PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITET U BEOGRADU

ZORAN KADELBURG

ASIMPTOTIKA SPEKTRALNE FUNKCIJE DIFERENCIJALNIH OPERATORA

- doktorska disertacija -

B E O G R A D

1979.

S A D R Ž A J

U V O D

"Spektralna teorija linearnih operatora ima za svoje izvore, s jedne strane, linearnu algebru, tačnije teoreme o svodjenju kvadratnih formi k zbiru kvadrata, i, s druge strane, zadatke teorije treperenja (treperenje žice, membrane i dr.).

Verovatno je davno primećena analogija medju zadacima linearne algebre i teorije treperenja. Medjutim, tek je D.Hilbert počeo sistematski da koristi tu analogiju u svojim fundamentalnim radovima iz teorije integralnih jednačina. Kao rezultat pojavio se Hilbertov prostor l_2, a zatim i opšti Hilbertov prostor.

Uvodjenje u matematiku prostora l_2 i apstraktnog Hilbertovog prostora dovelo je do intenzivnog razvoja spektralne teorije linearnih samokonjugovanih operatora u Hilbertovom prostoru. Tokom nekoliko godina, naporima niza istaknutih matematičara, ta teorija je dovedena do visokog stepena savršenstva i čak, verovatno, završena.

U početku se činilo da apstraktna spektralna teorija potpuno obuhvata različite posebne zadatke i da daje u principu odgovor na sva pitanja.

Medjutim, postepeno se pokazalo da to uopšte nije tako. Ima mnogo veoma važnih pitanja na koja apstraktna spektralna teorija ili uopšte ne daje odgovor ili daje sasvim nedovoljan odgovor. Naprimer, to se odnosi na pitanje asimptotskog ponašanja svojstvenih vrednosti i svojstvenih funkcija i drugih spektralnih veličina. Pored toga, teorema o spektralnom razlaganju operatora, koja je jedna od osnovnih teorema cele teorije, opisuje to razlaganje u apstraktnim terminima takozvanog razlaganja jedinice. Za konkretne operatore (diferencijalne, diferencne) spektralno razlaganje obično treba opisati pomoću rešenja odgovarajućih jednačina. U pitanjima konkretnog opisivanja razlaganja jedinice opšta spektralna teorija malo pomaže. Verovatno se time može objasniti ta paradoksalna činjenica da je, nekoliko godina posle faktičkog završavanja apstraktne spektralne teorije samokonjugovanih operatora, u raznim zemljama skoro istovremeno počeo intenzivan rad na spektralnoj teoriji samokonjugovanih diferencijalnih operatora. Taj posao produžava se i u sadašnje vreme,..."x)

Posmatrajmo, jednostavnosti radi, linerani diferencijalni operator na konačnom intervalu $[a,b]$, koji je zadat regularnim xx) diferencijalnim izrazom

$$l(y) \equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y$$

i graničnim uslovima

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k^\nu y^{(k-1)}(a) + \beta_k^\nu y^{(k-1)}(b)] = 0 \quad (\nu=1,2,\dots,n).$$

Pretpostavimo takodje da je tako definisani operator samokonjugo-

---

x) Iz predgovora knjige [8]

xx) v. npr. [13]

van[x)]. Kao što je poznato, svojstvenom vrednošću i odgovarajućom svojstvenom funkcijom datog operatora nazivaju se takav broj λ, odnosno funkcija $y(x) \not\equiv 0$ za koje važi:

$$l(y) = \lambda y, \quad U_\nu(y) = 0 \quad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

Svojstvene vrednosti čine spektar datog operatora koji je u ovom slučaju realan i diskretan (v. npr. [19]), tj. svojstvenih vrednosti može biti najviše prebrojivo mnogo (sa jedinom mogućom tačkom nagomilavanja u beskonačnosti) i svaka od njih je konačne višestrukosti (u daljem pretpostavimo da su sve one proste).

Kao što je već rečeno, jedan od osnovnih zadataka spektralne analize jeste ispitivanje mogućnosti spektralnog razlaganja datog operatora, tj. mogućnosti razlaganja proizvoljne funkcije u red po njegovim svojstvenim funkcijama. Neka su λ_n svojstvene vrednosti, a $y_n(x)$ odgovarajuće svojstvene funkcije. Tada se, u našem slučaju, relativno lako dobija (v. npr. [13]) da se, pod odredjenim uslovima, funkcija $f(x)$ može razložiti u ravnomerno konvergentni red:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(x) y_n(x)\,dx}{\alpha_n} y_n(x)$$

i da pri tom važi Parsevalova jednakost:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_a^b f(x) y_n(x)\,dx \right)^2, \tag{0.1}$$

---

x) v. npr. 13

gde su tzv. normirajući koeficijenti α_n definisani pomoću:

$$\alpha_n = \int_a^b y_n^2(x)dx. \tag{0.2}$$

Uvedimo sada monotono rastuću funkciju skoka

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} -\sum\limits_{\lambda\le\lambda_n\le 0} \frac{1}{\alpha_n} & (\lambda\le 0) \\ \sum\limits_{0<\lambda_n<\lambda} \frac{1}{\alpha_n} & (\lambda>0) \end{cases} \tag{0.3}$$

Tada se jednakost (0.1) može zapisati pomoću Stiltjesovog integrala:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)d\rho(\lambda),$$

gde je

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)y(x,\lambda)dx,$$

a $y(x,\lambda)$ je pogodno odabrano rešenje jednačine $l(y)=\lambda y$, takvo da je $y(x,\lambda_n)=y_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$. Funkciju $\rho(\lambda)$ pomoću koje se ostvaruje ovo spektralno razlaganje nazovimo spektralnom funkcijom datog operatora[x)].

Jedan od glavnih instrumenata u proučavanju osnovnih problema spektralne teorije (naročito nesamokonjugovanih) dife-

---

[x)]Napomenimo da se u literaturi termin "spektralna funkcija" koristi da označi različite funkcije (takodje tesno vezane sa spektralnim razlaganjem). Mi ćemo pod spektralnom funkcijom uvek podrazumevati funkciju tipa (0.3).

rencijalnih operatora, kao što su problem spektralnog razlaganja, obrnuti zadatak spektralne analize i dr., jeste ispitivanje asimptotskog ponašanja spektralnih veličina (svojstvenih vrednosti, svojstvenih funkcija, spektralne funkcije i dr.) za velike vrednosti spektralnog parametra. Prve rezultate o asimptotici svojstvenih vrednosti i svojstvenih funkcija diferencijalnih operatora dobili su Dž.D.Birkhof i J.D.Tamarkin u periodu 1908.-1917. godine (v. npr. [16]). Ispitivanju asimptotskog ponašanja raznih tipova spektralnih funkcija (v. fusnotu na str. 4) posvećeni su radovi više poznatih matematičara - pomenimo T.Karlemana, E.Tičmarša, B.M.Levitana, V.A.Marčenka, A.G.Kostjučenka. Rezultate o asimptotici spektralne funkcije $\varrho(\lambda)$ (samo u slučaju diferencijalnog operatora drugog reda) objavili su B.M.Levitan [7] i V.A.Marčenko [12]. U oba slučaja primenjena je, analitički dosta složena, metodika Tauberovih teorema.

S ispitivanjem asimptotike diskretnog spektra tesno je vezan pojam traga operatora. Kako su diferencijalni operatori neograničeni, za njih pojam traga u običnom smislu nije definisan. Medjutim, u nekim slučajevima redovi pomoću kojih se formalno izražava trag dopuštaju regularizaciju. Tako naprimer, u najjednostavnijem slučaju Šturm-Liuvilovog operatora:

$$\left.\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$(h, H \neq \infty;\ q(x) \in C^2[0, \pi])$, za sbojstvene vrednosti važi asimptotska formula (v. npr. [8]):

$$\lambda_n = n^2 + c + O(\frac{1}{n^2}) \qquad (n \to \infty),$$

gde je c konstanta. Na taj način, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c)$$

konvergira. Njegova suma se i naziva (prvim) regularizovanim tragom datog operatora.

Tragovi operatora igraju važnu ulogu u raznim granama analize, naprimer u pitanjima približnog izračunavanja svojstvenih vrednosti i sl. Prvi su regularizovani trag za klasični Šturm-Liuvilov zadatak izračunali I.M.Geljfand i B.M.Levitan [3]. Kasnije su se izračunavanjem tragova bavili još L.A.Dikij, M.G. Gasimov, R.F.Ševčenko, Č.Halberg i V.Kramer i dr. V.B.Lidskij i V.A.Sadovničij su u radu [9] (v. i [15]) dali novi postupak za računanje regularizovanih tragova koji je dovoljno opšti da se može primeniti na svaki zadatak za obične diferencijalne jednačine na konačnom intervalu, a i u nekim singularnim slučajevima. Taj postupak zasniva se na korišćenju tzv. zeta-funkcije operatora i njenih analitičkih svojstava.

V.A.Sadovničij je u radu [14] uočio mogućnost da se regularizovani tragovi operatora iskoriste za ispitivanje asimptotike njegove spektralne funkcije. On je najpre uveo tzv. tragove s težinama i pokazao kako se oni mogu računati. (Pri tom je korišćena modifikacija metoda iz rada [9], tj. na pogodan način je uvodjena zeta-funkcija.) Zatim je na primeru Šturm-Liuvilovog operatora pokazao kako se pomoću tako izračunatih tragova može lako dobiti rezultat o asimptotskom ponašanju spektralne funkcije.

Ova disertacija predstavlja pokušaj da se daljom razradom metoda V.A.Sadovničija ispita asimptotika spektralne funkcije za razne opštije diferencijalne operatore. Pomenimo da je u radu [16] J.D.Tamarkina data sledeća opšta formulacija (regularnog) homogenog graničnog diferencijalnog zadatka koji sadrži parametar ρ :

$$\left.\begin{aligned} L(y) &\equiv y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k y^{(n-k)} = 0, \\ U_i(y) &\equiv \sum_{s=0}^{n} \rho^s U_i^{(s)}(y) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n), \end{aligned}\right\}$$

gde je:

$$p_k = p_k(x,\rho) = \rho^k \sum_{j=0}^{k} \rho^{-j} p_{kj}(x) \quad (k=1,2,\dots,n),$$

$p_{kj}(x)$ su realne ili kompleksne funkcije od $x \in [a,b]$ za koje pretpostavimo da su neprekidne; $U_i^{(s)}(y)$ su linearne forme oblika:

$$U_i^{(s)}(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{m_{ik}^{(s)}} \alpha_{ikj}^{(s)} y^{(k-1)}(t_{ikj}^{(s)}) + \int_a^b \alpha_{ik}^{(s)}(x) y^{(k-1)}(x)dx \right\}$$

$$(i=1,2,\dots,n;\ s=0,1,\dots,n),$$

$m_{ik}^{(s)}$ su prirodni brojevi, $\alpha_{ikj}^{(s)}$ su konstante, $\alpha_{ik}^{(s)}(x)$ su funkcije od x, integrabilne na $[a,b]$, a $t_{ikj}^{(s)}$ su neke tačke segmenta $[a,b]$, za koje pretpostavimo (tako je učinjeno i u [16]) da se poklapaju sa a ili sa b. Možemo konstatovati da je uopštenje (u odnosu na najjednostavniji slučaj Šturm-Liuvilovog operatora) u sledećem:

1^{o} diferencijalni izraz može biti višeg reda;

2^{o} u samom diferencijalnom izrazu može se na složen način pojaviti spektralni parametar;

3^{o} granični uslovi mogu da sadrže spektralni parametar;

4^{o} u graničnim uslovima mogu se pojaviti integrali (sa nepoznatom funkcijom pod znakom integracije).

U ovom radu posmatrana su tri primera graničnih diferencijalnih zadataka, na kojima je pokazano kako treba postupiti u ispitivanju asimptotike spektralne funkcije u slučajevima 1^{o}, 2^{o} i 3^{o}. Svaki od navedenih primera ima i druge specifičnosti.

U drugoj glavi rada posmatra se primer (samokonjugovanog) operatora proizvoljnog (parnog) reda. Osnovni problem predstavlja izvodjenje formule za normirajuće koeficijente α_n koja omogućava da se za izračunavanje regularizovane sume njihovih recipročnih vrednosti primeni metod iz rada [14] (odgovarajuća formula u slučaju Šturm-Liuvilovog operatora je sasvim jednostavna). Primećeno je takodje da asimptotika spektralne funkcije zavisi od načina kako je izabrano normiranje svojstvenih funkcija koje definišu normirajuće koeficijente. Jednostavan rezultat - kakav je u [14] dobijen za Šturm-Liuvilov operator - može se ovde dobiti samo pri pogodnom izboru normiranja.

U glavi III razmatra se operator koji je uveo T.Redže radi primene u kvantnoj teoriji rasejanja. Specifičnost zadatka je da sadrži spektralni parametar u graničnim uslovima. Pored toga, on je nesamokonjugovan, pa a priori nije jasno kako treba definisati njegovu spektralnu funkciju. Medjutim, A.O.Kravickij je u radu [6] dobio formule o razlaganju odredjenih funkcija u red po svojstvenim funkcijama Redžeovog operatora. Te formule i ukazuju kako treba izmeniti relacije (0.2) i (0.3) da bi se definisala funkcija $\rho(\lambda)$.

Četvrta glava sadrži razmatranje takozvane Or-Zomerfeldove jednačine, poznate iz teorije hidrodinamičke stabilnosti. Zadatak je takodje nesamokonjugovan i spektralni parametar se na složen način pojavljuje u koeficijentima diferencijalnog izraza. Dosad nisu poznate formule za razlaganje u red po njegovim svojstvenim funkcijama, što onemogućava postupak uvodjenja spektralne funkcije kao u glavi III. Zato su za definisanje spektralne funkcije iskorišćene formule za tzv. "beskonačni deo Grinove funkcije" iz Tamarkinovog rada [16]. Još jedna specifičnost ovog zadatka je da tzv. indikatorski dijagram njegove karakteristične funkcije (v. definicije u glavi I) sadrži tri tačke na jednoj duži. S obzirom da takav slučaj nije bio obuhvaćen razmatranjima u radu [14], to je metod iz toga rada morao u ovom slučaju da najpre bude modifikovan da bi se mogle dobiti tražene formule.

Prva glava rada sadrži uvodni materijal, tj. poznate rezultate koji se u daljem koriste, a koji uglavnom nisu sadržani u poznatim monografijama iz teorije operatora. Rezultati su većinom dati bez dokaza. Izuzetak čine rezultati rada [14], jer su oni fundamentalni za dalja razmatranja, a i s obzirom na pomenute modifikacije koje se čine u četvrtoj glavi.

Osnovni pojmovi teorije operatora nisu posebno definisani u ovom radu, niti su navodjeni poznati stavovi koji se (implicitno) koriste. Oni se, kada je u pitanju opšta spektralna teorija, mogu naći npr. u knjigama [1], [15], [19] i [25], a kada je u pitanju spektralna teorija linearnih diferencijalnih opratora, u knjigama [8], [13] i [19].

Originalni rezultati koje sadrži ova disertacija predati su za štampu u okviru radova [4] i [5].

Želeo bih na ovom mestu da se zahvalim profesoru Moskovskog univerziteta, doktoru V.A.Sadovničiju, za postavku zadataka i interes koji je pokazao za moj rad za vreme dok sam boravio u Moskvi. Takodje bih želeo da se zahvalim dr Branislavu Mirkoviću, čije su korisne sugestije učinile da ova disertacija bude jasnije i bolje napisana.

G L A V A I

REGULARIZOVANE SUME KORENA JEDNE KLASE CELIH FUNKCIJA

§1. Funkcije klase K. Veza sa diferencijalnim operatorima

Posmatrajmo celu funkciju f(z) koja za svako celo $h \geqslant 0$ dopušta predstavljanje oblika:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,h}(z), \tag{1.0}$$

gde su α_k kompleksne konstante, a

$$P_{k,h}(z) = z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{h} \frac{\beta_\nu^{(k)}}{z^\nu} + o(z^{n_k - h}) \qquad (z \to \infty).$$

U gornjoj formuli je n_k neki ceo broj, a $\beta_0^{(k)} \neq 0$. Pretpostavimo da se z-ravan može pokriti konačnim brojem otvorenih sektora koji sadrže koordinatni početak i u svakom od kojih su funkcije $P_{k,h}(z)$ analitičke za $|z| > R$ (R - dovoljno veliki broj).

U daljem ćemo ispuštati indeks h u $P_{k,h}(z)$ i pisaćemo:

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_\nu^{(k)}}{z^\nu} \qquad (z \to \infty). \tag{1.1}$$

Takodje ćemo pretpostavljati da razlaganje (1.1) dopušta diferenciranje član po član.

Funkcije sa gore opisanim svojstvima nazovimo <u>funkcijama klase K</u>. Brojeve n_k, α_k i $\beta_\nu^{(k)}$ nazovimo <u>parametrima asimp-</u>

totike funkcije $f(z)$.

Funkcije klase K pojavljuju se pri ispitivanju graničnih zadataka za diferencijalne jednačine koje sadrže parametar. Posmatrajmo, naprimer, na odsečku $0 \leq x \leq 1$ granični zadatak za diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x,z)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x,z)y = 0,$$

čiji koeficijenti imaju oblik:

$$a_q(x,z) = z^q \sum_{j=0}^{\ell} z^{-j} a_{qj}(x) \qquad (q=1,2,\ldots,n).$$

Neka granični uslovi takodje polinomijalno zavise od z:

$$U_i(y) \equiv \sum_{\vartheta=0}^{m_i} z^{\vartheta} U_i^{\vartheta}(y) = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

gde su $U_i^{\vartheta}(y)$ linearne forme u odnosu na rešenja $y(x)$:

$$U_i^{\vartheta}(y) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_{ik}^{\vartheta} y^{(k-1)}(0) + b_{ik}^{\vartheta} y^{(k-1)}(1) \right\} + \int_0^1 \alpha_i^{\vartheta}(x) y(x) dx.$$

Neka su koeficijenti jednačine i funkcije $\alpha_i^{\vartheta}(x)$ beskonačno diferencijabilni po x. Ako pored toga pretpostavimo da je $a_{qo}(x) = a_{qo} r(x)$ $(q=1,2,\ldots,n)$, gde je $r(x) > 0$ i polinom

$$\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{1o}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{no}$$

nema višestrukih korena, tada jednačina za odredjivanje svojstvenih vrednosti datog zadatka ima oblik

$$f(z) = 0,$$

gde je $f(z)$ funkcija klase K. Pri tom se parametri asimptotike funkcije $f(z)$ mogu eksplicitno izraziti pomoću koeficijenata jednačine i koeficijenata graničnih uslova.

Postupak kojim se navedene činjenice dokazuju izveden je u radovima J.D.Tamarkina (v. npr. [16]). Opišimo ukratko taj postupak u specijalnom slučaju graničnog zadatka oblika:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y + z^n y = 0, \\ &U_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} \left[a_{ik}y^{(k-1)}(0) + b_{ik}y^{(k-1)}(1)\right] = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n), \end{aligned}\right\}$$

gde za funkcije $a_i(x)$ pretpostavimo da su beskonačno diferencijabilne.

Neka su y_1, y_2, ..., y_n linearno nezavisna rešenja date jednačine. Karakteristična determinanta datog zadatka (čije nule su tražene svojstvene vrednosti), kao što je poznato, ima oblik:

$$\Delta(z) = \det \left\| U_i(y_j) \right\|_{i,j=1}^{n}.$$

Kako se pri tom rešenja y_1, y_2, ... , y_n mogu izabrati tako da su, za svako fiksirano $x \in [0,1]$, cele analitičke funkcije parametra z, to isto svojstvo ima i funkcija $\Delta(z)$.

S druge strane, može se dokazati (v. str. 52-65 u [13]) da se kompleksna z-ravan može razbiti na 2n sektora, takvih da u svakom od njih data diferencijalna jednačina ima n linearno nezavisnih rešenja y_1, y_2, ... , y_n, regularnih u odnosu na z za dovoljno veliko $|z|$, i takvih da za svako celo $N \geq 0$ važe asimptotske formule:

$$y_k = e^{z\omega_k x}\left[\sum_{\nu=0}^{N} \frac{u_{\nu,k}(x)}{z^{\nu}} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right)\right] \quad (z \to \infty) \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

gde su ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$ različite vrednosti n-tog korena iz -1; navedene formule mogu se neograničeno puta diferencirati član po član.

Ako se navedeni izrazi zamene u granične forme $U_i(y)$, a zatim ove u determinantu $\Delta(z)$, posle skraćivanja nebitnih faktora i razvijanja determinante, jednačina za odredjivanje svojstvenih vrenosti zaista dobija oblik $f(z)=0$, sa funkcijom $f(z)$ koja je klase K.

Ako su koeficijenti date jednačine manje glatke funkcije - npr. samo h puta diferencijabilne po x, funkcija $f(z)$ kad $z \to \infty$ će samo dopuštati predstavljanje (1.0) sa:

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{h+n_k} \frac{\beta_\nu^{(k)}}{z^\nu} \qquad (h+n_k \geqslant 0).$$

To sledi iz činjenice da u tom slučaju u asimptotskim formulama za rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ broj N više ne može biti proizvoljan, već zavisi od h. Sva dalja razmatranja u ovom radu mogu se sprovesti i pri takvim pretpostavkama o glatkosti koeficijenata (za pogodno izabrano h). Medjutim, radi jednostavnosti pisanja, u daljem ćemo obično pretpostavljati beskonačnu diferencijabilnost koeficijenata, tj. razmatraćemo funkcije $f(z)$ klase K, i samo kod pojedinih krajnjih rezultata napomenućemo kolika je glatkost koeficijenata potrebna da bi se taj rezultat dobio.

§2. Nule funkcija klase K

Na osnovu rečenog u prethodnom paragrafu, jasno je da je za ispitivanje diskretnog spektra graničnog diferencijalnog zadatka osnovno znati odrediti raspored, ili bar asimptotsko ponašanje, nula date cele funkcije klase K.

Neka je f(z) takva funkcija i n_k, α_k, $\beta_\nu^{(k)}$ (ν=1,2,...; k=0,1,...,N-1) njeni parametri asimptotike. Posmatrajmo u kompleksnoj ravni tačke

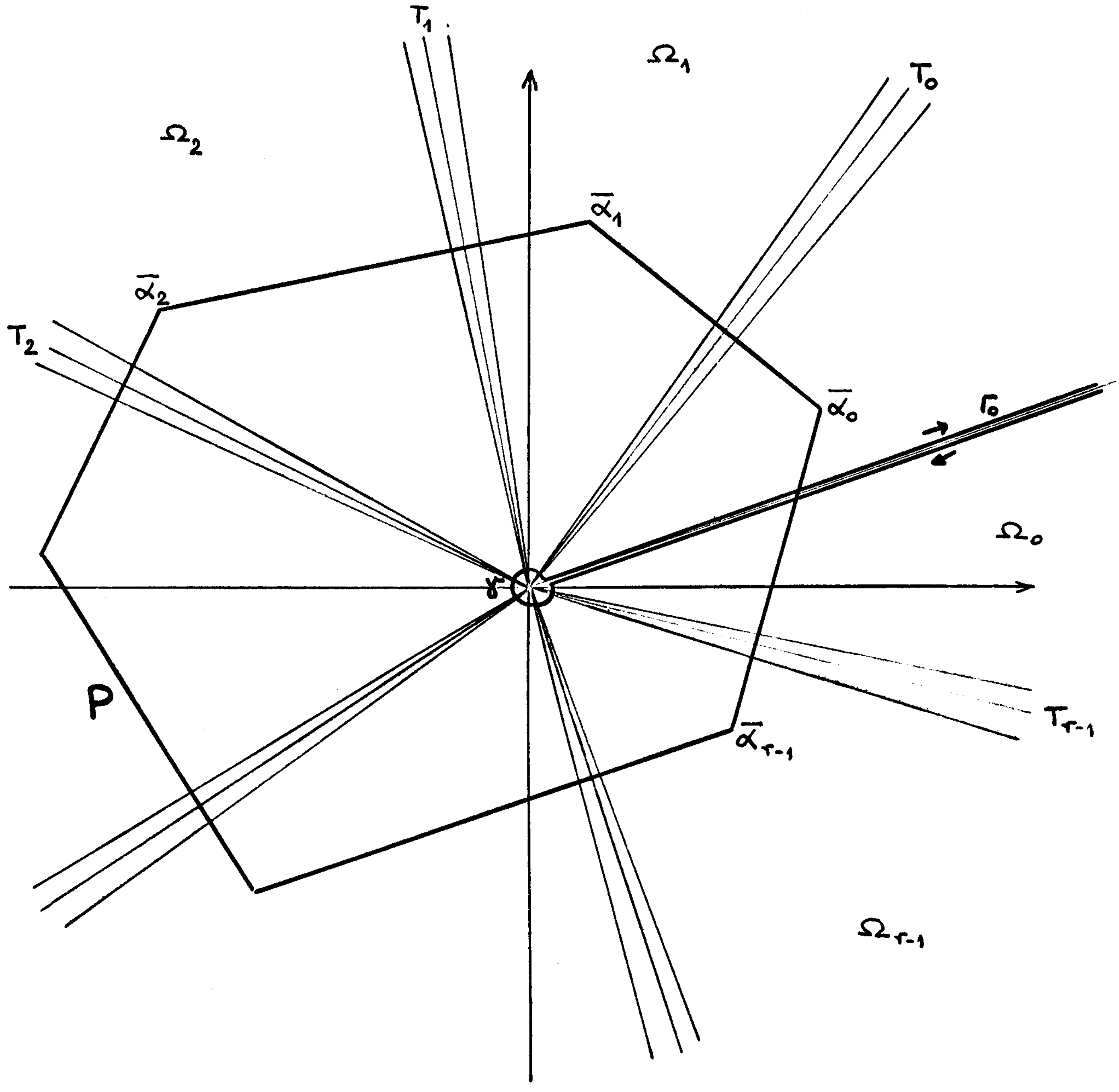
$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{N-1}$$

i njihov konveksni omotač označimo sa P. U opštem slučaju P je r-tougao ($r \leq N$) - nazovimo ga <u>indikatorskim dijagramom</u> funkcije f(z). Pravce spoljašnjih normala na stranice poligona P nazovimo <u>kritičnim</u>. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da su temena poligona P tačke

$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{r-1}.$$

Udaljimo iz z-ravni r sektora T_0, T_1, ... , T_{r-1} proizvoljno malog otvora, s bisektrisama paralelnim kritičnim pravcima i s temenima u koordinatnom početku. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da koordinatni početak leži unutar dijagrama P. Tada se oblast Ω koja preostaje raspada na r otvorenih sektora Ω_s (s=0,1,...,r-1) (v. sliku 1.). Lako se dokazuje (v. npr. [8]) da nule funkcije f(z) sa velikim modulima leže u sektorima T_s:

<u>LEMA 1.1</u> Za dovoljno veliko R_1, u preseku oblasti


T_1
Ω_1
T_0
Ω_2
$\bar{\alpha}_1$
$\bar{\alpha}_2$
T_2
$\bar{\alpha}_0$
Γ_0
Ω_0
γ
P
T_{r-1}
$\bar{\alpha}_{r-1}$
Ω_{r-1}

slika 1.

$|z| > R_1$ i Ω nema nula funkcije f(z).

Dokaz Primetimo da je $\mathrm{Re}\,\alpha z = (\bar{\alpha}, z)$ (desno stoji skalarni proizvod vektora). Neka, odredjenosti radi, z pripada oblasti Ω_0. Tada je geometrijski jasno da za $z \notin P$ i za neko $\delta > 0$ važi nejednakost

$$\mathrm{Re}\ \alpha_0 z - \mathrm{Re}\ \alpha_k z > \delta |z| \quad (k \neq 0).$$

Odatle se neposredno dobija:

$$f(z) = cz^{n_0} e^{\alpha_0 z}(1 + o(1)) \quad (z \to \infty).$$

Slične ocene važe i za druge sektore Ω_s. ▨

Ispitajmo sada asimptotsko ponašanje korena funkcije f(z). Pretpostavimo da na granici dijagrama P leže samo brojevi $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{r-1}$, a svih ostalih N-r eksponenata se nalaze unutar P. Tada se Hornovim metodom iteracije (v. [20]) može dokazati da za korene $z_{n,s}$ važi asimptotska formula:

$$z_{n,s} \sim a_s n \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^k} \right\} \quad (n \to \infty), \tag{1.2}$$

gde je:

$$a_s = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}, \quad R_k^{(s)}(\ln n) = \sum_{q=0}^{k} r_{q,s}^k \ln^q n, \quad r_{k,s}^k = 0 \text{ za } k > 1;$$

s=0,1,...,r-1 je indeks sektora T_s u kome se nalaze koreni; $\bar{\alpha}_s$ i $\bar{\alpha}_{s+1}$ su temena odgovarajuće stranice indikatorskog dijagrama P, pri čemu za s=r-1 pod α_r podrazumevamo α_0.

Svi koeficijenti u formuli (1.2) mogu se izraziti pomoću parametara asimptotike funkcije f(z). Za prve koeficijente

———

se dobija:

$$r^{1}_{1,s} = \frac{n_s - n_{s+1}}{2\pi i}\ ,\quad r^{1}_{o,s} = \frac{1}{2\pi i}\left[(n_s - n_{s+1})\ln a_s + \ln\left(-\frac{\beta_o^{(s)}}{\beta_o^{(s+1)}}\right)\right]$$

$$(s=o,1,\dots,r-1),$$

pri čemu se može uzeti proizvoljna vrednost logaritma. Koeficijenti $r^{k}_{q,s}$ sa $k > 1$ se neposredno prilično teško računaju. Za njih su u radu [1o] izvedene sledeće rekurentne formule:

LEMA 1.2 Za koeficijente razlaganja (1.2) važi formula (radi jednostavnosti ispušten je indeks s):

$$r^{k+1}_{q} = -\frac{1}{q!}\sum_{m=2}^{k+1}\sum_{\tau=0}^{m-1}\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m} k_i = k+1\\ k_i \geq 1}}\ \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m} q_i - \tau = q\\ 0 \leq q_i \leq k_i}} \beta^{\tau}_{m,k} r^{k_1}_{q_1} r^{k_2}_{q_2}\cdots r^{k_m}_{q_m}(q+\tau)!$$

za $q \neq 0$; za $q=0$ desnoj strani treba dodati

$$\frac{a^{-k}}{k}\cdot\frac{\tilde{\omega}^{(s+1)}_{k+1} - \tilde{\omega}^{(s)}_{k+1}}{2\pi i}\ ,$$

gde su $\tilde{\omega}^{(s)}_{k+1}$ i $\tilde{\omega}^{(s+1)}_{k+1}$ koeficijenti u asimptotskom razlaganju:

$$\alpha_s + \frac{P_s'(z)}{P_s(z)} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{\omega}^{(s)}_{k}}{z^{k}} \qquad (z \to \infty).$$

Koeficijenti $\beta^{\tau}_{m,k}$ definisani su pomoću identiteta:

$$\frac{1}{m!}(\sigma+1)(\sigma+2)\dots(\sigma+m-1)(-1)^{m-1} \equiv \sum_{\tau=0}^{m-1}\beta^{\tau}_{m,k}(\sigma+k)^{\tau}.$$

Iz ove leme se lako izvode sledeće posledice:

POSLEDICA 1.1 $r^{k+1}_{k+1} = 0$ za $k \geq 1$.

POSLEDICA 1.2 $r^{k+1}_{k} = \frac{1}{k}(-1)^{k+1}(r^{1}_{1})^{k+1}$ za $k \geq 1$.

POSLEDICA 1.3 Ako je $r_1^1=0$ (tj. $n_{s+1}=n_s$), tada je

$$r_q^{k+1} = 0 \text{ za } k \geq 1 \text{ i } q \neq 0$$

i

$$r_o^{k+1} = -\sum_{m=2}^{k} \sum_{\sum_{i=1}^{m} k_i = k+1} \frac{1}{k}\binom{k}{m} r_o^{k_1} r_o^{k_2} \dots r_o^{k_m} + \frac{a^{-k}}{k} \cdot \frac{\tilde{\omega}_{k+1}^{(s+1)} - \tilde{\omega}_{k+1}^{(s)}}{2\pi i}$$

$(k=1,2,\dots)$.

U slučaju kada postoje stranice indikatorskog dijagrama P na kojima leži više od dva eksponenta $\bar{\alpha}_i$, za korene funkcije $f(z)$ mogu se dobiti analogne asimptotske formule samo pod pretpostavkom da su pri tom te stranice podeljene odgovarajućim tačkama na samerljive delove. Medjutim, i tada se može desiti da odgovarajuća asimptotska razlaganja sadrže i razlomljene stepene n. Jedan slučaj kada do toga ipak ne dolazi razmatran je u radu [1o]:

LEMA 1.3 Posmatrajmo jednačinu $e^{cz} = Q(z)$, gde je $Q(z)$ za $|z| > R$ analitička funkcija u sektoru sa bisektrisom paralelnom vektoru $a = \frac{2\pi i}{c}$ i neka u toj oblasti važi:

$$Q(z) \sim z^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{z^\nu} \quad (z \to \infty), \quad \gamma_0 \neq 0.$$

Tada za korene date jednačine važi tvrdjenje leme 1.2, a za m=0 i posledice 1.3

§3. Zeta-funkcija pridružena dvema funkcijama klase K. Regularizovani tragovi s težinama

U narednim glavama, prilikom ispitivanja asimptotike spektralne funkcije datih diferencijalnih operatora, osnovno će biti da se za korene z_n date funkcije f(z) klase K izračunaju regularizovane sume oblika:

$$\sum_{(n)} \left[z_n^m \beta_n - A_m(n, \beta_n) \right] = B_m,$$

gde su β_n neki "težinski" brojevi, $A_m(n, \beta_n)$ potpuno odredjeni brojevi koji obezbedjuju konvergenciju redova, m prirodan broj i B_m brojevi koji se mogu eksplicitno izraziti pomoću funkcije f(z). U ovom paragrafu biće opisan postupak izračunavanja suma takvog tipa.

Posmatrajmo dve funkcije, $f_1(z)$ i $f_2(z)$, klase K:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,j}(z),$$
$$P_{k,j}(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_{\nu,j}^{(k)}}{z^{\nu}} \quad (z \to \infty) \quad (j=1,2). \tag{1.3}$$

One imaju zajednički indikatorski dijagram P. Neka oznake T_s i Ω_s imaju isto značenje kao u prethodnom paragrafu. Izaberimo u jednom od sektora Ω_s (neka je to npr. Ω_o) polupravu l s početkom u koordinatnom početku i konstruišimo konturu Γ_o koja se sastoji od poluprave l (koju prolazimo u oba smera) i kruga γ s centrom u nuli (v. sliku 1.). Iz leme 1.1 sledi da se kontura Γ_o može izabrati tako da sve nule funkcije $f_1(z)$ budu u njenoj spoljašnjosti i to s leve strane.

Definišimo funkciju

$$\Phi(z) = \frac{f_2(z)}{f_1(z)}$$

za one vrednosti z za koje je $f_1(z) \neq 0$. Ona može imati singularitete tipa polova u nulama z_n funkcije $f_1(z)$. Primetimo da je za $z \in \Gamma_o$, $z \to \infty$:

$$\Phi(z) = \frac{e^{\alpha_o z} P_{o,2}(z)}{e^{\alpha_o z} P_{o,1}(z)} + O(e^{-\delta |z|}) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_\nu^{(o)}}{z^\nu}, \qquad (1.4)$$

gde je δ neki pozitivan broj, $\omega_o^{(o)} = \dfrac{\beta_{o,2}^{(o)}}{\beta_{o,1}^{(o)}} \neq 0$, $\beta_{o,j}^{(o)} \neq 0$ (j=1, 2), a i ostali brojevi $\omega_\nu^{(o)}$ se mogu eksplicitno izraziti pomoću parametara asimptotike funkcija $f_j(z)$, pa ćemo ih smatrati poznatim.

Definišimo sada zeta-funkciju $Z_o(\sigma)$ pridruženu funkcijama $f_1(z)$ i $f_2(z)$ pomoću:

$$Z_o(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_o} z^{-\sigma} \Phi(z) dz \qquad (\text{Re}\, \sigma > 1). \qquad (1.5)$$

Funkcija $Z_o(\sigma)$ je očigledno regularna u poluravni $\text{Re}\, \sigma > 1$ (v. (1.4)).

LEMA 1.4 x) Zeta-funkcija $Z_o(\sigma)$ se analitički produžava u σ-ravan kao cela funkcija.

---

x) Leme 1.4 i 1.5 navedene su u radu [14] bez dokaza. Dokazi sličnih stavova dati su npr. u [8].

Dokaz Predstavimo integral (1.5) kao zbir četiri integrala:

$$Z_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} z^{-\sigma}\Phi(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0'} z^{-\sigma}\Big[\Phi(z) - \sum_{\nu=0}^{\nu_0}\frac{\omega_\nu^{(o)}}{z^\nu}\Big]dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} z^{-\sigma}\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\frac{\omega_\nu^{(o)}}{z^\nu}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} z^{-\sigma}\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\frac{\omega_\nu^{(o)}}{z^\nu}dz =$$

$$= I_1(\sigma) + I_2(\sigma) + I_3(\sigma) + I_4(\sigma), \tag{1.6}$$

gde je Γ_0' deo konture Γ_0 bez kruga γ, a ν_0 proizvoljan prirodan broj. Lako je videti da su $I_1(\sigma)$ i $I_4(\sigma)$ cele funkcije od σ; $I_2(\sigma)$ se zbog (1.4) analitički produžava u poluravan $\mathrm{Re}\,\sigma > -\nu_0$. Najzad, $I_3(\sigma)$ je za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$ jednak nuli, pa se analitički produžava nulom u celu ravan. Kako je ν_0 proizvoljno, lema je dokazana.∎

LEMA 1.5 Za m=0,1,2,...

$$Z_0(-m) = \omega_{m+1}^{(o)},$$

gde su $\omega_{m+1}^{(o)}$ koeficijenti u razlaganju (1.4).

Dokaz Posmatrajmo formulu (1.6). Kada je σ celo i nepozitivno, $I_1(\sigma)=0$, jer je pod znakom integrala funkcija od z koja je regularna unutar γ; $I_2(\sigma)=0$ za celo σ, jer se jednoznačna funkcija od z integrali duž poluprave l u dva suprotna smera. Kako je još $I_3(\sigma)\equiv 0$, ostaje da se izračuna $I_4(\sigma)$. To i dokazuje lemu.∎

TEOREMA 1.1 [14] Za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$ red $\sum_{(n)} z_n^{-\sigma}\beta_n$ ravnomerno konvergira i

$$Z_o(\sigma) = \sum_{(n)} z_n^{-\sigma}\beta_n,$$

gde su z_n nule funkcije $f_1(z)$, a brojevi β_n su reziduumi funkcije $\Phi(z)$ u njenim polovima z_n. Kako su za dovoljno veliko n nule funkcije $f_1(z)$ proste, to postoji takav indeks M da je za sve $n > M$:

$$\beta_n = \frac{f_2(z_n)}{f_1'(z_n)} .$$

<u>Dokaz</u> Kao u dokazu leme 1.1, $\mathrm{Re}\,\alpha_s z = (\bar{\alpha}_s, z)$, odakle očigledno sledi da za $z \in T_s$, $z \notin P$ (pri dovoljno malom otvoru sektora T_s) važe nejednakosti:

$$\mathrm{Re}\,\alpha_s z - \mathrm{Re}\,\alpha_k z > \delta|z|, \mathrm{Re}\,\alpha_{s+1} z - \mathrm{Re}\,\alpha_k z > \delta|z| \quad (k=0,1,\dots,s-1,s+2,\dots,r-1), \tag{1.7}$$

za neko $\delta > 0$. Veličinu ugla sektora T_s biraćemo jednakom za sve s.

Uvedimo sledeće oznake ($z \in T_s$, $|z| > R$, R neki pozitivan broj):

$$u_j = u_j(z) = \frac{1}{2}\left[(\alpha_s - \alpha_{s+1})z + \mathrm{Ln}\,P_{s,j}(z) - \mathrm{Ln}\,P_{s+1,j}(z)\right], \tag{1.8}$$

$$v_j = v_j(z) = \frac{1}{2}\left[(\alpha_s + \alpha_{s+1})z + \mathrm{Ln}\,P_{s,j}(z) + \mathrm{Ln}\,P_{s+1,j}(z)\right] \tag{1.8'}$$

($j=1,2$), gde je Ln fiksirana grana logaritma, regularna u T_s za $|z| > R$. Tada se, s obzirom na (1.7), funkcije $f_j(z)$ mogu zapisati na sledeći način ($z \in T_s$, $|z| > R$):

$$f_j(z) = e^{v_j}\left[e^{u_j} + e^{-u_j} + g_j(z)\right], \tag{1.9}$$

gde su funkcije $g_j(z)$ u sektoru T_s, zajedno sa svojim izvodima, funkcije tipa $O(e^{-\delta|z|})$ kad $z \to \infty$, $z \in T_s$, tj. postoji takav broj $\tilde{R}$ da za $z \in T_s$, $|z| > \tilde{R} > R$:

$$|g_j(z)| \leq \text{const } e^{-\delta|z|}, \quad |g_j'(z)| \leq \text{const } e^{-\delta|z|}$$

za neko $\delta > 0$, $j=1,2$.

Pokažimo dalje da postoji oblast $Q_s(R_1)$, koja se sastoji od tačaka $z \in \text{int } T_s$ za koje $|z| > R_1 > R$, i u kojoj je $u_1(z)$ analitička funkcija koja uzajamno jednoznačno preslikava oblast $Q_s(R_1)$ na neku oblast $D_{s,1}$.

Da bismo to dokazali, iskoristimo sledeći poznati kriterijum.

Neka je funkcija $f(z)$ regularna u konveksnoj oblasti D; ako postoji takva realna konstanta φ da se veličina $\text{Re}\,(e^{i\varphi} f'(z))$ ne anulira u oblasti D, tada je $f(z)$ obostrano jednoznačna funkcija u D.

Po definiciji klase K, za $|z| > R_o$ (R_o - neki dovoljno veliki broj) funkcije $P_{k,1}(z)$ dopuštaju razlaganje (1.3) i analitičke su za $|z| > R$ u nekim otvorenim sektorima koji sadrže koordinatni početak. Pretpostavljaćemo da se svaki sektor T_s ceo sadrži u jednom od tih sektora. Možemo uvek smatrati da je $R_o > R$.

Zato za $|z| > R_o > R$, $z \in T_s$ (v. (1.8)):

$$u_1(z) \sim \frac{(\alpha_s - \alpha_{s+1})z}{2} + \frac{(n_s - n_{s+1})\text{Ln } z}{2} + \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{\tilde{P}_{s,1}(z)}{\tilde{P}_{s+1,1}(z)},$$

gde je Ln z ista grana logaritma kao u formulama (1.8) i (1.8'), a

$$\tilde{P}_{s,1}(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_{\nu,1}^{(s)}}{z^{\nu}}, \quad \tilde{P}_{s+1,1}(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_{\nu,1}^{(s+1)}}{z^{\nu}} \qquad (z \to \infty).$$

Zbog toga,

$$\mathrm{Re}\,(e^{i\varphi}u_1'(z)) = \mathrm{Re}\,(e^{i\varphi}\frac{\alpha_s-\alpha_{s+1}}{2} + \mathcal{O}(\tfrac{1}{z})),$$

gde je sa $\mathcal{O}(\frac{1}{z})$ označena neka, regularna u oblasti $|z|>R_o$, $z\in \mathrm{int}\ T_s$, funkcija, takva da $|\mathcal{O}(\frac{1}{z})| \leq \frac{const}{|z|}$. Na taj način, očigledno možemo izabrati takvo φ da za $z\in \mathrm{int}\ T_s$, $|z|>R_o'\geqslant R_o$ važi

$$\mathrm{Re}\,(e^{i\varphi}u_1'(z)) \neq 0.$$

Dobijena oblast nije konveksna. Medjutim, ako konstruišemo u tački preseka kruga $|z|=R_o'$ s bisektrisom sektora T_s odsečak koji dodiruje taj krug i leži unutar sektora, dobijena beskonačna oblast biće konveksna. Na taj način je obostrana jednoznačnost funkcije $u_1(z)$ u toj oblasti dokazana. Jasno je sada da se može izabrati takav broj $R_1 > R_o'$ da je u oblasti $Q_s(R_1)$: $|z|>R_1$, $z\in \mathrm{int}\ T_s$, funkcija $u_1(z)$ takodje obostrano jednoznačna.

Zbog toga u oblasti $D_{s,1}$ (u u_1-ravni) postoji jednoznačna analitička funkcija $z=z(u_1)$, inverzna funkciji u_1. Nije teško uvideti da je slika sektora pri preslikavanju $u_1=u_1(z)$ asimptotski sektor. Takodje, ako $|z|\to\infty$ unutar oblasti $Q_s(R_1)$, tada $|u_1|\to\infty$ unutar $D_{s,1}$ i obrnuto. Zato analitičkoj funkciji tipa $\sigma(1)$ u oblasti $Q_s(R_1)$ odgovara analitička funkcija tipa $\sigma(1)$ u $D_{s,1}$.

Primetimo dalje da sektor T_s i broj R_1 uvek mogu da budu izabrani tako da $u_1(z)$ bude analitička funkcija koja zatvorenu oblast $\overline{Q_s(R_1)}$ preslikava na oblast $\overline{D_{s,1}}$ uzajamno jednoznačno.

Dalje, postoji uzajamno jednoznačna korespondencija izmedju nula sa velikim modulima funkcije $f_1(z)$ u oblasti $Q_s(R_1)$ i nula sa velikim modulima funkcije

$$\varphi_1(u_1) = f_1(z(u_1)) = e^{v_1}\left[e^{u_1} + e^{-u_1} + g_1(z(u_1))\right], \quad (1.1o)$$

gde je $\varphi_1(u_1)$ funkcija u koju je pri preslikavanju (1.8) prešla funkcija $f_1(z)$ u oblasti $Q_s(R_1)$ ($R_1 > \tilde{R}$ - v. (1.9)).

Funkcija φ_1 se anulira ako:

$$u_1 \sim (n+\tfrac{1}{2})\pi i, \quad n=0,\pm 1,\ldots$$

Zbog toga, kako je lako videti, postoji takav indeks M da je za $n > M$, $s=o,1,\ldots,r-1$:

$$\beta_{n,s} = \left.\frac{f_2(z)}{f_1'(z)}\right|_{z=z_{n,s}} = \left.\frac{e^{v_2-v_1}\left[e^{u_2}+e^{-u_2}+g_2(z)\right]}{\left[e^{u_1}+e^{-u_1}+g_1(z)\right]_z'}\right|_{z=z_{n,s}} =$$

$$= \left[\frac{P_{s,2}P_{s+1,2}}{P_{s,1}P_{s+1,1}}\right]^{1/2}\left\{e^{u_1}\left[\frac{P_{s,2}P_{s+1,1}}{P_{s,1}P_{s+1,2}}\right]^{1/2} + e^{-u_1}\left[\frac{P_{s,1}P_{s+1,2}}{P_{s,2}P_{s+1,1}}\right]^{1/2} + g_2(z)\right\} \times$$

$$\times \left.\left[(e^{u_1}+e^{-u_1})_{u_1}'(u_1)_z' + g_1'(z)\right]^{-1}\right|_{z=z_{n,s}} .$$

Kako je za $z=z_{n,s}$, $u_1 \sim (n+\frac{1}{2})\pi i$, a $|g_2(z_{n,s})| < \text{const}\, e^{-\delta|z_{n,s}|}$, $|g_1'(z_{n,s})| < \text{const}\, e^{-\delta|z_{n,s}|}$, $\delta > 0$, to za $n \to \infty$:

$$\beta_{n,s} \sim \left.\frac{\dfrac{P_{s,2}(z)}{P_{s,1}(z)} - \dfrac{P_{s+1,2}(z)}{P_{s+1,1}(z)}}{\alpha_s - \alpha_{s+1} + \dfrac{P_{s,1}'(z)}{P_{s,1}(z)} - \dfrac{P_{s+1,1}'(z)}{P_{s+1,1}(z)}}\right|_{z=z_{n,s}} . \quad (1.11)$$

Formulu (1.11) ćemo kasnije iskoristiti za nalaženje asimptotike brojeva $\beta_{n,s}$ kad $n \to \infty$, a sada neposredno iz oblika funkcija $P_{s,j}$, $P_{s+1,j}$ $(j=1,2)$ zaključujemo da postoji takav broj A da je za sve n i s, $|\beta_{n,s}| < A$. Zbog toga red $\sum_{(n)} z_n^{-\sigma} \beta_n$ ravnomerno konvergira za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$ (indeks s, $s=o,1,\dots,r-1$, u $z_{n,s}$ i $\beta_{n,s}$ radi jednostavnosti ispuštamo).

Pokažimo sada da postoji prirodan broj m_o i niz kontura C_m $(m=m_o+1, m_o+2,\dots)$ u z-ravni, takvih da:

(a) Konture polaze iz nekih tačaka $a_m \in l$, $|a_m| = \frac{2\alpha m}{\cos \varepsilon}$, $m > m_o$, obilaze koordinatni početak i vraćaju se u tačku a_m na suprotnoj strani poluprave l konture Γ_o. Obilazak se vrši suprotno od kazaljke na satu; $C_m \subset C_{m+1}$ za $m > m_o$; α je neki pozitivan broj, 2ε je veličina ugla T_s.

(b) Za $m > m_o$ kontura C_m se u oblasti Ω_s $(s=o,1,\dots,r-1)$ poklapa sa delom kruga $|z| = \frac{2\alpha m}{\cos \varepsilon}$; ako je $z \in T_s$, kontura C_m je neka linija koja se nalazi u oblasti oblika jednakokrakog trapeza čiji kraci leže na stranama sektora T_s, srednja linija seče bisektrisu T_s na rastojanju $2\alpha m$ od koordinatnog početka, a visina mu je jednaka 2α.

(c) Ukupna dužina konture C_m ne prelazi veličinu Bm, pri čemu B ne zavisi od m.

(d) Na konturama C_m važi ocena:

$$|\Phi(z)| < C \text{ za } m > m_o,$$

pri čemu konstanta C ne zavisi od m.

Konstruišimo najpre delove kontura C_m koje leže u sektorima T_s. Posmatrajmo fiksirani sektor T_s.

Napišimo funkciju $\Phi(z)$, $z \in T_s$, $|z| > R$ u obliku:

$$\Phi(z) = \frac{e^{v_2}\left[e^{u_2} + e^{-u_2} + g_2(z)\right]}{e^{v_1}\left[e^{u_1} + e^{-u_1} + g_1(z)\right]} .$$

Očigledno, ako je m dovoljno veliki broj, za $|\mathrm{Im}\ u_1| = m\pi$ važi:

$$|\Phi(z)| = \left|\frac{P_{s,2}P_{s+1,2}}{P_{s,1}P_{s+1,1}}\right|^{1/2} \frac{e^{u_1}\left[\frac{P_{s,2}P_{s+1,1}}{P_{s+1,2}P_{s,1}}\right]^{1/2} + e^{-u_1}\left[\frac{P_{s+1,2}P_{s,1}}{P_{s,2}P_{s+1,1}}\right]^{1/2} + g_2}{\left|e^{u_1} + e^{-u_1} + g_1\right|}$$

$$\leq \frac{\mathrm{const}\ e^{|\mathrm{Re}\ u_1|}}{\mathrm{const}\ e^{|\mathrm{Re}\ u_1|}} = \mathrm{const}.$$

Kako je već rečeno, funkcija $u_1(z)$ preslikava tačke $z \in T_s$, $|z| > R_1$ u tačke u_1 koje u u_1-ravni obrazuju skup koji za dovoljno veliko $|u_1|$ asimptotski predstavlja sektor čija je bisektrisa imaginarna poluosa. Posmatrajmo delove pravih $|\mathrm{Im}\ u_1| = m\pi$ za dovoljno veliko m koje leže u slici skupa $z \in T_s$, $|z| > R_1$ i opišimo oblik linija koje leže u T_s i predstavljaju inverzne slike tih delova.

Koristeći (1.8), može se pokazati da maksimum rastojanja izmedju tih linija u sektoru T_s ne prelazi, za dovoljno veliko m, neku konstantu b_s. Označimo $\alpha = \max\limits_{0 \leq s \leq r-1} b_s$. Pored toga, b_s se može tako izabrati da dve susedne linije cele leže u sektoru T_s u traci širine b_s, normalnoj na bisektrisu sektora.

U sektorima Ω_s $(s=0,1,\ldots,r-1)$ konstruišimo delove krugova $|z| = \frac{2\alpha m}{\cos\varepsilon}$ (m dovoljno veliki celi brojevi). Presečne tačke tih krugova sa stranama sektora T_s spojimo dužima - neka su te duži srednje linije trapeza visina 2α. Ako je m dovoljno veliko, u svakom od tih trapeza sadrši se linija koja je inverzna slika jednog od odsečaka $|\mathrm{Im}\, u_1| = m\pi$. Ta linija neka i bude traženi deo konture C_m koji leži u T_s. Ako je m dovoljno veliko, analognu konstrukciju možemo izvesti za svaki sektor T_s $(s=0,1,\ldots,r-1)$.

Delove ukazanih krugova u sektorima Ω_s i linija u sektorima T_s spojimo po stranama sektora T_s.

Kako je za $z \in \overline{\Omega}_s$ $(s=0,1,\ldots,r-1)$, $\mathrm{Re}\,\alpha_s z - \mathrm{Re}\,\alpha_k z > \delta|z|$ $(k\neq s)$, to svuda na konstruisanim konturama važi ocena $|\Phi(z)| < \mathrm{const}$ za $m > m_o$. Broj m_o se može izabrati dovoljno velikim da za sve $m > m_o$ inverzne slike ukazanih delova linija $|\mathrm{Im}\, u_1| = m\pi$ budu rektificibilne Žordanove krive čije se dužine lako ocenjuju.

Tvrdjenje (c) o konturama lako sledi iz njihove konstrukcije, oblika funkcije (1.8) i iz rečenog više.

Završimo sada dokaz teoreme 1.1.

Posmatrajmo zatvorenu konturu koja se sastoji od konture C_m i dela Γ_{o,a_m} konture Γ_o od nule do tačke a_m. Za $\mathrm{Re}\,\sigma > 1$ na integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_m \cup \Gamma_{o,a_m}} z^{-\sigma} \Phi(z)\,dz$$

može se primeniti Košijeva teorema o reziduumima. Pustimo da m teži beskonačnosti. Integral po C_m teži nuli. Zato je za Re $\sigma > 1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} z^{-\sigma}\Phi(z)dz = \sum_{(n)} z_n^{-\sigma}\beta_n,$$

gde su β_n reziduumi funkcije $\Phi(z)$ u nulama z_n funkcije $f_1(z)$.

Time je teorema u potpunosti dokazana. ▨

Primetimo sada da iz formule (1.11) za brojeve $\beta_{n,s}$ sledi asimptotsko predstavljanje:

$$\beta_{n,s} \sim \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\gamma_{q,s}}{z_{n,s}^{q}} \quad (n \to \infty). \tag{1.12}$$

Brojevi $\gamma_{q,s}$ se mogu eksplicitno izraziti pomoću parametara asimptotike funkcija $f_j(z)$ i smatraćemo ih poznatim. Iz (1.12) i iz (1.2) sledi:

$$z_{n,s}^{-\sigma}\beta_{n,s} \sim \sum_{q=0}^{\infty} \gamma_{q,s} z_{n,s}^{-q-\sigma} \sim \sum_{q=0}^{\infty} \gamma_{q,s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma+q,\ln n)}{n^{k+\sigma+q}} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\sigma}} \sum_{q=0}^{p} \gamma_{q,s} Q_{p-q}^{(s)}(\sigma+q,\ln n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_p^{(s)}(\sigma,\ln n)}{n^{p+\sigma}},$$

gde je

$$Q_k^{(s)}(\sigma+q,\ln n) = a_s^{-\sigma-q} \sum_{\nu=0}^{k} d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma+q)\ln^{\nu} n,$$

$d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma+q)$ su polinomi po $\sigma+q$,

$$S_p^{(s)}(\sigma,\ln n) = \sum_{q=0}^{p} \gamma_{q,s} Q_{p-q}^{(s)}(\sigma+q,\ln n) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} f_{p,\nu}^{(s)}(\sigma+q)\ln^{\nu} n,$$

$$f_{p,\nu}^{(s)}(\sigma+q) = \sum_{q=0}^{p-\nu} \gamma_{q,s} a_s^{-\sigma-q} d_{p-q,\nu}^{(s)}(\sigma+q).$$

Fiksirajmo sada dovoljno veliki ceo broj τ. Funkcija

$$\Psi_{\tau}^{(o)}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{\tau-1} \left[z_{n,s}^{-\sigma} \beta_{n,s} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{S_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right]$$

dopušta analitičko produženje u poluravan $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$. Uvedimo još funkciju:

$$\Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{\tau-1} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{S_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} .$$

(Prim nad znakom suma u izrazima za funkcije $\Psi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ i $\Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ stoji zbog tzv. "defekta regularizacije" - v. [9].)

Funkcija $\Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ je regularna za $\operatorname{Re} \sigma > 1$ i očigledno za $\operatorname{Re} \sigma > 1$ važi:

$$\Psi_{\tau}^{(o)}(\sigma) = Z_o(\sigma) - \Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma). \tag{1.13}$$

Kako je prema lemi 1.4 $Z_o(\sigma)$ cela funkcija, zajedno sa $\Psi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ i $\Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ se produžava analitički u poluravan $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$. Primetimo da se funkcija $\Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma)$ može izraziti pomoću Rimanove zeta-funkcije i njenih izvoda (v. npr. [27]), tj. njene vrednosti se mogu eksplicitno izračunati:

$$\Phi_{\tau}^{(o)}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{q=0}^{k-\nu} \sum_{s=0}^{\tau-1} \gamma_{q,s} a_s^{-\sigma-q} d_{k-q,\nu}^{(s)}(\sigma+q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\nu} n}{n^{k+\sigma}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{q=0}^{k-\nu} D_{q,k}(\sigma)(-1)^{\nu} \zeta^{(\nu)}(k+\sigma),$$

gde je

$$D_{q,k}(\sigma) = \sum_{s=0}^{\tau-1} \gamma_{q,s} a_s^{-\sigma-q} d_{k-q,\nu}^{(s)}(\sigma+q).$$

Koristeći još lemu 1.5, iz (1.13) dobijamo sledeću teoremu o regularizovanim sumama sa težinama [14]:

<u>TEOREMA 1.2</u> Za svako celo m, $0 < m < \tau$, važi jednakost:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{\tau-1} \left[z_{n,s}^{m} \beta_{n,s} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{S_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} \right] = \omega_{m+1}^{(o)} - \Phi_{\tau}^{(o)}(-m),$$

gde su $\omega_{m+1}^{(o)}$ koeficijenti u razlaganju (1.4).

NAPOMENA Formula u teoremi 1.2 izvedena je pod pretpostavkom da na granici indikatorskog dijagrama P za funkcije $f_j(z)$ nema drugih tačaka koje odgovaraju eksponentima $\bar{\alpha}_i$ izuzev temena. Slična formula može se dobiti i u nekim drugim slučajevima. Specijalno, u četvrtoj glavi razmotrićemo primer kada indikatorski dijagram obrazuju tačke -1, 0 i 1, pa ćemo za taj slučaj izvesti odgovarajuće formule.

G L A V A II

SPEKTRALNA FUNKCIJA OPERATORA VIŠEG REDA

Posmatrajmo linearni diferencijalni operator 2k-tog reda na odsečku $[0,\pi]$:

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^k y^{(2k)} + q(x)y = \lambda y, \\ &y(0)=y''(0)=\ldots=y^{(2k-2)}(0)=0, \\ &y(\pi)=y''(\pi)=\ldots=y^{(2k-2)}(\pi)=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Označimo sa λ_n njegove svojstvene vrednosti, sa y_n odgovarajuće svojstvene funkcije (izbor normiranja tih funkcija izvršićemo kasnije), a sa α_n odgovarajuće normirajuće koeficijente:

$$\alpha_n = \int_0^\pi y_n^2(x)\, dx. \tag{2.2}$$

Dati operator je samokonjugovan i pozitivan, pa se njegova spektralna funkcija (v. Uvod) može izraziti kao:

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n} .$$

U ovoj glavi ispitaćemo asimptotsko ponašanje funkcije $\rho(\lambda)$ kad $\lambda \to \infty$. Izmedju ostalog, pokazaćemo da ono zavisi od načina normiranja svojstvenih funkcija y_n.

§1. Formula za normirajuće koeficijente

Prvi korak u ispitivanju asimptotike spektralne funkcije $\rho(\lambda)$ operatora (2.1) biće izvodjenje jedne formule za normirajuće koeficijente α_n koja će omogućiti da se za izračunavanje regularizovanih suma njihovih recipročnih vrednosti primene rezultati iz prethodne glave.

Neka su $v_j(x,\lambda)$ $(j=1,2,\dots,2k)$ rešenja jednačine (2.1) koja zadovoljavaju uslove:

$$v_j^{(p-1)}(0,\lambda) = \delta_{jp} \quad (j,p=1,2,\dots,2k).$$

Tada su svojstvene vrednosti λ_n datog operatora nule karakteristične determinante (v. npr. [13]),koja, kako je lako videti, može da se napiše u obliku:

$$\Phi_1(\lambda) = \det \left\| v_{2\nu}^{(2\mu-2)}(\pi,\lambda) \right\|_{\mu,\nu=1}^{k} . \tag{2.3}$$

Odgovarajuće svojstvene funkcije su (v. takodje [13]):

$$y_n(x) = C_n \begin{vmatrix} v_2(\pi,\lambda_n) & v_4(\pi,\lambda_n) & \dots & v_{2k}(\pi,\lambda_n) \\ v_2''(\pi,\lambda_n) & v_4''(\pi,\lambda_n) & \dots & v_{2k}''(\pi,\lambda_n) \\ \dots & & & \\ v_2^{(2k-4)}(\pi,\lambda_n) & v_4^{(2k-4)}(\pi,\lambda_n) & \dots & v_{2k}^{(2k-4)}(\pi,\lambda_n) \\ v_2(x,\lambda_n) & v_4(x,\lambda_n) & \dots & v_{2k}(x,\lambda_n) \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

gde su C_n proizvoljne konstante (zasad neodredjene).

Neka je $f(x,\lambda)$ neko rešenje jednačine (2.1). Množeći relaciju

$$(-1)^k f^{(2k)}(x,\lambda) + q(x)f(x,\lambda) = \lambda f(x,\lambda)$$

sa $y_n(x)$, a relaciju

$$(-1)^k y_n^{(2k)}(x) + q(x)y_n(x) = \lambda_n y_n(x)$$

sa $f(x,\lambda)$, oduzimajući i integrišući, dobijamo:

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi} f(x,\lambda)y_n(x)dx =$$
$$= (-1)^k \int_0^{\pi}\left[f^{(2k)}(x,\lambda)y_n(x) - f(x,\lambda)y_n^{(2k)}(x)\right] dx.$$

Posle k uzastopnih parcijalnih integracija, prethodna formula dobija oblik:

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi} f(x,\lambda)y_n(x)dx = (-1)^k \sum_{\vartheta=0}^{2k-1}(-1)^{\vartheta} f^{(2k-\vartheta-1)}(x,\lambda)y_n^{(\vartheta)}(x)\Big|_{x=0}^{\pi} \qquad (2.5)$$

Pretpostavimo sada da funkcija $f(x,\lambda)$ zadovoljava sledećih k uslova:

$$f(\pi,\lambda) = f''(\pi,\lambda) = \dots = f^{(2k-2)}(\pi,\lambda) = 0. \qquad (2.6)$$

Tada se, s obzirom na (2.4), formula (2.5) može prepisati u obliku:

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi} f(x,\lambda)y_n(x)dx = (-1)^k \sum_{\mu=1}^{k} f^{(2k-2\mu)}(0,\lambda)y_n^{(2\mu-1)}(0) =$$

$$= (-1)^k C_n \begin{vmatrix} v_2(\pi,\lambda_n) & v_4(\pi,\lambda_n) & \dots & v_{2k}(\pi,\lambda_n) \\ \dots & & & \\ v_2^{(2k-4)}(\pi,\lambda_n) & v_4^{(2k-4)}(\pi,\lambda_n) & \dots & v_{2k}^{(2k-4)}(\pi,\lambda_n) \\ f^{(2k-2)}(0,\lambda) & f^{(2k-4)}(0,\lambda) & \dots & f(0,\lambda) \end{vmatrix} . \qquad (2.7)$$

Neka se funkcija $f(x,\lambda)$ izražava pomoću funkcija

$v_j(x,\lambda)$ u obliku $f(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{2k} D_j v_j(x,\lambda)$. Tada se uslovi (2.6) mogu zapisati u obliku:

$$\sum_{j=1}^{2k} D_j v_j(\pi,\lambda) = \sum_{j=1}^{2k} D_j v_j''(\pi,\lambda) = \ldots = \sum_{j=1}^{2k} D_j v_j^{(2k-2)}(\pi,\lambda) = 0. \tag{2.6'}$$

Neka konstante D_j zadovoljavaju još i sledeće uslove:

$$D_2 : D_4 : \ldots : D_{2k} = (-1)^{k-1}\Phi_{1,2}(\lambda) : (-1)^{k-2}\Phi_{1,4}(\lambda) : \ldots : \Phi_{1,2k}(\lambda), \tag{2.8}$$

gde je $\Phi_{1,2\nu}(\lambda)$ $(\nu=1,2,\ldots,k)$ minor determinante $\Phi_1(\lambda)$ koji odgovara elementu $v_{2\nu}^{(2k-2)}(\pi,\lambda)$.

Uslovi (2.6') i (2.8) daju sistem od 2k-1 jednačina za 2k nepoznatih D_j koji ih odredjuje do na konstantni množitelj. Zaista, iz (2.8) dobijamo:

$$D_{2\nu} = (-1)^{k-\nu}\Phi_{1,2\nu}(\lambda)t \quad (\nu=1,2,\ldots,k).$$

Zamenjujući u (2.6') dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \sum_{\mu=1}^{k} D_{2\mu-1} v_{2\mu-1}^{(2p)}(\pi,\lambda) = 0 \quad (p=0,1,\ldots,k-2), \\ \sum_{\mu=1}^{k} D_{2\mu-1} v_{2\mu-1}^{(2k-2)}(\pi,\lambda) = -t\Phi_1(\lambda), \end{cases}$$

odakle:

$$D_{2\mu-1} = (-1)^{k-\mu+1}\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}\Phi_{2,2\mu-1}(\lambda)t \quad (\mu=1,2,\ldots,k),$$

gde je $\Phi_{2,2\mu-1}(\lambda)$ minor determinante

$$\Phi_2(\lambda) = \det \left\| v_{2\nu-1}^{(2\mu-2)}(\pi,\lambda) \right\|_{\mu,\nu=1}^{k}, \tag{2.9}$$

koji odgovara elementu $v_{2\mu-1}^{(2k-2)}(\pi,\lambda)$.

Na taj način, i funkcija $f(x,\lambda)$ je odredjena do na konstantni množitelj. Uzmimo $t=-1$. Tada:

$$f(x,\lambda) = (-1)^k\left[\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu}\Phi_{2,2\mu-1}(\lambda)v_{2\mu-1}(x,\lambda) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\Phi_{1,2\nu}(\lambda)v_{2\nu}(x,\lambda)\right].$$

Zamenjujući poslednji izraz u (2.7), dobijamo:

$$(\lambda-\lambda_n)\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}\int_0^{\pi}\beta(x,\lambda)dx - (\lambda-\lambda_n)\frac{1}{C_n}\int_0^{\pi}\alpha(x,\lambda)dx =$$
$$= -C_n\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}\sum_{\nu=1}^{k}\Phi_{2,2\nu-1}(\lambda)\Phi_{1,2k-2\nu+2}(\lambda_n),$$

gde su $\alpha(x,\lambda)$ i $\beta(x,\lambda)$ integrabilne funkcije na $[0,\pi]$ i $\alpha(x,\lambda)\to y_n^2(x)$ $(\lambda\to\lambda_n)$. Ako podelimo dobijenu relaciju sa $\lambda-\lambda_n$ i pustimo da λ teži λ_n, dobijamo:

$$\alpha_n = C_n^2\frac{\Phi_1'(\lambda_n)}{\Phi_2(\lambda_n)}\sum_{\nu=1}^{k}\Phi_{2,2\nu-1}(\lambda_n)\Phi_{1,2k-2\nu+2}(\lambda_n). \quad (2.10)$$

(Prim označava izvod po λ.) Time je dokazana sledeća:

<u>LEMA 2.1</u> Neka su svojstvene funkcije $y_n(x)$ operatora (2.1) koje odgovaraju svojstvenim vrednostima λ_n normirane tako da je:

$$y_n'(0) = (-1)^{k-1}\lambda_n^{1/2}\Phi_{1,2}(\lambda_n)\left[\sum_{\nu=1}^{k}\Phi_{2,2\nu-1}(\lambda_n)\Phi_{1,2k-2\nu+2}(\lambda_n)\right]^{-1} \quad (2.11)$$

tj. neka konstante C_n u relaciji (2.4) imaju vrednost:

$$C_n = \lambda_n^{1/2}\left[\sum_{\nu=1}^{k}\Phi_{2,2\nu-1}(\lambda_n)\Phi_{1,2k-2\nu+2}(\lambda_n)\right]^{-1/2}.$$

Tada za normirajuće koeficijente (2.2/ tog operatora važi formula:

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} \frac{\Phi_2(\lambda)}{\lambda\Phi_1(\lambda)} . \tag{2.12}$$

(Pri tom je pretpostavljeno da su svojstvene vrednosti λ_n datog operatora proste, što nije ograničenje opštosti, s obzirom da višestrukih svojstvenih vrednosti može biti samo konačno mnogo.)

§2. Izračunavanje parametara asimptotike

Uvedimo kompleksnu promenljivu z pomoću $z^{2k} = \lambda$. Definišimo funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ pomoću:

$$f_1(z) = \Phi_1(z^{2k}), \ f_2(z) = \frac{1}{z^k}\Phi_2(z^{2k}). \tag{2.13}$$

Tada relacija (2.12) dobija oblik:

$$\frac{1}{\alpha_n} = 2kz_n^{k-1}\beta_n, \ \beta_n = \operatorname*{res}_{z=z_n} \frac{f_2(z)}{f_1(z)} \quad (z_n^{2k} = \lambda_n). \tag{2.12'}$$

U ovom paragrafu pokazaćemo da su $f_1(z)$ i $f_2(z)$ funkcije klase K i izračunaćemo njihove parametre asimptotike.

Označimo sa ω_ν (ν=1,2,...,2k) 2k-te korene iz $(-1)^k$, numerisane u poretku rašćenja argumenta. Kao što je poznato (v. npr. [13]), u svakoj od oblasti $\frac{q\pi}{2k} \leq \arg z \leq \frac{(q+1)\pi}{2k}$ (q=0,1,...,4k-1) postoji 2k linearno nezavisnih rešenja jednačine (2.1) koja zadovoljavaju asimptotske relacije:

$$y_\nu(x,z) = e^{\omega_\nu zx}\left[\sum_{p=0}^{N} \frac{u_{p,\nu}(x)}{z^p} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right)\right] \quad (z \to \infty) \tag{2.14}$$

($\nu=1,2,\ldots,2k$), gde N zavisi od stepena glatkosti funkcije $q(x)$; navedene relacije mogu se diferencirati član po član.

Pretpostavimo najpre da je $k>1$. Ako zamenimo izraze (2.14) u jednačinu (2.1) i uporedimo koeficijente uz jednake stepene z, dobijamo sledeće rekurentne veze za odredjivanje funkcija $u_{p,\nu}(x)$:

$$\sum_{j=1}^{2k} \binom{2k}{j} \omega_\nu^{-j} u_{p-j+1,\nu}^{(p)}(x) + q(x)u_{p-2k+1,\nu}(x) = 0 \quad (p=1,2,\ldots);$$

tu je $u_{\mu,\nu}(x) \equiv 0$ za $\mu<0$. Uzmimo, pored toga, $u_{0,\nu}(x) \equiv 1$ i $u_{p,\nu}(0)=0$ za $p \geqslant 1$ ($\nu=1,2,\ldots,2k$). Tada se lako dobija:

$$u_{1,\nu}(x) \equiv u_{2,\nu}(x) \equiv \ldots \equiv u_{k,\nu}(x) \equiv 0,$$

tako da je:

$$y_\nu(x,z) = e^{\omega_\nu zx}\left[1 + O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] \quad (z\to\infty) \quad (\nu=1,2,\ldots,2k), \tag{2.14'}$$

pri čemu je dovoljno pretpostaviti neprekidnost funkcije $q(x)$.

Košijeva rešenja $v_j(x,\lambda)$ mogu se (u svakoj od pomenutih oblasti) predstaviti u obliku:

$$v_j(x,\lambda) = \sum_{\nu=1}^{2k} c_\nu^{(j)} y_\nu(x,z) \quad (j=1,2,\ldots,2k).$$

Iz početnih uslova i (2.14') dobijamo za odredjivanje konstanata $c_\nu^{(j)}$ sledećih 2k sistema jednačina:

$$z^{\mu-1} \sum_{\nu=1}^{2k} c_\nu^{(j)} \omega_\nu^{\mu-1}\left[1 + O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] = \delta_{\mu j} \quad (\mu=1,2,\ldots,2k),$$

gde je $j=1,2,\ldots,2k$.

Determinanta j-tog od dobijenih sistema jednaka je:

$$\Delta^{(j)} = z^{k(2k-1)}\left[1 + O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] W(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2k}),$$

gde je $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Vandermondova determinanta za brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determinanta koja odgovara nepoznatoj $C_\nu^{(j)}$ u tom sistemu iznosi:

$$\Delta_\nu^{(j)} = z^{k(2k-1)-(j-1)}\left[1 + O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] (-1)^{\nu+j} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & & & & & \\ \omega_1^{j-2} & \ldots & \omega_{\nu-1}^{j-2} & \omega_{\nu+1}^{j-2} & \ldots & \omega_{2k}^{j-2} \\ \omega_1^{j} & \ldots & \omega_{\nu-1}^{j} & \omega_{\nu+1}^{j} & \ldots & \omega_{2k}^{j} \\ \ldots & & & & & \\ \omega_1^{2k-1} & \ldots & \omega_{\nu-1}^{2k-1} & \omega_{\nu+1}^{2k-1} & \ldots & \omega_{2k}^{2k-1} \end{vmatrix}.$$

Determinanta na desnoj strani (v. npr. zadatak 281. u [17]) jednaka je:

$$\sigma_{2k-j}(\omega_1, \ldots, \omega_{\nu-1}, \omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_{2k}) W(\omega_1, \ldots, \omega_{\nu-1}, \omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_{2k}),$$

gde je

$$\sigma_p(x_1, \ldots, x_s) = \sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p},$$

pri čemu se sumiranje vrši po svim kombinacijama $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \subset \{1, \ldots, s\}$. Odatle, uzimajući u obzir poznate vrednosti Vandermondove determinante, dobijamo:

$$C_\nu^{(j)} = (-1)^{\nu+j} z^{1-j}\left[1 + O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] \frac{\sigma_{2k-j}(\omega_1, \ldots, \omega_{\nu-1}, \omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_{2k})}{(-1)^\nu \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{2k} (\omega_\nu - \omega_\mu)}$$

Proizvod u imeniocu poslednjeg razlomka jednak je:

$$\lim_{\omega\to\omega_\nu} \frac{\omega^{2k}-(-1)^k}{\omega-\omega_\nu} = 2k\,\omega_\nu^{2k-1} ,$$

a izraz u brojiocu može se izračunati deljenjem polinoma $P(\omega)= = \omega^{2k}-(-1)^k$ sa $\omega-\omega_\nu$. Kao rezultat dobija se:

$$c_\nu^{(j)} = \frac{1}{2k}\omega_\nu^{1-j}z^{1-j}\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] \quad (j,\nu=1,2,\ldots,2k).$$

Na taj način,

$$v_j(x,\lambda) = \frac{1}{2k}z^{1-j}\sum_{\nu=1}^{2k}\omega_\nu^{1-j}e^{\omega_\nu zx}\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] \quad (j=1,2,\ldots,2k),$$

odnosno:

$$v_j^{(\mu)}(x,\lambda) = \frac{1}{2k}z^{\mu+1-j}\sum_{\nu=1}^{2k}\omega_\nu^{\mu+1-j}e^{\omega_\nu zx}\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right] \tag{2.15}$$

$$(j=1,2,\ldots,2k;\ \mu=0,1,\ldots,2k-1).$$

Zamenimo dobijene izraze (2.15) u (2.3) i (2.9). Izračunajmo najpre determinantu $\Phi_2(\lambda)$.

Uvedimo oznaku $A_\nu = \sum_{\mu=1}^{2k}\omega_\mu^{\nu}e^{\omega_\mu z\pi}$ $(\nu=0,\pm1,\ldots,\pm(2k-2))$.

Pretpostavimo najpre da je k paran broj. Tada je $\omega_\nu= = \exp\left[i(\nu-1)\frac{\pi}{k}\right]$ $(\nu=1,2,\ldots,2k)$ i $A_\nu = A_{-(2k-\nu)}$ $(\nu=0,1,\ldots, 2k-2)$. Determinanta $\Phi_2(\lambda)$ se može zapisati u obliku:

$$\Phi_2(\lambda) = \frac{1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)}{(2k)^k}\begin{vmatrix} A_0 & A_{2k-2} & A_{2k-4} & \cdots & A_2 \\ A_2 & A_0 & A_{2k-2} & \cdots & A_4 \\ \cdots & & & & \\ A_{2k-2} & A_{2k-4} & A_{2k-6} & \cdots & A_0 \end{vmatrix} .$$

Vrednost poslednje determinante (v. npr. zadatak 300. u [17]) iznosi:

$$\prod_{\nu=1}^{k} \left[A_0 + A_2 \varepsilon_\nu + A_4 \varepsilon_\nu^2 + \ldots + A_{2k-2} \varepsilon_\nu^{k-1}\right], \qquad (2.16)$$

gde su ε_ν ($\nu=1,2,\ldots,k$) vrednosti k-tog korena iz 1, tj. $\varepsilon_\nu = \omega_\nu^2$ ($\nu=1,2,\ldots,k$). Zbog $A_{2\nu} = \sum_{\mu=1}^{2k} \varepsilon_\mu^{\nu} e^{\omega_\mu z\pi}$ ($\nu=0,1,\ldots,k-1$)[x],

izraz u srednjoj zagradi jednak je:

$$\sum_{\mu=1}^{2k} \left[1 + \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu + \ldots + (\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu)^{k-1}\right] e^{\omega_\mu z\pi}.$$

Na taj način,

$$\Phi_2(\lambda) = \frac{1}{2^k} \prod_{\nu=1}^{k} \left[e^{\omega_\nu z\pi} + e^{\omega_{k+\nu} z\pi}\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right]. \qquad (2.17')$$

Ako je broj k neparan, s obzirom na $\omega_\nu = \exp\left[i(2\nu-1)\frac{\pi}{2k}\right]$ ($\nu=1,2,\ldots,2k$), važi $A_\nu = -A_{2k-\nu}$ ($\nu=0,1,\ldots,2k-2$) i determinanta $\Phi_2(\lambda)$ dobija oblik:

$$\Phi_2(\lambda) = \frac{1 + O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)}{(2k)^k} \begin{vmatrix} A_0 & -A_{2k-2} & -A_{2k-4} & \ldots & -A_2 \\ A_2 & A_0 & -A_{2k-2} & \ldots & -A_4 \\ \ldots & & & & \\ A_{2k-2} & A_{2k-4} & A_{2k-6} & \ldots & A_0 \end{vmatrix}.$$

Za vrednost poslednje determinante (v. npr. zadatak 313. u [17]) ponovo dobijamo izraz (2.16), pri čemu su sada ε_ν ($\nu=1,2,\ldots,k$) vrednosti k-tog korena iz -1, tj. ponovo važi $\varepsilon_\nu = \omega_\nu^2$ ($\nu=1,2,\ldots,k$). Ponavljanjem prethodnog postupka, ponovo dolazimo do formule (2.17').

---

[x] Označili smo $\varepsilon_{k+\nu} = \varepsilon_\nu$ ($\nu=1,2,\ldots,k$)

Determinanta $\Phi_1(\lambda)$ može da se izračuna na sličan način:

$$\Phi_1(\lambda) = \frac{1}{(2z)^k}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\omega_\nu}\left[e^{\omega_\nu z\pi} - e^{\omega_{k+\nu} z\pi}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right]. \quad (2.17")$$

Uzimajući u obzir (2.13), formule (2.17') i (2.17") mogu se prepisati u obliku:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{(2z)^k}\prod_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\omega_\nu}\left[e^{\omega_\nu z\pi} - e^{\omega_{k+\nu} z\pi}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right], \\ f_2(z) &= \frac{1}{(2z)^k}\prod_{\nu=1}^{k}\left[e^{\omega_\nu z\pi} + e^{\omega_{k+\nu} z\pi}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Posmatrajmo sada konveksni omotač P skupa tačaka:

$$\sum_{\nu=1}^{k}\omega_{i_\nu}\pi \quad (i_1 < i_2 < \ldots < i_k;\ i_1, i_2, \ldots, i_k = 1,2,\ldots,2k;\ \omega_{i_\mu} + \omega_{i_\nu} \neq 0). \quad (2.18)$$

Lako je pokazati da je P 2k-tougao, s temenima u tačkama $\alpha_s = \theta_s \pi \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2k}$ ($\theta_s^{2k} = -1$; $s=1,2,\ldots,2k$ i θ_s su numerisani u poretku rašćenja argumenta); vrednosti α_s dobijaju se izračunavanjem suma oblika:

$$\sum_{\nu=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} \pi \exp\left[i(2s+2\nu-1)\frac{\pi}{2k}\right]$$

u slučaju neparnog k, odnosno:

$$\sum_{\nu=-\left(\frac{k}{2}-1\right)}^{\frac{k}{2}} \pi \exp\left[i(s+\nu)\frac{\pi}{k}\right]$$

u slučaju parnog k. Tada se formule (2.17) mogu prepisati u obliku:

$$f_1(z) = \frac{i}{(2z)^k}\left[\sum_{s=1}^{2k}(-1)^s e^{\alpha_s z}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right],$$
$$f_2(z) = \frac{1}{(2z)^k}\left[\sum_{s=1}^{2k} e^{\alpha_s z}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{z^{k+1}}\right)\right], \tag{2.19}$$

pri čemu su u sumama napisani samo članovi koji odgovaraju onim od tačaka (2.18) koje su jednake α_s $(s=1,2,\dots,2k)$[x].

U slučaju k=1 treba pretpostaviti da funkcija $q(x)$ ima neprekidan prvi izvod. Tada formule (2.19) imaju oblik:

$$f_1(z) = \frac{i}{2z}\left[-e^{iz\pi}\left(1-\frac{iA}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) + e^{-iz\pi}\left(1+\frac{iA}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\right],$$
$$f_2(z) = \frac{1}{2z}\left[e^{iz\pi}\left(1-\frac{iA}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) + e^{-iz\pi}\left(1+\frac{iA}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\right], \tag{2.19'}$$

gde je $A = \int_0^\pi q(x)dx$.

Na taj način dokazana je sledeća:

LEMA 2.2 Funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$, definisane pomoću (2.13), imaju prve parametre asimptotike odredjene relacijama (2.19) u slučaju $k>1$ (i $q(x)\in C[0,\pi]$), odnosno (2.19') u slučaju $k=1$ (i $q(x)\in C^1[0,\pi]$).

§3. Asimptotika spektralne funkcije

Da bismo za izračunavanje regularizovanih suma brojeva α_n^{-1} (v. (2.2)) mogli da primenimo formulu teoreme 1.2, odre-

---

x) Na osnovu rečenog u prvoj glavi, to je dovoljno za dalja razmatranja.

dimo najpre koeficijente u asimptotskoj formuli (1.2) za nule $z_{n,s}$ funkcije $f_1(z)$:

$$z_{n,s} \sim a_s n \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{R_{\nu}^{(s)}(\ln n)}{n^{\nu}} \right\} \quad (n \to \infty),$$

$$R_{\nu}^{(s)}(\ln n) = \sum_{q=0}^{\nu} r_{q,s}^{\nu} \ln^q n, \quad r_{\nu,s}^{\nu} = 0 \text{ za } \nu > 1.$$

Na osnovu parametara asimptotike funkcije $f_1(z)$ dobija se neposredno

$$a_s = \exp\left(-i\,\frac{s\pi}{k}\right) \quad (s=1,2,\ldots,2k),$$

dok se koeficijenti $r_{q,s}$ mogu izračunati pomoću rekurentnih formula iz leme 1.2 i njenih posledica. Lako se dobija:

$$r_{q,s}^{\nu} = 0 \quad \text{za } \nu=1,2,\ldots,k;\ q=0,1,\ldots,\nu;\ s=1,2,\ldots,2k.$$

Za brojeve $\beta_{n,s}$ (v. formulu (2.12') - dodatni indeks s označava broj sektora) važi formula (1.12):

$$\beta_{n,s} \sim \sum_{q=0}^{\infty} \gamma_{q,s} z_{n,s}^{-q} \quad (n \to \infty),$$

pri čemu se koeficijenti $\gamma_{q,s}$ računaju pomoću formule (1.11) na osnovu dobijenih parametara asimptotike u prethodnom paragrafu:

$$\gamma_{0,s} = \frac{(-1)^s a_s}{\pi} \quad (s=1,2,\ldots,2k),$$

$$\gamma_{q,s} = 0 \text{ za } q=1,2,\ldots,k;\ s=1,2,\ldots,2k.$$

Odatle je lako izračunati sledeće vrednosti funkcije $S_p^{(s)}(\sigma,\ln n)$ (v. izvodjenje teoreme 1.2):

$$S_0^{(s)}(1-k,\ln n) = \frac{1}{\pi} \quad (s=1,2,\ldots,2k),$$

$$S_p^{(s)}(1-k,\ln n) = 0 \quad \text{za } p=1,2,\ldots,k;\ s=1,2,\ldots,2k.$$

Kako je $\omega_k^{(o)}=0$, iz teoreme 1.2 (za m=k-1), na osnovu (2.12'), sledi:

TEOREMA 2.1 Neka su α_n normirajući koeficijenti (v. (2.2)) operatora (2.1), pri čemu su svojstvene funkcije $y_n(x)$ normirane relacijama (2.11). Tada je regularizovana suma njihovih recipročnih vrednosti jednaka:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}-\frac{2k}{\pi}n^{k-1}\right]=-\frac{2k}{\pi}\zeta(1-k),$$

gde je ζ - Rimanova zeta-funkcija.

Posmatrajmo sada dva operatora tipa (2.1):

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^k y^{(2k)}+q_i(x)y=\lambda y,\\ y(0)=y''(0)=\ldots=y^{(2k-2)}(0)=0,\\ y(\pi)=y''(\pi)=\ldots=y^{(2k-2)}(\pi)=0,\end{array}\right\}\quad (i=1,2) \qquad (2.1')$$

pri čemu pretpostavimo da su funkcije $q_i(x)$ u slučaju $k>1$ neprekidne, a u slučaju k=1 neprekidno diferencijabilne na $[0,\pi]$. Označimo sa $\lambda_{n,i}$ njihove svojstvene vrednosti i sa $y_{n,i}$ odgovarajuće svojstvene funkcije, normirane relacijama tipa (2.11). Uvedimo oznake:

$$\alpha_{n,i}=\int_0^{\pi}y_{n,i}^2(x)dx,\quad \rho_i(\lambda)=\sum_{\lambda_{n,i}<\lambda}\frac{1}{\alpha_{n,i}}\quad (i=1,2).$$

Tada iz prethodne teoreme sledi:

POSLEDICA 2.1 Za brojeve $\alpha_{n,i}$ (i=1,2) važi jednakost:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_{n,1}}-\frac{1}{\alpha_{n,2}}\right)=0,$$

tj. za $\lambda\to\infty$:

$$\rho_1(\lambda)=\rho_2(\lambda)+o(1). \qquad (2.20)$$

§4. Drugi način izbora normiranja svojstvenih funkcija

Formula tipa (2.2o) bila je dokazana u radu [14] za operatore oblika:

$$\left.\begin{aligned} &-y'' + q_i(x)y = \lambda y, \\ &y'(0)-hy(0) = y'(\pi)+H_i y(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2), \qquad (2.21)$$

pri čemu su svojstvene funkcije bile normirane pomoću $y_{n,i}(0)=1$, dakle uslovima koji ne zavise od "potencijala" $q_i(x)$.

Primetimo da operatori (2.21) nisu specijalan slučaj operatora (2.1') za k=1, jer razmatranjima u radu [14] nije bio obuhvaćen slučaj $h=H_i=\infty$. Razmotrimo zato posebno operator:

$$\left.\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \lambda y, \\ &y(0) = y(\pi) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

Normiranje svojstvenih funkcija pomoću $y_n(0)=1$ više nije moguće izvršiti, zbog oblika graničnih uslova. S druge strane, normiranje formulom tipa (2.11) u ovom slučaju svodi se na:

$$y_n'(0) = z_n \qquad (z_n^2 = \lambda_n),$$

te, kao i u opštem slučaju, zavisi od "potencijala" q(x). Pokažimo, medjutim, da pri drugačijem izboru normiranja formula teoreme 2.1 može da dobije oblik iz koga se više ne može izvesti posledica 2.1.

Pretpostavimo, naprimer, da su svojstvene funkcije operatora (2.22) normirane (nezavisnim od q(x)) uslovima:

$$y_n'(0) = 1.$$

Neka su $v_j(x,\lambda)$ rešenja jednačine (2.22) koja zadovoljavaju uslove $v_j^{(p-1)}(0,\lambda) = \delta_{jp}$ $(j,p=1,2)$ i neka je:

$$\Phi_1(\lambda) = v_2(\pi,\lambda), \quad \Phi_2(\lambda) = v_1(\pi,\lambda). \tag{2.23}$$

Postupkom kao u §1. pokazuje se da za normirajuće koeficijente α_n važi formula

$$\frac{1}{\alpha_n} = \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} \frac{\Phi_2(\lambda)}{\Phi_1(\lambda)},$$

odnosno, ako uvedemo funkcije:

$$f_1(z) = \Phi_1(z^2), \quad f_2(z) = \frac{1}{z}\,\Phi_2(z^2) \qquad (z^2=\lambda), \tag{2.24}$$

formula:

$$\frac{1}{\alpha_n} = 2z_n^2\beta_n, \quad \beta_n = \operatorname*{res}_{z=z_n} \frac{f_2(z)}{f_1(z)} \qquad (z_n^2=\lambda_n). \tag{2.25}$$

U ovom slučaju biće potrebno da se odredi više parametara asimptotike funkcija $f_1(z)$ i $f_2(z)$ nego u prethodnom, pa zbog toga i više koeficijenata $u_{p,\nu}(x)$ u razlaganju (2.14). Iz rekurentnih formula za te funkcije koje su date u §2., dobija se:

$$u_{1,\nu}(x) = -\frac{\omega_\nu}{2}\int_0^x q(t)dt,$$

$$u_{2,\nu}(x) = \frac{q(x)-q(0)}{4} - \frac{1}{8}\left[\int_0^x q(t)dt\right]^2,$$

$$u_{3,\nu}(x) = \frac{\omega_\nu}{8}\left\{q'(x)-q'(0)-\left[q(x)-q(0)\right]\int_0^x q(t)dt - \int_0^x q^2(t)dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\left[\int_0^x q(t)dt\right]^3\right\}, \qquad (\nu=1,2;\ \omega_{1,2}=\pm i),$$

pri čemu je dovoljno pretpostaviti neprekidnost trećeg izvoda funkcije $q(x)$. Postupkom kao u §2., Košijeva rešenja $v_j(x,\lambda)$ $(j=1,2)$ izražavaju se pomoću rešenja $y_\nu(x,z)$ $(\nu=1,2)$ čija je asimptotika poznata. Uzimajući u obzir formule (2.23) i (2.24), dobijaju se traženi parametri asimptotike. Ako pretpostavimo da je $\int_0^\pi q(t)dt = 0$ (što nije ograničavanje opštosti), oni su odredjeni formulama:

$$f_1(z) = \frac{i}{2z}\Big\{-e^{iz\pi}\Big[1+\frac{q(\pi)+q(0)}{4z^2}+i\,\frac{q'(\pi)-q'(0)-B}{8z^3}+O\Big(\frac{1}{z^4}\Big)\Big]+$$

$$+e^{-iz\pi}\Big[1+\frac{q(\pi)+q(0)}{4z^2}-i\,\frac{q'(\pi)-q'(0)-B}{8z^3}+O\Big(\frac{1}{z^4}\Big)\Big]\Big\},$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2z}\Big\{e^{iz\pi}\Big[1+\frac{q(\pi)-q(0)}{4z^2}+i\,\frac{q'(\pi)+q'(0)-B}{8z^3}+O\Big(\frac{1}{z^4}\Big)\Big]+$$

$$+e^{-iz\pi}\Big[1+\frac{q(\pi)-q(0)}{4z^2}-i\,\frac{q'(\pi)+q'(0)-B}{8z^3}+O\Big(\frac{1}{z^4}\Big)\Big]\Big\},$$

gde je $B = \int_0^\pi q^2(t)dt$.

Asimptotika nula $z_{n,s}$ funkcije $f_1(z)$ odredjuje se kao u §3. U našem slučaju dobija se:

$$z_{n,s} \sim a_s n\Big\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^\nu_{o,s}}{n^\nu}\Big\} \quad (n\to\infty) \qquad (s=1,2),$$

sa:

$$a_1=-1,\ a_2=1;$$

$$r^1_{o,s}=r^2_{o,s}=r^3_{o,s}=0 \qquad (s=1,2).$$

Za brojeve $\beta_{n,s}$ ponovo važi:

$$\beta_{n,s} \sim \sum_{q=0}^{\infty}\gamma_{q,s}z^{-q}_{n,s} \qquad (n\to\infty),$$

sa:

$$\gamma_{o,s} = \frac{1}{\pi}\ ,\quad \gamma_{1,s} = 0\ ,\quad \gamma_{2,s} = -\frac{1}{2}q(0)\ ,\quad \gamma_{3,s} = 0 \quad (s=1,2).$$

Najzad, potrebne vrednosti funkcije $S_p^{(s)}(\sigma, \ln n)$ su:

$$S_o^{(s)}(-2,\ln n) = \frac{1}{\pi}\ ,$$

$$S_1^{(s)}(-2,\ln n) = 0\ ,$$

$$S_2^{(s)}(-2,\ln n) = -\frac{1}{2\pi}\,q(0)\ ,$$

$$S_3^{(s)}(-2,\ln n) = 0 \qquad (s=1,2).$$

Primenjujući sada formulu teoreme 1.2 sa m=2 i uzimajući u obzir da je:

$$\omega_3^{(o)} = -\frac{1}{4}\,q'(0),\quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}\ ,\quad \zeta(-2) = 0,$$

dobijamo iz (2.25) sledeću zamenu za teoremu 2.1:

<u>TEOREMA 2.2</u> Neka su α_n normirajući koeficijenti operatora (2.22), pri čemu su svojstvene funkcije $y_n(x)$ normirane pomoću $y_n'(0)=1$. Tada važi formula:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi}\,n^2 + \frac{q(0)}{\pi}\right] = -\frac{q'(0)}{4} - \frac{q(0)}{2\pi}\ .$$

Na taj način, koeficijenti u dobijenoj sumi zavise od "potencijala" q(x). Zbog toga umesto posledice 2.1 važi samo sledeća slabija varijanta:

<u>POSLEDICA 2.2</u> Neka su $y_{n,i}(x)$ svojstvene funkcije operatora

$$-y''+q_i(x)y = \lambda y,\quad y(0)=y(\pi)=0 \qquad (i=1,2),$$

koje odgovaraju svojstvenim vrednostima $\lambda_{n,i}$ $(y_{n,i}'(0)=1)$ i neka je

$$\alpha_{n,i} = \int_0^{\pi} y_{n,i}^2(x)dx \quad i \quad \rho_i(\lambda) = \sum_{\lambda_{n,i}<\lambda} \frac{1}{\alpha_{n,i}} \qquad (i=1,2).$$

Ako je $q_1(0) = q_2(0)$ i $q_1'(0) = q_2'(0)$, tada:

$$\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda) + o(1) \qquad (\lambda \to \infty).$$

G L A V A III

SPEKTRALNA FUNKCIJA REDŽEOVOG OPERATORA

Posmatrajmo sledeći nesamokonjugovani granični zadatak na odsečku $[0,a]$:

$$\left.\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= z^2 y, \\ y(0) = y'(a)+izy(a) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

gde je z spektralni parametar, a q(x) dovoljno glatka[x)] funkcija sa kompleksnim vrednostima. Zadatak (3.1) pojavljuje se u kvantnoj teoriji rasejanja i uveo ga je T.Redže [23, 24] (v. takodje [18]). U radu [23] je pokazano da dati zadatak ima beskonačni diskretni spektar $\{z_n\}$, pod uslovom da potencijal q(x) zadovoljava uslov:

$$q(x) \sim c_\mu (a-x)^\mu \qquad (x \to a-0), \tag{3.2}$$

za neki nenegativan broj μ i konstantu $c_\mu \neq 0$. Kako višestrukih svojstvenih vrednosti može biti samo konačno mnogo, u daljem ćemo pretpostavljati da su sve one proste. Takodje ćemo, jednostavnosti radi, pretpostavljati da je μ ceo broj.

U ovoj glavi pokazaćemo kako se na prirodan način može uvesti spektralna funkcija zadatka (3.1), a zatim ćemo ispitati

---

x) v. napomenu na kraju §I.1

njeno asimptotsko ponašanje kada joj argument teži beskonačnosti. Kao i u prethodnoj glavi, razmotrićemo dva načina izbora normiranja svojstvenih funkcija.

§1. Definicija spektralne funkcije. Formula za normirajuće koeficijente

U radu [23] pokazano je da su svojstvene vrednosti z_n operatora (3.1) (pod uslovom (3.2)) asimptotski rasporedjene na logaritamskim krivim u z-ravni:

$$z_n = \frac{n\pi}{a} + i\,\frac{\mu+2}{2a}\ln|n| + O(1) \qquad (n\to\pm\infty).$$

U radu [6] ispitivana je dvostruka razloživost funkcija odredjene klase u red po svojstvenim funkcijama $y_n(x)$ tog operatora. Dokazano je da funkcije $f(x)$ i $g(x)$ (definisane na $[0,a]$) koje zadovoljavaju odredjene granične uslove i uslove glatkosti, mogu da se predstave u obliku:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x), \quad g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} z_n c_n y_n(x),$$

gde je:

$$c_n = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^a \left(f(x)+\frac{1}{z_n}g(x)\right)y_n(x)\,dx - i\,\frac{y_n(a)}{z_n}\,f(a)}{\int_0^a y_n^2(x)\,dx - i\,\frac{y_n^2(a)}{2z_n}}.$$

Na osnovu prethodnog (v. i Uvod), prirodno je spektralnu funkciju operatora (3.1) uvesti na sledeći način:

$$\rho(\lambda) = \sum_{|\mathrm{Re}\, z_n| < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}, \tag{3.3}$$

pri čemu se normirajući koeficijenti α_n definišu pomoću:

$$\alpha_n = \int_0^a y_n^2(x)dx - i\,\frac{y_n^2(a)}{2z_n}. \tag{3.4}$$

Pri tom svojstvenu funkciju $y_n(x)$ koja odgovara svojstvenoj vrednosti z_n biramo tako da važi:

$$y_n'(0) = C_n, \tag{3.5}$$

a izbor konstanata C_n izvršićemo kasnije.

Kao i u prethodnoj glavi, izvedimo najpre za ovako definisane koeficijente α_n formulu koja će omogućiti regularizovano sumiranje njihovih recipročnih vrednosti. Mogućnost izvodjenja takve formule još je jedna potvrda ispravnosti načina uvodjenja tih koeficijenata.

Neka su $v_j(x,z)$ $(j=1,2)$ Košijeva rešenja jednačine (3.1) koja zadovoljavaju uslove $v_j^{(2-p)}(0,z) = \delta_{jp}$ $(j,p=1,2)$ i neka je:

$$\Phi_j(z) = v_j'(a,z) + izv_j(a,z) \quad (j=1,2).$$

Tada su svojstvene vrednosti z_n nule funkcije $\Phi_1(z)$, a odgovarajuće svojstvene funkcije (koje zadovoljavaju uslov (3.5)) su $y_n(x) = C_n v_1(x,z_n)$:

$$-y_n''(x) + q(x)y_n(x) = z_n^2 y_n(x). \tag{3.6}$$

Funkcija $f(x,z) = \Phi_1(z)v_2(x,z) - \Phi_2(z)v_1(x,z)$ zadovoljava uslov $f'(a,z) + izf(a,z) = 0$ i polaznu jednačinu:

$$-f''(x,z) + q(x)f(x,z) = z^2 f(x,z). \qquad (3.7)$$

Ako pomnožimo relaciju (3.6) sa $f(x,z)$, a relaciju (3.7) sa $y_n(x)$, oduzmemo i integrišemo, dobijamo:

$$(z^2-z_n^2)\int_0^a f(x,z)y_n(x)dx = \int_0^a \left[y_n''(x)f(x,z)-y_n(x)f''(x,z)\right] dx.$$

Leva strana poslednje relacije može se napisati u obliku:

$$(z^2-z_n^2)\Phi_1(z)\int_0^a v_2(x,z)y_n(x)dx - (z^2-z_n^2)\frac{\Phi_2(z)}{C_n}\int_0^a C_n v_1(x,z)y_n(x)dx,$$

a desna se, posle parcijalne integracije i zamene graničnih uslova, transformiše na sledeći način:

$$y_n'(x)f(x,z) - y_n(x)f'(x,z)\Big|_0^a =$$

$$= C_n\Big\{v_1'(a,z_n)\left[\Phi_1(z)v_2(a,z)- \Phi_2(z)v_1(a,z)\right] -$$

$$- v_1(a,z_n)\left[\Phi_1(z)v_2'(a,z)- \Phi_2(z)v_1'(a,z)\right] - \Phi_1(z)\Big\} =$$

$$= C_n\Big\{i(z-z_n)v_1(a,z_n)\left[v_1'(a,z)v_2(a,z)-v_1(a,z)v_2'(a,z)\right] - \Phi_1(z)\Big\}.$$

Ako obe strane tako transformisane relacije podelimo sa $z-z_n$ i pustimo da z teži z_n, dobijamo:

$$2z_n\frac{\Phi_2(z_n)}{C_n}\int_0^a y_n^2(x)dx = C_n\left[\Phi_1'(z_n) + iy_n^2(a)\Phi_2(z_n)\right],$$

odnosno, uzimajući u obzir (3.4),

$$2z_n\alpha_n\Phi_2(z_n) = C_n^2\Phi_1'(z_n). \qquad (3.8)$$

Na taj način dokazana je:

<u>LEMA 3.1</u> Neka su normirajući koeficijenti α_n operatora (3.1) definisani relacijom (3.4), pri čemu su svojstvene

funkcije $y_n(x)$ normirane pomoću (3.5). Tada važi relacija (3.8).

$2 z_n \alpha_n \Phi_2'(z_n) = C_n^2 \Phi_1'(z_n)$

§2. Izračunavanje parametara asimptotike

U ovom paragrafu pokazaćemo da su funkcije:

$$f_1(z) = \Phi_1(z), \quad f_2(z) = \frac{1}{z}\,\Phi_2(z)$$

cele funkcije klase K i izračunaćemo njihove parametre asimptotike.

Neka je $y_1(x,z)$ rešenje jednačine (3.1) koje zadovoljava uslove $y_1(a,z)=1$, $y_1'(a,z)=-iz$. Posmatrajući Vronskijan za funkcije $v_1(x,z)$ i $y_1(x,z)$ (koji je konstantan na intervalu $0 \leq x \leq a$), lako je pokazati da važi:

$$\Phi_1(z) = y_1(0,z). \tag{3.9}$$

Na osnovu leme u §1.[6], funkcija $y_1(x,z)$ se (pod uslovom beskonačne diferencijabilnosti funkcije $q(x)$), kad $z \to \infty$, razlaže u asimptotski red:

$$y_1(x,z) = e^{iz(a-x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{(2iz)^k} + e^{-iz(a-x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(x)}{(2iz)^k}, \tag{3.1o}$$

pri čemu je:

$$c_k(x)=0 \text{ za } 0 \leq k \leq \mu+1, \quad c_{\mu+2}(x)=q^{(\mu)}(a) \neq 0, \quad a_o(x)=1. \tag{3.11}$$

Izvedimo rekurentne formule za ostale koeficijente u (3.1o).

Zamenimo red (3.1o) u jednačinu (3.1). Uporedjivanjem koeficijenata uz jednake stepene z dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} &a_k''(x)-a_{k+1}'(x)-q(x)a_k(x) = 0,\ a_o'(x)=0,\\ &c_k''(x)+c_{k+1}'(x)-q(x)c_k(x) = 0,\ c_o'(x)=0 \quad (k\geqslant 0), \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

odnosno:

$$a_{k+1}(x) = a_{k+1}(a)+a_k'(x)-a_k'(a)+\int_x^a q(t)a_k(t)dt \quad (k\geqslant 0),$$

$$c_{k+1}(x) = c_{k+1}(a)-c_k'(x)+c_k'(a)-\int_x^a q(t)c_k(t)dt \quad (k\geqslant 0),$$

$$a_o'(x) = c_o'(x) = 0.$$

Iz početnih uslova dobijamo:

$$a_o(a)+c_o(a)=1,\ a_k(a)+c_k(a)=0 \quad (k\geqslant 1),$$

$$c_o(a)=0,\ a_k'(a)+c_k'(a)+c_{k+1}(a)=0 \quad (k\geqslant 0),$$

odakle:

$$a_{k+1}(x) = a_k'(x)+c_k'(a)+\int_x^a q(t)a_k(t)dt,\ a_o(x)=1,$$

$$c_{k+1}(x) = -c_k'(x)-a_k'(a)-\int_x^a q(t)c_k(t)dt,\ c_o(x)=0.$$

Da bismo dokazali (3.11) dovoljno je dokazati:

$$a_k'(a)=0 \quad (0\leqslant k\leqslant \mu),\ a_{\mu+1}'(a)=-q^{(\mu)}(a). \tag{3.13}$$

Diferencirajmo prvu jednakost u (3.12) j puta po x:

$$a_k^{(j+2)}(x) - a_{k+1}^{(j+1)}(x) - \sum_{p=0}^{j}\binom{j}{p}q^{(p)}(x)a_k^{(j-p)}(x) = 0. \tag{3.14}$$

Stavljajući $x=a$ i uzimajući u obzir uslov (3.2), dobijamo $a_k^{(j+2)}(a)=a_{k+1}^{(j+1)}(a)$ za $k\geqslant 0$ i $0\leqslant j\leqslant \mu-1$, odnosno $a_k^{(j)}(a)=$ $=a_{k+1}^{(j-1)}(a)$ za $k\geqslant 0$ i $2\leqslant j\leqslant \mu+1$. Ako zamenimo k sa $k+1$, a j sa $j-1$, sledi $a_{k+1}^{(j-1)}(a)=a_{k+2}^{(k-2)}(a)$, odakle, ponavljajući postupak, dobijamo:

$$a_k^{(j)}(a) = a_{k+1}^{(j-1)}(a) = \dots = a'_{k+j-1}(a) \text{ za } k \geqslant 0,\ 2 \leq j \leq \mu+1. \quad (3.15)$$

Za $k=0$, zbog $a_o(x)=1$, sledi $a_o^{(j)}(a)=0$ $(j \geqslant 1)$ i $a'_{j-1}(a)=0$ $(2 \leq \leq j \leq \mu+1)$, tj. $a'_k(a)=0$ $(0 \leq k \leq \mu)$, što dokazuje prvu relaciju u (3.13).

S druge strane, iz (3.14) za $k=o$, $j=\mu$ i $x=a$ dobijamo $a_o^{(\mu+2)}(a)-a_1^{(\mu+1)}(a)-q^{(\mu)}(a)a_o(a) = 0$. No, $a_o^{(\mu+2)}(a)=0$, $a_o(a)=1$, pa je $a_1^{(\mu+1)}(a)=-q^{(\mu)}(a)$. Stavljajući u (3.15) $k=1$, $j=\mu+1$, dobijamo $a_1^{(\mu+1)}(a) = a'_{\mu+1}(a) = -q^{(\mu)}(a)$, čime je (3.13), pa i (3.11) dokazano.

Sada se lako mogu izračunati ostali koeficijenti u redu (3.1o). Za naše potrebe dovoljno je znati njihove vrednosti u tački $x=0$. Tako se naprimer dobija:

$$\begin{aligned}
a_o(0) &= 1,\\
a_1(0) &= A,\\
a_2(0) &= -q(0)+\tfrac{1}{2}A^2,\\
a_3(0) &= -q'(0)-q(0)A-B+\tfrac{1}{6}A^3,\\
c_k(0) &= 0 \quad \text{za } 0 \leq k \leq \mu+1,\\
c_{\mu+2}(0) &= q^{(\mu)}(a),\\
c_{\mu+3}(0) &= q^{(\mu+1)}(a)-q^{(\mu)}(a)A,\\
c_{\mu+4}(0) &= -q(0)q^{(\mu)}(a)-q^{(\mu+1)}(a)A+\tfrac{1}{2}q^{(\mu)}(a)A^2+q^{(\mu+2)}(a)-\\
&\quad -(\mu+2)q(a)q^{(\mu)}(a),
\end{aligned}$$

gde je:

$$A = \int_0^a q(x)dx, \quad B = \int_0^a q^2(x)dx. \quad (3.16)$$

S obzirom na (3.9), time su odredjeni parametri asimptotike funkcije $f_1(z)$.

Posmatrajući Vronskijan funkcija $y_1(x,z)$ i $v_2(x,z)$, dobijamo:

$$\Phi_2(z) = -y_1'(0,z),$$

pa se parametri asimptotike funkcije $f_2(z)$ mogu dobiti diferenciranjem relacije (3.1o). Kao rezultat dobijamo sledeću lemu:

LEMA 3.2 Funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ (pod pretpostavkom beskonačne diferencijabilnosti funkcije $q(x)$) jesu funkcije klase K:

$$f_j(z) = e^{iza}P_{o,j}(z) + e^{-iza}P_{1,j}(z),$$

$$P_{k,j}(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu,j}^{(k)} z^{-\nu} \qquad (z \to \infty)$$

$$(k=0,1;\ j=1,2),$$

pri čemu su prvi parametri asimptotike jednaki:

$$n_o = 0;$$

$$\beta_{o,1}^{(o)} = 1,\ \beta_{1,1}^{(o)} = -\frac{i}{2}A,\ \beta_{2,1}^{(o)} = \frac{1}{4}\left[q(0) - \frac{1}{2}A^2\right],$$

$$\beta_{3,1}^{(o)} = -\frac{i}{8}\left[q'(0) + q(0)A + B - \frac{1}{6}A^3\right];$$

$$\beta_{o,2}^{(o)} = i,\ \beta_{1,2}^{(o)} = \frac{1}{2}A,\ \beta_{2,2}^{(o)} = -\frac{i}{4}\left[q(0) + \frac{1}{2}A^2\right],$$

$$\beta_{3,2}^{(o)} = -\frac{1}{8}\left[q'(0) + q(0)A - B + \frac{1}{6}A^3\right];$$

$$n_1 = -(\mu+2);$$

$$\beta_{o,1}^{(1)} = \frac{1}{(2i)^{\mu+2}}\,q^{(\mu)}(a),\ \beta_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{(2i)^{\mu+3}}\left[q^{(\mu+1)}(a) - q^{(\mu)}(a)A\right],$$

$$\beta_{2,1}^{(1)} = \frac{1}{(2i)^{\mu+4}}\Big[q^{(\mu+2)}(a) - q(0)q^{(\mu)}(a) - q^{(\mu+1)}(a)A +$$

$$+ \frac{1}{2}q^{(\mu)}(a)A^2 - (\mu+2)q(a)q^{(\mu)}(a)\Big];$$

$$\beta_{\nu,2}^{(1)} = -i\beta_{\nu,1}^{(1)} \qquad (\nu=0,1),$$

$$\beta_{2,2}^{(1)} = -i\beta_{2,1}^{(1)} - \frac{1}{(2i)^{\mu+3}} q(0)q^{(\mu)}(a),$$

gde su A i B definisani pomoću (3.16).

§3. Asimptotika spektralne funkcije

Za izračunavanje regularizovane sume recipročnih vrednosti normirajućih koeficijenata α_n (v. (3.4)), potrebno je najpre odrediti asimptotiku nula $z_{n,s}$ funkcije $f_1(z)$, preciznije nego što je to učinjeno u radovima [23] i [6]. Naime, za njih važi formula (1.2):

$$z_{n,s} \sim a_s n \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^k}\right\} \quad (n \to \infty),$$

$$R_k^{(s)}(\ln n) = \sum_{q=0}^{k} r_{q,s}^{(k)} \ln^q n, \quad r_{k,s}^{(k)}=0 \quad \text{za } k > 1 \quad (s=0,1),$$

sa:

$$a_0 = -\frac{\pi}{a}, \quad a_1 = \frac{\pi}{a}.$$

Koeficijente $r_{q,s}^{(k)}$ možemo izračunati pomoću rekurentnih formula iz leme 1.2, na osnovu dobijenih parametara asimptotike u lemi 3.2. Dobija se:

$$r_{1,s}^{(1)} = \pm \frac{\mu+2}{2\pi i}, \quad r_{0,s}^{(1)} = \pm \frac{1}{2\pi i} K \qquad (+ \text{ za } s=0, - \text{ za } s=1);$$

$$r_{1,s}^{(2)} = \left(\frac{\mu+2}{2\pi i}\right)^2, \quad r_{0,s}^{(2)} = -\frac{\mu+2}{2\pi i} \ln K + \frac{a}{2\pi^2} L \qquad (s=0,1);$$

$$r_{q,0}^{(3)} = -r_{q,1}^{(3)} \qquad (q=0,1,2),$$

gde je:

$$K = -\frac{(2\pi i)^{\mu+2}}{a^{\mu+2}q^{(\mu)}(a)}, \quad L = A - \frac{q^{(\mu+1)}(a)}{2q^{(\mu)}(a)} \tag{3.17}$$

(A je definisano pomoću (3.16)).

Za brojeve

$$\beta_{n,s} = \frac{f_2(z_{n,s})}{f_1'(z_{n,s})}$$

važi formula (1.12):

$$\beta_{n,s} \sim \sum_{q=0}^{\infty} \gamma_{q,s} z_{n,s}^{-q} \qquad (n \to \infty),$$

pri čemu se koeficijenti $\gamma_{q,s}$ računaju pomoću formule (1.11) na osnovu parametara asimptotike iz leme 3.2:

$$\gamma_{o,s} = \frac{1}{a}, \quad \gamma_{1,s} = 0, \quad \gamma_{2,s} = -\frac{1}{2a} q(0) - \frac{1}{2a^2} L \quad (s=0,1),$$

$$\gamma_{3,o} = \gamma_{3,1}.$$

Izvršimo sada normiranje svojstvenih funkcija $y_n(x)$, tj. izaberimo vrednosti za konstante C_n u formuli (3.5). Posmatrajmo dva slučaja:

(a) $y_n'(0) = C_n = 1.$

U ovom slučaju se formula (3.8) može prepisati u obliku:

$$\frac{1}{\alpha_n} = 2z_n^2 \operatorname*{res}_{z=z_n} \frac{f_2(z)}{f_1(z)}$$

(v. napomenu iza formule (3.2) u uvodnom delu ove glave). Na taj način, može se primeniti teorema 1.2 sa m=2. Potrebne vrednosti funkcije $S_p^{(s)}(\sigma, \ln n)$ (v. izvodjenje teoreme 1.2) lako se računaju:

$$S_o^{(o)}(-2, \ln n) + S_o^{(1)}(-2, \ln n) = b,$$

$$S_1^{(o)}(-2, \ln n) + S_1^{(1)}(-2, \ln n) = 0,$$

$$S_2^{(o)}(-2,\ln n) + S_2^{(1)}(-2,\ln n) = c \ln^2 n + d \ln n + e,$$
$$S_3^{(o)}(-2,\ln n) + S_3^{(1)}(-2,\ln n) = 0,$$

gde je:

$$b = \frac{2\pi^2}{a^3}, \quad c = -\frac{(\mu+2)^2}{2a^3}, \quad d = -\frac{\mu+2}{a^3}(\ln K + \mu + 2),$$
$$e = -\frac{1}{2a^3}\ln^2 K - \frac{\mu+2}{a^3}\ln K + \frac{1}{a^2} L - \frac{1}{a} q(0), \tag{3.18}$$

a K i L su definisani pomoću (3.17). Uzimajući u obzir da je $\omega_3^{(o)} = -\frac{1}{4} q'(0)$, kao rezultat dobijamo sledeću teoremu:

TEOREMA 3.1 Neka su normirajući koeficijenti α_n operatora (3.1) definisani relacijama (3.4) i (a). $\mu(0)=C_\mu=1$ Tada je regularizovana suma njihovih recipročnih vrednosti jednaka:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n} - bn^2 - c\ln^2 n - d\ln n - e\right] = f,$$

gde su b, c, d i e definisani pomoću (3.18), a

$$f = -\frac{1}{4} q'(0) - b\zeta(-2) - c\zeta''(0) + d\zeta'(0) - e\zeta(0);$$

$\zeta^{(\nu)}(\sigma)$ su vrednosti Rimanove zeta-funkcije i njenih izvoda.

Posmatrajmo sada, pored operatora (3.1), i operator:

$$\left.\begin{aligned} &-y'' + \tilde{q}(x)y = z^2 y, \\ &y(0) = y'(a) + izy(a) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.1'}$$

čiji potencijal $\tilde{q}(x)$ zadovoljava analogne uslove kao i potencijal $q(x)$ operatora (3.1). Označimo sa $\tilde{z}_n$, $\tilde{y}_n(x)$, $\tilde{\alpha}_n$ i $\tilde{\varsigma}(\lambda)$ svojstvene vrednosti, odgovarajuće svojstvene funkcije, normirajuće koeficijente i spektralnu funkciju (respektivno) operatora (3.1'), definisane relacijama analognim (3.4), (a) i (3.3). Tada iz prethodne teoreme sledi:

POSLEDICA 3.1 Ako su za funkciju $q(x)$ vrednosti:

$$q(0),\ q'(0),\ q^{(\mu)}(a),\ q^{(\mu+1)}(a) \text{ i } A$$

iste kao i odgovarajuće vrednosti za funkciju $\tilde{q}(x)$, tada važi jednakost:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\tilde{\alpha}_n} \right) = 0,$$

tj. za $\lambda \to \infty$:

$$\rho(\lambda) = \tilde{\rho}(\lambda) + o(1).$$

NAPOMENA Za izvodjenje teoreme 3.1 i njene posledice nije bilo neophodno pretpostaviti beskonačnu diferencijabilnost funkcija $q(x)$ i $\tilde{q}(x)$ (v. napomenu na kraju § I.1). Dovoljno je pretpostaviti da su ti potencijali $\mu+3$ puta neprekidno diferencijabilni.

Izvršimo sada normiranje svojstvenih funkcija koje zavisi od potencijala:

$$\text{(b)}\quad y_n'(0) = C_n = z_n.$$

Formula (3.8) tada dobija oblik:

$$\frac{1}{\alpha_n} = 2 \operatorname*{res}_{z=z_n} \frac{f_2(z)}{f_1(z)},$$

pa se teorema 1.2 može primeniti sa m=0. Dobija se:

$$S_0^{(o)}(0,\ln n) + S_0^{(1)}(0,\ln n) = \frac{2}{a},$$

$$S_1^{(o)}(0,\ln n) + S_1^{(1)}(0,\ln n) = 0,$$

$$\omega_1^{(o)} = 0,$$

odakle:

<u>TEOREMA 3.2</u> Ako su normirajući koeficijenti α_n operatora (3.1) definisani relacijama (3.4) i (b), važi formula:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}-\frac{2}{a}\right]=\frac{1}{a}\,.$$

Specijalno, važi:

<u>POSLEDICA 3.2</u> Ako su spektralne funkcije $\rho(\lambda)$ i $\tilde{\rho}(\lambda)$ dva operatora tipa (3.1) s potencijalima $q(x)$ i $\tilde{q}(x)$ (koji zadovoljavaju uslove tipa (3.2)) definisane relacijama tipa (3.3), (3.4) i (b), važi asimptotska formula:

$$\rho(\lambda)=\tilde{\rho}(\lambda)+o(1)\qquad(\lambda\to\infty).$$

NAPOMENA Za izvodjenje teoreme 3.2 i njene posledice dovoljno je pretpostaviti da su funkcije $q(x)$ i $\tilde{q}(x)$ $\mu+1$ put neprekidno diferencijabilne.

G L A V A IV

SPEKTRALNA FUNKCIJA OR-ZOMERFELDOVE JEDNAČINE

U teoriji hidrodinamičke stabilnosti (v. npr. [21]) pojavljuje se sledeća jednačina:

$$\left.\begin{aligned} &(D^2-\alpha^2)^2u = i\alpha R\left\{(p(x)-c)(D^2-\alpha^2)u - p''(x)u\right\}, \\ &u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

gde je $D = \frac{d}{dx}$, c spektralni parametar, α i R realne konstante, p(x) realna funkcija. Nju su prvi posmatrali V.Or [22] i A.Zomerfeld [26].

U ovoj glavi za pokazaćemo kako se za (nesamokonjugovani) zadatak (4.1) može prirodno uvesti spektralna funkcija i ispitaćemo njeno asimptotsko ponašanje kad joj argument teži beskonačnosti.

§1. Definicija spektralne funkcije. Formula za normirajuće koeficijente

Pretpostavimo da funkcija p(x) u jednačini (4.1) zadovoljava uslov $\tilde{p} \equiv \int_0^1 p(t)dt = 0$. Time ne ograničavamo opštost razmatranja, jer bismo u suprotnom mogli da posmatramo odgovarajući spektralni zadatak sa funkcijom $p_1(x)=p(x)-\tilde{p}$ umesto p(x) i spektralnim parametrom $\tilde{c}=c-\tilde{p}$ umesto c.

Uvedimo dalje oznake:

$$-i\alpha Rp(x) = r(x),\ i\alpha Rp''(x) = q(x),\ i\alpha Rc = -z^2. \qquad (4.2)$$

Tada se zadatak (4.1) prepisuje u obliku:

$$\left.\begin{aligned} Lu &\equiv (D^2-\alpha^2)^2u + (r(x)-z^2)(D^2-\alpha^2)u + q(x)u = 0, \\ u(0) &= u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1')$$

U radu [11] pokazano je da zadatak (4.1') ima beskonačan diskretni spektar sa svojstvenim vrednostima koje su u dve serije rasporedjene asimptotski po imaginarnoj osi:

$$\left.\begin{aligned} z_{n,1} &\sim 2\pi i n\Big(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,1}}{n^{2\mu}}\Big), \\ z_{n,2} &\sim 2\pi i\big(n+\tfrac{1}{2}\big)\Big(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,2}}{(n+\frac{1}{2})^{2\mu}}\Big) \end{aligned}\right\} \quad (n\to\pm\infty). \qquad (4.3)$$

Kao i u prethodnim glavama, možemo pretpostaviti da su te svojstvene vrednosti proste.

Za ovaj (nesamokonjugovani) zadatak do sada nisu izvedene formule razlaganja po svojstvenim funkcijama koje bi ukazivale kako treba uvesti njegovu spektralnu funkciju. Medjutim, u radu J.D.Tamarkina [16] izvedene su formule za tzv. "beskonačni deo Grinove funkcije" opšteg spektralnog zadatka, kojima se možemo poslužiti.

Naime, kao što je poznato (v. [16] ili, u specijalnom slučaju, [13]), Grinova funkcija $G(x,\xi;z)$ spektralnog zadatka L je meromorfna funkcija parametra z; njeni polovi mogu biti jedino svojstvene vrednosti z_n operatora L. U slučaju prostog pola, reziduum funkcije G u tački $z=z_n$ iznosi

$$\frac{1}{\widetilde{\alpha}_n} u_n(x)v_n(\xi) , \tag{4.4}$$

gde su $u_n(x)$ (resp. $v_n(\xi)$) svojstvene funkcije operatora L (resp. konjugovanog operatora L^*) koje odgovaraju svojstvenoj vrednosti z_n. U poznatim slučajevima u kojima su (baš pomoću razlaganja Grinove funkcije) dokazane formule razlaganja proizvoljnih funkcija u red po svojstvenim funkcijama, koeficijenti $\widetilde{\alpha}_n$ u izrazima (4.4) upravo su jednaki normirajućim koeficijentima koji figurišu u formulama razlaganja i, samim tim, u spektralnoj funkciji (v. Uvod).

S druge strane, za te koeficijente je u pomenutom radu [16] izvedena formula (v. formulu (33_1) na strani 128) koja ih izražava pomoću svojstvenih funkcija i koja, primenjena na naš slučaj, glasi:

$$\widetilde{\alpha}_n = \int_0^1 u_n(x) \frac{\partial}{\partial z} L^*(v_n(x),z)\Big|_{z=z_n} dx. \tag{4.5}$$

Kod nas je konjugovani operator dat sa:

$$\left.\begin{aligned} L^*v &\equiv v^{IV}+(r(x)-2\alpha^2-z^2)v''+2r'(x)v'+\alpha^2(\alpha^2-r(x)+z^2)v = 0, \\ v(0) &= v(1) = v'(0) = v'(1) = 0, \end{aligned}\right\}$$

pa se (4.5) može zapisati u obliku:

$$\widetilde{\alpha}_n = 2z_n \int_0^1 u_n(x) \left[\alpha^2 v_n(x)-v_n''(x)\right] dx.$$

Na osnovu rečenog sledi da je prirodno za normirajuće koeficijente datog spektralnog zadatka odabrati brojeve:

$$\alpha_n = \int_0^1 u_n(x) \left[\alpha^2 v_n(x)-v_n''(x)\right] dx , \tag{4.6}$$

a spektralnu funkciju, s obzirom na (4.3), uvesti pomoću:

$$\rho(\lambda) = \sum_{|\mathrm{Im}\, z_n| < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}. \tag{4.7}$$

Način izbora svojstvenih funkcija $u_n(x)$ i $v_n(x)$ koje odredjuju koeficijente α_n odredićemo kasnije.

Kao i u prethodnim glavama, ispitivanje asimptotike spektralne funkcije $\rho(\lambda)$ zasniva se na izračunavanju regularizovanih suma recipročnih vrednosti normirajućih koeficijenata α_n, a ovo na mogućnosti da se oni izraze na način koji omogućava primenu metoda opisanih u prvoj glavi (v. dalje lemu 4.1). Činjenica da se takva formula za normirajuće koeficijente može izvesti potvrdjuje još jedanput da su oni pravilno izabrani.

Označimo sa $w_j(x,z)$ $(j=1,2,3,4)$ rešenja jednačine (4.1') koja zadovoljavaju početne uslove:

$$w_j^{(p-1)}(0,z) = \delta_{jp} \quad (j,p=1,2,3,4).$$

Tada su svojstvene vrednosti z_n nule funkcije (v. str. 13):

$$\Phi_1(z) = w_3(1,z)w_4'(1,z)-w_4(1,z)w_3'(1,z),$$

a odgovarajuće svojstvene funkcije su:

$$u_n(x) = C_n\left[w_3(1,z_n)w_4(x,z_n)-w_4(1,z_n)w_3(x,z_n)\right],$$

gde su C_n proizvoljne (zasad neodredjene) konstante.

Označimo:

$$\Phi_2(z) = w_1(1,z)w_2'(1,z)-w_2(1,z)w_1'(1,z)$$

i:

$$f(x,z) = \frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(z)}\begin{vmatrix} w_1(1,z) & w_2(1,z) \\ w_1(x,z) & w_2(x,z)\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w_3(1,z) & w_4(1,z) \\ w_3(x,z) & w_4(x,z)\end{vmatrix}. \tag{4.8}$$

Funkcija $f(x,z)$ očigledno zadovoljava jednačinu (4.1'):

$$Lf \equiv (D^2-\alpha^2)^2 f + (r(x)-z^2)(D^2-\alpha^2)f + q(x)f = 0 \tag{4.9}$$

i uslove $f(1,z)=f'(1,z)=0$. S druge strane, $v_n(x)$ je svojstvena funkcija operatora L^* koja odgovara svojstvenoj vrednosti z_n:

$$L^* v_n \equiv v_n^{IV}+(r(x)-2\alpha^2-z_n^2)v_n''+2r'(x)v_n'+\alpha^2(\alpha^2-r(x)+z_n^2)v_n = 0, \tag{4.1o}$$

$$v_n(0) = v_n(1) = v_n'(0) = v_n'(1) = 0.$$

Ako pomnožimo relaciju (4.9) sa $v_n(x)$, a relaciju (4.1o) sa $f(x,z)$, oduzmemo i integrišemo, dobijamo:

$$\int_0^1 \Big\{ \left[f^{IV}(x,z)v_n(x)-f(x,z)v_n^{IV}(x)\right] + \left[r(x)-2\alpha^2\right]\left[f''(x,z)v_n(x)- -f(x,z)v_n''(x)\right] - z^2 f''(x,z)v_n(x) + z_n^2 f(x,z)v_n''(x) - - 2r'(x)v_n'(x)f(x,z) + q(x)f(x,z)v_n(x) + + \alpha^2(z^2-z_n^2)f(x,z)v_n(x)\Big\}\, dx = 0.$$

Posle odgovarajućeg broja parcijalnih integracija, uzimajući u obzir granične uslove koje zadovoljavaju funkcije $f(x,z)$ i $v_n(x)$, kao i vezu izmedju funkcija $q(x)$ i $r(x)$ (v. (4.2)), poslednja relacija dobija oblik:

$$-f'(0,z)v_n''(0) + f(0,z)v_n'''(0) = (z^2-z_n^2)\int_0^1 f(x,z)\left[v_n''(x)-\alpha^2 v_n(x)\right] dx.$$

Uvrstimo sada umesto funkcije $f(x,z)$ izraz (4.8); zatim podelimo dobijenu relaciju sa $z-z_n$ i pustimo da z teži z_n. Uzimajući u obzir definiciju normirajućeg koeficijenta (4.6), dobijamo:

$$-2z_n\alpha_n\Phi_2(z_n) = C_n\left[v_n''(0)w_1(1,z_n)+v_n'''(0)w_2(1,z_n)\right]\Phi_1'(z_n)$$

(prim u $\Phi_1'(z_n)$ označava izvod po z).

Izaberimo sada sledeći način normiranja funkcija $u_n(x)$ i $v_n(x)$ pomoću kojih se definišu normirajući koeficijenti:

$$u_n''(0)\left[v_n''(0)w_1(1,z_n)+v_n'''(0)w_2(1,z_n)\right] = z_n^2 w_4(1,z_n). \tag{4.11}$$

Ako još uvedemo funkcije:

$$f_1(z) = \Phi_1(z)\ ,\ f_2(z) = \frac{1}{z^2}\Phi_2(z)\ , \tag{4.12}$$

imamo dokazanu, na osnovu prethodnog, sledeću lemu:

LEMA 4.1 Neka su normirajući koeficijenti α_n operatora (4.1') definisani formulama (4.6) i (4.11). Tada za njih važi formula:

$$\frac{1}{\alpha_n} = 2z_n \operatorname*{res}_{z=z_n} \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\ .$$

§2. Izračunavanje parametara asimptotike

Pokažimo sada da su $f_1(z)$ i $f_2(z)$ funkcije klase K. Postupak za računanje parametara asimptotike funkcije $f_1(z)$ dat je u radu [11]. Jednostavnosti radi, pretpostavimo da je funkcija $p(x)$ (a sa njom i funkcije $q(x)$ i $r(x)$ - v. (4.2)) beskonačno diferencijabilna (v. napomenu na kraju §I.1).

Na osnovu teoreme 4. iz §31. rada [16], postoje četiri linearno nezavisna rešenja jednačine (4.1') koja zadovoljavaju sledeće asimptotske relacije:

$$u_1(x,z) = e^{zx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(x)}{z^k}, \quad u_2(x,z) = e^{-zx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_k(x)}{z^k},$$
$$u_3(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k,1}(x)}{z^k}, \quad u_4(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k,2}(x)}{z^k} \quad (z\to\infty). \tag{4.13}$$

Zamenom tih relacija u jednačinu (4.1') i uporedjivanjem koeficijenata uz jednake stepene z, dobijaju se sledeće rekurentne veze za odredjivanje funkcija $a_k(x)$, $c_{k,1}(x)$, $c_{k,2}(x)$:

$$a_k'(x) = -\frac{5}{2}a_{k-1}''(x) + \frac{1}{2}(\alpha^2-r(x))a_{k-1}(x) - 2a_{k-2}'''(x) +$$
$$+(2\alpha^2-r(x))a_{k-2}'(x) - \frac{1}{2}a_{k-3}^{IV}(x) + (\alpha^2-\frac{1}{2}r(x))a_{k-3}''(x) +$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha^2 r(x)-q(x)-\alpha^4)a_{k-3}(x),$$

$$a_\nu(x) \equiv 0 \quad (\nu<0);$$

$$(D^2-\alpha^2)c_{k,j}(x) = (D^2-\alpha^2)^2c_{k-2,j}(x) + r(x)(D^2-\alpha^2)c_{k-2,j}(x) +$$
$$+ q(x)c_{k-2,j}(x),$$

$$c_{k,j}(x) \equiv 0 \quad (k<0) \qquad (j=1,2).$$

Ako još normiramo funkcije $a_k(x)$, $c_{k,j}(x)$ pomoću:

$$a_o(0) = 1, \; a_k(0) = 0 \quad (k\geqslant 1);$$

$$c_{o,1}(x) = \operatorname{ch}\alpha x, \; c_{2s,1}(0) = c_{2s,1}'(0) = 0;$$

$$c_{o,2}(x) = \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\alpha}, \; c_{2s,2}(0) = c_{2s,2}'(0) = 0;$$

$$c_{2s-1,j}(x) \equiv 0 \quad (j=1,2) \quad (s=1,2,\ldots),$$

one su jednoznačno odredjene. Tako se npr. dobija:

$$a_o(x) = 1,$$

$$\underline{a_1(x)} = \frac{\alpha^2}{2}x - \frac{1}{2}\int_0^x r(t)dt,$$

$$a_2(x) = \frac{5}{4}(r(x)-r(0)) + \frac{\alpha^4}{8}x^2 - \frac{\alpha^2}{4}x\int_0^x r(t)dt + \frac{1}{8}\Big[\int_0^x r(t)dt\Big]^2;$$

$$c_{0,1}(x) = \operatorname{ch} \alpha x,$$

$$c_{2,1}(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x q(t)\operatorname{ch}\alpha t \operatorname{sh}\alpha(x-t)\, dt,$$

$$c_{0,2}(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\alpha},$$

$$c_{2,2}(x) = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^x q(t)\operatorname{sh}\alpha t \operatorname{sh}\alpha(x-t)\, dt.$$

Uvedimo sada sledeće oznake:

$$\vec{\beta}_j(z) = (u_j(0,z)\ ,\ u_j'(0,z)\ ,\ u_j''(0,z)\ ,\ u_j'''(0,z)) \quad (j=1,2,3,4),$$

$$\vec{w}(x,z) = (w_1(x,z)\ ,\ w_2(x,z)\ ,\ w_3(x,z)\ ,\ w_4(x,z)),$$

gde su $w_j(x,z)$ Košijeva rešenja jednačine (4.1'), posmatrana u prethodnom paragrafu. Označimo dalje sa $\delta(z)$ Vronskijan funkcija $u_1(x,z)$, $u_2(x,z)$, $u_3(x,z)$, $u_4(x,z)$, računat u tački $x=0$. Kao što je već rečeno, svojstvene vrednosti z_n su koreni funkcije $\Phi_1(z)$. S druge strane, $u_j(x,z)$ $(j=1,2,3,4)$ su linearno nezavisna rešenja jednačine (4.1'), pa su svojstvene vrednosti z_n takodje koreni determinante (v. str. 13):

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} u_1(0,z) & u_2(0,z) & u_3(0,z) & u_4(0,z) \\ u_1'(0,z) & u_2'(0,z) & u_3'(0,z) & u_4'(0,z) \\ u_1(1,z) & u_2(1,z) & u_3(1,z) & u_4(1,z) \\ u_1'(1,z) & u_2'(1,z) & u_3'(1,z) & u_4'(1,z) \end{vmatrix} . \qquad (4.14)$$

Na osnovu teoreme jedinstvenosti, važi:

$$u_j(x,z) = (\ \vec{w}(x,z)\ ,\ \vec{\beta}_j(z)\ ) \quad (j=1,2,3,4)$$

(desno stoji skalarni proizvod vektora), odakle:

$$\Delta(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{w}(0,z),\vec{\beta}_1(z)) & (\vec{w}(0,z),\vec{\beta}_2(z)) & (\vec{w}(0,z),\vec{\beta}_3(z)) & (\vec{w}(0,z),\vec{\beta}_4(z)) \\ (\vec{w}'(0,z),\vec{\beta}_1(z)) & (\vec{w}'(0,z),\vec{\beta}_2(z)) & (\vec{w}'(0,z),\vec{\beta}_3(z)) & (\vec{w}'(0,z),\vec{\beta}_4(z)) \\ (\vec{w}(1,z),\vec{\beta}_1(z)) & (\vec{w}(1,z),\vec{\beta}_2(z)) & (\vec{w}(1,z),\vec{\beta}_3(z)) & (\vec{w}(1,z),\vec{\beta}_4(z)) \\ (\vec{w}'(1,z),\vec{\beta}_1(z)) & (\vec{w}'(1,z),\vec{\beta}_2(z)) & (\vec{w}'(1,z),\vec{\beta}_3(z)) & (\vec{w}'(1,z),\vec{\beta}_4(z)) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} w_1(0,z) & w_2(0,z) & w_3(0,z) & w_4(0,z) \\ w_1'(0,z) & w_2'(0,z) & w_3'(0,z) & w_4'(0,z) \\ w_1(1,z) & w_2(1,z) & w_3(1,z) & w_4(1,z) \\ w_1'(1,z) & w_2'(1,z) & w_3'(1,z) & w_4'(1,z) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} u_1(0,z) & u_2(0,z) & u_3(0,z) & u_4(0,z) \\ u_1'(0,z) & u_2'(0,z) & u_3'(0,z) & u_4'(0,z) \\ u_1''(0,z) & u_2''(0,z) & u_3''(0,z) & u_4''(0,z) \\ u_1'''(0,z) & u_2'''(0,z) & u_3'''(0,z) & u_4'''(0,z) \end{vmatrix} =$$

$$= \Phi_1(z)\,\delta(z). \tag{4.15}$$

Poslednju formulu iskoristićemo za računanje parametara asimptotike funkcije $\Phi_1(z)$. Zamenom asimptotskih izraza (4.13) u relaciju (4.14) i razvijanjem dobijene determinante, dobijamo:

$$\Delta(z) = -\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}\, z^2 \left\{ e^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z^k} - e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A_k}{z^k} + 2\sum_{s=0}^{\infty} \frac{C_{2s+1}}{z^{2s+1}} \right\} \quad (z \to \infty), \tag{4.16}$$

pri čemu se za konstante A_k, C_{2s+1} mogu dobiti rekurentne formule.

Naprimer:

$$A_o = 1,$$

$$A_1 = \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \operatorname{cth} \alpha ,$$

$$A_2 = 2\alpha^2 - \alpha^3 \operatorname{cth} \alpha + \frac{\alpha^4}{8} + \frac{3}{4} r(1) - \frac{7}{4} r(0) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha \operatorname{sh} \alpha} \int_0^1 q(t) \operatorname{sh} \alpha t \operatorname{sh} \alpha (1-t)\, dt ;$$

$$C_1 = \frac{2\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} .$$

Na sličan način se dobija:

$$\delta(z) = -2z^5 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_{2s}}{z^{2s}} \quad (z \to \infty), \qquad (4.17)$$

pri čemu:

$$B_o = 1, \; B_2 = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{5}{2} r(0).$$

Uzimajući u obzir (4.15) i (4.12), time su odredjeni parametri asimptotike funkcije $f_1(z)$.

Sličan postupak može se sprovesti i za funkciju $f_2(z)$. Kao rezultat se dobija:

<u>LEMA 4.2</u> Funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$, definisane relacijom (4.12), jesu funkcije klase K (pod pretpostavkom beskonačne diferencijabilnosti funkcije p(x)):

$$f_j(z) = e^z P_{o,j}(z) + P_{1/2,j}(z) + e^{-z} P_{1,j}(z),$$

$$P_{k,j}(z) \sim z^{n_{k,j}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_{\nu,j}^{(k)}}{z^{\nu}} \quad (z \to \infty) \quad (k=0,\tfrac{1}{2},1;\; j=1,2),$$

pri čemu su njihovi prvi parametri asimptotike jednaki:

$$n_{o,j} = -3 \quad (j=1,2);$$

$$\beta^{(o)}_{o,1} = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{2\alpha}, \quad \beta^{(o)}_{1,1} = \frac{1}{4}\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha - \mathrm{ch}\,\alpha,$$

$$\beta^{(o)}_{2,1} = \frac{3}{4}\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha + \frac{1}{16}\alpha^3\mathrm{sh}\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{ch}\,\alpha + \frac{3\,\mathrm{sh}\,\alpha}{8\alpha}(r(0)+r(1)) + \frac{1}{2\alpha^2}A;$$

$$\beta^{(o)}_{\vartheta,2} = \alpha^2\beta^{(o)}_{\vartheta,1} \quad (\vartheta=0,1),$$

$$\beta^{(o)}_{2,2} = \frac{5}{4}\alpha^3\mathrm{sh}\,\alpha + \frac{1}{16}\alpha^5\mathrm{sh}\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^3\mathrm{ch}\,\alpha + \frac{\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha}{8}(3r(1)-r(0)) + \frac{1}{2}A +$$
$$+ \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{2\alpha}\,q(0);$$

$$n_{1,j} = -3;\ \beta^{(1)}_{2\vartheta,j} = -\beta^{(o)}_{2\vartheta,j} \quad (\vartheta=0,1);\ \beta^{(1)}_{1,j} = \beta^{(o)}_{1,j} \quad (j=1,2);$$

$$n_{1/2,1} = -4;\ \beta^{(1/2)}_{o,1} = 2,\ \beta^{(1/2)}_{1,1} = 0;$$

$$n_{1/2,2} = -2;\ \beta^{(1/2)}_{o,2} = 1,\ \beta^{(1/2)}_{1,2} = 0,\ \beta^{(1/2)}_{2,2} = 2\alpha^2,$$

gde je:

$$A = \int_0^1 q(t)\,\mathrm{sh}\,\alpha t\ \mathrm{sh}\,\alpha(1-t)\,dt. \tag{4.18}$$

§3. Asimptotika spektralne funkcije

Odredimo najpre asimptotsko ponašanje nula z_n funkcije $f_1(z)$. S obzirom da indikatorski dijagram te funkcije obrazuju tri tačke na jednoj duži: 1, 0, i -1, ne mogu se direktno primeniti formula (1.2) i lema 1.2.

Iz (4.17) sledi da je $\delta(z)\neq 0$ za veliko $|z|$. Kako nas interesuju samo koreni koji su veliki po modulu, na osnovu (4.15) dovoljno je posmatrati jednačinu $\Delta(z) = 0$. Ako uvedemo smenu $e^z=w$, dobijamo:

———

$$w^2P_1(z) + 2wP_2(z) + P_3(z) = 0,$$

gde su $P_s(z)$ $(s=1,2,3)$ funkcije odredjene sumama u velikoj zagradi u izrazu (4.16). Kako su one regularne, poslednja jednačina odredjuje dve analitičke grane:

$$w_{1,2}(z) = \left[-P_2(z) \pm (P_2^2(z)-P_1(z)P_3(z))^{1/2}\right] P_1^{-1}(z).$$

Na osnovu (4.16) važi:

$$P_1(z) = 1 + O(\tfrac{1}{z}),\ P_2(z) = O(\tfrac{1}{z}),\ P_3(z) = -1 + O(\tfrac{1}{z}) \quad (z \to \infty),$$

odakle:

$$w_{1,2}(z) = \pm 1 + O(\tfrac{1}{z}) \quad (z \to \infty)$$

i za obe grane se može odrediti asimptotika po stepenima $\frac{1}{z}$.

Na taj način, ispunjeni su uslovi leme 1.3 i asimptotika korena z_n funkcije $\Delta(z)$ (a time i funkcije $f_1(z)$) računa se pomoću formula sličnim onim u lemi 1.2. Kao rezultat se dobija da su koreni rasporedjeni asimptotski u dve serije:

$$\left.\begin{aligned} z_{n,1} &\sim 2\pi i n\left\{1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,1}}{n^{2\mu}}\right\}, \\ z_{n,2} &\sim 2\pi i(n+\tfrac{1}{2})\left\{1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,2}}{(n+\frac{1}{2})^{2\mu}}\right\} \end{aligned}\right\} (n \to \pm\infty), \qquad (4.3)$$

pri čemu se za koeficijente $r_{\mu,j}$ dobija sledeća rekurentna formula:

$$r_{\mu+1,j} = \sum_{m=2}^{\mu+1} \sum_{\sum_{i=1}^{m}\mu_i=\mu+1} \frac{1}{2\mu+1}\binom{2\mu+1}{m} r_{\mu_1,j} \cdots r_{\mu_m,j} -$$

$$- (-1)^{\mu+1} \frac{(2\pi)^{-(2\mu+2)}}{2\mu+1}\,\delta_{\mu+1,j} \qquad (j=1,2;\ \mu \geq 0).$$

$\delta_{\vartheta,j}$ su koeficijenti formalnih redova:

$$\frac{w_j'(z)}{w_j(z)} \sim \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{\delta_{\vartheta,j}}{z^{2\vartheta}} \quad (z \to \infty) \quad (j=1,2)$$

i iznose:

$$\delta_{\vartheta,j} = \sum_{m=1}^{2\vartheta-1} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m} k_i = 2\vartheta-1 \\ k_i \geq 1}} \tau_{k_1,j} \cdots \tau_{k_m,j} (-1)^{mj} \frac{2\vartheta-1}{m},$$

gde su brojevi $\tau_{k,j}$ odredjeni rekurentnim vezama:

$$\tau_{2s+1,j} = -C_{2s+1} - \sum_{\vartheta=1}^{2s+1} \tau_{2s+1-\vartheta,j} A_{\vartheta} \quad (s=0,1,2,\dots),$$

$$\tau_{2s,j} = \frac{1}{2} \sum_{\vartheta=1}^{2s-1} \tau_{2s-\vartheta,j}\, \tau_{\vartheta,j} (-1)^{\vartheta+j} \quad (s=1,2,\dots),$$

$$\tau_{0,1} = 1, \quad \tau_{0,2} = -1 \quad (j=1,2);$$

A_{ϑ} i C_{2s+1} su koeficijenti u razlaganju (4.16).

Specijalno, lako se računa:

$$\tau_{0,1} = 1, \quad \tau_{1,1} = -(A_1+C_1),$$

$$\tau_{0,2} = -1, \quad \tau_{1,2} = A_1-C_1,$$

odakle:

$$\delta_{1,1} = A_1+C_1, \quad \delta_{1,2} = A_1-C_1$$

i:

$$r_{1,j} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \operatorname{cth} \alpha \pm \frac{2\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \right) \quad (+ \text{ za } j=1, - \text{ za } j=2).$$

Ispitajmo sada na koji način treba izmeniti razmatranja iz § I.3 zbog postojanja tačke $\overline{\alpha}_{1/2}=0$ na stranici indikatorskog dijagrama funkcija $f_j(z)$ sa krajevima $\overline{\alpha}_0=1$, $\overline{\alpha}_1=-1$.

Formula (1.4) i tvrdjenja lema 1.4 i 1.5 ostaju da važe bez promena. U izvodjenju teorema 1.1 i 1.2 treba izvršiti sledeće izmene.

Umesto formule (1.9) dobija se:

$$f_j(z) = e^{v_j}\left[e^{u_j} + e^{-u_j} + Q_j(z) + g_j(z)\right], \qquad (1.9')$$

gde funkcije $g_j(z)$ imaju isto ponašanje kao u dokazu teoreme 1.1, a

$$Q_j(z) = \frac{P_{s+\frac{1}{2},j}(z)}{\left[P_{s,j}(z)P_{s+1,j}(z)\right]^{1/2}} \qquad (j=1,2).$$

Na taj način, umesto nula funkcije (1.1o) treba posmatrati nule sa velikim modulima funkcije:

$$\varphi_1(u_1) = e^{v_1}\left[e^{u_1} + e^{-u_1} + Q_1 + g_1(z(u_1))\right]. \qquad (1.1o')$$

U našem primeru (odredjenosti radi, posmatrajmo slučaj $s=0$ i $n \to +\infty$), na osnovu leme 4.2 važi:

$$Q_1(z) \sim \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Theta_\nu}{z^\nu} \qquad (z \to \infty),$$

pri čemu $\Theta_0 = -4i\,\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$, $\Theta_1 = 0$. Odatle dobijamo da za rešenja $u_1^{(1)}$ i $u_1^{(2)}$ jednačine $e^{u_1}+Q_1+e^{-u_1}=0$ važi:

$$e^{u_1^{(1)}} \sim i\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varkappa_\nu}{z^\nu}, \quad e^{u_1^{(2)}} \sim -i\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\varkappa_\nu}{z^\nu} \qquad (z \to \infty),$$

gde je $\varkappa_0 = 1$, $\varkappa_1 = \frac{2\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$, $\varkappa_2 = \frac{2\alpha^2}{\operatorname{sh}^2\alpha}$.

Tako se za brojeve

$$\beta_n^{(1)} = \frac{f_2(z_{n,1})}{f_1'(z_{n,1})}$$

umesto formule (1.11) dobija formula:

$$\beta_n^{(1)} \sim \Big\{ \Big[\sum_{\vartheta=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_\vartheta}{z^\vartheta} \Big] \frac{P_{o,2}(z)}{P_{o,1}(z)} - \Big[\sum_{\vartheta=0}^{\infty} (-1)^\vartheta \frac{\mathcal{H}_\vartheta}{z^\vartheta} \Big] \frac{P_{1,2}(z)}{P_{1,1}(z)} -$$

$$- i \frac{P_{1/2,2}(z)}{\big[P_{o,1}(z) P_{1,1}(z)\big]^{1/2}} \Big\} \times$$

$$\times \Big\{ \Big[\sum_{\vartheta=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_{2\vartheta}}{z^{2\vartheta}} \Big] \Big[2 + \frac{P'_{o,1}(z)}{P_{o,1}(z)} - \frac{P'_{1,1}(z)}{P_{1,1}(z)} \Big] - iQ'_1(z) \Big\}^{-1} \Bigg|_{z=z_{n,1}} \qquad (1.11')$$

Analogno izgledaju formule za brojeve $\beta_{-n}^{(1)}$ i $\beta_{\pm n}^{(2)}$, koji se definišu na očigledan način.

Zamenjujući parametre asimptotike iz leme 4.2, dobijamo umesto (1.12):

$$\beta_{\pm n}^{(1)} \sim \sum_{q=0}^{\infty} \gamma_{q,1} z_{\pm n,1}^{1-q} \qquad (n \to \infty) \qquad (1.12')$$

i

$$\beta_{\pm n}^{(2)} \sim \sum_{q=0}^{\infty} \gamma_{q,2} z_{\pm n,2}^{1-q} \qquad (n \to \infty), \qquad (1.12'')$$

sa:

$$\gamma_{o,\mu} = \mp \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \qquad (-\text{ za } \mu=1, + \text{ za } \mu=2),$$

$$\gamma_{1,\mu} = 0 \qquad (\mu=1,2),$$

$$\gamma_{2,\mu} = \mp \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} D_\mu \qquad (-\text{ za } \mu=1, + \text{ za } \mu=2),$$

gde je

$$D_1 = \alpha^2 - 2\alpha \operatorname{cth} \alpha - \frac{2\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - \frac{3}{4}(r(0)+r(1)) - \frac{1}{\alpha \operatorname{sh} \alpha} A,$$

$$D_2 = D_1 + \frac{4\alpha}{\operatorname{sh}\alpha},$$

a A je definisano pomoću (4.18).

Proizvod $z^{-\sigma}_{\pm n,1}\beta^{(1)}_{\pm n,1}$ ima sada asimptotsko ponašanje:

$$z^{-\sigma}_{\pm n,1}\beta^{(1)}_{\pm n} \sim \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_{p,1}(\sigma,\ln n)}{n^{p+\sigma-1}} \qquad (n\to\infty), \tag{4.19'}$$

sa:

$$\begin{aligned} S_{o,1}(-1,\ln n) &= \frac{4\pi^2\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}, \\ S_{1,1}(-1,\ln n) &= 0, \\ S_{2,1}(-1,\ln n) &= \frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}E_1, \end{aligned} \tag{4.2o'}$$

gde je:

$$\begin{aligned} E_1 &= 8\pi^2 r_{1,1} - D_1 = \\ &= \frac{6\alpha}{\operatorname{sh}\alpha} - 2\alpha\operatorname{cth}\alpha + \frac{3}{4}(r(0)+r(1)) + \frac{1}{\alpha\operatorname{sh}\alpha}A. \end{aligned} \tag{4.21'}$$

Što se tiče odgovarajućeg izraza za drugu seriju korena, on dobija oblik:

$$z^{-\sigma}_{\pm n,2}\beta^{(2)}_{\pm n} \sim \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_{p,2}(\sigma,\ln n)}{(n+\frac{1}{2})^{p+\sigma-1}} \qquad (n\to\infty), \tag{4.19''}$$

sa:

$$\begin{aligned} S_{o,2}(-1,\ln n) &= -\frac{4\pi^2\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}, \\ S_{1,2}(-1,\ln n) &= 0, \\ S_{2,2}(-1,\ln n) &= -\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}E_2, \end{aligned} \tag{4.2o''}$$

gde je:

$$E_2 = 8\pi^2 r_{1,2} - D_2 = E_1 - 12\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}. \tag{4.21''}$$

Na taj način, prilikom računanja vrednosti funkcije $\Phi^{(o)}_{\tau}(\sigma)$ treba koristiti i uopštenu Rimanovu zeta-funkciju (v. npr. [2]). Na osnovu leme 4.1, iz (4.19) i (4.2o) dobijamo da važi:

TEOREMA 4.1 Za normirajuće koeficijente α_n operatora (4.1'), definisane pomoću relacija (4.6) i (4.11), važi formula:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha}\left[4\pi^2n^2+E_1\right] + \frac{2\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha}\left[4\pi^2(n+\tfrac{1}{2})^2+E_2\right]\right\} =$$

$$= \omega_2 + \frac{\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha}E_1 - \frac{2\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha}(\pi^2+E_2)\ ,$$

gde su E_1 i E_2 odredjeni pomoću (4.21'), (4.21") i (4.18), a

$$\omega_2 = \alpha^4 - \alpha^4\mathrm{cth}\,\alpha + \alpha^5\mathrm{cth}\,\alpha - \alpha^2 r(0) + q(0).$$

Posmatrajmo sada, pored operatora (4.1), i operator istog oblika, no sa funkcijom $\tilde{p}(x)$ umesto $p(x)$ (takodje beskonačno diferencijabilnom). Definišimo njegovu spektralnu funkciju $\tilde{\varrho}(\lambda)$ formulama analognim (4.6), (4.11) i (4.7). Tada iz teoreme 4.1 sledi:

POSLEDICA 4.1 Ako su za funkciju $p(x)$ vrednosti (v. (4.2) i (4.18)):

$$r(0),\ r(1),\ q(0) \text{ i } A$$

iste kao i odgovarajuće vrednosti za funkciju $\tilde{p}(x)$, tada važi asimptotska formula:

$$\tilde{\varrho}(\lambda) = \varrho(\lambda) + \sigma(1) \qquad (\lambda \to \infty).$$

L I T E R A T U R A

1. Н.И.АХИЕЗЕР, И.М.ГЛАЗМАН: Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд. 3-ье, "Вища школа", Харков; т. 1 1977., т.2 1978.
2. И.С.ГРАДШТЕЙН, И.М.РЫЖИК: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 5-ое, "Наука", Москва 1971.
3. И.М.ГЕЛЬФАНД, Б.М.ЛЕВИТАН: Об одном простом тождестве дльа собственных значений дифференциального оператора второго порядка, ДАН СССР 88 /1953/, 593-594
4. З.КАДЕЛБУРГ: Об асимптотике спектральной функции для обыкновенных дифференциальных операторов, заданных двучленой операцией на отрезке, Дифференц. уравн. /в печаты/
5. З.КАДЕЛБУРГ: Об асимптотика спектральных функций двух несамосопряженных краевых задач, Мат. заметки /в печаты/
6. А.О.КРАВИЦКИЙ: О двукратном разложении в ряд по собственным функциям одной несамосопряженной краевой задачи, Дифференц. уравн. 4, 1 /1968/, 165-177
7. Б.М.ЛЕВИТАН: Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям, Изв. АН СССР, сер. матем. I 17 /1953/ 331-364; II 19 /1955/, 33-58
8. Б.М.ЛЕВИТАН, И.С.САРГСЯН: Введение в спектральную теорию

/самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы/, "Наука", Москва 1970.

9. В.Б.ЛИДСКИЙ, В.А.САДОВНИЧИЙ: Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, Функц. анализ прил. 1, 2 /1967/, 52-59

10. В.Б.ЛИДСКИЙ, В.А.САДОВНИЧИЙ: Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций, Матем. сборник 75, 4 /1968/, 558-566

11. В.Б.ЛИДСКИЙ, В.А.САДОВНИЧИЙ: Формулы следов в случае уравнения Орра-Зоммерфельда, Изв. АН СССР, сер. матем. 32, 3 /1968/, 633-648

12. В.А.МАРЧЕНКО: Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем. 19, 6 /1955/, 381-422

13. М.А.НАЙМАРК: Линейные дифференциальные операторы, изд. 2-ое, "Наука", Москва 1969.

14. В.А.САДОВНИЧИЙ: О следах с весом и об асимптотике спектральной функции, Дифференц. уравн. 10, 10 /1974/, 1808-1818

15. В.А.САДОВНИЧИЙ: Теория операторов, Изд.-во МГУ, Москва 1979.

16. Я.Д.ТАМАРКИН: О некоторых общих задач теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функции в ряды, Петроград 1917.

17. Д.К.ФАДДЕЕВ, И.С.СОМИНСКИЙ: Сборник задач по высшей алгебре, изд. 11-ое, "Наука", Москва 1977.

18. V.de ALFARO, T.REGGE: Potential scattering, North Holland, Amsterdam 1965.

19. N.DUNFORD, J.T.SCHWARTZ: Linear operators, Interscience publishers, New York-London,

part I: General theory, 1958.;

part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space, 1963.

2o. J.HORN: Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung, Math. Ann. 49 (1897), I 453-472; II 473-496

21. LIN C.C.: The theory of hydrodynamic stability, Cambridge at the University Press 1955.

23. T.REGGE: Analitic properties of the scattering matrix, Nuovo Cimento 8, 5 (1958), 671-679

24. T.REGGE: Construction of potentials from resonance parameters, Nuovo Cimento 9, 3 (1958), 491-5o3

22. W.McF. ORR: The stability or instability of the steady motions of a liquid, Proc. R. Irish Acad., A, 27 (19o6-19o7), 9-27, 69-138

25. F.RIESZ, B.SZ.-NAGY: Leçons d'analyse fonctionelle, 4-ème ed., Gauthiers Villars & Akadémiai Kiadó, Paris-Budapest 1965.

26. A.SOMMERFELD: Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen, Atti dei IV Congr. intern. dei Matem., Vol. III (19o9), 116-124

27. E.C.TITCHMARSH: The theory of Riemann zeta-function, Oxford 1951.