2062

U N I V E R Z I T E T U S A R A J E V U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

JUSUF ALAJBEGOVIĆ

OPŠTA TEOREMA APROKSIMACIJE ZA KOMUTATIVNE PRSTENE I ZA TIJELA

Disertacija za sticanje akademskog stepena doktora matematičkih nauka

Mentor: Prof. dr Veselin Perić

SARAJEVO , 1983.

S A D R Ž A J

U V O D

Cilj ovoga rada je dokaz Opšte teoreme aproksimacije za Manisove valuacije nekih klasa komutativnih prstena,odnosno za Schillingove valuacije tijela . Komutativni prsteni se razmatraju u prve dvije glave rada,a u poslednjoj, trećoj glavi ispituju se valuacije (nekomutativnog) tijela .

——— U prvoj glavi osnovni rezultat je Opšta teorema aproksimacije (Teorema 4.6.). Od posebnog interesa su takodje, neki rezultati o R-Prüferovim prstenima .

U §1.gl.I daju se osnovne činjenice o Manisovoj valuaciji komutativnog prstena ([27] , [28] , [26]).
Tvrdnja 1.4. i Tvrdnja 1.6. ilustruju način na koji je izvršen prelaz sa slučaja Manisove valuacije totalnog prstena razlomaka (nekog prstena) na slučaj valuacije proizvoljnog komutativnog prstena . Tako su uopšteni odgovarajući rezultati I.Griffin-a [17] i M.D.Larsen-a [26] o valuacijama na totalnom prstenu razlomaka .

U §2.gl.I razmatraju se R-Prüferovi prsteni u smislu J.Gräter-a [15] . Ranije data definicija R-Prüferovog prstena u [18] imala je za posljedicu neke netačne (i nepotpune) tvrdnje M.Griffin-a (napr. [18] , Proposition 14.) U ovom paragrafu su izbjegnuti ti problemi,tačnije dokazano je da vrijede odgovarajuće tvrdnje M.Griffin-a,ali sada uz nešto strožiju definiciju R-Prüferovog prstena (Def.2.18). Takodje su dobiveni neki rezultati o R-Prüferovim prstenima i bez dodatne pretpostavke da njihov totalan prsten razlomaka sadrži

R kao svoj podprsten (napr. Teorema 2.4.). Posebno treba istaći sljedeće rezultate :

1) pokazano je da svaki konačno-generisani R-regularni ideal R-Prüferovog prstena mora biti R-invertibilan (Teorema 2.9.); time je uopšten jedan rezultat M.Griffin-a ([18],Th.7);

2) u Tvrdnji 2.21. je pokazano da za R-Prüferov prsten A vrijedi jedna varijanta Kineske teoreme o ostacima (Def.2.18.) i bez pretpostavke da je R podprsten totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A ; tako je uopšten odgovarajući rezulata M.Griffin-a ([18] , str.425.) ;

3) u Teoremi 2.26. je pokazano da za netrivijalnu valuaciju v prstena R , takvu da je prsten R_v te valuacije R-Prüferov, a pozitivni ideal P_v te valuacije R-regularan, mora biti P_v najveći R-regularni pravi prosti ideal u R_v , a takodje svaki R-regularni ideal prstena R_v je i v-zatvoren ; prva tvrdnja ove teoreme tako pokazuje da,uz Def.2.18., vrijedi jedan sporni rezultat M.Griffin-a ([18] , Prop.14.).

U §3.gl.I uvodi se pojam prstena sa velikim Jacobsonovim radikalom (Def.3.1.). Jednostavan primjer (Primjer 3.4.) pokazuje da prsten sa velikim Jacobsonovim radikalom ne mora biti totalan prsten razlomaka (nekog prstena).

Osnovni rezultat ovog paragrafa dat je u Teoremi 3.6.,gdje je pokazano da za netrivijalne valuacije $v_1,\dots,v_n$ prstena R sa velikim Jacobsonovim radikalom prsten $A=R_{v_1}\cap\cdots\cap R_{v_n}$ mora biti R-Prüferov , te da je R podprsten totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A . Takodje je pokazano da u prstenu A postoji

-regularan element a proizvoljno velike valuacije $v_j(a)$, =1,...,n . Rezultati Teoreme 3.6. poslužili su kao povod za nešto drugačiju definiciju aproksimacione familije valuacija prstena (Def.3.8.;uporediti sa [18] str.425.) . U Tvrdnji 3.9. je iskazana činjenica da je svaka konačna familija netrivijalnih valuacija prstena sa velikim Jacobsonovim radikalom aproksimaciona familija za taj prsten .

U §4.gl.I razmatraju se teoreme aproksimacije za aproksimacione familije valuacija. Osnovni rezultat ovog paragrafa je Opšta teorema aproksimacije (Teorema 4.6.). Pored pojma aproksimacione familije za ovaj paragraf su bitni ranije navedeni rezultati o R-Prüferovim prstenima . Teorema aproksimacije u okolini nule (Teorema 4.2.) dokazuje se jednostavno uz pomoć Tvrdnje 4.1.,a nakon toga se dokazuje i Opšta teorema aproksimacije (Teorema 4.6.). Kao posljedice te teoreme dobivene su Opšta teorema aproksimacije za valuacije prstena sa velikim Jacobsonovim radikalom (Teorema 4.8.) i Opšta teorema aproksimacije M.Arapovića za valuacije totalnog prstena razlomaka Prüferovog prstena (Teorema 4.9.).

——— U drugoj glavi se dokazuju teoreme aproksimacije za inverzno povezane familije valuacija (Def.1.1.). Osnovni rezultati ove glave su Teorema aproksimacije u okolini nule (Teorema 2.2.) za konačno mnogo inverzno povezanih i u parovima neuporedivih valuacija i rezultati o tzv. strogo inverzno povezanim valuacijama (Def.1.1.) dati u Teoremi 2.5.

U §1.gl.II daju se neke pomoćne tvrdnje o inverzno povezanim valuacijama (Lema 1.2.,Tvrdnja 1.4.),te se tako opravdava uvodjenje pojma saglasne familije (Primjedba 1.5.iv)).

U §2.gl.II dokazuje se Tvrdnja 2.1. koja jednostavno povlači teoremu aproksimacije u okolini nule (Teorema 2.2.). Time je uopšten odgovarajući rezultat J.Gräter-a ([15], Satz 2.5. i Satz 2.6.). Teorema 2.4. pokazuje da vrijedi Teorema aproksimacije u okolini nule za u parovima neuporedive netrivijalne valuacije $v_1,\dots,v_n$ prstena R za koje je prsten $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$ R-Prüferov . Takodje je pokazano da za strogo inverzno povezane valuacije $v_1,\dots,v_n$ prstena R , takve da u $R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$ postoje R-regularni elementi a proizvoljno velike valuacije $v_i(a)$, $i=1,\dots,n$, vrijedi Opšte teorema aproksimacije .

——— U trećoj glavi se dokazuje Opšta teorema aproksimacije za Schillingove valuacije (nekomutativnog)tijela (Teorema 3.14.).

U §1.gl.III date su osnovne činjenice o Schillingovim valuacijama tijela prema [37] , ali su formulisane i dokazane i neke druge tvrdnje po analogiji sa valuacijama na polju .

Uvode se u razmatranje invarijantni prsteni (Def.1.19.) i dokazuje se da je za ideale takvih prstena moguće definisati pojam radikala kao u slučaju komutativnih prstena,te da je radikal ideala valuacione oblasti kompletno prosti ideal te oblasti (Tvrdnja 1.27.). U Primjeru 1.28. se ukazuje na to da kompletno prosti ideal P valuacione oblasti R tijela K ne mora biti invarijantan za sve unutrašnje automorfizme tijela K, specijalno P ne mora biti pozitivni ideal neke valuacione nadoblasti (u K) od R .

U §2.gl.III razmatraju se osnovne činjenice o M-valuacijema tijela kako ih je definisao K.Mathiak u [29] . Tako se napr. u Tvrdnji 2.9. pokazuje da za M-valuacionu oblast R tijela K problem naznačen u Primjeru 1.28. otpada (vidi i Primjedbu 2.10.).

U §3.gl.III daje se Opšta teorema aproksimacije za Schillingove valuacije tijela (Teorema 3.14.). U tu svrhu je formulisan niz tvrdnji u vezi sa nekomutativnim prstenima razlomaka i u vezi sa nekomutativnim aritmetičkim prstenima, polazeći od rezultata radova [7] , [11] , [38] i [39] . Na osnovu toga se zatim jednostavno dokazuju Tvrdnja 3.4. i Tvrdnja 3.6. (takodje i tvrdnje iskazane u Primjedbi 3.5.), čime se opravdava korištenje Kineske teoreme o ostacima za prsten jednak presjeku konačno mnogo neuporedivih valuacionih podoblasti nekog tijela .

Osnovna tvrdnja koja omogućava dokaz Teoreme aproksimacije u okolini nule je Tvrdnja 3.12. Nakon toga se jednostavno dobija Teorema 3.13. i konačno Opšta teorema aproksimacije za Schillingove valuacije tijela (Teorema 3.14.) .

Posebno se zahvaljujem prof.dr Veselinu Periću za podršku i korisne savjete u toku izrade ovog rada .

GLAVA I

R-PRÜFEROVI PRSTENI I TEOREME APROKSIMACIJE

§1. Osnovni pojmovi i činjenice o Manisovoj valuaciji

Pod valuacijom v komutativnog prstena R smatraćemo Manisovu valuaciju [27] ,dakle,preslikavanje $v: R \to \Gamma \cup \{\infty\}$, gdje je $(\Gamma,+)$ totalno uredjena Abelova grupa,a simbol $\infty \notin \Gamma$ takav da je za sve $\gamma \in \Gamma$ tačno $\gamma < \infty$, $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty + \infty = \infty$, a osim toga vrijedi :

i) $v(R) = \Gamma \cup \{\infty\}$;

ii) $(\forall x,y \in R)$ $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$;

iii) $(\forall x,y \in R)$ $v(x+y) \geqslant \min\{v(x),v(y)\}$.

Skup $R_v = \{x \in R : v(x) \geqslant 0\}$ je podprsten prstena R i naziva se prsten valuacije v ,dok je skup $P_v = \{x \in R : v(x) > 0\}$ prosti ideal prstena R_v i naziva se pozitivni ideal valuacije v . Beskonačni ideal valuacije v je skup $v^{-1}(\infty) = \{x \in R : v(x) = \infty\}$ i to je prosti ideal i prstena R i prstena R_v . Za valuaciju v prstena R kažemo da je trivijalna ako je $\{v(x) : x \in R\} = \{0,\infty\}$, a inače kažemo da je valuacija netrivijalna.Očigledno je da postoji bijekcija izmedju skupa svih trivijalnih valuacija prstena R i skupa svih prostih ideala prstena R .

Posmatraćemo u daljem samo prstene koji imaju jedinični element.Sljedeći rezultat pripada M.E.Manis-u :

1.1. Teorema ([28, Proposition 1.])

Neka je prsten A podprsten prstena R i P prosti ideal prstena A. Tada su sljedeće tvrdnje medjusobno ekvivalentne :

1) Ako je B podprsten prstena R i M prosti ideal prstena B tako da vrijedi $A \subseteq B \subseteq R$ i $A \cap M = P$, tada je $A = B$;

2) $(\forall x \in R \setminus A)(\exists p \in P)\ xp \in A \setminus P$;

3) Postoji valuacija $v: R \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ prstena R takva da je $R_v = A$ i $P_v = P$.

Za par (A,P) koji ima osobine 1),2),3) prethodne teoreme, kažemo da je valuacioni par prstena R .

Za dvije valuacije v i w prstena R kažemo da su uporedive ako je $v \leqslant w$ ili $w \leqslant v$, pri čemu $w \leqslant v$ označava upravo da postoji neki uredjajni epimorfizam f sa $\Gamma_v \cup \{\infty\}$ na $\Gamma_w \cup \{\infty\}$ takav da je $f(\infty) = \infty$, a $f(\gamma) \in \Gamma_w$ $(\gamma \in \Gamma_v)$ i za sve $x \in R$ vrijedi $w(x) = f(v(x))$. Primjetimo da u slučaju $w \leqslant v$ sigurno vrijedi $v^{-1}(\infty) = w^{-1}(\infty)$. U slučaju da je $w \nleqslant v$ i $v \nleqslant w$, za valuacije v i w prstena R kažemo da su neuporedive.

Za valuacije v i w prstena R kažemo da su zavisne ako postoji netrivijalna valuacija v' prstena R takva da je $v' \leqslant v$ i $v' \leqslant w$. Inače, valuacije v i w nazivamo nezavisnim.

Ako je $v: R \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ valuacija prstena R , za ideal Q prstena R_v kažemo da je v-zatvoren ako iz $v(a) \leqslant v(x)$

za neke $a \in Q$ i $x \in R$ slijedi $x \in Q$.

Primjetimo da je radikal proizvoljnog v-zatvorenog pravog ideala valuacionog prstena sigurno pravi prosti ideal valuacionog prstena.

Ukoliko ideal Q prstena R_v sadrži regularan element prstena R_v , kažemo da je ideal Q regularan, a ukoliko u Q postoji element invertibilan u R , tada za ideal Q kažemo da je R-regularan. Ova ista definicija regularnog, odnosno R-regularnog ideala ostaje i u slučaju da se umjesto R_v posmatra proizvoljan podprsten A prstena R i ideal Q u A.

M.Griffin je u [17] uveo pojam širokog prstena razlomaka $A_{[P]}$ prstena A po prostom idealu P u A , gdje je A podprsten nekog prstena R , na sljedeći način :

$$A_{[P]}=\{x \in R:(\exists s \in A \setminus P)\ xs \in A\} .$$

M.D.Larsen [25] , [26] je idealu Q prstena A pridružio skup $Q^{*}=[Q]A_{[P]}=\{x \in R:(\exists s \in A \setminus P)\ xs \in Q\}$ .Naravno, Q^{*} je ideal prstena $A_{[P]}$, zatim $QA_{[P]} \subseteq Q^{*}$ i vrijedi $Q^{*} \cap A=Q$. Specijalno, ako je Q prosti ideal prstena A ,tada je Q^{*} prosti ideal prstena $A_{[P]}$. Ako je ideal P R-regularan, lako se vidi da je $A_{[P]} \subsetneq R$. Može se pokazati da u nekim specijalnim slučajevima vrijedi i obrnuto, tj. da iz $A_{[P]} \subsetneq R$ slijedi R-regularnost ideala P . To je sigurno tačno ako je R totalan prsten razlomaka $T(A)$ prstena A . Naime, ako je P prosti ideal prstena A , $R=T(A)$, P nije R-regularan, tada P nije regularan, pa za $x \in R$ iz $x=a/s$; $a \in A$; s - regularan u A , vrijedi $s \in A \setminus P$ i $xs \in A$, tj. $R=A_{[P]}$.

Sljedeća tvrdnja objedinjuje rezultate iz [28] (Proposition 3.) i iz [18] (Proposition 4.) :

1.2. Tvrdnja - Neka je $v:R\longrightarrow\Gamma\cup\{\infty\}$ valuacija prstena R . Tada vrijedi sljedeće :

i) Skup v-zatvorenih ideala prstena R_v totalno je uredjen relacijom inkluzije. Prosti v-zatvoreni ideali P prstena R_v su upravo oni prosti ideali prstena R_v za koje vrijedi

$$v^{-1}(\infty)\subseteq P\subseteq P_v \quad .$$

ii) Postoji bijekcija φ izmedju skupa svih v-zatvorenih prostih ideala P prstena R_v i skupa svih izolovanih podgrupa Δ grupe Γ data na sljedeći način :

$$\varphi:P\mapsto\Delta_P \quad ; \quad \Delta_P=\{\gamma\in\Gamma:(\forall x\in P)v(x)>\max\{-\gamma,\gamma\}\} \quad .$$

Pri tome izolovanoj podgrupi Δ grupe Γ odgovara v-zatvoreni prosti ideal $P_\Delta=\{x\in R:(\forall\delta\in\Delta)\,\delta<v(x)\}$.

iii) Ako izolovana podgrupa Δ grupe Γ odgovara prostom v-zatvorenom idealu P prstena R_v , tj. ako je $\Delta=\Delta_P$, tada preslikavanje $w=f\circ v$, gdje je $f|_\Gamma:\Gamma\longrightarrow\Gamma/\Delta$ kanonski epimorfizam i $f(\infty)=\infty$, predstavlja valuaciju prstena R i vrijedi :

$$R_w=\{x\in R:\ xP\subseteq P\} \quad ; \quad P_w=P \quad .$$

Ukoliko je $\Delta\subsetneq\Gamma$, tada je $R_w=R_v[P]$ i $P_w=P$.
Pri tome je $\Delta\subsetneq\Gamma$ ako i samo ako $P\nsubseteq v^{-1}(\infty)$.

<u>Dokaz</u> - Za odgovarajuće tvrdnje iz [18] i [28] dokazi nisu navodjeni, ali su u suštini jednostavni. Dokažimo ovdje

da netrivijalna valuacija w prstena R takva da $w \lneq v$ zadovoljava uslov $R_w = R_v[P]$ za neki prosti v-zatvoreni ideal $P \neq v^{-1}(\infty)$ prstena R_w. Naime, za uredjajni epimorfizam f sa $\Gamma_v \cup \{\infty\}$ na $\Gamma_w \cup \{\infty\}$ takav da $w = f \circ v$; $f(\infty) = \infty$ je $\Delta = \{x \in \Gamma_v : f(x) = 0\}$ izolovana podgrupa grupe Γ_v i $\Gamma_w \simeq \Gamma_v / \Delta$. Dakle, i u slučaju $w \lneq v$ možemo preslikavanje w identifikovati sa preslikavanjem $\tilde{v}: x \mapsto v(x) + \Delta$ za $x \in R \setminus v^{-1}(\infty)$, odnosno $x \mapsto \infty$ za $x \in v^{-1}(\infty)$.

Ako prosti v-zatvoreni ideal P odgovara izolovanoj podgrupi Δ, tada $\Delta \subsetneq \Gamma_v$ povlači $P \neq v^{-1}(\infty)$. Dalje, $R_{\tilde{v}} = R_v[P]$. Naime, $R_{\tilde{v}} = \{x \in R : xP \subseteq P\}$ i $P_{\tilde{v}} = P$. Zato, ako je $x \in R_v$, tada $xP \subseteq P$, pa za $s = 1 \in R_v \setminus P$ vrijedi $xs \in R_v$. U slučaju da $x \in R \setminus R_v$ i $xP \subseteq P$ imamo $\tilde{v}(x) \geqslant 0$, pa za neko $\delta \in \Delta$ imamo $\delta \leq v(x) < 0$, dakle $v(x) \in \Delta$. Za $s \in P_v$ takav da je $v(s) = -v(x)$, specijalno i $v(s) \in \Delta$, vrijedi $s \in R_v \setminus P$, jer je $v(P) \cap \Delta = \emptyset$, dok $sx \in R_v$. Dakle, vrijedi $R_{\tilde{v}} \subseteq R_v[P]$.

Obrnuto, neka su $x \in R$ i $s \in R_v \setminus P$ takvi da $xs \in R_v$. Zbog $v(s) \in \Delta$, vrijedi $\tilde{v}(s) = 0$, pa iz $xs \in R_v$ slijedi $\tilde{v}(x) \geqslant 0$, dakle, $x \in R_{\tilde{v}}$, pa zato $xP \subseteq P$.

Konačno, vrijedi i:

$$(\forall x \in R)\; w(x) = \tilde{v}(x) = v(x) + \Delta > 0 \iff (\forall \delta \in \Delta)\; v(x) > \delta \iff$$

$$\iff x \in P \quad , \text{ tj. imamo } P_w = P \; .$$

<u>1.3. Tvrdnja</u> - Neka su (A,P) i (A',P') valuacioni parovi prstena R. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1) $A = A' \subsetneq R \Rightarrow P = P'$;

2) $P = P' \Rightarrow A = A'$;

3) Ako paru (A,P) odgovara valuacija v , a paru (A',P') odgovara valuacija v' prstena R , tada je $v' \lesssim v$ ako i samo ako vrijedi

$$v^{-1}(\infty) \subseteq P_{v'} \subseteq P_v \quad \text{i} \quad R_v \subseteq R_{v'} \quad .$$

Dokaz - Tvrdnje pod 1) i 2) dokazuju se jednostavno. Napr. 1) slijedi neposredno iz činjenice da je za netrivijalnu valuaciju v prstena R pozitivni ideal P_v jednak skupu $\{x \in R : (\exists y \in R \setminus R_v)\ xy \in R_v\}$.

Dokažimo sada tvrdnju pod 3).

Ako je $v' \lesssim v$, tada je P' v-zatvoreni prosti ideal prstena R_v , dakle , $v^{-1}(\infty) \subseteq P' \subseteq P$ i naravno $A \subseteq A'$. Obrnuto, neka je $v^{-1}(\infty) \subseteq P' \subseteq P$ i $A \subseteq A'$. Ideal P' je prosti v-zatvoreni ideal prstena $A=R_v$, pa ako je Δ izolovana podgrupa grupe Γ_v koja odgovara idealu P' (uz oznake iz dokaza Tvrdnje 1.2. pod iii)), imamo $P_{\tilde{v}} = P'$ i $R_{\tilde{v}} = R_{v[P']}$. Dakle, valuacioni parovi $(R_{\tilde{v}}, P_{\tilde{v}})$, $(R_{v'}, P_{v'})$ prstena R su jednaki . Lako je vidjeti da posljednje upravo znači da postoji uredjajni izomorfizam φ sa $\Gamma_{\tilde{v}} \cup \{\infty\}$ na $\Gamma_{v'} \cup \{\infty\}$ takav da je $v' = \varphi \circ \tilde{v}$. Kako je $\tilde{v} = f \circ v$, otuda dobijamo $v' = (\varphi \circ f) \circ v$, tj. vrijedi $v' \lesssim v$.

1.4. Tvrdnja - Neka je A podprsten prstena R i P prosti ideal u A takav da je $(A_{[P]}, [P]A_{[P]})$ valuacioni par prstena R , $A_{[P]} \subsetneq R$, a $v : R \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ valuacija prstena R koja odgovara navedenom paru. Tada za proizvoljne $x,y \in A$ za koje je $\{x,y\} \not\subseteq v^{-1}(\infty)$ vrijedi :

$$(\exists a,b \in A) \quad \{a,b\} \not\subseteq P \ \wedge \ ax=by \quad .$$

Dokaz - Neka su $x,y \in A$ takvi da $\{x,y\} \not\subseteq v^{-1}(\infty)$ i napr. $v(x) \geq v(y)$. Naravno, tada $v(y) < \infty$, pa postoji $r \in R$ takav da je $v(r) = -v(y)$, tj. $v(ry) = 0$, pa zato $ry \in A_{[P]} \setminus [P]A_{[P]}$. Kako je $0 \leq v(x) - v(y) = v(x) + v(r) = v(xr)$, to je $xr \in A_{[P]}$. Zato postoje $u, v_0 \in A \setminus P$ takvi da je $xr \cdot u \in A$ i $yru \cdot v_0 \in A \setminus P$. Tada $a = yruv_0 \in A \setminus P$ i $b = uxv_0 r \in A$, dakle $\{a,b\} \not\subseteq P$ i vrijedi $ax = by$.

1.5. Primjedba - i) Uz oznake iz Tvrdnje 1.4., u slučaju da je R totalan prsten razlomaka $T(A)$ prstena A dobija se odgovarajući rezultat M.Griffin-a [17, Lemma 5., 1) => 3)], odnosno rezultat M.D.Larsen-a [26, Theorem 10.14., 1) ⇒ 2)]. Naime, u slučaju $R = T(A)$, jednostavno se dokazuje da skup $C([P]A_{[P]}) = C(P_v) = \{x \in R : (\forall a$ - regularan u $A_{[P]}$ $(\exists s \in A_{[P]} \setminus [P]A_{[P]})\ xs \in aA_{[P]}\}$, tzv. jezgro ideala P_v je upravo jednak skupu $v^{-1}(\infty)$.

ii) Sljedeća tvrdnja takodje uopštava rezultate M.Griffin-a, odn. M.D.Larsen-a date za slučaj $R = T(A)$ u [17] odn. u [26].

1.6. Tvrdnja - Neka je A podprsten prstena R, P prosti ideal prstena A takav da je $(A_{[P]}, [P]A_{[P]})$ valuacioni par prstena R i $A_{[P]} \subsetneq R$. Tada za proizvoljne ideale I i J prstena A od kojih je barem jedan R-regularan vrijedi

$$IA_P \subseteq JA_P \quad \text{ili} \quad JA_P \subseteq IA_P \quad .$$

Dokaz - Možemo pretpostaviti da su ideali I i J strogo sadržani u A. Neka je napr. ideal I R-regularan i $a \in I$ takav da $a^{-1} \in R$. Jasno, $0 \leq v(a) < \infty$, gdje je sa v označena valuacija prstena R takva da je $R_v = A_{[P]}$ i $P_v = [P]A_{[P]}$.

Pokažimo sada da posto i $a_0 \in A$ za koji vrijedi $a_0 s \notin J$ i $0 \leq v(a_0) < \infty$ za sve $\in A\setminus P$, ukoliko je $IA_P \nsubseteq JA_P$.
Pretpostavimo zato da $IA_P \nsubseteq JA_P$ i da element $a \in I$ ne ispunjava tražene zahtjeve.To znači da za neko $q \in \setminus P$ vrijedi $aq \in J$. Zbog $IA_P \nsubseteq JA_P$, postoji $d \in I$ takav da $ds \notin J$ za sve $s \in A\setminus P$. Prema Tvrdnji 1.4. prim.enjenoj za elemente a i d ; $\{a,d\} \nsubseteq v^{-1}(\infty)$ postoje t $z \in A$: $\{t,z\} \nsubseteq P$ i $at=dz$. Otuda je $t \in A\setminus P$. Inače,iz $t \in P$ slijedi $z \in A\setminus P$, pa bi zato bilo tačno $q \in A\setminus P$, dakle vrijedilo bi :

$d\cdot zq=dz\cdot q=at\cdot q=aq\cdot t \in JA \subseteq J$, suprotno izboru elementa d.
Znači, $t \in A\setminus P$ i vrijedi $at=dz$ za neko $z \in A$. Otuda, zbog $v(t)=0$ i $v(a) < \infty$, zaključujemo da mora biti i $v(d) \neq \infty$. Dakle, $d \in I$; $0 \leq v(d) < \infty$; $(\forall s \in A\setminus P)\ ds \notin J$.

Neka je sada $b \in J$ proizvoljan. Kako $\{d,b\} \nsubseteq v^{-1}(\infty)$, to na osnovu Tvrdnje 1.4. zaključujemo da za neke $x,y \in A$; $\{x,y\} \nsubseteq P$ vrijedi $dx=by$. Zbog $b \in J$, to znači da $dx \in J$, pa prema izboru elementa d, mora biti $x \in P$, dakle sigurno je $y \in A\setminus P$. Otuda je $b=(by)/y = (dx)/y \in$ $\in IA_P$, tj. $JA_P \subseteq IA_P$.

<u>1.7. Primjedba</u> - i) Uz oznake iz Tvrdnje 1.6.,primjetimo da je uslov $A_{[P]} \subsetneq R$ sigurno ispunjen ako je P pravi prosti R-regularan ideal prstena A.

ii) Ako ideal P, u Tvrdnji 1.6.,nije R-regularan i ako je napr. ideal I R-regularan,tada $IA_P=A_P$. Naime, $a \in I$ i $a^{-1} \in R$ implicira $a \in A\setminus P$, dakle $1=a/a \in IA_P$. U ovom slučaju je znači Tvrdnja 1.6. trivijalna .

§2. R-Prüferovi prstenі

U klasičnom slučaju, oblast A naziva se Prüferova oblast ako je lokalizacija A_M prstena A po proizvoljnom maksimalnom idealu M prstena A, valuaciona oblast polja razlomaka T(A) oblasti A. M.Griffin je 1970. godine [17] uveo u razmatranje Prüferove prstene kod kojih su dopušteni i netrivijalni djelitelji nule. Pri tome je pojam valuacione oblasti zamjenjen pojmom Maniso-ovog valuacionog prstena. Preciznije, za prsten A kažemo da je Prüferov prsten ukoliko je za svaki maksimalni ideal M prstena A širok prsten razlomaka $A_{[M]}$ Manis-ov valuacioni prsten totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A. M.Griffin je u pomenutom radu dao čitav niz karakterizacija Prüferovih prstena. Nešto kasnije je M.D.Larsen [26] pokazao da je prsten A Prüferov ako i samo ako je $(A_{[M]},[M]A_{[M]})$ valuacioni par totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A za svaki maksimalni ideal M prstena A.

Po analogiji sa svojim radom iz 1970. godine M.Griffin je 1974. godine [18] uveo klasu R-Prüferovih prstena i takve prstene je pokušao karakterizirati na onaj način kako je to već bilo učinjeno ranije za klsu Prüferovih prstena. Medjutim, tu analogiju nije bilo tako jednostavno uspostaviti i u radu [18] su ostale neke tvrdnje nedorečene (jer u stvari nisu ni dokazivane) a neke od njih nisu ni tačne kao što je pokazao J.Gräter u [15], 1982. godine. Naime, M.Griffin (po analogiji sa [17]) za podprsten A prstena R kaže da je R-Prüferov ako je $A_{[M]}=\{x\in R:(\exists s\in A\setminus M)\ xs\in A\}$ valuacioni prsten u R za svaki maksimalni ideal M prstena A. Međutim, iz toga ne mora slijediti da je $(A_{[M]},[M]A_{[M]})$ valuacioni par prstena R za svaki maksimalni ideal M u A, što inače vrijedi ako je $R=T(A)$. Slijedeći primjer koji to ilustruje pripada J.Gräter-u [15].

2.1. Primjer - Neka je $A=Z[X]$ prsten polinoma od jedne varijable X nad prstenom Z cijelih brojeva i $I=Z[X,X^{-1}]$ skup svih konačnih suma $\sum_i a_i X^{n_i}$; $a_i \in Z$; $n_i \in Z$. Jasno, R možemo na prirodan način uložiti u totalan prsten razlomaka $T(A)$ prstena A i $R \subsetneq T(A)$. Skup $I=XZ[X]$ je prosti ideal prstena A i vrijedi sljedeće :

i) (A,P) je valuacioni par prstena R ;

ii) Za svaki maksimalni ideal M prstena A skup $A_{[M]}=\{x \in R : (\exists s \in A \setminus M)\ xs \in A\}$ je valuacioni prsten prstena R ;

iii) Ideal P je R-regularan i nije maksimalan ideal prstena A ;

iv) Za maksimalan ideal $M=(2,X)$ prstena A, par $(A_{[M]},[M]A_{[M]})$ nije valuacioni par prstena R .

———— Dokažimo sada navedene tvrdnje :

i) Neka je $r \in R \setminus A$ i napr. $r=a_0+a_1X+\cdots+a_mX^m+a_{-1}X^{-1}+\cdots$ $\cdots+a_{-k}X^{-k}$; $a_i \in Z$, $k \geqslant 1$; $a_{-k} \neq 0$.

Stavimo $p=X^k$. Jasno, $p \in P$ i $rp \in A \setminus P$. Dakle, (A,P) je valuacioni par prstena R .

ii) Neka je M maksimalni ideal prstena A . Ako $X \in M$, tada $P \subseteq M$, pa je $A\setminus M \subseteq A\setminus P$. Otuda , ako sa v označimo valuaciju prstena F za koju je $R_v=A$ i $P_v=F$, dobijamo:

$r\in A_{[M]} \Rightarrow (\exists s\in A\setminus M)\ rs\in A \Rightarrow s\in A\setminus P\ ;\ v(s)=0\ ;$
$0\leq v(rs)=v(r) \Rightarrow r\in A$.

Dakle,ako $X\in M$ tada je $A_{[M]}=A$ valuacioni prsten prstena R.

Ako $X\notin M$, tada $X\in A\setminus M$ i $X^{-1}\cdot X=1\in A$, dakle $X^{-1}\in A_{[M]}$, pa zato $A_{[M]}=R$ je trivijalan valuacioni prsten prstena R .

iii),iv) Ideal P je R-regularan a $M=(2,X)$ je maksimalan ideal prstena A takav da $P\subsetneq M$. Naime , $X\in P$ i $X^{-1}\in R$; $2\notin P$. Dalje,prema dokazu tvrdnje pod ii) , za $M=(2,X)$ vrijedi $A_{[M]}=A$, pa bi zbog $A\subsetneq R$ i činjenice da je (A,P) valuacioni par prstena R u slučaju da je i $(A_{[M]},[M]A_{[M]})$ valuacioni par prstena R , slijedilo $P=[M]A_{[M]}$ (Tvrdnja 1.3. (1)). Dakle , $P=A\cap P=A\cap [M]A_{[M]}=M$, što je nemoguće .

<u>2.2. Primjedba</u> - Primjer 2.1. pokazuje da karakterizacija R-Prüferovih (u smislu M.Griffin-a) valuacionih parova data u [18,Proposition 14.] nije tačna . Naime,uz oznake iz Primjera 2.1. par (A,P) je valuacioni par netrivijalne valuacije prstena R , R je podprsten od T(A) i P nije maksimalan ideal prstena A iako je A R-Prüferov prsten u smislu M.Griffin-a .

Da bismo izbjegli navedene probleme a i da bismo sačuvali neke od tvrdnji iz [18] , dajemo sljedeću definiciju R-Prüferovog prstena (M.Gräter , [15]) .

<u>2.3. Definicija</u> - Neka je prsten A podprsten prstena R i neka je sa $\Omega(A)$ označen skup svih maksimalnih ideala

prstena A . Za prsten A kažemo da je R-Prüferov ako je za svako $M\in\Omega(A)$ par $(A_{[M]},[M]A_{[M]})$ valuacioni par prstena R . Pri tome je $A_{[M]}=\{x\in R:(\exists s\in A\setminus M)\ xs\in A\}$;
$[M]A_{[M]}=\{x\in R:(\exists s\in A\setminus M)\ xs\in M\}$.

1.4. Teorema - Neka je A R-Prüferov prsten. Tada su tačne sljedeće tvrdnje :

i) $I(J\cap L)=IJ\cap IL$, za proizvoljne ideale I , J , L prstena A za koje je jedan od ideala J i L R-regularan ;

ii) $(I+J)(I\cap J)=IJ$, za proizvoljne ideale I , J prstena A od kojih je barem jedan R-regularan ;

iii) $I\cap(J+L)=(I\cap J)+(I\cap L)$, za proizvoljne ideale I,J,L prstena A od kojih je barem jedan R-regularan .

Dokaz - Navedene tvrdnje i),ii),iii) vrijede za ekstenzije posmatranih ideala u A_M , za svako $M\in\Omega(A)$, na osnovu Tvrdnje 1.6. i Primjedbe 1.7. Dalje, dobro je poznato da za proizvoljan multiplikativan sistem S nekog komutativnog prstena A i za proizvoljne ideale I i J prstena A vrijedi za ekstenzije ideala u prstenu razlomaka $S^{-1}A$ sljedeće :

$S^{-1}(I\cdot J)=S^{-1}I\cdot S^{-1}J$; $S^{-1}(I\cap J)=S^{-1}I\cap S^{-1}J$;
$S^{-1}(I+J)=S^{-1}I+S^{-1}J$.

Osim toga, ideali prstena A su jednoznačno odredjeni svim svojim lokalnim komponentama , tj. ekstenzijama u A_M , $M\in\Omega(A)$.

2.5. Tvrdnja – Neka je A podprsten prstena R i neka za sve ideale I i J prstena A od kojih je barem jedan R-regularan vrijedi $(I+J)(I\cap J)=IJ$.

Ako je P pravi prosti ideal prstena A ; $a,b,c\in A$; $a^{-1}\in R$, tada iz $aA_P\subseteq bA_P$ slijedi $bA_P\subseteq cA_P$ ili $cA_P\subseteq bA_P$. Specijalno , $aA_P\subseteq cA_P$ ili $cA_P\subseteq aA_P$.

Dokaz – Dokaz je analogan dokazu Leme 10.15. iz [26] .

2.6. Definicija – Neka je A podprsten prstena R i L podmodul A-modula R . Za L kažemo da je R-razlomljeni ideal prstena A ako postoji regularan element $r\in R$ takav da je $rL\subseteq A$.

Za ideal I prstena A kažemo da je R-invertibilan ako postoji R-razlomljeni ideal L prstena A takav da je $IL=A$.

2.7. Tvrdnja – Neka je A podprsten prstena R i neka za sve ideale I , J prstena A od kojih je barem jedan R-regularan vrijedi $(I+J)(I\cap J)=IJ$.

Tada je svaki konačno generisani R-regularan ideal prstena A R-invertibilan .

Dokaz – Neka je I konačno generisani R-regularan ideal prstena A i $c\in I$; $c^{-1}\in R$. Neka je dalje ,

$$J=\{x\in R : xI\subseteq Ac\} .$$

Dovoljno je dokazati da vrijedi $IJ=cA$. Naime , J je podmodul A-modula R i $J\subseteq A$, jer $x\in J$ povlači $xc=ac$; za neko $a\in A$, pa je $x=a$. Dakle , J je ideal prstena A . Dalje , Ac^{-1} je R-razlomljeni ideal prstena A , pa bi iz

$IJ=cA$ slijedilo : $IJ\cdot Ac^{-1}=Ac\cdot Ac^{-1}=A$, tj. $A=I\cdot(J\cdot Ac^{-1})$, pa je I R-invertibilan ideal prstena A .

Dokažimo sada da je $I\cdot J=Ac$. Jasno je da vrijedi $IJ\subseteq Ac$, a za obrnutu inkluziju dovoljno je dokazati da za svaki maksimalan ideal M prstena A vrijedi $cA_M\subseteq(IJ)A_M$ ([5] , str. 124.,Sledstvie 3.). Poslednja inkluzija je očigledno tačna u slučaju da ideal M nije R-regularan.Naime, tada je c^2 R-regularan element iz IJ , pa $c^2\in A\setminus M$,tj. $1=c^2/c^2\in(IJ)A_M$, dakle $(IJ)A_M=A_M$.

Neka je sada M R-regularan maksimalni ideal prstena A. Prema Tvrdnji 2.5. lako se vidi da postoje $a_1,\dots,a_n\in A$ takvi da je $I=(a_1,\dots,a_n)$; $a_k=c$; $(a_1,\dots,a_{k-1})A_M\subseteq a_kA_M\subseteq\cdots\subseteq a_nA_M$. Za $i=1,\dots,k-1$ postoje $x_i,y_i\in A$ takvi da je $a_iy_i=a_kx_i$; $y_i\notin M$, dok za $i=k,\dots,n-1$ postoje x_i,y_i iz A takvi da $a_iy_i=a_{i+1}x_i$; $y_i\notin M$.

Neka je sada $b=y_1\cdots y_{k-1}x_k\cdots x_{n-1}$. Otuda je $bI\subseteq cA$, pa $b\in J$. Zato je $a_nb\in IJ$, dok je $a_nb=(y_1\cdots y_{n-1})c$; $y_1\cdots y_{n-1}\in A\setminus M$, što znači da $c\in(IJ)A_M$, tj. $cA_M\subseteq(IJ)A_M$.

<u>2.8. Primjedba</u> - Dokaz Tvrdnje 2.7. (kao i dokaz Tvrdnje 2.5.) je gotovo identičan dokazu Teoreme 10.18. u [26] , dio 6) $\Rightarrow$ 1) , za slučaj $R=T(A)$. Ovdje je dokaz naveden,ne samo kompletnosti radi,već i zbog toga da se ukaže na oblik R-razlomljenog ideala L za kojeg je $I\cdot L=A$, gdje je A prsten sa navedenim osobinama a I konačno generisani R-regularni ideal prstena A . Dakle,tu je za L uzet skup $J\cdot Ac^{-1}$, gdje je $c\in I$ R-regularan a $J=\{x\in R : xI\subseteq Ac\}$.

2.9. Teorema - Ako je A R-Prüferov prsten, tada je svaki konačno generisani R-regularni ideal prstena A i R-invertibilan .

Dokaz - Dokaz slijedi neposredno iz Teoreme 2.4. i Tvrdnje 2.7.

2.10. Primjedba - i) Teorema 2.9. uopštava rezultat M.Griffin-a [18,Theorem 7.,(1) $\Rightarrow$ (3)] dat u slučaju da je R podprsten totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A .

ii) Sljedeći cilj koji želimo postići je dokazati da svaki R-nadprsten R-Prüferovog prstena je i sam R-Prüferov prsten. Tu u osnovnom slijedimo postupak M.Griffin-a dat za slučaj totalnog prstena razlomaka u [17] . U toj situaciji kao polazište M.Griffin-u su poslužili rezultati F.Richman-a [35]. Kasnije je M.Griffin u [18] (Proposition 6. i Theorem 7.), uz definiciju R-Prüferovog prstena drugačiju od Definicije 2.3., naveo bez dokaza neke tvrdnje do kojih i mi želimo stići.

2.11. Definicija - Ako je R prsten a A i B podprsteni prstena R takvi da je $A \subseteq B$, kažemo da je B R-nadprsten prstena A .

Ako je $x \in R$, sa $(A:x)_A$ označavamo skup $\{a \in A : ax \in A\}$, a sa $(B:x)_A$ skup $\{a \in A : ax \in B\}$.

2.12. Tvrdnja - Neka je A podprsten prstena R i R podprsten totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A , a B neki R-nadprsten prstena A . Tada su sljedeće tvrdnje medjusobno ekvivalentne :

1) B je gladak A-modul ;

2) $(\forall z\in B)\quad (A:z)_A B=B$;

3) za svaki prosti ideal P prstena A vrijedi

$PB=B$ ili $B\subseteq A_{[P]}$;

4) Za svaki maksimalni ideal M prstena B vrijedi

$A_{[M\cap A]}=B_{[M]}$.

Pri tome se u 3) i 4) široki prsteni razlomaka formiraju u odnosu na prsten R .

Dokaz - 1) $\Rightarrow$ 3) : Neka je P prosti ideal prstena A i $z=x/y\in B$; $x,y\in A$; y regularan u A . Tada je

$$y\cdot(x/y)+(-x)\cdot 1=0 .$$

Neka je $I=(y,-x)$ ideal prstena A generisan skupom $\{y,-x\}$. Prema [5] (Predlož.1.,str.25.) preslikavanje

$$I\otimes_A B\longrightarrow A\otimes_A B\ (\simeq B)$$

definisano sa $a\otimes b\longmapsto ab$; $a\in I$; $b\in B$, je injektivno, pa otuda :

$$y\otimes(x/y)+(-x)\otimes 1=0 \quad \text{u}\quad I\otimes_A B .$$

Dalje,prema [5] (Predlož.13.,str.42.) postoje konačne familije $(b_j)_j$; $(a_{ij})_j$; $i=1,2$; elemenata iz B , odnosno iz A , takve da vrijedi :

$$x/y=\sum_j a_{1j}b_j \quad ; \quad 1=\sum_j a_{2j}b_j \quad ; \quad (\forall j)\ ya_{1j}-xa_{2j}=0 .$$

Ako je tačno $a_{2j}\in P$ za svaki (od konačno mnogo indeksa) j, tada $PB=B$, a ako postoji j takav da $a_{2j}\in A\setminus P$, tada za takav indeks j vrijedi $(x/y)a_{2j}=a_{1j}\in A$, tj. $z=x/y$ pripada $A_{[P]}$. Dakle,ako je $PB\subsetneq B$, tada sigurno vrijedi $B\subseteq A_{[P]}$.

$3) \Rightarrow 2)$: Neka je $z \in B$ takav da $(A:z)_A B \subsetneq B$. Tada postoji maksimalan ideal M prstena B takav da je $(A:z)_A B \subseteq M$, pa specijalno vrijedi i :

$$(A:z)_A \subseteq ((A:z)_A B) \cap A \subseteq M \cap A = P \Rightarrow (A:z)_A \subseteq P \quad \wedge \quad PB \subsetneq B .$$

Zato na osnovu 3),mora biti $B \subseteq A_{[P]}$. Sada $z \in B \subseteq A_{[P]}$ implicira da za neko $t \in A \setminus P$ vrijedi $zt \in A$, dakle $t \in (A:z)_A \subseteq P$, tj. vrijedi $t \in P$, što je nemoguće . Prema tome,ako vrijedi 3),onda za svako $z \in B$ mora biti $(A:z)_A B$ jednako B .

$2) \Rightarrow 1)$: Da bi dokazali da je B gladak A-modul dovoljno je dokazati da za svaki ideal I prstena A preslikavanje $I \otimes_A B \longrightarrow B$, definisano sa $a \otimes b \longmapsto ab$; $a \in I$, $b \in B$; je injektivno [5 , Predlož.1.,str. 25.] .

Neka je $c = \sum\limits_i a_i \otimes b_i \longmapsto 0$, tj. $\sum\limits_i a_i b_i = 0$ (skup indeksa i je konačan). Stavimo $Q = \bigcap\limits_i (A:b_i)_A$. Sada je $Q \cdot c = 0$. Naime , $I \otimes_A B$ je A-modul i B-modul uz

$$b' \cdot (a \otimes b) = a \otimes bb' \quad ; a \in I \; ; b, b' \in B \quad ,$$

pa zato $a \in Q$ implicira $ab_i \in A$ $(\forall i)$. Otuda je :

$$a \cdot c = a \cdot \sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i \otimes ab_i = (\sum_i a_i b_i a) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0 .$$

Zato iz $(A:b_i)_A B = B$, za konačan skup indeksa i . slijedi :

$$QB \supseteq (\prod_i (A:b_i)_A)B = \prod_i (A:b_i)_A B = B \quad , \text{ tj. } \quad B = QB \quad .$$

Otuda je za svako $b \in B$ tačno :

$b \cdot c \in B \cdot c = BQ \cdot c = B(Q \cdot c) = B \cdot 0 = 0$, specijalno za $b=1$ dobijamo $c=0$.

3) $\Rightarrow$ 4) : Neka je M maksimalan ideal prstena B i $P=M\cap A$. Tada je $(M\cap A)B \subseteq M \subsetneq B$, tj. $PB \subsetneq B$, pa zbog 3), vrijedi $B \subseteq A_{[P]}$. Neka je $x \in B_{[M]}$ i pretpostavimo da je $b \in B\setminus M$ takav da $a=xb \in B$. Zbog $a,b \in B \subseteq A_{[P]}$, postoje $e,f \in A\setminus P$ takvi da $eb,fa \in A$, tako da je :

$xefb=aef=e\cdot fa \in A$, dok $efb \in A\setminus P$ (Naime, $efb=f\cdot eb \in A$, pa bi iz $f\cdot eb \in P$ slijedilo $eb \in P \subseteq M$, jer $f \in A\setminus P$. Otuda, zbog $b \in B\setminus M$, dobili bismo $e \in M$ i $e \in A$, tj. $e \in P$, što je suprotno izboru elementa e .)

Prema tome , $x \in A_{[P]}$, tj. $B_{[M]} \subseteq A_{[P]}$. S druge strane , $A \subseteq B$ i $x \in A_{[P]}$ daju $xs \in A \subseteq B$ za neko $s \in A\setminus P \subseteq B\setminus M$, pa $x \in B_{[M]}$, tj. vrijedi i $A_{[P]} \subseteq B_{[M]}$.

4) $\Rightarrow$ 3) : Neka je P prosti ideal prstena A, $PB \subsetneq B$. Tada za maksimalan ideal M prstena B takav da $PB \subseteq M$, vrijedi :

$$P \subseteq (PB)\cap A \subseteq M\cap A \Rightarrow A_{[P]} \supseteq A_{[M\cap A]} = B_{[M]} \supseteq B \Rightarrow B \subseteq A_{[P]} .$$

2.13. Primjedba - Uslov $R \subseteq T(A)$, u dokazu prethodne Tvrdnje koristili smo samo kod implikacije 1) $\Rightarrow$ 2) .

2.14. Tvrdnja - Neka je A podprsten prstena i R podprsten totalnog prstena razlomaka $T(A)$ prstena A . Ako je neki R-nadprsten B prstena A gladak A-modul i prsten B cio nad A , tada je $A=B$.

Dokaz - Prema Tvrdnji 2.12., za proizvoljan $z \in R$ vrijedi $(A:z)_A B=B$. Otuda zaključujemo da je $(A:z)_A=A$. Naime, u slučaju $(A:z)_A \subsetneq A$, postojao bi maksimalan ideal P prstena A takav da $(A:z)_A \subseteq P$, pa za neki maksimalan ideal

Q u B bi bilo $Q\cap A=P$ ([5] ; Predlož.1.str.378. i Teorema 1. str. 380.). Specijalno, vrijedilo bi $(A:z)_A \subsetneq Q$, pa $(A:z)_A B \subsetneq B$, što je nemoguće . Dakle , $(A:z)_A = A$, tj. $1 \in (A:z)_A$, pa $z \in A$.

<u>2.15. Teorema</u> - Neka je A podprsten prstena R i R podprsten totalnog prstena razlomaka $T(A)$ prstena A . Tada su sljedeće tvrdnje medjusobno ekvivalentne :

1) Prsten A je R-Prüferov ;

2) Svaki R-nadprsten prstena A je gladak A-modul ;

3) Svaki R-nadprsten prstena A je cijelo zatvoren u R .

<u>Dokaz</u> - 1) $\Rightarrow$ 2) : Neka je B neki R-nadprsten prstena A. Da bi dokazali da je B gladak A-modul dovoljno je vidjeti da za svaki maksimalni ideal M prstena B vrijedi $B_{[M]} = A_{[A\cap M]}$ (Tvrdnja 2.12.) . Neka je sada M maksimalan ideal u B i $P = A\cap M$, a Q maksimalan ideal prstena A takav da $P \subseteq Q$. Tada je $(A_{[Q]}, [Q]A_{[Q]})$ valuacioni par prstena R i $A_{[Q]} \subseteq A_{[P]} \subseteq B_{[M]}$.

Ako $x \in R \setminus A_{[P]}$, tada $x \in R \setminus A_{[Q]}$, pa postoji $b \in [Q]A_{[Q]}$ takav da $xb \in A_{[Q]} \setminus [Q]A_{[Q]}$. Otuda za neko $s \in A\setminus Q$ vrijedi $xb\cdot s \in A\setminus Q$, dok za $b \in [Q]A_{[Q]}$ postoji $t \in A\setminus Q$ takav da $bt \in Q$. Kako $xbs \in A\setminus Q$ i $t \in A\setminus Q$, to dobijamo $xbst \in A\setminus Q$, dok je $q = bst = bt\cdot s \in QA \subseteq Q$, dakle, postoji $q \in Q$ takav da $xq \in A\setminus Q$. Ako $q \notin P$, tada $xq \in A$ implicira $x \in A_{[P]}$, što nije moguće. Znači, postoji $q \in P$ takav da $xq \in A\setminus Q$. Ako bi za x vrijedilo $x \in B_{[M]} \setminus A_{[P]}$ tada bi za neko $u \in B\setminus M$ bilo $xu \in B$. Ali , $q \in P \subseteq M$ i

$x \in A \setminus Q \subseteq A \setminus P \subseteq B \setminus M$, pa otuda $qxu \in M$, jer $q \in M$ i $u \in B$. S druge strane , $u \in B \setminus M$ i $qx \in B \setminus M$, pa zato $xu \in B \setminus M$. Dobivena kontradikcija pokazuje da iz $x \in R \setminus A_{[P]}$ slijedi $x \in R \setminus B_{[M]}$, tj. vrijedi $B_{[M]} \subseteq A_{[P]}$. Dakle, vrijedi $A_{[P]}=B_{[M]}$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Neka je B neki R-nadprsten prstena A i $\overline{B}$ cijelo zatvorenje prstena B u R . Prema 2), prsten $\overline{B}$ je gladak A-modul . Na osnovu Tvrdnje 2.12., za svako $z \in \overline{B}$ imamo $(A:z)_A\overline{B}=B$. Otuda slijedi :

$\overline{B} \subseteq (B:z)_A\overline{B} \subseteq (B:z)_B\overline{B} \subseteq B\cdot\overline{B} \subseteq \overline{B}$, tj. $(B:z)_B\overline{B}=\overline{B}$; $\forall z \in \overline{B}$.

Ali , $A \subseteq B \subseteq T(A)$, pa je $T(B)=T(A)$, dakle , $B \subseteq \overline{B} \subseteq R \subseteq T(B)$, što na osnovu Tvrdnje 2.12. implicira da je $\overline{B}$ gladak B-modul . Konačno, prema Tvrdnji 2.14., zaključujemo da je $\overline{B}=B$.

3) $\Rightarrow$ 1) : Tačnost ove implikacije dokazuje se na analogan način kao u [26] (Theorem 10.18.; dio (3) $\Rightarrow$ (4)).

2.16. <u>Primjedba</u> - Uz oznake iz prethodne Teoreme napomenimo da su implikacije 1) $\Rightarrow$ 2) i 3) $\Rightarrow$ 1) tačne i bez pretpostavke da je R podprsten od T(A) .

2.17. <u>Posljedica</u> - Ako je prsten A R-Prüferov i R podprsten totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A , tada je svaki R-nadprsten od A ujedno i R-Prüferov prsten .

<u>Dokaz</u> - Tačnost tvrdnje slijedi neposredno iz Teoreme 2.15.

Pokazaćemo sada da za R-Prüferove prstene vrijedi jedna varijanta Kineske teoreme o ostacima :

18. Definicija - Za podprsten A prstena R :ažemo da ijedi Kineska teorema o ostacima ako za proizvol.nu famili- $M_1,\dots,M_n$ ideala prstena A od kojih najviše dva ideala su R-regularni i za proizvoljne elemente $x_1,\dots x_n \in A$ stem kongruencija $x \equiv x_i \pmod{M_i}$; $1 \leq i \leq n$; ima rješenje :A ako i samo ako je $x_i \equiv x_j \pmod{(M_i+M_j)}$; za sve i,j $\{1,\dots,n\}$.

19. Tvrdnja - Neka je A podprsten prstena R . Tada su jedeće tvrdnje medjusobno ekvivalentne :

Za prsten A vrijedi Kineska teorema o ostaci ıa ;

Za proizvoljne ideale L , M i N prstena A , od koji:ı je barem jedan R-regularan, vrijedi :

$$L+(M\cap N)=(L+M)\cap(L+N) \quad ;$$

Za proizvoljne ideale L , M i N prstena A , od kojih je barem jedan R-regularan, vrijedi :

$$L\cap(M+N)=(L\cap M)+(L\cap N) \quad .$$

kaz - 1) $\Rightarrow$ 3) : Neka su L , M i N ideal. prstena i najviše dva medju njima nisu R-regularni. Dovo.jno je do-zati tačnost inkluzije :

$$L\cap(M+N) \subseteq (L\cap M)+(L\cap N) \quad .$$

o je $a \in L$ i $a \in M+N$, tada postoje $x \in L\cap M$. $y \in L\cap N$ kvi da je $a=x+y$ ako i samo ako element $x \in A$:adovoljava jedeće uslove : $x-0 \in L$; $x-0 \in M$; $x-a \in L$; $x-a \in N$. kle, uz $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=a$, $x_4=a$; $M_1=L$, $M_2=M$ $M_3=N$, $=L$; vidimo da vrijedi $x_i-x_j \in M_i+M_j$ za sve i j iz upa $\{1,2,3,4\}$. Otuda, prema 1) , postoji $x \in$ ι takav da

$x_i \in M_i$ za sve $i=1,2,3,4$.

$\Rightarrow 2)$: Neka su L , M i N ideali prstena A i jviše dva od njih nisu R-regularni. Tada uzastopnom primjem relacije 3), dobijamo :

$+M)\cap(L+N)=((L+M)\cap L)+((L+M)\cap N)=L+((L\cap N)+(M\cap N))=L+(M\cap N)$.

$\Rightarrow 1)$: Neka su $M_1,\dots,M_n$ ideali prstena A i medju ima neka je najviše dva koji nisu R-regularni, a elementi $,\dots,x_n \in A$ takvi da je $x_i - x_j \in M_i + M_j$ za sve $i,j \in \{1,\dots,n\}$. U slučaju $n=2$, egzistencija takvog elementa $x \in A$ slijei bez pozivanja na relaciju 2) . Naime, ako $x_1 - x_2 \in M_1 + M_2$ ako su $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ odabrani tako da je $x_1 - x_2 = m_1 - m_2$, a za $x = x_1 - m_1$ vrijedi $x - x_1 \in M_1$ i $x - x_2 \in M_2$. Pri tome, ravno, nijedan od ideala M_1 i M_2 ne mora biti R-regulan .

Vodimo sada dokaz indukcijom po n i pretpostavimo da je 2 . Ako medju idealima $M_1,\dots,M_n$ ima nekih koji nisu regularni, neka su to upravo M_1 ili M_1 i M_2 . Postoji $\in A$ takav da $x' - x_i \in M_i$ za sve $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Dalje , $L=M_n$, $M=M_{n-1}$ i $N=\bigcap_{1\le i\le n-2} M_i$, kako je L R-regularan, bijamo iz 2) :

$$+\bigcap_{1\le i\le n-1} M_i = L+(M\cap N)=(L+M)\cap(L+N)=(M_n+M_{n-1})\cap\Big(M_n+\bigcap_{1\le i\le n-2} M_i\Big),$$

primjenjujući isti postupak sada na $M_n + \bigcap_{1\le i\le n-2} M_i$, itd. vidimo da vrijedi :

$$M_n + \bigcap_{1\le i\le n-1} M_i = \bigcap_{1\le i\le n-1} (M_n + M_i) \quad .$$

znači da je $x' - x_n = (x' - x_i) + (x_i - x_n) \in M_i + (M_i + M_n)$ za sve i , tle , $x' - x_n \in \bigcap_{1\le i\le n-1} (M_n + M_i)$, pa zato $x' - x_n \in M_n + \bigcap_{1\le i\le n-1} M_i$.

uda, postoji $x \in A$ takav da $x-x' \in \bigcap_{1 \le i \le n-1} M_i$, $x-x_n \in M_n$, a vidimo da je $x-x_i \in M_i$ za sve $i \in \{1,\dots,n\}$.

.20. Primjedba - i) Ukoliko se u Definiciji 2.18. izostai zahtjev o R-regularnosti ideala, a prsten A ne mora čak iti ni komutativan, tada je Tvrdnja 2.19. takodje tačna, s tim to se u izjavama 1),2) i 3) ne zahtjeva R-regularnost ideala svi ideali su lijevi (odn. desni). Pri tome se obično slov 3) Tvrdnje 2.19. uzima za definiciju aritmetičkih s ijeva (s desna) prstena, već prema tome da li taj uslov ispujavaju svi lijevi (odn. svi desni) ideali prstena A .

i) Dokaz Tvrdnje 2.19. proveden je prema ideji dokaza dgovarajuće tvrdnje iz [41] , a očigledno je da se može rimjeniti i u nekomutativnom slučaju .

ii) U radu [18] (str. 425.) M.Griffin karakterizira -Prüferove prstene, kako ih je on definisao (za razliku od efinicije 2.3.), kao one prstene u kojima vrijedi Kineska eorema o ostacima. Pri tome je R podprsten totalnog prstena azlomaka T(A) R-Prüferovog prstena A , a medju idealima $M_1,\dots,M_n$ (vidi Definiciju 2.18.) najviše jedan nije R-reguaran. U našem slučaju vrijedi sljedeća tvrdnja :

.21. Tvrdnja - Neka je A R-Prüferov prsten. Tada za rsten A vrijedi Kineska teorema o ostacima .

Dokaz - Tačnost tvrdnje slijedi neposredno iz Teoreme 2.4. i Tvrdnje 2.19.

22. Tvrdnja - Neka je A R-Prüferov prsten. Ako je
$R \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ netrivijalna valuacija prstena R takva
$A \subseteq R_v$, tada je $R_v = A_{[A \cap P_v]}$, pri čemu se poslednji
sten razlomaka formira u odnosu na R.

kaz - Stavimo $P = A \cap P_v$ i neka je Q maksimalan ideal
stena A takav da $P \subseteq Q$. Tada vrijedi :

$$A_{[Q]} \subseteq A_{[A \cap P_v]} \subseteq R_{v[P_v]} = R_v \subsetneq R \ .$$

ka je sada $x \in R \setminus A_{[P]} \subseteq R \setminus A_{[Q]}$. Kako je $(A_{[Q]}, [Q]A_{[Q]})$
luacioni par prstena R, postoji $y \in [Q]A_{[Q]}$ takav da
$\in A_{[Q]} \setminus [Q]A_{[Q]}$. Dalje, postoji $m \in A \setminus Q$ takav da $xym \in A$,
k za sve $e \in A \setminus Q$ mora biti $xye \notin Q$. S druge strane, za
ko $f \in A \setminus Q$ je $yf \in Q$, pa zato $x \cdot yfm \in A \setminus Q$, jer
$\in A \setminus Q$. Stavimo sada $b = yfm$. Jasno, $b \in Q$ i $xb \in A \setminus Q$.
o $b \notin P$, tada $bx \in A$ implicira $x \in A_{[P]}$, što je nemo-
uće. Znači, $b \in P = A \cap P_v$, pa zbog $bx \in R_v \setminus P_v$, slijedi
$\notin R_v$. Dakle, vrijedi $R \setminus A_{[P]} \subseteq R \setminus R_v$, tj. $R_v \subseteq A_{[P]}$,
kako je sigurno $A_{[P]} \subseteq R_v$, to je $R_v = A_{[P]}$.

23. Tvrdnja - Neka je A R-Prüferov prsten. Tada je za
oizvoljan pravi prosti ideal P prstena A par
$(A_{[P]}, [P]A_{[P]})$ valuacioni par prstena R.

kaz - Neka je Q maksimalan ideal prstena A takav da
$\subseteq Q$. Tada je $(A_{[Q]}, [Q]A_{[Q]})$ valuacioni par prstena R i
$_{Q]} \subseteq A_{[P]}$. Neka je sada $x \in R \setminus A_{[P]}$. Tada $x \in R \setminus A_{[Q]}$,
postoji $q \in [Q]A_{[Q]}$ takav da $xq \in A_{[Q]} \setminus [Q]A_{[Q]}$. Otuda,
stoji $s \in A \setminus Q$, $qs \in Q$ i postoji $t \in A \setminus Q$ takav da
$\cdot t \in A \setminus Q$. Zato je $xqst \in A \setminus Q \subseteq A \setminus P$, dok $qst \in A$.

čak je $qst \in P$, jer $x \notin A_{[P]}$. Dakle , $x \cdot qst \in A \setminus P \subseteq$
$\subseteq A_{[P]} \setminus [P]A_{[P]}$ i $qst \in P \subseteq [P]A_{[P]}$.

2.24. Tvrdnja - Neka je A R-Prüferov prsten a $P_1, \ldots, P_n$ prosti ideali prstena A takvi da je $A = A_{[P_1]} \cap \cdots \cap A_{[P_n]}$. Tada za prosti ideal P prstena A takav da $P \not\subseteq P_i$ za sve $1 \leqslant i \leqslant n$, vrijedi $A_{[P]} = R$.

Dokaz - Dokaz je identičan dokazu odgovarajuće tvrdnje M.Griffin-a [18.Proposition 11.] iskazane za R-Prüferov prsten u Griffin-ovom smislu .

2.25. Primjedba - i) Dobro je poznato da u klasičnom slučaju pozitivni ideal netrivijalne valuacije polja je sigurno jedini maksimalni ideal odgovarajućeg valuacionog prstena. Medjutim,za valuacije na totalnom prstenu razlomaka to u opštem slučaju nije tačno. M.Griffin je u [18,Proposition 14.] pokušao dokazati da za valuacioni par (A,P) netrivijalne valuacije prstena R , pri čemu je prsten A R-Prüferov (u Griffin-ovom smislu) i R podprsten od $T(A)$, ideal P mora biti maksimalan u A . Već pomenuti primjer J.Gräter-a (Primjer 2.1.) implicira da Griffin-ov rezultat nije tačan. Medjutim,maksimalnost pozitivnog ideala netrivijalne valuacije će nam u daljem,za neke klase prstena,biti od velike važnosti,pa ćemo sada pokazati da se,u izvjesnoj mjeri,Griffin--ova tvrdnja može sačuvati uz drugačiju definiciju R-Prüferovog prstena,koju smo dali u obliku Definicije 2.2.

ii) Primjetimo još da ako je za neki maksimalni ideal P prstena A par $(A_{[P]},[P]A_{[P]})$ valuacioni par prstena R ,

da je tada $[P]A_{[P]}$ maksimalan ideal prstena $A_{[P]}$.
Dovoljno je dokazati da za svako $x \in A_{[P]} \setminus [P]A_{[P]}$ vrijedi $[P]A_{[P]} + xA_{[P]} = A_{[P]}$. Za takav x postoji $s \in A \setminus P$ sa osobinom $xs \in A \setminus P$, pa kako je P maksimalan ideal u A , to je $P + xsA = A$, tj. $1 = p + xsa$ za neko $p \in P \subseteq [P]A_{[P]}$ i za neko $a \in A \subseteq A_{[P]}$.

<u>2.26. Teorema</u> - Neka je $v: R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ netrivijalna valuacija prstena R , $A = R_v$ i pozitivni ideal $P = P_v$ te valuacije R-regularan . Ako je prsten A R-Prüferov, tada su tačne sljedeće tvrdnje :

i) Ideal P je maksimalan i najveći R-regularan pravi ideal prstena A ;

ii) Svaki R-regularan ideal prstena $A = R_v$ je i v-zatvoren.

<u>Dokaz</u> - i) Neka je Q R-regularan pravi ideal prstena A i $Q \not\subseteq P$. Tada postoji $a \in Q$ takav da je $v(a) = 0$. Neka je sada $b \in A$ proizvoljan a $r \in Q$ neka je R-regularan element, tj. $r^{-1} \in R \setminus A$. Ideal $I = (r,a,b)$ prstena A , generisan skupom $\{r,a,b\}$, je naravno, konačno generisan i R-regularan. Prema Teoremi 2.9. i Primjedbi 2.8. ideal I je R-invertibilan i za $D = B \cdot Ar^{-1}$, gdje je $B = \{x \in R : xI \subseteq rA\}$, vrijedi $(r,a,b)D = A$. Pri tome, zbog $r \in B$, jasno je da $1 \in D$. S druge strane , $F = (r,a)D$ je ideal prstena A i to R-regularan. Ako $1 \notin F$, tada za neki R-regularan maksimalni ideal M prstena A vrijedi $F \subseteq M$. Ali , $a \in F$ i $v(a) = 0$, pa $M \not\subseteq P$ implicira, na osnovu Tvrdnje 2.24., da je $A_{[M]} = R$. To nije moguće, jer $r^{-1} \in R \setminus A_{[M]}$. Naime, ako bi bilo $r^{-1} \in A_{[M]}$, tada bismo za neko $s \in A \setminus M$ imali $r^{-1}s \in A$, pa

otuda $s \in rA \subseteq FA \subsetneq M$. Dobivena kontradikcija pokazuje da mora biti $1 \in F$, tj. $(r,a)D=A$. Otuda vrijedi :

$(r,a)=(r,a)A=(r,a)(r,a,b)D=(r,a,b)\cdot(r,a)D=(r,a,b)A=(r,a,b)$.

Dakle , $b \in (r,a) \subsetneq Q$, tj. $A=Q$, što je nemoguće .

ii) Neka je $I \subsetneq A$ neki R-regularan ideal prstena $A=R_v$, $x \in R_v$, $a \in I$ i $v(a) \leq v(x)$. Treba dokazati da $x \in I$.

U slučaju $v(x)=\infty$, to je jasno,jer ako je $a_0 \in I$ R-regularan element,tada $x \cdot a_0^{-1} \in R_v$, jer $0 < v(a_0) < \infty$, pa zato $x \in a_0 R_v \subseteq I$. Neka je zato $v(a) \leq v(x) < \infty$. Da bismo dokazali $Ax \subseteq I$, dovoljno je provjeriti da za proizvoljan maksimalni ideal M prstena A vrijedi $(Ax)A_M \subseteq IA_M$ ([5] , str. 124.,Sledstvie 3.). Ako maksimalni ideal M prstena A nije R-regularan,tada $IA_M=A_M$, jer je I R-regularan (Primjedba 1.7.,ii)). Ako je M R-regularan maksimalan ideal prstena $A=R_v$, tada prema dokazanom pod i),mora biti $M=P_v=P$, pa za $z \in R$ takav da je $v(z)=-v(a)$ vrijedi $az \in R_v \setminus P_v = A \setminus P$, dok je $xz \in R_v=A$. Otuda dobijamo :

$$x = (axz)/(az) = (a \cdot xz)/(az) \in I \cdot A_P \quad ,$$

jer $xz \in A$, $a \in I$, $az \in A \setminus P$.

<u>2.27. Tvrdnja</u> - Neka je A R-Prüferov prsten i R podprsten totalnog prstena razlomaka $T(A)$ prstena A . Ako su P i Q R-regularni pravi prosti ideali prstena A takvi da je $A_{[P]} \subsetneq A_{[Q]}$, tada je $Q \subsetneq P$.

<u>Dokaz</u> - Prema Posljedici 2.17. prsten A_P je R-Prüferov i naravno vrijedi $T(A_{[P]})=T(A)$. Kako je P R-regularan pravi ideal u A , to je $A_{[P]} \subsetneq R$, pa je $(A_{[P]},[P]A_{[P]})$

valuacioni par prstena R (Tvrdnja 2.23.) kojem odgovara netrivijalna valuacija na R i čiji je pozitivni ideal $[P]A_{[P]}$ R-regularan . Zato, prema Teoremi 2.26., mora biti $[Q]A_{[Q]} \cap A_{[P]} \subseteq [P]A_{[P]}$; nakon što obje strane poslednje inkluzije presječemo sa A , dobijamo $Q \subseteq P$.

<u>2.28. Tvrdnja</u> - Neka je A R-Prüferov prsten i ujedno prsten netrivijalne valuacije v prstena R . Tada, ako je R podprsten totalnog prstena razlomaka $T(A)$ prstena A i B neki R-nadprsten prstena A , vrijedi sljedeće :

i) Prsten B je R-Prüferov i prsten neke valuacije w na R ;

ii) $B=A_{[P_w]}$; P_w je prosti v-zatvoreni ideal i $A=R_v$.

<u>Dokaz</u> - Dokaz je identičan dokazu analogne tvrdnje iz [18] (Proposition 13.).

<u>2.29. Tvrdnja</u> - Neka je A R-Prüferov prsten i R podprsten totalnog prstena razlomaka $T(A)$ prstena A .
Ako su v i w netrivijalne valuacije prstena R nenegativne na A i ideali $A\cap P_v$, $A\cap P_w$ prstena A R-regularni, tada su sljedeće tvrdnje medjusobno ekvivalentne :

1) $v \leq w$;

2) $R_w \subseteq R_v$;

3) $A\cap P_v \subseteq A\cap P_w$.

<u>Dokaz</u> - 1) $\Rightarrow$ 2) : Iz $v \leq w$, na osnovu Tvrdnje 1.3., slijedi $w^{-1}(\infty) \subseteq P_v \subseteq P_w$ i $R_w \subseteq R_v$

2) $\Leftrightarrow$ 3) : Tačnost te ekvivalencije slijedi neposredno na osnovu $R_v = A_{[A \cap P_v]}$ i $R_w = A_{[A \cap P_w]}$ (Tvrdnja 2.22.), ako se uzme u obzir Tvrdnja 2.27.

3) $\Rightarrow$ 1) : Zbog 2) $\Leftrightarrow$ 3), vrijedi $R_w \subseteq R_v$. Kako je $A \cap P_v \subseteq R_w \cap P_v$, vidimo da je $R_w \cap P_v$ R-regularan pravi prosti ideal prstena R_w, pa je $R_w \cap P_v \subseteq P_w$ (Teorema 2.26.). Medjutim, mora biti $P_v \subseteq R_w$. Inače, za neko $p_v \in P_v \setminus R_w$ postoji $p_w \in P_w$ tako da je $p_v p_w \in R_w \setminus P_w \subseteq R_w \setminus (P_v \cap R_w) =$ $= R_w \setminus P_v \subseteq R_v \setminus P_v$.

S druge strane, $p_w \in P_w \subseteq R_w \subseteq R_v$ i $p_v \in P_v$, te mora biti $p_v p_w \in P_v$.

Dobivena kontradikcija pokazuje da vrijedi $P_v \subseteq R_w$. Zato je tačno i $P_v \subseteq P_w$.

Konačno, $w^{-1}(\infty) \subseteq P_v$, jer je ideal P_v R-Prüferovog prstena R_w R-regularan, pa i w-zatvoren (Teorema 2.26.). Prema tome, vrijedi :

$$w^{-1}(\infty) \subseteq P_v \subseteq P_w \quad \text{i} \quad R_w \subseteq R_v \quad ,$$

što prema Tvrdnji 1.3., znači da je $v \leq w$.

§3. Prsteni sa velikim Jacobsonovim radikalom ; Saglasne familije

Klasu komutativnih prstena sa velikim Jacobsonovim radikalom uveo je M.Griffin u [18] na sljedeći način :

<u>3.1. Definicija</u> - Za komutativan prsten R sa jediničnim elementom kažemo da ima veliki Jacobsonov radikal J , ako

[illegible]

[illegible]

1) Prsten R ima veliki Jacobsonov radikal [illegible] ;

2) Za svako $a \in R$ postoji $b \in R$ takav da za sve $r \in R$ i za sve invertibilne elemente $m \in R$, elementi [illegible] i [illegible] su invertibilni u R ;

3) Za svako $a \in R$ postoji $b \in R$ takav da je [illegible] invertibilan u R i $ab \in J$.

3.3. Primjedba – i) Svi 0-dimenzionalni komutativni prsteni, tj. prsteni kod kojih je svaki prosti ideal maksimalan, kao i svi prsteni koji imaju konačno mnogo maksimalnih ideala, imaju veliki Jacobsonov radikal. U pomenutom radu [13, str. 425] M. Griffin je pokazao da postoji prsten sa velikim Jacobsonovim radikalom a da nije 0-dimenzionalan, niti ima samo konačno mnogo maksimalnih ideala .

ii) Ako je R 0-dimenzionalan prsten, tada je svaki regularan element prstena R ujedno i invertibilan u R . Međutim, ne mora svaki prsten sa velikim Jacobsonovim radikalom biti totalan prsten razlomaka (nekog prstena), kao što to pokazuje slijedeći primjer :

3.4. Primjer – Neka su $R_1,\dots,R_n$ komutativni prsteni sa jediničnim elementom i neka prsten R_i ima tačno k_i maksimalnih ideala M_{ij} ($1 \le k_i < \omega$; $1 \le j \le k_i$; $1 \le i \le n$) .

Tada za prsten $R=\prod_{1\leqslant i\leqslant n} R_i$ vrijedi sljedeće :

i) prsten R ima tačno $k_1+\cdots+k_n$ maksimalnih ideala , $\pi_i^{-1}(M_{ij})$; $j=1,2,\ldots,k_i$; $i=1,2,\ldots,n$; pri čemu je $\pi_i : R\to R_i$ kanonska projekcija ;

ii) ako za neki indeks $i\in\{1,\ldots,n\}$ u prstenu R_i postoji regularan element koji nije invertibilan u R_i, tada R nije totalan prsten razlomaka, jer ako je a_i regularan i neinvertibilan element u R_i , a $a_j=1$ $(j\neq i)$, tada je $a=(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ regularan ali neinvertibilan element u R .

iii) ako za neki indeks $i\in\{1,\ldots,n\}$ prsten R_i predstavlja oblast koja nije polje, tada prsten R nije 0-dimenzionalan, jer ako je R_i oblast ali R_i nije polje, tada su $\pi_i^{-1}(0)\subsetneqq\pi_i^{-1}(M_{ij})$ prosti ideali u R.

iv) ako stavimo $A=Z[X]$, X varijabla nad prstenom cijelih brojeva Z , $P=XA$, $R_i=A_P$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, tada prsten R ima veliki Jacobsonov radikal i osim toga , R nije oblast, nije 0-dimenzionalan prsten i u R nisu svi regularni elementi invertibilni, jer je $R_i=A_P$ oblast sa jedinim maksimalnim idealom PA_P sa regularnim, ali neinvertibilnim elementom $X\in PA_P$.

——— Pokazaćemo sada da valuacije na prstenu sa velikim Jacobsonovim radikalom imaju neke od osobina koje se za valuacije na totalnom prstenu razlomaka dokazuju jednostavno i osim toga, vidjećemo da su prsteni sa velikim Jacobsonovim radikalom prirodno mjesto za primjenu već dobivenih rezultata o R-Prüferovim prstenima .

3.5. Tvrdnja ([18,Lemma 20.]) - Neka je $v:R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ netrivijalna valuacija prstena R i neka R ima veliki Jacobsonov radikal. Tada je pozitivni ideal P_v valuacije v R-regularni ideal prstena R_v , a R je podprsten totalnog prstena razlomaka $T(R_v)$ prstena R_v .

Dokaz - Ideja dokaza je prema [18,str.424.] .

Primjetimo prvo da je (i bez dodatne pretpostavke o R) svaki regularan element prstena R_v ujedno regularan i u prstenu R , te da zato možemo smatrati da su R i $T(R_v)$ podprsteni prstena T(R) .

Neka je sada $x \in R \setminus R_v$. Prema Tvrdnji 3.2.(3),postoji $y \in R$ i $b,d \in R$ takvi da je $(x+y)d=1$ i $(1+xy)b=1$. Ako $y \in R_v$, tada $x+y \notin R_v$, tj. $v(x+y) < 0$, pa iz $(x+y)d=1$ slijedi $d \in P_v$ i $d^{-1} \in R$. Ako $y \notin R_v$, tada $1+xy \notin R_v$, jer u suprotnom bi $xy \in R_v$ i $y \notin R_v$, implicIralo $x \in R_v$. Dakle , $v(1+xy) < 0$, pa $b \in P_v$ i $b^{-1} \in R$. To znači da je ideal P_v prstena R_v sigurno R-regularan. Osim toga,ako $y \in R_v$, tada $dx=1-dy \in R_v$, a ako $y \notin R_v$, tada $bx \cdot y=1-b \in R_v$, pa zbog $y \notin R_v$, sigurno $bx \in R_v$. Kako je,u slučaju $y \in R_v$ element d regularan u R_v , a u slučaju $y \notin R_v$ element b regularan u R_v , to je $x \in T(R_v)$. Dakle, $R \subseteq T(R_v)$.

3.6. Teorema - Neka su $v_1,\dots,v_n$ netrivijalne valuacije prstena R sa velikim Jacobsonovim radikalom i $A = \bigcap_{1 \le i \le n} R_{v_i}$. Tada su tačne sljedeće tvrdnje :

) $(\forall a\in R)(\exists b\in A\cap U(R))\ ab\in A \ \wedge\ (v_i(a)\geq 0 \Rightarrow v_i(b)=0)$,

) $(\forall i\in\{1,\dots,n\})(\forall \alpha_i\in\Gamma_{v_i})(\exists a\in A\cap U(R))\ v_i(a)>\alpha_i$,

) Prsten A je R-Prüferov,a R je podprsten prstena $T(A)$,

) Ako je $R_{v_i}\nsubseteq R_{v_j}$ za sve $i\neq j$ iz $\{1,..,n\}$, tada su $A\cap P_{v_i}$ $(1\leq i\leq n)$ upravo svi R-regularni maksimalni ideali prstena A .

ri tome je u 1) i 2) sa $U(R)$ označen skup svih invertibilih u R elemenata prstena R .

okaz - U osnovnom slijedimo ideju dokaza analogne tvrdnje .Griffin-a [18,Proposition 22.] , gdje je ustvari dokazaa u potpunosti tvrdnja pod 1). Primjetimo sada da iz 1) dmah slijedi da je R podprsten totalnog prstena razlomaka (A) prstena A . Naime , $T(A)$ je podprsten od $T(R)$, jer e svaki regularni element $a\in A$ u A ujedno regularan u R. aista,inače bi za neko $x\in R\setminus A$ bilo $ax=0$. Prema 1),posoji $r\in U(R)\cap A$ takav da je $xr\in A$. Zato vrijedi $axr=0$, a je $xr=0$, dakle i $x=0$, što je nemoguće. Znači , R i (A) su podprsteni od $T(R)$. Sada,za $a\in R$ i $b\in U(R)\cap A$ akav da $ab\in A$ iz $a=(ab)/b\in T(A)$, slijedi $R\subseteq T(A)$ . .

) Neka je $i\in\{1,\dots,n\}$; $\alpha_i\in\Gamma_{v_i}$. Možemo se ograniiti na slučaj $\alpha_i>0$. Stavimo $Q_i=\{x_i\in R_{v_i}: v_i(x_i)\geq\alpha_i\}$. ako se vidi da je radikal $r(Q_i)$ v_i-zatvoren prosti ideal rstena R_{v_i} . Stavimo $P_i=r(Q_i)$, tj.

$$P_i=\{y_i\in R_{v_i}:(\exists n<\omega)\ y_i^n\in Q_i\} .$$

im toga , $P_i \nsubseteq v_i^{-1}(\infty)$, jer bi inače bilo $Q_i \subsetneq v_i^{-1}(\infty)$, $\alpha_i=\infty$, što je nemoguće . Prema Tvrdnji 1.2.(iii),par $v_i[P_i],P_i)$ je valuacioni par prstena R a $R_{v_i}[P_i] \subsetneq R$. to je,prema Tvrdnji 3.5.,ideal P_i R-regularan . Lako se ii da je zato i ideal Q_i R-regularan . Neka je r_i iz $R)\cap Q_i$. Prema 1),postoji $r\in U(R)\cap A$ takav da $r_i r\in A$, da je $v_j(r)=0$ ako je $v_j(r_i)\geq 0$ za $j\in\{1,\dots,n\}$. ecijalno,vrijedi $v_i(r)=0$, pa je $v_i(r_i r)=v_i(r_i)\geq\alpha_i$, k $r_i r\in U(R)\cap A$. Za $a=(r_i r)^2\in U(R)\cap A$ imamo $v_i(a)=$ $\alpha_i+\alpha_i>\alpha_i$. To znači da postoji $a\in U(R)\cap A$ takav da $v_i(a)>\alpha_i$, pa je tvrdnja pod 2) dokazana .

Stavimo $M_i=A\cap P_{v_i}$ $(1\leq i\leq n)$. Prema 2),svi ideali M_i R-regularni prosti ideali prstena A , a prema 1) lako se di da je $R_{v_i}=A_{[M_i]}=\{x\in R : (\exists s\in R\setminus M_i)\ xs\in A\}$. druge strane,prema 1),za svako $a\in P_{v_i}$ postoji $b\in A\cap U(R)$, $\in A\cap P_{v_i}=M_i$, $v_i(b)=0$, tj. $b\in A\setminus M_i$, dakle , P_{v_i} je držano u $[M_i]A_{[M_i]}$; ako je $x\in R$ takav da za neko $\in A\setminus M_i\subseteq R_{v_i}\setminus P_{v_i}$ vrijedi $xs\in M_i\subseteq P_{v_i}$, tada $x\in P_{v_i}$, j. $[M_i]A_{[M_i]}\subseteq P_{v_i}$.

[18] (Proposition 22.,dio (iv)) dokazano je da su svi -regularni maksimalni ideali prstena A obavezno oblika $\cap P_{v_i}$ za neko $i\in\{1,\dots,n\}$. Prema tome, $(A_{[M]},[M]A_{[M]})$ e valuacioni par prstena R za svaki R-regularni maksimalan deal prstena A . Ako maksimalan ideal M prstena A nije -regularan,tada je $A_{[M]}=R$. Naime,prema 1),ako $x\in R\setminus A_{[M]}$, ostoji $r\in U(R)\cap A$, takav da $xr\in A$. Kako $x\notin A_{[M]}$, to ora biti $r\in M$, dakle $M\cap U(R)\neq\emptyset$, što je nemoguće.

ı tomo,par $(A_{[M]},[\Gamma]A_{[M]})$ je valuacioni par,trivijalne ıcije,prstena R .

ıači da je A R-Prüferov prsten,a već smo ustanovili da ꝛ podprsten od $T(A)$.

Ako napr. M_i ne bi bio maksimalan ideal u A , tada za neko $j\neq i$: $M_i \subseteq M_j$, pa zato $R_{v_j}=A_{[M_j]}\subseteq A_{[M_i]}=R_{v_i}$, $R_{v_j}\subseteq R_{v_i}$ za $i\neq j$, što je nemoguće.

Primjedba - i) Neposredno iz Teoreme 3.6. slijedi da vaki netrivijalan valuacioni prsten A prstena R sa kim Jacobsonovim radikalom sigurno R-Prüferov prsten,te ostoje R-regularni elementi sa proizvoljno velikom valu-om .

Uz oznake Teoreme 3.6. sada vidimo,prema Tvrdnji 2.29., a valuacije v , w prstena R nenegativne na A vrije- $v\leq w$ ako i samo ako je $R_w\subseteq R_v$.

Tvrdnja Teoreme 3.6. pod 3) poslužila je M.Griffin-u opravdanje za uvodjenje pojma aproksimacione familije acija [18,str.425.] nekog prstena R . U tom smislu će poslužiti Teorema 3.6.,preciznije zahtjevi 2) i 3) te eme. Primjetimo još i to da je zahtjev 2) sigurno ispunjen je $R=T(A)$, pri čemu R ne mora biti prsten sa velikim ıbsonovim radikalom .

Definicija - Neka je Ω familija netrivijalnih valu-ia prstena R , $A=\bigcap_{v\in\Omega} R_v$, a $U(R)$ skup invertibilnih ⁾) elemenata prstena R . Tada za familiju valuacija ımo da je aproksimaciona familija na R ako su ispunjena jedeća dva uslova :

) Prsten A je R-Prüferov , a R je podprsten totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A ;

) $(\forall v\in\Omega)(\forall\alpha\in\Gamma_v)(\exists r\in U(R)\cap A)\ v(r)>\alpha$.

). Tvrdnja - Ako je R prsten sa velikim Jacobsonovim likalom, tada je svaka konačna familija netrivijalnih valuacija prstena R ujedno i aproksimaciona familija na R .

kaz - Tačnost tvrdnje slijedi neposredno iz Teoreme 3.6.

—— Uvešćemo sada neke oznake koje ćemo u daljem često ristiti.

Ako je A R-Prüferov prsten i R podprsten od T(A), a i w valuacije prstena R nenegativne na A , tada postovaluacija $v\wedge w$ prstena R takva da je $R_{v\wedge w}=R_vR_w$, a $_{\wedge w}$ ujedno v-zatvoreni prosti ideal prstena R_v i w-zatvoreni prosti ideal prstena R_w (Tvrdnja 2.23.).
lm toga, ako je $R_vR_w\subsetneq R$, tada $P_{v\wedge w}\nsubseteq v^{-1}(\infty)$ i $_{\wedge w}\nsubseteq w^{-1}(\infty)$, a $R_{v\wedge w}=R_v[P_{v\wedge w}]=R_w[P_{v\wedge w}]$.

Ukoliko za valuacije v i w postoje u A R-regularni ementi proizvoljno velike valuacije, tada su v-zatvoreni dn. w-zatvoreni) prosti ideali prstena R_v (odn. prstena) koji nisu sadržani u $v^{-1}(\infty)$ (odn. u $w^{-1}(\infty)$) obavezno R-regularni. U tom slučaju, uz $R_vR_w\subsetneq R$, bi $P_{v\wedge w}$ bio dinstven R-regularan maksimalni ideal prstena $R_{v\wedge w}$.

Neka je sa $\Delta_{v,w}$ označena najveća izolovana podgrupa

pe Γ_v disjunktna sa $v(P_{v\wedge w})$, a $\Delta_{w,v}$ neka je naj-
a izolovana podgrupa grupe Γ_w disjunktna sa $w(P_{v\wedge w})$.
je, neka su $\theta_{v,w}: \Gamma_v \to \Gamma_v/\Delta_{v,w}$ i $\theta_{w,v}: \Gamma_w \to \Gamma_w/\Delta_{w,v}$
onski epimorfizmi.
kladu sa Tvrdnjom 1.2. (dio dokaza pod iii)), grupe $\Gamma_{v\wedge w}$;
$/\Delta_{v,w}$; $\Gamma_w/\Delta_{w,v}$ mogu se identifikovati na sljedeći
čin :

$$(\forall x\in R)\ \theta_{v,w}(v(x))=\theta_{w,v}(w(x))=(v\wedge w)(x) ,$$

dogovor $\theta_{v,w}(\infty)=\infty$; $\theta_{w,v}(\infty)=\infty$.
je moguće, jer je $v\wedge w$ netrivijalna valuacija i $v\wedge w\leq v$,
$w\leq w$, pa je $v^{-1}(\infty)=w^{-1}(\infty)$.

Ako je $R_vR_w=R$, tj. $v\wedge w$ trivijalna valuacija, staviće-
$\Delta_{v,w}=\Gamma_v$ i $\Delta_{w,v}=\Gamma_w$, a $\theta_{v,w}$ i $\theta_{w,v}$ će na Γ_v,
osno na Γ_w , djelovati kao nulta preslikavanja, uz dogovor
$\theta_{v,w}(\infty)=\infty$ i $\theta_{w,v}(\infty)=\infty$.

Sada možemo dati sljedeću definiciju :

10. Definicija - Neka je A R-Prüferov prsten, a R podprs-
a totalnog prstena razlomaka T(A) prstena A . Dalje, neka
$\{v_i\}_{i\in I}$ familija netrivijalnih valuacija prstena R
negativnih na A . Za familiju $\{\alpha_i\}_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\Gamma_{v_i}$
žemo da je saglasna ako vrijedi :

$$(\forall i,j\in I)\ i\neq j \Rightarrow \theta_{i,j}(\alpha_i)=\theta_{j,i}(\alpha_j) ,$$

i čemu je $\theta_{i,j}=\theta_{v_i,v_j}$ za sve $i\neq j$ iz I .

11. Primjedba - Uz oznake iz Definicije 3.10. vrijedi
jedeće :

za proizvoljan $x\in R\setminus\bigcup_{i\in I}v_i^{-1}(\infty)$ familija $\{v_i(x)\}_{i\in I}$
je saglasna ;

ako je za sve $i\neq j$ iz I tačno $R_{v_i}R_{v_j}=R$, tada je proizvoljna familija $\{\alpha_i\}_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\Gamma_{v_i}$ saglasna .

Lema - Neka je Ω aproksimaciona familija prstena
)alje, neka je za fiksno $w\in\Omega$ odabran element α
$\setminus\{0\}$ i sa Δ označena najveća izolovana podgrupa
e Γ_w disjunktna sa $\{\alpha\}$. Označimo sa $v: I\to(\Gamma_w/\Delta)\cup\{\infty\}$
preslikavanje definisano ovako :

$=w(x)+\Delta$ ako je $w(x)\neq\infty$, a za $w(x)=\infty$ neka je
$=\infty$.

ada je v valuacija prstena R i vrijedi :

$$\{w'\in\Omega : R_{w'}\subseteq R_w\}=\{w'\in\Omega : \theta_{w,w'}(\alpha)\neq 0\} .$$

e za $w'=w$ stavljeno $\Delta_{w,w'}=(0)$; tj. $\theta_{w,w'}$ je
tično preslikavanje na Γ_w .

z -. Dokaz je analogan dokazu Leme 1. i Leme 2. iz [16], za valuacije na polju .

3. Lema - Neka je Ω aproksimaciona familija valuacija
tena R . Tada vrijedi :

$$w_1,w_2\in\Omega\,\big(\alpha_1\in\Gamma_{w_1}\setminus\{0\},\ \alpha_2\in\Gamma_{w_2}\setminus\{0\},\ \Omega_{w_1}(\alpha_1)\cap$$
$$\Omega_{w_2}(\alpha_2)\neq\emptyset\big)\Rightarrow\Omega_{w_1}(\alpha_1)\subseteq\Omega_{w_2}(\alpha_2)\ \vee$$
$$\Omega_{w_2}(\alpha_2)\subseteq\Omega_{w_1}(\alpha_1) .$$

je $\Omega_{w_i}(\alpha_i)=\{w\in\Omega : v_i\leq w\}$; $i=1,2$; dok su valuacije
v_1 i v_2 definisane kao u Lemi 3.12.

m toga, tačna je i sljedeća relacija :

$\theta_{w_1,w_2}(\alpha_1)=\theta_{w_2,w_1}(\alpha_2)=0 \Leftrightarrow \Omega_{w_1}(\alpha_1)\cap\Omega_{w_2}(\alpha_2)=\emptyset \wedge$
$\theta_{w_1,w_2}(\alpha_1)=\theta_{w_2,w_1}(\alpha_2)$.

Dokaz - Dokaz je sličan dokazu odgovarajuće tvrdnje za valuacije polja (Lema 1.,Lema 2. iz [16]) .

3.14. Tvrdnja - Neka je $\{v_1,\dots,v_n\}$, $n\geqslant 3$, aproksimaciona familija valuacija prstena R . Dalje,neka su $0\leqslant \gamma_i\in\Gamma_{v_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ takvi da je familija $(\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1})$ iz $\Gamma_{v_1}\times\dots\times\Gamma_{v_{n-1}}$ saglasna . Tada postoji nenegativan $\gamma_n\in\Gamma_{v_n}$ takav da je saglasna i familija $(\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1},\gamma_n)$ iz $\Gamma_{v_1}\times\dots\times\Gamma_{v_{n-1}}\times\Gamma_{v_n}$.

Dokaz - Stavimo $\Gamma_i=\Gamma_{v_i}$ za $1\leqslant i\leqslant n$.
Ako je za neki indeks $i\in\{1,\dots,n-1\}$ tačno $R_{v_i}R_{v_n}=R$, tada bilo koji nenegativni element $\gamma_n\in\Gamma_n$ odgovara zahtjevu $\theta_{n,i}(\gamma_n)=\theta_{i,n}(\gamma_i)$. Ograničimo se zato na slučaj da su sve valuacije $v_1\wedge v_n,\dots,v_{n-1}\wedge v_n$ netrivijalne . Otuda je zbog $v_i\leqslant v_i\wedge v_k$, $v_k\leqslant v_i\wedge v_k$ jasno da su beskonačni ideali valuacija $v_1,\dots,v_n$ medjusobno jednaki.Prema Definiciji 3.8. i primjedbi prije Definicije 3.10.,na osnovu Tvrdnje 2.29., zaključujemo da postoji indeks $s\in\{1,..,n-1\}$ takav da je $v_i\wedge v_n\leqslant v_s\wedge v_n$ za sve $i\in\{1,\dots,n-1\}$. Odaberimo sada $0\leqslant\gamma_n\in\Gamma_n$ tako da par $(\gamma_s,\gamma_n)\in\Gamma_s\times\Gamma_n$ bude saglasan. Ako je $\gamma_s=v_s(x)$, $x\in R$, $\gamma_s\geqslant 0$, tada :

$$\theta_{s,n}(\gamma_s)=(v_s\wedge v_n)(x)=v_n(x)+\Delta_{n,s}\geqslant 0 \ .$$

Ako je $\theta_{s,n}(\gamma_s)=0$, uzmimo $\gamma_n=0$, a ako je $\theta_{s,n}(\gamma_s)>0$, zmimo $\gamma_n = v_n(x) > 0$ iz Γ_n .

alje, $v_i \wedge v_n \lneq v_s \wedge v_n$; $1 \leq i \leq n-1$, implicira $R_{v_s}R_{v_n} \subseteq$ $\subseteq R_{v_i}R_{v_n}$, pa je $R_{v_s} \subseteq R_{v_i}R_{v_n}$. Zato je $v_s \wedge v_i) \wedge (v_s \wedge v_n) = v_i \wedge v_n$, a valuacija $v_s \wedge v_i$ je takodje etrivijalna. Kako je $v_s \wedge v_i \lneq v_s$ i $v_s \wedge v_n \lneq v_s$, to su oguća sljedeća dva slučaja :

) $v_s \wedge v_i \lneq v_s \wedge v_n$;

Tada je $(v_s \wedge v_i) \wedge (v_s \wedge v_n) = v_s \wedge v_i$, pa zato $v_s \wedge v_i = v_i \wedge v_n$. Osim toga , $v_i^{-1}(\infty) = v_s^{-1}(\infty) = v_n^{-1}(\infty)$. pa se grupe $\Gamma_i/\Delta_{i,s}$; $\Gamma_s/\Delta_{s,i}$; $\Gamma_i/\Delta_{i,n}$; $\Gamma_n/\Delta_{n,i}$ mogu identifikovati ovako :

$$(\forall z \in R)\ v_i(z) + \Delta_{i,s} = v_s(z) + \Delta_{s,i} = v_n(z) + \Delta_{n,i} = v_i(z) + \Delta_{i,n} \ .$$

Naravno, vrijedi $\Delta_{i,s} = \Delta_{i,n}$. Stavimo $\gamma_s = v_s(y)$ i $\gamma_n = v_n(x)$. Tada dobijamo :

$$(\gamma_n, \gamma_s) \in \Gamma_n \times \Gamma_s \text{ saglasan par} \Rightarrow \theta_{n,s}(\gamma_n) = \theta_{s,n}(\gamma_s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (v_n \wedge v_s)(x) = (v_s \wedge v_n)(y) \ .$$

Otuda, zbog $v_s \wedge v_i \lneq v_s \wedge v_n$, slijedi $(v_s \wedge v_i)(x) = (v_s \wedge v_i)(y)$. Dalje, kako je $v_s \wedge v_i = v_i \wedge v_n$, to iz $\gamma_s + \Delta_{s,i} = \gamma_i + \Delta_{i,s} = \gamma_i + \Delta_{i,n}$ dobijamo :

$$\theta_{n,i}(\gamma_n) = (v_n \wedge v_i)(x) = (v_s \wedge v_i)(x) = (v_s \wedge v_i)(y) = v_s(y) + \Delta_{s,i} =$$
$$= \gamma_s + \Delta_{s,i} = \gamma_i + \Delta_{i,n} = \theta_{i,n}(\gamma_i) \ .$$

II) $v_s \wedge v_n \lneq v_s \wedge v_i$;

Tada je $v_s \wedge v_n = v_i \wedge v_n$, pa otuda slijedi :

$\theta_{n,i}(\gamma_n)=\theta_{n,i}(v_n(x))=(v_n\wedge v_i)(x)=(v_n\wedge v_s)(x)=\theta_{n,s}(\gamma_n)=$

$\theta_{s,n}(\gamma_s)=\theta_{s,n}(v_s(y))=(v_s\wedge v_n)(y)=\theta_{i,n}(\gamma_i)$.

Pri tome, poslednja od navedenih jednakosti vrijedi zbog sljedećeg :

$\theta_{s,i}(\gamma_s)=\theta_{i,s}(\gamma_i)$; $\gamma_i=v_i(z)$; $\gamma_s=v_s(y)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(v_s\wedge v_i)(y)=(v_s\wedge v_i)(z)$; $v_s\wedge v_n\leq v_s\wedge v_i$; $v_s\wedge v_n=$

$=v_i\wedge v_n$ $\Rightarrow$ $v_i\wedge v_n\leq v_s\wedge v_i$; $(v_i\wedge v_n)(y)=(v_i\wedge v_r)(z)$, tj.

$(v_s\wedge v_n)(y)=\theta_{i,n}(v_i(z))=\theta_{i,n}(\gamma_i)$.

3.15. Primjedba - Ideja dokaza prethodne tvrdnje je prema [16] (Lemma 11.) , za valuacije na polju .

§4. Teoreme aproksimacije

Dokazi teorema aproksimacije koje ćemo ovdje dati slijede u osnovnom ideje dokaza odgovarajućih teorema aproksimacije koje su dali M.Griffin [16] , za valuacije na polju, odnosno M.Arapović [3] za valuacije totalnog prstena razlomaka T(A) Prüferovog prstena A nenegativne na A . Pri tome, posmatraćemo opštiju situaciju od one u [3] , a u izvjesnoj mjeri ovdje ponudjeni dokazi mogu se shvatiti kompletnijim i čitljivijim.

U dokazu teoreme aproksimacije u okolini nule [3,Theorem 1.] za neuporedive valuacije polja dokazuje se da tamo razmatrani skup $R\cap(V_1\setminus M_1)\cap(P_2\cap\cdots\cap P_n)$ mora biti neprazan. Takva činjenica se bitno koristi i u dokazu teoreme aproksimacije u okolini nule [3,Theorem 4.] za slučaj valuacija na totalnom stenu razlomaka Prüferovog prstena,mada u toj situaciji gumentacija primjenjena za slučaj polja sada nije moguća. to ćemo formulisati i dokazati sljedeću tvrdnju :

1. <u>Tvrdnja</u> - Neka je $\{v_1,\dots,v_n\}$, $n\geq 3$, aproksimaona familija,u parovima neuporedivih,valuacija prstena R, $(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_{v_1}\times\Gamma_{v_2}\times\cdots\times\Gamma_{v_n}$ saglasna familije; $_i>0$, $2\leq i\leq n$. Ako je $Q_i=\{y_i\in R_{v_i} : v_i(y_i)\geq\alpha_i\}$, $P_i=r(Q_i)$ radikal ideala Q_i , $2\leq i\leq n$, tada vrijedi :

$$(R_{v_1}\setminus P_{v_1})\cap\Big(\bigcap_{2\leq i\leq n}P_i\Big)\cap\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n}R_{v_i}\Big)\neq\emptyset\ .$$

<u>kaz</u> - Očigledno je Q_i v_i-zatvoren ideal prstena R_{v_i} i $\not\subseteq v_i^{-1}(\infty)$. Prema Definiciji 3.8. lako se vidi da je R-regularan , pa je P_i prosti v_i-zatvoreni i R-regularideal prstena R_{v_i} , $P_i\not\subseteq v_i^{-1}(\infty)$, $P_i\subseteq P_{v_i}$. to je $R_{v_i[P_i]}$ R-Prüferov prsten i ujedno prsten netrivilne valuacije na R čiji je pozitivni ideal P_i (Tvrdnja 28.). Neka je $A=R_{v_1}\cap\cdots\cap R_{v_n}$. Pretpostavimo sada da $A\cap(P_2\cap\cdots\cap P_n)\cap(R_{v_1}\setminus P_{v_1})=\emptyset$. Označimo sa $\bar{P}_i$ skup $\cap P_i$ za $2\leq i\leq n$, a sa $\bar{P}_1$ skup $A\cap P_{v_1}$. Jasno , $_1,\dots,\bar{P}_n$ su prosti ideali prstena A , pa iz $_2\cap\cdots\cap\bar{P}_n\subseteq\bar{P}_1$ zaključujemo da $\bar{P}_i\subseteq\bar{P}_1$ za neko $i\in\{2,\dots,n\}$. Prema Tvrdnji 2.22. vrijedi $A_{[\bar{P}_1]}=R_{v_1}$, pa iz $_i\subseteq\bar{P}_1$ dobijamo $R_{v_1}=A_{[\bar{P}_1]}\subseteq R_{v_i[P_i]}\subsetneq R$. Dakle , $R_{v_1}\subseteq R_{v_i[P_i]}$, $R_{v_i}\subseteq R_{v_i[P_i]}$ pa je $R_{v_1}R_{v_i}\subseteq R_{v_i[P_i]}\subsetneq R$, j. $R_{v_1\wedge v_i}=R_{v_i[P_{v_1\wedge v_i}]}=R_{v_i[P_{v_1\wedge v_i}]}$ gdje je $P_{v_1\wedge v_i}$

-regularan, pravi prost ideal prstena R_{v_i}, odn. R_{v_1} u skladu sa primjedbom na str. 36. o R-regularnosti zatvorenog prostog ideala). Sada, na osnovu tvrdnje 2.27. iz $v_i[P_{v_1 \wedge v_i}] \subseteq R_{v_i}[P_i]$ slijedi $P_i \subseteq P_{v_1 \wedge v_i}$. Ako je $x_i \in R$ takav da $v_i(x_i) = \alpha_i$, tada $x_i \in P_i$, dakle, $\alpha_i \in v_i(P_{v_1 \wedge v_i})$. Kako je $\Delta_{1,i} \cap v_i(P_{v_1 \wedge v_i}) = \emptyset$, to $\alpha_i \notin \Delta_{1,i}$. To je medjutim, nemoguće, jer je za $i \in \{2,\dots,n\}$ par $(0, \alpha_i)$ iz $\Gamma_{v_1} \times \Gamma_{v_i}$ saglasan. Dobivena kontradikcija pokazuje da mora biti $A \cap (P_2 \cap \cdots \cap P_n) \cap (R_{v_1} \setminus P_{v_1})$ neprazan skup.

Sada se jednostavno dokazuje Teorema aproksimacije u okolini nule :

4.2. Teorema - Neka je $\{v_1,\dots,v_n\}$, $n \geqslant 2$, aproksimacina familija u parovima neuporedivih valuacija prstena R, a familija $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Gamma_{v_1} \times \cdots \times \Gamma_{v_n}$ saglasna. Tada postoji $x \in R$ takav da je

$$v_i(x) = \alpha_i \quad \text{za sve} \quad i=1,\dots,n .$$

Dokaz - Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka.

1) Neka je $\alpha_1 = 0$, $\alpha_i > 0$ za $2 \leqslant i \leqslant n$.

Dokažimo da postoji $x \in A = R_{v_1} \cap \cdots \cap R_{v_n}$ takav da $v_i(x) > \alpha_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$, a $v_1(x) = 0$.

Zaista, prema Tvrdnji 4.1., postoji $y \in A$ takav da je $v_1(y) = 0$, a za svako $i \in \{2,\dots,n\}$ postoji prirodan broj m_i takav da vrijedi $v_i(y^{m_i}) > \alpha_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Specijalno, za $m = \max\{m_i : 2 \leqslant i \leqslant n\}$ biće $v_1(y^m) = 0$, $v_i(y^m) > \alpha_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$, ja za x možemo staviti y^m .

II) Neka je sada $\alpha_1=0, \alpha_i \leq 0$ $(2\leq i\leq n)$.

Dokažimo sada da postoji $x\in A$ takav da $v_1(x)=0$, $v_i(x)>\alpha_i$ $(2\leq i\leq n)$.

Umjesto elemenata α_i $(2\leq i\leq n)$ uzmimo elemente $0<\delta_i$ iz $\bigcap_{j\neq i}\Delta_{i,j}$ $(2\leq i\leq n)$. Pri tome, postoji $j_0\neq i$ iz $\{2,\ldots,n\}$ takav da je $\Delta_{i,j_0}\subseteq\Delta_{i,j}$ za sve $j\neq i$ iz $\{2,\ldots,n\}$, jer je skup izolovanih podgrupa grupe Γ_{v_i} totalno uredjen relacijom inkluzije. Osim toga , $\Delta_{i,j_0}\neq(0)$. Inače, iz $\Delta_{i,j_0}=(0)$ zaključujemo da izolovanoj podgrupi Δ_{i,j_0} grupe Γ_{v_i} odgovara prosti ideal $P_{v_i\wedge v_{j_0}}$ jednak upravo skupu $\{x\in R_{v_i} : v_i(x)>0\}$, tj. $P_{v_i\wedge v_{j_0}}=P_{v_i}$. Dakle, tada bi bilo $R_{v_i}=R_{v_i}R_{v_{j_0}}$, tj. $R_{v_{j_0}}\subseteq R_{v_i}$, tj. $v_i\leq v_{j_0}$ (Tvrdnja 2.29. i primjedba na str.36.), što je nemoguće.

Kako je familija $(0,\delta_2,\ldots,\delta_n)\in\Gamma_{v_1}\times\Gamma_{v_2}\times\cdots\times\Gamma_{v_n}$ saglasna, prema dokazanom pod I) postoji $x\in A$ takav da je $v_1(x)=0$, $v_i(x)>\delta_i>0\geq\alpha_i$ $(2\leq i\leq n)$.

III) Neka je sada $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma_{v_1}\times\cdots\times\Gamma_{v_n}$ proizvoljna saglasna familija, a $v_1(x_1)=\alpha_1$. Pokažimo da postoji $a_1\in A$ takav da je $v_1(x_1a_1)=\alpha_1$, $v_i(x_1a_1)>\alpha_i$ za $2\leq i\leq n$.

Ukoliko postoji $a_1\in A$ takav da $v_1(x_1a_1)=\alpha_1$, a za sve indekse $i\in\{2,\ldots,n\}$ takve da je $v_i(x_1)\neq\infty$ vrijedi $v_i(x_1a_1)>\alpha_i$, onda će naravno vrijediti $v_i(x_1a_1)>\alpha_i$

za one indekse i za koje je $v_i(x_1)=\infty$. Pretpostavimo zato da je $v_i(x_1)\neq\infty$ za sve $2\leq i\leq n$. Tada je familija $(v_1(x_1),\ldots,v_n(x_1))\in\Gamma_{v_1}\times\cdots\times\Gamma_{v_n}$ saglasna, pa je saglasna i familija $(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$, $\alpha_i'=\alpha_i-v_i(x_1)$, $1\leq i\leq n$. Jasno , $\alpha_1'=0$. U slučaju da su svi $\alpha_i'\leq 0$ za $2\leq i\leq n$, prema dokazanom pod II) postoji $a_1\in A$ takav da je $v_1(a_1)=0$, $v_i(a_1)>0$ $(2\leq i\leq n)$, dakle :

$v_1(a_1)=\alpha_1'=\alpha_1-v_1(x_1)$, tj. $v_1(a_1x_1)=\alpha_1$, dok za $2\leq i\leq n$ imamo $v_i(a_1)>\alpha_i'=\alpha_i-v_i(x_1)$, tj. $v_i(a_1x_1)>\alpha_i$ za $2\leq i\leq n$.

Neka sada postoje indeksi $i,j\in\{2,\ldots,n\}$ takvi da je $\alpha_i'\leq 0$, $\alpha_j'>0$. Stavimo $I=\{1\leq i\leq n : \alpha_i'\leq 0\}$ i $J=\{2\leq j\leq n : \alpha_j'>0\}\cup\{1\}$. Jasno, familije $\{\alpha_i'\}_{i\in I}$ $\{\alpha_j'\}_{j\in J}$ su saglasne, pa prema dokazanom pod I) i II) postoje elementi a_1' , $a_1''\in A$ takvi da je $v_1(a_1')=v_1(a_1'')=0$, $v_i(a_1')>0\geq\alpha_i'$ $(1\neq i\in I)$, $v_j(a_1'')>\alpha_j'$ $(1\neq j\in J)$.
Sada se lako provjerava da za a_1 možemo uzeti element $a_1'\cdot a_1''$.

IV) Na isti način kao pod III), zaključujemo da za sve indekse $j\in\{1,\ldots,n\}$ možemo naći element $a_j\in A$ tako da vrijedi : $v_j(a_jx_j)=\alpha_j$, $v_i(a_jx_j)>\alpha_i$ $(1\leq i\neq j\leq n)$, gdje su $x_j\in R$ takvi da $\alpha_j=v_j(x_j)$ za $1\leq j\leq n$.
Konačno, za element $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in R$, zaključujemo da vrijedi :

$$(\forall j\in\{1,\ldots,n\})\ v_j(x)=v_j(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=\min_{1\leq i\leq n}\{v_j(a_ix_i)\}=\alpha_j.$$

4.3. Primjedba - i) Prema Teoremi 3.6. vidi se da je svaka konačna familija valuacija prstena R, sa velikim Jacobsonovim radikalom, aproksimaciona familija na R. Prema tome, kao posljedicu Teoreme 4.2. dobijamo da za svaku konačnu familiju netrivijalnih i u parovima neuporedivih valuacija prstena sa velikim Jacobsonovim radikalom vrijedi Teorema aproksimacije u okolini nule. S druge strane, vidi se da je dokaz Teoreme 4.2. korektan i u slučaju da je $R=T(A)$, gdje je A Prüferov prsten a valuacije $v_1,\dots,v_n$ nenegativne na A. Time je uopštena odgovarajuća teorema iz [3] (Theorem 4.), jer prsten sa velikim Jacobsonovim radikalom ne mora biti totalan prsten razlomaka (Primjer 3.4.).

ii) Vidjećemo, nešto kasnije, da teorema aproksimacije u okolini nule vrijedi za klasu komutativnih prstena strogo širu od klase prstena sa velikim Jacobsonovim radikalom i takodje, da vrijedi i nešto opštija teorema od Teoreme 4.2.

4.4. Lema - Neka je A podprsten prstena R, a $\{M_i\}_{i\in I}$ skup svih R-regularnih maksimalnih ideala prstena A. Tada za proizvoljan R-regularan ideal Q prstena A vrijedi

$$Q=A\cap\Big(\bigcap_{i\in I}[Q]A_{[M_i]}\Big)=A\cap\Big(\bigcap_{i\in I}QA_{[M_i]}\Big).$$

Dokaz - Ako $x\in A$, a za svako $i\in I$ postoji $s_i\in A\setminus M_i$ takav da $xs_i\in Q$, tj. $s_i\in(Q:Ax)_A$, tada je $(Q:Ax)_A$ R-regularan ideal prstena A, jer sadrži Q, a $(Q:Ax)_A$ nije sadržano u M_i za sve $i\in I$. Zato je $(Q:Ax)_A=A$, pa $x\in Q$. Dakle, $A\cap(\bigcap_{i\in I}[Q]A_{[M_i]})\subseteq Q$. S druge strane,

$Q \subseteq A\cap(\bigcap_{i\in I} QA_{[M_i]}) \subseteq A\cap(\bigcap_{i\in I}[Q]A_{[M_i]})$ i lema je dokazana.

<u>4.5. Tvrdnja</u> - Neka je $\{v_1,\dots,v_n\}$, $n\geq 2$, aproksimaciona familija valuacija prstena R , a $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$. Ako su valuacije v_i , v_j neuporedive za sve $1\leq i\neq j\leq n$, tada su $A\cap P_{v_i}$ $(1\leq i\leq n)$ upravo svi R-regularni maksimalni ideali prstena A .

<u>Dokaz</u> - Prsten A je R-Prüferov , pa je $A=A_{[M_1]}\cap\dots\cap A_{[M_n]}$ za $M_i=A\cap P_{v_i}$ $(1\leq i\leq n)$,prema Tvrdnji 2.22.
Prema Definiciji 3.8. ideali M_i su pravi prosti R-regularni ideali prstena A $(1\leq i\leq n)$. Pretpostavimo da je P pravi prosti R-regularni ideal prstena A takav da za sve $1\leq i\leq n$ vrijedi $P\not\subseteq M_i$. Tada,prema Tvrdnji 2.24.,mora biti $A_{[P]}=R$. Otuda je $[P]A_{[P]}$ kao R-regularan ideal (jer sadrži P) prstena R jednak R , pa zato $P=A\cap[P]A_{[P]}=A\cap R=A$, što je nemoguće . Prema tome,svi R-regularni maksimalni ideali prstena A su medju idealima $M_1,\dots,M_n$. Konačno,ako neki M_i ne bi bio maksimalan,onda bi za neko $j\neq i$ bilo $M_i\subseteq M_j$, pa zato $R_{v_j}\subseteq R_{v_i}$, dakle $v_i\leq v_j$ (Tvrdnja 2.29.), što je nemoguće.

——— Sada ćemo formulisati i dokazati jednu varijantu Opšte teoreme aproksimacije :

<u>4.6. Teorema</u> - Neka je $\{v_1,\dots,v_n\}$, $n\geq 2$, aproksimaciona familija,u parovima neuporedivih,valuacija prstena R , a $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$. Neka su $s_1,\dots,s_n$ iz A R-regularni elementi,a $a_1,\dots,a_n$ iz A proizvoljni .Stavimo $b_i=a_is_i^{-1}$,

$1 \leq i \leq n$. Ako je $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Gamma_{v_1} \times \dots \times \Gamma_{v_n}$ saglasna familija, tada vrijedi sljedeća implikacija :

$$((\forall i \neq j \in \{1,\dots,n\})\ v_i(b_i-b_j) < \alpha_i \Rightarrow \alpha_i - v_i(b_i-b_j) \in \Delta_{i,j}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists x \in R)(\forall i \in \{1,\dots,n\})\ v_i(x-b_i) = \alpha_i \ .$$

Tu je sa $\Delta_{i,j}$ označena izolovana podgrupa Δ_{v_i,v_j} grupe Γ_{v_i} .

Dokaz - I) Pretpostavimo prvo da su svi $b_1,\dots,b_n$ u A i pokažimo da tada postoji $x \in R$ takav da $v_i(x-b_i) \geq \alpha_i$ za sve $1 \leq i \leq n$, ukoliko je tačna implikacija :

$$(\forall i \neq j \in \{1,\dots,n\})\ v_i(b_i-b_j) < \alpha_i \Rightarrow \alpha_i - v_i(b_i-b_j) \in \Delta_{i,j} \ .$$

Neka je $Q_i = \{ b \in A : v_i(b) \geq \alpha_i \}$, $1 \leq i \leq n$. Prema definiciji aproksimacione familije ideali $Q_1,\dots,Q_n$ prstena A su R-regularni. Pokažimo da za sve $1 \leq i \neq j \leq n$ vrijedi $b_i - b_j \in Q_i + Q_j$. Kako su $A \cap P_{v_1}$, ... , $A \cap P_{v_n}$ svi R-regularni ideali prstena A (Tvrdnja 4.5.) i kako je $R_{v_i} = A_{[A \cap P_{v_i}]}$, $1 \leq i \leq n$, prema Lemi 4.4. vrijedi :

$$Q_i + Q_j = \bigcap_{1 \leq k \leq n} (Q_i+Q_j)R_{v_k} \ .$$

Ideal $(Q_i+Q_j)R_{v_k}$ prstena R_{v_k} je R-regularan, jer su svi ideali $Q_1,\dots,Q_n$ R-regularni, pa je zato taj ideal ujedno i v_k-zatvoren (Tvrdnja 2.28. i Teorema 2.26. i)). Da bi smo dokazali $b_i - b_j \in Q_i + Q_j$, dovoljno je prema tome, pokazati da $v_k(b_i-b_j) \in v_k(Q_i+Q_j)$ za sve $k \in \{1,\dots,n\}$.

Neka je sada $k \in \{1,\dots,n\}$ fiksiran. Ako je $v_i(b_i-b_j) \geq \alpha_i$ ili ako je $v_j(b_i-b_j) \geq \alpha_j$, tada $b_i - b_j \in Q_{..}$, odnosno

$b_i-b_j \in Q_j$. Pretpostavimo zato da je $v_i(b_i-b_j)<\alpha_i$, $v_j(b_i-b_j)<\alpha_j$. Tada je $0<\gamma_i=\alpha_i-v_i(b_i-b_j)\in\Delta_{i,j}$, $0<\gamma_j=\alpha_j-v_j(b_i-b_j)\in\Delta_{j,i}$. Zato je par (γ_i,γ_j) iz $\Gamma_{v_i}\times\Gamma_{v_j}$ saglasan i čak $\theta_{i,j}(\gamma_i)=\theta_{j,i}(\gamma_j)=0$.

Prema Lemi 3.13.,uz oznake te leme , $\Omega_{v_i}(\gamma_i)\cap\Omega_{v_j}(\gamma_j)=\emptyset$.

Jasno,tada $v_k\notin\Omega_{v_i}(\gamma_i)$ ili $v_k\notin\Omega_{v_j}(\gamma_j)$.

Ako $v_k\notin\Omega_{v_i}(\gamma_i)$, tada $k\neq i$. Na osnovu Leme 3.12., otuda $\theta_{i,k}(\gamma_i)=0$, pa je par $(\gamma_i,0)\in\Gamma_{v_i}\times\Gamma_{v_k}$ saglasan.

Dalje,prema Tvrdnji 3.14.,postoje $0\leq\beta_j\in\Gamma_{v_j}$, $1\leq j\leq n$, takvi da je $\beta_i=\gamma_i$, $\beta_k=0$, a familija $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ iz $\Gamma_{v_1}\times\dots\times\Gamma_{v_n}$ saglasna. Sada,prema Teoremi 4.2., postoji $x\in R$ takav da je $v_j(x)=\beta_j$ za sve $1\leq j\leq n$. Specijalno , $x\in A$, $v_i(x)=\gamma_i$, $v_k(x)=0$. Dakle, $x(b_i-b_j)\in A$, $v_i(x(b_i-b_j))=\alpha_i$, pa $x(b_i-b_j)\in Q_i$. Konačno,otuda slijedi $v_k(b_i-b_j)=v_k(x(b_i-b_j))\in v_k(Q_i)\subseteq v_k(Q_i+Q_j)$.

U slučaju da $v_k\notin\Omega_{v_j}(\gamma_j)$, zaključujemo na isti način da $v_k(b_i-b_j)\in v_k(Q_j)\subseteq v_k(Q_i+Q_j)$.

Prema tome , $b_i-b_j\in Q_i+Q_j$ za sve $1\leq i\neq j\leq n$.

Sada,prema Kineskoj teoremi o ostacima (Tvrdnja 2.21.),postoji $x\in A$ takav da $x-b_i\in Q_i$ za sve $1\leq i\leq n$. Time je tvrdnja pod I) dokazana .

II) Neka su sada $a_1,\dots,a_n\in A$, $s_1,\dots,s_n$ R-regularni elementi iz A . Tada postoji R-regularan element $s\in A$ i $c_1,\dots,c_n\in A$ takvi da je $b_i=c_i s^{-1}$, $1\leq i\leq n$. Naravno , $v_i(s)\neq\infty$, $1\leq i\leq n$. Sada je familija $(v_1(s),\dots,v_n(s))$ iz $\Gamma_{v_1}\times\dots\times\Gamma_{v_n}$ saglasna , pa je saglasna i familija $(\alpha'_1,\dots,\alpha'_n)$, gdje je $\alpha'_i=\alpha_i+v_i(s)+\beta_i$ a $0<\beta_i$ iz $\bigcap_{j\neq i}\Delta_{i,j}$. Prema dijelu dokaza pod I),postoji $y\in R$ takav da je $v_i(y-c_i)\geq\alpha'_i$, $1\leq i\leq n$.

Naime , $v_i(c_i-c_j)<\alpha'_i$ daje $v_i(b_i-b_j)<\alpha_i+\beta_i$, pa je $v_i(b_i-b_j)-\alpha_i<\beta_i$. Ako je $0\leq v_i(b_i-b_j)-\alpha_i$, tada $v_i(b_i-b_j)-\alpha_i\in\bigcap_{j\neq i}\Delta_{i,j}\subseteq\Delta_{i,j}$, a ako je $v_i(b_i-b_j)-\alpha_i<0$, tada prema pretpostavci teoreme,vrijedi $\alpha_i-v_i(b_i-b_j)\in\Delta_{i,j}$. Zato je , $\alpha'_i-v_i(c_i-c_j)=\alpha_i-v_i(b_i-b_j)+\beta_i\in\Delta_{i,j}$ ako je $v_i(c_i-c_j)<\alpha'_i$.

Dakle,tvrdnja pod I) može se primjeniti na elemente $c_1,\dots,c_n$ i familiju $(\alpha'_1,\dots,\alpha'_n)$.

Sada je $v_i(ys^{-1}-c_i s^{-1})=v_i(ys^{-1}-b_i)\geq\alpha_i+\beta_i$. $1\leq i\leq n$. Kako je familija $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ saglasna , postoji $z\in R$ takav da je $v_i(z)=\alpha_i$, $1\leq i\leq n$ (Teorema 4.2.). Stavimo sada $x=ys^{-1}+z$. Tada vrijedi :

$$v_i(x-b_i)=v_i(ys^{-1}-b_i+z)=\min\{v_i(ys^{-1}-b_i),v_i(z)\}=v_i(z)=\alpha_i ,$$

za sve $i\in\{1,\dots,n\}$.

<u>4.7. Primjedba</u> - i) Ako je R prsten sa velikim Jacobsonovim radikalom,prema Teoremi 3.6.,vidimo da je Teorema 4.6. tačna za svaku konačnu familiju,u parovima neuporedivih i netrivijalnih valuacija prstena R i za proizvoljne elemente

$b_1,\dots,b_n$ prstena R. Naime, prema Teoremi 3.6., svaki $b_i \in R$ može se napisati u obliku $b_i=a_i s_i^{-1}$, gdje su $a_i, s_i \in A$, s_i invertibilan u R.

ii) Ako je R totalan prsten razlomaka $T(A)$ Prüferovog prstena A, $v_1,\dots,v_n$ u parovima neuporedive, netrivijalne valuacije prstena R, nenegativne na A a $b_1,\dots,b_n$ iz $T(A)$ proizvoljni, tada je za proizvoljnu saglasnu familiju $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \Gamma_{v_1}\times\dots\times\Gamma_{v_n}$, tačna tvrdnja Teoreme 4.6.

Zaista, $\overline{A}=\bigcap_{1\le i\le n} R_{v_i}$ je Prüferov prsten i $T(\overline{A})=R$. Osim toga, za svako $i\in\{1,\dots,n\}$ skup $\{a\in \overline{A}\cap U(R) : v_i(a)>\alpha_i\}$, pri datom $\alpha_i\in\Gamma_{v_i}$, sadrži barem jedan element. Pretpostavimo li suprotno, tada bi za sve regularne elemente $a\in A$ bilo $v_i(a)\le\alpha_i$. Ali, $R_{v_i}\subsetneq R$, pa postoji regularan element $s_o\in A$ takav da $v_i(s_o)>0$. Naime, $r\in R\setminus R_{v_i}$ povlači $v_i(r)<0$. Ako je $r=a_o/s_o$, s_o regularan u A, $a_o\in A\subseteq R_{v_i}$, tada $0\le v(a_o)<v(s_o)$, tj. $v_i(s_o)>0$.

Zato, kako postoji $x\in R$, $x=b/t$, $b,t\in A$, t regularan u A, takav da $v_i(x)=-\alpha_i$, to vrijedi :

$$v_i(a)\le\alpha_i=-v_i(x)=v_i(t)-v_i(b)\le v_i(t)<v_i(t)+v_i(s_o)=v_i(ts_o),$$

za proizvoljan regularan $a\in A$. Dakle, $v_i(ts_o)<v_i(ts_o)$, što je nemoguće. Prema tome, vrijedi :

$$\emptyset\ne\{a\in A\cap U(R) : v_i(a)>\alpha_i\}\subseteq\{a\in\overline{A}\cap U(R) : v_i(a)>\alpha_i\}.$$

Prema Definiciji 3.8., znači da je $v_1,\dots,v_n$ aproksimaciona familija na $R=T(A)$. Osim toga, ako je $b_i\in R=T(\overline{A})$, tada $b_i=a_i/s_i$, $a_i,s_i\in\overline{A}$, s_i regularan u $\overline{A}$, tj. s_i invertibilan u $R=T(\overline{A})$.

—— Iz Primjedbe 4.7. dakle , zaključujemo da kao posljedice Teoreme 4.6. vrijede sljedeće teoreme :

4.8. Teorema - Neka je R prsten sa velikim Jacobsonovim radikalom. Tada za proizvoljnu konačnu familiju netrivijalnih i u parovima neuporedivih valuacija $v_1,\dots,v_n$ na R , za proizvoljne $b_1,\dots,b_n \in R$ i za proizvoljnu saglasnu familiju $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Gamma_{v_1} \times \dots \times \Gamma_{v_n}$, vrijedi sljedeća implikacija:

$$((\forall i \neq j \in \{1,\dots,n\})\ v_i(b_i-b_j) < \alpha_i \Rightarrow \alpha_i - v_i(b_i-b_j) \in \Delta_{i,j}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists x \in R)(\forall i \in \{1,\dots,n\})\ v_i(x-b_i) = \alpha_i) .$$

4.9. Teorema (M.Arapović) - Neka je R totalan prsten razlomaka T(A) Prüferovog prstena A i $v_1,\dots,v_n$ u parovima neuporedive, netrivijalne i nenegativne na A valuacije prstena R . Tada za proizvoljne $b_1,\dots,b_n \in R$ i za proizvoljnu saglasnu familiju $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \Gamma_{v_1} \times \dots \times \Gamma_{v_n}$ vrijedi implikacija kao u Teoremi 4.8.

4.10. Primjedba - Napomenimo da Teorema 4.9. uopštava klasičan rezultat P.Ribenboim-a za slučaj valuacija na polju [33] (Theoreme 5', str.11.).

GLAVA II

TEOREME APROKSIMACIJE ZA INVERZNO POVEZANE VALUACIJE

§1. Inverzno povezane familije valuacija

Pojam inverzno povezane familije valuacija potiče od M.E.Manis-a [28,str.196] koji je prvi razmatrao i teoremu aproksimacije u okolini nule,za u parovima nezavisne i inverzno povezane valuacije [28,Proposition 15.] , ali uz još neka ograničenja na posmatrane valuacije.

Kasnije je J.Gräter [14,Satz 3.3.] pokazao da vrijedi teorema aproksimacije u okolini nule za u parovima nezavisne i inverzno povezane valuacije.Osim toga,J.Gräter je pokazao da je na svakom prstenu sa velikim Jacobsonovim radikalom proizvoljna konačna familija valuacija inverzno povezana . Svoja istraživanja o vezi izmedju inverzne povezanosti proizvoljne konačne familije valuacija nekog posmatranog prstena i toga da na tom prstenu vrijedi jedna (slabija) varijanta opšte teoreme aproksimacije J.Gräter je nastavio u [15] (Satz 2.5., Satz 2.6.),gdje je takodje pokazano [15,Satz 3.5.] da ako je za valuacije $v_1,\dots,v_n$ prstena R presjek $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$ R-Prüferov prsten,da su $v_1,\dots,v_n$ inverzno povezane i da za te valuacije onda vrijedi (slabija) varijanta opšte teoreme aproksimacije [15,str.282.] .

Osnovni rezultati ove glave biće teoreme aproksimacije u okolini nule za u parovima neuporedive i inverzno povezane valuacije $v_1,\dots,v_n$ prstena R , odnosno za takve valuacije za koje je prsten $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$ R-Prüferov prsten .

Uvešćemo takodje i pojam strogo inverzno povezane familije valuacija i pokazaćemo da za takvu konačnu familiju valuacija vrijedi opšta teorema aproksimacije .

<u>1.1. Definicija</u> - Za familiju valuacija $\{v_i\}_{i\in I}$ prstena R kažemo da je inverzno povezana ako vrijedi sljedeća relacija :

$$(\forall x\in R)(\exists x'\in R)(\forall i\in I)\ v_i(x)\neq\infty_i \Rightarrow v_i(xx')=0 .$$

Za familiju valuacija $\{v_i\}_{i\in I}$ prstena R kažemo da je strogo inverzno povezana ako je ta familija inverzno povezana i svaki element $x\in R$ takav da $v_i(x)=0$ za sve $i\in I$, je ujedno i invertibilan element prstena $\bigcap_{i\in I} R_{v_i}$.

——— U slučaju da je R polje, svaka familija valuacija $\{v_i\}_{i\in I}$ je strogo inverzno povezana .

<u>1.2. Lema</u> - Neka su valuacije v i v' prstena R inverzno povezane. Tada vrijedi sljedeća implikacija :

$$R_v\subseteq R_{v'} \Rightarrow P_{v'}\setminus v'^{-1}(\infty)\subseteq P_v .$$

Specijalno, ako vrijedi i $v^{-1}(\infty)=v'^{-1}(\infty)$, tada je $v'\leq v$ ako i samo ako je $R_v\subseteq R_{v'}$.

<u>Dokaz</u> - Neka je $R_v\subseteq R_{v'}$, a element $x\in R$ takav da je $0<v'(x)<\infty$ i $v(x)\leq 0$. Kako postoji $x'\in R$ takav da je $v(xx')=0$ i $v'(xx')=0$, to je $v(x')=-v(x)\geq 0$, tj. $x'\in R_v\subseteq R_{v'}$, pa zbog $x\in P_{v'}$ slijedi $xx'\in P_{v'}$. Medjutim, $v'(xx')=0$, pa dobivena kontradikcija pokazuje da iz $R_v\subseteq R_{v'}$ mora slijediti $P_{v'}\setminus v'^{-1}(\infty)\subseteq P_v$.

Drugi dio tvrdnje je očigledno tačan, jer u slučaju $v^{-1}(\infty)=$ $=v'^{-1}(\infty)$ iz $R_v \subsetneq R_{v'}$ sada slijedi i $v^{-1}(\infty) \subseteq P_{v'} \subsetneq P_v$, pa je $v' \leq v$ (Tvrdnja 1.3., gl.I).

Lema 1.3. ([33, Lemme 3]) - Neka su valuacije v i v' polja K neuporedive, a P prosti ideal prstena R_v takav da je $P \subseteq R_{v'}$. Tada je P ideal prstena $R_{v'}$ i to prosti ideal u $R_{v'}$. Specijalno, postoji najopsežniji prosti ideal $P_{v,v'}$ prstena R_v sadržan u P_v i u $P_{v'}$ istovremeno. Tada je $P_{v,v'}$ upravo pozitivni ideal valuacije $v \wedge v'$ koja odgovara valuacionom prstenu $R_v R_{v'}$.

Dokaz - Drugi dio tvrdnje se dokazuje jednostavno nakon što se dokaže prvi dio tvrdnje. Daćemo ovdje dokaz prvog dijela tvrdnje prema ideji M.Arapovića. Primjetimo samo da dokaz koji slijedi možemo primjeniti i u slučaju da posmatramo valuacije nekomutativnog tijela K.

Dovoljno je dokazati da za $p \in P$ i $a' \in R_{v'} \setminus R_v$ vrijedi $a'p \in P$, te da za $x, y \in R_{v'}$ takve da $x \in R_{v'} \setminus R_v$ iz $xy \in P$ slijedi $y \in P$.

Neka je $a' \in R_{v'} \setminus R_v$ i $p \in P$. Dokažimo da tada $a'p \in P$. Primjetimo prvo da u P ne postoji element q takav da je $v'(q)=0$. Inače, zbog $R_v \not\subseteq R_{v'}$, za neko $x \in R_v \setminus R_{v'}$ bi bilo

$$0 \leq v'(xq) = v'(x) + v'(q) = v'(x) < 0 ,$$

što je nemoguće.

Dalje, kako $a' \notin R_v$, to $(a')^{-1} \in R_v$ i osim toga $(a')^{-1} \notin P$. Naime, u suprotnom bi, zbog $P \subseteq R_{v'}$, bilo $v'((a')^{-1})=0$ i $(a')^{-1} \in P$. Dakle, $(a')^{-1} \in R_v \setminus P$. S druge strane, mora biti

$a'p\in R_v$. Zaista, inače bi $p^{-1}(a')^{-1}=a\in R_v$, pa zato $(a')^{-1}=pa\in P$. Prema tome , $p=(a')^{-1}\cdot a'p$, $(a')^{-1}\in R_v\setminus P$, $a'p\in R_v$ i otuda zaključujemo, jer je P prosti ideal u R_v , da mora biti $a'p\in P$.

Neka je konačno , $xy\in P$, $x\in R_{v'}\setminus R_v$ i dokažimo da $y\in P$. Zaista, tada je $x^{-1}\in R_v$, pa iz $y=x^{-1}\cdot xy\in R_vP\subseteq P$ slijedi $y\in P$.

<u>1.4. Tvrdnja</u> - Neka su v i v' neuporedive i inverzno povezane valuacije prstena R i neka je $v^{-1}(\infty)=v'^{-1}(\infty)=P$. Tada postoji najopsežniji prosti ideal $P_{v,v'}$ prstena R_v i $R_{v'}$ sadržan istovremeno u P_v i u $P_{v'}$.

<u>Dokaz</u> - Neka je $K=T(R/P)$ polje razlomaka oblasti R/P . Definišimo preslikavanje $w:R/P\to\Gamma_v\cup\{\infty\}$ na sljedeći način :

$$w(x+P)=v(x) \text{ ako } x\in R\setminus P \text{ , a } w(x+P)=\infty \text{ ako } x\in P.$$

Jednostavno se provjerava da je w valuacija oblasti R/P , te možemo u daljem smatrati da je w kanonski definisana i na polju K . Tada je $R_w=R_v/P$ a $P_w=P_v/P$.

Analogno možemo definisati i valuaciju w' polja K polazeći od valuacije v' .

Dokažimo sada da su valuacije w i w' polja K neuporedive, tj. da su valuacione oblasti R_v/P i $R_{v'}/P$ polja K neuporedive u odnosu na relaciju inkluzije.
Zaista, iz $R_v/P\subseteq R_{v'}/P$ slijedilo bi $R_v\subseteq R_{v'}$, pa prema Lemi 1.2. otuda $v'\leq v$, što je nemoguće .

Slično vrijedi i $R_{v'}/P\nsubseteq R_v/P$.

Na osnovu Leme 1.3. sad zaključujemo da postoji najopsežniji prosti ideal $P_{w,w'}$ oblasti R_w i $R_{w'}$ istovremeno. Jasno, to znači da za neki prosti ideal $P_{v,v'}$ prstena R_v, odnosno prstena $R_{v'}$, vrijedi $P_{w,w'}=P_{v,v'}/P$. Takodje, mora biti $P_{v,v'} \subseteq P_v$ i $P_{v,v'} \subseteq P_{v'}$, jer su pozitivni ideali valuaci- w i w' upravo P_v/P, odnosno $P_{v'}/P$.

1.5. Primjedba - i) Iz oznake prethodne tvrdnje, jasno je da vrijedi $P_{v,v'} = P$ ako i samo ako vrijedi sljedeća implikacija :

$$v'' \leqslant v \ \wedge \ v'' \leqslant v' \Rightarrow \Gamma_{v''}=\{0\} \wedge P_{v''}=P .$$

Naime, ako je $P_{v,v'}=P=v^{-1}(\infty)=v'^{-1}(\infty)$, tada npr. iz $v'' \leqslant v$ slijedi $v''^{-1}(\infty)=v^{-1}(\infty)$. Osim toga, valuacije v,v',v'' su tada inverzno povezane. Zato na osnovu dokaza Tvrdnje 1.4. i na osnovu Leme 1.2. (drugi dio), zaključujemo da $v'' \leqslant v$ i $v'' \leqslant v'$ povlači $R_v \subsetneq R_{v''}$ i $R_{v'} \subseteq R_{v''}$. Otuda je $R_wR_{w'}=R_v/P \cdot R_{v'}/P \subseteq R_{w''}=R_{v''}/P$. Ako je $P_{v,v'}$ jednako P, tada je pozitivni ideal valuacione oblasti $R_wR_{w'}$ polja K, upravo $P_{v,v'}/P$, jednak (0), dakle $R_wR_{w'}= K$, pa je i $R_{w''}=K$. Otuda je $\Gamma_{v''}=\{0\}$.

Obrnuto, ako bi za neke netrivijalne i inverzno povezane valuacije v i v' prstena R takve da $v^{-1}(\infty)=v'^{-1}(\infty)=P$ bilo $P \subsetneq P_{v,v'}$, tada iz $P=v^{-1}(\infty) \subsetneq P_{v,v'} \subseteq P_v$ i $v'^{-1}(\infty) \subsetneq P_{v,v'} \subseteq P_{v'}$, na osnovu Tvrdnje 1.2. iii), gl. I, zaključujemo da je $(R_{[P_{v,v'}]}, P_{v,v'})$ valuacioni par

netrivijalne valuacije v'' prstena R i da je
$R_{v''} = R_{v'}[P_{v,v'}]$. Osim toga , $v'' \leqslant v$ i $v'' \leqslant v'$,
a $\Gamma_{v''} \neq \{0\}$.

ii) Kao i obično, sa $v \wedge v'$ označimo (ako takva postoji) valuaciju prstena R takvu da je $v \wedge v' \leqslant v$ i $v \wedge v' \leqslant v'$ a za proizvoljnu valuaciju v'' prstena R iz $v'' \leqslant v$ i $v'' \leqslant v'$ slijedi $v'' \leqslant v \wedge v'$. Prema Tvrdnji 1.4. vidimo da za inverzno povezane valuacije v i v' prstena R takve da je $v^{-1}(\infty)=v'^{-1}(\infty)$ postoji valuacija $v \wedge v'$, te da je $P_{v \wedge v'} = P_{v,v'}$, a $R_{v \wedge v'} = R_{v}[P_{v,v'}] = R_{v'}[P_{v,v'}]$.

Označimo sa $\Delta_{v,v'}$ izolovanu podgrupu grupe Γ_v koja odgovara prostom v-zatvorenom idealu $P_{v,v'}$ prstena R_v , a sa $\theta_{v,v'} : \Gamma_v \longrightarrow \Gamma_v/\Delta_{v,v'}$ označimo kanonski epimorfizam. Analogno definišemo podgrupu $\Delta_{v',v}$ grupe $\Gamma_{v'}$ i preslikavanje $\theta_{v',v} : \Gamma_{v'} \longrightarrow \Gamma_{v'}/\Delta_{v',v}$. Grupe $\Gamma_{v \wedge v'}$, $\Gamma_v/\Delta_{v,v'}$, $\Gamma_{v'}/\Delta_{v',v}$ ćemo, kao što je uobičajeno, identifikovati uz pomoć sljedeće relacije :

$(\forall x \in R)\ (v \wedge v')(x) = \theta_{v,v'}(v(x)) = \theta_{v',v}(v'(x))$, uz dogovor $\theta_{v,v'}(\infty)=\infty$; $\theta_{v',v}(\infty)=\infty$.

Kao i obično, kažemo da je par $(\alpha, \alpha') \in \Gamma_v \times \Gamma_{v'}$ saglasan ako vrijedi $\theta_{v,v'}(\alpha) = \theta_{v',v}(\alpha')$.

U slučaju $v^{-1}(\infty) \neq v'^{-1}(\infty)$ stavićemo $\Delta_{v,v'} = \Gamma_v$, $\Delta_{v',v} = \Gamma_{v'}$, a $\theta_{v,v'}(\alpha)=0$ za sve $\alpha \in \Gamma_v$ i slično $\theta_{v',v}(\alpha')=0$ za sve $\alpha' \in \Gamma_{v'}$. U tom slučaju je znači, svaki par (α, α') iz $\Gamma_v \times \Gamma_{v'}$ saglasan .

iii) Ako su valuacije v i v' prstena R takve da $v^{-1}(\infty) \neq v'^{-1}(\infty)$, tada su v i v' nezavisne .

iv) Kao obično, za familiju $\{v_i\}_{i \in I}$ inverzno povezanih valuacija prstena R reći ćemo da je $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ iz $\prod_{i \in I} \Gamma_{v_i}$ saglasna familija ako je za sve $i \neq j$ iz I par $(\alpha_i, \alpha_j) \in \Gamma_{v_i} \times \Gamma_{v_j}$ saglasan (prema ii)) .

——— Sljedeća tvrdnja, čiji je dokaz trivijalan, pripada M.E.Manis-u [28,Proposition 9.] :

<u>1.6. Tvrdnja</u> - Neka je V skup valuacija prstena R i neka su valuacije iz V inverzno povezane. Dalje, neka je V' skup valuacija prstena R tako da vrijedi sljedeća relacija:

$$(\forall v' \in V')(\exists v \in V) \quad v' \leq v \quad .$$

Tada su i valuacije iz skupa $V \cup V'$ inverzno povezane .

——— Navedimo još sljedeći rezultat J.Gräter-a [14,Hilfsatz 3.2.] :

<u>1.7. Tvrdnja</u> - Neka su v_1 i v_2 inverzno povezane i nezavisne valuacije prstena R , a $\alpha_1 \in \Gamma_{v_1}$ i $\alpha_2 \in \Gamma_{v_2}$ proizvoljni. Tada postoji $x \in R$ takav da je

$$v_1(x) = \alpha_1 \quad \text{i} \quad v_2(x) = \alpha_2 \quad .$$

<u>1.8. Primjedba</u> - i) Prethodnu Tvrdnju 1.7., u pomenutom radu [14] , J.Gräter koristi za dokaz Teoreme aproksimacije u okolini nule za inverzno povezane i u parovima nezavisne

valuacije $v_1,\dots,v_n$ prstena R [14, Satz 3.5.] .

ii) Ako su v_1 i v_2 inverzno povezane i zavisne valuacije prstena R , a $\alpha_1 \in \Delta_{v_1,v_2}$ i $\alpha_2 \in \Delta_{v_2,v_1}$ proizvoljni, tada postoji $x \in R$ takav da je $v_1(x)=\alpha_1$ i $v_2(x)=\alpha_2$ [15, 2.2. str. 281] .

U ovom Gräter-ovom rezultatu se dakle, pretpostavlja da je $\vartheta_{v_1,v_2}(\alpha_1)=\vartheta_{v_2,v_1}(\alpha_2)=0$, znači jedan specijalan slučaj saglasnosti para $(\alpha_1,\alpha_2)\in \Gamma_{v_1}\times\Gamma_{v_2}$.

§2. Teorema aproksimacije u okolini nule

Sada ćemo dokazati Teoremu aproksimacije u okolini nule za konačno mnogo inverzno povezanih i u parovima neuporedivih valuacija. Ideja dokaza potiče iz dokaza odgovarajuće teoreme M. Arapovića [3, Theorem 1.] za valuacije na polju.

Kao i pri dokazu Teoreme 4.2. gl. I potrebna nam je tvrdnja analogna Tvrdnji 4.1. gl. I :

<u>2.1. Tvrdnja</u> - Neka je $\{v_1,\dots,v_n\}$, $n\geqslant 2$, familija netrivijalnih i u parovima neuporedivih valuacija prstena R i neka su te valuacije inverzno povezane. Dalje, neka je $(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in \Gamma_{v_1}\times\Gamma_{v_2}\times\cdots\times\Gamma_{v_n}$ saglasna familija, $\alpha_i>0$, $2\leqslant i\leqslant n$, a sa Q_i neka je označen skup $\{y_i\in R_{v_i} : v_i(y_i)\geqslant\alpha_i\}$, $2\leqslant i\leqslant n$.

Tada je Q_i ideal prstena R_{v_i} , a radikal $I_i=r(Q_i)$ je prosti v_i-zatvoreni ideal prstena R_{v_i} , $2\leqslant i\leqslant n$, različit od $v_i^{-1}(\infty)$. Osim toga, skup $P_2 \cap \cdots \cap P_r \cap (R_{v_1} \setminus P_{v_1})$ nije prazan .

Dokaz - Jednostavno se provjerava da je Q_i ideal prstena R_{v_i} , a da je P_i prosti v_i-zatvoreni ideal prstena R_{v_i} različit od $v_i^{-1}(\infty)$, $2 \leq i \leq n$.

Neka su elementi $x_i \in R$ takvi da je $\alpha_i = r_i(x_i)$, $2 \leq i \leq n$. Jasno , $x_i \in P_i$, $2 \leq i \leq n$. Dalje, možemo pretpostaviti da za sve $i \neq j$ iz $\{2,\ldots,n\}$ vrijedi $P_i \not\subseteq P_j$.

Dokažimo sada da $P_i \not\subseteq P_{v_1}$ za sve $i \in \{2,\ldots,n\}$. Zaista, pretpostavimo da za neko $i \in \{2,\ldots,n\}$ vrijedi $P_i \subseteq P_{v_1}$. U slučaju $v_1^{-1}(\infty)=v_i^{-1}(\infty)$, prema Tvrdnji 1.4. i Primjedbi 1.5., vrijedi $P_i \subseteq P_{v_1,v_i} = P_{v_1 \wedge v_i}$, pa kako je $x_i \in P_i$, to sigurno $x_i \in P_{v_1 \wedge v_i}$. Specijalno, element $\alpha_i = v_i(x_i) \notin \Delta_{v_i,v_1}$. Ali, par $(0,\alpha_i) \in \Gamma_{v_1} \times \Gamma_{v_i}$ je saglasan, pa $\alpha_i \in \Delta_{v_i,v_1}$. Konačno, u slučaju $v_1^{-1}(\infty) \neq v_i^{-1}(\infty)$, valuacije v_1 i v_i prstena R su nezavisne, pa prema Tvrdnji 1.7. postoji $y \in R$ takav da je $v_i(y) = \alpha_i > 0$ i $v_1(y)=0$. Dakle , $y \in P_i \subseteq P_{v_1}$, pa $v_1(y) > 0$.

Dobivene kontradikcije pokazuju da mora biti $P_i \not\subseteq P_{v_1}$ za sve $i \in \{2,\ldots,n\}$.

Označimo sada sa w_i netrivijalnu valuaciju prstena R takvu da je $R_{w_i} = R_{v_i[P_i]}$, $P_{w_i} = P_i$, $2 \leq i \leq n$ (Tvrdnja 1.2., iii), gl. I).
Prema Tvrdnji 1.6. valuacije $v_1, w_2, \ldots, w_n$ su inverzno povezane, jer je $w_i \leq v_i$ za sve $i \in \{2,\ldots,n\}$.

Dalje , $R_{v_1} \not\subseteq R_{w_i}$ za sve $i \in \{2,\ldots,n\}$. Inače, prema ğemi 1.2., bilo bi $P_i \setminus w_i^{-1}(\infty) \subseteq P_{v_1}$. U slučaju da je $v_1^{-1}(\infty) = w_i^{-1}(\infty)$, bilo bi čak $P_i \subseteq P_{v_1}$, što nije moguće. Ako je $v_1^{-1}(\infty) \neq w_i^{-1}(\infty)$, tada su valuacije v_1 i w_i nezavisne i inverzno povezane, pa ponovo prema Tvrdnji 1.7. postoji $y \in R$ takav da je $v_1(y)=0$, a $0 < w_i(y) < \infty$. Ali, $y \in P_{w_i} \setminus w_i^{-1}(\infty)$ implicira $y \in P_{v_1}$, tj. $v_1(y) > 0$. Dobivena kontradikcija pokazuje da vrijedi $P_{v_1} \not\subseteq R_{w_i}$ za sve $i \in \{2,\dots,n\}$.

Na potpuno isti način kao u prvom dijelu dokaza Teoreme 1. iz [3], sada se dokazuje da postoji element $y \in R$ takav da je $v_1(y)=0$, a $w_i(y) < 0$ za sve $i \in \{2,\dots,n\}$.

Kako su valuacije $v_1, w_2, \dots, w_n$ inverzno povezane, to postoji $x \in R$ takav da je $v_1(xy)=0$, a $w_i(xy)=0$, $2 \leq i \leq n$. Dakle, $v_1(x)=0$, a $w_i(x) > 0$ za sve $i \in \{2,\dots,n\}$. Prema tome, $x \in P_2 \cap \dots \cap P_n \cap (R_{v_1} \setminus P_{v_1})$.

<u>2.2. Teorema</u> - Neka su valuacije $v_1, \dots, v_r$ prstena R netrivijalne, u parovima neuporedive i inverzno povezane, a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_{v_1} \times \dots \times \Gamma_{v_n}$ saglasna familija.

Tada postoji $x \in R$ takav da je $v_i(x) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$.

<u>Dokaz</u> Dokaz je identičan dokazu Teoreme 4.2.gl.I.

<u>2.3. Primjedba</u> - i) Ako su $v_1, \dots, v_n$ netrivijalne i inverzno povezane valuacije prstena R, a $\Sigma_i = \bigcap_{j \neq i} \Delta_{v_i, v_j}$ (Primjedba 1.5.ii)), tada za proizvoljnu familiju $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ postoji $x \in R$ takav da je $v_i(x) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$. To je rezultat J.Grätzer-a i neposredno

slijedi iz [15] (Satz 2.6. i Satz 2.5.). Primijetimo da je tu saglasnost familije $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ostvarena preko :

$$\theta_{v_i,v_j}(\alpha_i)=\theta_{v_j,v_i}(\alpha_j)=0 \quad .$$

Navedeni rezultat je dakle,samo specijalan slučaj Teoreme 2.2.

ii) I sljedeći rezultat pripada J.Gräter-u [15] (Satz 3.5., dokaz pod (1)) :

Ako su $v_1,\dots,v_n$ netrivijalne valuacije prstena R takve da je $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$ R-Prüferov prsten,tada su valuacije $v_1,\dots,v_n$ inverzno povezane .

Ako sada uzmemo u obzir Teoremu 2.2. vidimo da se Teorema 4.2.gl.I dobija sada kao posljedica Teoreme 2.2. i pomenutog Gräter-ovog rezultata.Naime,tačna je i ova nešto opštija teorema :

<u>2.4. Teorema</u> - Ako su $v_1,\dots,v_n$ netrivijalne valuacije prstena R takve da su u parovima neuporedive a prsten $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$ R-Prüferov , tada za proizvoljnu saglasnu familiju $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma_{v_1}\times\dots\times\Gamma_{v_n}$ postoji $x\in R$ takav da je $v_i(x)=\alpha_i$, $1\leq i\leq n$.

——— Dokažimo sada da je,uz izvjesne dodatne pretpostavke, moguće zaključiti da je $A=R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$ R-Prüferov prsten ukoliko su valuacije $v_1,\dots,v_n$ inverzno povezane . Otuda ćemo onda dobiti i Opštu teoremu aproksimacije za odredjene strogo onverzno povezane valuacije .

<u>2.5. Teorema</u> - Neka su valuacije $v_1,\dots,v_r$ prstena R netrivijalne, u parovima neuporedive i inverzno povezane. Dalje, neka je sa A označen skup $R_{v_1}\cap\dots\cap R_{v_n}$.

Tada su tačne sljedeće tvrdnje :

1) $(\forall i\in\{1,\dots,n\})\ A_{[A\cap P_{v_i}]}=R_{v_i}\ \wedge\ [A\cap P_{v_i}]/[A\cap P_{v_i}]=\Gamma_{v_i}$;

2) ideali $A\cap P_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, su upravo svi maksimalni ideali prstena A ako i samo ako je familija $\{v_1,\dots,v_r\}$ strogo inverzno povezana ;

3) ako je $\{v_1,\dots,v_n\}$ strogo inverzno povezana familija, tada je A R-Prüferov prsten ;

4) ako je $\{v_1,\dots,v_n\}$ strogo inverzno povezana familija a skup $\{a\in A : v_i(a)>\alpha_i\}$ sadrži R-regularan element za svako $\alpha_i\in\Gamma_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, tada za $\{v_1,\dots,v_n\}$ vrijedi Opšta teorema aproksimacije .

<u>Dokaz</u> - 1) Jasno, vrijedi $A_{[A\cap P_{v_i}]}\subseteq R_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, pa dokažimo još obrnutu inkluziju .

Neka je $a_i\in R_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$. Stavimo $\alpha_{j,i}=-v_j(a_i)$ ako je $v_j(a_i)<0$, a $\alpha_{j,i}=0$ ako je $v_j(a_i)\geqslant 0$. Tada je $\alpha_{i,i}=0$, $\alpha_{j,i}\geqslant 0$ za sve $j\in\{1,\dots,n\}$. Takođe, familija $(\alpha_{j,i})\in\Gamma_{v_1}\times\dots\times\Gamma_{v_n}$ je saglasna . Naime, ako je $j\neq i$ takav da $v_j(a_i)<0$, a $v_i^{-1}(\infty)=v_j^{-1}(\infty)$, tada je sigurno $v_i(a_i)\neq\infty_i$, pa tada vrijedi

$$0\leqslant\theta_{v_j,v_i}(\alpha_{j,i})=-\theta_{v_j,v_i}(v_j(a_i))=-\theta_{v_j,v_i}(v_i(a_i))\leqslant 0\ ,$$

dakle vrijedi $\vartheta_{v_j,v_i}(\alpha_{j,i})=\vartheta_{v_i,v_j}(\alpha_{i,i})=0$.

Ako su $j\neq i$, $j'\neq i$ takvi da je $v_j(a_i)<0$, $v_{j'}(a_i)<0$, dovoljno je opet razmatrati samo slučaj $v_j^{-1}(\infty)=v_{j'}^{-1}(\infty)$. Tada je ponovo :

$$\vartheta_{v_j,v_{j'}}(\alpha_{j,i})=-\vartheta_{v_j,v_{j'}}(v_j(a_i))=-\vartheta_{v_{j'},v_j}(v_{j'}(a_i))=$$

$=\vartheta_{v_{j'},v_j}(\alpha_{j',i})$. Konačno,ako su $j\neq i$, $j'\neq i$ takvi da je $v_j(a_i)\geqslant 0$, a $v_{j'}(a_i)<0$, tada :

$$0\leqslant\vartheta_{v_{j'},v_j}(\alpha_{j',i})=-\vartheta_{v_{j'},v_j}(v_{j'}(a_i))=-\vartheta_{v_j,v_{j'}}(v_j(a_i))\leqslant 0 .$$

Prema Teoremi 2.2.,postoji $x\in R$ takav da vrijedi $v_j(x)=\alpha_{j,i}$ za sve $j\in\{1,\dots,n\}$. Specijalno , $v_j(x)\geqslant 0$, $1\leqslant j\leqslant n$, pa je $x\in A$. Osim toga , $v_i(x)=0$, dok je $v_j(a_ix)\geqslant 0$ za sve $j\in\{1,\dots,n\}$, dakle $a_ix\in A$. To znači da $a_i\in A_{[A\cap P_{v_i}]}$. Znači,vrijedi $R_{v_i}=A_{[A\cap P_{v_i}]}$, a otuda lako slijedi i $P_{v_i}=[A\cap P_{v_i}]A_{[A\cap P_{v_i}]}$.

2) Ako su $A\cap P_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, upravo svi maksimalni ideali prstena A , jasno je da iz $v_1(x)=\dots=v_n(x)=0$ slijedi $x\in A\setminus\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}P_{v_i}$, pa je x invertibilan u A .

Obrnuto,ako je familija $\{v_1,\dots,v_n\}$ valuacija prstena R strogo inverzno povezana i te valuacije u parovima neuporedive, tada svaki pravi ideal Q prstena A mora biti sadržan u uniji ideala $A\cap P_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, pa i u jednom od tih ideala. Specijalno,svi maksimalni ideali prstena A nalaze se medju idealima $A\cap P_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Dalje, ako neki od ideala $A\cap P_{v_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, ne bi bio maksimalan, tada za neko $j\neq i$ iz $\{1,\dots,n\}$ bi imali $A\cap P_{v_i}\subsetneqq A\cap P_{v_j}$, pa otuda i $A_{[A\cap P_{v_j}]}\subseteq A_{[A\cap P_{v_i}]}$, tj. $R_{v_j}\subseteq R_{v_i}$. Zato je $P_{v_i}\setminus v_i^{-1}(\infty)$ sadržano u P_{v_j} (Lema 1.2.).

Medjutim , mora biti $v_i^{-1}(\infty)=v_j^{-1}(\infty)$, jer bi inače, prema Tvrdnji 1.7., postojao $y\in R$ takav da je $v_j(y)=0$, a $0<v_i(y)<\infty$. Otuda $y\in P_{v_i}\setminus v_i^{-1}(\infty)\subseteq P_{v_j}$, dakle $v_j(y)>0$. Prema tome, vrijedi $R_{v_j}\subseteq R_{v_i}$, a $v_j^{-1}(\infty)\subseteq P_{v_i}\subseteq P_{v_j}$, pa je zato $v_i\leqslant v_j$ za $i\neq j$, što je nemoguće .

3) Tvrdnja pod 3) slijedi neposredno iz dokazanog pod 1) i 2), na osnovu definicije R-Prüferovog prstena .

4) Tvrdnja pod 4) je očigledna ukoliko dokažemo da je $R\subseteq T(A)$, jer je tada $\{v_1,\dots,v_n\}$ aproksimaciona familija na R .

Neka je $r\in R\setminus A$ a $I=\{1\leqslant i\leqslant n : v_i(r)<0\}$. Neka je za svako $i\in I$ $\alpha_i=-v_i(r)$, a neka je $a_i\in A$ element invertibilan u R i takav da vrijedi $v_i(a_i)>\alpha_i$.

Tada je $a=\prod_{i\in I} a_i$ iz A i invertibilan u R , a osim toga $ar\in A$. Tako je $r=ra\cdot a^{-1}\in T(A)$, tj. $R\subseteq T(A)$.

GLAVA III

TEOREME APROKSIMACIJE ZA SCHILLINGOVE VALUACIJE NEKOMUTATIVNOG TIJELA

§1. Osnovne činjenice o Schillingovim valuacijama tijela

U ovom paragrafu ćemo navesti neke od osnovnih rezultata O.Schilling-a [37] o valuacijama tijela.Neke od tvrdnji,mada su jednostavne,po prvi put se ovdje formulišu i dokazuju u nekomutativnom slučaju,pa ćemo zato dati kompletne dokaze. Ukazaćemo pri tome,na glavne poteškoće u ovom prelazu na razmatranje valuacija nekomutativnog tijela.Te poteškoće će se uglavnom javljati u vezi sa lokalizacijom,tj. sa formiranjem prstena razlomaka,a s druge strane i u vezi sa zahtjevom da posmatrani podprsten tijela,ili neki ideal tog podprstena,bude invarijantan u odnosu na sve unutrašnje automorfizme tijela.

<u>1.1. Definicija</u> - Preslikavanje v sa multiplikativne grupe K^* tijela K na totalno uredjenu aditivnu grupu Γ naziva se (Schillingova) valuacija tijela K ako vrijedi :

i) $(\forall \alpha \in \Gamma)(\exists x \in K^*)\ \ v(x)=\alpha$;

ii) $(\forall a,b \in K^*)\ \ v(ab)=v(a)+v(b)$;

iii) $(\forall a,b \in K^*)\ \ a+b \in K^* \Rightarrow v(a+b) \geqslant \min\{v(a).v(b)\}$.

Osim toga,ako je $\infty \notin \Gamma$, za sve $\alpha \in \Gamma$ stavimo $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty+\infty=\infty$ i $\alpha<\infty$, a po definiciji uzimamo da je $v(0)=\infty$.

grupu Γ ćemo nazivati grupa valuacije v i označavaćemo je i sa Γ_v . Skup $\Gamma \cup \{\infty\}$ ćemo označavati sa Γ_∞ .

1.2. Primjedba - a) Uz oznake iz prethodne definicije vrijedi $v(K)=\Gamma_\infty$, a zahtjevi ii) , iii) mogu se iskazati za sve elemente iz K .

Takodje je jasno da u slučaju valuacije polja K , grupa Γ mora biti komutativna, zbog uslova ii) .

b) Ako je $v:K \longrightarrow \Gamma_\infty$ valuacija tijela K , tada vrijedi

$$(\forall a,b \in K) \quad v(a) \neq v(b) \implies v(a+b)=\min\{v(a),v(b)\} .$$

Naime, ako bi za neke $a,b \in K$ bilo napr. $v(a)>v(b)$ i $v(a+b)>\min\{v(a),v(b)\}$, tada bi vrijedilo

$$v(b)=v(a+b-a) \geq \min\{v(a+b),v(-a)\} > v(b)$$, što je nemoguće . Primjetimo da je tu iskorištena sljedeća činjenica : $(\forall a \in K^*) \quad v(-a)=v(a)$.

Naime , $0=v(1)=v(-1)+v(-1)$, pa je $v(-1)=0$, dakle i $v(-a)=v(a)$, za sve $a \in K^*$.

c) Ako je $v:K \longrightarrow \Gamma_\infty$ valuacija tijela K , tada je skup $U=\{a \in K : v(a)=0\}$ normalna podgrupa grupe K^* i vrijedi $\Gamma \simeq K^*/U$ (uz $aU \longmapsto v(a)$, za $a \in K^*$) .

Naime , $v(1)=0$, pa $1 \in U$. Specijalno, za sve $a \in K^*$ vrijedi $v(a^{-1})=-v(a)$, dakle , ako je $a \in K^*$ i $u \in U$, tada $v(aua^{-1})=v(a)+v(u)+v(a^{-1})=v(a)+0-v(a)=0$, tj. $aua^{-1} \in U$.

1.3. Lema - Ako je $v:K \longrightarrow \Gamma_\infty$ valuacija tijela K , tada su tačne sljedeće tvrdnje :

i) Skup $R_v=\{a \in K : v(a) \geq 0\}$ je podprsten tijela K

invarijantan u odnosu na sve unutrašnje automorfizme tijela K, tj. za sve $a \in K^*$ vrijedi $aR_v a^{-1} \subseteq R_v$;

ii) Skup $P_v = \{a \in K : v(a) > 0\}$ je maksimalan ideal prstena R_v i za sve $a \in K^*$ vrijedi $aP_v a^{-1} \subseteq P_v$;

iii) Ako sa $U(R_v)$ označimo skup svih invertibilnih u R_v elemenata prstena R_v, tada je $P_v = R_v \setminus U(R_v)$;

iv) $(\forall x \in K^*)\ x \in R_v \ \vee \ x^{-1} \in R_v$;

v) Svaki ideal prstena R_v je dvostrani ;

vi) Skup svih ideala prstena R_v je totalno uredjen relacijom inkluzije .

Dokaz - Tvrdnje i),...,iv) provjeravaju se neposredno, dok v), vi) slijede iz tačnosti sljedeće tvrdnje :

$$(\forall a,b \in K^*)\ v(a) \geqslant v(b) \iff (\exists c,c' \in R_v)\ a = bc \ , \ a = c'b \ .$$

1.4. Definicija - Ako je $v : K \longrightarrow \Gamma_\infty$ valuacija tijela K, tada se prsten R_v naziva valuacioni prsten tijela K, odnosno prsten valuacije v na K, a ideal P_v prstena R_v naziva se pozitivni ideal valuacije v .

1.5. Definicija - Prsten kod kojeg su svi ideali dvostrani naziva se duo prsten, a prsten kod kojeg su svi lijevi (desni) ideali totalno uredjeni relacijom inkluzije, naziva se prsten lančan s lijeva (s desna). Lančani prsten je prsten lančan s lijeva i lančan s desna istovremeno.

<u>1.6. Definicija</u> - Ako je R podprsten tijela K , za R kažemo da je totalni podprsten tijela K ako vrijedi sljedeće:

$$(\forall x\in K) \quad x\in R \ \vee \ x^{-1}\in R \quad .$$

Za prsten R , odnosno ideal P prstena R , kažemo da je invarijantan u K ako vrijedi :

$$(\forall x\in K^*) \quad xRx^{-1}\subseteq R \quad , \text{odnosno} \quad xPx^{-1}\subseteq P \ .$$

<u>1.7. Primjedba</u> - Na osnovu prethodnih definicija i Leme 1.3., jasno je da za proizvoljnu valuaciju $v:K\longrightarrow\Gamma_\infty$ tijela K vrijedi sljedeće :

i) R_v je invarijantan i totalan podprsten tijela K ;

ii) R_v je lančani duo prsten ;

iii) P_v je invarijantan u K .

<u>1.8. Tvrdnja</u> - Ako je R invarijantan podprsten tijela K, tada je R valuacioni prsten tijela K ako i samo ako je R totalan podprsten tijela K .

<u>Dokaz ([37])</u> - Dovoljno je dokazati da je invarijantan i totalan podprsten R tijela K obavezno i valuacioni prsten za K . Označimo sa U skup svih invertibilnih u R elemenata prstena R , a sa P skup $R\setminus U$. Tada je skup U invarijantan za sve unutrašnje automorfizme tijela K .Otuda je i skup P invarijantan u K . Neka je sada Γ faktorska grupa K^*/U , a za proizvoljan $d\in K$ stavimo $v(d)=dU$. Operaciju „ + " na Γ definišimo ovako :

$$(\forall d,d'\in K^*) \quad dU+d'U = dd'U \quad ,$$

a relaciju „ $\leq$ " na Γ definišimo na sljedeći način :

$(\forall d,d'\in K^*)\ dU\neq d'U\ ,\ dU\leq d'U \iff d'd^{-1}\in P$.

Jednostavno se provjerava da je $(\Gamma,+,\leq)$ uredjena grupa. Uredjenje „$\leq$" je totalno, jer je R invarijantan podprsten od K. Takodje se jednostavno provjerava da je preslikavanje $v:K\to\Gamma_\infty$ valuacija tijela K, gdje je $v(0)=\infty\notin\Gamma$, a za sve $d\in K^*$ je $v(d)=dU$. Tada je $R_v=R$, a $P_v=P$. Pokažimo npr. da je ispunjen uslov iii) Definicije 1.1.

Neka su $a,b\in K^*$ i $a+b\in K^*$ i npr. $v(b)\leq v(a)$, tj. $bU\leq aU$, dakle $ab^{-1}\in P=R\setminus U$. To znači da vrijedi :

$$a+b=(a+b)b^{-1}\cdot b=(ab^{-1}+1)b\in R_v b\ ,$$

pa je tačno i $v(b)\leq v(a+b)$, tj. $v(a+b)\geq\min\{v(a),v(b)\}$.

——— Podsjetimo se da za ideal P asocijativnog prstena R kažemo P je kompletno prosti ideal prstena R ako vrijedi :

$$(\forall a,b\in R)\ ab\in P \Rightarrow a\in P \vee b\in P\ .$$

<u>1.9. Lema</u> - Nenulti kompletno prosti ideali valuacionog prstena R_v tijela K su u uzajamno-jednoznačnoj korespondenciji sa izolovanim podgrupama grupe Γ_v. Pri tome, invarijantnom kompletno prostom idealu prstena R_v odgovara normalna podgrupa grupe Γ_v i obrnuto .

<u>Dokaz</u> - Neka je P kompletno prosti ideal prstena R_v i $(0)\subsetneq P\subsetneq R_v$. Označimo sa Δ_P skup onih elemenata $\gamma\in\Gamma_v$ za koje je $\max\{-\gamma,\gamma\}<v(p)$, za sve $p\in P$, i i $\gamma=0$. Tada je Δ_P podgrupa grupe Γ_v i to izolovana

Naime, za $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$ i $\gamma_1,\gamma_2\in\Delta_P$, iz $\gamma_1+\gamma_2\notin\Delta_P$ i iz $\gamma_1=v(a_1)$, $\gamma_2=v(a_2)$, $a_1,a_2\in P_v$, slijedilo bi za neko $p \in P$ sljedeće : $v(p) \leq v(a_1a_2)$, tj. $a_1a_2 \in P$. Dakle , $a_1 \in P$ ili $a_2 \in P$, ali $v(a_1)$ i $v(a_2)$ su iz Δ_P , pa sigurno nisu u skupu $v(P) = \{v(p) : p \in P\}$.

S druge strane, ako je $0 < \gamma < \delta$, $\delta \in \Delta_P$, tada je i $\gamma \in \Delta_P$. Inače bi ponovo bilo $\delta \in v(P)$.

Dalje, ako je Δ izolovana podgrupa grupe Γ_v i $\Delta \subsetneq \Gamma_v$, stavimo $P_\Delta = \{0_K\} \cup \{a \in K : (\forall \delta \in \Delta) \delta < v(a)\}$. Tada je P_Δ prosti ideal prstena R_v i $(0) \subsetneq P_\Delta \subsetneq R_v$. Osim toga, ako Δ_P odgovara kompletno prostom idealu P , tada izolovanoj podgrupi Δ_P odgovara ideal $P_{\Delta_P} = P$ i obrnuto, ako P_Δ odgovara izolovanoj podgrupi Δ , tada idealu P_Δ odgovara izlovana podgrupa $\Delta_{P_\Delta} = \Delta$.

Ako je kompletno prosti ideal P prstena R_v invarijantan u K , tada je Δ_P normalna podgrupa grupe Γ_v . Zaista, inače bi za neko $\gamma \in \Gamma_v$ postojao $\delta \in \Delta$, takav da je $0 < \gamma + \delta - \gamma \notin \Delta_P$. Dakle, postojao bi $p \in P$ takav da vrijedi $v(p) \leq \gamma + \delta - \gamma$, pa ako je $\gamma = v(a)$ i $\delta = v(b)$, tada $v(p) \leq v(aba^{-1})$. To znači da $aba^{-1} \in P$, pa zato i $b \in a^{-1}Pa$. Kako je ideal P invarijantan, otuda $b \in P$. Zato je $\delta = v(b) \in v(P) \cap \Delta_P = \emptyset$, što je nemoguće . Analogno se zaključuje da ako je izolovana podgrupa Δ grupe Γ_v normalna, da je ideal I_Δ invarijantan .

<u>1.10. Tvrdnja</u> - Neka je $v: K \longrightarrow \Gamma_\infty$ valuacija tijela K, a kompletno prosti ideal P prstena $R_v = R$ invarijantan u K i različit od (0) . Tada je skup $R_P = \{ab^{-1} : a \in R , b \in R \setminus P\}$ podprsten tijela K , a $PR_P = P$ je jedinstven maksimalni ideal prstena R_P (sastavljen od svih konačnih suma elemenata oblika

pr , $p\in I$, $r\in R_P$). Osim toga, ako je $\Delta=\Delta_P$ izolovana podgrupa grupe Γ_v , koja odgovara kompletno prostom idealu P i ako je P invarijantan u K , tada je preslikavanje $v':K\longrightarrow(\Gamma/\Delta)_\infty$ definisano sa $v'(a)=v(a)+\Delta$ $a\in K^*$ i $v'(0)=\infty$, valuacija tijela K , a $R_{v'}=R_P$ i $P_{v'}=P$.

Konačno, preslikavanje $w:R_P/P\longrightarrow\Delta_\infty$ definisano sa $w(a+P)=v(a)$, za $a\in R_P\setminus P$ i $w(a+P)=\infty$, za $a\in P$, je valuacija tijela R_P/P i vrijedi $R_w=R/P$, $P_w=P/P$.

<u>Dokaz</u> - Pokažimo prvo da je $R_P=\{b^{-1}a : a\in R , b\in R\setminus P\}$. Zaista , $a\in R$ i $b\in R\setminus P$ daje $b^{-1}a=a(a^{-1}b^{-1}a)=a(a^{-1}ba)^{-1}=$ $=ac^{-1}$ za $c=a^{-1}ba\in R\setminus P$. Naime, ako bi bilo $a^{-1}ba\in P$, tada bi bilo $b\in aPa^{-1}\subseteq P$, tj. $b\in P$, što je nemoguće . Obrnuto, ako $a\in R$ i $b\in R\setminus P$, tada $ab^{-1}=(ab^{-1}a^{-1})a=$ $=(aba^{-1})^{-1}a=d^{-1}a$ za $d=aba^{-1}\in R\setminus P$.

Dalje, za svako $d\in K^*$ vrijedi $dR_Pd^{-1}\subseteq R_P$, jer za $a\in R$ i $b\in R\setminus P$ je $dab^{-1}d^{-1}=dad^{-1}\cdot db^{-1}d^{-1}\in dRd^{-1}\cdot(d(R\setminus P)d^{-1})^{-1}\subseteq$ $\subseteq R\cdot(R\setminus P)^{-1}$.

Dokažimo sada da je R_P podprsten tijela K . Neka su $a_1,a_2\in R$ i $b_1,b_2\in R\setminus P$ i neka je napr. $v(b_2)\leq v(b_1)$. Tada $b_1b_2^{-1}\in R=R_v$, pa zato vrijedi :

$$a_1b_1^{-1}+a_2b_2^{-1}=(a_1+a_2b_2^{-1}b_1)b_1^{-1}\in R\cdot(R\setminus P)^{-1} .$$

Dalje, vrijedi sljedeće :

$a_1b_1^{-1}\cdot a_2b_2^{-1}=a_1a_2\cdot a_2^{-1}b_1^{-1}a_2\cdot b_2^{-1}\in R_P$, jer $a_1a_2\in R$, a $b_2\cdot a_2^{-1}b_1a_2\in R\setminus P$, za $a_2\neq 0$, dok je $a_1b_1^{-1}\cdot a_2b_2^{-1}=0\in R_P$ za $a_2=0$.

Dokažimo sada da je $PR_P=P$, tj. da je $P=\{pb^{-1}\ p\in P,b\in R\setminus P\}$.

Jasno , $P \subseteq PR_P$. Neka je sada $p_i \in P$, $a_i \in R$, $b_i \in R \setminus P$ $(1 \leq i \leq m)$ i pokažimo da $p_1a_1b_1^{-1}+\dots+p_ma_mb_m^{-1} \in P$.

Zaista , $v(p_ia_ib_i^{-1})=v(p_i)+v(a_i)-v(b_i) \geq v(p_i)-v(b_i)$, jer $a_i \in R=R_v$, dok sigurno vrijedi $v(p_i)>v(b_i)$. Naime , iz $v(p_i) \leq v(b_i)$ bi slijedilo $b_i \in P$. Zato imamo $v(p_ia_ib_i^{-1})>0$, specijalno $p_ia_ib_i^{-1} \in R$ za sve $i=1,\dots,m$. Kako sigurno vrijedi $p_ia_ib_i^{-1} \cdot b_i=p_ia_i \in P$, a $b_i \in R \setminus P$, to je $p_ia_ib_i^{-1} \in P$ za sve $i=1,\dots,m$. Dakle , $p_1a_1b_1^{-1}+\dots+p_ma_mb_m^{-1} \in$ $\in P$, tj. $PR_P=P$.

Analogno se dokazuje da vrijedi i $R_PP=P$.

Skup P je jedini maksimalni ideal prstena R_P . Zaista , P je ideal u R_P , jer $PR_P=R_PP=P$, a ako $ab^{-1} \in R_P \setminus P$, $a \in R$ i $b \in R \setminus P$, tada $ba^{-1} \in R_P$, jer $b \in R$, dok $a \in R \setminus P$, jer $a \in P$ povlači $ab^{-1}=a \cdot 1 \cdot b^{-1} \in PR_P=P$, što je nemoguće .

Ako je Δ izolovana normalna podgrupa totalno uredjene aditivne grupe Γ , tada se i grupa Γ/Δ , kao što je poznato,može totalno urediti sljedećom relacijom :

$$(\forall \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma)\ \gamma_1+\Delta \lneq \gamma_2+\Delta \iff \gamma_1<\gamma_2\ ,\ \gamma_1-\gamma_2 \notin \Delta .$$

Ta definicija je korektna , jer $\gamma_1+\Delta=\alpha_1+\Delta$ i $\gamma_2+\Delta=$ $=\alpha_2+\Delta$ povlači $\gamma_1-\alpha_1 \in \Delta$, $\gamma_2-\alpha_2 \in \Delta$. Ako bi bilo $\alpha_2 \leq \alpha_1$, tada bi,zbog $\gamma_1<\gamma_2$, bilo

$$0<\gamma_2-\gamma_1=\gamma_2-\alpha_2+\alpha_2-\alpha_1+\alpha_1-\gamma_1 \leq \gamma_2-\alpha_2+\alpha_2-\gamma_1 \in \Delta ,$$

pa i $\gamma_2-\gamma_1 \in \Delta$, što je nemoguće .

Lako se sada vidi da je grupa $\overline{\Gamma}=\Gamma/\Delta$, uz $\overline{\gamma}=\gamma+\Delta$, za sve $\gamma \in \Gamma$, totalno uredjena relacijom :

$$\bar{\gamma}_1 \leq \bar{\gamma}_2 \iff (\bar{\gamma}_1 \neq \bar{\gamma}_2 \ , \ \gamma_1 < \gamma_2) \vee (\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2) \ .$$

Neka je sada $\Delta = \Delta_P$ normalna izolovana podgrupa grupe $\Gamma = \Gamma_v$ koja odgovara invarijantnom kompletno prostom idealu P prstena R_v a $\bar{\Gamma} = \Gamma/\Delta$ totalno uredjena faktorska grupa. Dalje, neka je $v' : K \to \bar{\Gamma}_\infty$ definisano sa $v'(d) = \overline{v(d)}$ za $d \in K^*$ i $v'(0) = \infty$. Jasno , vrijedi sljedeće :

$v'(d_1 d_2) = \overline{v(d_1 d_2)} = \overline{v(d_1) + v(d_2)} = \overline{v(d_1)} + \overline{v(d_2)} = v'(d_1) + v'(d_2)$ i

$v'(d_1 + d_2) = \overline{v(d_1 + d_2)} \geq \min\{\overline{v(d_1)}, \overline{v(d_2)}\} = \min\{v'(d_1), v'(d_2)\}$

za sve $d_1, d_2 \in K$.

Dokažimo sada da je $P_{v'} = P$. Zaista , $0 \neq d \in P_{v'} \iff$ $\iff v'(d) > 0$, $d \neq 0 \iff \overline{v(d)} > \bar{0}$, $d \neq 0 \iff d \neq 0$, $v(d) \notin \Delta$, $v(d) > 0 \iff d \neq 0$, $v(d) \notin \Delta_P$, $v(d) > 0 \iff (\exists p \in P)\ 0 <$ $< v(d) \leq v(p) \iff d \neq 0$, $d \in P$.

S druge strane, za $0 \neq d \in K$ je $v'(d) = \bar{0}$ ako i samo ako je $v(d) \in \Delta$ i $d \neq 0$. Ako je $v(d) \geq 0$, tada $d \in R$, a i $d \notin P$, jer $P = P_{v'}$ a $v'(d) = \bar{0}$. Dakle, $v(d) \geq 0$ povlači $d \in R \setminus P$, pa sigurno $d \in R_P$. Ako je $v(d) < 0$, tada $d^{-1} \in R$, a $0 < v(d^{-1}) = -v(d) \in \Delta$, jer $v(d) \in \Delta = \Delta_P$, pa ponovo $d^{-1} \notin P$, jer i sada $v'(d^{-1}) = \overline{v(d^{-1})} = -\overline{v(d)} = \bar{0}$. Dakle, sada iz $v(d) < 0$ slijedi $d = 1 \cdot (d^{-1})^{-1} \in R_P$. Prema tome, vrijedi :

$$0 \neq d \in K \ , \ v'(d) = \bar{0} \Rightarrow d \in R_P \ .$$

Kako je $P_{v'} = P \subseteq R_P$, to znači da je sigurno tačno i $R_{v'} \subseteq R_P$. Obrnuto, ako $a \in R$, $b \in R \setminus P$, tada iz $v'(ab^{-1}) =$ $= v'(a) - v'(b) < 0$ slijedi $b = ba^{-1} \cdot a \in P_{v'} R = PR \subseteq P$, što je nemoguće.

Dakle , $R_P \subseteq R_{v'}$. To znači da je $R_{v'}=R_P$ i $P_{v'}=P$.

Ostalo se takodje jednostavno provjerava .

<u>1.11. Primjedba</u> - Obično se valuacija v',definisana u Tvrdnji 1.10. (ako je K polje) označava sa v_P . Jasno je takodje da se v_{P_v} može identifikovati sa v , jer je tada $\Delta_{P_v}=\{0\}$, pa je $\Gamma_{v'}=\Gamma_v/\{0\}\simeq\Gamma_v$.

<u>1.12. Definicija</u> - Ako su v i w valuacije tijela K , kažemo da je $w\leq v$ ako i samo ako postoji uredjajni epimorfizam $\theta: (\Gamma_v)_\infty \longrightarrow (\Gamma_w)_\infty$, uz $\theta(\infty_v)=\infty_w$, takav da je $w=\theta\circ v$.

U slučaju da je θ izomorfizam,stavljamo $w\equiv v$ i kažemo da su valuacije v i w ekvivalentne .

Za valuacije v i w tijela K kažemo da su neuporedive ako je $w\nleq v$ i $v\nleq w$, a kažemo da su zavisne ako je $R_vR_w \subsetneqq K$. Ako je $R_vR_w=K$, za v i w kažemo da su nezavisne .(Pokazaćemo u Tvrdnji 1.14. da je R_vR_w valuacioni prsten tijela K.)

<u>1.13. Lema</u> - Neka za valuacije v i w tijela K vrijedi $w\leq v$ i neka je $\theta: (\Gamma_v)_\infty \longrightarrow (\Gamma_w)_\infty$ uredjajni epimorfizam takav da je $\theta(\infty_v)=\infty_w$ i $w=\theta\circ v$. Dalje,neka je $\Delta=\mathrm{Ker}(\theta)$. Tada je Δ izolovana normalna podgrupa grupe Γ_v a $P=P_\Delta$ invarijantan kompletno prosti ideal prstena R_v. Osim toga , $w\equiv v_P$ i P je pozitivni ideal valuacije w .

<u>Dokaz</u> - i) Jasno je da „$\equiv$" predstavlja relaciju ekvivalencije,te da je $v\equiv w$ ako i samo ako je $R_v=R_w$.

Naime,ako je $v\equiv w$ i θ uredjajni izomorfizam takav da

$w=\theta\circ v$, tada : $(\forall d\in K)$ $w(d)\geq 0 \Leftrightarrow \theta(v(d))\geq 0 \Leftrightarrow v(d)\geq 0$, tj. $R_w=R_v$.

Obrnuto, ako je $R_w=R_v$ i ako stavimo $\theta: v(d)\longmapsto w(d)$ za $d\in K^*$, a $\theta(\infty_v)=\infty_w$, tada je θ uredjajni izomorfizam . Zaista, preslikavanje θ je korektno definisano, jer $v(d_1)=v(d_2)$ znači $d_1=d_2=0$ ili $d_1,d_2\in K^*$ i $d_1d_2^{-1}\in R_v\setminus P_v=$ $=U(R_v)$. Kako je $R_v=R_w$, to je $U(R_v)=U(R_w)$, pa $d_1d_2^{-1}\in U(R_w)=R_w\setminus P_w$, tj. $w(d_1)=w(d_2)$. Takodje $v(d_1)\leq$ $\leq v(d_2)$ znači $d_2d_1^{-1}\in R_v=R_w$, dakle i $w(d_1)\leq w(d_2)$ za $d_1,d_2\in K^*$. Konačno , θ je injektivno preslikavanje, jer $\theta(v(d))=0$ povlači $w(d)=0$, tj. $d\in U(R_w)$, dakle i $d\in U(R_v)$, tj. $v(d)=0$.

ii) Neka je sada $w\leq v$ a $\theta: (\Gamma_v)_\infty \longrightarrow (\Gamma_w)_\infty$, $w=\theta\circ v$, $\Delta=\mathrm{Ker}(\theta)$. Tada je Δ očigledno normalna izolovana podgrupa grupe Γ_v . Neka je sada P invarijantan kompletno prosti ideal prstena R_v koji odgovara izolovanoj normalnoj podgrupi Δ , tj. $\Delta_P=\Delta$. Dokažimo da je $R_P=R_w$.

Zaista , $R\subseteq R_w$, jer je $R=R_v$ i $w=\theta\circ v$. Takodje, vrijedi $R\setminus P\subseteq R_w$, jer

$b\in R\setminus P \Rightarrow (\exists\delta\in\Delta)\ 0\leq v(b)\leq\delta \Rightarrow v(b)\in\Delta$, $v(b^{-1})=$ $=-v(b)\in\Delta \Rightarrow w(b)=\theta(v(b))=0$, $w(b^{-1})=\theta(v(b^{-1}))=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow b,b^{-1}\in R_w$.

Dakle, sigurno je $R_P\subseteq R_w$. Obrnuto, za $0\neq d\in R_w$ iz $0\leq w(d)<\infty$ slijedi $0\leq\theta(v(d))<\infty$. Možemo uzeti da je $v(d)<0$. Inače , iz $0\leq v(d)$, tj. $d\in R=R_v$, sigurno slijedi i $d\in R_P$. Sada iz $v(d)<0$ slijedi $\theta(v(d))\leq 0$, pa je $\vartheta(v(d))=0$, tj. $v(d)\in\Delta$, dakle u grupi $\Gamma_v/\Delta=\Gamma_{v_I}$ je $\overline{v(d)}=\overline{0}$, tj. $v_P(d)=0$, pa zato $d\in R_{v_I}=R_P$. Dakle, vrijedi $R_w\subseteq R_P$. Prema tome, vrijedi $R_w=R_I=R_{v_P}$, tj. $w\equiv v_P$.

1.14. Tvrdnja - Neka su v i w netrivijalne valuacije tijela K , tj. $\Gamma_v\neq(0)$ i $\Gamma_w\neq(0)$. Ako su valuacije v i w neuporedive, tada postoji najopsežniji invarijantan kompletno prosti ideal P prstena R_v i prstena R_w koji je ujedno i pozitivni ideal valuacije $v\wedge w$ tijela K sa sljedećim svojstvima :

$v\wedge w\leq v$, $v\wedge w\leq w$, a za proizvoljnu valuaciju $\overline{v}$ tijela K takvu da je $\overline{v}\leq v$ i $\overline{v}\leq w$, vrijedi $\overline{v}\leq v\wedge w$. Takodje, vrijedi : $R_{v\wedge w}=R_vR_w=(R_v)_P=(R_w)_I$.

Dokaz - i) Primjetimo prvo da je R_vR_w podprsten tijela K. Zaista , $r_vr_w\cdot r_v'r_w'=r_vr_v'\cdot((r_v')^{-1}r_wr_v')\cdot r_w'\in R_vR_w$, jer je R_w invarijantan u K .

Dalje , $R_v\cup R_w\subseteq R_vR_w$, pa je R_vR_w totalan podprsten od K . Osim toga, za svako $a\in K^*$ vrijedi :

$$aR_vR_wa^{-1}=aR_va^{-1}\cdot aR_wa^{-1}\subseteq R_vR_w \quad ,$$

dakle , R_vR_w je i invarijantan podprsten tijela K . Znači, R_vR_w je očigledno najmanji valuacioni nadprsten od R_v i R_w . Označimo sa v' valuaciju tijela K takvu da je $R_{v'}=R_vR_w$. Dokažimo sada da je $v'\leq v$ i $v'\leq w$. Napr. $v'\leq v$, jer je preslikavanje $\vartheta:(\Gamma_v)_\infty\to(\Gamma_{v'})_\infty$ definisano sa $\vartheta(\infty_v)=\infty_{v'}$ i $\vartheta(v(a))=v'(a)$ za $a\in K^*$, epimorfizam totalno uredjenih polugrupa . Naime , ϑ je korektno definisano, jer $v(a)=v(b)$ daje $ab^{-1}\in U(R_v)$, pa $ab^{-1}\in U(R_{v'})$, jer je $R_v \subseteq R_{v'}$, pa zato $v'(a)=v'(b)$, za sve a i b iz K^*.

Za $\Delta=\mathrm{Ker}(\theta)$ i $P=P_\Delta$ vrijedi (Lema 1.13.) $v_P \equiv v'$, tj. $(R_v)_P = R_{v'}$, $P=P_{v'}$. Dakle, $v'\leq v$. Slično se dokazuje da vrijedi i $v'\leq w$, odnosno da je $(R_w)_Q = R_{v'}$ i $Q = P_{v'}$. Znači, vrijedi $Q=P$ i:

$$(R_v)_P = (R_w)_P = R_{v'} = R_vR_w \quad , \quad P_{v'} = P \quad .$$

Osim toga, ako bi $\bar{P}$ bio invarijantan kompletno prosti ideal u R_v i R_w takav da $P\subseteq \bar{P}$, tada bi $\bar{P}$ bio ideal i u $R_{v'}= R_vR_w$. Zaista, $\bar{p}r_vr_w = r_v\cdot r_v^{-1}\,\bar{p}r_v\cdot r_w \in R_v\bar{P}R_w \subseteq \bar{P}$.

Ali, P je maksimalan ideal u $R_{v'}$, pa je zato $\bar{P}=P$. Specijalno, ako je $\bar{v}$ valuacija tijela K takva da je $\bar{v}\leq v$ i $\bar{v}\leq w$, tada je $R_vR_w \subseteq R_{\bar{v}}$, tj. $R_{v'} \subseteq R_{\bar{v}}$, pa se lako zaključuje da vrijedi $\bar{v}\leq v'$. Dakle, v' je upravo valuacija $v\wedge w$ sa traženim osobinama.

<u>1.15. Tvrdnja</u> - Ako su v i v' netrivijalne, neuporedive valuacije tijela K a P prosti ideal prstena R_v sadržan u $R_{v'}$, tada je P prosti ideal i u prstenu R_v.

<u>Dokaz</u> - Dokaz je identičan onom u slučaju valuacija na polju (Lema 1.3., gl.II).

<u>1.16. Tvrdnja</u> - Neka su v i v' netrivijalne, neuporedive valuacije tijela K, Γ_v, $\Gamma_{v'}$ i $\Gamma_{v\wedge v'}$ grupe vrijednosti valuacija v, v' i $v\wedge v'$ respektivno. Dalje, neka je P najopsežniji invarijantan kompletno prosti ideal prstena R_v i $R_{v'}$ istovremeno, a $\Delta_{v,v'}$ (odnosno $\Delta_{v'.v}$) izolovana

normalna podgrupa grupe Γ_v (odnosno $\Gamma_{v'}$) koja odgovara kompletno prostom idealu P. Tada su grupe $\Gamma_v/\Delta_{v,v'}$, $\Gamma_{v'}/\Delta_{v',v}$, $\Gamma_{v\wedge v'}$ uredjajno izomorfne. Specijalno, ako su valuacije v i v' nezavisne, tj. ako je $R_v R_{v'} = K$, tada je $\Delta_{v,v'} = \Gamma_v$ i $\Delta_{v',v} = \Gamma_{v'}$, a $\Gamma_{v\wedge v'} = (0)$.

Dokaz - Tačnost tvrdnje slijedi neposredno na osnovu dokaza Tvrdnje 1.14. Naime, $R_{v\wedge v'} = R_v R_{v'} = (R_v)_P = (R_{v'})_P$, te je $R_{v\wedge v'} = R_{v_P} = R'_{v'_P}$, $R = R_v$, $R' = R_{v'}$, pa iz $\Gamma_{v_P} \simeq \Gamma_v/\Delta_{v,v'}$ i $\Gamma_{v'_P} = \Gamma_{v'}/\Delta_{v',v}$, slijedi

$$\Gamma_{v\wedge v'} \simeq \Gamma_v/\Delta_{v,v'} \simeq \Gamma_{v'}/\Delta_{v',v} .$$

Zato elemente tih grupa možemo identifikovati ovako:

$$(v\wedge v')(d) = \vartheta_{v,v'}(v(d)) = \vartheta_{v',v}(v'(d)) \quad , \forall d \in K^* \text{ , pri}$$

čemu su $\vartheta_{v,v'} : \Gamma_v \longrightarrow \Gamma_v/\Delta_{v,v'}$ i $\vartheta_{v',v} : \Gamma_{v'} \rightarrow \Gamma_{v'}/\Delta_{v',v}$ kanonski epimorfizmi uredjenih grupa.

1.17. Primjedba - Primjetimo da su netrivijalne, nezavisne valuacije v i v' tijela K sigurno neuporedive.

Naime, ako bi bilo napr. $v' \leq v$, tada bi valuacija $v' = v' \wedge v$ bila trivijalna.

——— Uz oznake iz Tvrdnje 1.16. dajemo sljedeću definiciju:

1.18. Definicija - Ako su v i v' netrivijalne, neuporedive valuacije tijela K, za par $(\gamma, \gamma') \in \Gamma_v \times \Gamma_{v'}$ kažemo da je saglasan ako je $\vartheta_{v,v'}(\gamma) = \vartheta_{v',v}(\gamma')$.

Za proizvoljnu familiju $\{\gamma_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \Gamma_{v_i}$, gdje je $\{v_i\}_{i\in I}$ familija netrivijalnih i u parovima neuporedivih valuacija tijela K, kažemo da je saglasna familija ako je za sve $i \neq i'$ iz I par $(\gamma_i, \gamma_{i'}) \in \Gamma_{v_i} \times \Gamma_{v_{i'}}$ saglasan.

<u>1.19. Definicija</u> - Neka je R proizvoljan asocijativan prsten. Kažemo da je prsten R invarijantan s desna (s lijeva) ako je svaki desni (lijevi) ideal prstena R ujedno i dvostrani ideal prstena R. Za prsten R kažemo da je invarijantan ukoliko je R invarijantan i s lijeva i s desna.

<u>1.20. Lema</u> - Za proizvoljan asocijativan prsten R sljedeće tvrdnje su medjusobno ekvivalentne :

i) R je invarijantan s desna (s lijeva) ;

ii) $(\forall a,b \in R)(\exists c \in R)$ $ab=bc$ (odnosno , $ba=cb$) ;

iii) $(\forall b \in R)$ $Rb \subseteq bR$ (odnosno , $bR \subseteq Rb$) .

<u>Dokaz</u> - Ekvivalentnost navedenih tvrdnji provjerava se jednostavno .

——— Navešćemo sada neke definicije i jednostavne tvrdnje o prstenima razlomaka prema [38] .

<u>1.21. Definicija</u> - Ako je R asocijativan prsten sa jedinicom 1 i S multiplikativno zatvoren podskup prstena R, pri čemu $1 \in S$ i $0 \notin S$ i vrijedi :

$(\forall a_1 \in R)(\forall s_1 \in S)(\exists a_2 \in R)(\exists s_2 \in S)$ $a_1 s_2 = s_1 a_2$,

(odnosno , $s_2 a_1 = a_2 s_1$) , tada se skup S naziva desni (odnosno , lijevi) Oreov skup prstena R .

Ako je S desni (lijevi) Oreov skup u R i ako vrijedi :

$(\forall a \in R)(\forall s \in S)$ $sa=0 \Rightarrow (\exists s_1 \in S)$ $as_1=0$, (odnosno, $as=0 \Rightarrow (\exists s_1 \in S)$ $s_1 a=0$) , tada se skup S naziva skup desnih (odnosno, lijevih) imenilaca u R .

1.22. Definicija - Ako je R asocijativan prsten sa jedinicom 1 i S multiplikativno zatvoren podskup prstena R , za prsten $R[S^{-1}]$, odnosno $[S^{-1}]R$, zajedno sa homomorfizmom prstena $\varphi : R \longrightarrow R[S^{-1}]$, odnosno $\varphi : R \longrightarrow [S^{-1}]R$, kažemo da je desni , odnosno lijevi , prsten razlomaka prstena R u odnosu na S ako vrijedi :

i) $(\forall s \in S)$ $\varphi(s)$ je invertibilan u $R[S^{-1}]$, odnosno u $[S^{-1}]R$;

ii) Svaki element iz $R[S^{-1}]$, odnosno iz $[S^{-1}]R$, može se predstaviti u obliku $\varphi(a)\cdot\varphi(s)^{-1}$, odnosno u obliku $\varphi(s)^{-1}\cdot\varphi(a)$, za neke $a \in R$ i $s \in S$;

iii) $\varphi(a)=0$, za $a \in R$, ako i samo ako je $as=0$, odnosno ako je $sa=0$, za neko $s \in S$.

1.23. Tvrdnja ([38 , Proposition 1.4.]) - Ako je R asocijativan prsten sa jedinicom a S multiplikativno zatvoren podskup u R , tada postoji desni (lijevi) prsten razlomaka $R[S^{-1}]$, odnosno $[S^{-1}]R$, ako i samo ako je S skup desnih (lijevih) imenilaca u R .

1.24. Primjedba - i) Ako postoje prsteni $R[S^{-1}]$ i $[S^{-1}]R$, tada su oni izomorfni ([38, Corollary 1.3.]).

ii) Odmah se vidi da je skup S_{reg} svih regularnih elemenata prstena R multiplikativno zatvoren, te da je S_{reg} desni (lijevi) Oreov skup . U slučaju da postoji prsten $R[S_{reg}^{-1}]$ se naziva klasični desni prsten razlomaka prstena R i analogno za prsten $[S_{r,g}^{-1}]R$, ako postoji , kažemo da je to klasični lijevi prsten razlomaka prstena R .

iii) Ako je R asocijativan prsten sa jedinicom i P kompletno prosti ideal prstena R , tj. iz $xy\in P$ slijedi $x\in P$ ili $y\in P$, za sve $x,y\in R$, skup $S=R\setminus P$ je multiplikativno zatvoren . Naravno, tu pretpostavljamo da je $P\subsetneq R$.

Ukoliko postoji, prsten $R[S^{-1}]$ ćemo označavati sa R_P i slično, ako postoji, prsten $[S^{-1}]R$ ćemo označavati sa ${}_PR$. Jasno, ako R_P , odnosno ${}_PR$, postoji, to je onda lokalan prsten, tj. ima jedan jedini maksimalni ideal PR_P , odn. ${}_PRP$, pa se zato R_P , odnosno ${}_PR$, naziva i lokalizacija prstena R po kompletno prostom idealu P .

<u>1.25. Tvrdnja</u> - Ako je R asocijativan prsten sa jedinicom i ako je prsten R invarijantan s desna (s lijeva), tada postoji klasičan desni (lijevi) prsten razlomaka prstena R .

Ako je oblast R invarijantna u smislu Definicije 1.19., tada ona ima klasično dvostrano tijelo razlomaka K i R je invarijantna u K .

Obrnuto, ako oblast R ima klasično dvostrano tijelo razlomaka K i R je invarijantna u K , tada je R invarijantan prsten u smislu Definicije 1.19.

<u>Dokaz</u> - Prvi dio tvrdnje slijedi neposredno na osnovu Primjedbe 1.24.ii) i na osnovu Leme 1.20. Očigledno je takodje da invarijantna s desna (s lijeva) oblast R ima tijelo razlomaka . Obrnuto, ako oblast R ima klasično dvostrano tijelo razlomaka K i R je invarijantna u K , tada za sve $r\in R^*$ vrijedi $r^{-1}Rr\subseteq R$ i $rRr^{-1}\subseteq R$, pa je očigledno R

invarijantan prsten u smislu Definicije 1.19. (Lema 1.20.).

1.26. Primjedba - Prethodna tvrdnja opravdava uvodjenje u razmatranje prstena invarijantnih u smislu Definicije 1.19.

Sljedeća tvrdnja pokazuje da se invarijantni prsteni u izvjesnoj mjeri ponašaju kao komutativni prsteni .

1.27. Tvrdnja - Neka je R prsten invarijantan s desna (s lijeva) i Q desni (lijevi) ideal prstena R . Definišimo radikal ideala Q ovako :

$$r(Q)=\{x\in R : (\exists n<\omega)\ x^n\in Q\} .$$

Tada je $r(Q)$ ideal prstena R . Specijalno, ako je R valuaciona oblast tijela K , tada je $r(Q)$ kompletno prosti ideal prstena R .

Dokaz - Stavimo $P=r(Q)$. Jasno , $Q\subseteq P$. Neka je R invarijantan s desna , a Q desni ideal prstena R .

i) Neka je $x\in P$ i $r\in R$, a $n<\omega$ takav da $x^n\in Q$.

Tada je $(xr)^n=xr\cdot xr\cdot xr\cdots xr=x\cdot xr_1r\cdot xr\cdots xr=x\cdot x\cdot xr_2r\cdots$ $\cdots xr=\cdots=x^nr_0$, za neko $r_0\in R$. Zato je $(xr)^1\in Q$, dakle $xr\in P$. Slično, ako su $x,y\in P$ i $n_x<\omega$, $n_y<\omega$ takvi da je x^{n_x} , $y^{n_y}\in Q$, za $n=n_x+n_y+1$ element $(x+y)^n$ biće jednak konačnoj sumi elemenata oblika

$$(*)\quad x^{i_1}y^{j_1}\cdots x^{i_k}y^{j_k} ,\quad 0\leq i_s , j_s\leq n ,\quad \sum_{1\leq s\leq k}(i_s+j_s)=n .$$

Medjutim, lako se vidi da element navedenog oblika možemo predstaviti kao x^ir_1 , odnosno y^jr_2 , za neke r_1 , $r_2\in R$, pri čemu je $i=i_1+\cdots+i_k$, $j=j_1+\cdots+j_k$. Zato, zbog $i+j=n>n_x+n_y$, mora biti $i>n_x$ ili $j>n_y$. U svakom slučaju posmatrani proizvod $(*)$ pripada Q .

Dakle, $(x+y)^n \in Q$, t.j. $x+y \in P$. Prema tome, $P=r(Q)$ je desni ideal prstena R. Na potpuno isti način zaključujemo da je $r(Q)$ lijevi ideal prstena R ukoliko je Q lijevi ideal u R, a R prsten invarijantan s lijeva.

ii) Ako je $v:K \longrightarrow \Gamma_\infty$ valuacija tijela K takva da je $R_v=R$, tada iz $x,y\in R$ i $xy\in P$, u slučaju $v(x)\leq v(y)$, $x,y\in K^*$, slijedi $yx^{-1}\in R_v=R$, pa zato $y^2=yx^{-1}\cdot xy\in RP\subseteq P$, tj. za neko $n<\omega$ vrijedi $y^{2n}\in Q$, dakle $y\in P$. Slično, ako je $v(y)\leq v(x)$, tada $x\in P$.

<u>1.28. Primjedba</u> - Ako je R valuaciona oblast tijela K i P kompletno prosti ideal prstena R, primjetimo da u opštem slučaju ne mora ideal P biti invarijantan u K, dakle ne mora postojati valuaciona nadoblast u K za koju je P pozitivni ideal. Pokazaćemo to na sljedećem primjeru (vidi [12], str. 140.) :

<u>1.29. Primjer</u> - Neka je k tijelo a $K=k\{G\}$ skup formalnih redova oblika $x=\sum_{g\in G}\alpha_g\cdot g$, gdje je G totalno uredjena multiplikativna grupa sa jediničnim elementom e, a $\mathrm{supp}(x)=\{g\in G : \alpha_g\neq 0\}$ dobro uredjen skup. Neka je $R=\{x=\sum\alpha_g\cdot g\in K : (\forall g\in \mathrm{supp}(x))\ g\geq e\}$. Osim toga, neka je preslikavanje $\theta: K^* \longrightarrow G$ definisano na sljedeći način :

$$x=\sum\alpha_g\cdot g\in K \quad , \quad \theta(x)=\min\{\mathrm{supp}(x)\} \quad .$$

Tada su, uz uobičajene operacije sabiranja i množenja formalnih redova, tačne sljedeće tvrdnje :

i) K je tijelo a R je valuaciona podoblast tijela K i to $R=R_\theta$, a θ je valuacija tijela K ;

ii) Ako je grupa G nekomutativna, totalno uredjena i bez netrivijalnih normalnih podgrupa (vidi [20], str.68.), tada u prstenu R postoji kompletno prosti ideal P koji nije invarijantan u K.

Dokaz - Prema [20] (dokaz Teoreme 1, str.85.). poznato je da K predstavlja tijelo i da se svaki element $x \in K^*$ može jednoznačno prikazati u obliku :

$$x=(\alpha_{g_o}\cdot g_o)(e+\sum_{g\in G}\alpha_g\cdot g)\text{ , pri čemu je } g_o=\min\{\mathrm{supp}(x)\}\text{ ,}$$

a $\alpha_g=0$ za sve $g\leqslant e$. Ako stavimo $r_x=\sum_{g\in G}\alpha_g\cdot g$, možemo znači pisati $x=(\alpha_{g_o}\cdot g_o)(e+r_x)$, $\min\{\mathrm{supp}(r_x)\}>e$.
Otuda se jednostavno provjerava da za sve $x,y\in K^*$ vrijedi $\sigma(xy)=\sigma(x)\cdot\sigma(y)$. Neka su sada $x,y\in K^*$ takvi da je $x+y\neq 0$ i napr. $\sigma(x)\leqslant\sigma(y)$, tj. $x=(\alpha_{g_o}\cdot g_o)(e+r_x)$, $y=(\beta_{h_o}\cdot h_o)(e+r_y)$ i $g_o\leqslant h_o$, dakle i $g_o^{-1}h_o\geqslant e$. Tada je :

$$x+y=(\alpha_{g_o}\cdot g_o)(e+r_x)=(\beta_{h_o}\cdot h_o)(e+r_y)=(\alpha_{g_o}\cdot g_o)(e+r_x+$$

$$+(\alpha_{g_o}^{-1}\beta_{h_o}\cdot g_o^{-1}h_o)(e+r_y))\text{ , a za } s_{x+y}=r_x+(\alpha_{g_o}^{-1}\beta_{h_o}\cdot g_o^{-1}h_o)(e+r_y)$$

vrijedi $\min\{\mathrm{supp}(s_{x+y})\}\geqslant e$, jer $g_o^{-1}h_o\geqslant e$. Otuda je znači $\sigma(x+y)\geqslant g_o$, tj. vrijedi $\sigma(x+y)\geqslant\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$. Prema tome , $\sigma: K^*\longrightarrow G$ je valuacija tijela K .

$$0\neq x\in R_\sigma \iff \sigma(x)\geqslant e\text{ , } x\neq 0 \iff 0\neq x=(\alpha_{g_o}\cdot g_o)(e+r_x),$$
$$g_o\geqslant e \iff 0\neq x=\sum_{g\in G}\alpha_g\cdot g\text{ , } (\forall g\in\mathrm{supp}(x))\ e\leqslant g \iff 0\neq x\in R\ .$$

Specijalno, prsten R je valuaciona podoblast tijela K .

ii) Kako grupa G nije komutativna, to postoji u G netrivijalna izolovana podgrupa, pa kako je $G = \Gamma_{\sigma}$, toj podgrupi odgovara kompletno prosti ideal P prstena $R_{\sigma} = R$ i P nije invarijantan u K (Lema 1.9.).

1.30. Primjedba - Da bismo otklonili poteškoće koje se, u skladu sa prethodnim primjerom ii), mogu pojaviti u vezi sa kompletno prostim idealima valuacione podoblasti nekog tijela, razmotrićemo u sljedećem paragrafu uopštenje pojma valuacije na tijelu koje je dao K.Mathiak ([29] , [30]).

§2. M - valuacije nekomutativnog tijela

Poznato je u slučaju komutativnog tijela K, tj. polja K, da je podoblast R polja K valuacioni prsten ako i samo ako za svako $x \in K$ vrijedi $x \in R$ ili $x^{-1} \in R$.

U slučaju nekomutativnog tijela K, totalan podprsten R od K ne mora biti i invarijantan u K, kao što je pokazao F.Rado 1970.god. ([32] , str. 315-316), dakle totalan podprsten R od K ne mora biti i valuacioni prsten tijela K (Tvrdnja 1.8.). K.Mathiak je 1977.god. uveo pojam M-valuacije tijela ne insistirajući na invarijantnosti u K M-valuacionog podprstena od K. Navešćemo sada samo neke osnovne rezultate K.Mathiak-a prema [29] :

2.1. Definicija - Neka je K tijelo, a W totalno uredjen skup relacijom $\leq$ i sa najmanjim elementom 0 u W. Sirjektivno preslikavanje $|\,|: K \to W$, $x \mapsto |x|$, naziva se M-valuacija tijela K ako su ispunjeni sljedeći uslovi :

i) $|x|=0 \iff x=0$;

ii) $|x+y| \leq \mathrm{Max}\,(|x|,|y|)$, $\forall x,y \in K$;

iii) Za svako $x \in K$ postoji preslikavanje $\tilde{x} : I \longrightarrow W$ koje čuva poredak na W i takvo da vrijedi $\tilde{x}|y|=|xy|$, za sve $y \in K$.

Uz oznake iz prethodne definicije jednostavno se provjerava da vrijedi sljedeća tvrdnja :

2.2. Tvrdnja - i) $(\forall x \in K)\ |-x|=|x|$;

ii) $(\forall x,y \in K)\ |x| \neq |y| \Rightarrow |x+y|=\mathrm{Max}(|x|,|y|)$;

iii) $R_{||}=\{x \in K : |x| \leq |1|\}$ je totalan podprsten tijela K, tzv. prsten M-valuacije $||$ na K ;

iv) Prsten $R_{||}$ ima jedinstven maksimalan ideal jednak skupu $\{x \in K : |x| < |1|\}$.

2.3. Definicija - Neprazan podskup I tijela K naziva se desni (lijevi) razlomljeni ideal tijela K u odnosu na dati M-valuacioni prsten R tijela K ako vrijedi $Ix \subseteq I$ (odnosno , $xI \subseteq I$) , za sve $x \in R$.

2.4. Tvrdnja - Neka je $|| : K \longrightarrow W$ M-valuacija tijela K i $R=R_{||}$ prsten te M-valuacije.Tada su tačne sljedeće tvrdnje:

i) Ako je I desni (lijevi)razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R , tada je $(I,+)$ podgrupa grupe $(K,+)$;

ii) Svaki desni (lijevi) razlomljeni ideal I tijela K u odnosu na R takav da je $I \subseteq R$, sigurno je desni (lijevi) ideal prstena R ;

iii) Ako je I desni (lijevi) razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R i $x \notin I$, tada vrijedi $I \subseteq xR$ (odnosno $I \subseteq Rx$);

iv) Skup svih desnih (lijevih) razlomljenih ideala tijela K u odnosu na R totalno je uredjen relacijom inkluzije.

<u>Dokaz</u> - Označimo u daljem sa I desni razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R.

i) $R=\{x \in K : |x| \leq |1|\}$, pa $-1 \in R$ daje $(-1)\cdot I(-1) \subseteq I$, tj. $-I \subseteq I$. Dalje, ako su $0 \neq x, y \in I$, tada $x^{-1}y \in R$ ili $y^{-1}x \in R$, pa iz $x+y=x(1+x^{-1}y)=y(1+y^{-1}x) \in IR \subseteq I$, slijedi $I+I \subseteq I$.

ii) Tvrdnja slijedi neposredno iz i).

iii) Ako je $y \in I$ i $y \notin xR$, za neko $x \in I$, tada $x^{-1}y \notin R$, pa $y^{-1}x \in R$. Otuda je $x=y\cdot(y^{-1}x) \in IR \subseteq I$, što je nemoguće.

iv) Neka su I_1 i I_2 desni razlomljeni ideali tijela K u odnosu na R i $x \in I_1 \setminus I_2$. Tada, prema iii), vrijedi $I_2 \subseteq xR \subseteq I_1R \subseteq I_1$, dakle iz $I_1 \nsubseteq I_2$ slijedi $I_2 \subseteq I_1$.

<u>2.5. Tvrdnja</u> - Za svaki totalni podprsten R tijela K postoji M-valuacija $|\,|: K \longrightarrow W$ takva da je $R_{|\,|}=R$.

<u>Dokaz</u> - Označimo sa W skup $\{xR : x \in K\}$ svih „glavnih" desnih razlomljenih ideala tijela K u odnosu na R. Prema Tvrdnji 1.4.iv), skup W je totalno uredjen relacijom inkluzije, a nula ideal $\{0\}$, označimo ga sa 0, najmanji je element u W.

Definišimo sada preslikavanje $|\,|: K \longrightarrow W$ ovako : $|x|=xR$, za sve $x\in K$. Osim toga, za $x\in K$ definišimo $\tilde{x}: W \longrightarrow W$ ovako : $\tilde{x}(yR)=xyR$, za sve $y\in K$. Posljednja definicija je očigledno korektna, a preslikavanje $\tilde{x}$ čuva poredak na W i vrijedi $\tilde{x}|y|=|xy|$, za sve $x,y\in K$. I ostali zahtjevi iz Definicije 2.1. jednostavno se provjeravaju. Konačno , $|x|\leqslant|1|$ je ekvivalentno sa $xR\subseteq 1\cdot R$, tj. $x\in R$, pa je $R_{||}=R$.

<u>2.6. Primjedba</u> - U slučaju komutativnog tijela, pojam Schillingove valuacije i M-valuacije se podudaraju, jer se tada zahtjev za invarijantnošću totalnog podprstena tijela može izostaviti . Medjutim, podprsten R tijela K koji je totalan, je ujedno i invarijantan i u nekim drugim slučajevima. Napr. P.M.Cohn [10,Theorem 3.] je dokazao da je totalan podprsten tijela koje je konačno dimenzionalno nad svojim centrom takodje i invarijantan podprsten tog tijela .

<u>2.7. Tvrdnja</u> - Neka je $|\,|: K \longrightarrow W$ M-valuacija tijela K i $R=R_{||}$. Ako je I desni (lijevi) razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R , tada je $I^{*}=\{x\in K : x=0 \vee x^{-1}\notin I\}$ lijevi (desni) razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R . Preslikavanje $I\longmapsto I^{*}$ je bijekcija sa skupa svih desnih (lijevih) razlomljenih ideala na skup svih lijevih (desnih) razlomljenih ideala tijela K u odnosu na R . Osim toga , $I^{**}=I$ i ako je I dvostrani razlomljeni ideal, takav je i I^{*}. Dalje , $I_1\subseteq I_2$ povlači $I_2^{*}\subseteq I_1^{*}$. Takodje je $R^{*}=M$, gdje je M jedini maksimalni ideal prstena R .

Dokaz - Neka je I desni razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R. Tada je i $RI^* \subseteq I^*$. Zaista, za $0 \neq y \in R$ i $0 \neq x \in I^*$, je $x^{-1} \notin I$. Jasno, $yx \neq 0$, a iz $(yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \in I$, slijedilo bi $x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \cdot y \in IR \subseteq I$, tj. $x^{-1} \in I$, što je nemoguće. Dakle, vrijedi $(yx)^{-1} \notin I$, pa $yx \in I^*$.

Preslikavanje $I \longmapsto I^*$ je bijekcija, jer $I^{**} = I$. Naime, ako $0 \neq x \in I^{**}$, tada $x^{-1} \notin I^*$, pa $x = (x^{-1})^{-1} \in I$, tj. $I^{**} \subseteq I$ i slično $I \subseteq I^{**}$, jer $0 \neq x \in I$ i $x = (x^{-1})^{-1}$ daje $x^{-1} \notin I^*$, pa $(x^{-1})^{-1} \in I^{**}$.

Dalje, $I_1 \subseteq I_2$ i $0 \neq x \in I_2^*$ daje $x^{-1} \notin I_2$, pa sigurno i $x^{-1} \notin I_1$, dakle, $x \in I_1^*$.

Takodje, vrijedi $R^* = M$, jer $0 \neq x \in R^*$ ako i samo ako je $0 \neq x$ i $|x^{-1}| > |1|$, a to je ekvivalentno sa $0 \neq x$ i $|1| \geq |x|$, $|x^{-1}| > |1|$. Otuda, $0 \neq x \in R^*$ ako i samo ako je $0 \neq x \in R$ i $x^{-1} \notin R$, tj. $0 \neq x \in M$.

2.8. Primjedba - i) Uz oznake iz Tvrdnje 2.7., jasno je da vrijedi $M^* = R^{**} = R$, tj. $R^* = M$. Takodje, $I \subseteq M$ daje $M^* \subseteq I^*$, tj. $R \subseteq I^*$, a iz $R \subseteq I$ slijedi $I^* \subseteq M$. Pri tome, ako je razlomljeni ideal I tijela K u odnosu na R sadržan u R, tada je I ideal (eventualno jednostrani) prstena R.

ii) Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih kompletno prostih ideala prstena R, a sa $\mathcal{D}$ označimo skup svih nadprstena (u K) prstena R. Jasno, ako $R_1 \in \mathcal{D}$, tada iz $R \subseteq R_1$ slijedi da je i R_1 totalan podprsten tijela K, tj. i R_1 je M-valuacioni prsten u K. Takodje, jasno je da R_1 iz $\mathcal{D}$ sigurno predstavlja i dvostrani razlomljeni ideal tijela

K u odnosu na R, jer $R_1R=R_1=RR_1$.

Prema Tvrdnji 2.4.iv), skup $\mathcal{D}$ je totalno uredjen u odnosu na relaciju inkluzije, a prema i), za svako R_1 iz $\mathcal{D}$ skup R_1^* je pravi ideal prstena R.

<u>2.9. Tvrdnja</u> - Sljedeće tvrdnje za M-valuacioni prsten tijela K su medjusobno ekvivalentne :

1) P je kompletno prosti ideal prstena R ;

2) P je pravi desni ideal prstena R i iz $xy\in P$ slijedi $x\in P$ ili $y\in P$, za sve $x,y\in K$;

3) P je dvostrani razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R a $P^*=\{x\in K : x=0 \vee x^{-1}\notin P\}$ je nadprsten (u K) prstena R.

<u>Dokaz</u> - 1) $\Rightarrow$ 2) : Neka je $xy\in P$, a $x\notin R$ ili $y\notin R$. Tada $x^{-1}\in R$ ili $y^{-1}\in R$. Kako je P dvostrani ideal u R, to je tačno $y=x^{-1}(xy)\in RP\subseteq P$, ako $x^{-1}\in R$, odnosno $x=(xy)y^{-1}\in PR\subseteq P$, ako je $y^{-1}\in R$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Prema 2) P je pravi desni razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R, ali P je i lijevi razlomljeni ideal. Inače, za neko $0\neq x\in R$ i neko $p\in P$, bilo bi $xp\notin P$, a $p=x^{-1}\cdot xp\in P$ daje, prema 2), $x^{-1}\in P$. Otuda i $1=x^{-1}\cdot x\in$ $\in PR\subseteq P$, što je nemoguće. Dakle, P je dvostrani pravi razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R. Dalje, $1\notin P$ implicira da je $P\subseteq M$, gdje je M jedini maksimalni ideal u R, pa otuda $R=M^*\subseteq P^*$, tj. $R\subseteq P^*$. Kako je i P^* dvostrani razlomljeni ideal tijela K, to je $(P^*,-)$ podgrupa grupe $(K,+)$ prema Tvrdnji 2.4.i). Dalje, $P^*\cdot P^*\subseteq P^*$.

Zaista, ako su $0\neq x,y\in P^*$, tada $x^{-1}\notin P$, $y^{-1}\notin P$, pa je $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}\notin P$, zbog 2), dakle $xy\in P^*$. To znači da je $P^*\in\mathcal{D}$.

3) $\Rightarrow$ 1) : Kako je P dvostrani razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R, to je i P^* dvostrani razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R (Tvrdnja 2.7.). Zato je i $P=P^{**}$ dvostrani razlomljeni ideal tijela K u odnosu na R i $P\subsetneq R$, pa je P pravi dvostrani ideal prstena R (Tvrdnja 2.4.ii)). Dalje, $P^*\in\mathcal{D}$ implicira da je P^* M-valuacioni prsten tijela K i da je $P=P^{**}$ jedini maksimalni ideal u P^* (Tvrdnja 2.7.). Zato je P^*/P tijelo, pa i prsten R/P nema netrivijalnih djelitelja nule, tj. P je kompletno prosti ideal prstena R.

<u>2.10. Primjedba</u> - i) Ako je R M-valuacioni prsten tijela K, a sa $\mathcal{P}$ označen skup svih kompletno prostih ideala prstena R i sa $\mathcal{D}$ skup svih nadprstena (u K) prstena R, tada je preslikavanje $\mathcal{P}\rightarrow\mathcal{D}$ dato sa $P\mapsto P^*$ bijekcija. Naime, dovoljno je provjeriti samo sirjektivnost tog preslikavanja. Ako $R_1\in\mathcal{D}$ i ako je M_1 jedini maksimalni ideal R_1, tada sigurno $M_1\subseteq R$, pa je M_1 kompletno prosti ideal prstena R, a osim toga $M_1^*=R_1$.

ii) Ako je P kompletno prosti ideal M-valuacionog prstena R tijela K, tada skup $P^*\in\mathcal{D}$ ima ulogu lokalizacije prstena R po idealu P u komutativnom slučaju, odnosno u slučaju da je P invarijantan u K. Time je, na odredjen način, uklonjen nedostatak kod Schillingove valuacije tijela naveden u Primjeru 1.29.

§3. Teoreme aproksimacije za Schillingove valuacije tijela

U ovom paragrafu ćemo dokazati da vrijedi analogon Ribenboim-ove Opšte teoreme aproksimacije [33,Th.5′] i za Schillingove valuacije na tijelu koje ne mora biti komutativno. Formalno,taj dokaz u nekomutativnom slučaju mogao bi pratiti odgovarajući dokaz P.Ribenboim-a za valuacije na polju , s tim što bi uz pomoć rezultata iz §1.,trebalo dokazati prethodno gotovo sve pomoćne rezultate iz [33] . Taj dokaz,u slučaju polja je inače veoma dug i što je takodje važno,metod tog dokaza nije bilo moguće primjeniti pri dokazu odgovarajućih teorema aproksimacije koje smo naveli u gl.I i gl. I.

Cilj nam je stoga,pokazati da je metod primjenjen pri dokazu Opšte teoreme aproksimacije u gl.I moguće primjeniti za valuacije na tijelu .

Pomenimo još da je T.Nakano [31] dao teoremu aproksimacije u okolini nule za valuacije na tijelu , ali koristeći metod bitno drugačiji od onog kojim se ovdje koristimo .

——— Navedimo prvo jedan rezultat H.H.Brungs-a [7,Th.1.] ; njime je karakterizirana (u opštem slučaju nekomutativna)oblast R koja je ujedno i aritmetički prsten , tj. kod koje za proizvoljne desne,odnosno lijeve ideale A , B i C vrijedi

$$A\cap(B+C)=(A\cap B)+(A\cap C) \quad .$$

<u>3.1. Teorema</u> - Neka je R oblast sa jedinicom.Tada je R desni (lijevi) aritmetički prsten,tj. za prizvoljne desne , odnosno lijeve ideale A,B i C prstena R vrijedi

$$A\cap(B+C)=(A\cap B)+(A\cap C) \quad ,$$

ako i samo ako vrijedi sljedeća tvrdnja :

Za svaki maksimalni desni (lijevi) ideal M prstena R, za $S=R\setminus M$, postoji $R[S^{-1}]$ (odnosno $[S^{-1}]R$) i to je desni (lijevi) lančani prsten .

Tada je, specijalno, za svaki maksimalni desni (lijevi) ideal M prstena R, skup $S=R\setminus M$ desni (lijevi) Oreov skup u R .

__3.2. Primjedba__ - Uz oznake iz prethodne teoreme, primjetimo da u slučaju da je R podprsten nekog tijela K i R aritmetički prsten, možemo identifikovati $R[S^{-1}] \simeq [S^{-1}]R$ sa podprstenom tijela K, tj. $R \subseteq R[S^{-1}] \subseteq K$.

——— Sljedeći rezultat N.I.Dubrovin-a [11, Predloženie 3.] je od bitne važnosti za dokaz Opšte teorema aproksimacije :

__3.3. Teorema__ - Neka su $R_1, \dots, R_n$ lančane oblasti u zajedničkom tijelu razlomaka K, a $R_i \not\subseteq R_j$ za sve $1\leq i\neq j\leq n$. Tada su tačne sljedeće tvrdnje :

i) prsten $D=R_1 \cap \cdots \cap R_n$ ima za klasično dvostrano tijelo razlomaka upravo tijelo K ;

ii) svi maksimalni desni (lijevi) ideali prstena D su upravo ideali $M_i=D\cap P_i$, $1\leq i\leq n$, gdje je P_i jedinstveni maksimalni ideal prstena R_i, $1\leq i\leq n$.

iii) skup $S_i=D\setminus M_i$ je desni i lijevi Oreov skup prstena D, a lokalizacija prstena D po S_i jednaka je R_i, $1\leq i\leq n$.

Prethodne dvije teoreme omogućavaju da dokažemo sljedeći rezultat :

<u>3.4. Tvrdnja</u> - Neka su R_1 , ... , R_n lančane oblasti u zajedničkom dvostranom tijelu razlomaka K , a $R_i \not\subseteq R_j$ za sve $1 \leq i \neq j \leq n$. Tada su tačne sljedeće tvrdnje :

i) prsten $D=R_1 \cap \cdots \cap R_n$ je aritmetički prsten ;

ii) za proizvoljan ideal $Q \subsetneq D$ prstena D vrijedi
$$Q = \bigcap_{1 \leq k \leq n} QR_k \quad .$$

<u>Dokaz</u> - i) Tačnost tvrdnje pod i) slijedi neposredno iz Teoreme 3.3. (na osnovu Teoreme 3.1.).

ii) Neka je napr. $Q \subsetneq D$ desni ideal prstena D . Dokažimo prvo da se element $x \in QR_k$, $1 \leq k \leq n$, može napisati u obliku $x=q \cdot s^{-1}$, $q \in Q$, $s \in S_k$, gdje je $R_k=D[S_k^{-1}]$ (uz oznake iz Teoreme 3.3.).

U tu svrhu dokazaćemo da vrijedi sljedeće :

$$(*) \qquad (\forall s_1,\dots,s_n \in S_k)(\exists d_1,\dots,d_n \in D \,,\, \exists s \in S_k) \; s_i^{-1}=d_i s^{-1}$$
za sve $i=1,\dots,n$.

Tvrdnja (*) je tačna za $n=1$; tada je dovoljno staviti $d_1=s_1$, a $s=s_1^2$. Neka je sada $n>1$, $s_1,\dots,s_n \in S_k$, a elementi $d_1' ,\dots,d_{n-1}' \in D$ i $s' \in S_k$ takvi da je $s_i^{-1}=d_i'(s')^{-1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Kako je S_k desni Oreov skup prstena D , vrijedi $s_n d_n=s'd$ za neke $d_n \in S_k$ i $d \in D$. Stavimo sada $s=s_n d_n=s'd$, a $d_i=d_i'd$. Tada u R_k vrijedi $s_n^{-1}=d_n s^{-1}$, a za $1 \leq i \leq n-1$ $s_i^{-1}=d_i'(s')^{-1}=d_i'd\,(s'd)^{-1}=d_i s^{-1}$. Dakle, tvrdnja (*) vrijedi za sve prirodne brojeve n .

Neka je sada $x\in QR_k=Q\cdot D[S_k^{-1}]$ i $x=q_1\cdot\tilde{d}_1 s_1^{-1}+\dots+q_r\cdot\tilde{d}_r s_r^{-1}$, gdje $q_1,\dots,q_r\in Q$, $\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_r\in D$, $s_1,\dots,s_r\in S_k$. Tada na osnovu relacije (✱), postoje $d_1,\dots,d_r\in D$ i $s\in S_k$, takvi da je $s_i^{-1}=d_i s^{-1}$, $1\leq i\leq r$. Otuda je $x=q_1\tilde{d}_1 d_1 s^{-1}+\dots+q_r\tilde{d}_r d_r s^{-1}$, tj. $x=q\cdot s^{-1}$, gdje je $s\in S_k$ i $q=q_1\tilde{d}_1 d_1+\dots+q_r\tilde{d}_r d_r\in Q$.

Posmatrajmo sada skup $A=\{d\in D : xd\in Q\}$, gdje je x iz $\bigcap_{1\leq k\leq n} QR_k$ fiksiran element . Jasno , A je desni ideal prstena D . Ukoliko bi bilo $A\subsetneq D$, tada bi A bilo sadržano u nekom maksimalnom desnom idealu $D\cap M_{k_0}$, $1\leq k_0\leq n$, prstena D . Otuda iz prikaza $x=q\cdot s_{k_0}^{-1}$, $q\in Q$ i $s_{k_0}\in S_{k_0}$, slijedi $s_{k_0}\in A$, pa i $s_{k_0}\in M_{k_0}$, što je nemoguće. Dakle , mora biti $A=D$, tj. $1\in A$, pa znači $x\in Q$.

<u>3.5. Primjedba</u> - i) Uz oznake iz prethodne tvrdnje, jasno je da za prsten D vrijedi Kineska teorema o ostacima za desne (odnosno lijeve) ideale prstena D (vidi dokaz Tvrdnje 2.19., gl.I). Dakle, ako su Q_1 , ..., Q_s proizvoljni desni (lijevi) ideali prstena D a elementi $d_1,\dots,d_s\in D$ takvi da $d_i-d_j\in Q_i+Q_j$ za sve $1\leq i\neq j\leq s$, tada postoji $d\in D$ takav da vrijedi $d-d_i\in Q_i$ za sve $1\leq i\leq s$.

ii) Primijetimo takodje da su sve tvrdnje iskazane u Teoremi 3.3., kao i u Tvrdnji 3.4., očigledno važne i u slučaju da su R_1 , ... , R_n valuacioni prsteni Schilling-ovih valuacija na tijelu K .

3.6. Tvrdnja - Neka je P kompletno prosti ideal prstena R. Tada vrijede sljedeće tvrdnje :

i) Desna (lijeva) lokalizacija R_P ($_PR$) postoji tada i samo tada kada je $R\setminus P$ skup desnih (lijevih) imenilaca u R ;

ii) Ako je prsten R aritmetički s desna (s lijeva), tada je $R\setminus P$ desni (lijevi) Oreov skup u R ;

iii) Ako je prsten R aritmetički s desna (s lijeva) i ako za sve $a\in R$, $s_1\in R\setminus P$ iz $s_1a=0$ (odnosno $as_1=0$), slijedi $as_2=0$ (odnosno $s_2a=0$) za neko $s_2\in S$, tada R_P (odnosno $_PR$) postoji i predstavlja lančani s desna (s lijeva) prsten;

iv) Ako je prsten R aritmetička oblast, tada R_P (i $_PR$) postoji i to je lančana oblast. Osim toga, ako je R podprsten nekog tijela K , tada se R_P može identifikovati sa podskupom $\{as^{-1} : a\in R , s\in R\setminus P\}$ tijela K .

7. Primjedba - 1) Tvrdnje pod i),ii),iii) su u suštini poznate od ranije ([38,str.51-52] , [39]), dok tvrdnja iv) predstavlja jednostavnu posljedicu tvrdnji pod i),ii),iii).

Primjetimo da je svaka lančana podoblast R tijela K ujedno i aritmetička oblast, pa lokalizacija R_P postoji za svaki kompletno prosti ideal prstena R .

—— Sljedeće tri tvrdnje dokazuju se analogno kao odgovarajuće tvrdnje iz gl. I , gdje su formulisane u nešto drugačijoj situaciji .

3.8. Lema - Neka je Ω familija netrivijalnih valuacija tijela K i $w\in\Omega$. Dalje, neka je $\alpha\in\Gamma_w\setminus\{0\}$, a Δ najveća normalna, izolovana podgrupa grupe Γ_w takva da $\alpha\notin\Delta$. Označimo sa v valuaciju tijela K definisanu sa $v(x)=w(x)+\Delta$ za $w(x)\in\Gamma_w$, a $v(x)=\infty$ za $w(x)=\infty$, $x\in K$. Tada je $\{w'\in\Omega : R_{w'}\subseteq R_v\}=\{w'\in\Omega : \theta_{w,w'}(\alpha)\neq 0\}$, gdje je $\theta_{w,w'}$ definisano kao i obično za $w\neq w'$, a za $w=w'$ je $\theta_{w,w'}$ identitet na Γ_w .

3.9. Lema - Neka je Ω familija netrivijalnih valuacija tijela K . Tada vrijede sljedeće tvrdnje :

i) $(\forall w_1,w_2\in\Omega;\forall\ \alpha_1\in\Gamma_{w_1}\setminus\{0\};\forall\alpha_2\in\Gamma_{w_2}\setminus\{0\})$

$$\Omega_{w_1}(\alpha_1)\cap\Omega_{w_2}(\alpha_2)=\emptyset \Rightarrow \Omega_{w_1}(\alpha_1)\subseteq\Omega_{w_2}(\alpha_2)\ \vee$$

$$\vee\ \Omega_{w_2}(\alpha_2)\subseteq\Omega_{w_1}(\alpha_1)$$

. Tu je $\Omega_{w_i}(\alpha_i)=\{w\in\Omega : v_i\leq w\}$, $i=1,2$, a valuacije v_1 i v_2 su definisane , za date α_1 i α_2 , kao u Lemi 3.8.

ii) $\theta_{w_1,w_2}(\alpha_1)=\theta_{w_2,w_1}(\alpha_2)=0 \Rightarrow \Omega_{w_1}(\alpha_1)\cap\Omega_{w_2}(\alpha_2)=\emptyset$.

3.10. Tvrdnja - Neka su $v_1 , \dots , v_n$ $(n\geq 3)$ netrivijalne valuacije tijela K sa grupama vrijednosti $\Gamma_1 ,\dots,\Gamma_n$ respektivno. Dalje, neka su $\gamma_i\in\Gamma_i$, $1\leq i\leq n-1$, nenegativni, a familija $(\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1})\in\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_{n-1}$ saglasna . Tada postoji nenegativan element $\gamma_n\in\Gamma_n$ takav da je familija $(\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1},\gamma_n)\in\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_{n-1}\times\Gamma_n$ saglasna .

<u>3.11. Tvrdnja</u> - Neka je R valuaciona oblast tijela K, a P i Q pravi kompletno prosti ideali prstena R.
Tada vrijedi :

$$R_P \subseteq R_Q \iff Q \subseteq P \quad .$$

<u>Dokaz</u> - Prema Primjedbi 3.7. pod 2), jasno je da lokalizacije R_P i R_Q postoje, te uz $R_P = \{as^{-1} : a \in R , s \in R \setminus P\} \subseteq K$ i slično $R_Q \subseteq K$, jasno je da $Q \subseteq P$ implicira $R_P \subseteq R_Q$.

Neka je sada $R_P \subseteq R_Q \subseteq K$ i dokažimo da je $Q \subseteq P$.
Ako $s \in Q \setminus P$, tada $s^{-1} \in R_P \subseteq R_Q$. Dakle, postoje $r \in R$ i $t \in R \setminus Q$ takvi da je $s^{-1} = rt^{-1}$. Otuda $t = sr \in Q$, što je nemoguće. Prema tome, mora biti $Q \subseteq P$.

——— Dokažimo sada tvrdnju koja neposredno (kao u gl.I i gl.II) ima za posljedicu Teoremu aproksimacije u okolini nule.

<u>3.12. Tvrdnja</u> - Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \geqslant 3$, familija netrivijalnih, u parovima neuporedivih valuacija tijela K sa grupama vrijednosti $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ respektivno, a $(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$, $\alpha_i > 0$, $2 \leqslant i \leqslant n$, saglasna familija. Označimo sa Q_i skup $\{y_i \in K \; v_i(y_i) \geqslant \alpha_i\}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, a sa $P_i = r(Q_i) = \{x_i \in R_{v_i} : (\exists m < \omega) \; x_i^m \in Q_i\}$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Tada je Q_i ideal prstena R_{v_i}, a P_i je kompletno prosti ideal prstena R_{v_i}, $2 \leqslant i \leqslant n$. Osim toga, vrijedi :

$$R_{v_1} \cap R_{v_2} \cap \cdots \cap R_{v_n} \cap (R_{v_1} \setminus P_{v_1}) \cap (P_2 \cap \cdots \cap P_n) \neq \emptyset \; .$$

<u>Dokaz</u> - Neka je $D = R_{v_1} \cap R_{v_2} \cap \cdots \cap R_{v_n}$. Jasno je da skup

Q_i predstavlja ideal prstena R_{v_i} , $2 \leq i \leq n$, a da je P_i kompletno prosti ideal u R_{v_i} , $2 \leq i \leq n$ (Tvrdnja 1.27.).

Pretpostavimo sada da je skup $D \cap (R_{v_1} \setminus P_{v_1}) \cap (P_2 \cap \cdots \cap P_n)$ prazan i označimo sa $\overline{P}_i$ prsjek ideala P_i sa aritmetičkom oblašću D , $2 \leq i \leq n$ (Tvrdnja 3.4.). Osim toga, neka je $\overline{P}_1 = D \cap P_{v_1}$. Tada su $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ pravi kompletno prosti ideali prstena D , pa iz $\bigcap_{2 \leq i \leq n} \overline{P}_i \subseteq \overline{P}_1$ slijedi $\overline{P}_i \subseteq \overline{P}_1$ za neko $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Dalje, prema Teoremi 3.3.(iii), vrijedi $R_{v_1} = D_{\overline{P}_1}$, pa zato $R_{v_1} \subseteq D_{\overline{P}_i} \subseteq (R_{v_i})_{P_i} \subseteq \{ x \in K : x = 0 \vee x^{-1} \notin P_i \} \subsetneq K$, jer $x_i \in K$ takav da $\alpha_i = v_i(x_i)$ sigurno zadovoljava uslov $x_i^{-1} \notin \{ x \in K : x = 0 \vee x^{-1} \notin P_i \}$. Dakle , $R_{v_1} \subseteq (R_{v_i})_{P_i}$, $R_{v_i} \subseteq (R_{v_i})_{P_i}$, tj. $R_{v_1} R_{v_i} \subseteq (R_{v_i})_{P_i} \subsetneq K$, pa je $R_{v_1} R_{v_i} = (R_{v_1})_{\widetilde{Q}_i} = (R_{v_i})_{\widetilde{Q}_i}$, gdje je $\widetilde{Q}_i$ najopsežniji kompletno prosti invarijantan ideal za R_{v_1} i za R_{v_i} , tj $\widetilde{Q}_i = P_{v_1 \wedge v_i}$. Sada iz $(R_{v_i})_{\widetilde{Q}_i} \subseteq (R_{v_i})_{P_i}$, prema Tvrdnji 3.11. slijedi $P_i \subseteq \widetilde{Q}_i$. Dakle, ako je $x_i \in K$ takav da vrijedi $v_i(x_i) = \alpha_i$, mora biti $x_i \in P_i$, pa zato $x_i \in \widetilde{Q}_i$. Medjutim , par $(0, \alpha_i) \in \Gamma_1 \times \Gamma_i$, $2 \leq i \leq n$, je saglasan, pa $\alpha_i \in \Delta_{v_i, v_1}$, pri čemu je $\Delta_{v_i, v_1} \cap v_i(\widetilde{Q}_i) = \emptyset$, specijalno $\alpha_i \notin v_i(\widetilde{Q}_i)$.
Dobivena kontradikcija pokazuje da je skup $D \cap (R_{v_1} \setminus P_{v_1}) \cap (P_2 \cap \cdots \cap P_n)$ neprazan .

<u>3.13. Teorema (Teorema aproksimacije u okolini nule)</u>

Neka su $v_1,\ldots,v_n$ netrivijalne i u parovima neuporedive valuacije tijela K sa grupama vrijednosti $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ respektivno, a $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_n$ saglasna familija. Tada postoji $x\in K$ takav da je $v_i(x)=\alpha_i$, $1\le i\le n$.

<u>Dokaz</u> - Dokaz slijedi neposredno iz Tvrdnje 3.12., slično kao u dokazu analogne Teoreme 4.2. gl.I. Naime, korektnost dijela dokaza I) Teoreme 4.2.gl.I, obezbjedjena je sada Tvrdnjom 3.12.

<u>3.14. Teorema (Opšta teorema aproksimacije)</u>

Neka je $\{v_1,\ldots,v_n\}$ familija netrivijalnih i u parovima neuporedivih valuacija tijela K, a elementi $b_1,\ldots,b_n\in K$ proizvoljni. Dalje, neka je $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma_{v_1}\times\cdots\times\Gamma_{v_n}$ saglasna familija. Tada vrijedi sljedeća implikacija :

$$((\forall i\neq j\in\{1,\ldots,n\})\ v_i(b_i-b_j)<\alpha_i \Rightarrow \alpha_i-v_i(b_i-b_j)\in\Delta_{v_i,v_j}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists x\in K)(\forall i\in\{1,\ldots,n\})\ v_i(x-b_i)=\alpha_i .$$

<u>Dokaz</u> - Dokaz ove teoreme je analogan dokazu Teoreme 4.6. iz gl.I s tim što sada treba uzeti u obzir Teoremu 3.14., Tvrdnju 3.4., zatim Lemu 3.8., Lemu 3.9. i Tvrdnju 3.10. Konačno i u ovoj situaciji može se primijeniti Kineska teorema o ostacima (Primjedba 3.5.i)). Time bi se dio I) dokaza Teoreme 4.6.gl.I mogao primijeniti u potpunosti i u razmatranoj situaciji valuacija na tijelu. Pri tome bi samo umjesto oznake A, u dokazu Teoreme 4.6.gl.I, trebalo uzeti presjek $R_{v_1}\cap\cdots\cap R_{v_n}$.

3.15. Primjedba - Ako se ostave po strani neophodne pripreme, odnosno tvrdnje koje omogućuju da se metod dokaza Opšte teoreme aproksimacije, odnosno Teoreme aproksimacije u okolini nule, primjeni na tri različite situacije posmatrane u gl.I, gl.II i u ovoj glavi, vidi se da je osnovna bila Tvrdnja 4.1.gl.I, odnosno njoj analogne tvrdnje Tvrdnja 2.1.gl.II i Tvrdnja 3.12. ove glave.

Time se ujedno ukazuje na put kojim bi trebalo eventualno uopštavati npr. Teoremu 3.14. i u slučaju M-valuacija tijela, kao i teoreme aproksimacije u nekim drugim situacijama.

LITERATURA

[1] Alajbegović,J.,On Prüfer valuation pairs , Radovi ANUBIH (rad primljen za objavljivanje) ,

[2] Albu,T.,Nastasescu,C.,Modules arithmétiques, Acta Math.Sc.Hung.Tom 25(3-4),(1974),299-311 .

[3] Arapović,M.,Approximation theorems for fields and commutative rings,Glasnik Mat.,Vol.18(38),(1983),61-66.

[4] Boisen,M,B.Jr.,Larsen,M.D., Prüfer and valuation rings with zero divisors, Pacific J.Math.,Vol.40,No.1(1972),7-12.

[5] Bourbaki,N.,Algèbre commutative (ruski prevod),Mir, Moskva 1971.

[6] Brown,D.E., Valuations and rings of quotients , Proc.Amer. Math.Soc.,Vol.43,No.2 (1974),277-282 .

[7] Brungs,H.H., Rings with a distributive lattice of right ideals , J.Alg.40 (1976),392-400 .

[8] Camillo,V., Distributive modules , J.Alg.36 (1975),16-25.

[9] Cohn,P.M., Extensions of valuations on skewfields , Preprint,Bedford College,London 1978.

[10] Cohn,P.M., On extending valuations in division algebras , Preprint,Bedford College , London 1979.

[11] Dubrovin,N.I., Cepnie oblasti (na ruskom), Vestn.Mosk. Un-ta,Ser.1.,Mat-Meh.,No.2 (1980),51-54 .

[12] Dubrovin,N.I., O cepnih koljcah (na ruskom),Uspehi Mat. Nauk , Tom 37,vip.4(226),(1982),139-140 .

[13] Eggert,N.,Rutherford,H., A local characterization of Prüfer rings , J.Reine Angew.Math.250 (1971),109-112.

[14] Gräter,J., Der Approximationssatz für Manisbewertungen , Arch.Math.37 (1981),335-340 .

[15] Gräter,J., Der allgemeine Approximationssatz für Manisbewertungen , Mh.Math.93 (1982),277-288 .

[16] Griffin,M., Rings of Krull type , J.Reine Angew.Math.229 (1968),1-27 .

[17] Griffin,M., Prüfer rings with zero divisors , J.Reine Angew.Math. 239/240 (1970),55-67 .

[18] Griffin,M., Valuations and Prüfer rings , Canad. J. Math.,Vol.26,No.2 (1974),412 - 429 .

[19] Griffin,M., Multiplication rings via their total quotient rings , Canad.J.Math.,Vol.26,No.2 (1974),430-449 .

[20] Kokorin,A.I.,Kopitov,V.M.,Linejno Uporjadočenie Grupi (na ruskom),Nauka,Moskva 1972.

[21] Lambek,J., Rings and Modules (ruski prevod),Mir,Moskva 197[illegible] .

[22] Larsen,M.D., Equivalent conditions for a ring to be a P-ring and a note on flat overrings , Duke Math.J.,34(1967),273-280 .

[23] Larsen,M.D., Containment relations between classes of regular ideals in a ring with few zero divisors , J.Sci.Hiroshima Univ.,Ser.A-I,32(1968),241-246 .

[24] Larsen,M.D., Harrison primes in a ring with few zero divisors , Proc.Amer.Math.Soc.22(1969),111-116 .

[25] Larsen,M.D., Prüfer rings of finite character , J.Reine Angew.Math. 247 (1971),92-96 .

[26] Larsen,M.D.,McCarthy,P., Multiplicative Theory of Ideals , New York and London,Academic Press 1971 .

[27] Manis,M.E., Extension of valuation theory , Bull.Amer.Math.Soc.,73 (1967),735-736 .

[28] Manis,M.E., Valuations on a commutative ring , Proc.Amer.Math.Soc. 20 (1969) , 193-198 .

[29] Mathiak,K., Bewertungen nicht kommutativer Körper , J.Alg. 48 (1977),217-235 .

[30] Mathiak,K., Der Approximationssatz für bewertungen nicht kommutativer Körper , J.Alg. 76 (1982),280-295.

[31] Nakano,T., A theorem on lattice ordered groups and its applications to the valuation theory , Math.Zeitschr. 83 (1964),140-146 .

[32] Radó,F., Non-injective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of commutative valuations , Aeq.Math. 4 (1970),307-321 .

[33] Ribenboim,P., Le théorème d'approximation pour les valuations de Krull , Math. Zeitschr. 68 (1957),1-18.

[34] Ribenboim,P., Théorie des Groupes Ordonnés , Inst.Mat.Univ.Nacional del sur Bahia Blanca 1959 .

[35] Richman,F., Generalized quotient rings , Proc.Amer.Math.Soc. 16 (1965),794-799 .

[36] Stephenson,W., Modules whose lattice of submodules is distributive , Proc.London Math.Soc.(3)28,(1974), 291-310 .

[37] Schilling,O.F.G., The Theory of Valuations , AMS Math.Surv. IV , 1950 .

[38] Stenström,B., Rings of Quotients , Springer , Berlin e.a.,1975.

[39] Turanbaev,A.A., Distributivnie moduli (na russkom), Uspehi Mat.Nauk , Tom 35 , vip.5(215),(1980),245-246 .

[40] Van Geel,J., Primes and Value Functions , Ph.D.Thesis , Antwerp 1980 .

[41] Zariski,O.,Samuel,P., Commutative Algebra,Vol.1., Van Nostrand,Princeton,N.J.,1958 .