[illegible]
[illegible]

SUR UNE [illegible]
DES FONC[illegible]

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE
SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATÉMATIQUES ET PHYSIQUE
№ 149 (1965)

SUR UNE INÉGALITÉ ÉLÉMENTAIRE OÙ INTERVIENNENT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

D. S. Mitrinović et *D. D. Adamović*

1. Nous allons prouver tout d'abord le résultat suivant, relatif à l'inégalité

(1) $$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Proposition 1. *L'inégalité* (1) *est vraie pour* $a \leqslant 3$.

La valeur $a = 3$ *est la meilleure possible; plus précisément, pour tout* $a > 3$ *il existe un nombre* $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *(qui dépend de* a*) tel que l'on ait*

$$\cos x > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \ (0 < x < x_1), \quad \cos x_1 = \left(\frac{\sin x_1}{x_1}\right)^a, \quad \cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \ \left(x_1 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Démonstration. Pour $a > 0$ l'inégalité (1) est équivalente à la suivante:

(2) $$x - \sin x\,(\cos x)^{-\frac{1}{a}} < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Considérons la fonction f définie par

(3) $$f(x) = x - \sin x\,(\cos x)^{-\frac{1}{a}} \quad (a > 1)$$

et ses deux dérivées premières:

(4) $$f'(x) = 1 - (\cos x)^{1-\frac{1}{a}} - \frac{1}{a}\sin^2 x\,(\cos x)^{-1-\frac{1}{a}},$$

(5) $$f''(x) = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \sin x\,(\cos x)^{-2-\frac{1}{a}} \left[\cos^2 x - \frac{a+1}{(a-1)^2}\right].$$

Dans le cas où $a = 3$ on a, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) < f(0) = 0. \end{aligned}$$

L'inégalité (2), c'est-à-dire l'inégalité (1), est donc vraie pour $a = 3$.

$x \qquad \backslash \qquad 2\,/$

et par conséquent

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^a > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \qquad \left(a<3;\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

on en déduit que l'inégalité (1) est vraie pour $a<3$.

Soit maintenant $a>3$. On a alors

$$\frac{a+1}{(a-1)^2}=\frac{1}{a-1}+\frac{2}{(a-1)^2}<1,$$

d'où, d'après (5), il résulte l'existence d'un nombre $\xi \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ tel que l'on a

$$f''(x)>0 \quad (0<x<\xi), \quad f''(\xi)=0, \quad f''(x)<0 \quad \left(\xi<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Cette conclusion-là, combinée avec le fait que l'on a dans ce cas-là, d'après (3) et (4),

$$f(0)=0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty, \quad f'(+0)=0,$$

conduit à la seconde assertion de la proposition 1.

Notons que la courbe $y=f(x)$ a dans les cas où $0<a<3$ et où $a>3$ les formes présentées par les figures 1 et 2, respectivement. Le petit cercle sur la figure 2 désigne le point d'inflexion.

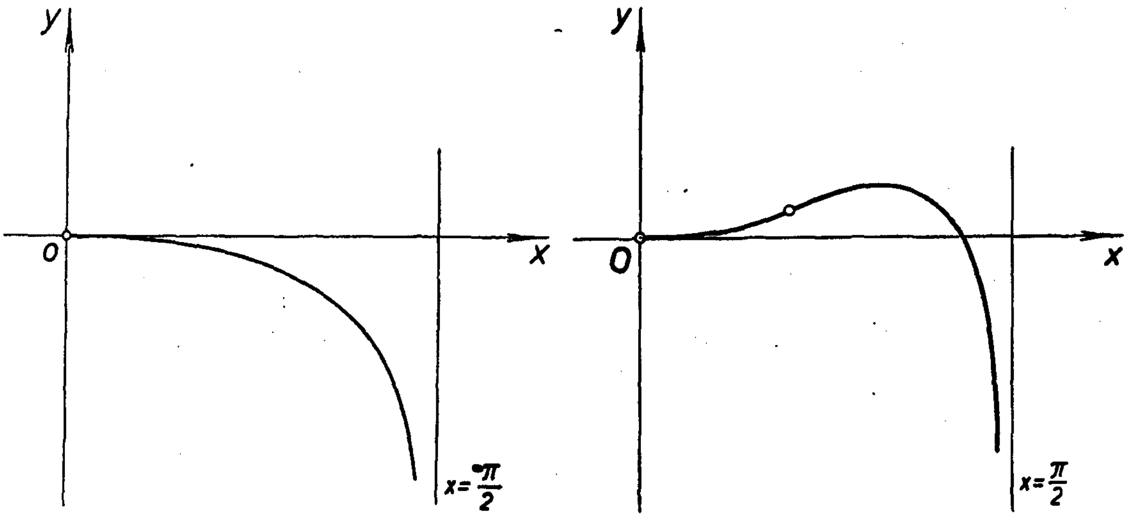

Fig. 1 et 2

On peut remarquer encore que l'on a aussi

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \qquad \left(a<3;\quad 0<|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

D. Đoković a démontré l'inégalité (1) pour $a=2$ en suivant une autre voie (*voir:* D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964, p. 66—67).

1.1. Étant donné que $0<\sin x<1$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, on a, pour $a<b$,

$$\frac{(\sin x)^a}{x^b} \geqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^b \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après cette remarque-là, on a la généralisation suivante de la première assertion de la proposition 1:

Proposition 2. *L'inégalité*

$$\cos x<\frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

est vraie pour $a<b<3$.

2. L'étude de l'inégalité plus générale que (1), à savoir

$$(\cos x)^c<\frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad (a,\ b,\ c \text{ nombres réels; } b\neq 0), \tag{6}$$

dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se réduit à celle du signe de la fonction f définie par

$$f(x)=x-(\sin x)^p (\cos x)^q \qquad (p, q \text{ nombres réels}). \tag{7}$$

En effet, l'inégalité (6) pour $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est équivalente à

$$x-(\sin x)^{\frac{a}{b}}\ (\cos x)^{-\frac{c}{b}}<0$$

ou à

$$x-(\sin x)^{\frac{a}{b}}\ (\cos x)^{-\frac{c}{b}}>0$$

suivant que $b>0$ ou $b<0$.

On doit noter que pour $b=0$ l'étude de l'inégalité (6) est bien plus simple (elle se réduit pareillement à l'étude du signe de la fonction

$$1-(\sin x)^p (\cos x)^q;$$

cette étude s'achève assez facilement).

L'énoncé suivant contient nos résultats concernant le signe de la fonction f dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Les nombres x_1 et x_2 qui y figurent dépendent de p et de q.

Proposition 3. 1° *Pour* $p>1$, $q>0$, *on a*

$$f(x)>0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

2° *Il existe une fonction* $\lambda(p)$, *définie, continue et strictement décroissante de la valeur* 0 *jusqu'à la valeur* $-\frac{1}{3}$ *dans l'intervale* $(-\infty, 1)$, *telle que l'on a, pour* $p<1$, $q<\lambda(p)$, *de même que pour* $p=1$, $q<-\frac{1}{3}$,

$$f(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

3° *Pour* $p<1$, $q\geqslant 0$, *on a*

$$f(x)<0 \quad (0<x<x_1), \quad f(x_1)=0, \quad f(x)>0 \quad \left(x_1<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

4° *Pour* $p<1$, $\lambda(p)<q<0$, *on a*

$$f(x)<0\left(0<x<x_1 \text{ ou } x_2<x<\frac{\pi}{2}\right), \quad f(x_1)=f(x_2)=0, \quad f(x)>0 \quad (x_1<x<x_2).$$

5° *Pour* $p<1$, $q=\lambda(p)$, *on a*

$$f(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2} \text{ et } x\neq x_1\right), \quad f(x_1)=0.$$

6° *Pour* $p>1$, $q<0$ *ou pour* $p=1$, $-\frac{1}{3}<q<0$, *on a*

$$f(x)>0 \quad (0<x<x_1), \quad f(x_1)=0, \quad f(x)<0 \quad \left(x_1<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

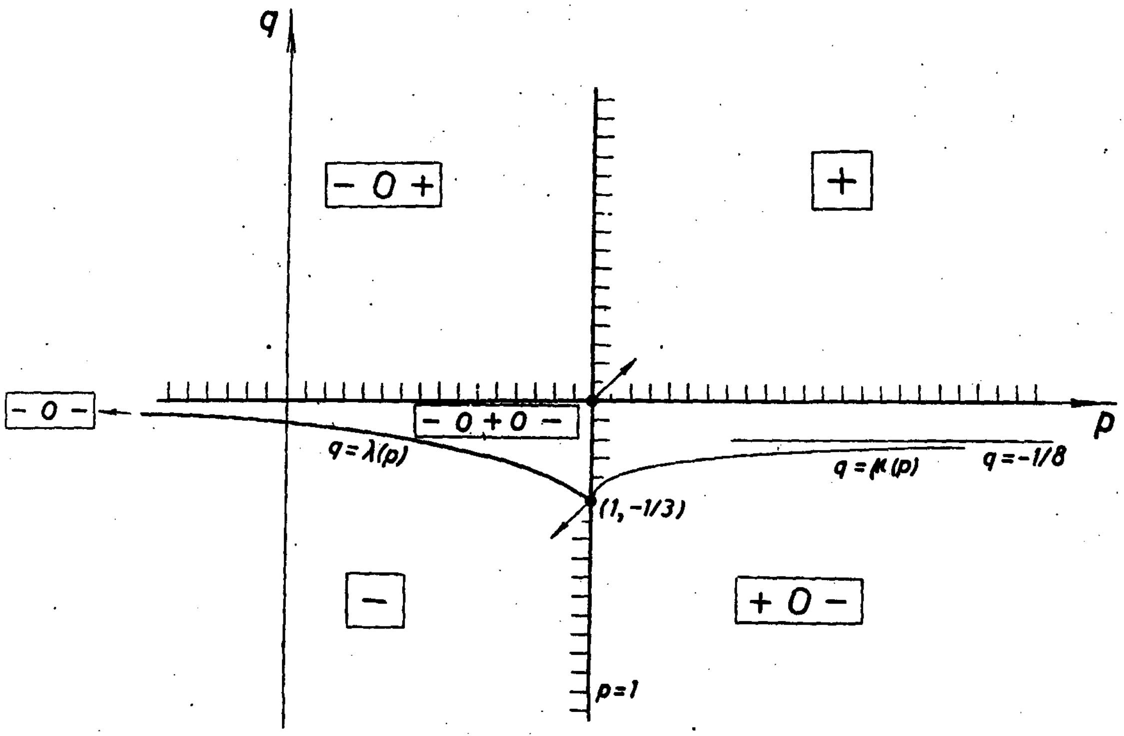

Fig. 3

Cette proposition est rendue visuelle par la figure 3, où sont présentés les domaines du plan *Opq* correspondants aux cas différents que l'on vient de distinguer. Les cas 1°, 2°, 3°, ... sont respectivement désignés par $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{-0+}$, etc. Les hachures marquent l'appartenance des points de la ligne-limite de deux domaines, et les flèches celle de la ligne grasse et de deux points particuliers.

On peut compléter l'assertion 3° par la remarque que, pour $0<p<1$, $q\geq 0$, $p^2+q^2>0$, on a $x_1\in(0,\ 1)$ et les assertions 4° et 5° par la remarque que l'on y a $x_1\in\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$ si $p<0$. En effet, si $p, q>0$, $p^2+q^2>0$, on a $f(x)>>1-1=0\left(1<x<\frac{\pi}{2}\right)$, et lorsque p, $q<0$, on a $f(x)<1-1=0\ (0<x<1)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, pour tout $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ fixé, la fonction $f(x)=x-(\sin x)^p(\cos x)^q$ est strictement croissante par rapport à p et par rapport à q (séparément).

Comme on a, pour $p=1$, $q=0$,

$$f(x)=x-\sin x>0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

on en déduit l'assertion 1°.

D'autre part, d'après le § 1 (l'inégalité (2) avec $a=3$), on conclut que $f(x)<0$ pour $p<1$, $q<-\frac{1}{3}$.

La seconde assertion de la proposition 1 et le fait que l'on a

$$-\frac{1}{3}<q<0\ \Rightarrow\ \left(q=-\frac{1}{a}\ \text{ et }\ a>3\right)$$

entraînent la partie de l'assertion 6° concernant le cas $p=1$, $-\frac{1}{3}<q<0$.

Pour ce qui suit nous avons besoin des deux dérivées premières de la fonction $f(x)$:

$$f'(x)=1-p(\sin x)^{p-1}(\cos x)^{q+1}+q(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1},\tag{8}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=-(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q+2}\,[q(q-1)\,\mathrm{tg}^4 x-(p+q+2pq)\,\mathrm{tg}^2 x+p(p-1)]\\&=-(\sin x)^{p-2}(\cos x)^{q+2}\,[q(q-1)\,t^2-(p+q+2pq)\,t+p(p-1)],\end{aligned}\tag{9}$$

où

$$t=\mathrm{tg}^2 x;\quad x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\ \Leftrightarrow\ t\in(0,\ +\infty).$$

Soit $p=0$, $q>0$. La seconde dérivée, donnée par (9), s'annulle alors une fois au plus dans $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ et l'on a $f''(x)>0$ dans un voisinage droit de $x=0$. Comme l'on a, d'autre part, $f(0)\lessgtr 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, on obtient dans ce cas-là le comportement du signe de $f(x)$ précisé dans 3°.

Soit maintenant $p<1$, $q=0$. Si $0<p<1$, on a, d'après (7), (8) et (9), $f''(x)>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(+0)=-\infty$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$; si $p<0$, on a $f''(x)<0$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $f(+0)=-\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$; en y ajoutant le cas trivial $p=q=0$, on aboutit de nouveau au comportement 3° du signe de $f(x)$.

Soit $p<1$, $q=1$. Si $p<0$, alors, d'après (7), $f(x)\uparrow\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $f(+0)=-\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$; si $0<p<1$, on a, d'après (7), (8) et (9),

$f''(x)>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(+0)=-\infty$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$; dans ces deux cas on obtient, donc, encore une fois le comportement 3°.

Soit $p(p-1)q(q-1)\neq 0$. Alors l'équation

(10) $$q(q-1)t^2-(p+q+2pq)t+p(p-1)=0$$

peut être mise sous la forme suivante

(10') $$t^2-At+B=0,$$

avec

(11) $$A=\frac{p+q+2pq}{q(q-1)}, \quad B=\frac{p(p-1)}{q(q-1)}.$$

Pour que cette équation possède exactement une racine positive, il faut et suffit que $B<0$, ce qui a lieu dans les cas que voici:

$$p\in(0, 1), \quad q\in(-\infty, 0)\cup(1, +\infty); \quad p\in(-\infty, 0)\cup(1, +\infty), \quad q\in(0, 1).$$

Laissant à part les cas déjà étudiés, on peut se borner aux trois cas suivants:

(I) $p\in(0, 1)$, $q\in(1, +\infty)$;

(II) $p\in(-\infty, 0)$, $q\in(0, 1)$;

(III) $p\in(0, 1)$, $q\in\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

Dans le cas (I) $p(p-1)<0$, d'où, d'après (9), la conclusion que l'on a alors $f''(x)>0$ dans un voisinage droit de $x=0$. Comme l'on a également $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $f'(+0)=-\infty$, on a de nouveau établi le comportement 3°. Il en est de même dans le cas (II), puisque l'on a maintenant, d'après (7) et (8), $f'(x)>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $f(+0)=-\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

Laissons de côté le cas (III) et passons à celui où $B>0$. Cette inégalité est remplie das les cas suivants:

$$p\in(0, 1), \quad q\in(0, 1); \quad p, q\in(1, +\infty); \quad p, q\in(-\infty, 0);$$
$$p\in(-\infty, 0), \quad q\in(1, +\infty); \quad p\in(1, +\infty), \quad q\in(-\infty, 0).$$

Tenant compte de ce qu'on a déjà établi, on peut se borner aux cas suivants:

(IV) $p\in(0, 1)$, $q\in(0, 1)$;

(V) $p\in(-\infty, 0)$, $q\in(1, +\infty)$;

(VI) $p\in(-\infty, 0)$, $q\in\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$;

(VII) $p\in(1, +\infty)$, $q\in(-\infty, 0)$.

Dans le cas (IV), on a

$$p(p-1)<0, \quad q(q-1)<0, \quad p+q+2pq>0,$$

d'où, d'après (9), $f''(x)>0 \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. En observant que l'on a $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $f'(0)=-\infty$, on obtient le comportement 3°. Il en est de même sous les conditions (V), la dérivée première étant, d'après (8), positive dans ce cas et puisque l'on a $f(+0)=-\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

Considérons ensuite les cas (III) et (VI). Comme on a, pour le premier d'entre' ux, $p(p-1)<0$ et par conséquent $f''(x)>0$ dans un voisinage droit de $x=0$ $\left(\text{on a déjà établi que } f''(x) \text{ a alors exactement un zéro dans } \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty$, dans ce cas-là ne sont possibles que les comportements du signe de $f(x)$ précisés dans 2°, 4° et 5°. Il en est de même dans le second cas. En effet, on parvient alors à

$$\begin{aligned}-[q(q-1)t^2&-(p+q+2pq)t+p(p-1)]\\ &=-(qt-p)^2+qt^2+(p+q)t+p<0 \qquad (t>0),\end{aligned}$$

et par conséquent à $f''(x)<0 \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. On a aussi $f(+0)=f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty$ d'où notre assertion.

Les mêmes possibilités se présentent si $p=0$, $-\frac{1}{3}<q<0$, cas que nous avons mis à part. En effet, on a alors

$$f(0)=-1,\quad f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty,\quad f''(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour préciser ce qu'on vient d'établir, remarquons que les inégalités $f(x)<0$ et $f(x)>0$ sont respectivement équivalentes aux inégalités

$$q<\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x} \qquad \text{et} \qquad q>\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x},$$

de même que l'égalité $f(x)=0$ est équivalente à celle-ci

$$q=\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x}.$$

Pour $p<1$ la fonction g_p, définie par

$$g_p(x)=\frac{\log\frac{x}{(\sin x)^p}}{\log\cos x} \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right), \tag{12}$$

tend vers $+\infty$ lorsque $x\to+0$ et vers 0 par les valeurs négatives lorsque $x\to\frac{\pi}{2}-0$. Il s'ensuit que $g_p(x)$ atteint son minimum dans l'intervalle $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ce minimum étant négatif, et cela pour tout $p<1$. Ce minimum est l'unique point extrêmal de la courbe situé au dessous de la droite $y=0$, puisque, s'il n'en était pas ainsi, la fonction f aurait, pour certaines valeurs négatives de q, plus de deux zéros dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, contrairement à ce qu'on a déjà établi. On remarque ensuite que pour tout $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixé la valeur de $g_p(x)$ décroît avec la croissance de p. Or, on peut en dire de même, évidemment, pour le minimum en question. En désignant par $\lambda(p)$ la valeur de ce minimum-là, on vient d'établir que la fonction $\lambda(p)$ est négative et strictement décroissante pour $p \in (-\infty, 1)$. Elle est aussi continue, ce qui est évident. Soit $\varepsilon>0$ arbitrairement choisi. Étant donné que

$$\lim_{x \to +0} \frac{\log \frac{x}{\sin x}}{\log \cos x} = -\frac{1}{3},$$

on a, pour un $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixé,

$$\frac{\log \frac{\xi}{\sin \xi}}{\log \cos \xi} < -\frac{1}{3} + \varepsilon.$$

Pour le même ξ l'on a

$$\lim_{p \to 1-0} \frac{\log \frac{\xi}{(\sin \xi)^p}}{\log \cos \xi} = \frac{\log \frac{\xi}{\sin \xi}}{\log \xi},$$

de manière qu'on aura, pour un $p<1$ et suffisamment proche de 1,

$$\lambda(p) < \frac{\log \frac{\xi}{(\sin \xi)^p}}{\log \cos \xi} < -\frac{1}{3} + 2\varepsilon;$$

donc,

$$\overline{\lim_{p \to 1-0}}\, \lambda(p) \leq -\frac{1}{3}.$$

D'après le résultat déjà obtenu relatif au cas $p \leq 1$, $q \leq -\frac{1}{3}$, on a, d'autre part,

$$\lambda(p) > -\frac{1}{3} \qquad (p<1),$$

de sorte que l'on a établi l'égalité suivante

$$\lim_{p \to 1-0} \lambda(p) = -\frac{1}{3}.$$

On peut écrire

(13) $$g_p(x) = \alpha(x) - p\beta(x), \quad \alpha(x) = \frac{\log x}{\log \cos x}, \quad \beta(x) = \frac{\log \sin x}{\log \cos x}.$$

L'abscisse x_p du minimum négatif de $g_p(x)$ dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ satisfait à l'inégalité suivante

$$g_p'(x_p) = \alpha'(x_p) - p\,\beta'(x_p) = 0\,,$$

c'est-à-dire à l'égalité $\left(\text{on a } \beta'(x) \neq 0 \text{ pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$(14) \qquad p = \frac{\alpha'(x_p)}{\beta'(x_p)} = \frac{\frac{1}{x_p}\log\cos x_p + \operatorname{tg} x_p \log x_p}{\operatorname{cotg} x_p \log\cos x_p + \operatorname{tg} x_p \log\sin x_p} = h(x_p)\,,$$

où

$$(15) \qquad h(x) = \frac{\frac{1}{x}\log\cos x + \operatorname{tg} x \log x}{\operatorname{cotg} x \log\cos x + \operatorname{tg} x \log\sin x} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

La fonction h, définie par (15), est continue pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et l'on a $h(+0) = 1$, $h\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\infty$. On en conclut que

$$\lim_{p \to -\infty} x_p = \frac{\pi}{2}\,,$$

d'où, d'après (13) et (14),

$$\lim_{p \to -\infty} \lambda(p) = \lim_{x_p \to \frac{\pi}{2} - 0} \left[\alpha(x_p) - \frac{\alpha'(x_p)}{\beta'(x_p)}\,\beta(x_p)\right]$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\alpha(x)\,\beta'(x) - \alpha'(x)\,\beta(x)}{\beta'(x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{(\operatorname{cotg} x \log\cos x + \operatorname{tg} x \log\sin x)\log x - \left(\frac{1}{x}\log\cos x + \operatorname{tg} x \log x\right)\log\sin x}{\cancel{\left(\frac{1}{x}\log\cos x + \operatorname{tg}\log x\right)}\log\cos x}$$

$$= 0\,.$$

La combinaison de tous les résultats concernant les cas

$$p < 1,\ q < -\frac{1}{3};\quad \text{(III)};\quad \text{(VI)};\quad p = 0,\ -\frac{1}{3} < q < 0$$

que nous venons d'obtenir conduit à toutes les assertions 2°, 4° et 5°.

Considérons enfin le cas (VII). Pour toutes les valeurs de p et de q il reste en vigueur ce qu'on a dit à la page 29 sur la coïncidence des signes de $f(x)$ et de $q - g_p(x)$, la fonction g_p étant définie par (12). Pour $p > 1$, l'on a

$$g_p(+0) = -\infty\,, \quad g_p\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0\,.$$

Nous allons prouver que $g_p(x)$, pour $p > 1$, croît strictement dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; de plus, que l'on a, d'après (13),

$$g_p'(x) = \alpha'(x) - p\,\beta'(x) > 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2};\ p > 1\right).$$

cotg x log cos x + tg x log sin x

Or, on a déjà démontré que la fonction f ne peut avoir plus d'un zéro dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si $p=1$, $q<0$. En outre, on a

$$g_1(x)=\frac{\log \frac{x}{\sin x}}{\log \cos x}<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right); \quad g_1\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=0.$$

On en déduit que

$$g_1'(x) \geqslant 0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Partant de ce résultat et d'après (13) et le fait que l'on a

$$\beta'(x)<0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

pour $p>1$, l'on arrive à

$$g_p'(x)=\alpha'(x)-p\,\beta'(x)>\alpha'(x)-\beta'(x)=g_1'(x) \geqslant 0 \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Nous avons, donc, démontré que $g_p(x)$ croît strictement de $-\infty$ jusqu'à 0 lorsque x varie de 0 jusqu'a $\frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que le signe de $f(x)$ a le comportement 6° dans ce dernier cas considéré.

2.1. Observons que la discussion exposée, complétée par quelques considérations et calculs simples, fournit des données assez précises sur les représentations graphiques de la fonction f dans tous les cas à distinguer.

6°

On a, par exemple, pour le cas [redacted] (où $p>1$, $q<0$; ce cas est le plus intéressant) les résultats que voici:

(16) $$f(0)=0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\infty, \quad f'(+0)=1;$$

$f''(x)$ est négatif dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si

(17) $$q<\mu(p) \quad (p>1);$$

dans le cas où

(18) $$q=\mu(p) \quad (p>1)$$

$f''(x)$ est aussi négatif dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sauf pour une seule valeur de x qui l'annule; pour

(19) $$\mu(p)<q<0 \quad (p>1)$$

$f''(x)$ a deux zéros dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entre lesquels il est positif; ailleurs il est de nouveau négatif; la fonction μ est définie par

$$\mu(p)=\frac{1}{\frac{1}{p}-4-4\sqrt{1-\frac{1}{p}}} \quad (p>1)$$

et elle croît strictement de $-\frac{1}{3}$ *à* $-\frac{1}{8}$ *lorsque* p *varie dans l'intervalle* $(1, +\infty)$; *dans les cas* (17) *et* (18) $f(x)$ *a un seul point extrêmal dans* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *et dans le cas* (19) $f(x)$ *peut en avoir un ou trois.*

Démonstration. On peut vérifier (16) immédiatement.

Dans le cas considéré on a $q(q-1)>0$, $B>0$ (*voir* (11)), de sorte que l'équation (10) est alors équivalente à (10′) et elle peut ne pas avoir de racines réelles ou en avoir deux de même signe (différents ou non) suivant que son discriminant

$$\Delta = (1+8p)q^2 - 2p(1-4p)q + p^2 \tag{20}$$

est non négatif ou négatif. Or, on a maintenant $1+8p>0$ et c'est pourquoi l'on aura, d'après (20),

$$(\alpha)\quad \Delta>0; \qquad (\beta)\quad \Delta=0; \qquad (\gamma)\quad \Delta<0$$

suivant que l'on a respectivement:

(α) $\mu_2(p)<q<\mu_1(p)$; (β) $q=\mu_1(p)$ ou $q=\mu_2(p)$; (γ) $q<\mu_2(p)$ ou $q>\mu_1(p)$,

où $\mu_1(p)$ et $\mu_2(p)$ désignent les zéros du trinôme du second degré en q donnés par

$$\mu_{1,2}(p) = p\,\frac{1-4p\pm 4\sqrt{p(p-1)}}{1+8p} \qquad (p>1). \tag{21}$$

En effet, pour $p>1$, l'on a

$$p(p-1)>0, \quad 1-4p<0, \quad p^2>0,$$

d'où la conclusion, d'après (20) et (21), que ces racines sont réelles, différentes et négatives, et l'on a, évidemment, $\mu_2(p)<\mu_1(p)$.

D'autre part, le signe commun des racines de l'équation (10), en supposant leur réalité, est, d'après (10′), positif ou négatif suivant qui l'on a $A>0$ ou $A<0$ (si $A=0$, alors (10) ne peut pas avoir de racines réelles), c'est-à-dire, d'après (11), suivant que l'on a

$$q>\mu_3(p) \quad \text{ou} \quad q<\mu_3(p),$$

avec

$$\mu_3(p) = -\frac{p}{1+2p} \qquad (p>1).$$

Or, on a, pour $p>1$,

$$\frac{1}{\mu_2(p)} - \frac{1}{\mu_3(p)} = \left(\frac{1}{p} - 4 + 4\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right) - \left(-\frac{1}{p} - 2\right)$$

$$= 2\left(t + 2\sqrt{1-t}\right) = 2\varphi(t) \qquad \left(t = \frac{1}{p}\right);$$

$$\varphi(1)=0, \quad \varphi'(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-t}}<0 \qquad (0<t<1)$$

$$\Rightarrow \varphi(t)>0 \qquad (0<t<1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_2(p)}-\frac{1}{\mu_3(p)}>0 \qquad (p>1).$$

Donc, les fonctions $\mu_2(p)$ et $\mu_3(p)$ étant négatives pour $p>1$, on a

(22) $$\mu_2(p)<\mu_3(p) \qquad (p>1).$$

On conclut immédiatement que la fonction

$$\mu_1(p)=\frac{1}{\frac{1}{p}-4-4\sqrt{1-\frac{1}{p}}}$$

croît strictement de $-\frac{1}{3}$ à $-\frac{1}{8}$ lorsque q varie dans l'intervalle $(1, +\infty)$ et que $\mu_3(p)$ décroît strictement en même temps, et cela partant de la valeur $-\frac{1}{3}$. On a, par conséquent,

(23) $$\mu_3(p)<\mu_1(p) \qquad (p>1).$$

Si l'on pose $\mu(p)=\mu_1(p)$, alors les inégalités (22) et (23), de même que les rôles précédemment établis des fonctions $\mu_r(p)$ $(r=1, 2, 3)$, conduisent à la partie de notre énoncé concernant la seconde dérivée de $f(x)$.

Il est clair que, dans le cas considéré, $f(x)$ a toujours un maximum au moins. On conclut sans difficulté, d'après les résultats déjà obtenus, que cette fonction ne peut pas avoir d'autres points extrêmaux si $q<\mu(p)$ et que, pour $\mu(p)<q<0$, elle peut ou n'avoir que le maximum mentionné, ou bien avoir encore un minimum et un maximum. Toutes les deux possibilités se réalisent effectivement, la première par raison de continuité et la seconde d'après quelques essais numériques, effectués sur la machine électronique par S. Jovanović.

Notre énoncé est ainsi complètement démontré.

Observons que S. Jovanović a fait un nombre considérable de calculs utiles rélatifs au cas $p>1$, $q<0$, au moyen desquels il a obtenu une image plus précise de l'allure de la courbe $y=f(x)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. En particulier, il a déterminé, approximativement, le domaine du plan $0\,pq$ où $f(x)$ a trois points extrêmaux. Pour plus de détails, *voir* l'article suivant dans ces *Publications*.

2.2. Aussi pourait-on se proposer de déterminer de plus près la fonction λ.