# О ИНВЕРСНИМ СТАВОВИМА ЗБИРЉИВОСТИ БЕСКРАЈНИХ НИЗОВА.

од

ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

# О ИНВЕРСНИМ СТАВОВИМА ЗБИРЉИВОСТИ БЕСКРАЈНИХ НИЗОВА.

(Први део)

Од ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 1. априла 1929).

Нека је $V_n(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ или у кратко $V_n\{a_\nu\}$ једна комбинација елемената $a_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, датога низа $\{a_\nu\}$, (или реда $a_n = \sum\limits_{0}^{n} u_\nu$); за низ $\{a_\nu\}$ (или ред $\sum u_\nu$) каже се да је *збирљив на начин* $V$, или укратко, да је *збирљив* - $V$ *са границом* (или сумом) $a$ ако

$$\lim_{n=\infty} V_n(a_0, a_1, a_2, \ldots) = a.$$

У овом изразу $n$ може тежити бесконачности континуирано или дисконтинуирано, узимајући на пр. само целе позитивне бројеве, што зависи од природе одговарајућег начина збирљивости.

Да је један низ $\{a_\nu\}$ (или ред $\sum u_\nu$) збирљив на један начин $V$, са границом (или сумом) $a$, означићемо још укратко изразом

$$V - \lim a_\nu = a \quad (\text{или } V - \sum u_\nu = a),$$

где нам дакле слово $V$ увек означава специални начин на који се збирљивост односи.

Најпростији начин збирљивости дао је Cesàro формирањем аритметичке средине из првих $n$ елемената; за низ $\{a_\nu\}$ каже се дакле да је *збирљив* - $C$ (Cesàro) са границом $a$, ако

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty \text{ [1]}.$$

На сличан се начин дефинишу и Cesàro'ви начини збирљивости вишег реда, *збирљивости* - $C_k$, формирањем $k$ - тространог збира

$$S_n^{(k)} = \sum_{\nu_k=0}^{n} \sum_{\nu_{k-1}=0}^{\nu_k} \dots \sum_{\nu_2=0}^{\nu_k} \sum_{\nu_1=0}^{\nu_2} a_{\nu_1}$$

и дељењем са $\frac{1}{k!}n^k$. Иста се збирљивост може још дефинисати и на следећи начин: ставимо

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu, \quad a_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu$$

и

$$\frac{f(z)}{(1-z)^{1+k}} = \sum_0^\infty S_\nu^{(k)} z^\nu$$

$$\frac{1}{(1-z)^{1+k}} = \sum_0^\infty A_\nu^{(k)} z^\nu,$$

тада је низ $\{a_\nu\}$ збирљив - $C_k$ са границом $a$ ако

$$\frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}} \to a; \quad \text{кад} \quad n \to \infty;$$

што је еквивалентно изразу

$$\Gamma(k+1)\frac{S_n^{(k)}}{n^k} \to a$$

јер је

$$A_n^{(k)} \sim \frac{n^k}{\Gamma(k+1)}$$

Из овакве дефиниције следи, да $k$ може узети не само целе позитивне бројеве, него и све реалне и позитивне вредности, а сем тога видимо да је збирљивост - $C_1$ идентична са збирљивости - $C$, а збирљивост - $C_0$ са конвергенцијом у обичном смислу.

Уз ове начине збирљивости наведимо и Hölder'ове начине, *збирљивост* - $H_k$, који се добијају итерирањем збирљивости - $C$,

[1]) Под знаком $s_n \to a$ подразумева се да низ $[s_\nu]$ тежи коначној и одређеној граници $a$ кад $n$ тежи бескрајности.



тако, да је збирљивост - $H_1$ исто што и збирљивост - $C$, а кад ставимо

$$s_n^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(k-1)} \quad \text{са} \quad s_n^{(1)} = s_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

тада је низ $\{a_\nu\}$ збирљив - $H_k$, ако

$$s_n^{(k)} \to a, \qquad \text{кад } n \to \infty.$$

Познато је, да су начини збирљивости $H_k$ и $C_k$ идентични т. ј. да су сви низови збирљиви - $H_k$, збирљиви - $C_k$, и обратно [2]).

Cesàro'ви и Hölder'ови начини збирљивости су сличне природе; сасвим је друге природе Abel'ов начин збирљивости дефинисан овако:

За низ $a_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu$ каже се да је *збирљив* - $A$ (Abel) са границом $a$, ако

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu r^\nu \to a \quad \text{кад } r \to 1.$$

Проучавани су још и многи други начини збирљивости, но ми их овде нећемо навести, пошто ћемо се у овој расправи бавити искључиво горе поменутим начинима.

Сви ови начини збирљивости имају ту особину, да из конвергенције једног реда следи у исто време и његова збирљивост са истом сумом, т. ј. из

$$\lim_{n=\infty} a_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = a$$

следи

$$C_k - \lim a_n = H_k - \lim a_n = A - \lim a_n = a, \quad k \geqq 0,$$

[2]) *K. Knopp*, Grenzwerte von Reihen bei Annäherung an die Konvergenzgrenze. Diss. Berlin 1907.

*W. Schnee*, Die Identität der Hölderischen und Cesàroschen Grenzwerte, Math. Ann. 67. (1909) s. 110—125.

а задња једначина нам изражава познати Abel'ов став [3]).

У осталом, у погледу збирљивости, само се такви начини и могу узимати у обзир, аназваћемо их *регуларним начинима збирљивости*, т. ј. један је начин збирљивости регуларан ако су сви конвергентни редови збирљиви на тај начин са истом сумом.

Обратно, ако је један ред збирљив на један начин $V$, он у општем случају не мора конвергирати, а ставове који нам одређују услове које мора задовољавати један произвољан низ да би из збирљивости - $V$ могли закључити да он тежи једној одређеној граници, називамо *инверсним ставовима збирљивости* или у кратко *ставовима* $V—K$ (т. ј ставови из којих се из збирљивости - $V$ једнога реда може закључити конвергенција дотичног реда).

Како се обична конвергенција једнога реда може сматрати као један специалан начин збирљивости (на пр. збирљивост -$C_0$) то можемо сматрати ставове $V—K$ као један специалан случај ставова, који нам дају услове што их мора задовољавати један низ да би из збирљивости - $V'$ следила његова збирљивост - $V''$; такве ставове називамо укратко *ставовима* $V'—V''$.

Н. пр. став $C_k — H_k$ је идентичан ставу $H_k — C_k$ и гласи:

***Cesàro'ови и Hölder'ови начини збирљивости истога реда су идентични.***

Исто су тако ставови $C_k — C_{k+h}$ и $C_k — A$ идентични и гласе:

***Ако је један низ збирљив*** ***-$C_k$ тада је он увек збирљив*** $C_{k+h}$ , $h \geqslant 0$ и:

***Ако је један низ збирљив*** ***- $C_k$ ($k \geqslant 0$), тада је он увек збирљив - $A$.***

Ставови $V'— V''$ и $V''— V'$ су дакле они ставови који у извесном смислу упоређују два начина збирљивости т. ј. начине $V'$ и $V''$; да би међутим то упоређивање могли прецизније изразити увешћемо следеће називе и ознаке:

Скуп ових низова који су збирљиви на један дати начин

[3]) *N. H. Abel,* Recherches sur la Série $1 - \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1} x^2 - + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$, J. f. Math. 1 (1826) p. 311—339; Werke I, p. 219-250.



$V$, назваћемо *област збирљивости* тог начина и означићемо га са $O_V$.

Област збирљивости једног начина мери у неку руку, генералност тога начина збирљивости, јер у колико је та област већа, у толико је дотични начин збирљивости генералнији.

Посматрајмо сад два начина збирљивости $V'$ и $V''$; ако су они идентични (т. ј. ако су сви низови који су збирљиви - $V'$ у исто време збирљиви - $V''$ и обратно), тада су њихове области збирљивости идентичне т. ј. $O_{V'} = O_{V''}$, а у томе ћемо случају ставити $V' = V''$.

Ако су међутим начини збирљивости $V'$ и $V''$ такви, да су сви низови који су збирљиви - $V'$ у исто време збирљиви - $V''$ али не обратно (т. ј. да постоји увек један низ који је збирљив - $V''$ а који није збирљив - $V'$), тада област збирљивости начина $V'$ припада области збирљивости начина $V''$, $O_{V'} \subset O_{V''}$, (збирљивост $V''$ је јача од збирљивости $V'$), а у томе ћемо случају ставити

$$V' \subset V''.$$

Из овога видимо већ да се горе наведени ставови $H_k — C_k$, $C_k — C_{k+h}$, $C_k — A$ могу укратко написати у облику

$$H_k = C_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$C_k \subset C_{k+h}, \quad h > 0$$
$$C_k \subset A, \qquad k \geqslant 0.$$

Нека су даље $V'$ и $V''$ два произвољна начина збирљивости, тада област збирљивости једнога начина, у општем случају не припада области збирљивости другог начина, јер ће обично постојати један низ, збирљив - $V'$, а који није збирљив - $V''$, и један други низ збирљив - $V''$ а који није збирљив - $V'$. У општем случају дакле области збирљивости начина $V'$ и $V''$ задиру једна у другу, без да је једна у другој садржана, т. ј. $O_{V'}$ задире $O_{V''}$, а тада ћемо ставити

$$V' \text{ задире } V''.$$

Такав нам пример пружају Borel-ов начин збирљивости дефинисан изразом

$$B - \lim a_n = \lim_{r=\infty} e^{-r} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{r^\nu}{\nu!}$$

и начин збирљивости - $C_k$ (или $A$); наиме у томе случају имамо:

$$C_k \text{ задире } B \text{ (или } A \text{ задире } B).$$

Према овим ознакама и према раније дефинисаним регуларним начинима збирљивости - $V$ сматрајући при томе конвергенцију као један специалан начин збирљивости (збирљивост - $K$), ми можемо ставити

$$K \subset V$$

т. ј да је скуп свих конвергентних редова садржан у области збирљивости једног регуларног начина збирљивости.

Сматрајући даље обичну конвергенцију као један специалан начин збирљивости, видимо да ***инверсним ставовима збирљивости***, можемо сматрати све оне ставове $V'' - V'$ код којих $V' \subset V''$, другим речима ако имамо два начина збирљивости $V'$ и $V''$, таква да $V' \subset V''$ тада можемо назвати ***инверсним ставовима збирљивости*** ставове који нам одређују, извесним условима, скуп оних низова који, ако су збирљиви - $V''$, морају у исто време бити збирљиви и на начин $V'$. Тако се на пр. сви они ставови који нам дају услове да се из збирљивости - $A$ једнога низа може закључити његова збирљивост - $C_k$ $(k \geqslant 0)$ или да из збирљивости - $C_{k+h}$, $h > o$, следи збирљивост - $C_k$, називају инверсним ставовима збирљивости.

У овој ћемо расправи навести најпре неколико познатих инверсних ставова $C-K$ и $A-K$ и показаћемо, како се ти ставови могу добити из инверсних ставова $C_2-C_1$ и $A-C$. При томе ћемо извести неколико ставова који ове обухватају, добијајући у исто време ако не директне, а оно бар простије доказе дотичних ставова.

У даљем ћемо излагању од сада увек претпостављати да су елементи низова сви реални бројеви, а лако је увидети да већина ставова о којима ће бити реч важе и за низове чији су елементи произвољни комплексни бројеви, треба их само применити на реални и имагинарни део елемената дотичних низова.

Још из једне расправе L. Kronecker'a [4]) добијамо један став $C-K$, који гласи:

[4]) *L. Kronecker* Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes, Paris C. R. 103 (1876) p. 980—987.



*Да би ред* $a_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu$, *који је збирљив* - $C$, *био конвергентан, потребно је и довољно да*

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty . \qquad (1)$$

(Овај резултат, у осталом, следи директно из једначине

$$a_n - \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} \nu u_\nu .)$$

Одакле је очигледно да из збирљивости - $C$ и услова

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right) ^{5)} \qquad (2)$$

следи конвергенција реда $\sum u_\nu$.

Hardy [6]) је међутим показао, да се услов (2) може заменити општијим условом, и то

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3)$$

а затим је Landau [7]) показао, да је довољно да низ $\{ n u_n \}$ буде ограничен само са једне стране, т. ј. довољно је да постоји такав један коначан и позитиван број $M$ да буде

$$n u_n \geqslant - M \text{ (или } n u_n \leqslant M) \text{ за све } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (4)$$

па да из збирљивости -$C$ реда $\sum u_\nu$ следи његова конвергенција.

Овим ставовима $C-K$ постоје потпуно аналогни ставови $A-K$ од којих су прва два Tauber'ова [8]) става и гласе:

[5]) Знак $a_n = o(\lambda_n)$ значи да $\frac{a_n}{\lambda_n} \to 0$ кад $n \to \infty$, а знак $a_n = O(\lambda_n)$ значи да $\left|\frac{a_n}{\lambda_n}\right|$ остаје коначно за све $n = 1, 2, 3, \ldots$

[6]) *G. H. Hardy*, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proc. London Math. Soc. (2.) 8. (1910.) p. 301—320.

[7]) *E. Landau*, Über die Bedeutung einiger neueren Grenzwertsätze der Herrn Hardy und Axer, Prace mat. fis 21. (1910). p. 97—177.

[8]) *A. Tauber*, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatsh. Math. Phys. 8. (1897) p. 273—277.

*Ако је ред* $\sum u_\nu$ *збирљив - A и ако*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to o \quad \textit{кад} \; n \to \infty \,, \tag{1}$$

*тада је он конвергентан*

и: *Ако је ред* $\sum u_\nu$ *збирљив - A и ако је*

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

*тада је он конвергентан.*

Оба ова става, као, што је Tauber показао, могу се један из другог извести.

Много доцније је показао Littlewood [9]), да се услов (2) може заменити са општијим, наиме са

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

а затим су Hardy и Littlewood [10]) показали, да се шта више тај услов може заменити са још општијим и то:

$$n u_n \geqslant -M \quad (\text{или } n u_n \leqslant M) \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Поред ових ставова $A—K$, и њима одговарајућих ставова $C—K$ [11]) постоје још и многи други, који се у главноме налазе у цитираним расправама г. г. Hardy'а и Littlewood'а као и један став г. E. Landau'а [12]) чије је потпуно уопштење дао г. R. Schmidt, [13]) а о којима ћемо у другој расправи опширније говорити.

Посматрајмо још изближе услове горе споменутих ставова. Видимо најпре да је услов (2) садржан у условима (1) и (4) а да је услов (3) садржан у услову (4). Међутим услови (1) и (4) нису један у другоме садржани; то видимо већ отуда што сви конвергентни редови задовољавају услов (1), а не задовољавају услов (4), а обратно услов (1) није увек задовољен кад је $n u_n \geqslant -M$.

Услови (1) и (4) задиру дакле један у други без да су један у другоме садржани, они се у неку руку међусобно допуњују.

Доцније ћемо извести један нов услов који садржи оба ова услова [дакле и услове (2) и (3)] који их према томе спаја у један једини услов.

У ту сврху уведимо најпре следећи нов појам:

За један низ бројева $\{a_\nu\}$ казаћемо да је *повишљив* - $V$ (*са десне или са леве стране*) ако постоји један низ бројева $\{A_\nu\}$ који је збирљив - $V$ т. ј.

$$V-\lim A_n = A,$$

и такав да неједначине

$$a_n \leqslant A_n \quad (\text{или } a_n \geqslant A_n)$$

буду задовољене за све $n = 1, 2, 3, \ldots$; што ћемо укратко означити изразом

$$V-\{a_\nu\} \ll V-\{A_\nu\} \quad (\text{или } V-\{a_\nu\} \gg V-\{A_\nu\})$$

На исти начин казаћемо да је низ $\{a_\nu\}$ *повишљив* - $V$ *са обе стране* ако постоје два низа $\{A'_\nu\}$ и $\{A''_\nu\}$ таква да буде

$$V-\lim A'_\nu = A', \quad V-\lim A''_\nu = A'',$$

и
$$A'_n \leqslant a_n \leqslant A''_n \quad \text{за све } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Даље ћемо казати још да је низ $\{a_\nu\}$ *апсолутно повишљив* - $V$, ако је низ формиран из апсолутних вредности елеме-

[9]) *J. E. Littlewood,* The converse of Abel's theorem on power series, Proc. Lond. math. Soc. (2.) 9. (1910.) p. 434—418.

*G. H. Hardy and J. E. Littlewood,* Contributions to the arithmetic theory of series. Lond. M. S. Proc. (2) 11. p. (1911.). 411—478.

[10]) *G. H. Hardy и J. E. Littlewood,* Tauberian theorems concerning powers series and Dirichlet's series whose coefficient are positive, Proc. Lond. math. Soc. (2.) 13. (1914) p. 174—191.

G. *H. Hardy* и *J. E. Litlewood,* Abels theorem and its convers. Proc, Lond. marh. Soc. (2.) 4. (1918.) p. 205—235.

[11]) Свакоме ставу *A-K* очигледно одговара потпуно исти став *C-K*, јер ако је један ред збирљив -*C* тада је он и збирљив -*A*, па је према томе он конвергентан ако задовољава услов става *A-K*.

[12]) Über einen Satz des Herrn Littlewood, Rend. del Circolo Matematico di Palermo. T. 35. (1913). p. 265—276.

[13]) *R. Schmtdt,* Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen Math. Zeitschrift. 22. (1925) p. 89—122.

Види још и упроштени доказ код

*T. Vijayaraglavan,* A Tauberian theorem, Journal London Math. Soc. 1. (1926), p. 113—120.

чата датога низа т. ј. низ $\{a_\nu\}$, повишљив - $V$, што ћемо означити са

$$V-\{a_\nu\} \ll V-\{A_\nu\}.$$

Из ових дефиниција видимо лако, да су сви они низови повишљиви - $V$ са једне стране, који су збирљиви - $V$ или који су ограничени са једне стране, даље да су низови повишљиви - $V$ са обе стране, кад год су они збирљиви - $V$ или ограничени са обе стране и да су апсолутно повишљиви - $V$ сви они низови који су ограничени са обе стране, међутим низови збирљиви - $V$ у општем случају нису апсолутно повишљиви - $V$. Очигледно је, даље, да су сви апсолутно повишљиви низови у исто време повишљиви са једне или са обе стране, међутим један низ може бити повишљив шта више са обе стране а да при томе не буде апсолутно повишљив; везу између апсолутне повишљивости и повишљивости са обе стране видимо из следећег става:

**Став 1.** *Да би један низ $\{a_\nu\}$ био повишљив - $V$ са обе стране, потребно је и довољно је, да постоји такав низ бројева $\{\alpha_\nu\}$, збирљив - $V$, да низ $\{a_\nu-\alpha_\nu\}$ буде апсолутно повишљив - $V$.*

Заиста, ако је

$$V-\{A'_\nu\} \ll V-\{a_\nu\} \ll V-\{A''_\nu\}$$

тада је
$$V-\{a_\nu-A'_\nu\} \ll V-\{A''_\nu-A'_\nu\}$$

и
$$a_\nu - A'_\nu \geqslant 0$$

дакле је низ $\{a_\nu - A'_\nu\}$ апсолутно повишљив - $V$.

Обратно ако постоји такав низ $\{\alpha_\nu\}$, збирљив - $V$, да низ $\{a_\nu-\alpha_\nu\}$ буде апсолутно повишљив - $V$, т. ј. да буде

$$V-\{a_\nu-\alpha_\nu\} \ll V-\{A_\nu\}$$

тада је
$$V-\{-A_\nu\} \ll V-\{a_\nu-\alpha_\nu\} \ll V-\{A_\nu\}$$

или
$$V-\{-A_\nu+\alpha_\nu\} \ll V-\{a_\nu\} \ll V-\{A_\nu+\alpha_\nu\}$$

што нам казује да је низ $\{a_\nu\}$ повишљив са обе стране.

Покажимо сад на који начин појам повишљивости налази примену код инверсних ставова збирљивости. Тога ради наведимо одмах следећи општи и скоро очевидан став $V''-V'$:



**Став 2.** *Нека су $V'$ и $V''$ два начина збирљивости таква да $V' \subset V''$ и да су они идентични за све позитивне низове. Да би један низ, који је збирљив $V''$ био збирљив $V'$, потребно је и довољно је, да он буде повишљив - $V'$ са једне или са обе стране.* (*А довољно је већ да он буде апсолутно повишљив - $V'$*).

Прво ако је низ $\{a_\nu\}$ збирљив - $V'$ тада је он и збирљив - $V''$ јер $V' \subset V''$, а он је при томе и повишљив - $V'$ (само не апсолутно). Обратно, ако је он збирљив - $V''$ и повишлив - $V'$, тада постоји такав низ $A_\nu$ збирљив - $V'$, да је

$$\alpha_\nu = A_\nu - a_\nu \geqslant 0$$

а како $V' \subset V''$ то су низови $\{A_\nu\}$ и $\{a_\nu\}$, па дакле и низ $\{\alpha_\nu\}$, збирљиви - $V''$. Пошто је даље $\alpha_\nu \geqslant 0$ то из претпоставке следи да је тај низ и збирљив - $V'$, дакле из

$$a_\nu = A_\nu - \alpha_\nu$$

следи да је и низ $\{a_\nu\}$ збирљив - $V'$, ш. ј. т. д.

Као што видимо, горе доказан инверсан став збирљивост оснива се у главноме на идентичности двају начина збирљивости за све позитивне низове што само по себи претставља један инверсан став збирљивости који је у осталом у појединим специјалним случајевима најтеже утврдити.

Да би дакле горњи став могли применити на специјалне начине збирљивости $C_2$, $C_1$ и $A$, $C_1$ треба да покажемо да су ти начини идентични за све позитивне низове.

Посматрајмо најпре случај збирљивости $C_1$ и $C_2$. Да су та два начина збирљивости идентична за ове позитивне низове доказао је већ Landau [14]) у облику следећег става:

*Нека је $\{S_\nu\}$ један монотоно растући низ, тада ако*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{S_\nu}{\nu} \to a \quad \text{кад} \quad n\to\infty, \quad \text{следи да и} \quad \frac{S_n}{n} \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty$$

Дакле ако ставимо

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu, \quad \text{тада је } a_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[14]) Loc. cit. [6]).

те нам горњи став казује да су збирљивости $C_1$ и $C_2$ идентичне за све позитивне низове. Став 2. нам дакле даје један инверсан став $C_2 - C_1$ у облику:

**Став 3.** *Ако је један низ збирљив - $C_2$, да би он био збирљив - $C_1$ потребно је и довољно да он буде повишљив - $C_1$.*

Исти овакав став важи ако уместо збирљивости - $C_2$ ставимо збирљивост - $A$. Његов доказ базира на идентичности збирљивости $A$ и $C$ за све позитивне низови што су већ доказали г. г. Hardy и Littlewood [15]; како су њихови докази прилично тешки то ћемо овде тај доказ поновно извести на један сасвим други начин који је у исто време краћи и лакши.

Он следи наиме директно из следећег става:

**Став 4.** *Ако су елементи низа $\{a_\nu\}$ сви позитивни бројеви и ако је он збирљив - $A$ са границом $a$, тада је*

$$\lim_{r=1}(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu f(r^\nu)\,r^\nu = a\int_0^1 f(\tau)\,d\tau \qquad \text{(I)}$$

*за све у интервалу $[0,1]$ $R$ - интеграбилне функције $f(\tau)$.*

Заиста, из претпоставке, наиме да

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu r^\nu \to a, \qquad \text{кад } r\to 1,$$

ако ставимо $r^{1+x}$ уместо $r$, следи

$$(1-r^{1+x})\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu r^{\nu+\nu x} = \frac{1-r^{1+x}}{1-r}(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu r^{\nu+\nu x}\to$$

$$\to(1+x)(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu r^{\nu+\nu x}\to a,$$

дакле

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu r^{\nu x}\cdot r^\nu \to \frac{a}{1+x} = a\int_0^1 \tau^x\,d\tau \qquad \text{(II)}$$

[15]) *G. H. Hardy* and *J. E. Littlewood*, Tauberian théorems concerning series of positive terms. Messenger (2.) 42. 191—192.



Ставимо даље у једначини (II.) $x=0,1,2,\ldots n$, помножимо све те једначине са произвољним коефициентима и саберимо, тада добијамо

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu P(r^\nu)\,r^\nu \to a\int_0^1 P(\tau)\,d\tau$$

где је $P(\tau)$ произвољан полином $n$-тог степена. Одавде лако увиђамо на основу Weierstrass'овог става: «Свака се континуирана функција може униформно апроксимирати помоћу полинома», да једначина (I) важи за све у интервалу $[0,1]$ континуиране функције. Како, међутим, свакој $R$-интеграбилној функцији $f(x)$ можемо одредити две континуиране функције $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ такве, да буде

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\Phi(x) \quad \text{за све} \quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

и

$$\int_0^1\{\Phi(x)-\varphi(x)\}\,dx\leqslant\varepsilon,$$

то следи лако, да једначина (I) важи и за све у интервалу $[0,1]$ $R$-интеграбилне функције. ш. ј. т. д.

Из овог става можемо сад лако показати да су збирљивости $A$ и $C$ идентичне за све позитивне низове.

Ставимо зато најпре $r = e^{-\frac{1}{n}}$; тада

$$\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu f\left(e^{-\frac{\nu}{n}}\right)e^{-\frac{\nu}{n}} \to \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)e^{-\frac{\nu}{n}}\to$$

$$\to a\cdot\int_0^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt, \qquad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

где је

$$\varphi(t)=f(e^{-t})$$

и изаберимо такву функцију $\varphi(x)$ да буде

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^x & \text{кад је} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{» »} \quad 1<x\end{cases}$$

тада добијамо да

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{-\frac{\nu}{n}} \to a \quad \text{кад } n \to \infty$$

што нам дакле доказује да су збирљивости $A$ и $C$ идентичне за све позитивне низове.

Према томе, с обзиром на став 2. добијамо став 3. аналог став за збирљивост - $A$, који гласи;

**Став 5.** *Нека је $\{a_\nu\}$ један низ збирљив - $A$, да би он био збирљив - $C$ потребно је и доволно је, да он буде повишљив - $C$.*

Из ових инверсних ставова збирљивости ми сад можемо добити инверсне ставове $C$ - $K$ и $A$ - $K$ који нам дају један нов услов, општији од услова (1) — (4).

Став $C$ - $K$ следи директно из става 3. на следећи начин:

Нека је $a_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$ један низ збирљивости - $C$ са границом $a$, из једначине

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu = a_n - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(III)}$$

следи да је низ $\{n u_n\}$ збирљив - $C_2$ са границом $o$; ако дакле претпоставимо да је тај низ повишљив - $C_1$, тада из става 3. следи да је он збирљив - $C_1$, са границом $o$, па нам једначина (III) казује да низ $\{a_\nu\}$ мора тежити граници $a$.

Према томе добијамо:

**Став 6.** *Ако је ред $\Sigma u_\nu$ збирљив - $C$, да би он био конвергентан, потребно је и довољно да низ $\{\nu u_\nu\}$ буде повишљив - $C$.*

Овај нам став дакле даје раније споменути услов, који можемо написати у облику:

$$C - \{\nu u_\nu\} \ll C - \{A_\nu\} \quad . \ . \ . \quad (5)$$

Очигледно је према раније реченом да је услов (5) увек задовољен када су услови (1) — (4) задовољени, тако да су на њиме уједињени сви услови (1) — (4) који на први поглед изгледају сасвим различита природе.

Пређимо сад на доказивање инверсног става $A$ - $K$ у коме ће услови (1) — (4) бити замењени условом (5).



Дочим је доказ става $C$ - $K$ следио директно из става 3. (а потпуно је сличан Landau'овом доказу става $C$ - $K$) ми можемо став $A$ - $K$ свести, помоћу става 3., на Hardy - Littlewood'ов став $A$ - $K$. Како је међутим Hardy-Littlewood'ов доказ веома компликован, ми ћемо даље показати како се помоћу става 5., доказ може веома лако свести на Tauber'ов став изражен условом (1) или шта више на први Tauber'ов став изражен условом (2). А пошто је доказ првог Tauber'овог става лак, то добијамо у исто време један нов доказ Hardy - Littlewood'овог става, који је лакши од доказа самих ових аутора (кад већ није директан). Ове доказе добијамо на следећи начин:

Нека је, по претпоставци, низ $\{n u_n\}$ повишљив - $C$, тада је и низ $\{(n-1) u_n\}$ повишљив - $C$, па је према томе низ

$$R_n = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n} (\nu - 1) u_\nu\,, \quad R_1 = u_1$$

ограничен са једне стране т. ј.:

$$R_n \leqslant M \quad \text{за све } n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad \text{(IV)}$$

Ставимо

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu\,, \quad s_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,, \quad a_0 = s_0 = 0\,,$$

тада је

$$R_n = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu-1)\, u_\nu = n\,(s_n - s_{n-1}) = a_n - s_{n-1}\,. \qquad \text{(V)}$$

Даље је по претпоставци низ $\{a_\nu\}$ збирљив - $A$, а отуда следи да је и низ $\{s_\nu\}$ збирљив - $A$, јер ако ставимо

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu = (1-r) f(r),$$

тада је

$$(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu r^\nu = (1-r)\int_0^r f(r) \frac{dr}{r(1-r)}\,;$$

дакле

$$(1-r)\int_0^r f(r) \frac{dr}{r(1-r)} = \frac{\int_0^r f(r)\frac{dr}{r(1-r)}}{1/_{1-r}} \to$$

$$\rightarrow \frac{\left( \int_0^r f(r) \frac{dr}{r(1-r)} \right)'}{\left( {}^1/_{1-r} \right)'} = \frac{1}{r} (1-r) f(r) \rightarrow a \, .$$

[На основу горе реченог покажимо сад, како се доказ поменутог става може свести на Hardy-Littlewood'ов став:

Из $$A - \lim s_n = a$$

и из (IV) и (V) т. ј. из $n(s_n - s_{n-1}) \leqslant M$ следи према томе ставу да

$$s_n \rightarrow a \, ,$$

а из повишљивости - $C$ низа $\{ n u_n \}$, према ставу 3. следи да $a_n \rightarrow a$ ш. ј. т. д.

Покажимо сад даље како се може без примене Hardy-Littlewood'овог става, а на основу става 5., доказ свести на један или други Tauber'ов став].

Из $A$ - $\lim a_n = a$ и $A$ - $\lim s_n = a$ следи према (V)

$$A - \lim R_n = 0 \, ,$$

па је према (IV) и ставу 5.

$$C_1 - \lim R_n = C_2 - \lim (n-1) u_n = 0 \, ,$$

а отуда, из повишљивости - $C_1$ низа $\{ n u_n \}$ и става 3., следи да

$$R = C_1 - lim\,(n-1) u_n \rightarrow 0 \qquad \text{(VI)}$$

[Дакле према Tauber'овом ставу који је изражен условом (1) мора и $a_n \rightarrow a$ ш. ј. т. д. Лако се међутим доказ може даље продужити и свести на први Tauber'ов став, изражен условом (2)].

Пошто $R_n \rightarrow 0$, то према (V) и $n(s_n - s_{n-1}) \rightarrow 0$, па како је $A - lim\, s_n = a$, то из првог Tauber'овог става следи да $s_n \rightarrow a$, па нам коначно једначине (V) и (IV) казују да и $a_n \rightarrow a$ ш. ј. т. д.

Према томе је доказан

**Став 7.** *Ако је ред $\sum u_\nu$ збирљив - A, да би он био конвергентан, потребно је и довољно је, да низ $\{ n u_n \}$ буде повишљив - C.*



На тај је начин показано да се и код инверсних ставова $A$ - $K$ услови (1) — (4) могу заменити општијим условом (5).

Сви су ови услови, као што је у почетку речено, изведени под претпоставком да су елементи посматраних низова реални бројеви. Испитајмо још у колико се ти ставови могу пренети и на комплексне низове.

Видимо најпре лако да услови (1), (2) и (3) важе за произвољне реалне или комплексне низове (треба их само применити на реални и имагинарни део елемената дотичних низова), међутим услови (4) и (5), по самој њиховој природи, не могу се применити на комплексне низове.

Што се тиче услова (5), т. ј. услова повишљивости - C низа $\{ n u_n \}$ са једне стране, видимо да се тај услов може заменити мање општим условом, повишљивости - C низа $\{ n u_n \}$ са обе стране т. ј.

$$C - \{ A'_\nu \} \ll C - \{ \nu u_\nu \} \ll C - \{ A''_\nu \} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

или са условом израженим апсолутном повишљивошћу - $C$ низа $\{ n u_n \}$ т. ј.

$$C - \{ \nu u_\nu \} \ll C - \{ A_\nu \} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Оба ова услова могу се применити и на произвољне комплексне низове и то први индиректо преко става 1., а други директно.

Што се тиче овог другог услова т. ј. услова (7), то видимо да га сви конвергентни редови не морају задовољавати, па према томе ако га сменимо у ставовима 6. или 7. он не претставља више потребан и довољан услов за конвергенцију дотичнога реда, већ само довољан услов. На исти начин видимо да услов (7) садржи само услове (2) и (3), а да не садржи услове (1) и (4), нити је он у њима садржан.

Приметимо међутим да и услов (4) (који важи само за реалне низове) можемо у извесном смислу подвргнути услову (7), ако поред тога услова претпоставимо да је ред збирљив - $A$ (или - $C$).

Јер ако је $n u_n \leqslant M$ т. ј. $M - n u_n \geqslant 0$ тада је $|n u_n| = |M - n u_n + M| \leqslant (M - n u_n) + M = 2M - n u_n$ тако, да кад ставимо:

$$A_n = 2M - n u_n \, ,$$

имамо

$$n u_\mu \leqslant A_\mu \quad \text{и} \quad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \to 2M - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to 2M,$$

јер из претпоставке да је ред $\mathrm{M}\, u_\nu$ збирљив - $A$ (или - $C$) и услова (4) следи конвергенција дотичног реда т. ј. следи да

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to 0.$$

Дакле из поменутих услова следи апсолутна повишљивост - $A$ низа $\{ n u_n \}$.

Одавде видимо дакле да скуп услова (7) и услова збирљивости - $A$ претставља један општији услов од скупа услова (4) и услова збирљивости - $A$.

Према томе кад у ставу **7**. заменимо услов (5) условом (7), добијамо један став који садржи оба Hardy-Littlewood'ова става изражена условима (3) и (4) проширујући у извесном смислу други и на комплексне низове.

Сменимо ли, на послетку, у ставу 7. услов (5) специалнијим условом (6), то следи, пошто га сви конвергентни редови задовољавају, да он остаје потребан и довољан услов за конвергенцију реда $\sum u_n$. Како међутим, на основи става 1., лако увиђамо да тако добивени став важи и за произвољне комплексне низове, то га можемо изразити у облику

**Став 8.** *Да би ред $\sum u_\nu$, чији су чланови произвољни, реални или комплексни и који је збирљив - $A$ (или - $C$) био конвергентан, потребно је и довољно да постоји такав један низ $\alpha_\nu$, збирљив - $C$, да низ $\{ \nu u_\nu - \alpha_\nu \}$ буде апсолутно збирљив - $C$.*

Према томе смо добили став, који нам даје један услов, на име услов (6), који садржи услове (1), (2) и (3), а у извесном смислу (раније реченом) и услов (4), а који важи за произвољне реалне или комплексне низове.

# THÉORÈMES INVERSES DE SOMMABILITÉ I.

PAR J. KARAMATA.

(Résumé de la Note parue dans «Glas» de l'Académie Royale Serbe, t. 0 p. 1—32 séance du 1-IV-1929).

Sous le nom de *théorèmes inverses de sommabilité* l'auteur désigne les théorèmes fournissant les conditions telles que de la *sommabilité* (par un procédé particulier V, *sommabilité - V*) on puisse conclure la convergence de toute suite satisfaisant à ces conditions. Pour abréger, ces théorèmes seront encore désignés par *théorèmes V - K*.

D'autre part la convergence ordinaire peut-être considérée comme un procédé particulier de sommabilité: la sommabilité - K (ainsi par exemple la sommabilité de Cesàro d'orde zéro, $C_0$). On peut donc désigner par *théorèmes inverses de sommabilité* tout théorème fournissant des conditions telles que d'un procédé de sommabilité (V′) on puisse passer à un procédé de sommabilité (V″) moins puissant, pour toute suite satisfaisant à ces conditions. Ces théorèmes seront désignés par *théorèmes* ***V′ - V″***.

Le procédé de sommabilité - V′ est dit *plus puissant* que le procédé V″ lorsque toute suite sommable - V″ est sommable - **V′**, mais pas inversement, ce que l'on écrira pour abréger **V″ ⊂ V′**.

Dans cette note, l'auteur s'occupe en particulier des théorèmes inverses C - K et A - K [1]) donnant une condition nouvelle qui embrasse comme cas particulier certains théorèmes connus, à savoir les théorèmes C - K de Kronecker-Hardy-Landau et les théorèmes analogues A - K de Tauber-Hardy-Littlewood [2]).

---

1) La sommabilité - $A$ est celle d'Abel et - $C$ celle de Cesàro.

2) Voir loc. cit. [4]) [6]) [7]) [8]) [9]) [10]) du texte en serbe.

Dans ce but l'auteur introduit la notion de *majorabilité - V* d'une suite, de la maniére suivante:

Une suite de nombres $\{a_\nu\}$ sera appelée *majorable - V dans un sens* (ou dans les deux sens) s'il existe une suite de nombres $\{A_\nu\}$ (ou deux suites $\{A'_\nu\}$ et $\{A''_\nu\}$ telles que

$$a_\nu \leqslant A_\nu \quad (\text{ou} \quad a_\nu \geqslant A_\nu) \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots .$$
$$(\text{ou bien} \quad A'_\nu \leqslant a_\nu \leqslant A''_\nu)$$

les suites $A$ étant sommables - $V$.

De même, la suite $\{a_\nu\}$ sera dite *absolument majorable - V* si la suite $\{|a_\nu|\}$ est majorable - $V$.

La majorabilité absolue s'applique aux suites de nombres réels ou complexes, ce qui n'est plus le cas des deux autres majorabilités Par contre, le théorème suivant (simple à démontrer) nous indique la manière de transformer la majorabilité double pour pouvoir l'appliquer même aux suite des nombres complexes.

**Théorème 1.**: *Pour que la suite $\{a_\nu\}$ soit majorable - V dans les deux sens il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{\alpha_\nu\}$ sommable - V, telle que la suite $\{a_\nu - \alpha_\nu\}$ soit absolument majorable - V.*

Moyennant cette notion l'auteur se propose de mettre á la base des théorèmes inverses le théorème suivant d'ailleurs presque évident.

**Théorème 2.**: *Etant donnés deux procédés de sommabilités V' et V'' équivalents pour toute suite de nombres positifs et tels que $V' \subset V''$. Pour qu'une suite sommable - V'' soit sommable - V', il faut et il suffit qu'elle soit majorable - V' dans un ou les deux sens. Tandis que la majorabilité absolue est suffisante, mais pas nécessaire* [3]).

Pour pouvoir l'appliquer aux théorèmes $C_2$ - $C_1$ et A - C, il faut donc démontrer que les procédés $C_2$ et $C_1$, ainsi que les procédés A et C, sont équivalents pour toute suite de nombres positifs (ce qui présente la principale difficulté).

[3]) Deux procédés de sommabilités $V'$ et $V''$ sont équivalents pour toute suite satisfaisant á une condition lorsqe toute suite satisfaisant á cette condition qui est sommable - $V'$ soit sommable - $V''$ et inversement.



L'équivalence des procédés $C_2$ et $C_1$ se trouve déjà démontrée (implicitement) chez M. E. Landau [4]); on a donc le

**Téorème 3.** *Pour qu'une suite, sommable - $C_2$, soit sommable - $C_1$ il faut et il suffit qu'elle soit majorable - $C_1$.*

Quant à l'équivalence des procédés de sommabilité A et C pour suite de nombres positifs elle se trouve de même démontrée chez M. M. Hardy et Littlewood [5]). L'auteur le démontre aussi mais d'une manière plus simple en le déduisant directement du théorème suivant.

**Téorème 4.** *Etant donnée une suite de nombres $\{a_\nu\}$ positifs, sommable - A avec la limite généralisée a, on a*

$$\lim_{r \to 1} (1 - r) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu f(r_\nu) r^\nu = a \int_0^1 f(\tau)\, d\tau$$

*pour toute fonction $f(\tau)$ intégrable - R dans l'intervalle (o, 1).*

Il suffit, en effet, de choisir convenablement la fonction $f(\tau)$, pour obtenir l'équivalence des procédés A et C pour toute suite de nombres positifs; par conséquent d'après le théorème 2. on a

**Theoréme 5.** *Pour qu'une suite de nombres, sommable - A soit sommable - C, il faut et il suffit qu'elle soit majorable - C.*

Pour passer aux théorèmes C - K et A - K, le procédé est simple en ce qui concerne le théorème C - K, (la démonstration est semblable à celle de M. Landau) et l'on obtient

**Théorème 6.** *Pour qu'une série $\sum u_\nu$, sommable - C, soit convergente, il faut et il suffit que la suite $\{\nu \cdot u_\nu\}$ soit majorable - C.*

Quant à la démonstration du théorème analogue pour la sommabilité A, elle se ramène (moyennant le théorème 3) au théorème de M. M. Hardy et Littlewood. Mais on peut de même, sans faire usage du dit théorème, à l'aide des théorèmes 3. et 5., ramener la démonstration à l'un des deux théorèmes de M. Tauber. Par cette voie on parvient à démontrer d'une manière tout-à-fait différente le théorème suivant:

[4]) Voir loc. cit. [7]) du texte en Serbe.

[5]) Voir loc. cit. [14]) du texte en Serbe.

**Théoreme 7.** *Pour qu'ue série $\Sigma u_\nu$, sommable - A, soit convergente il faut et il suffit que la suite $\{\nu u_\nu\}$ soit majorable - C.*

La condition de ce théoréme, c. à. d. de la majorabilité - $C$ de la suite $\{\nu u_\nu\}$, contient évidement les conditions:

$$1. \quad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to 0$$

$$2. \quad u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$3. \quad n u_n \leqslant M.$$

Ainsi donc dans le théoréme 7. (considéré dans le domaine réel) se trouvent réunis les théorèmes de Tauber-Hardy-Littlewood comme cas particulier. Cette même remarque s'applique aussi aux séries de nombres complexes. Il suffit, en effet, de remplacer la majorabilité simple par la majorabilité double qui, d'après le théorème 1., est appliquable aux séries de nombres complexes. Ceci donne le

**Théorème 8.:** *Pour qu'une série $\Sigma u_\nu$ (réelle ou complexe) sommable - A, soit convergente, il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres $\{\alpha_\nu\}$, sommable - C, telle que la suite $\{\nu u_\nu - \alpha_\nu\}$ soit absolument majorable - C.*

---

# О ИНВЕРСНИМ СТАВОВИМА ЗБИРЉИВОСТИ БЕСКРАЈНИХ НИЗОВА.

(Други део)

Од ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

(Примљено на скупу Академије природних наука од 11. јуна 1930.)

У првом делу расправе под горњим насловом [1]) бавили смо се у главном инверсним ставовима $A$-$K$ (и $C$-$K$) у којима су услови конвергенције низа $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$ имали облик

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to o, \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \tag{1}$$

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \tag{2}$$

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \tag{3}$$

$$u_n > O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{кад} \quad n \to \infty\ ^{2)}. \tag{4}$$

Тамо смо показали да се ти услови [у главном услови (1) и (4), јер су услови (2) и (3) у њима садржани] могу заменити једним општијим условом, који их спаја у један једини, наиме условом повишљивости - C низа $\{nu_n\}$, а који смо изразили формулом

---

1) J. Карамата. О инверсним ставовима збирљивости бескрајних низова. (Први део). Глас Српске Краљ. Академије Наука, иста књ., стр. 1.

2) Неједначина $a_n < O(\alpha_n)$, кад $n \to \infty$, значи да је низ $\frac{a_n}{\alpha_n}$ ограничен са десне стране, т. ј. да је за све $n = 1, 2, \ldots\ldots$ $a_n < M \cdot \alpha_n$, где је $M > 0$ и независан од $n$, а што се још може писати у облику $\frac{a_n}{\alpha_n} < O(1)$.

$$C\text{-}\{\,\nu u_\nu\,\} \ll C\text{-}\{\,A_\nu\,\}. \qquad (5)$$

Поред ових услова постоји још један велики број других, од којих ћемо овде напоменути само две најважније групе и то:

O. Szász'ов [3]) услов, облика

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\nu u_\nu|^p = O(n)\,, \quad p > 1\,, \quad кад \quad n \to \infty\,, \qquad (6)$$

а који садржи, поред других услова, као специалан случај Fejérov'ов [4]) услов

$$да\ ред \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |u_\nu|^2 \quad конвергира\,,$$

и његово Hardy-Littlewood'ово [5]) уопштење, наиме

$$да\ ред \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{p-1}\, |u_\nu|^p\,, \quad p > 1\,, \quad конвергира\,.$$

Друга група услова конвергенције ставова А-К, споменута већ у првој расправи, а која је по нашем мишљењу најподеснија и највише одговара инверсним ставовима збирљивости, налази се први пут у радовима E. Landau'а [6]) у облику:

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = O(1) \quad кад \quad n \to \infty\,,$$

и $\qquad\qquad (7)$

$$\limsup_{n=\infty}\ \max_{n < \mu \leq n\lambda} |s_\mu - s_n| = w(\lambda) \to 0 \quad кад \quad 1 < \lambda \to 1.$$

Овај је услов затим потпуно уопштио R. Schmidt [7]), давши му облик

[3]) O. Szász, Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen, Journal London. Math. Soc. 3 (1928) S. 254—262 (255).

[4]) L. Fejér, La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effecfuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple. Comptes Rendus, 156 (1913) 46—49.

[5]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some theorems concerning Dirichlet's series, Messenger of Math. (2), 43 (1914), 134—147. (186); у поменутој расправи овај је услов истовремено изведен и за Dirichlet'ове редове.

[6]) E. Landau, Über einen Satz des Herrn Littlewood, Rend. di Palermo, 35 (1913), 265—276. (270—271).

[7]) R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschift, 22 (1925). 89—152. Упроштени доказ Schmidt'овог става види још код:

T. Vijayaraghavan, A Tauberian theorem, Journal London Math. Soc. 1 (1926), 113—120.



$$\limsup_{n=\infty} |s_\mu - s_n| \leq 0\,, \quad за\ све\ \mu \geq n\ за\ које\ је\ \ \mu \sim n\,, \qquad (8)$$

тако да овако изражен Schmidt'ов услов садржи као специалан случај скоро све до сад познате услове конвергенције [8]). Да услов (8) стварно садржи као специалан случај, услове (1)—(4), (6) и (7), а да није идентичан ни са једним од тих услова, може се лако показати конструисањем специалних низова који задовољавају услов (8), а не задовољавају поједине услове (1), (4) и (6). (Услови (2), (3) и (7) потпадају очигледно под горње услове). Није нам међутим пошло за руком, да потпуно испитамо везу између Schmidt'овог услова (8) и услова (5), т. ј. једностране повишљивости низа $\{\, nu_n \,\}$; лако је наиме показати да је услов (8) испуњен кад год је услов (5) задовољен, међутим изгледа да је и обратно случај, т. ј. да су та два услова идентична, али ово питање остаје отворено.

Пре него што пређемо на испитивање везе која постоји између Schmidt'ових низова [т. ј. низова који задовољавају услов (8)] и низова који задовољавају услов (5), испитајмо поближе природу низова повишљивих - C (са једне стране или са обе стране); у ту сврху докажимо следећи

**Став 1**. *Да би низ $\{\,a_n\,\}$ био повишљив - C са једне (или са обе) стране, потребно је и довољно да постоји један низ $\{\,\alpha_n\,\}$ ограничен са једне стране, $\alpha_n < O(1)$ (или $\alpha_n = O(1)$,) такав да ред*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu - \alpha_\nu}{\nu} \quad \textit{буде конвергентан.} \qquad (9)$$

*Другим речима, један низ повишљив - C, има канонички облик*

$$a_n = n\nu_n + \alpha_n$$

*где је $\nu_n$ општи члан једног конвергентног реда (9) а*

$$\alpha_n < O(1), \quad n \to \infty\,.$$

Заиста, ако је

$$\frac{a_n - \alpha_n}{n} = \nu_n$$

[8]) Види напомену I.

општи члан једног конвергентног реда, тада имамо

$$a_n = nv_n + \alpha_n \leqslant nv_n + M = A_n ,$$

па је

$$C - lim\, A_n = M ,$$

што казује да је низ $\{ a_n \}$ повишљив - C са једне стране.

Обратно, ако је низ $\{ a_n \}$ повишљив - C са једне стране, т. ј. ако је

$$C - \{ a_n \} \ll C - \{ A_n \}$$

и

$$C - lim\, A_n = A ,$$

то кад ставимо

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu$$

добијамо

$$A_n = n(S_n - S_{n-1}) + S_{n-1} ;$$

даље је

$$A_n = a_n + \beta_n , \quad \text{где је} \quad \beta_n \geqslant 0 , \ n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

па је према томе

$$a_n + \beta_n = n(S_n - S_{n-1}) + S_{n-1}$$

или

$\dfrac{a_n - (S_{n-1} - \beta_n)}{n} = S_n - S_{n-1} = v_n =$ *општем члану једног конвергентног реда.*

Ако дакле ставимо

$$\alpha_n = S_{n-1} - \beta_n ,$$

тада је

$$\alpha_n < S_{n-1} < O\ (1)$$

а ред $\sum \dfrac{a_\nu - \alpha_\nu}{\nu}$ је конвергентан, што потпуно доказује став.

Овај, скоро елементаран став, показује структуру, унутарњи склоп, низова који су повишљиви - C са једне стране; из њега следи непосредно, да низови $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu$ који задовољавају услов (5), т. ј. они низови $\{ s_n \}$ код којих је низ $\{ nu_n \}$ повишљив - C са једне стране имају каноничан облик



$$s_n = \varepsilon_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\nu} ,$$

где

$$\varepsilon_n \to o \quad \text{и} \quad \alpha_n < O(1), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Из овога следи да низови који задовољавају услов (5) имају каноничан облик

$$s_n = t_n + h_n ,$$

где је прва компонента $\{ t_n \}$ један Tauber'ов низ, т. ј. низ који задовољава услов (1), а друга $\{ h_n \}$ један Hardy-Littlewood'ов низ, т. ј. низ дефинисан условом (4). Једначина (10) казује шта више, да се Tauber'ов низ може заменити једним низом који тежи нули; овим, у осталом, горњи канонички облик не постаје нарочито прецизнији, пошто један Tauber'ов низ има канонички облик

$$t_n = \varepsilon_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_{\nu-1}}{\nu}, \quad где \quad \varepsilon_n \to o \quad са \quad \frac{1}{n} ,$$

а који следи из услова да

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu t_\nu = \varepsilon_n \to o \quad са \quad \frac{1}{n} .$$

Докажимо сада још следећи став, који даје једну другу особину низова повишљивих - C, сличну услову (8) и који гласи:

**Став 2.** *Да би низ $\{ a_\nu \}$ био повишљив - C са десне (или са обе) стране, потребно је да*

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} a_\nu \leqslant 0, \quad за\ све\ \mu\ за\ које\ је\ n < \mu \sim n. \tag{11}$$

*(или*

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=n+1}^{\mu} a_\nu\right| = o, \quad за\ све\ \mu\ за\ које\ је\ \ n < \mu \sim n)\ [9]).$$

*Доказ*: Из претпоставке, наиме из

$$C - \{ a_n \} \ll C - \{ A_n \} \quad \text{и} \quad C - lim\{ A_n \} = A ,$$

[9]) Види напомену II.

следи да

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} a_\nu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} A_\nu = \frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu + \left(\frac{\mu}{n}-1\right)\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \to 0 \quad \textit{кад} \quad n\to\infty$$

и то за све $\mu$ који су $\sim n$, дакле је услов (11) потребан да би низ $\{ a_n \}$ био повишљив - C са једне стране [10]).

Овај став сем тога што даје потребан услов за повишљивост - C низа $\{ a_n \}$, омогућава да докажемо, да је услов (8) испуњен кад год је услов (5) задовољен; довољно је зато доказати још следећи

**Став 3.** *Ако је*

$$a_n = n u_n \quad \text{и} \quad s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*тада су услови (8) и (11) идентични.*

Имамо

$$s_\mu - s_n = \sum_{\nu=n+1}^{\mu} u_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{\mu} \frac{a_\nu}{\nu} \leqslant \frac{1}{n}\mathop{Max}_{n<\varkappa\leq\mu}\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\varkappa} a_\nu\Big\} =$$

$$= \mathop{Max}_{n<\varkappa\leq\mu}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\varkappa} a_\nu\Big\}$$

што казује да из (11) следи (8).

Обратно је

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} a_\nu = \frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} \nu u_\nu \leqslant \frac{\mu}{n}\mathop{Max}_{n\leq\varkappa\leq\mu}\Big\{\sum_{\nu=\varkappa+1}^{\mu} u_\nu\Big\} =$$

$$= \frac{\mu}{n}\mathop{Max}_{n\leq\varkappa\leq\mu}\{ s_\mu - s_\varkappa \}$$

дакле из (8) следи (11), према томе су услови (8) и (11) идентични. ш. ј. т. д.

Из овога става следи сад лако да услов (8) садржи услов

10) Услов (11) је вероватно потребан и довољан, да би низ $\{ a_n \}$ био повишљив - C са десне стране, али нам није пошло за руком да то докажемо.



(5); јер ако је низ $\{ n u_n \}$ повишљив - C са једне стране, тада он према ставу 2. задовољава услов (11); отуда на основу става (3) низ $\{ s_n \}$ задовољава услов (8), дакле је услов (5) садржан у услову (8).

Из пређашњег се још види, да је за доказ идентичности услова (5) и (8) довољно показати да је услов (11) потребан и довољан за повишљивост - C низа $\{ a_n \}$ са једне стране.

Но како смо овим само показали да услов (8) садржи услов (5), (а нисмо утврдили да он у њему није садржан), то ћемо овде још дати један простији доказ става A - K са условом конвергенције (8) него што га је дао г. Schmidt. Овај се доказ разликује од доказа г. Vijayaraghavan'a [11]) у томе што се он оснива на једној особини Schmidt'ових низова, на основу које се они могу свести на Hardy-Littlewood'ове низове.

У ту сврху докажимо следећа два става:

**Став 4.** *Из*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} a_\nu < O(1), \quad \textit{за све } \mu \textit{ за које је } \; n<\mu\sim n \qquad (12)$$

*следи елементарно*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu < O(1), \quad n\to\infty.$$

*Доказ.* Кад низ $\{\sigma_n\}$ не би био ограничен са десне стране, тада бисмо могли наћи један такав низ целих бројева $\mu'$ да

$$\sigma_{\mu'} \to \infty \quad \textit{кад} \quad \mu' \to \infty,$$

и да је

$$\sigma_n \leqslant \sigma_{\mu'} \quad \textit{за све} \quad n \leqslant \mu'.$$

Према томе би било

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu'} a_\nu = \sigma_{\mu'} - \sigma_n + \frac{\mu'-n}{n}\sigma_{\mu'} > \frac{\mu'-n}{n}\sigma_{\mu'} = \left(\frac{\mu'}{n}-1\right)\sigma_{\mu'},$$

док се међутим може увек изабрати такав низ бројева $n$ да

$$\left(\frac{\mu'}{n}-1\right)\sigma_{\mu'} \to \infty$$

т. ј. да низ $\frac{\mu'}{n}-1$ довољно споро опада, што се противи услову (12).

11) Види loc. cit. 7.

**Став 5.** *Ако је*

$$a_n = nu_n \quad \text{и} \quad s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu\,,$$

*тада је услов (12) еквивалентан услову*

$$s_\mu - s_n < O(1) \quad \textit{за све } \mu \textit{ такве да } n < \mu \sim n. \qquad (13)$$

Доказ овога става је потпуно исти као и доказ става 3; та су два става у осталом сличне природе.

На основу ова два става можемо сада лако показати везу између Schmidt'ових и Hardy-Littlewood'ових низова у облику овом:

**Став 6.** *Ако низ* $\{ s_n \}$ *задовољава услов* (13), *тада је*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu$$

*један Hardy-Littlewood'ов низ, т. ј. он се може написати у каноничком облику*

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\nu}\,, \quad \textit{где је} \quad \alpha_n < O(1)\,.\text{ [12]}$$

Заиста, ако низ $\{ s_n \}$ задовољава услов (13) тада лако увиђамо, на основу става 5, да ће низ $\{ (n-1)u_n \}$ задовољавати услов (12), па је према ставу 4

$$\sigma'_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu - 1) u_\nu = s_n - S_n < O(1) \text{ [13]}.$$

Међутим је

$$u_n = \sigma'_n - \sigma'_{n-1} + \frac{\sigma'_n}{n-1}\,,\; n = 2,\, 3, \ldots\,,\; u_1 = s_1\,,\; \sigma'_1 = 0\,,$$

т. ј.

$$s_n = \sigma'_n + s_1 + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sigma'_\nu}{\nu - 1}\,,$$

према томе је

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = s_1 + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sigma'_\nu}{\nu - 1} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\nu}\,,$$

---

12) Види напомену III.
13) Види напомену IV.



где је

$$\alpha_1 = s_1\,, \quad \alpha_n = \frac{n}{n-1}\, \sigma'_n < O(1)\,,$$

на основу чега је горњи став доказан.

Како Schmidt'ови низови задовољавају услов (13) то је а fortiori $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \right\}$ један Hardy-Littlewood'ов низ кад год је $\{ s_n \}$ један Schmidt'ов низ.

Из става 6 следи сада лако један став $A$-$C$, на основу којега можемо доказати став $A$-$K$ са условом конвергенције (8).

**Став 7.** *Ако је низ* $\{ s_n \}$ *збирљив* -$A$ *са границом* $s$, *т. ј.*

$$(1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu r^\nu \to s \quad \textit{кад} \quad r \to 1\,, \qquad (\mathrm{I})$$

*и ако је*

$$s_\mu - s_n < O(1)\,, \quad n < \mu \sim n\,, \qquad (13)$$

*тада је он збирљив* -$C$ *са истом границом, т. ј. тада*

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to s \quad \textit{кад} \quad n \to \infty\,. \qquad (\mathrm{II})$$

*Доказ.* Видели смо још у првом делу ове расправе [14]) да из (I) следи

$$(1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu r^\nu \to s \quad \textit{кад} \quad r \to 1\,,$$

према томе је низ $S_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu$ збирљив-$A$. Како је он међутим, на основу става 6, један Hardy-Littlewood'ов низ, то према резултатима прве расправе [15]) он мора тежити одређеној граници $s$, т. ј. низ $\{ s_n \}$ мора бити збирљив -С са границом $s$, те је једначина (II) испуњена.

Ако у ставу 7 заменимо услов (13) мање општијим условом (8), тада видимо да Schmidt'ови низови који су збирљиви -$A$, морају бити збирљиви и на начин -$C$. Да бисмо дакле доказали одговарајући став $A$-$K$, треба још да покажемо, да

---

14) Види loc. cit. 1. стр. 17.
15) Види loc cit. 1. стр. 16, став 6.

Schmidt'ови низови, који су збирљиви - *C* морају конвергирати, т. ј. треба да докажемо следећи

**Став 8.** *Ако је низ* $\{s_n\}$ *збирљив - C са границом* $s$, *т. ј. ако*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to s \quad \textit{кад} \quad n \to \infty\,, \tag{II}$$

*и ако је*

$$s_\mu - s_n < o(1) \;\; \textit{за све} \;\; \mu \;\; \textit{такве да} \;\; n < \mu \sim n\,, \tag{8}$$

*тада*

$$s_n \to s \quad \textit{кад} \quad n \to \infty\,, \tag{III}$$

*Доказ.* Без ограничења можемо претпоставити да је $s=0$, јер у томе случају у место низа $\{s_n\}$ треба посматрати низ $\{s_n - s\}$.

Према томе из услова (II), т. ј. из

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty\,,$$

следи да

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} s_\nu \to 0 \quad \textit{за све} \quad n < \mu = O(n)\,,$$

јер је

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu} s_\nu = \frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{\mu} s_\nu - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu + \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=1}^{\mu} s_\nu\,.$$

Шта више, постоји увек један такав низ $\mu'(n) \sim n$ да

$$\frac{1}{\mu' - n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu'} s_\nu \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty \text{ [16]}. \tag{IV}$$

Ако дакле посматрамо тај низ бројева $\mu'$, тада имамо

$$\sum_{\nu=n+1}^{\mu'} (s_\nu - s_n) + (\mu' - n)\, s_n = \sum_{\nu=n+1}^{\mu'} s_\nu\,,$$

[16]) Види напомену V.



т. ј.

$$-s_n \leqslant \max_{n \le \nu \le \mu'} \{s_\nu - s_n\} - \frac{1}{\mu' - n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu'} s_\nu\,,$$

а отуда следи, према (8) и (IV)

$$\liminf_{n=\infty} s_n \geqslant 0\,. \tag{V}$$

Означимо даље са

$$s_m = \min_{n \le \chi \le \mu'} s_\chi\,,$$

тада

$$s_m \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty\,.$$

Јер, ако то не би био случај, тада би постојао такав низ целих бројева $m'$ да би

$$s_{m'} \to \textit{једном броју } \alpha \textit{ који је према } \text{(V)} > 0\,,$$

па би тада

$$\frac{1}{\mu' - n}\sum_{\nu=n+1}^{\mu'} s_\nu > s_{m'} \to \alpha > 0$$

што противречи једначини (IV).

Ставимо даље у услову (8) $m$ уместо $n$, тада је

$$s_\mu < s_m + o(1) \;\; \textit{за све} \;\; m < \mu \sim m\,, \quad m \to \infty\,,$$

т. ј.

$$\limsup_{m=\infty} s_\mu \leqslant 0, \quad m < \mu \sim m\,,$$

но како је

$$m \sim n \sim \mu\,, \quad \textit{кад} \quad n \to \infty\,,$$

то видимо да је

$$\limsup_{n=\infty} s_n \leqslant 0\,,$$

а ова неједначина, са неједначином (V) даје једначину (III).

Комбинирањем ставова (7) и (8) добијамо поменути Schmidt'ов став, који гласи:

**Став 9.** *Ако је низ* $\{s_n\}$ *збирљив - A са границом* $s$ *и задовољава услов* (8), *тада он тежи граници* $s$.

Тиме смо бар показали да се став $A$ - $K$ са условом конвергенције (8) може свести на одговарајући став са условом конвергенције (5), ако већ нисмо и утврдили еквивалентност услова (5) и (8).

На послетку, напоменимо овде још, да став $A$-$K$ са Landau'овим условом конвергенције (7) може бити директно изведен из става 4 [17]) прве расправе.

Ставимо ли наиме у томе ставу

$$r = e^{-\frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad f(e^{-x})\, e^{x} = \begin{cases} 0 & \text{за } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{за } 1 < x < \lambda \\ 0 & \text{за } \lambda < x < \infty \end{cases},$$

тада добијамо да (где је низ $\{a_n\}$ замењен са низом $\{s_n\}$).

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{<n\lambda} s_\nu \to (\lambda - 1)\, s \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

или

$$W_n = \frac{1}{[(\lambda-1)n]} \sum_{\nu=n}^{[\lambda n]} s_\nu \to s \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

одакле

$$|W_n - s_n| = \frac{1}{[(\lambda-1)n]} \left| \sum_{\nu=n}^{[\lambda n]} s_\nu - s_n \right| \leqslant \operatorname*{Max}_{n \leq \nu \leq \lambda n} |s_\nu - s_n| \to \omega(\lambda),$$

која једначина казује, на основу услова (7), да

$$s_n \to s \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Тиме је доказано да:

*Из збирљивости - A низа $\{s_n\}$ са границом $s$, из*

$$s_n < O(1), \qquad n \to \infty,$$

*и из*

$$\limsup_{n=\infty} \operatorname*{Max}_{n \leq \nu \leq \lambda n} |s_\nu - s_n| = \omega(\lambda) \to 0 \quad \text{кад} \quad 1 < \lambda \to 1,$$

*следи да*

$$s_n \to s \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Овај резултат претставља Landau'ов став, са малим уопштењем, наиме, да је услов $s_n = O(1)$ замењен условом $s_n < O(1)$.

[17]) Види loc. cit. 1, стр. 14, став 4.



Међутим видимо из става 9 да тај услов може потпуно отпасти. У осталом то следи и из једнога става г. Vijayaraghavan'a [18]), који гласи:

*Из*

$$(1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu r^\nu = O(1) \quad \text{кад} \quad r \to 1,$$

*и*

$$s_\nu - s_n < O(1) \quad \text{за све} \quad n < \nu < 3n \to \infty,$$

*следи*

$$s_n < O(1) \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Сем тога, на основу овога става, еквивалентности збирљивости - $A$ и - $C$ за позитивне низове и става 8, добија се још најпростији доказ Schmidt'овог става 9.

Како је еквивалентност збирљивости -$A$ и -$C$ за све позитивне низове, била доказана на један веома једноставан начин у првој расправи [19]), а став 8 мало пре изведен, то ћемо овде још потпуности и прегледности ради, изнети један нов доказ Vijayaraghavan-овог става: показаћемо наиме, да тај став следи из једног низа елементарних ставова, и то:

*I. Из*

$$s_\mu - s_n < O(1) \quad \text{за све} \quad n < \mu \sim n \to \infty,$$

*следи*

$$\sigma_n = s_n - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = s_n - S_n < O(1), \quad n \to \infty,$$

што смо раније доказали.

*II. Из*

$$\sigma_n = s_n - S_n < O(1), \quad n \to \infty,$$

*следи*

$$U_n = S_n - S_{n-1} < O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

пошто је

$$s_n - S_n = (s_n - S_{n-1}) \frac{n-1}{n} = (n-1)(S_n - S_{n-1}) = (n-1)\, U_n.$$

[18]) Види loc. cit. 7.
[19]) Види loc. cit. 1. стр. 14—16.

*III. Из*

$$f(r) = (1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu r^\nu = O(1), \quad r \to 1,$$

*следи*

$$F(r) = (1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu r^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu r^\nu = O(1), \quad r \to 1,$$

пошто је

$$F(r) = (1-r)\int_0^r \frac{f(t)}{t}\,\frac{dt}{(1-t)^2}.$$

*IV. Из*

$$F(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu r^\nu = O(1), \quad r \to 1,$$

*и*

$$U_n < O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

*следи*

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} U_n < O(1), \quad n \to \infty.$$

Из првог услова следи

$$G(r) = \frac{aF(r^2) - F(r)}{a-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \frac{r^\nu (ar^\nu - 1)}{a-1} = O(1), \quad r \to 1;$$

ако дакле ставимо

$$r = a^{-\frac{1}{n}}, \quad a > 1,$$

тада је

$$0 \leqslant \frac{r^\nu (ar^\nu - 1)}{a-1} \leqslant 1, \quad \text{за све} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n$$

и

$$\frac{r^\nu (ar^\nu - 1)}{a-1} \leqslant 0, \quad \text{за све} \quad n \leqslant \nu,$$

па је према другом услову

$$S_n - G(r) = \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu \left\{1 - \frac{r^\nu (ar^\nu - 1)}{a-1}\right\} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} U_\nu r^\nu \frac{ar^\nu - 1}{a-1} <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \frac{1}{a-1}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^\nu}{\nu}(ar^\nu - 1) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \lg n + \lg n(1-r) +$$



$$+ \frac{a}{a-1} \lg (1-r) \to C - \lg \lg a + \frac{a \lg 2}{a-1}, \quad n \to \infty,$$

где је $C$ Euler'ова константа, а одакле следи $S_n < O(1)$.

[Да бисмо из горњих услова закључили да је и $S_n > O(1)$, треба уместо $G(r)$ посматрати функцију

$$G_1(r) = (1+a) F(r) - aF(r^2) \quad \text{са} \quad r = a^{-\frac{1}{n}}, \; a > 1$$

и

$$G_1(r) - S_n \quad \text{уместо} \quad S_n - G(r)\,].$$

*V. Из*

$$s_n - S_n < O(1), \quad n \to \infty,$$

*и*

$$S_n < O(1), \quad n \to \infty,$$

*следи*

$$s_n < O(1), \quad n \to \infty.$$

Овај низ ставова примењен један за другим, доказује Vijayaraghavan'ов став са малом разликом у другоме услову.

Како цео овај доказ базира на првоме ставу I то видимо да смо у ствари доказали, да:

*Из*

$$\sigma_n = s_n - S_n < O(1), \quad n \to \infty,$$

$$(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu r^\nu = O(1), \quad r \to 1,$$

*следи*

$$s_n < O(1).$$

Међутим овде ваља напоменути, *да су услови* (13) *и* $\sigma_n < O(1)$ ***идентични***, т. ј. став I ваља допунити у томе да из (13) не следи само $\sigma_n < O(1)$, већ да је и обратно из $\sigma_n < O(1)$ услов (13) задовољен.

Ако је наиме услов $\sigma_n < O(1)$ задовољен тада можемо $s_n$ написати у облику

$$s_n = m_n + s_n^*,$$

где је

$$m_n \geqslant m_{n+1}, \quad \text{за све} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\sigma_n^* = s_n^* - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu^* = O(1), \quad n \to \infty.$$

Отуда

$$s_n = m_n + \sigma_n^* - s_1^* + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sigma_\nu^*}{\nu - 1}, \quad \sigma_1^* = 0,$$

т. ј.

$$s_\mu - s_n = m_\mu - m_n + \sigma_\mu^* - \sigma_n^* + \sum_{\nu=n+1}^{\mu} \frac{\sigma_\nu^*}{\nu - 1} <$$

$$< \sigma_\mu^* + \sigma_n^* + \sum_{\nu=n+1}^{\mu} \frac{\sigma_\nu^*}{\nu - 1} < 2M + M\, lg\, \frac{\mu}{n}$$

или

$$s_\mu - s_n < O(1) \quad \text{за све} \quad n < \mu = O(n)$$

што доказује горње тврђење.

---

*Напомена I.* Да услов (8) садржи услов (6) лако видимо [применом Hölder'ове неједначине] из следећег:

Ако ставимо

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1,$$

имамо

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\mu} u_\nu\right| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{\mu} \frac{1}{\nu}\, \nu u_\nu\right| \leqslant \left(\sum_{\nu=n+1}^{\mu} \frac{1}{\nu^q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{\nu=n+1}^{\mu} |\nu u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant M n^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=n+1}^{\mu} \frac{1}{\nu^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M n^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\mu - n}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}} = M \cdot \frac{n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{n} \left(\frac{\mu}{\cancel{n}} - 1\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= M\left(\frac{\mu}{n} - 1\right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \quad \text{кад} \quad \frac{\mu}{n} \to 1;$$

одакле се види да је услов (8) увек задовољен, кад је услов (6) испуњен.

Да Schmidt'ов услов садржи и услове (1) до (4) следи отуда што он садржи и услов (5), а то ће бити показано у доцнијем излагању.

*Напомена II.* Напоменимо овде да услов

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(1), \quad n \to \infty, \tag{a}$$



није довољан да би низ $\{a_n\}$ био повишљив $\cdot C$ са десне стране; шта више он није ни онда довољан, ако му још придодамо услов да

$$a_n = o(n) \quad \text{т. ј. да} \quad \frac{a_n}{n} \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty. \tag{б}$$

Да сам услов (а) није довољан за повишљивост - $C$ низа $\{a_n\}$ са десне стране, показује пример

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{кад је} \quad n \neq 2^k \\ n & \text{»} \quad \text{»} \quad n = 2^k \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

јер тада из

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{k} 2^\nu = \frac{2^{k+1} - 1}{n} \leqslant \frac{2n - 1}{n} < 2, \quad k = \left[\frac{lg\, n}{lg\, 2}\right],$$

следи да је услов (а) испуњен, међутим је

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = 1,$$

што казује да услов (11), који је потребан за повишљивост - $C$ са десне стране, није испуњен.

Да услов (а) није довољан ни у случају кад му придодамо услов (б), показује следећи пример:

Ставимо

$$\frac{a_n}{n} = \begin{cases} \alpha_1 & \text{кад је} \quad 0 < n \leqslant p_1 \\ \alpha_2 & \text{»} \quad \text{»} \quad p_1 < n \leqslant p_2 \\ \ldots & \text{»} \quad \text{»} \quad \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k & \text{»} \quad \text{»} \quad p_{k-1} < n \leqslant p_k \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

где је $\{p_n\}$ један дати низ целих бројева, такав да $\frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$ кад $p_n \to \infty$, а затим је низ $\{\alpha_n\}$ тако изабран да

$$0 \leqslant \alpha_n \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

да

$$\beta_n = \alpha_n (p_n - p_{n-1}) \qquad \text{не тежи нули,}$$

и да је

$$\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu p_\nu = O(p_n),$$

што је увек могуће.

Тада имамо

$$\sigma_{p_n} = \frac{1}{p_n}\sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu = \frac{1}{p_n}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu \sum_{\mu=p_{\nu-1}+1}^{p_\nu}\mu = \frac{1}{p_n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu}{2}\{p_\nu(p_\nu+1) -$$

$$- p_{\nu-1}(p_{\nu-1}+1)\} = \frac{1}{2p_n}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu (p_\nu - p_{\nu-1})(p_\nu + p_{\nu-1}+1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p_n}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu (p_\nu - p_{\nu-1})\, p_\nu = \frac{1}{p_n}\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu p_\nu .$$

Одакле следи, према претпоставкама, да је услов (а) испуњен, т. ј да је

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu = O(1).$$

Затим

$$\frac{a_n}{n} = \alpha_k \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty , \quad p_{k-1} < n \leqslant p_k ,$$

т. ј. и услов (б) је испуњен.

Међутим је

$$\frac{1}{p_{n-1}}\sum_{\nu=p_{n-1}+1}^{p_n} a_\nu = \frac{1}{p_{n-1}}\sum_{\nu=p_{n-1}+1}^{p_n} \nu\alpha_\nu \geqslant \sum_{\nu=p_{n-1}+1}^{p_n}\alpha_\nu =$$

$$= \alpha_n (p_n - p_{n-1}) = \beta_n$$

који израз, по претпоставци, не тежи нули, па према томе услов (11) није задовољен, те горњи низ $\{ a_n \}$ не може бити повишљив - $C$ са десне стране.

Напоменимо напослетку да услови

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(n) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = o(n) ,$$

нису довољни да би низ $\{ a_n \}$ био апсолутно повишљив - $C$; јер ако узмемо горе посматрани низ $\{ a_n \}$, тада је

$$\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu a_\nu = o(n) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(1)$$

а видели смо да тај низ $\{ a_n \}$, чији су чланови позитивни, није повишљив - $C$ са десне стране, т. ј. низ $\{ (-1)^n a_n \}$ није апсолутно повишљив - C.



*Напомена III.* Овај став у осталом, можемо изразити и лако доказати на следећи начин:

*Ако низ* $\{ a_n \}$ *задовољава услов* (12), *тада је низ*

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu}{\nu} - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

*један Hardy-Littlewood'ов низ, т. ј. он задовољава услов (4).*

Наиме имамо

$$n\,(s_n - s_{n-1}) = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu - \sigma_{n-1} ,$$

па је према ставу 3

$$s_n - s_{n-1} < O(1/n) \qquad \text{ш. ј. т. д.}$$

*Напомена IV.* Поводом овога резултата, ваља још напоменути следеће:

1⁰. *услови*

$$s_\mu - s_n < O(1) \quad \text{за} \quad n \leqslant \mu \sim n \to \infty , \tag{13}$$

*и*

$$s_\mu - s_n < O(1) \quad \text{за} \quad n \leqslant \mu = O(n) , \; n \to \infty , \tag{13'}$$

*су еквивалентни.*

Лако видимо наиме, да је $s_\mu - s_n < O(1)$ за све $\mu \sim n$ ако та неједначина важи за све $\mu = O(n)$, т. ј. из другог услова следи очевидно и први.

Да бисмо показали, да и из првога услова (13) следи други напоменимо следеће:

Сваки се низ $\{ s_n \}$, који задовољава услов (13), може написати у облику

$$s_n = m_n + s_n^* ,$$

где је $\{ m_n \}$ један монотоно опадајући низ т. ј.

$$m_n - m_{n-1} \leqslant 0 \quad \text{за све} \quad n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

а где низ $\{ s_n^* \}$ задовољава услов

$$|s_\mu^* - s_n^*| = O(1) \quad \text{за све} \quad \mu \sim n \to \infty . \qquad (13\ )$$

Применимо ли даље ставове 4 и 5 на низ $\{ s_n^* \}$, (у којим ставовима ваља заменити $< O(1)$ са $-O(1)$ ), тада видимо да је

$$\sigma_n^* = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu^* = O(1), \quad \text{где је} \quad s_n^* = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^*,$$

па је отуда

$$s_n^* = \sigma_n^* + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sigma_{\nu-1}^*}{\nu}, \quad \sigma_0^* = 0;$$

дакле је

$$s_\mu^* - s_n^* = \sigma_\mu^* - \sigma_n^* + \sum_{\nu=n+1}^{\mu} \frac{\sigma_{\nu-1}^*}{\nu},$$

а како је међутим $\sigma_n^* = O(1)$, то је

$$|s_\mu^* - s_n^*| < 2M + M\sum_{\nu=n+1}^{\mu}\frac{1}{\nu} < M_1 + M_2 \lg\frac{\mu}{n}, \quad \text{где су } M,\ M_1 \text{ и}$$

$M_2$ позитивне константе независне од $n$,
а отуда следи, да је

$$s_\mu^* - s_n^* = O(1) \quad \text{за све } \mu = O(n), \quad n \to \infty.$$

Према томе је

$$s_\mu - s_n = m_\mu - m_n + s_\mu^* - s_n^* \leqslant s_\mu^* - s_n^* = O(1) \quad \text{за све } n < \mu = O(n),$$

т. ј.

$$s_\mu - s_n < O(1) \quad \text{за све} \quad n < \mu = O(n), \quad n \to \infty,$$

што казује да из услова (13) следи услов (13′).

2⁰. Према пређашњем видимо дакле, да ако један низ задовољава услов (13), увек постоји једна константа $M$ таква да

$$s_n - s_\nu \leqslant M, \quad \text{за све} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \text{и} \quad \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant \nu \leqslant n.$$

Узмемо ли за $M$ јединицу, што не претставља никакво нарочито ограничење, тада се горе добивени резултат у тексту може веома лако, и директно, доказати у једном много прецизнијем облику, наиме:

*Из*

$$s_n - s_\nu \leqslant 1 \quad \textit{за све} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{и} \quad \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant \nu \leqslant n, \quad (a)$$



*следи*

$$\sigma_n = s_n - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \leqslant 2, \quad \textit{за све} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (б)$$

*где је константа 2 најмањи могући број да би неједначина (б) била испуњена за све низове који задовољавају неједначину (а).*

*Доказ.* Из идентитета

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=k+1}^{n}(s_n - s_\nu) + \frac{k}{n}(s_n - s_k) + \frac{k}{n}\sigma_k, \quad k < n \qquad (\text{в})$$

следи

$$\sigma_n \leqslant 1 + \frac{1}{2}\sigma_k, \quad \text{ако је} \quad k = \left[\frac{n}{2}\right],$$

а отуда

$$\sigma_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\nu} + \ldots \leqslant 2.$$

Да је та неједначина најпрецизнија могућа показује пример:

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \quad \text{где је} \quad u_n = \begin{cases} 1 & \text{кад је} \quad n = 2^k \\ 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad n \neq 2^k \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Овај низ бројева очигледно задовољава услов (а), а у исто је време

$$\sigma_{2^k} = 2^{-k}\sum_{\nu=1}^{2^k}(\nu - 1)\,u_\nu = 2^{-k}\sum_{\nu=0}^{k}(2^\nu - 1) = 2 - 2^{-k}(k+2) \to 2,$$

кад $k \to \infty$,

т. ј.

$$\limsup_{n=\infty} \sigma_n = 2.$$

Даље закључујем, према 1⁰, да постоји један коначан број $M(\lambda)$, такав да је

$$s_n - s_\nu \leqslant M(\lambda) \quad \text{за све} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{и све} \quad \left[\frac{n}{\lambda}\right] \leqslant \nu \leqslant n, \quad \lambda < 1,$$

ако низ $\{s_n\}$ задовољава услов (13). Аналогно малопређашњем следи из ове неједначине да је

$$\sigma_n \leqslant M(\lambda)\,\frac{\lambda}{\lambda - 1} \quad \text{за све } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{и} \quad \lambda > 1,$$

и да је та константа најпрецизниіа могућа, као што то казује низ

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \text{ где је } u_n = \begin{cases} 1 & \text{кад је } n = [\,\lambda^k\,] \\ 0 & \text{» » } n \neq [\,\lambda^k\,] \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Како међутим, у општем случају, $M(\lambda)$ не тежи нули, кад $\lambda \to 1$, то видимо да из услова (13) не следи егзистенција једне апсолутне константе $K$, такве да би $\sigma_n \leqslant K$ за све низове $\{\, s_n \,\}$ који задовољавају услов (13), што код услова (а) као што смо видели, није случај. Горе наведени специални низ казује већ, да можемо увек одредити једно такво $\lambda$, веће, али довољно блиско јединици, да $K$ буде веће од ма како великог унапред датог броја.

*Напомена V.* Ово можемо увидети и на основу тога, што према пређашњем

$$\alpha_n(\lambda) = \frac{1}{[n\lambda] - n} \sum_{\nu=n+1}^{[n\lambda]} s_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \quad \text{за све} \quad \lambda > 1,$$

према томе, можемо увек дати променљивој $\lambda$ такав један низ вредности $\{\, \lambda_n \,\}$ да $\lambda_n \to 1$, и да $\alpha_n(\lambda_n) \to 0$; ставимо ли дакле $\mu' = [\, n\lambda_n \,]$, тада добијамо једначину (IV).

# THÉORÈMES INVERSES DE SOMMABILITÉ II.

PAR J. KARAMATA.

(Résumé de la Note parue dans le „Glas" de l'Académie Royale serbe t. CXLIII p. 121—142, séance du 11-VI-1930).

Cette Note est consacrée à l'étude des rapports mutuels des conditions de convergence des théorèmes d'inversion $A$-$K$ (ou $C$-$K$) ainsi qu'à l'étude des suites qui satisfont à ces conditions.

Une suite $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$ étant donée, dans la première partie [1]) ont été traitées principalement les conditions de convergence de

*Tauber:* $$\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu = o(n), \quad n \to \infty, \tag{1}$$

et celle de

*Hardy-Littlewood:* $$u_n < O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty, \tag{2}$$

où l'auteur a montré que ces conditions peuvent être remplacées par la condition de la majorabilité de la suite $\{\, nu_n \,\}$, exprimée par

$$C\text{-}\{\, nu_n \,\} \ll C\text{-}\{\, A_n \,\}, {}^{2)} \tag{3}$$

et qui contient les conditions (1) et (2).

Dans la présente Note, l'auteur montre qu'une suite $\{\, s_n \,\}$, telle que $\{\, nu_n \,\}$ est majorable - C, a la forme canonique

$$s_n = t_n + h_n,$$

où $\{\, t_n \,\}$ est une suite de Tauber, c. à. d. satisfait à la condition (1) et $\{\, h_n \,\}$ une suite de Hardy-Littlewood, définie par la condition (2); une suite de Tauber ayant, d'autre part, la forme canonique

1) Voir loc. cit. 1) du texte en serbe.

2) La suite $\{\, nu_n \,\}$ est dite *majorable - C d'un côté* s'il existe une suite $\{\, A_n \,\}$, sommable - $C$, et telle que $nu_n \leq A_n$, pour tout $n$.

$$t_n = \varepsilon_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_{\nu-1}}{\nu}, \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{n},$$

la suite $\{s_n\}$ peut-être mise sous la forme plus précise

$$s_n = \varepsilon_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\nu}, \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{et} \quad \alpha_n < O(1), \quad n \to \infty.$$

L'auteur étudie ensuite la condition de convergence de

*Schmidt:* $\displaystyle\limsup_{n \to \infty} s_\mu - s_n \leqslant 0$, *pour tout* $n < \mu \sim n$, (4)

en montrant, premièrement, que la condition (4) contient (3), tout en indiquant qu'il est fort probable que ces conditions soient équivalentes, autrement dit, que la condition (3) contient de même la condition (4); la question reste ouverte.

En second lieu, il étudie les suites qui satisfont à la condition (4), ainsi qu'à la suivante

$$s_\mu - s_n < O(1), \quad \textit{pour tout } n < \mu \sim n \to \infty, \tag{5}$$

qui la contient.

Les résultats principaux sont les suivants, [dont certains d'entre eux se trouvent déjà chez M. R. Schmidt [3]) mais exposés et démontrés d'une manière différente]:

*I. Les trois conditions*

$$s_\mu - s_n < O(1), \textit{ pour tout } n < \mu \sim n \to \infty, \tag{5}$$

$$s_\mu - s_n < O(1), \textit{ pour tout } n < \mu = O(n), \; n \to \infty \tag{5'}$$

et

$$s_n - S_n = s_n - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu < O(1), \; n \to \infty, \tag{5''}$$

*sont équivalentes.*

Ou, un résultat plus précis:

*II. De la condition*

$$s_\mu - s_n \leqslant 1, \textit{ pour tout } \left[\frac{\mu}{\lambda}\right] \leqslant n < \mu, \; \lambda > 1,$$

*il résulte* $s_n - S_n \leqslant \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$, *pour tout* $n = 1, 2, 3, \ldots,$

*la constante* $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ *étant la plus précise possible.*

[3]) Voir loc. cit. [7]) du texte en serbe.



*III. Si la suite* $\{s_n\}$ *satisfait à l'une des trois conditions* (5), (5') *ou* (5''), *la suite*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu$$

*est une suite de Hardy-Littlewood, c. à. d. satisfait à la condition*

$$U_n = S_n - S_{n-1} < O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Moyennant cette proposition, qui contient la suivante:

*IV.* $\left\{\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu\right\}$ *est une suite de Hardy-Littlewood toutes les fois que* $\{s_n\}$ *est une suite de Schmidt,*

l'auteur ramène la démonstration du théorème A - K de Schmidt:

*Une suite de Schmidt sommable - A est convergente,*

au théorème $A$ - $K$ de Hardy-Littlewood:

*V. Toute suite de Hardy-Littlewood, sommable - A, est convergente,*

en démontrant préalablement la proposition suivante:

*VI. Toute suite de Schmidt, sommable - C, est convergente.*

L'auteur se sert de cette même proposition III pour ramener la démonstration d'un théorème de Vijayaraghavan:

*De* $\quad s_\mu - s_n < O(1)$, *pour tout* $n < \mu \sim n \to \infty$,

*et* $\quad (1 - r)\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu r^\nu = O(1), \quad r \to 1,$

*il résulte* $\quad s_n < O(1), \quad n \to \infty,$

au théorème suivant:

*De* $\quad u_n < O\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$

*et* $\quad \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu r^\nu = O(1), \quad r \to 1,$

*il résulte* $\quad \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} u_n < O(1), \quad n \to \infty,$

dont il donne une démonstration fort simple.

Moyennant ce théorème de Vijayaraghavan, l'équivalence des sommabilités - A et - C pour toute suite à termes positifs, et la proposition VI, l'on obtient la démonstration la plus simple du théorème A - K de Schmidt.