О УОПШТЕЊИМА MERCER-ОВОГ СТАВА.

Од

ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

О УОПШТЕЊИМА MERCER-ОВОГ СТАВА.

Од ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

(Приказано на скупу Академије природних наука, од 19. октобра 1931.)

У последње време играју важну улогу у разним гранама анализе извесне групе ставова из збирљивости бескрајних низова. Таквој једној групи припадају и ставови о којима је овде реч. Ти ставови, а нарочито сам Mercer-ов став, могу се у извесном смислу сматрати као инверсни ставови познатог Cauchy-евог става, који гласи:

Нека је a_n низ произвољних бројева; тада из

$$a_n - a_{n-1} \to s, \qquad n \to \infty, \tag{1}$$

следи увек

$$a_n / n \to s, \qquad n \to \infty \text{ [1]}. \tag{2}$$

Исто се тако извесна уопштења Mercer-овог става, у истом смислу, могу сматрати као инверсни ставови Jensen-овог [5] [2] уопштења Cauchy-евог става, а који гласи:

Став А. *Нека је u_n низ произвољних бројева; тада ће из*

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} \to s, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

следити

$$u_n / v_n \to s, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

кад год низ v_n задовољава следеће услове:

1) Види напомену 1°.

2) Број у кукастим заградама [ ] односи се на рад наведен у попису литературе на крају ове расправе.

$$|v_n| \to \infty \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{n} |v_\nu - v_{\nu-1}| = O(|v_n|)\ ^{3)}, \quad n \to \infty\ ^{4)}. \tag{5}$$

Како се и у којем смислу ставови о којима ће озде бити реч могу сматрати као инверсни ставови горњих ставова, видимо већ кад сам Mercer-ов став [13] упоредимо са Cauchy-евим ставом (у облику наведеном у напомени 1[0]), а који, са Hardy-евим [3] проширењем на комплексне бројеве c, има облик

Став B. *Нека је s_n произвољан низ бројева и c комплексна константа; тада из*

$$s_n + \frac{c}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to s(1+c), \quad n \to \infty,$$

следи

$$s_n \to s, \qquad n \to \infty,$$

кад год је

$$R(c) > -1. \quad ^{5)}$$

Остале ставове ове врсте, т. ј. сва уопштења овог Mercer-овог става, можемо разделити у две главне групе судећи по њиховим облицима.

Ставови прве групе, које ћемо за разлику од оних друге групе назвати *Mercer-овим ставовима*, испитују услове које морају задовољавати низови q_n и v_n да би из

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} + q_n \frac{u_n}{v_n} \to (1+q_n)s, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

следило да

$$\frac{u_n}{v_n} \to s \qquad \text{или да} \qquad \frac{u_n}{v_n} - \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \to s, \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Ови ставови, као што видимо, уопштавају Mercer-ов став у два правца и то прво, што константу c замењују низом бројева q_n и друго, што се уместо обичне аритметичке средине јавља проширена аритметичка средина у облику $\frac{u_n}{v_n}$ (види напом. 2[0])

---

3) Веза облика $a_n = O(b_n)$, $n \to \infty$, која имплицитно претпоставља да је $b_n > 0$, казује да количник $|a_n|/b_n$ остаје ограничен, т. ј. мањи од једног сталног броја M, за све вредности индекса n.

4) Види напомену 2[0].

5) $R(c)$ значи реални део комплексног броја c: уопште, ако је c комплексан број, писаћемо $c = R(c) + iI(c)$.

Они су, дакле, у извесном смислу инверсни ставови напред наведеног Jensen-овог става, који се за $v_n = n$ претвара у Cauchy-ев став.

Као што ставови ове прве групе проширују Mercer-ов став, тако су и ставови друге групе природно проширење следећег Pólya-овог [15] става:

Став C. *Нека је s_n низ произвољних бројева и c имагинарна константа: тада ће из*

$$s_n + c(s_n - s_{n-1}) \to s, \quad n \to \infty,$$

следити

$$s_n \to s, \quad n \to \infty,$$

кад год је $|c| < 1$ *или* $R(c) > -{}^1/_2$.

Они наиме испитују када ће из

$$s_n + q_n(s_n - s_{n-1}) \to s, \quad n \to \infty, \tag{7}$$

следити

$$s_n \to s, \quad n \to \infty;$$

па према томе проширују Pólya-ов став замењујући константу c низом q_n.

Зато ћемо овде ове ставове назвати *Pólya-овим ставовима* и ако извесни од тих ставова садрже Mercer-ов став као специалан случај, (види на пр. Vijayaraghavan [21] и Izumi [4]).

Као што видимо, Mercer-ов став и његова уопштења нису у правоме смислу инверсни ставови Cauchy-евог и Jensen-овог става; ти у правоме смислу инверсни ставови Cauchy-евог и Jensen-овог става били би пре ставови који се обично називају Tauber-овим ставовима, а о којима сам се опширно бавио у својим радовима [6] и [7].

Што се тиче самих Mercer-ових ставова они се разликују од Tauber-ових ставова у следећем:

Док Tauber-ови ставови истражују услове које мора задовољавати низ u_n (односно низ s_n) да би из егзистенције границе $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = s$ (односно границе $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu} = s$) следила егзистенција границе $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = s$ (односно границе

$\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$), дотле Mercer-ови ставови претпостављају да изрази облика $\dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} + q_n \dfrac{u_n}{v_n}$ (односно облика $s_n + q_n \dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu s_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu}$) подељени са $1 + q_n$ теже коначној и одређеној граници и истражују услове које мора задовољавати низ q_n да би количник $\dfrac{u_n}{v_n}$ или $\dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$ (односно низ $\dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu s_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu}$ или s_n) тежио истој граници, па ма какав био низ u_n (односно s_n). Поред тога Tauber-ови ставови изискују много дубље понирање у саму природу посматраних низова, што чини њихове доказе далеко тежим од доказа Mercer-ових ставова.

Pólya-ови се ставови међутим, као што то лако увиђамо, односе у ствари на испитивање асимптотских вредности решења линеарних једначина са коначним диференцијама. Са те је тачке гледишта у осталом ове ставове и испитао M. Verberk [20].

Са друге стране је T. Kojima [12] показао како се Mercer-ови и Pólya-ови ставови могу извести из општих Toeplitz-евих [19] ставова, а то и јесте разлог што чини предмет испитивања ових ставова много лакшим од Tauber-ових ставова. Међутим за доказ већине Mercer-ових и Pólya-ових ставова нису чак ти општи Toeplitz-еви ставови ни потребни; за њихово извођење довољан је већ само Jensen-ов став. Ти се ставови, дакле, и ако су они у извесном смислу инверсни ставови Jensen-овог става, могу ипак из њега самог извести, као што сам то у својој расправи [8] и показао. У тој сам расправи, наиме, изневши већину Mercer-ових и Pólya-ових ставова, показао појединачно како се сваки такав став може извести директно из Jensen-овог става.

У овој расправи нећу према томе износити ова многобројна уопштења Mercer-овог става (а која се налазе у радовима наведеним под бројевима [1]—[4], [8]—[18] и [20]—[22]) већ ћу само, групишући их у два општа става, извести у трећем делу доказе тих двају ставова, и упоредићу те опште ставове са најопштијим Mercer-овим и Pólya-овим ставовима.

У другоме делу ове расправе испитиваћу особине једне класе низова, које називам *квази-монотоним низовима*. То су низови који задовољавају други услов (5), а који, преко Jensen-овог става, играју нарочиту улогу код ставова ове врсте.

II.

Као што смо малочас напоменули, за један низ реалних или комплексних бројева A_n казаћемо да је *квази-монотон* ако он задовољава услов

$$\sum_{\nu=1}^{n} |A_\nu - A_{\nu-1}| = O(|A_n|), \quad n \to \infty . \tag{8}$$

Видели смо да се тај услов већ појавио у Jensen-овом уопштењу Cauchy-евог става, а преко њега ће се он појавити и у свим Mercer-овим и Pólya-овим ставовима.

Појам квази-монотоности претставља једно уопштење обичне монотоности [5]), али поред тога оно има и ту предност што се по својој природи може непосредно применити и на низове са комплексним члановима, док то код обичне монотоности није случај. А ако квази-монотоност, т. ј. услов (8) којим је она дефинисана, изближе посматрамо са гледишта комплексних низова, тада видимо да је она у ствари и природно проширење обичне монотоности на комплексне бројеве.

Нека су наиме A_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, $A_0 = 0$, комплексни бројеви, тада те бројеве, тачке у комплексној равни, можемо сматрати као врхове полигоналне линије $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \ldots \overline{A_{n-1}A_n}$, а $\overline{OA_n}$ као резултанту. Услов (8) тада казује, да се однос збира дужина страна те полигоналне линије и дужине резултанте не може неограничено увеличавати кад број страница неограничено расте. Ово се посматрање међутим код једноставно монотоних низова своди на праволинијско.

Са друге је стране сам назив оправдан још и тиме, што квази-монотони низови задржавају скоро све особине монотоних низова. Посматрајмо овде неколико од тих особина.

1°. *Монотон низ бројева или тежи коначној и одређеној граници, или тежи бесконачности, т. ј. он не може осцилирати.*

Сличну особину имају и квази-монотони низови, за њих важи наиме следећи став:

[5]) Види напомену 3°.

Став 1. *Ако је низ Λ_n квази-монотон, или ће он тежити коначној и одређеној граници, или ће $|\Lambda_n| \to \infty$ кад $n \to \infty$.*

Јер ако бројеви Λ_n остају коначни тада ће из (8), т. ј. из

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}| \leqslant M |\Lambda_n|, \quad (M \text{ позитиван и независан од } n) \quad (9)$$

следити да ред $\sum_{\nu=1}^{n} (\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}) = \Lambda_n - \Lambda_0$ апсолутно конвергира, т. ј. да низ Λ_n тежи коначној и одређеној граници; међутим у случају да низ Λ_n не тежи одређеној граници, т. ј. да ред $\sum_{\nu=1}^{n} (\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1})$ не конвергира, тада ће $\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}| \to \infty$, одакле, према горњој неједначини, мора и $|\Lambda_n| \to \infty$.

2°. *Ако је Λ_n низ монотоно растућих бројева, тада количник Λ_k/Λ_n остаје коначан, шта више мањи је од 1, ма какви били бројеви n и $k \leqslant n$.*

За квази-монотоне низове важи аналоган став, наиме:

Став 2. *Ако је низ Λ_n квази-монотон, тада количник Λ_k/Λ_n остаје коначан за све n и $k \leqslant n$.*

Јер ако неједначину

$$|\Lambda_k| = \left|\sum_{\nu=1}^{k} (\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1})\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}|, \quad k \leqslant n,$$

где смо ставили да је $\Lambda_0 = 0$, помножимо са неједначином (9), добијамо

$$\frac{|\Lambda_k|}{|\Lambda_n|} \leqslant M \frac{\sum_{\nu=1}^{k} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}|}{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}|} \leqslant M, \quad k \leqslant n = 0, 1, 2, \ldots$$

3°. Трећа заједничка особина квази-монотоних и монотоних низова је она која се јавља у самом Jensen-овом ставу. У првобитном је облику наиме тај став био доказан под претпоставком да низ $\Lambda_n = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_n$ монотоно расте, а затим је он проширен на квази-монотоне низове Λ_n. Али оно на шта бих овде хтео нарочито да обратим пажњу је то, да су у ствари квази-монотони низови најопштији низови за које Jensen-ов став важи. Ово следи из познатог Toeplitz-евог става [19], а може се формулисати на следећи начин:

Став 3. *Ако*

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu} \to s, \quad n \to \infty,$$

за све низове s_n који теже граници s, тада низ $\Lambda_n = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu$ мора бити квази-монотон и $|\Lambda_n|$ мора тежити бесконачности.

4°. На послетку, обратимо још пажњу на следеће особине монотоних низова:

Збир, производ и уопште монотоно растућа функција монотоно растућих низова су такође монотоно растући низови.

Испитајмо сад у колико се те особине могу пренети и на квази-монотоне низове. Потпуну аналогију имамо у случају производа два квази-монотона низа, тада наиме важи следећи став:

Став 4. *Ако су Λ'_n и Λ''_n два квази-монотона низа, тада је и низ $\Lambda_n = \Lambda'_n \Lambda''_n$ квази-монотон.*

Јер кад посматрамо израз који дефинише квази-монотоне низове имаћемо, на основу особине 2°, става 2,

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda'_\nu \Lambda''_\nu - \Lambda'_{\nu-1} \Lambda''_{\nu-1}|}{|\Lambda'_n \Lambda''_n|} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda'_\nu \Lambda''_\nu - \Lambda'_\nu \Lambda''_{\nu-1} + \Lambda'_\nu \Lambda''_{\nu-1} - \Lambda'_{\nu-1} \Lambda''_{\nu-1}|}{|\Lambda'_n \Lambda''_n|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda'_\nu| \, |\Lambda''_\nu - \Lambda''_{\nu-1}|}{|\Lambda'_n| \, |\Lambda''_n|} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda''_{\nu-1}| \, |\Lambda'_\nu - \Lambda'_{\nu-1}|}{|\Lambda'_n| \, |\Lambda''_n|} \leqslant$$

$$\leqslant M' \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda''_\nu - \Lambda''_{\nu-1}|}{|\Lambda''_n|} + M'' \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda'_\nu - \Lambda'_{\nu-1}|}{|\Lambda'_n|},$$

што доказује тврђење.

У случају збира два квази-монотона низа, постоји следећи аналоган став:

Став 5. *Ако су Λ'_n и Λ''_n квази-монотони низови, тада је и низ $\Lambda_n = \Lambda'_n + \Lambda''_n$ квази-монотон кад год низ Λ'_n није асимптотски раван низу $-\Lambda''_n$, т. ј. прецизније речено, кад год низ Λ''_n/Λ'_n нема тачку -1 као тачку нагомилавања.*

Овај се став, слично пређашњем, лако може потврдити.

Да се у овоме ставу јавља једно ограничење, т. ј да не сме $\Lambda'_n \backsim -\Lambda''_n$, лако смо могли и наслутити, јер код квази-монотоности не улази у обзир ни знак низа ни то, да ли он опада или расте, а већ код монотоних низова знамо да разлика двају монотоно растућих низова не мора уопште бити монотон низ. Иста ова примедба важи и код производа монотоних низова, наиме да производ монотоно растућег и монотоно опадајућег низа (што је исто што и количник двају монотоно растућих низова) не мора уопште бити монотон низ. Како је међутим производ квази-монотоних низова увек квази-монотон низ, без ограничења, то ће количник два у монотоно растућих низова, ако именитељ не тежи бесконачности (јер монотоно опадајући низови који $\to 0$ нису квази-монотони) бити квази-монотон, ако већ није монотон.

Напослетку, што се тиче питања да ли је низ $\Phi(\Lambda_n)$ (где је $\Phi(x)$ монотона или каква друга функција) квази-монотон кад је то случај са низом Λ_n, наведимо овде само да је то увек случај, кад је $\Phi(x)$ ма какав полином, што уосталом непосредно следи из горња два става. За произвољне монотоне функције изгледа да то уопште није случај; ми се међутим у то питање овде детаљније нећемо упуштати.

Да бисмо са друге стране увидели природу квази-монотоних низова, посматрајмо какав ће облик узети услов (8) кад је низ Λ_n дат у облику $\Lambda_n = \varrho_n e^{i\theta_n}$. На првом месту, лако је увидети применом неједначине $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$, *да је низ* $|\Lambda_n| = \varrho_n$ *квази-монотон кад год је низ* Λ_n *квази-монотон*; обратно међутим то није случај, као што видимо из следећег става:

Став 6. *Да би низ $\Lambda_n = \varrho_n e^{i\theta_n}$ био квази-монотон, потребно је и довољно да низ $\varrho_n = |\Lambda_n|$ буде квази-монотон и да буде*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu |\theta_\nu - \theta_{\nu-1}| = O(\varrho_n), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Да бисмо увидели најпре да су ти услови довољни, имамо

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}|}{|\Lambda_n|} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \left|\varrho_\nu e^{i\theta_\nu} - \varrho_{\nu-1} e^{i\theta_{\nu-1}}\right|}{\varrho_n} =$$

$$= \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \left|\varrho_\nu \left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_{\nu-1}}\right) + (\varrho_\nu - \varrho_{\nu-1}) e^{i\theta_{\nu-1}}\right|}{\varrho_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \left|e^{(\theta_\nu - \theta_{\nu-1})i} - 1\right|}{\varrho_n} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_\nu - \varrho_{\nu-1}|}{\varrho_n} \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu |\theta_\nu - \theta_{\nu-1}|}{\varrho_n} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_\nu - \varrho_{\nu-1}|}{\varrho_n},$$

одакле следи да ће низ Λ_n бити квази-монотон кад год је низ, $\varrho_n = |\Lambda_n|$ квази-монотон и услов (10) задовољен. Обратно следи отуда што је $|\theta_n - \theta_{n-1}| \leqslant 2\pi$ и што је низ $|\Lambda_n|$ квази-монотон кад год је то случај са низом Λ_n.

У свим уопштењима Mercer-овог става, квази-монотони низови се јављају у облику производа $w_n = \prod_{\nu=1}^{n} (1 + d_\nu)$, а поред тога морају још задовољавати и услов да $|w_n| \to \infty$ са n. Како се у томе случају и услов да $|w_n| \to \infty$ и услов (9) прилично компликују, то ћемо овде још потражити у колико се они могу упростити. Том ћемо приликом наићи још на један став, који важи за монотоне низове и видећемо како се и он може проширити на квази-монотоне низове.

Тај се став састоји у следећем: ако су бројеви d_n позитивни, т. ј. ако низ $\prod_{\nu=1}^{n} (1 + d_\nu)$ монотоно расте тада је познато да ће дотични производ бити конвергентан или дивергентан према томе да ли ред $\sum d_\nu$ конвергира или дивергира. Овај став, који важи за реалне и позитивне бројеве d_n, може бити проширен и на комплексне бројеве, ако се услов да низ $\prod_{\nu=1}^{n}(1+d_\nu)$ монотоно расте, замени условом да исти буде квази-монотон, т. ј. тада имамо следећи став:

Став 7. *Ако је низ* $\prod_{\nu=1}^{n}(1+d_\nu)$ *квази-монотон, тада ће производ* $\prod(1+d_\nu)$ *конвергирати или дивергирати, према томе да ли је ред* $\sum d_\nu$ *конвергентан или дивергентан; у овом другом случају из* $\sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu| \to \infty$, $n\to\infty$, *следиће такође да и* $\prod_{\nu=1}^{n}|1+d_\nu| \to \infty$, $n\to\infty$, *и обратно.*

Да ће производ $\prod(1+d_\nu)$ бити конвергентан, шта више апсолутно, ако је ред $\sum d_\nu$ апсолутно конвергентан, познато је; да ће обратно ред $\sum d_\nu$ бити апсолутно конвергентан ако је производ $\prod(1+d_\nu)$ конвергентан, добијамо из следећег:

Из услова (8) или (9), који казују да ће низ $w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1+d_\nu)$ бити квази-монотон, следи егзистенција једног низа бројева k_n, таквог да је

$$\sum_{\nu=1}^{n}|w_\nu - w_{\nu-1}| = k_n |w_n|,$$

а да је при том $k_0=0$ и $1\leqslant k_n \leqslant M$ за све $n=1,2,3,\dots$; отуда следи да мора бити $|w_n - w_{n-1}| = k_n|w_n| - k_{n-1}|w_{n-1}|$, или, кад ставимо $w_n = (1+d_n)w_{n-1}$ и скратимо са $|w_{n-1}|$, биће

$$k_{n-1} + |d_n| = k_n|1+d_n|, \quad \text{за све} \quad n=1,2,3,\dots \tag{11}$$

Ако сад у овој једначини ставимо $n=1,2,3,\dots,n$, тако добивене једначине међусобно измножимо и резултат поделимо са $\prod_{\nu=1}^{n-1}k_\nu$, добићемо

$$|d_1|\prod_{\nu=2}^{n}(1+|d_\nu|/k_{\nu-1}) = k_n|w_n|,$$

па ће коначно, на основу неједначине $k_n\leqslant M$, бити

$$|d_1|\prod_{\nu=2}^{n}(1+|d_\nu|/M) \leqslant M|w_n|, \quad \text{за све} \quad n.$$

Из ове неједначине сад лако видимо да ће из конвергенције низа w_n, т. ј. продукта $\prod(1+d_\nu)$, следити конвергенција продукта $\prod(1+|d_\nu|/M)$, а отуда и апсолутна конвергенција реда $\sum d_\nu$. Тиме је први део става доказан.

Други део следи из исте неједначине; из ње лако увиђамо да дивергенција реда $\sum|d_\nu|$ повлачи за собом да $|w_n|\to\infty$ да обратно из $|w_n|\to\infty$, следи дивергенција реда $\sum|d_\nu|$ видимо из неједначине

$$|w_n| = \prod_{\nu=1}^{n}|1+d_\nu| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n}(1+|d_\nu|)$$ [7].

Да бисмо напослетку нашли једноставнији услов за квази-монотоност низова који су дати у облику производа, приметимо да је горе изведена једначина (11) еквивалентна услову (8) или (9). Ако се њоме послужимо да услов за квази-монотоност низова изразимо у простијем облику, доћи ћемо до следећег става:

Став 8. *Да би низ* $w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1+d_\nu)$ *био квази-монотон потребно је и довољно да постоји низ ограничених бројева* k_n, *т. ј.* $k_n = O(1)$, $n\to\infty$, *такав да буде*

$$|d_n| \leqslant k_n|1+d_n| - k_{n-1}, \quad \text{за све} \quad n=1,2,3,\dots \tag{12}$$

Да је тај услов довољан лако је увидети ако горњу неједначину помножимо са $|w_{n-1}| = \left|\prod_{\nu=1}^{n-1}(1+d_\nu)\right|$, ставимо $n=1,2,3,\dots n$ и све тако добивене неједначине саберемо; тада добијамо

$$\sum_{\nu=1}^{n}|w_\nu - w_{\nu-1}| \leqslant k_n|w_n|,$$

што је, према услову $k_n=O(1)$, еквивалентно услову (8) или (9). Да је услов (12) и потребан, т. ј. да из услова (8) или (9) следи егзистенција низа бројева $k_n = O(1)$, видели смо при извађању једначине (11).

[7] Види напомену 4^0.

III.

Рекли смо још у почетку да се сва уопштења Mercer-овог става могу разделити у две јасно различите групе и назвали смо ставове једне групе Pólya-овим, а друге Mercer-овим ставовима. Овде ћемо сад формулисати два општа става, од којих ће први садржати већину Pólya-ових ставова а други скоро све Mercer-ове ставове, и показаћемо, као што смо то већ раније напоменули, да су оба ова става непосредна последица Jensen-овог става.

Став I. *Нека је* s_n *низ произвољних бројева: тада ће из*

$$s_n + q_n(s_n - s_{n-1}) \to s, \quad n \to \infty, \tag{I}$$

следити

$$s_n \to s, \quad n \to \infty, \tag{II}$$

кад год је низ

$$w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu), \quad \textit{где је} \quad d_n = 1/q_n,$$

квази-монотон и кад

$$w_n \to \infty \quad \textit{са} \quad n.$$

Став II. *Нека је* u_n *низ произвољних бројева; тада ће и.*

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} + q_n \frac{u_n}{v_n} \to (1 + q_n)s, \quad n \to \infty, \tag{III}$$

следити

$$\frac{u_n}{v_n} \to s, \quad n \to \infty, \tag{IV}$$

кад год је низ

$$w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu),$$

где је

$$d_n = (1 + q_n)\frac{v_n - v_{n-1}}{v_{n-1}},$$

квази-монотон и кад

$$w_n \to \infty \quad \textit{са} \quad n.$$

Овај се други став може још написати у облику сличнијем ставу I, који гласи:

Став III. *Нека је* u_n *низ произвољних бројева, тада ће из*

$$\frac{u_n}{v_n} + d_n\left\{\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} - \frac{u_n}{v_n}\right\} \to s, \quad n \to \infty, \tag{V}$$

следити

$$\frac{u_n}{v_n} \to s, \quad n \to \infty, \tag{VI}$$

кад год је низ

$$w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_n),$$

где је

$$d_n = \frac{1}{q_n}\,\frac{v_n - v_{n-1}}{v_{n-1}},$$

квази-монотон и кад

$$w_n \to \infty \quad \textit{са} \quad n.$$

Да су ови ставови непосредна последица Jensen-овог става, шта више да су му они еквивалентни, само у другом облику изражени, видимо из следећег:

Први став добијамо кад у Jensen-овом ставу ставимо $u_n = s_n w_n$ и $v_n = w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + 1/q_\nu)$. Тада се релације (3) и (4) претварају у (I) и (II) а услови (5) у услове става I.

Други став добијамо исто тако непосредно ако у Jensen-овом ставу заменемо низ u_n низом $u_n \cdot \prod_{\nu=1}^{n}\left\{1 + q_\nu \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}}\right\}$, а низ v_n низом

$$w_n = v_n \prod_{\nu=1}^{n}\left\{1 + q_\nu \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}}\right\} = \prod_{\nu=1}^{n}\left\{1 + (1 + q_\nu)\frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}}\right\};$$

тада ће се релације (3) и (4) претворити у релације (III) и (IV), а услови (5) у услове става II.

Напослетку се став III добија кад се у ставу II уместо $\frac{1}{1+q_n}$ стави q_n.

Као што видимо, докази горњих ставова су од најлакших. Тамо где наилазимо на мало више тешкоће је кад је потребно да услове горњих ставова заменимо једноставнијим, па било да ти нови услови остају потребни и довољни, као што је то случај са условима горњих ставова [8]), било да захтевамо само довољне услове.

Већ смо у делу II, код ставова 7 и 8, видели да се ти услови могу заменити једноставнијим условима, који при томе још увек остају потребни и довољни, а који у случају горњих ставова узимају облик:

Потребни и довољни услови I-ог става су:

да ред $\sum_{\nu=1}^{n} 1/ q_{\nu}$ *дивергира*, (VII)

и да постоји низ бројева $k_n = O(1)$, $n \to \infty$, *такав да буде*

$$|1 + k_{n-1} q_n| \leqslant k_n |1 + q_n| \quad \text{за све} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \quad \text{(VIII)}$$

II-ог става су:

да ред $\sum_{\nu=1}^{n} |1 + q_\nu| \frac{|\nu_\nu - \nu_{\nu-1}|}{|\nu_{\nu-1}|}$ *дивергира*, (IX)

и да постоји низ бројева $k_n = O(1)$, $n \to \infty$, *такав да буде*

$$|k_{n-1} \nu_{n-1} + (1 + q_n)(\nu_n - \nu_{n-1})| \leqslant$$
$$\leqslant k_n |\nu_{n-1}| + (1 + q_n)(\nu_n - \nu_{n-1}) \quad \text{за све } n; \quad \text{(X)}$$

и III-ћег става су:

да ред $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|q_\nu|} \frac{|\nu_\nu - \nu_{\nu-1}|}{|\nu_{\nu-1}|}$ *дивергира*, (XI)

и да постоји такав низ бројева $k_n = O(1)$, $n \to \infty$ *да буде*

$$|k_{n-1} q_n \nu_{n-1} + \nu_n - \nu_{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant k_n |q_n \nu_{n-1}| + |\nu_n - \nu_{n-1}| \quad \text{за све} \quad n. \quad \text{(XII)}$$

[8]) Види напомену 5[0].

Један специјалан случај ових услова добијамо кад узмемо да је низ k_n константан, независан од n, т. ј. ако ставимо $k_n = 1/k$ са $k > 0$. У том случају ови услови постају много једноставнији и, као што ћемо то још видети, могу се написати у још простијем облику, из којег јасно излази да је у ствари тај случај онај коме одговарају већина досад изведених Pólya-ових и Mercer-ових ставова; али ти услови, постављени у том облику, нису више потребни и довољни, већ су само довољни.

Као што сам већ раније напоменуо, у својој расправи [8] изнео сам већину ставова који се налазе у радовима цитираним на крају ове расправе, и показао сам посебно на сваком од тих ставова како се они изводе из Jensen-овог става. Сам став I (као и услове (VII)—(XII)) нисам у овоме раду изводио у горњем општем облику. Зато ћу овде још показати како и у колико овај став садржи најопштије Pólya-ове ставове. — Ти, досада најопштији ставови ове врсте су: у реалном став Izumi-a [4], који гласи:

Из

$$s_n(a_n + p_n) - a_n s_{n-1} = o(p_n), \quad n \to \infty, \text{ [9])} \qquad (13)$$

следи

$$s_n \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (14)$$

кад год су елементи низова a_n *и* p_n *позитивни и ред* $\sum p_n / a_n$ *дивергентан;*

а у комплексном став Copson-Ferrar-a [2], који има облик:

Из

$$(a_n + p_n) s_n - a_n s_{n-1} \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (15)$$

следи $s_n \to 0$, $n \to \infty$, (16)

кад год су елементи низа a_n *позитивни бројеви,* $\liminf_{n = \infty} R(p_n) > 0$ *и ред* $\sum 1/a_\nu$ *дивергентан.*

Лако је увидети (види и [4]) да је Izumi-ев став општији од Copson-Ferrar-овог става у случају кад су елементи низа

[9]) Веза облика $a_n = O(b_n)$, $n \to \infty$, која имплицитно претпоставља да је $b_n > 0$, казује да количник $|a_n| / b_n \to 0$ кад $n \to \infty$.

p_n реални бројеви, као и то да се Izumi-ев став не може применити на комплексне низове p_n; према томе ова два става нису један у другоме садржани. Са друге стране ни Copson-Ferrar-ов став, ни Izumi-ев став (за реално c) не садрже у почетку наведен Pólya-ов став. Међутим, док су и Izumi-ев и Pólya-ев став садржани у ставу I, дотле Copson-Ferrar-ов став није у њему потпуно садржан.

Да бих ово показао и изближе испитао везу између Copson-Ferrar-овог става и става I, извешћу најпре из става I други један став, у којем ће услов (VIII) бити замењен горе споменутим простијим али не више потребним и довољним, већ само довољним условом; овај став гласи:

Став IV. *Из* (I) *следи* (II) *кад год је ред* $\sum 1/|q_\nu|$ *дивергентан,*

$$\liminf_{n=\infty} R(q_n) > -\tfrac{1}{2}$$

$$и \qquad I(q_n) = O\{\tfrac{1}{2} + R(q_n)\}, \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Да бисмо овај став доказали и у исто време увидели да он следи из става I, довољно је да покажемо да ће услов (VIII) бити увек задовољен кад год су услови (16) испуњени. Ми ћемо, шта више, показати да из услова (16) следи егзистенција једне константе $k > 0$, такве да је

$$k + |q_n| \leqslant |1 + q_n|, \quad k > 0 \quad за\ све \quad n \geqslant N, \tag{17}$$

и да ће обратно из услова (17) следити услови (16). Другим речима показаћемо да су услови (16) еквивалентни услову (VIII) кад у њему ставимо $k_n = 1/k$, $k > 0$, а који тада узима облик (17).

Ако у услову (17) ставимо $q_n = z = x + iy$, и ако приметимо да једначина

$$k + |z| = |1 + z|,$$

односно једначина

$$4\,\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{k^2} - 4\,\frac{y^2}{1 - k^2} = 1,$$

претставља хиперболу са фокусима $(0, 0)$, $(-1, 0)$, центром

$(-\frac{1}{2}, 0)$ и асимптотама $y = \pm \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\, x - \frac{1}{2}$, тада видимо да услов (17) казује да се скоро сви бројеви q_n (т. ј. сви изузев један коначан број) морају налазити са десне стране десне гране те хиперболе, а у овом су случају услови (16) увек задовољени. Лако је сад и обратно увидети да ће из услова (16) следити увек егзистенција таквог, ма и веома малог броја k, т. ј. таква једна хипербола, да услов (17) буде испуњен. Ово казује да су услови (16) и (17) еквивалентни, па према томе да је и став IV садржан у ставу I.

Сада можемо лако увидети да је Izumi-ев став садржан у ставу IV, т. ј. у ставу I. Јер, ако релацију (13) поделимо са p_n и ставимо $q_n = a_n/p_n$, она ће се претворити у релацију (I), са $s = 0$, а услови Izumi-ева става постају: $\sum_{\nu=1}^{n} 1/q_\nu \to \infty$ и $q_n > 0$. Ови су услови очигледно садржани у условима (VII) и (16). Још је лакше увидети да је Pólya-ов став садржан у ставу IV; тада је наиме $q_n = c$ и $R(q_n) = R(c) > -\frac{1}{2}$, па према томе други услов (16) отпада.

Што се тиче, напослетку, Copson-Ferrar-овог става, приметимо најпре да се релација (15), сменом $a_n = p_n q_n$, претвара у

$$p_n\{s_n + q_n(s_n - s_{n-1})\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Из ове релације, и услова $\liminf_{n=\infty} R(p_n) > 0$ Copson-Ferrar-овог става, следи релација (I) са $s = 0$, т. ј. следи да мора и

$$s_n + q_n(s_n - s_{n-1}) \to 0 \quad кад \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Међутим из (19) и услова Copson-Ferrar-ова става не следи релација (14), т. ј. да $s_n \to 0$ кад $n \to \infty$. Да би наиме у том случају релација (14) следила из релације (19) мора, према ставу I, (јер је услов (VIII) потребан и довољан), постојати низ бројева $k_n = O(1)$ такав да услов (VIII) буде задовољен ако су услови Copson-Ferrar-ова става испуњени. Да бисмо увидели да ово у општем случају није испуњено, т. ј. да из услова Copson-Ferrar-ова става, (14) не мора увек следити из (19), довољно је посматрати следеће специјалне низове:

$$a_n = n, \quad p_n = n/(1 + i\sqrt{n}) \quad и \quad q_n = 1 + i\sqrt{n}.$$

Како ови низови задовољавају услове Copson-Ferrar-овог става, то је довољно показати још да они не задовољавају услов (VIII), т. ј. да не постоји низ бројева $k_n = O(1)$ такав да неједначина

$$1 + k_{n-1}\sqrt{1+n} \leqslant k_n\sqrt{4+n},$$

т. ј. неједначина

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{1+n}}\left\{1 + \frac{3k_n}{\sqrt{1+n}+\sqrt{4+n}}\right\} \leqslant k_n - k_{n-1}, \qquad (20)$$

буде задовољена. Међутим из $k_n = O(1)$ следи да $\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu \to \infty$ кад $n \to \infty$, па према неједначини (20) мора и $\sum_{\nu=1}^{n}(k_\nu - k_{\nu-1}) = k_n - k_0 \to \infty$, одакле следи да не постоји низ ограничених бројева k_n који би задовољавао неједначину (20).

Одавде закључујемо да за специјални низ $q_n = 1 + i\sqrt{n}$ из (19) у општем случају не следи (14), т. ј. да ће у томе случају постојати специјални низови s_n који неће тежити нули а који ће задовољавати услов (19); према томе неће ни Copson-Ferrar-ов став бити садржан у ставу I, а у толико пре ни у ставу IV.

Ово следи у осталом отуда што је претпоставка Copson-Ferrar-овог става, наиме релација (15), односно (18), ужа од претпоставке става I, наиме релације (19), јер она не захтева само да $s_n + q_n(s_n - s_{n-1}) \to 0$, већ да производ $p_n\{s_n + q_n(s_n - s_{n-1})\} \to 0$, где може $p_n \to \infty$. Према томе би Copson-Ferrar-ов став требао да буде садржан у ставу I кад год је $p_n = O(1)$. Да је ово заиста случај, шта више да је у томе случају Copson-Ferrar-ов став садржан у ставу IV, видимо из следећег:

Ако ставимо $p_n = a_n/q_n = a_n/(\sigma_n + i\tau_n)$, тада ће услов $p_n = O(1)$ и услови Copson-Ferrar-овог става узети облике

$$\frac{a^2_n}{\sigma^2_n + \tau^2_n} \leqslant M, \quad \textit{за све} \quad n > N,$$

$$\frac{a_n\sigma_n}{\sigma^2_n + \tau^2_n} \geqslant 1/M' \quad \textit{за све} \quad n,$$

$$a_n > 0 \quad \textit{за све} \quad n.$$

Из прва два услова следује

$$a_n / \sigma_n \leqslant MM',$$

а отуда и из другог

$$\left(\frac{\tau_n}{\sigma_n}\right)^2 \leqslant M'\left(\frac{a_n}{\sigma_n}\right) - 1 \leqslant MM'^2 - 1 = M'',$$

који услов са другим условом казује да су услови (16) задовољени, па према томе да је у случају $p_n = O(1)$, Copson-Ferrar-ов став садржан у ставу IV.

Из свега овог видимо још и то, да став Copson-Ferrar-а припада у ствари једној општијој групи ставова од Pólya-ових ставова; ставови те групе бавили би се испитивањем када би из релације (где смо за разлику од релације (18) ставили $1/p_n$ уместо p_n) облика

$$s_n + q_n(s_n - s_{n-1}) = o(p_n), \quad n \to \infty,$$

следило да $s_n \to 0$; или општији, који би ставови испитивали асимптотско понашање низа s_n, ако је познато асимптотско понашање израза

$$s_n + q_n(s_n - s_{n-1}),$$

т. ј. ако је

$$s_n + q_n(s_n - s_{n-1}) \sim p_n, \quad n \to \infty.$$

Ово се питање у ствари своди на испитивање асимптотског понашања решења опште линеарне једначине првог реда са коначним диференцијама.

Пређимо сад још у кратко на ставове друге врсте, т. ј. на ставове које смо назвали Mercer-овим ставовима. Њихов сам општи облик, наиме став II, већ изнео у својој расправи [8], али не са условима (IX) и (X). У тој сам расправи такође показао однос тога става са досада познатим ставовима ове врсте. Овде бих желео још да истакнем везу између тог става II и другог Copson-Ferrar-овог става [2], који је најопштији став ове врсте, и који гласи:

Из

$$\frac{u_n}{v_n} + q_n\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (21)$$

следи

$$\frac{u_n}{v_n} \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (22)$$

кад год је

$$\liminf_{n\to\infty} R(q_n) > -1, \tag{23}$$

$$\nu_{n-1} < \nu_n \quad \text{и} \quad \nu_n \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Истим путем као и код ставова прве врсте, т. ј. као и код Pólya-ових ставова, можемо и овде увидети да овај став није садржан у ставу II (нити да је став II у њему садржан). Томе је исти узрок као и код ставова прве врсте, наиме зато што претпоставка (21) горњега става више захтева (и то у случају кад $|q_n| \to \infty$) него претпоставке (III) става II. Да би наиме из претпоставке (III) следило (IV) морамо поред услова (23) и (24) горњега става претпоставити (слично као и код става IV) још да је $I(1-q_n) = O\{R(1-q_n)\}$, $n \to \infty$. Дакле ће став, који би био аналоган Copson-Ferrar-овом ставу а који би следио из става II, имати облик:

Став V. *Из (III) следи (IV) кад год је*

$$\liminf_{n=\infty} R(q_n) > -1, \quad I(q_n) = O\{R(1-q_n)\}, \quad n \to \infty,$$
$$\nu_{n-1} < \nu_n \quad и \quad \nu_n \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Доказ овога става, наиме да он следи из става II, нећу овде изводити, јер сам га донекле извео у својој расправи [8].

Из става II, као и из става III, можемо још извести и општије ставове од става V, на пр. слично као код извођења става IV, но тиме се нећемо даље бавити.

Приметимо, напослетку, као што то из пређашњег видимо, да ни овај други Copson-Ferrar-ов став, као и њихов први, не спада потпуно у ову групу ставова, већ да се он исто тако односи на општију групу ставова, који из асимптотског понашања израза (21), т. ј. из

$$\frac{u_n}{\nu_n} + q_n \frac{u_n}{\nu_n} - \frac{u_{n-1}}{\nu_{n-1}} \sim p_n, \quad n \to \infty, \tag{25}$$

испитују асимптотско понашање количника u_n/ν_n. Овај се став, међутим, постављен у тако општем облику, опет своди на испитивање асимптотског понашања решења линеарне једначине са коначном диференцијом

$$u_n + q'_n (u_n - u_{n-1}) = p'_n, \quad p'_n \sim p_n \nu_n, \quad n \to \infty,$$

коју добијамо из релације (25) кад је помножимо са ν_n и ставимо $q'_n = \dfrac{\nu_n q_n}{\nu_n - \nu_{n-1}}$.

Мислим да сам овим дао јасан преглед ставова ове врсте и указао на њихово право место код инверсних ставова збирљивости бескрајних низова.

НАПОМЕНЕ.

1°. Овом ставу, стављајући $a_n = \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu$, можемо дати још и следећи облик:

Из $s_n \to s$, $n \to \infty$, *следи увек* $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to s$, $n \to \infty$.

2°. Овом Jensen-овом ставу, стављајући $u_n = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu s_\nu$ и $v_n = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu$, можемо дати још и следећи облик:

Нека је s_n *низ произвољних бројева; тада ће из*

$$s_n \to s, \quad n \to \infty,$$

следити

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu} \to s, \quad n \to \infty,$$

кад год низ λ_n *задовољава услове*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \to \infty \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_\nu| = O\left(\left|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\right|\right), \quad n \to \infty.$$

У овом се облику он најчешће и јавља.

3°. Уколико квази-монотоност уопштава обичну монотоност, у случају да су елементи низа Λ_n реални бројеви, увидећемо још понајбоље из следећег:

Да би низ реалних бројева Λ_n *био квази-монотон потребно је и довољно да постоји низ монотоно растућих бројева* K_n, *такав да буде*

$$K_n = O(|\Lambda_n|), \quad n \to \infty,$$

и да је $\quad \Lambda_n - \Lambda_{n-1} \geqslant -(K_n - K_{n-1})$ *за све* n.

Јер ако су горњи услови задовољени, низ

$$\bar{\Lambda}_n = \Lambda_n + K_n$$

монотоно расте, па кад ставимо $\Lambda_n = \bar{\Lambda}_n - K_n$, биће

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}| = \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\nu=1}^{n} |(\bar{\Lambda}_\nu - \bar{\Lambda}_{\nu-1}) - (K_\nu - K_{\nu-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ |\bar{\Lambda}_\nu - \bar{\Lambda}_{\nu-1}| + |K_\nu - K_{\nu-1}| \right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \bar{\Lambda}_\nu - \bar{\Lambda}_{\nu-1} + K_\nu - K_{\nu-1} \right\} = \frac{\bar{\Lambda}_n + K_n}{|\Lambda_n|} =$$

$$= \frac{\Lambda_n + 2K_n}{|\Lambda_n|} \leqslant 1 + 2M' = M,$$

што казује да је низ Λ_n заиста квази-монотон.

Обратно, ако је низ Λ_n квази-монотон тада је, кад ставимо

$$K_n = \sum_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu - \Lambda_{\nu-1}|,$$

по претпоставци

$$K_n = O(|\Lambda_n|), \quad n \to \infty,$$

а међутим је

$$\Lambda_n - \Lambda_{n-1} \geqslant -|\Lambda_n - \Lambda_{n-1}| = -(K_n - K_{n-1}) \quad \text{за све} \quad n,$$

што доказује егзистенцију низа бројéва K_n који задовољава услове горњег става. Овим је доказано да је егзистенција таквог низа бројева потребна и довољна за квази-монотоност.

4° Што се тиче горњега става 7, постоји у вези са њим, још једно питање које би било од интереса испитати, а које се састоји у следећем:

Ако је низ $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu)$ монотон, тада је низ $\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu$ монотон и обратно; ово, изгледа, не важи за квази-монотоне низове и преостаје питање да се увиди у колико се тај факт може проширити и на квази-монотоне низове.

5° Да су ови услови и потребни, следи из II-ог дела, тачке 3. Како се то преноси са Jensen-овог става на горње ставове покажимо на пр. на ставу I.

Ако за све низове S_n који теже граници s следи да и

$$s_n = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} (w_\nu - w_{\nu-1})\, S_\nu}{w_n} \to s, \quad n \to \infty, \qquad \text{(A)}$$

тада, према ставу 3, низ w_n мора задовољавати услове става I. Из (A) међутим следи

$$\frac{w_n s_n - w_{n-1} s_{n-1}}{w_n - w_{n-1}} = S_n\,,$$

која ће једначина, за $w_n = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q_\nu}\right)$, узети облик

$$s_n + q_n (s_n - s_{n-1}) = S_n\,.$$

Да би дакле из ове једначине следило да $s_n \to s$, ма какав био низ S_n који тежи граници s, низ q_n мора задовољавати услове става I; дакле су ти услови заиста и потребни.

ПОПИС НАВЕДЕНИХ РАДОВА.

1. *M. J. Belinfante*. Über einen Grenzwertsatz aus der Theorie der unendlichen Folgen. Math. Ann. *101*, стр. 312—315 (1929).
2. *E. T. Copson, W. I. Ferrar.* Notes on the structure of sequences I. Journ. of the Lond. Math. Soc., *4*, стр. 258—264 (1929).
3. *G. H. Hardy*. Generalizations of a limited theorem of Mr. Mercer. Quart. Journ., *43*, стр. 143—150 (1912).
4. *S. Izumi.* A theorem on limits and its application. Tôhoku Math. Journ., *33*, стр. 181—186 (1931).
5. *J. L. Jensen.* Om en Satning of Cauchy. Tidskrift for Mathematik, (5), *2*, стр. 81—84 (1884).
6. *Ј. Карамата.* О инверсним ставовима збирљивости бескрајних низова. Глас Срп. кр. академ., CXLIII *(70)*, I. део, стр. 1—24, II. део, стр. 121—146 (1931).
7. *J. Karamata.* Quelques théorèmes d'inversion relatifs aux intégrales et aux séries, део II. Bull. de Math. et de Phys. pures et appl. de l'Ecole Polyt. de Bucarest, у штампи.
8. — Sur les inversions d'un théorème de Cauchy et leurs généralisations. Tôhoku Math. Journ., у штампи.
9. *K. Knopp.* Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn I. Schur. Math. Ann., *74*, стр. 459—461 (1913).
10. — Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit. Math. Zeitschrift, *19*. стр. 97—113 (1923).
11. *T. Kojima.* On relation between the limits of the sequences $x_n + \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu$ and x_n. Tôhoku Math. Journ., *12*. стр. 177-180 (1917).
12. — On generalized Toeplitz's theorems on limit and their applications. Tôhoku Math. Journ., *12*, стр. 291—326 (1917).
13. *I. Mercer.* On the limites of real variants. Proc. Lond. Math. Soc., (2), *5*, стр. 206—224 (1907).
14. *Y. Okada.* A theorem on limits. Tôhoku Math. Journ.. *15*, стр. 280—283 (1919).
15. *G. Pólya.* Aufgabe; Arch. d. Math. u. Phys., (3) *24*, стр. 282 (1916). Lösung von S. Sidon, ebenda, (3) *26*, стр. 68 (1917).

16. *A. Pringsheim.* Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte und die Verallgemeinerung eines beim Beweise benützten Grenzwertsatzes. Münch. Berichte, стр. 209—224 (1916).

17. *W. Sierpinski.* Sur la dépendance entre l'existence de limites des suites $x_n - \frac{q}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$ et x_n. Tôhoku Math. Journ., *11*, стр. 1—4 (1917).

18. *I. Schur.* Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte. Math. Ann., **74**, стр. 447—459 (1913).

19. *O. Toeplitz.* Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace Matematyczno-Fizyczne, *22*, стр. 113—119 (1911), Warschawa.

20. *M. Verbeck.* Über spezielle rekurrente Folgen und ihre Bedeutung für die Theorie der linearen Mittelbildungen und Kettenbrüche. Diss. Bonn (1917).

21. *T. Vijayaraghavan.* A generalization of the theorem of Mercer. Journ. Lond. Math. Soc., *3*, стр. 130—134 (1928).

22. *M. Watanabe.* Proof of the theorems due to Messrs. Kojima and Okada. Tôhoku Math. Journ., *17*, стр. 86—88 (1920).

Sur un théorème de Mercer et ses généralisations.

par

J. KARAMATA.

(Résumé de la note parue dans „Glas“ de l'Academie Royale Serbe, t. CXLVI (72), p. 87—112, séance du 19 octobre 1931).

Dans cette Note l'auteur s'occupe des théorèmes qui généralisent le théorème de Mercer [9] [1]) dont la forme suivante, étendue aux nombres complexes c, est due à Hardy [3]:

Théorème A. *Soit s_n une suite de nombres quelconques et c un nombre complexe. De la relation*

$$s_n + \frac{c}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to s(1+c), \quad n \to \infty,$$

il résulte que $s_n \to s, \quad n \to \infty,$

toutes les fois que $R(c) > -1$ [2]).

Ce théorème est souvent considéré comme une sorte d'inversion de la propositon classique de Cauchy, à savoir:

Quelque soit la suite de nombres s_n, de la relation

$$s_n \to s, \quad n \to \infty,$$

il résulte toujours

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to s, \quad n \to \infty.$$

Quant aux théorèmes qui généralisent le théorème A de Mercer, on peut les ranger en deux groupes. Les théorèmes appartenant au premier groupe, qui sont (quoique contenant le

[1]) Le nombre entre crochets se rapporte au travail cité à la fin de la note.

[2]) $R(c)$ désigne la partie réelle de c; en générale on posera $c = R(c) + iI(c)$.

théorème de Mercer comme cas particulier) la généralisation immédiate du théorème suivant de Pólya [11]:

Théorème B. *Soit s_n une suite de nombres quelques et c un nombre complexe. De la relation*

$$s_n + c(s_n - s_{n-1}) \to s, \quad n \to \infty,$$

il résulte que $\quad s_n \to s, \quad n \to \infty,$

toutes les fois que $c = -1$ *ou bien que* $R(c) > -{}^1/_2$.

Ceux du second groupe constituent la généralisation proprement dite du théorème de Mercer. Et de même que le théorème de Mercer est considére en quelque sorte comme une inversion de la proposition citée de Cauchy, les théorèmes du second groupe peuvent être considérés dans le même sens inverses du théorème suivant de Jensen [5]:

Théorème C. *Soit u_n une suite de nombres quelconque; de la relation*

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} \to s, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

il résulte

$$u_n / v_n \to s, \qquad n \to \infty, \tag{2}$$

toutes les fois que la suite v_n satisfait aux conditions suivantes:

$$|v_n| \to \infty, \qquad n \to \infty,$$
$$\text{et} \quad \sum_{\nu=1}^{n} |v_\nu - v_{\nu-1}| = O(|v_n|), \quad n \to \infty. \text{ [3]} \tag{3}$$

Or, quoique ces généralisations du théorème de Mercer sont considérées comme des inversions du théorème C de Jensen, elles different néanmoins de beacoup des inversions proprement dites de ce même théorème, appellées habituellement: théorèmes de Tauber. Ces differences proviennent, d'une part, de ce que les théorèmes de Tauber fournissent les conditions que doit satisfaire la suite u_n pour que, de la relation (2), il résulte la relation (1) (voir à ce sujet [6]); d'autre part, de ce que la

[3]) En général une relation de la forme $a_n = O(b_n)$, $n \to \infty$, qui sousentend que $b_n > 0$, signifie que le quotient a_n / b_n reste borné, c. à. d. inférieur à un nombre M, quelque soit n.

plupart des théorèmes Mercer, quoiqu'inverses, resultent néanmoins du théorème C de Jensen, comme l'a déjà montré l'auteur du présent travail dans sa note [7].

Dans la présente Note, l'auteur énonce deux théorèmes généraux appartenant respectivement chaqu'un à l'un des dits groupes, les déduisant directement du théorème C de Jensen. C'est ainsi que les conditions (3) de ce théorème (qui sont nécéssaires et suffisantes pour que, quelque soit la suite u_n, de (1) l'on puisse conclure (2); voir Toeplitz [15]), s'introduisent dans ces généralisations du théorème de Mercer, et y jouent un rôle prépondérant. Pour cette raison, en désignant les suites qui satisfont à la seconde condition (3) par *quasi-monotones*, l'auteur étudie d'abord les propriétés de ces suites. Il montre qu'elles sont analogues à celles des suites simplement monotones, et que la quasi-monotonie est une généralisation naturelle de la monotonie aux nombres complexes.

Les suites quasi-monotones qui se présentent dans les généralisations en question du théorème de Mercer, ayant toujours la forme $w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu)$, les conditions (3) deviennent assez compliquées. Pour les simplifier, l'auteur s'appuie sur les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *Pour que la suite $w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu)$ soit quasi-monotone, il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres positifs $k_n = O(1)$, $n \to \infty$, telle que l'on ait*

$$k_{n-1} + |d_n| \leqslant k_n |1 + d_n|, \quad \text{pour tout} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Théorème 2. *Si la suite $w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu)$ est quasi-monotone, le produit $\prod(1 + d_\nu)$ et la série $\sum |d_\nu|$ seront convergents ou divergents en même temps; dans le second cas de $\sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu| \to \infty$, $n \to \infty$, il résulte toujours que $\left|\prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu)\right| \to \infty$, $n \to \infty$, et inversement.*

De ces deux théorèmes il résulte, en effet, le

Théorème 3. *Pour que la suite $w_n = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + d_\nu)$ satis-*

fasse aux conditions (3), c'est à dire pour que

$$|w_n| \to \infty \quad et \quad \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu - w_{\nu-1}| = O(|w_n|), \quad n \to \infty, \tag{3'}$$

il faut et il suffit que

$$\sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu| \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

et qu'il existe une suite de nombres

$$k_n = O(1), \quad n \to \infty,$$

telle que

$$k_{n-1} + |d_n| = k_n |1 + d_n|, \quad pour\ tout \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Puis, revenant aux théorèmes de Mercer, l'auteur donne des théorèmes mentionnés plus haut l'énoncé suivant:

Théorème I. *Soit* s_n *une suite de nombres quelconques. De la relation*

$$s_n + q_n (s_n - s_{n-1}) \to s, \quad n \to \infty, \tag{6}$$

il résulte

$$s_n \to s, \quad n \to \infty, \tag{7}$$

toutes les fois que la suite $w_n = \prod_{\nu=1}^{n} (1 + d_\nu)$, *où* $d_n = 1/q_n$, *satisfait aux conditions (4) et (5), c'est à dire toutes les fois que*

$$\sum_{\nu=1}^{n} 1/|q_\nu| \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

et qu'il existe une suite de nombres $k_n = O(1)$, $n \to \infty$, *telle que*

$$1 + k_{n-1} |q_n| \leqslant k_n |1 + q_n|, \quad pour\ tout \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Théorème II. *Soit* u_n *une suite de nombres quelconques De la relation*

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} + q_n \frac{u_n}{v_n} \sim (1 + q_n) s, \quad n \to \infty, \tag{10}$$

il résulte

$$\frac{u_n}{v_n} \to s, \quad n \to \infty, \tag{11}$$

toutes les fois que la suite

$$w_n = \prod_{\nu=1}^{n} (1 + d_\nu), \quad où \quad d_n = (1 + q_n) \frac{v_n - v_{n-1}}{v_{n-1}},$$

satisfait aux conditions (4) et (5), c'est à dire, toutes les fois que

$$\sum_{\nu=1}^{n} |1 + q_\nu| \left| \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}} \right| \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{12}$$

et qu'il existe une suite de nombres $k_n = O(1)$, $n \to \infty$, *telle que*

$$k_{n-1} |v_{n-1}| + |1 + q_n| \, |v_n - v_{n-1}| \leqslant k_n |v_{n-1} + (1 + q_n)(v_n - v_{n-1})|,$$

pour tout $n = 1, 2, 3 \ldots$ (13)

Le second théorème peut s'énoncer encore sous une autre forme, correspondant mieux au premier théorème, à savoir:

Théorème III. *Soit* u_n *une suite de nombres quelconques. De la relation*

$$\frac{u_n}{v_n} + q_n \left\{ \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} - \frac{u_n}{v_n} \right\} \to \lambda, \quad n \to \infty, \tag{14}$$

il résulte

$$\frac{u_n}{v_n} \to \lambda, \quad n \to \infty, \tag{15}$$

toutes les fois que

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|q_\nu|} \left| \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}} \right| \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{16}$$

et qu'il existe une suite de nombres $k_n = O(1)$, $n \to \infty$, *telle que*

$$k_{n-1} |q_n v_{n-1}| + |v_n - v_{n-1}| \leqslant k_n |q_n v_{n-1} + (v_n - v_{n-1})|,$$

pour tout $n = 1, 2, 3 \ldots$ (17)

Il est facile de voir que ces théorèmes sont une conséquence immédiate du théorème C de Jensen. Le premier théorème s'obtient en effet, en y posant $u_n = s_n w_n$ et $v_n = w_n = \prod_{\nu=1}^{n} (1 + 1/q_\nu)$. — Le second s'obtient en y remplaçant la suite u_n par la suite $u_n \prod_{\nu=1}^{n} \{1 + q_\nu \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}}\}$, et celle de v_n par

$$w_n = v_n \prod_{\nu=1}^{n} \left\{ 1 + q_\nu \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}} \right\} = \prod_{\nu=1}^{n} \left\{ 1 + (1+q_\nu) \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{v_{\nu-1}} \right\}. -$$

Quant au théorème III, il résulte du théorème II en y remplaçant $1/(1+q_n)$ par q_n.

En ce qui concerne les conditions (8—9), (12—13) ou (16—17), elles sont nécessaires et suffisantes pour que les théorèmes I, II ou III subsistent pour toutes suites s_n ou u_n satisfaisant respectivement aux relations (6), (10) ou (14). De ces conditions, assez comliquées, on peut en déduire d'autres plus simples, mais qui ne seront plus que suffisantes. Il suffit, en effet, d'y remplacer, par exemple, la suite k_n par une constante, indépendante de n, c'est à dire de poser $k_n = 1/k$, $k > 0$. On s'assure alors facilment qu'on peut donner aux conditions du théorèmes I une forme plus simple, et énoncer le théorème comme suit:

Théorème I'. *De la relation*

$$s_n + q_n (s_n - s_{n-1}) \to s, \quad n \to \infty, \tag{18}$$

il résulte que

$$s_n \to s, \quad n \to \infty,$$

toutes les fois que la série $\Sigma\, 1/|q_\nu|$ *diverge,*

$$\liminf_{n=\infty} R(q_n) > -{}^1/_2 \quad \textit{et} \quad I(q_n) = O\left\{\frac{1}{2} + R(q_n)\right\}, \quad n \to \infty.$$

Ce théorème contient plusieur théorèmes de Mercer comme cas particuliers. Ainsi, par exemple celui de Pólya, Izumi [4], Vijayaraghavan [16], et d'autres encore. Cependant il ne contient pas complètemant le théorème suivant de Copson-Ferrar [2].

De la relation

$$s_n (a_n + p_n) - a_n s_{n-1} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{19}$$

il résulte que

$$s_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

toutes les fois que les termes de la suite a_n *sont positifs,* $\liminf_{n=\infty} R(p_n) > 0$ *et la série* $\Sigma\, 1/a_\nu$ *diverge.*

Cela provient du fait suivant. L'hypothèse (19) de ce théorème, en y posant $a_n = p_n q_n$, prend la forme suivante

$$p_n \{ s_n + q_n (s_n - s_{n-1}) \} \to 0, \quad n \to \infty;$$

donc, lorsque $p_n \to \infty$ avec n, elle est plus restrictive que l'hypothèse correspondante (18) (pour $s = 0$) du théorème I'. Du reste, lorsque $p_n = O(1)$, $n \to \infty$, ce théorème de Copson-Ferrar est contenu dans le théorème I'.

Le théorème II peut de même prendre une forme plus simple, comme l'auteur l'a déjà montré dans sa Note [7], et qui est:

Theorème II'. *De la relation*

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} + q_n \frac{u_n}{v_n} \sim (1 + q_n) s, \quad n \to \infty,$$

il résulte

$$\frac{u_n}{v_n} \to s, \quad n \to \infty.$$

toutes les fois que

$$\liminf_{n=\infty} R(q_n) > -1, \quad I(q_n) = O\{1 + R(q_n)\}, \quad n \to \infty,$$

v_n *réelle et tel que* $v_{n-1} < v_n \to \infty, \quad n \to \infty.$

Ce théorème, de même que le théorème I', contient bien des théorèmes de Mercer, mais ne contient pas le second théorème de Copson-Ferrar [2], à savoir:

De la relation

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} + q_n \frac{u_n}{v_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

il resulte

$$\frac{u_n}{v_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

toutes les fois que

$$\liminf_{n=\infty} R(q_n) > -1, \quad \textit{et} \quad v_{n-1} < v_n \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Ces deux théorèmes, du reste, deviennent équivalents lorsque $q_n = O(1)$, $n \to \infty$.

LISTE DES TRAVAUX CITÉS.

1. M. J. Belinfante. Über einen Grenzwertsatz aus der Theorie der unendlichen Folgen. Math. Ann. *101*, p. 312—315 (1929).

2. E. T. Copson, W. I. Ferrar. Notes on the structure of sequences I. Journ. of the Lond. Math. Soc., *4*, p. 258—264 (1929).

3. G. H. Hardy. Generalizations of a limited theorem of Mr. Mercer. Quart. Journ., *43*, p. 143—150 (1912).

4. S. Izumi. A theorem on limits and its application. Tôhoku Math. Journ., *33*, p. 181—186 (1931).

5. J. L. Jensen. Om en Satning of Cauchy. Tidskrift for Mathematik, (5), *2*, p. 81—84 (1884).

6. J. Karamata. Quelques théorèmes d'inversion relatifs aux intégrales et aux séries, II partie. Bull. de Math. et de Phys. pures et appl. de l'Ecole Polyt. de Bucarest, sous presse.

7. — Sur les inversions d'un théorème de Cauchy et leurs généralisations. Tôhoku Math. Journ., sous presse.

8. T. Kojima. On relation between the limits of the sequences

$$x_n + \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu \text{ and } x_n.$$ Tôhoku Math. Journ., *12*. p. 177-180 (1917).

9. I. Mercer. On the limites of real variants. Proc. Lond. Math. Soc., (2), *5*, p. 206—224 (1907).

10. Y. Okada. A theorem on limits. Tôhoku Math. Journ. *15*, p. 280—283 (1919).

11. G. Pólya. Aufgabe; Arch. d. Math. u. Phys., (3) *24*, p. 282 (1916). Lösung von S. Sidon, ebenda, (3) *26*, p. 68 (1917).

12. A. Pringsheim. Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte und die Verallgemeinerung eines beim Beweise benützten Grenzwertsatzes. Münch. Berichte, p. 209—224 (1916).

13. W. Sierpinski. Sur la dépendance entre l'existence de limites des suites

$$x_n + \frac{q}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \text{ et } x_n.$$ Tôhoku Math. Journ., *11*, p. 1—4 (1917).

14. I. Schur. Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte. Math. Ann., *74*, p. 447—459 (1913).

15. O. Toeplitz. Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace Matematyczno-Fizyczne, *22*, p. 113—119 (1911), Warschawa.

16. T. Vijayaraghavan. A generalization of the theorem of Mercer. Journ. Lond. Math. Soc., *3*, p. 130—134 (1928).

17. M. Watanabe. Proof of the theorems due to Messrs. Kojima and Okada. Tôhoku Math. Journ., *17*. p. 86—88 (1920).