ЈОВАН КАРАМАТА

О ИЗРАЧУНАВАЊУ ГРАНИЦА ВЕЗАНИХ ЗА ДВОСТРУКЕ НИЗОВЕ БРОЈЕВА

ИЗ CXX КЊИГЕ ГЛАСА СРПСКЕ КРАЉЕВСКЕ АКАДЕМИЈЕ

БЕОГРАД-ЗЕМУН
ГРАФИЧКИ ЗАВОД »МАКАРИЈЕ« А. Д.
1926

О ИЗРАЧУНАВАЊУ ГРАНИЦА ВЕЗАНИХ ЗА ДВОСТРУКЕ НИЗОВЕ БРОЈЕВА

ОД ЈОВАНА КАРАМАТЕ

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 1. фебруара 1926. год.)

УВОД

Циљ ове расправе је израчунавање границе једног низа облика

$$\mathbf{A}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(a_{\nu,n}) \tag{1}$$

где је

$$a_{\nu,n} \begin{cases} \nu = 1, 2, 3, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, \cdots\cdots \end{cases} \tag{2}$$

један дат низ реалних и ограничених бројева т. ј.

$$m \leq a_{\nu,n} \leq M \quad \text{за све} \quad \begin{matrix} \nu = 1, 2, 3, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, \cdots\cdots \end{matrix}$$

где су m и M коначни бројеви, а $f(x)$ једна у интервалу $[a, b]$

$$a < m \leq M < b$$

произвољна, континуирана и ограничена функција.

Показаћемо у овој расправи да, под извесним условима за низ (2), граница

$$\mathbf{A}(f) = \lim_{n=\infty} \mathbf{A}_n(f)$$

постоји за све у интервалу $[a, b]$ континуиране функције $f(x)$ и да се под претпоставком да $f(x)$ има један у интервалу $[a, b]$, R-интеграбилан[1] извод $f'(x)$, она може изразити у облику

[1] Т. ј. интеграбилан у Rimann-овом смислу.

$$A(f) = f(b) - \int_a^b f'(\xi) v(\xi) d\xi$$

где је $v(\xi)$ једна функција која зависи само од низа (2) а не зависи од функције $f(x)$.

Функцију $v(x)$ ћемо од сада назвати ***функцијом распореда низа*** $(a_{\nu, n})$, а извод функције распореда, кад постоји, назваћемо ***функцијом густине низа*** $\{a_{\nu, n}\}$, и писаћемо

$$\rho(x) = v'(x)$$

Специјалним случајевима горњега проблема бавили су се нарочито H. Weyl[1], G. Pólya[2], G. Szegö[3] и L. Fejér[4].

H. Weyl је нарочито истраживао општу категорију низова облика

$$a_\nu, \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

који имају за функцију густине функцију $\rho(x) = 1$, и нашао неколико потребних и довољних услова, које мора задовољавати горњи низ да

$$\underset{\nu=\infty}{L} \frac{1}{n} \sum_{\nu=\infty}^{n} f(a_\nu) = \int_0^1 f(\xi) d\xi.$$

Такве низове бројева он је назвао „равномерно распоређени" (gleichverteilt) а они дакле имају за функцију распореда $v(x) = x$.

G. Pólya, G. Szegö и L. Fejér су се бавили специјалним низовима; тако је н. пр. G. Szegö нашао да је функција распореда корена n-тог Legendre-овог полинома равна

$$v(x) = \frac{1}{\pi}(\pi - \arccos x) \quad \text{т. ј.} \quad \rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

и уопште[5] је показао да је функција распореда једног низа ортогоналних полинома представљена горњим изразом.

Ми ћемо се међутим овде бавити општим низом облика $\{a_{\nu, n}\}$ и потражити потребне и довољне услове када ће за један

[1] H. Weyl: Gött. Nachr. 1914. стр. 235—236; Math. Ann. Bd. 77. стр. 313—315. 1916.

[2] G. Pólya: Math. Ann. Bd. 88. стр. 173—177; Gött. Nachr. 1918. стр. 28—29.

[3] G. Szegö: Math. és term. tud. ért. Bd. 36. стр. 531. 1918.

[4] L. Fejér: Aufgaben und Lersätzte aus der Analysis од G. Pólya и G. Szegö. Berlin. 1925. стр.

[5] G. Szegö: Math. Ann. Bd. 82. стр. 188.

такав низ постојати функција распореда и на који се начин та фунција може израчунати; у том ћемо случају дакле моћи израчунати и границу ница (1).

I

Нека нам је дат двоструки низ реалних и коначних бројева

$$\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{12} \quad a_{22} \\ a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\ a_{2n}\ a_{3n} \cdots\cdots a_{n-1\,n}\ a_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{1}$$

који ћемо краће означити са

$$\left\{a_{\nu, n} \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, \cdots\cdots \end{array}\right. \quad \text{или са} \quad \{a_{\nu, n}\} \tag{1}$$

Нека су m и M најмањи и највећи елеменат низа (1) т. ј.

$$m \leq a_{\nu, n} \leq M \quad \text{за} \quad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, 3, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots \end{array}$$

Означимо са E_n скуп елемената n-тог реда низа (1) т. ј.

$$E_n \equiv \{a_{1, n}, a_{2n}, a_{3n}, \cdots\cdots a_{n-1n}, a_{nn}\} \; n = 1, 2, 3, \cdots$$

и уредимо елементе тога скупа по њиховим растућим величинама:

$$E_n \equiv \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \cdots a_{n-1}^{(n)}, a_n^{(n)}\} \; n = 1, 2, 3, \cdots$$

тако да је

$$a_\nu^{(n)} \leq a_{\nu+1}^{(n)} \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots n-1,$$

и где је низ

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \cdots a_n^{(n)}$$

једна пермутација низа

$$a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \cdots\cdots a_{nn}.$$

која очигледно зависи од n.

Формирајмо сад помоћу елемената скупа E_n функцију $r(x)$ која је равна броју оних елемената скупа E_n који нису већи од x т. ј.

$$r_n(x)=\sum_{\nu=1}^{a_\nu^{(n)}\leq x}1. \tag{2}$$

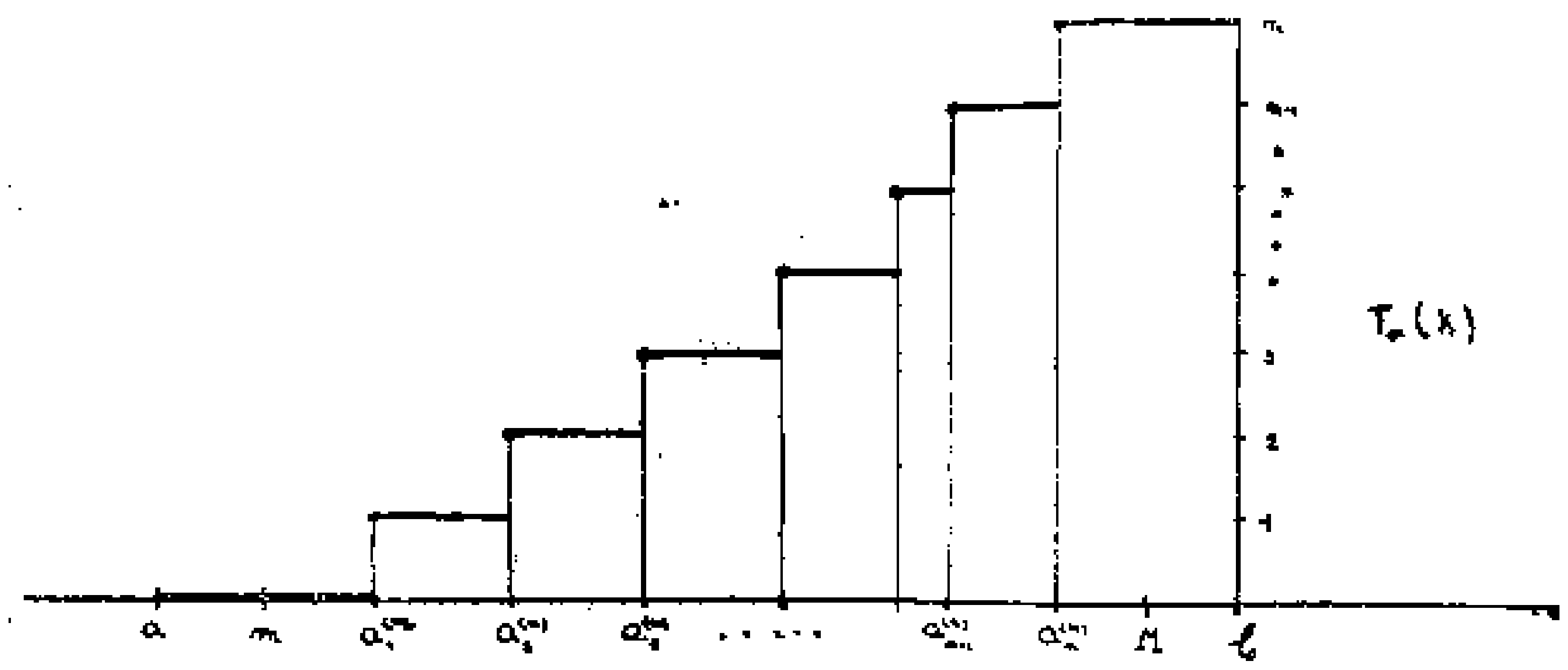
Функција $r_n(x)$ је на тај начин потпуно дефинисана у целоме интервалу $[a,b]$, а специјално у интервалима $[a,a_1^{(n)})$ и $[a_n^{(n)},b]$ узима вредности

$$r_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } a\leq x< a_1^{(n)} \\ n & \text{„} \ a_n^{(n)}\leq x\leq b \end{cases};$$

она је дакле у интервалу $[a,b]$ једна монотоно растућа и степенаста (stückweise konstant) функција која у тачкама

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \cdots a_n^{(n)}$$

има скокове дужине 1. (види сл. 1.)



Слика 1

Поделимо функцију $r_n(x)$ са n, и ставимо:

$$\nu_n(x)=\frac{r_n(x)}{n}$$

Функција $\nu_n(x)$ је у интервалу $[a,b]$ степенаста и монотоно расте од 0 до 1. (види сл. 2.)

Видимо дакле да сваком скупу E_n $n=0,1,2,3,\cdots$ низа $\{a_{\nu,n}\}$ одговара по једна функција $\nu_n(x)$ која је за све коначне вредности од n, у интервалу $[a,b]$ потпуно одређена.

Пустимо сад да n тежи бесконачности, тада $\nu_n(x)$ не мора тежити једној одређеној граници за све вредности од x интервала $[a,b]$; у случају пак кад $\nu_n(x)$ тежи једној одређеној граници за све вредности од x интервала $[a,b]$, казаћемо *да низ* $\{a_{\nu,n}\}$ ***припада класи*** ν. Ставимо у томе случају

$$\nu(x)=\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\nu_n(x)=\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\frac{r_n(x)}{n} \tag{3}$$

где је $\nu(x)$ ***функција расйореда низа*** $\{a_{\nu,n}\}$.

Међутим ако $\nu_n(x)$ тежи једној одређеној граници за све тачке интервала $[a,b]$ изузев тачке с једне множине C, $C\subset[a,b]$[1] за које $\nu_n(c)$ не тежи одређеној граници, казаћемо *да низ* $\{a_{\nu,n}\}$ ***припада класи*** ν ***изузев тачке множине*** C; у томе ће случају $\nu_n(c)$ имати своју горњу и доњу границу и ако ставимо уопште

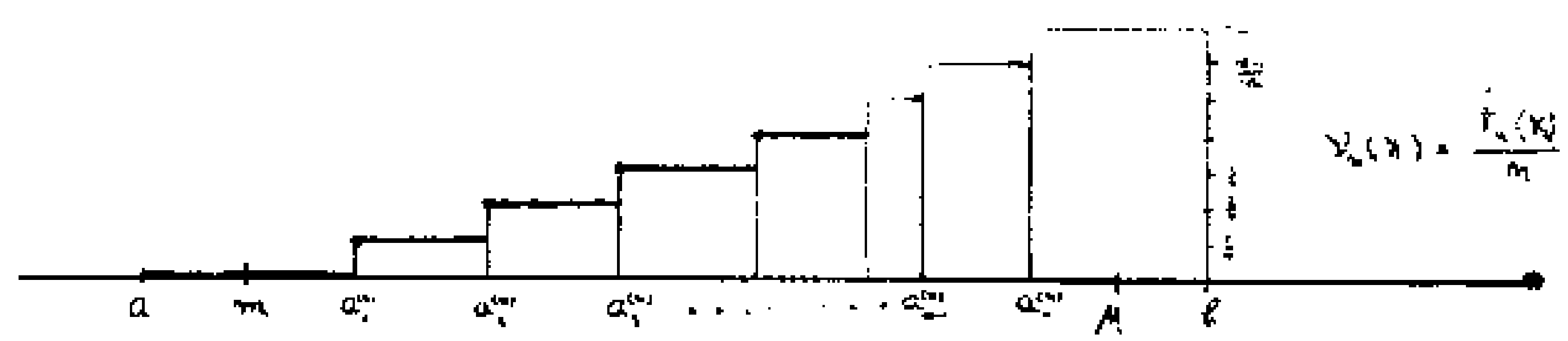
$$\underline{\nu}(x)=\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\inf\cdot\nu_n(x);\qquad \bar{\nu}(x)=\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\sup\cdot\nu(x)\quad\text{кад}\quad x\subset C$$

имаћемо очигледно

$$\underline{\nu}(x)<\bar{\nu}(x)\qquad x\subset C$$

и

$$\underline{\nu}(x)=\nu(x)=\bar{\nu}(x)\quad\text{за}\quad x\subset[a,b]-C\equiv K(C)$$



Слика 2

где је $K(C)$ комплементарна множина множине C. Специјално имамо

$$\underline{\nu}(a)=\nu(a)=\bar{\nu}(a)=0\quad\text{и}\quad \underline{\nu}(b)=\nu(b)=\bar{\nu}(b)=1$$

што следи директно из дефиниције функције $r_n(x)$.

Ако претпоставимо сад да низ $\{a_{\nu,n}\}$ прапада класи ν изузев тачака једне множине C тада горе дефинисане функције $\underline{\nu}(x)$ и $\bar{\nu}(x)$ имају следеће особине:

1° Оне су веће од нуле или равне нули за све тачке x интервала $[a,b]$, јер је

$$r_n(x)\geq 0\quad\text{кад}\quad x\subset[a,b]\quad\text{и}\quad n=1,2,3,\cdots.$$

2° Оне у интервалу $[a,b]$ никад не опадају и док x расте од a до b оне расту од 0 до 1. Наиме:

[1] Симбол $C\subset[a,b]$ значи де све тачке множине C припадају интервалу $[a,b]$ т. ј. леже у интервалу $[a,b]$.

$$r_n(x_0) \leq r_n(x_1) \quad \text{за} \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \cdots$$

дакле

$$\underline{v}(x_0) \leq \underline{v}(x_1) \quad a \leq x_0 \leq x_1 \leq b$$

и

$$v(x_0) \leq v(x_1) \quad x_0 < x_1 \quad \text{и} \quad x_0 \subset K(C), x_1 \subset K(C),$$

3^0 Множина тачака дисконтинуитета функција $\bar{v}(x)$ је пребројива (dénombrable) па су дакле оне у интервалу $[a,b]$ R-интеграбилне. (Позната особина монотоних функција)[1]. Међутим је функција $v(x)$ дефинисана само у тачкама множине $K(C)$ и на њој може имати само пребројиву множину C^* тачака дисконтинуитета; у тачкама множине C пак она уопште не постоји, али ако, те тачке убројимо међу тачке дисконтинуитета, видимо да ће множина тачака дисконтинуитета функције $v(x)$ бити $C^* + C$. Ако је дакле мера (la mésure) множине C равна нули тада је и множина $C + C^*$ нулте мере и према томе је функција распореда $v(x)$ R-интеграбилна и имамо

$$\int_a^x \underline{v}(\xi)\, d\xi = \int_a^x v(\xi)\, d\xi = \int_a^x \bar{v}(\xi)\, d\xi \qquad x \subset [a,b]$$

Напоменимо сад још један став г. S. Saks-a[2] који ће нам и доцније бити потребан и који гласи

Став I: *Ако низ интеграла*

$$F_\nu(x) = \int_a^x f_\nu(\xi)\, d\xi \qquad x \subset [a,b] \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

конвергира, и ако функције $f_\nu(x)$ $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *у интервалу* $[a,b]$ *никад не опадају, тада ће низ функција*

$$f_\nu(x) \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

конвергирати за све x *интервала* $[a,b]$ *изузев једне пребројиве множине тачака тога интервала.*

Ако је дакле множина C нулте мере, то ће низ интеграла

$$\int_a^x v_n(\xi)\, d\xi \qquad n = 1, 2, \cdots$$

[1] Види: H. Lebesque: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris. G. V. 1904. стр. 50—51.

[2] Горњи став г. S. Saks-a није публикован већ ми је лично саопштен.

конвергирати, па пошто су функције $v_n(x)$ $n = 1, 2, 3, \cdots$ монотоне то видимо према Saks-овом ставу да низ функција

$$v_n(x) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

мора конвергирати изузев једне пребројиве множине тачака.

Што нам казује дакле да ако функција $v(x)$ егзистира за све тачке интервала $[a,b]$ изузев једне множине C нулте мере, множина C мора бити пребројива т. ј. моћ множине C неможе бити равна моћи континуума (la puissance du continu).

II.

Уочимо сад израз

$$\mathbf{A}_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{a_\nu^{(n)} \leq x} f(a_\nu^{(n)}) \qquad x \subset [a,b] \tag{5}$$

где је горња сума узета преко свих елемената $\{a_{\nu,n}\}$ скупа E_n, који нису већи од x.

Ми ћемо за функцију $f(x)$ и за низ $\{a_{\nu,n}\}$ $\begin{cases} \nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, \cdots \end{cases}$ засад само претпоставити да су такови да израз

$$\mathbf{A}_n(f, x)$$

тежи једној одређеној граници кад n тежи бесконачности.

Ако дакле ставимо

$$\mathbf{A}(f, x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \mathbf{A}_n(f, x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{r_n(x)} f(a_\nu^{(n)}) \tag{6}$$

то видимо да нам $\mathbf{A}(f, x)$ претставља једну операцију, коју примењујемо на функцију $f(x)$ и која зависи од датога низа $\{a_{\nu,n}\}$. Ова операција има особине сличне особинама одређеног интеграла које се могу изразити следећим једначинама

$$\mathbf{A}(a \cdot f, x) = a \cdot \mathbf{A}(f, x) \tag{7}$$

$$a = \text{const.}$$

$$\mathbf{A}(a + f, x) = a v(x) + \mathbf{A}(f, x) \tag{8}$$

$$\mathbf{A}(f_1 + f_2, x) = \mathbf{A}(f_1, x) + \mathbf{A}(f_2, x) \tag{9}$$

У којим једначинама a претставља једну константу, $v(x)$ функцију распореда низа $\{a_{\nu,n}\}$ а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ две функције за које егзистира операција $\mathbf{A}(f, x)$.

На исти начин видимо да за операцију $\mathbf{A}(f,x)$ постоји следећи низ неједначина које су потпуно аналогне неједначинама одређеног интеграла, и које гласе

$$|\mathbf{A}(f,x)| \leq \mathbf{A}(|f|,x) \tag{10}$$

$$l\,\nu(x) < \mathbf{A}(f,x) < L\,\nu(x) \qquad l \leq f(x) \leq L,\quad a \leq x \leq b \tag{11}$$

$$l\,\mathbf{A}(\varphi,x) < \mathbf{A}(\varphi f,x) < L\,\mathbf{A}(\varphi,x) \qquad \varphi(x) \geq 0 \tag{12}$$

где су L и l горња и доња граница функције $f(x)$ у интервалу $[a,b]$, а $\varphi(x)$ једна у $[a,b]$ позитивна функција за коју постоји операција $\mathbf{A}(\varphi,x)$.

У доказ формула (7) (12) нећемо улазити пошто је веома прост, него ћемо још навести један важан став који ће нам доцније бити потребан и који гласи:

Став II. *Нека је дат један низ у интервалу* $[a,b]$ *ограничених функција*

$$f_\nu(x) \qquad \nu = 0,1,2,\cdots$$

који у $[a,b]$ *тежи униформно ка једној функцији* $f(x)$; *ако постоји*

$$\mathbf{A}(f_\nu,x) \quad \text{за све} \quad \nu = 0,1,2,\cdots$$

постојаће и $\mathbf{A}(f,x)$ *и тада је*

$$\mathbf{A}(f,x) = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \mathbf{A}(f_n,x).$$

Доказ. Из формула (9) и (10) следи

$$|\mathbf{A}(f_\nu,x) - \mathbf{A}(f_{\nu'},x)| = |\mathbf{A}(f_\nu - f_{\nu'},x)| \leq \mathbf{A}(|f_\nu - f_{\nu'}|,x)$$

а како је према претпоставци

$$|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)| < \epsilon \quad \text{за све} \quad \begin{matrix}\nu > N\\ \nu' > N\end{matrix} \quad \text{и} \quad x \subset [a,b]$$

то је према (11)

$$|\mathbf{A}(f_\nu,x) - \mathbf{A}(f_{\nu'},x)| < \epsilon\,\nu(x) < \epsilon \quad \text{за све} \quad \begin{matrix}\nu > N\\ \nu' > N\end{matrix} \quad \text{и} \quad x \subset [a,b]$$

дакле следи да је низ

$$\mathbf{A}(f_\nu,x) \qquad \nu = 0,1,2,\cdots$$

униформно конвергентан у интервалу $[a,b]$. Како је даље

$$f_\nu(x) - \epsilon < f(x) < f_\nu(x) + \epsilon \quad \text{за} \quad \nu > N \quad \text{и} \quad x \subset [a,b]$$

то је

$$\mathbf{A}(f_\nu,x) - \epsilon\,\nu(x) < \mathbf{A}(f,x) < \mathbf{A}(f_\nu,x) + \epsilon\,\nu(x)$$

или

$$|\mathbf{A}(f,x) - \mathbf{A}(f_\nu,x)| < \epsilon \quad \text{за} \quad \nu > N \quad \text{и} \quad x \subset [a,b]$$

што нам казује да $\mathbf{A}(f,x)$ постоји и да низ $\mathbf{A}(f_\nu,x)$ униформно конвергира ка $\mathbf{A}(f,x)$.

Горње једначине важиле су све под претпоставком да се на функцију $f(x)$ може применити операција $\mathbf{A}(f,x)$ и наравно да низ $\{a_{\nu,n}\}$ припада класи ν.

Ми можемо међутим доказати да се операција $\mathbf{A}(f,x)$ може применити на све у интервалу $[a,b]$ континуиране функције $f(x)$, по најпре ћемо доказати следећи специјалнији

Став III: *Ако низ* $\left\{a_{\nu,n}\right\} \begin{matrix}\nu = 1,2,\cdots n\\ n = 1,2,3,\cdots\end{matrix}$ *припада класи* ν *изузев једне пребројиве множине* C *и ако* x *не припада множини* C, *тада можемо на све континуиране функције* $f(x)$ *које имају у интервалу* $[a,b]$ *један* R*-интеграбилан извод, применити операцију* $\mathbf{A}(f,x)$ *и добијамо*

$$\mathbf{A}(f,x) = f(x)\,\nu(x) - \int_a^x f'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi$$

где су $a < a_{\nu,n} < b$ $\begin{matrix}\nu = 1,2,\cdots n\\ n = 1,2,\cdots\end{matrix}$ *а* $\nu(x)$ *је функција расподеда датога низа.*

Доказ:

По J. Franel-у[1] имамо

$$\mathbf{A}_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{r_n(x)} f(a_\nu^{(n)}) = f(x)\frac{r_n(x)}{n} - \int_a^x f'(\xi)\frac{r_n(x)}{n}\,d\xi$$

Пошто x не припада множини C то постоји

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{r_n(x)}{n} = \nu(x)$$

а како је функција $f'(\xi)\nu(\xi)$ R-интеграбилна то је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \int_a^x f'(\xi)\frac{r_n(x)}{n}\,d\xi = \int_a^x f'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi^{2}$$

[1] J. Franel: Math. Ann. Bd. 52. стр. 529—531. 1899.

[2] Види: C. Arzelà, Rend. Acc. Linc. (4) 1. (1885) стр. 537. Memorie Ist. Bologna (5) 8 (1899/1900) стр. 723—725.

одакле добијамо одма

$$\mathbf{A}(f,x) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \mathbf{A}_n(f,x) = f(x)\,\nu(x) - \int_a^x f'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi$$

чиме је горњи став доказан.

Сада није тешко доказати да се операција $\mathbf{A}(f,x)$ може применити на све у интервалу $[a,b]$ континуиране функције $f(x)$: јер према Weierstrass-овом ставу свака се континуирана функција $f(x)$ може преставити једним униформно конвергентним низом полинома, а како полиноми имају један континуиран први извод, то следи из става II и III

Став IV *Ако низ* $\left\{a_{\nu,n}\right\} \begin{matrix}\nu = 1,2,\cdots n\\ n = 1,2,3,\cdots\end{matrix}$ *припада класи* ν *изузев једне пребројиве множине, и ако* x *не припада множини* C, *тада ће*

$$\mathbf{A}(f,x) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{r_n(x)} f(a_\nu^{(n)})$$

егзистирати за све у $[a,b]$ *континуиране функције* $f(x)$.

Примедба. Под извесним претпоставкама за функцију распореда $\nu(x)$, можемо проширити егзистенцију операције $\mathbf{A}(f,x)$ и на општију класу функција $f(x)$ но што су континуиране функције. Тако на пр. ако функција распореда има један R-интеграбилан извод $\rho(x) = \nu'(x)$ тада постоји:

$$\mathbf{A}(f,x) = \int_a^x f(\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi$$

за све у $[a,b]$ R-интеграбилне функције $f(x)$.

Ми горњу примедбу нећемо овде доказивати јер је доказ сувише дуг и пошто ћемо се надаље бавити само континуираним функцијама $f(x)$.

Означимо још са $\mathbf{A}(f)$ израз

$$\mathbf{A}(f) = \mathbf{A}(f,b) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(a_{\nu,n})$$

тада из горњих посматрања следи:

Став V. *Ако низ* $\left\{a_{\nu,n}\right\} \begin{matrix}\nu = 1,2,\cdots\cdots n\\ n = 1,2,3,\cdots\cdots\end{matrix}$ *припада класи* ν *изузев једне пребројиве множине тачака, тада* $\mathbf{A}(f)$ *егзистира за све у* $[a,b]$ *континуиране функције* $f(x)$ *и тада је:* 1^0 *ако* $f(x)$ *има један R-интеграбилан извод*

$$\mathbf{A}(f) = f(b) - \int_a^b f'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi$$

2^0 *ако је* $f(x)$ *R-интеграбилна а* $\nu(x)$ *има један R-интеграбилан извод* $\rho(x) = \nu'(x)$

$$\mathbf{A}(f) = \int_a^b f(\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi.$$

Видимо дакле да егзистенција операције $\mathbf{A}(f,x)$ зависи на првом месту од егзистенције функције распореда $\nu(x)$, и кад нам је она позната можемо у најчешћим случајевима израчунати и $\mathbf{A}(f,x)$, односно $\mathbf{A}(f)$.

Ми ћемо зато најпре навести неколико критеријума који нам дају потребне и довољне услове када један дат низ бројева $\{a_{\nu,n}\}$ припада класи ν; један такав критеријум је изражен следећим ставом.

Став VI. *Нека је* $\varphi(x)$ *једна дата функција која је у интервалу* $[a,b]$ *континуирана и од нуле различна; потребан и довољан услов да низ* $\left\{a_{\nu,n}\right\} \begin{matrix}\nu = 1,2,\cdots n\\ n = 1,2,3,\cdots\end{matrix}$ *припада класи* ν *је да*

$$\Phi(x) = \mathbf{A}(\varphi,x)$$

егзистира за све x *интервала* $[a,b]$.

Доказ. Да је услов потребан следи из става IV.; а да је он у исто време и довољан видимо из следећег.

Према формули (7) и по учињеној претпоставци, ми можемо узети да је функција $\varphi(x)$ позитивна у интервалу $[a,b]$ а да се тиме не умањи генералност доказа.

Уочимо сад једну тачку X интервала $[a,b]$ и поделимо интервал $[a,X]$ поделом P у p интервала λ_ν $\nu = 1,2,3,\cdots p$, помоћу тачака

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{p-1} < x_p = X$$

где је дакле

$$\lambda_\nu = x_\nu - x_{\nu-1} \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots p$$

и нека је λ највећи од интервала λ_ν $\nu = 1, 2, \cdots p$ т. ј.

$$\lambda \geq \lambda_\nu \qquad \nu = 1, 2, \cdots p$$

Означимо даље са l_ν и L_ν најмању и највећу вредност функције $\varphi(x)$ у интервалу λ_ν т. ј.

$$l_\nu \leq \varphi(x) \leq L_\nu \quad \text{за} \quad x_{\nu-p} \leq x \leq x_\nu \qquad \nu = 1, 2, \cdots p$$

и формирајмо у интервалу $[a, X]$ следеће две функције $\psi_p(x)$ и $\Psi_p(x)$ и то

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{L_1} & \text{за } a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ \dfrac{\varphi(x)}{L_\nu} & \text{„} \ x_{\nu-1} < x \leq x_\nu \ , \qquad \nu = 2, 3, \cdots p-1, \\ \dfrac{\varphi(x)}{L_p} & \text{„} \ x_{p-1} < x \leq x_p = X \end{cases}$$

$$\Psi_p(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{l_1} & \text{за } a = x_0 \leq x \leq x_1 \\ \dfrac{\varphi(x)}{l_\nu} & \text{„} \ x_{\nu-1} < x \leq x_\nu \qquad \nu = 2, 3, \cdots p-1 \\ \dfrac{\varphi(x)}{l_p} & \text{„} \ x_{p-1} < x \leq x_p = X \end{cases}$$

Овако формиране функције ψ_p и Ψ_p очигледно имају смисла јер је по претпоставци

$$l_\nu \neq o \quad \text{и} \quad L_\nu \neq o \quad \text{за} \quad \nu = 1, 2, \cdots p$$

Из горњих формула видимо да је

$$\psi_p(x) \leq 1 \leq \Psi_p(x) \quad \text{за} \quad a \leq x \leq X$$

а одавде добијамо

$$\sum_{\nu=1}^{r_n(x)} \psi_p(a_\nu^{(n)}) \leq r_n(x) \leq \sum_{\nu=1}^{r_n(x)} \Psi_p(a_\nu^{(n)})$$

и

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{r_n(x)} \psi_p(a_\nu^{(n)}) \leq \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{r_n(x)}{n} \leq \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{r_n(x)} \Psi_p(a_\nu^{(n)})$$

или

$$\mathbf{A}(\psi_p, X) \leq \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \nu_n(X) \leq \mathbf{A}(\Psi_p, X) \tag{13}$$

да би дакле доказали да $\nu(x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \nu_n(x)$ егзистира, треба да докажемо да $\mathbf{A}(\Psi_p, x)$ и $\mathbf{A}(\psi_p, x)$ теже одређеним границама које се произвољно мало разликују кад је p довољно велик а λ довољно мали. Посматрајмо зато израз

$$\mathbf{A}(\psi_p, X) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{r_n(X)} \psi_p(a_\nu^{(n)}) = \sum_{\mu=1}^{p} \frac{1}{L_\mu} \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\nu=1}^{r_n(x)} \varphi(a_\nu^{(n)}) - \sum_{\nu=1}^{r_n(x_{\mu-1})} \varphi(a_\nu^{(n)}) \right\} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{p} \frac{1}{L_\mu} (\mathbf{A}(\varphi, x_\mu) - \mathbf{A}(\varphi, x_{\mu-1})) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{L_\nu} (\Phi(x_\nu) - \Phi(x_{\nu-1})) =$$

$$= \frac{\Phi(X)}{L_p} - \frac{\Phi(a)}{L_o} - \sum_{\nu=1}^{p} \Phi(x_{\nu-1}) \left\{ \frac{1}{L_\nu} - \frac{1}{L_{\nu-1}} \right\}$$

и пошто је $\Phi(a) = o$ то кад означимо са ω_ν разлику

$$\omega_{\nu-1} = \frac{1}{L_\nu} - \frac{1}{L_{\nu-1}} \qquad \nu = 1, 2, \cdots p$$

добијамо

$$\mathbf{A}(\psi_p, X) = \frac{\Phi(X)}{L_p} - \sum_{\nu=1}^{p} \Phi(x_{\nu-1}) \omega_{\nu-1}$$

На исти би начин добили

$$\mathbf{A}(\Psi_p, X) = \frac{\Phi(X)}{l_p} - \sum_{\nu=1}^{p} \Phi(x_{\nu-1}) \Omega_{\nu-1}$$

где је

$$\Omega_{\nu-1} = \frac{1}{l_\nu} - \frac{1}{l_{\nu-1}} \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots p.$$

Пошто из претпоставке следи да је функција $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ континуирана у интервалу $[a, b]$, то видимо да количине ω_ν и Ω_ν $\nu = 1, 2, \cdots p$ могу бити произвољно мале ако је само λ довољно мали. Из тога следи прво: да је

$$\underset{\lambda=0}{\mathbf{L}}\frac{1}{l_p}=\underset{\lambda=0}{\mathbf{L}}\frac{1}{L_p}=\frac{1}{\varphi(X)}$$

друго: да ће суме

$$\sum_{\nu=1}^{p}\Phi(x_{\nu-1})\,\omega_{\nu-1} \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{p}\Phi(x_{\nu-1})\,\Omega_{\nu-1}$$

тежити одређеним границама кад λ тежи нули ($p \to \infty$); доказ пак да горње суме теже одређеним границама и то независним од поделе P, потпуно је аналог доказу о егзистенцији горњих и доњих интеграла (Darboux-ов став) и зато га овде нећемо извађати.

Да би пак увидели да ће $A(\psi_p,X)$ и $A(\Psi_p,X)$ тежити истој граници кад λ тежи нули, уочимо израз

$$A(\Psi_p,X)-A(\psi_p,X)=\sum_{\nu=1}^{p}\Big(\Phi(x_\nu)-\Phi(x_{\nu-1})\Big)\Big(\frac{1}{l_\nu}-\frac{1}{L_\nu}\Big).$$

Како је $\frac{1}{l_\nu}-\frac{1}{L_\nu}$ скок функције $\frac{1}{\varphi(x)}$ у интервалу λ_ν, то можемо ставити

$\frac{1}{l_\nu}-\frac{1}{L_\nu}<\epsilon$ ако је само λ довољно мали, како је пак

$$\Phi(x_\nu)-\Phi(x_{\nu-1})\geq 0 \qquad \nu=1,2,3,\cdots p$$

јер је функција $\Phi(x)$ монотоно растућа, то следи

$$A(\Psi_p,X)-A(\psi_p,X)<\Phi(X)\epsilon$$

што нам казује да $A(\Psi_p,X)$ и $A(\psi_p,X)$ тежи истој граници кад λ тежи нули (а $p\to\infty$), одакле према неједначини (13) следи да $\nu_n(x)$ мора тежити једној одређеној вредности кад n тежи бесконачности и то оној којој тежи једна од количина $A(\psi_p,x)$ или $A(\Psi_p,x)$ кад λ тежи нули ($p\to\infty$). Тиме је дакле доказано да низ $\{a_{\nu,n}\}$ припада класи ν.

Примедба. Ако још претпоставимо да $\varphi(x)$ има један у интервалу $[a,b]$, R-интеграбилан извод, тада видимо из горњег посматрања да је $\nu(x)$ дата изразом

$$\nu(x)=\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}+\int_a^x\Phi(\xi)\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi^2(\xi)}\,d\xi$$

како је пак

$$\Phi(x)=\varphi(x)\,\nu(x)-\int_a^x\varphi'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi$$

то видимо да ове реципрочне једначине важе само под претпоставком да су функције $\nu(x)$ и $\Phi(x)$ монотоне а да при томе оне немају свој први извод у свим тачкама интервала $[a,b]$.

Видимо да нам став VI. даје један доста општи критеријум за распознавање да ли низ $\{a_{\nu,n}\}$ припада класи ν, јер кад је специјално

$$\varphi(x)=1,$$

тада је

$$\Phi(x)=\nu(x),$$

и у томе се случају горњи став поклапа са самом дефиницијом класе ν.

Ми ћемо сад доказати један став, који је сасвим друге природе, али који ће нам бити много потребнији и који гласи:

Став VII. *Потребан и довољан услов да низ* $\{a_{\nu,n}\}\begin{matrix}\nu=1,2,\cdots n\\ n=1,2,\cdots\end{matrix}$ ***припада класи*** ν ***изузев једне пребројиве множине тачака је да***

$$\mathbf{A}(f)=\mathbf{A}(f,b)$$

егзистира за све у интервалу $[a,b]$ ***континуиране функције*** $f(x)$.

Из става V. следи да је горњи услов потребан; да би пак доказали да је он и довољан уочимо следећу у интервалу $[a,b]$ континуирану функцију $\varphi_\alpha(x)$:

$$\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}\alpha-x & \text{за } a\leq x\leq\alpha\\ 0 & \text{„ } \alpha\leq x\leq b\end{cases}\qquad a<\alpha<b$$

Из претпоставке следи да $A(\varphi_\alpha)$ егзистира за све α интервала $[a,b]$. Уочимо сад израз $A_n(\varphi_\alpha)$; имамо:

$$A_n(\varphi_\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\alpha(a_{\nu,n})=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{r_n(\alpha)}(\alpha-a_\nu^{(n)})=\frac{r_n(\alpha)}{n}\alpha-\sum_{\nu=1}^{r_n(\alpha)}a_\nu^{(n)}$$

а како је по Franel-у

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{r_n(\alpha)}a_\nu^{(n)}=\alpha\frac{r_n(\alpha)}{n}-\int_a^\alpha\frac{r_n(\xi)}{n}\,d\xi$$

то је дакле

$$A_n(\varphi_a) = \int_a^a \frac{r_n(\xi)}{n}\,d\xi = \int_a^a \nu_n(\xi)\,d\xi,$$

а како су функције $\nu_n(\xi)$ $n = 1, 2, \cdots$ монотоне у интервалу $[a, b]$ и како по претпоставци $A_n(\varphi_a)$ тежи одређеној граници кад n тежи бесконачности то према ставу г. S. Saks-a, низ $\nu_n(\xi)$ $n = 1, 2, \cdots$ мора тежити једној одређеној граници $\nu(\xi)$ за све ξ интервала $[a, b]$ изузев највише једну пребројиву множину тачака. На тај је начин доказано да низ $\{a_{\nu,n}\}$ припада класи ν изузев највише једне пребројиве множине тачака.

На основу овога става доказаћемо сада следећи став, помоћу којега можемо у најчешћим случајевима распознати када један дат низ припада класи ν изузев једне пребројиве множине тачака, т. ј. дали постоји операција $\mathbf{A}(f)$ примењена на једну континуирану функцију $f(x)$. Тај став гласи:

Став VIII. *Нека је дат један низ у интервалу* $[a, b]$ *континуираних функција*

$$\psi_\nu(x) \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

такав да помоћу низа функција

$$\Psi_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{\nu} C_{\mu,\nu}\,\psi_\mu(x) \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

где су $C_{\mu,\nu}$ $\begin{smallmatrix}\mu = 0, 1, \cdots \nu \\ \nu = 0, 1, 2 \cdots\end{smallmatrix}$ *дате константе, можемо униформно апроксимирати сваку у интервалу* $[a, b]$ *континуирану функцију* $f(x)$. *Потребан и довољан услов да низ* $\{a_{\nu,n}\}$ $\begin{smallmatrix}\nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, \cdots\end{smallmatrix}$ *припада класи* ν *изузев једне пребројиве множине тачака јесте тај да*

$$A(\Psi_\nu)$$

егзистира за све природне бројеве $\nu = 0, 1, 2, \cdots$

Из става V_1, видимо да је горе наведен услов потребан; из ставова II. и VII. видимо лако да је горњи услов такође и довољан.

Познато је да функције

$$\psi_\nu(x) = x^\nu \quad \text{или} \quad \sin \nu x \quad \text{или} \quad \cos \nu x$$

задовољавају услове става VIII. т. ј. да помоћу њих можемо у једном датом интервалу $[a, b]$ униформно апроксимирати сваку у $[a, b]$ континуирану функцију $f(x)$. Дакле можемо формулисати следећи специјалан

Став IX. *Потребан и довољан услов да низ* $\{a_{\nu,n}\}$ $\begin{smallmatrix}\nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, \cdots\end{smallmatrix}$ *припада класи* ν *изузев једне пребројиве множине, је да један од трију израза*

$$A(\xi^\nu) \quad \text{или} \quad A(\sin \nu\xi) \quad \text{или} \quad A(\cos \nu\xi)$$

егзистира за све природне бројеве $\nu = 0, 1, 2, \cdots$

Горњи нам став може у многим случајевима послужити да распознамо да ли један дат низ $\{a_{\nu,n}\}$ припада класи ν, а у појединим случајевима можемо помоћу њега и израчунати саму функцију распореда датога низа.

III.

У овом ћемо одељку изложити још неколико начина, како се може израчунати функција распореда $\nu(x)$.

1⁰ У многим случајевима функцију распореда $\nu(x)$ можемо добити и из саме дефиниције т. ј. формирањем функције $r_n(x)$ и израчунавањем лимеса

$$\nu(x) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{r_n(x)}{n}$$

Најпростији низ, за који можемо израчунати функцију распореда горњим начином, је очигледно низ

$$\left\{\frac{\nu}{n}\right\} \begin{matrix}\nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, \cdots\end{matrix}$$

јер је у томе случају

$$r_n(x) = [nx][1]$$

и

$$\nu(x) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{[nx]}{n} = x \qquad \rho(x) = 1$$

---

[1] Израз $[a]$ претставља највећи цео број који је садржан у броју a.

па дакле из става V_{2^0}, добијамо познату једначину

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)=\int_0^1 f(\xi)\,d\xi$$

која важи за све у интервалу [o,1] R-интеграбилне функције $f(x)$.

Интересантан је међутим низ

$$\left\{\frac{\lg\nu}{\lg n}\right\}\begin{cases}\nu=1,2,\cdots n\\ n=1,2,\cdots\end{cases}\qquad \frac{\lg 1}{\lg 1}=1$$

За њега добијамо лако

$$r_n(x)=[n^x]$$

а одавде видимо да је

$$v(x)=\begin{cases}o & \text{за} \quad o\leq x<1\\ 1 & „ \quad x=1\end{cases}$$

дакле је према ставу V_{1^0}

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\lg\nu}{\lg n}\right)=f(1)$$

за све континуиране функције $f(x)$, које имају један у интервалу [0,1] R-интеграбилан извод. Но лако је увидети да ће горња једначина важити за све R-интеграбилне функције $f(x)$ које су у тачки $x=1$ континуиране.

2^0 Према ставу IX. знамо да нам је функција расподеда потпуно одређена изузев једне пребројиве множине тачака ако су нам познате количине

$$A(\xi^\nu)=M'_\nu \qquad \nu=0,1,2,\cdots;$$

но из става V_{1^0} видимо да су нам у томе случају познати моменти M_ν $\nu=0,1,2,\cdots$ функције распореда $v(x)$ и да је

$$\int_a^b \xi^\nu v(\xi)\,d\xi=\frac{b^{\nu+1}-M'_{\nu+1}}{\nu+1}=M_\nu \qquad \nu=0,1,\cdots\cdots.$$

Познато је међутим да је једна функција потпуно одређена, изузев једне множине нулте мере, ако су дати њезини моменти[1]. Међутим у нашем случају, пошто је $v(x)$ једна монотона функ-

[1] види: M. Lerch, Acta Math. Bd. 27. стр. 345—347; 1903.
E. Phragmén, Acta Math. Bd. 28. стр. 360—364; 1904.

ција, она је њезиним моментима потпуно одређена до на једну пребројиву множину тачака.

Но у општем случају ми неможемо израчунати једну функцију, помоћу њезиних момената; само нам у појединим специјалним случајевима то може поћи за руком као што ћемо видети у следећем примеру.

Узмимо низ

$$\{\mathrm{Sin}\,\nu\theta\}\begin{cases}\nu=1,2,3,\cdots n\\ n=1,2,3,\cdots\cdots\end{cases}$$

где је $\frac{\theta}{\pi}$ један ирационалан број, тада добијамо лако

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\mathrm{Sin}\,\nu\theta)^{2k}=\frac{2k!}{2^{2k}(k!)^2}=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$$ [1]

и

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\mathrm{Sin}\,\nu\theta)^{2k+1}=o,$$

но пошто су нам познати интеграли

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2k}}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{x^{2k+1}}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx=o$$

то видимо према ставу V_{2^0} да су количине

$$M'_{2k}=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\qquad M'_{2k+1}=o\qquad k=o,1,2,\cdots$$

моменти функције

$$\rho(x)=v'(x)$$

па дакле из горњих интеграла следи да је

$$\rho(x)=v'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\quad \text{и}\quad v(x)=\frac{\pi-\arccos x}{\pi}$$

јер је

$$\int_{-1}^{+1}\xi^k\rho(\xi)\,d\xi=M'_k\qquad k=o,1,2,\cdots$$

одакле видимо да једначина

[2] види: N. Nielsen, Elemente der Funktionentheorie, B. G. T. Leipzig стр. 354. 1911.

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\sin\nu\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \frac{\theta}{\pi} \text{ ирационалан.}$$

важи за све у интервалу $[-1, +1]$ R-интеграбилне функције $f(x)$. Горњу једначину можемо још написати у облику

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\sin\nu\theta) = \frac{\theta}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\theta}}^{\frac{\pi}{2\theta}} f(\sin\theta\xi)\,d\xi$$

но како је функција

$$\Omega(x) = f(\sin\theta x)$$

једна периодична функција, са периодом

$$2\omega = \frac{2\pi}{\theta},$$

то видимо да једначина

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\Omega(\nu) = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}}\Omega(\xi)\,d\xi$$

важи за све периодичне функције $\Omega(x)$ које се могу написати у горњем облику и чија је периода 2ω, један ирационалан број. Овај резултат можемо добити и на основу Weyl-ових резултата.

3° Из става IX. видимо такође да нам је познавањем израза

$$\mathbf{A}\left(\cos\frac{\nu\pi(2\xi-a-b)}{b-a}\right) = a'_\nu \quad \text{и} \quad \mathbf{A}\left(\sin\frac{\nu\pi(2\xi-b-a)}{b-a}\right) = b'_\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

функција распореда $\nu(x)$ потпуно одређена до на једну пребројиву множину тачака; из става V. пак следи да су нам у томе случају познате Fourier-ове константе функције $\nu(x)$ т. ј.

$$\int_a^b \nu(\xi)\cos\frac{\nu\pi(2\xi-a-b)}{b-a}\,d\xi = -\frac{b-a}{2\pi}\frac{b'_\nu}{\nu} = \frac{b-a}{2}a_\nu$$

$$\int_a^b \nu(\xi)\,d\xi = \frac{b-a}{2}a_0$$

$$\nu = 1, 2, \cdots$$

$$\int_a^b \nu(\xi)\sin\frac{\nu\pi(2\xi-a-b)}{b-a}\,d\xi = \frac{b-a}{2\pi}\frac{a'_\nu-(-1)^\nu}{\nu} = \frac{b-a}{2}b_\nu.$$

Познато је, даље, да се свака функција ограничене варијације (à variation bornée) може развити у један конвергентан Fourier-ов ред[1]. Како је $\nu(x)$ једна монотоно растућа функција, то видимо да ју можемо развити у један конвергентан Fourier-ов ред облика

$$\frac{\nu(x+0)+\nu(x-0)}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{a_\nu\cos\frac{\nu\pi(2x-a-b)}{b-a} + b_\nu\sin\frac{\nu\pi(2x-b-a)}{b-a}\right\}$$

помоћу којега нам је дакле функција распореда $\nu(x)$ потпуно одређена, да на једну пребројиву множину тачака.

4°. Поред горе наведених метода за израчунавање функције распореда $\nu(x)$ може нам још следећи став у многим случајевима бити потребан:

Став X. *Нека је* $\varphi(x)$ *монотона функција, која у интервалу* $[a, b]$ *има један R-интеграбилан извод.*

Формирајмо помоћу датог низа $\{a_{\nu,n}\}\begin{matrix}\nu=1,2,3,\cdots n\\ n=1,2,3,\cdots\end{matrix}$ *следећи низ бројева*

$$\{b_{\nu,n}\} \equiv \{\varphi(a_{\nu,n})\}\begin{matrix}\nu=1,2,3,\cdots\cdots n\\ n=1,2,3,\cdots\cdots\cdots\end{matrix},$$

ако је функција распореда низа $\{b_{\nu,n}\}$ *равна* $\nu_1(x)$, *функција распореда низа* $\{a_{\nu,n}\}$ *је* $\nu_1(\varphi(x))$.

Да би горњи став доказали уочимо једну функцију $f(x)$ која у интервалу $[\varphi(a), \varphi(b)]$ има један R-интеграбилан извод. Ако сад на функцију $f(\varphi(x))$ применемо операцију $\underset{(a)}{\mathbf{A}}(f(\varphi))$ која одговара низу $\{a_{\nu,n}\}$, добијамо према ставу V_1.

$$\underset{(a)}{\mathbf{A}}(f(\varphi)) = f(\varphi(b)) - \int_a^b f'(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi$$

где је $\nu(\xi)$ функција распореда низа $\{a_{\nu,n}\}$; применемо ли даље на функцију $f(x)$ операцију $\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f)$ која одговара низу $\{b_{\nu,n}\}$, то добијамо:

$$\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f) = f(\varphi(b)) - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f'(\xi)\,\nu_1(\xi)\,d\xi$$

[1] види: **Whittaker and Watson, Modern Analysis.** стр. **165. Cambrige. Univer. Press.** III. изд. **1920.**

где је $\nu_1(\xi)$ функција распореда низа $\{b_{\nu,n}\} \equiv \{\varphi(a_{\nu,n})\}$. Извршимо ли сад у горњем интегралу смену

$$\xi = \varphi(\eta)$$

тада је

$$\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f) = f(\varphi(b)) - \int_a^b f'(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,\nu_1(\varphi(\xi))\,d\xi .$$

Очигледно је пак, да је

$$\underset{(a)}{\mathbf{A}}(f(\varphi)) = \underset{(b)}{\mathbf{A}}(f),$$

одакле следи једначина

$$\int_a^b f'(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi = \int_a^b f'(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,\nu_1(\varphi(\xi))\,d\xi$$

која мора важити за све у интервалу $[\varphi(a), \varphi(b)]$ R-интеграбилне функције $f'(x)$.

Ставимо сад за $f'(\xi)$ функцију

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad \xi \leq x \\ 0 & \text{„} \quad x < \xi \end{cases} \qquad a < x < b$$

то из горње једначине следи

$$\int_a^x \varphi'(\xi)\,\nu(\xi)\,d\xi = \int_a^x \varphi'(\xi)\,\nu_1(\varphi(\xi))\,d\xi$$

а одавде добијамо

$$\nu(x) = \nu_1(\varphi(x)).$$

Ова једначина важи за све x интервала $[a,b]$, до на једну множину нулте мере. Тиме је горњи став доказан.

Из горњег става видимо да у случају кад нам успе да нађемо једну функцију $\varphi(x)$, такову да низ $\{\varphi(a_{\nu,n})\}$ има једну познату функцију распореда, ми можемо наћи и функцију распореда низа $\{a_{\nu,n}\}$.

Нека нам је н. пр. дат низ

$$\{a_{\nu,n}\} \equiv \{\nu\theta - [\nu\theta]\} \begin{cases} \nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

где је θ један ирационалан број; узмимо за функцију $\varphi(x)$ функцију $\sin 2\pi x$. Та функција у интервалу $[0,1]$ није монотона, но ћемо ипак помоћу ње моћи израчунати функцију распореда датог низа. Имамо најпре

$$\{b_{\nu,n}\} \equiv \{\sin 2\pi(\theta\nu - [\theta\nu])\} \equiv \{\sin 2\pi\theta\nu\} \begin{cases} \nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

низ чија је функција распореда равна

$$\frac{\pi - \arccos x}{\pi}.$$

Дакле је

$$\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

а како је

$$\underset{(a)}{\mathbf{A}}(f(\sin 2\pi\xi)) = \int_0^1 f(\sin 2\pi\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,\rho\left(\frac{\arccos\xi}{2\pi}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

то имамо

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \int_{-1}^{+1} f(\xi)\,\rho\left(\frac{\arccos\xi}{2\pi}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

једначина која мора важити за све R-интеграбилне функције $f(\xi)$. Дакле је

$$\rho\left(\frac{\arccos\xi}{2\pi}\right) = 1$$

т. ј.

$$\rho(x) = 1 \quad \text{и} \quad \nu(x) = x.$$

Низ $\{\theta\nu - [\theta\nu]\}$ има дакле ту особину да је

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu\theta - [\nu\theta]) = \int_0^1 f(\xi)\,d\xi$$

т. ј. бројеви

$$\nu\theta - [\nu\theta] \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

су равномерно распоређени у интервалу $[0,1]$; разултат кога је нашао H. Weyl.

У једном другом раду биће наведено још неколико интересантних примена горњих резултата.

SUR L'ÉVALUATION DES LIMITES SE RATTACHANT AUX SUITES A DOUBLES ENTRÉES

PAR J. KARAMATA

(Resumé)

Dans la présente note l'auteur se propose de trouver la limite d'une suite de nombres de la forme

$$A_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(a_{\nu,n})$$

$\left\{a_{\nu,n}\right\}\begin{matrix}\nu = 1, 2, \cdots n\\ n = 1, 2, 3, \cdots\end{matrix}$ étant des nombres réels compris dans l'intervalle $[a, b]$.

En désignant par $r_n(x)$ la fonction définie dans l'intervalle $[a, b]$ par l'équation

$$r_n(x) = \sum_{a_{\nu,n} \leq x} 1 \qquad a \leq x \leq b$$

c. à. d. $r_n(x)$ est égale au nombre des nombres $a_{\nu,n}$, $\nu = 1, 2, \cdots n$ plus petits ou égaux à x.

L'auteur définit la *„fonction de répartition des nombres* $a_{\nu,n}$" par

$$\nu(x) = \lim_{n=\infty} \frac{r_n(x)}{n}$$

Moyennant cette fonction il parvient aux resultats suivents:

La fonction $f(x)$ étant continue dans l'intervalle $[a, b]$ s'il existe pour la suite $\{a_{\nu,n}\}$ une fonction de répartition pour tous les points de l'intervalle $[a, b]$, excepté un ensemble dénombrable de points, la limite

$$\mathbf{A}(f) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\, \mathbf{A}_n(f).$$

existe; en particulier si f(x) possède une dèrivée première inte
grable R dans [a,b], cette limite peut s'écrire

$$\mathbf{A}(f) = f(b) - \int_a^b f'(\xi)\nu(\xi)\,d\xi$$

Si parcontre, $\nu(x)$ possède une dèrivée première intégrabl R dans [a,b], $\mathbf{A}(f)$ existe pour toutes les fonctions f(x) intégrabl R dans [a,b] et, en désignant par

$$\rho(x) = \nu'(x)$$

on a

$$\mathbf{A}(f) = \int_a^b f(\xi)\rho(\xi)\,d\xi$$

L'auteur donne en outre certaines conditions nécéssaires ‹ suffisantes pour l'existence de la fonction de répartition, doı les principales sont:

L'existence de $\mathbf{A}(f)$ pour toutes les fonctions continues dai l'intervalle [a,b], ou bien l'existence de l'une des trois expression

$$A(\xi^\nu),\ A(\sin\nu\xi),\ A(\cos\nu\xi)$$

pour toutes les valeurs entières de $\nu = 0, 1, 2, \cdots$

Les conditions sont nésésaires et suffisantes pour l'e: stence de la fonction de répartition pour tous les points ‹ l'intervalle [a,b] excépté au plus un ensemble dénobrable.

En dernier lieu l'auteur donne quelques moyens po calculer la fonction de répartition de la suite $\{a_{\nu,n}\}$ en particuli les deux suivents:

1° connaissant les valeurs

$$A\left(\cos\frac{\nu\pi(2\xi-a-b)}{b-a}\right) = a'_\nu \quad \text{et} \quad A\left(\sin\frac{\nu\pi(2\xi-a-b)}{b-a}\right) = b'_\nu$$
$$\nu = 0, 1, 2, \cdot$$

la fonction de répartion $\nu(x)$ est donnée par sa série de Four convergente dans [a,b], de la forme

$$\frac{\nu(x+0)+\nu(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left\{ a_\nu \cos\frac{\nu\pi(2\xi-a-b)}{b-a} + b_\nu \sin\frac{\nu\pi(2\xi-a-b)}{b-a} \right\}$$

où

$$a_0 = \frac{b-a}{2}\int_a^b \nu(\xi)\,d\xi, \quad a_\nu = -\frac{b'_\nu}{\nu\pi}, \quad b_\nu = \frac{a'_\nu-(-1)^\nu}{\nu\pi} \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

2° $\varphi(x)$ étant une fonction continue, monotone, et possédant une dérivée intégrable R dans [a,b], si l'on connait la fonction de répartition $\nu(x)$ de la suite

$$\left\{\varphi(a_{\nu,n})\right\} \begin{matrix} \nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{matrix}$$

la fonction de répartition de la suite

$$\left\{a_{\nu,n}\right\} \begin{matrix} \nu = 1, 2, \cdots n \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{matrix}$$

est

$$\nu(\varphi(x)).$$

L'auteur se propose d'exposer diverses applications de ces resultats généraux dans un prochain travail.