_q$, $\psi_1(\delta) \neq \psi(\delta)\delta^{1-\frac{1}{p}}$ dobiće se tvrdjenje koje poopštava posljedice 6 i 7. I ovo tvrdjenje je novo, ono nije posljedica rezultata prethodnih radova i zato je ono njihovo pojačanje.

9. Stavljajući u teoremi 3.3.1 $E = L_p$, $F = L_q$, dobiće se poboljšanje teoreme 3 iz rada [8].

10. Stavljajući u teoremi 3.3.2 $E = L_p$, $F = C$, $\psi(\delta) = \delta^r$, $r > 1-\frac{1}{p}$ dobiće se teorema 3 iz rada [7].

11. Stavljajući u teoremi 3.3.2 $E = L_p$, $F = L_q$, $\psi(\delta) = \psi_1(\delta)\delta^{1-\frac{1}{p}}$ dobiće se teorema 4 iz rada [8].

12. Stavljajući u teoreme 3.4.1 i 3.4.2 $E = L_p$, $F = L_q$ dobiće se tvrdjenja koja dopunjavaju rezultate iz radova

[1], [5], [6], [7] i [8].

13. Stavljajući u teoremi 4.1.1 $E = L_p$, $F = L_q$, $\psi(\delta) = \delta^r$ dobiće se teorema 5 iz rada [7].

14. Stavljajući u teoremi 4.1.1 $E = L_p$, $F = L_q$ dobiće se teorema 2 iz rada [9].

15. Stavljajući u teoremi 4.1.2 $E = L_p$, $F = L_q$ dobiće se nova teorema, koja precizira teoremu 5 iz rada [7] i teoremu 2 iz rada [9].

16. Stavljajući u teoremu 4.2.1 $F = L_q$, $\psi(\delta) = \delta^r$, $r > 1 - \frac{1}{p}$ dobiće se teorema 6 iz rada [7].

17. Stavljajući u teoremu 4.2.1 $F = L_q$, $\theta = p$ dobiće se teorema 3 iz rada [9].

18. Stavljajući u teoremi 4.2.1 $F = L_q$, $E = L_p$, $\theta \neq p$, dobićemo novu tvrdnju koja proširuje tvrdjenje teoreme 3 iz rada [9] na slučaj $\theta \neq p$, koji nije razmatran u radu [9].

19. Stavljajući u teoremi 4.3.1 $E = L_p$, $F = L_q$, dobiće se poboljšanje tvrdjenja teoreme 4 iz rada [9].

20. Stavljajući u teoremi 4.3.2 $E = L_p$, $F = L_q$, dobiće se teorema 5 iz rada [9] .

21. Stavljajući u teoreme 4.4.1, 4.4.2 $E = L_p$, $F = L_q$, dobiće se tvrdjenja koja dopunjavaju tvrdjenja iz radova [7] i [9] .

Na taj način, u ovom radu su svi prethodni rezultati za prostore L_p i L_q, o aproksimaciji funkcija analitičkih u pojasu pojačani, precizirani i dopunjeni.

Na kraju, treba primijetiti, da su u disertaciji svi rezultati za prostore L_p i L_q i novi i stari poopšteni na maksimalne simetrične prostore, što do sada u takvim prostorima uopšte nije radjeno.

I tako, iz izloženog se vidi, da su zaista u ovom radu svi poznati rezultati o aproksimaciji funkcija, analitičkih u pojasu: POJAČANI, PRECIZIRANI, DOPUNJENI I POOPŠTENI.

Литература

I. Никольский С.М., О равномерных дифференциальных свойствах аналитической функции в полосе, Mathematica (Cluj). 2(25), I, I49-I57 (I960).

2. Ахиезер Н.И., Лекции по теории апроксимации, М.Л.,(I947).

3. Бернштейн С.Н., О наилучшем приближении аналитических функций при помощи целых функций конечной степени. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, Т.2, 408(I954).

4. Бернштейн С.Н., Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, Т.2, 349(I954).

5. Walsh I. L. Sewell W. E., On the degree of polynomial aproximation to analytic functions; Problem B. Transactions of the American Mathematical Societu, 49, 3, 229 - 257 (1941).

6. Никольский С.М. и Потапов М.К., О граничных свойствах функций, аналитических в полосе, Mathematica (Cluj), 4(27), I, I23-I30(I962).

7. Потапов М.К., К вопросу о граничных свойствах функций, аналитических в полосе, Mathematica (Cluj), 7 (30), 2, 343 - 356 (1965).

8. Potapov M. K. y Muniz Fernandez J. L., Estruktura carasteristica y carasteristica constructiva de funciones analiticas ena franja, Revista ciencias matematicas, Universidad de la Habana (Cuba), vol. 2 N°2, (1980).

9. Muniz Fernandez J. L., Resumen de la Tesis presentada como aspirante al grado de Candidato a doctor en Ciencias, en al Departamento de Teorija de Funciones de la Universidad de la Habana (1983).

I0. Конюшков А.А., Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье, Матем.сборник, Т.44(86), № I, 53-84(I958).

II. Конюшков А.А., Наилучшие приближения при преобразовании коэффициентов Фурье с неотрицательными коэффициентами, Сибирский матем.журнал Ш.I, 56-78(I962).

I2. Потапов М.К., О наилучшем приближении аналитических функций многих переменных, Ученые записки Ивановского государственного педагогического института, Т.ХУШ(I958).

I3. Лапин С.В., Соотношения между модулями непрерывности функций в различных симметричных пространствах и некоторые теоремы вложения, ДАН СССР, 257, №5, I060-I064(I98I).

I4. Тиман А.Ф., Теория приближения функции действительного переменного. М., Физматгиз.

I5. Leindler L., Uber verschiendene Konvergenzarten trigonometricher Reihen. III (Bedingungen in der Metrik von Lp), Acta Scient. Math., V. 27, N^{o} 3 - 4, 205 - 215 (1966).

I6. Потапов М.К., Конструктивные характеристики и теоремы вложения для некоторых классов функций, Диссертация, Москва (I973).

17. Харди Г.Б., Литтлвуд Д.Е, Полиа Г., Неравенства, Г.И.И. Л., Л-456, Москва (1948).

18. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОИТИ ИКТП СССР (1939).

19. Бари К.Н., Тригонометрические ряды, Москва (1961).

20. Шарович Й.М., К вопросу о приближении функций, аналитических в полосе. Труды Конференции молодых ученых мех-мат.ф-та МГУ (1984).

21. Šarović M.J., Приближение аналитических функций из класса $Б^{\delta}H^{\psi}_{E}$. (Predato u štampu)

22. Šarović M.J. Приближение аналитических функций из класса $Б^{\delta}\bar{L}^{\psi}_{E\theta}$ (Predato u štampu)