J. KARAMATA
Assistant à l'Université de Belgrade.

ASYMPTOTES DES COURBES PLANES DÉFINIES COMME ENVELOPPES D'UN SYSTÈME DE DROITES

Toute courbe plane C peut être définie comme enveloppe d'un système de droites de la forme :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p(\varphi) \tag{I}$$

$p(\varphi)$ étant une fonction de φ, que nous supposerons continue et possédant une dérivée première continue.

Les coordonnées d'un point de C ayant la forme :

$$x = p(\varphi) \cos \varphi - p'(\varphi) \sin \varphi \,; \; y = p(\varphi) \sin \varphi + p'(\varphi) \cos \varphi \tag{C}$$

pour qu'il y ait une asymptote il faut que $p(\varphi)$ ou $p'(\varphi)$ devienne infini pour une valeur au moins de φ.

Soit :

$$X \cos \varphi_0 + Y \sin \varphi_0 = p_0 \tag{D}$$

l'équation d'une droite D, elle sera une asymptote si la différence :

$$Y - y = \frac{p_0 - p(\varphi) \cos (\varphi - \varphi_0) + p'(\varphi) \sin (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi_0} \tag{II}$$

entre son ordonnée et l'ordonnée de la courbe C tend vers zéro lorsque $\varphi \to \varphi_0$ (l'une des deux fonctions $p(\varphi)$ ou $p'(\varphi)$ devant tendre vers l'infini lorsque $\varphi \to \varphi_0$).

De (II) il s'ensuit que D sera une asymptote si :

$$p(\varphi) \to p_0 = p(\varphi_0) \tag{III}$$

et :

$$(\varphi - \varphi_0) p'(\varphi) \to 0 \tag{IV}$$

$p'(\varphi)$ devenant infini, lorsque φ tend φ_0.

Inversement, les conditions (III) et (IV) doivent toujours être remplies pour que C puisse avoir des asymptotes. Car, pour que $Y - y$ tende vers zéro il faut que :

$$p(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_0) - p'(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0) = \psi(\varphi)$$

tende vers une limite déterminée lorsque $\varphi \to \varphi_0$. Cette équation nous donnant :

$$p(\varphi) = -\sin(\varphi - \varphi_0)\int_0^{\varphi} \frac{\psi(\xi)d\xi}{\sin^2(\xi - \varphi_0)}$$

il s'ensuit, d'après la règle de l'Hôpital, que $p(\varphi)$ doit de même tendre vers une limite déterminée p_0 lorsque $\varphi \to \varphi_0$.

Par suite, pour que $Y - y$ tende vers zéro il faut que les conditions (III) et (IV) soient remplies, ce qui montre qu'elles sont nécessaires et suffisantes pour que la courbe C ait une asymptote D.

$p(\varphi_0)$ doit donc rester fini et p' doit devenir infini pour $\varphi = \varphi_0$ de manière que (IV) soit remplie. Mais $p'(\varphi)$ peut devenir infini de deux manières : ou bien $p'(\varphi)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) ou bien $p'(\varphi)$ oscille entre deux limites différentes dont l'une est infinie.

Dans ce second cas on peut choisir une suite de valeurs φ_ν de φ, tendant vers φ_0 de manière que $p'(\varphi)$ tende vers un nombre quelconque α de son intervalle d'oscillation. De (C) il s'ensuit que :

$$x_\nu = p(\varphi_\nu)\cos\varphi_\nu - p'(\varphi_\nu)\sin\varphi_\nu \to p(\varphi_0)\cos\varphi_0 - \alpha\sin\varphi_0$$

et :

$$y_\nu = p(\varphi_\nu)\sin\varphi_\nu + p'(\varphi_\nu)\cos\varphi_\nu \to p(\varphi_0)\sin\varphi_0 + \alpha\cos\varphi_0$$

lorsque :

$$\varphi_\nu \to \varphi_0,$$

ce qui montre que la courbe C, en prenant les oscillations de plus en plus grandes, vient en quelque sorte s'applatir contre un segment infini de la droite D, défini par l'intervalle d'oscillation de $p'(\varphi)$ lorsque $\varphi \to \varphi_0$. Dans ce cas, donc, la droite D n'est pas une véritable asymptote (au sens strict du mot).

Il ne reste donc que le cas ou $p'(\varphi)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et avec cette condition on peut s'en passer de la condition (IV), comme il va résulter du :

Lemme. — *Soit $f(x)$ une fonction possédant une dérivée première et telle que :*

$$f(x) \to a \quad \textit{lorsque } x \to 0$$
$$f'(x) > 0 \quad \textit{pour tout } x > 0,$$

alors :

$$xf'(x) \to 0 \quad \textit{lorsque } x \to 0.$$

Pour le démontrer supposons que $xf'(x)$ ne tende pas vers zéro lorsque $x \to 0$, de la seconde hypothèse il résultera l'existence d'un nombre positif m tel que $xf'(x) > m$ pour tout $x \geq 0$ De là en divisant par x et intégrant entre x et α on tire :

$$f(x) > m\lg(x) - m\lg(\alpha) + f(\alpha),$$

α étant un nombre positif. D'où il résulterait en faisant tendre x vers zéro, que $f(x) \to -\infty$, ce qui contredit la première hypothèse. Il faut donc que $xf'(x) \to 0$,

Dans le cas considéré plus haut, où :

$$p(\varphi) \to p(\varphi_0) \quad \text{et} \quad p'(\varphi) \to +\infty \ (\text{ou } -\infty) \text{ lorsque } \varphi \to \varphi_0,$$

on voit que les deux hypothèses, du lemme cité, sont remplies, il s'ensuit que :

$$(\varphi - \varphi_0)p'(\varphi) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \varphi \to \varphi_0,$$

c'est-à-dire que ces hypothèses entraînent la condition (IV).

Nous avons donc démontré le :

Théorème. — *Pour qu'une courbe C définie comme enveloppe du système de droites (I) ait une asymptote proprement dite, pour $\varphi = \varphi_0$, il faut et il suffit que :*

$$p(\varphi) \to p(\varphi_0) \quad \textit{et} \quad p'(\varphi) \to \pm\infty \quad \textit{lorsque} \quad \varphi \to \varphi_0.$$

Ce résultat, qui est intuitif géométriquement, présente néanmoins, comme nous le voyons, quelque difficulté pour être démontré analytiquement d'une manière rigoureuse.

LAVAL. — IMPRIMERIE BARNÉOUD.