J. KARAMATA
de l'Université de Beograd

DIRECTIONS DES TANGENTES EN RELATION AVEC L'AIRE DE SURFACE

En rattachant cet exposé à celui de M. M. Petrovitch [1], nous allons donner ici encore une propriété extrémale des arcs de courbe qui ne possèdent pas de tangentes parallèles à certaines directions, et qui se rapporte à l'aire de surface comprise entre l'arc et sa corde.

Soit donné un arc de courbe AB et soit M un point de cet arc; menons par un point O du plan les parallèles à toutes les cordes de l'arc AB issues du point M. Lorsque le point M décrit l'arc AB ces parallèles aux cordes

[1] « *Directions des tangentes en relation avec la longueur de l'arc* » communiqué à ce même Congrès.

balayent un certain angle α. Si $\alpha < \pi$ l'angle $\theta = \pi - \alpha$ sera appelé l'*angle lacunaire des tangentes* ou simplement *angle lacunaire*.

Supposons donc que l'arc AB possède un angle lacunaire θ et menons par chacun des points extrêmes A et B deux droites respectivement parallèles aux côtés de l'angle α. En désignant par O_1 et O_2 leurs points d'intersection, on obtient un parallélogramme O_1AO_2B, dont l'angle AO_1B est égal à θ et dont la diagonale opposée est la corde de l'arc AB.

La valeur extrémale de l'aire de surface située entre la corde et l'arc s'obtient des considérations suivantes :

Lemme. — *Tous les points de l'arc AB sont situés à l'intérieur du parallélogramme O_1AO_2B.*

Ce lemme se démontre facilement en remarquant que l'existence d'un point de l'arc extérieur au parallélogramme entraîne l'existence d'une corde dont la direction tomberait à l'intérieur de l'angle lacunaire et qui contredit l'hypothèse.

Construisons à présent le symétrique gauche de l'arc AB par rapport à la corde AB, de façon que le point O_1 soit le symétrique du point O_2. Toute droite parallèle à O_1O_2 ne rencontrant l'arc AB qu'en un point (puisque dans le cas contraire il y aurait une corde dont la direction tomberait dans l'angle lacunaire) cet arc et son symétrique ne peuvent se couper que sur la corde AB. Donc, la surface comprise entre l'arc AB et sa corde et celle comprise entre son symétrique et sa corde ne s'empiétant pas, l'aire de surface comprise entre l'arc et son symétrique sera le double de celle comprise entre l'arc AB et sa corde. D'autre part, d'après le lemme, la surface comprise entre l'arc AB et son symétrique ne peut surpasser celle du parallélogramme O_1AO_2B, donc la surface comprise entre l'arc AB et sa corde est au plus égale à celle du triangle O_1AB.

En désignant donc par a l'aire de surface comprise entre l'arc AB et sa corde, par e la longueur de la corde AB et du fait que parmi tous les triangles à base e et à angle opposé θ c'est le triangle isocèle qui a la plus grande surface, soit $(e/2)^2 \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$, il s'ensuit que

$$a \leqq (e/2)^2 \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}.$$

Ceci donne le résultat suivant :

L'aire de la surface comprise entre la corde de longueur e et l'arc de courbe continue qui possède un angle lacunaire θ ne peut surpasser la quantité :

$$(e/2)^2 \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}.$$

Ajoutons qu'il existe effectivement un arc de courbe qui approche la limite obtenue d'aussi près qu'on le désire.

Remarquons, en terminant, que dans le précédent exposé nous n'avons pas dû supposer l'existence de la tangente en aucun point de l'arc de courbe AB. En d'autres termes, si l'on désigne par $y = f(x)$ l'équation

de l'arc de courbe AB, prise dans le système des coordonnées AO_1B, $f(x)$ n'a pas besoin d'avoir de dérivés. Mais, d'autrs part, du fait que l'arc AB possède l'angle lacunaire θ, il s'ensuit que $f(x)$ ne peut croître lorsque x croît de O_1 à A [1], donc, d'après un fait connu, $f(x)$ doit avoir une dérivée presque partout (c'est-à-dire à un ensemble de mesure nulle près). Il en résulte que :

Un arc de courbe continu sans tangente ne peut avoir un angle lacunaire, ou en d'autres termes : il ne peut exister de fonctions continues sans dérivée dont les coefficients angulaires des cordes oscillent entre deux limites finies pour toutes les valeurs de x.

Beograd, le 10. VI. 1931.

---

[1] Car, dans le cas contraire, il y aurait une corde dont la direction tomberait dans l'angle lacunaire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Paris. — Soc. Gén. d'Imp. et d'Ed., 17, rue Cassette.