О ЗБИРЉИВОСТИ И КОНВЕР-ГЕНЦИЈИ РЕДОВА.

од

ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

О ЗБИРЉИВОСТИ И КОНВЕРГЕНЦИЈИ РЕДОВА.

Од ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

(Приказано на скупу Академије природних наука, од 20. октобра 1930. г.)

Нека је $P_n = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu$ један низ позитивних бројева који расту монотоно у бескрајност т. ј.

$$0 < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty; \tag{1}$$

тада ћемо казати, да је ред $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$ *збирљив* - $C(p_\nu)$ са *проширеним збиром* s, ако израз

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \to s \quad \text{кад} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Посматрамо ли идентитет

$$s_n - \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} s_{\nu-1} p_\nu = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu P_\nu, \tag{3}$$

тада добијамо следеће познате резултате:

Ако је ред $\sum u_\nu$ конвергентан, тада израз

$$\frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \tag{4}$$

али, из самог услова (4) не следи конвергенција дотичнога реда. Да бисмо могли закључити да је тај ред конвергентан, морамо услову (4) придодати још и услов да је низ s_{n-1} збирљив - $C(p_n)$, са сумом s, јер само тада из (3) следи да $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \to s$.

Овде ћемо показати, да се конвергенција реда $\sum u_\nu$ може закључити само из посматрања израза

$$\frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu ,$$

ако исти тежи нули довољно брзо.

Ово показује следећи

Став I. *Нека је:*

$$0 < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty \quad \text{са } n; \tag{1}$$

$$\text{из} \quad \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = O(P_n^{\,1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \text{[1]} \tag{5}$$

следи конвергенција реда $\sum u_\nu$.

Доказ: Према (5) можемо ставити

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = M_n P_n^{\,1-\varepsilon}, \quad \text{где је} \quad M_n = O(1),$$

а одавде

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{P_\nu} \{M_\nu P_\nu^{\,1-\varepsilon} - M_{\nu-1} P_{\nu-1}^{\,1-\varepsilon}\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{M_\nu P_\nu^{\,1-\varepsilon}}{P_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{M_\nu P_\nu^{\,1-\varepsilon}}{P_{\nu+1}} = \sum_{\nu=1}^{n-1} M_\nu \frac{p_{\nu+1}}{P_{\nu+1} P_\nu^{\varepsilon}} + \frac{M_n}{P_n^{\varepsilon}}; \tag{6}$$

како је $M_n = O(1)$, и како је према (1) ред $\sum \frac{p_{\nu+1}}{P_{\nu+1} P_\nu^{\varepsilon}}$ апсолутно конвергентан, то ће и ред $\sum M_\nu \frac{p_{\nu+1}}{P_{\nu+1} P_\nu^{\varepsilon}}$ бити апсолутно конвергентан, и $\frac{M_n}{P_n^{\varepsilon}} \to 0$, дакле је према (6) ред $\sum u_\nu$ конвергентан. ш. ј. т. д.

Посматрајмо специалан случај кад је $\varepsilon = 1$; тада став I претставља интересантан аналогон основном ставу о монотоним низовима: из $s_n \leqslant s_{n+1} = O(1)$, $n \to \infty$,

следи да $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \to s$, кад $n \to \infty$.

---

[1]) Знак $a_n = O(b_n)$ казује да количник $\frac{|a_n|}{b_n}$ остаје коначан за све $n = 1, 2, \ldots$; а знак $a_n = o(b_n)$, који ћемо доцније срести, казује да $\frac{|a_n|}{b_n} \to 0$ са $1/n$.

Овај основни став дакле важи само у случају кад је $u_n \geqslant 0$, т. ј. за редове са позитивним члановима; став I међутим казује: макакав био u_ν, ако постоји један ма како споро растећи низ бројева P_n, такав да је $\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = O(1)$, тада је ред $\sum u_\nu$ конвергентан. Ово изражава један критериум за конвергенцију редова са произвољним члановима, који има облик:

Став II. *Ако је* $0 < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty$ *са* n, (1)

тада из $\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = O(1)$, $n \to \infty$, (7)

следи конвергенција реда $\sum u_\nu$.

Од интереса би било показати још да, обратно, сваком конвергентном реду $\sum u_\nu$ можемо одредити низ бројева P_n, са горњим условима (1) тако да буде $\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = O(1)$[2]).

Као што став II претставља у извесном смислу аналогију и проширење основног става о монотоним низовима, тако можемо и другом основном критериуму за одређивање апсолутне конвергенције редова, наћи аналогон у изразима (5) и (7) за релативно конвергентне редове.

Овај други основни критериум, о коме је овде реч, можемо написати у облику:

„*Из* $u_n = O(V_n)$,

и конвергенције реда $\sum V_\nu$, *следи апсолутна конвергенција реда* $\sum u_\nu$."

---

[2]) Код редова са позитивним члановима, егзистенцију таквог низа бројева показао је г. E. Borel, Leçons sur les séries à termes positifs. Paris (1902) p. 16.

Нека је наиме $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ дати ред са позитивним члановима, т. ј. $u_n \geqslant 0$ и $R_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\nu$, ставимо

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \quad \text{што} \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty;$$

тај низ P_n задовољава услове (1), а како је даље

$$P_n u_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$$

то је ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu u_\nu$ такође конвергентан.

а њему одговара следећи критеријум:

Став III. *Ако је*

$$0 < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

тада из

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = O\left(\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu V_\nu\right), \qquad \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu V_\nu > 0, \quad (8)$$

и конвергенције реда $\sum V_\nu$, *следи конвергенција реда* $\sum u_\nu$, (*која не мора бити апсолутна*).

Доказ: Према (8) можемо ставити

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = M_n \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu V_\nu, \quad \text{где је} \quad M_n = O(1),$$

одакле следи

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu \frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \sum_{\mu=1}^{\nu} P_\mu V_\mu + M_n \frac{1}{P_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu V_\nu.$$

Како је ред $\sum V_\nu$ конвергентан, то према ономе што је речено у почетку и $M_n = O(1)$ следи да

$$M_n \frac{P_n}{P_{n+1}} \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu V_\nu \to 0 \quad \text{са } 1/n.$$

Даље ће ред $\sum M_\nu \frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \sum_{\mu=1}^{\nu} P_\mu V_\mu$ бити конвергентан, кад год је ред $\sum \frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \sum_{\mu=1}^{\nu} P_\mu V_\mu$ конвергентан, а ово је према претпоставци да ред $\sum V_\nu$ конвергира, увек испуњено, јер је

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \sum_{\mu=1}^{\nu} P_\mu V_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{P_\nu} - \frac{1}{P_{\nu+1}}\right) \sum_{\mu=1}^{\nu} P_\mu V_\mu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} V_\nu - \frac{1}{P_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu V_\nu.$$

Овај став садржи не само став II, већ и један став који је прецизнији од става I а који можемо изразити у следећем облику:

Став IV. *Нека је*

$$0 < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

тада из

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu = O\left(\frac{P_n P_{n-1}}{p_{n+1}} V_n\right), \quad V_n = o\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right),$$

и конвергенције реда $\sum V_\nu$, *следи конвергенција реда* $\sum u_\nu$.

Даби доказали овај став на основу става III, треба показати да из

$$V_n = \frac{p_{n+1}}{P_n P_{n+1}} \sum_{1}^{n} P_\nu v_\nu, \qquad V_n = o\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right)$$

и конвергенције реда $\sum V_\nu$ следи конвергенција реда $\sum v_\nu$.

Заиста, имамо

$$\sum_{n=1}^{n} v_\nu = \frac{P_{n+1}}{p_{n+1}} V_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} V_\nu,$$

што казује, да је, под горњим условима ред $\sum v_\nu$ конвергентан, па је према томе и став IV доказан.

У специалном случају кад је

$$V_n = \frac{p_{n-1}}{P_{n-1} P_n^{\varepsilon}}$$

став IV се претвара у став I.

Став IV даје, дакле, најпрецизнији резултат, на основу којега можемо из брзине опадања израза $\frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu$ закључити конвергенцију реда $\sum u_\nu$. А видећемо још да се у томе ставу услов $V_n = o\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right)$ може заменити једним другим, или потпуно изоставити, ако елементи V_n монотоно опадају.

Ова горња посматрања, могу се у извесном смислу свести на испитивање конвергенције двају редова, чији су општи чланови U_n и u_n везани релацијом

$$U_n = \frac{p_{n+1}}{P_n P_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu, \tag{9}$$

а где: $0 < \sum_{1}^{n} p_\nu = P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty$ са n.

У погледу конвергенције редова $\sum U_\nu$ и $\sum u_\nu$ постоји, наиме, следећа веза:

1⁰ Ако је ред $\sum u_\nu$ конвергентан са сумом s, тада је и ред $\sum U_\nu$ конвергентан са истом сумом;

јер из (9) следи

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} U_n + \frac{P_{n+1}}{p_{n+1}} U_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \tag{10}$$

и довољно је само увидети да

$$\frac{P_{n+1}}{p_{n+1}} U_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu u_\nu \to 0 \quad \text{са} \quad \frac{1}{n},$$

што следи из претпоставке да је ред $\sum u_\nu$ конвергентан.

2⁰. Ако је ред $\sum U_\nu$ конвергентан са сумом s, ред $\sum u$ ће бити конвергентан са истом сумом ако је поред тога још и

$$U_n = o\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right). \tag{11}$$

Што је, према (10), очевидно.

Међутим услов (11) можемо заменити и једним другим условом; довољно је наиме да буде

$$\frac{P_{n+1}}{p_{n+1}} U_n - \frac{P_n}{p_n} U_{n-1} < M \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}, \quad M > 0 \quad \text{независно од } n, \tag{12}$$

јер из конвергенције реда $\sum U_\nu$, и услова (12) следи (11) као што смо то показали у једном нашем ранијем реду [3]).

И напослетку напоменимо још следеће:

3⁰. Ако је ред $\sum U_\nu$ конвергентан са сумом s, тада је ред $\sum u_\nu$ збирљив - $C\,(p_{n+1})$ са истом сумом.

Што је на основу једначине (10) лако увидети, јер из конвергенције реда $\sum U_\nu$ следи да

$$\frac{1}{P_{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu+1}\frac{P_{\nu+1}}{p_{\nu+1}} U_\nu = \frac{1}{P_{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu+1} U_\nu \to 0 \quad \text{са} \quad {}^1/n.$$

У примени се горња посматрања могу срести изражени у следећим облицима:

[3]) J. Karamata, Quelques théorèmes d'inversion relatif aux intégrales et aux séries. Налази се у штампи у Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucareste; у којем смо раду, шта више извели један општији услов.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = O(\varphi(n))$$

и $$0 < P_n < P_{n+1} \to \infty \quad \text{са} \quad n,$$

ред $\sum \frac{\alpha_\nu}{P_\nu}$ *ће бити конвергентан,*

1⁰. (на основу става III) *ако је ред*

$$\sum \frac{\varphi(\nu) - \varphi(\nu-1)}{P_\nu} \quad \textit{конвергентан; или}$$

2⁰. (на основу става IV. са примедбом 2⁰) *ако је ред*

$$\sum \varphi(\nu)\frac{p_{\nu+1}}{P_\nu P_{\nu+1}} \quad \textit{конвергентан,}$$

а у исто време $\dfrac{\varphi(n+1)}{P_{n+1}} - \dfrac{\varphi(n)}{P_n} \leqslant M \dfrac{p_{n+1}}{P_{n+1}}$, *где је* $M > 0$ *и независно од* n [4]).

[4]) Овај се последњи услов може још заменити ужим условом: $\varphi(n) = O(P_n)$, $n \to \infty$.

Sommabilité et convergence.

par

J. KARAMATA.

(Résumé de la note parue dans „Glas" de l'Academie Royale Serbe, t. CXLVI (72), p. 59—65, séance du 30 octobre 1930).

En partant de l'identité

$$s_n = \frac{1}{P_n}\sum_{n=1}^{n} s_{v-1}\, p_v + \frac{1}{P_n}\sum_{v=1}^{n} U_v\, P_v$$

et en définissant la *sommabilite* - $C(p_n)$ de la série $s_n = \sum_{v=1}^{n} U_v$, par l'existence de la limite

$$\frac{1}{P_n}\sum_{v=1}^{n} P_v\, s_v \to s, \quad n \to \infty,$$

où $\qquad o < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty \quad$ avec $\; n,$

l'auteur rappelle le fait connu que de la sommabilité - $C(p_{n+1})$ de la série $\sum U_v$ et de la relation

$$\frac{1}{P_n}\sum_{v=1}^{n} U_v\, P_v \to o \quad \text{avec} \quad 1/n,$$

résulte la convergence.

Il montre, d'une manière élémentaire, que de l'étude de la seule expression

$\frac{1}{P_n}\sum_{v=1}^{n} U_v P_v$, en l'assujétissant à tendre vers zéro assez vite, on peut conture la convergence de la série $\sum U_v$; ceci est exprimé, par exemple, par le téorème suivant:

Théorème I. *Soit:* $o < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty$ *avec* n,

de $\qquad \sum_{v=1}^{n} P_v U_v = O(P_n^{1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > o,$

il résulte la convergence de la série $\sum U_v$:

Ce théorème est encore précisé par les deux théorèmes suivants:

Théorème II. *Soit:* $o < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty$ *avec* n

si $\quad \sum_{v=1}^{n} P_v U_v = O\left(\sum_{v=1}^{n} P_v V_v\right)$ *et* $\sum_{v=1}^{n} P_v V_v > o,$

la convergence de la série $\sum V_v$, *entraine celle de la série* $\sum U_v$.

Théorème III. *Soit:* $o < P_n \leqslant P_{n+1} \to \infty$ *avec* n,

si $\quad \sum_{v=1}^{n} P_v u_v = O\left(\frac{P_n P_{n+1}}{p_{n+1}} V_n\right)$ et $V_n = o\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right),$

la convergence de la série $\sum V_v$ *entraine celle de la cérie* $\sum u_v$.

Ce dernier théorème contient le premier directement comme cas particulier, il suffit en effel de poser

$$V_n = \frac{p_{n+1}}{P_{n+1} P_n^{\varepsilon}};$$

tandis que le théorème II est en quelque sorte l'analogue, quant aux séries à termes quelconques, du critère suivant, pour l'étude de la convergence absolue: si $u_v = O(v_v)$, la convergence de la série $\sum v_v$, entraine la convergence absolue de la série $\sum u_v$.

Enfin, l'auteur remarque, que dans le théorème III, la condition $V_n = o\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right)$ peut encore être remplacée par la suivante

$$\frac{P_{n+1}}{p_{n+1}} V_n - \frac{P_n}{p_n} V_{n-1} < M \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}, \quad \text{où } M > o \text{ et indépedant de } n.$$

et

$$\alpha_n(0)=0\,, \text{ pour tout } n=1,2,3,\ldots;$$

de

$$\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\} \quad (n\to\infty) \text{ pour tout } k=0,1,2,\ldots,$$

il résulte que

$$\int_0^x \alpha_n(t)\,dt \to \int_0^x \alpha(t)\,dt \quad (n\to\infty) \quad \text{pour tout } 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Mais, pour rendre ce théorème susceptible de l'application mentionnée ci-dessus, on est obligé, comme je l'ai fait dans la Note citée [1]), de le préciser d'une certaine manière, en lui donnant la forme suivante:

Théorème 2. *Soit, pour* $0\leqslant x\leqslant 1$, $\alpha_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *une suite de fonctions nondécroissantes, c. à d.*

(1) $\alpha_n(x+h)\geqslant\alpha_n(x)$, *pour tout* $n=1,2,3,\ldots$ *et* $h\geqslant 0$,

et soit

$$\alpha_n(0)=0, \text{ pour tout } n=1,2,3,\ldots;$$

des relations

$$\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\} \quad (n\to\infty) \text{ pour tout } k=0,1,2,\ldots,$$

il résulte que

$$\alpha_n(x)\to\alpha(x) \qquad (n\to\infty)$$

en tout point de continuité x de $\alpha(x)$.

D'autre part, il résulte des considérations de la même Note [1]), que le théorème 2 n'est applicable aux inversions des procédés de sommabilité, que dans le cas où les termes des suites considérées sont des nombres positifs (ou bornés d'un côté). Cette condition provient, du reste, de l'hypothèse (1).

Par conséquent, pour écarter cette restriction (que les termes des suites considérées soient bornés d'un côté), et la remplacer par une condition plus générale, ayant le caractère des conditions de convergence de Landau-Schmidt [4]), on est obligé, comme je

[4]) E. Landau, Über einen Satz des Herrn Littlewood, Circolo Matematico 35 (1913) p. 6–7.

R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschr. 22 (1925) p. 127.

l'ai montré récemment [5]), de se servir, en plus de théorème 2, encore d'autres théorèmes secondaires.

Le but de cette Note est de montrer qu'il est possible de généraliser le théorème 2 de manière que son application directe donne les conditions désirées. Du reste, ce théorème présente par lui-même un certain intérêt. Aussi, avant de l'énoncer sous sa forme la mieux indiquée pour l'application en vue, ésquisserons-nous la démonstration du théorème ci-dessous.

Théorème 3. *Soit, pour* $0\leqslant x\leqslant 1$, $\alpha_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes* [6]):

(2) $$\lim_{n\to\infty}\inf \min_{x\leq t\leq x+h}\{\alpha_n(t)-\alpha_n(x)\} > -w(h)\to 0 \text{ avec } h \text{ et pour } 0\leqslant x\leqslant x+h\leqslant 1,$$

et

(3) $$\alpha_n(0)=0\,, \text{ pour tout } n=1,2,3,\ldots;$$

des relations

(4) $$\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\} \quad (n\to\infty) \text{ pour tout } k=0,1,2,\ldots,$$

il résulte que

(5) $$\alpha_n(x)\to\alpha(x) \qquad (n\to\infty)$$

en tout point de continuité x de $\alpha(x)$.

En effet, en considérant la fonction

(6) $$\varphi(x,t)=\begin{cases}1 & \text{pour } 0<t<x\\ 0 & \text{pour } x<t<1,\end{cases}$$

on peut trouver deux suites de polynomes $P_k(t)$ et $p_k(t)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ tels que (voir la figure)

$$P_k(0)=1\,,\ P_k(1)=0\,, \text{ pour tout } k=1,2,3,\ldots,$$

$P_k(t)$ croît pour $0<t<x$, décroît pour $x<t<1$, pour tout $k=1,2,3,\ldots$,

$P_k(x)-1\to 0$, $P_k(x+h)\to 0$, pour tout $h>0$ lorsque $k\to\infty$,

et

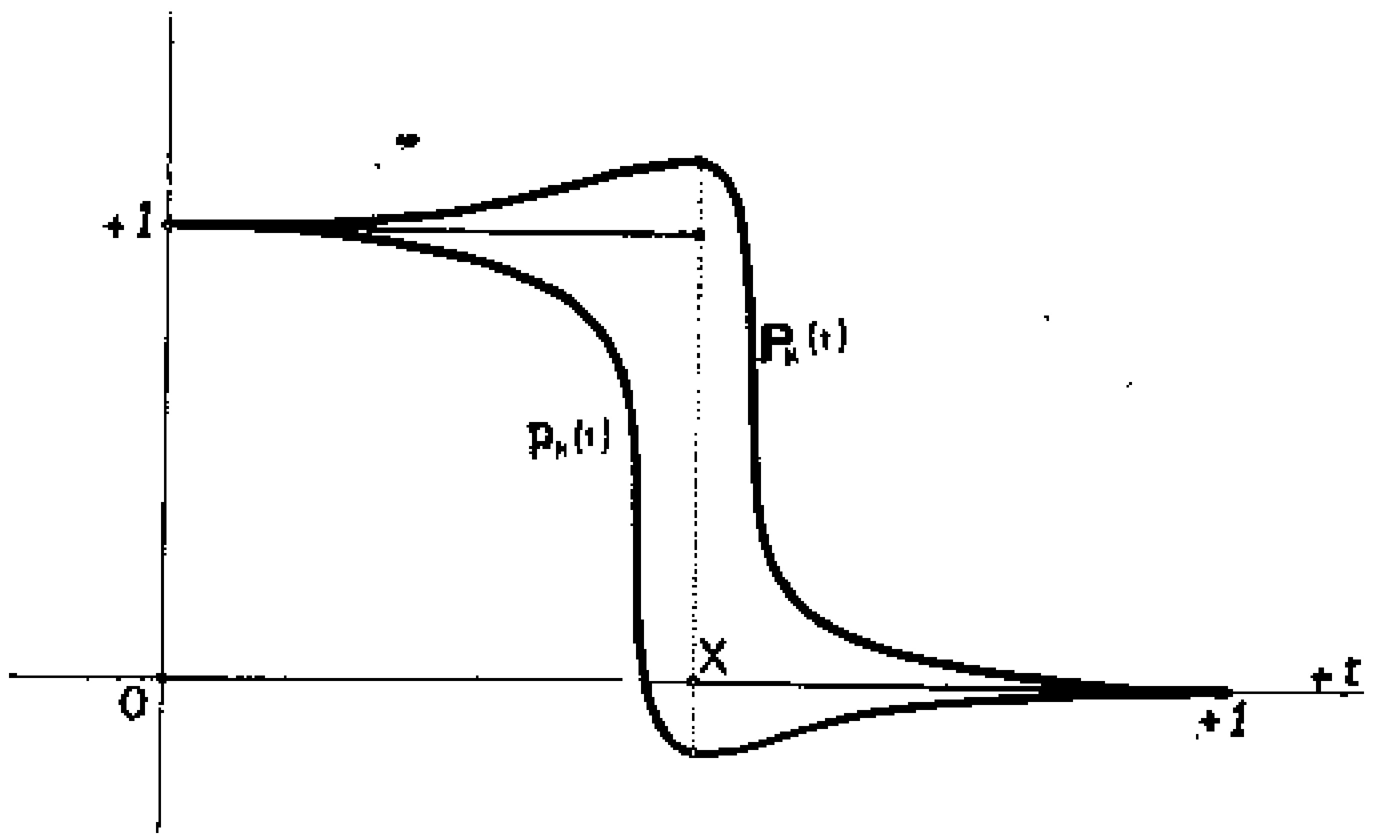
$$p_k(0)=1,\ p_k(1)=0\,, \text{ pour tout } k=1,2,3,\ldots,$$

[5]) J. Karamata, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen, Journal f. d. reine u. angew. Math. 164 (1931) p. 33–38.

[6]) Nous pouvons les supposer intégrables au sens de Riemann.

$p_k(t)$ décroît pour $0<t<x$, et croît pour $x<t<1$, pour tout $k=1, 2, 3, \ldots$,

$$1-p_k(x-h)\to 0, \text{ pour tout } h>0, \; p_k(x)\to 0 \text{ lorsque } k\to\infty.$$



Prenons les polynomes $P_k(t)$ et partageons les intervalles $(0, x)$ et $(x, 1)$ respectivement par les points x'_ν, $\nu=0, 1, 2, \ldots p$, $x'_0=0$, $x'_p=x$, et x_ν, $\nu=0, 1, 2, \ldots q$, $x_0=x$, $x_q=1$, en sous-intervalles de longueur $\leqslant h$; on aura alors:

$$\int_0^1 P_k(t)\, d\{\alpha_n(t)\}-\alpha_n(x)=\int_0^x \{P_k(t)-1\}\, d\{\alpha_n(t)\}+\int_x^1 P_k(t)\, d\{\alpha_n(t)\}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{p}\int_{x'_{\nu-1}}^{x'_\nu}\{P_k(t)-1\}\, d\{\alpha_n(t)\}+\sum_{\nu=1}^{q}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P_k(t)\, d\{\alpha_n(t)\}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{p}\{P_k(x'_\nu)-1\}\{\alpha_n(x'_\nu)-\alpha_n(\zeta'_\nu)\}+\sum_{\nu=1}^{q} P_k(x_{\nu-1})\{\alpha_n(\zeta_\nu)-\alpha_n(x_{\nu-1})\},$$

où

$$x'_{\nu-1}\leqslant\zeta'_\nu\leqslant x'_\nu \text{ et } x_{\nu-1}\leqslant\zeta_\nu\leqslant x_\nu .$$

En y faisant $n\to\infty$, il résulte, d'après (2) et (4), que

$$(7)\quad \int_0^1 P_k(t)\, d\{\alpha(t)\}-\limsup_{n\to\infty}\alpha_n(x)\geqslant -w(h)\Big\{\sum_{\nu=1}^{p}[P_k(x'_\nu)-1] + \sum_{\nu=1}^{q} P_k(x_{\nu-1})\Big\}.$$

Puis, en faisant $k\to\infty$, l'on obtient, d'après la construction des polynomes $P_k(t)$ et en supposant que x est un point de continuité de $\alpha(x)$,

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n(x)\leqslant\alpha(x)+w(h)\to\alpha(x) \text{ lorsque } h\to 0.$$

Des considération semblables, appliquées aux polynomes $p(t)$, donnent

$$\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(x)\geqslant\alpha(x)$$

d'où il résulte l'affirmation (5).

Ce théorème, contenant le théorème 2 comme cas particulier, appliqué aux inversions des procédés de sommabilité, donnerait déjà des résultats plus généraux. Mais, il serait désirable de l'élargir d'avantage. En effet, des conditions (2), (3) et (4) pour $k=0$, l'on déduit facilement que $\alpha_n(x)=O(1)$, $n\to\infty$, pour tout $0\leqslant x\leqslant 1$; or, cette condition dans l'application aux procédés de sommabilité suppose que les nombres des suites considérées soient de même $=O(1)$, ce qui est une condition superflue.

Ceci résulte de ce que le nombre h de la condition (2) est indépendant de x; on l'évitera donc en choisissant convenablement la manière dont h doit dépendre de x. Ce que l'on obtient, en effet, en remplaçant dans le théorème 3 la condition (2) par la suivante:

$$(8)\quad \liminf_{n\to\infty}\min_{x<t\leqq x^\lambda}\{\alpha_n(t)-\alpha_n(x)\}>-w(\lambda)\to 0 \text{ lorsque } 1>\lambda\to 1,$$
$$\text{pour tout } 0<x<1.$$

Pour le faire voir, on se sert encore des polynomes $p_k(t)$ et $P_k(x)$. Mais, dans ce cas, l'inégalité (7) prend la forme

$$\int_0^1 P_k(t)\, d\{\alpha(t)\}-\limsup\alpha_n(x)>-w(\lambda)\Big[\sum_{\nu=-\infty}^{0}\{P_k(x^{\lambda^\nu})-1\} + \sum_{\nu=0}^{\infty}P_k(x^{\lambda^\nu})\Big] \quad (\lambda<1),$$

les points x'_ν et x_ν y étant remplacés par x^{λ^ν}, $\nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Les deux séries du second membre de cette inégalité sont bien convergentes, car, du fait que $P_k(0)=1$ et $P_k(1)=0$, il s'en suit que l'on peut poser

$$P_k(t)-1=t\,P_k^{(1)}(t) \text{ et } P_k(t)=(1-t)\,P_k^{(2)}(t),$$

la première relation montrant la convergence de la première et la seconde la convergence de la seconde série. D'autre part, du fait que l'on peut choisir les polynomes $P_k(t)$ de manière que les expressions $\frac{P_k(t)-1}{t}$ et $\frac{P_k(t)}{1-t}$ restent uniformément bornées par rapport à t, k tendant vers l'infini, il s'en suit que le second membre de l'inégalité précédente tend vers $-w(\lambda)$, lorsque $k \to \infty$. On peut donc en tirer les mêmes conclusions comme pour le théorème 3 et en déduire le théorème suivant:

Théorème 4. *Soit, pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes:*

(9) $\alpha_n(0)=0$, *pour tout* $n=1,2,3,\ldots,$

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{x<t\leqq x^\lambda} \{\alpha_n(t)-\alpha_n(x)\} > -w(\lambda) \to 0 \quad \textit{lorsque } 1>\lambda\to 1, \textit{ pour}$$

tout $0<x<1$; *des relations*

(10) $\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\}$ $(n\to\infty)$ *pour tout* $k=0,1,2,\ldots,$

il résulte que

$\alpha_n(x)\to\alpha(x)$, $n\to\infty$, *en tout point de continuité* x *de* $\alpha(x)$.

Ce théorème semble répondre à toutes les conditions exigées, mais, pour que son application à l'inversion des procédés de sommabilité soit plus immédiate, il resterait encore à y apporter quelques changements.

D'abord, nous remplacerons les conditions (9) par les suivantes: $\alpha_n(1)=0$, pour tout $n=1,2,3,\ldots$, d'ailleurs équivalentes Puis, nous referons la démonstration des théorèmes précédents, mais à la place de la fonction $\varphi(x,t)$, donnée par la relation (6), nous considérerons la fonction $1-\varphi(x,t)$. Ceci permettera de nous affranchir de la condition (10) pour $k=0$, et l'on obtient ainsi, en definitif, le théorème suivant:

Théorème 5. *Soit* $\alpha_n(x)$, *pour* $0\leqslant x\leqslant 1$, $n=1,2,3,\ldots,$ *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes:*

(11) $\alpha_n(1)=0$, *pour tout* $n=1,2,3,\ldots,$

(12) $$\liminf_{n\to\infty} \min_{x<t\leqq x^\lambda} \{\alpha_n(t)-\alpha_n(x)\} > -w(\lambda) \to 0 \quad \textit{lorsque } 1>\lambda\to 1, \quad \textit{pour } 0<x<1,$$

et

(13) $\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\}$ $(n\to\infty)$ *pour tout* $k=1,2,\ldots,$

alors

(14) $\alpha_n(x)\to\alpha(x)$ $(n\to\infty)$ *en tout point de continuité* x *de* $\alpha(x)$.

Passons à l'application de ce théorème aux inversions des procédés de sommabilité. Nous ne considérerons ici qu'un procédé de sommabilité dont nous nous sommes déjà occupé à plusieurs reprises et qui contient, du reste, comme cas particulier le procédé étudié dans la Note citée sous [1]). D'autre part, dans la Note citée sous [2]), nous en avons donné l'inversion sous une forme très générale, à savoir:

Théorème 6. *Soient, pour* $0\leqslant x\leqslant\infty$, $\varphi(x)$ *une fonction de la forme*

$$\varphi(x)=x^\sigma L(x) \qquad (\sigma\geqslant 0)$$

où $L(x)$ *est une fonction continue, positive et satisfaisant à la relation*

$$L(ux)/L(x)\to 1 \quad (x\to\infty) \quad \textit{pour tout } u>0,$$

et $A(x)$, $A(0)=0$, *une fonction à variation bornée en tout intervalle fini et telle que l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-s\xi}d\{A(\xi)\}$ *ait un sens pour tout* $s>0$; *de la relation*

(15) $$\int_0^\infty e^{-s\xi}d\{A(\xi)\}\sim\varphi\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s\to 0)$$

il résulte alors

(16) $$A(x)\sim\frac{\varphi(x)}{\Gamma(\sigma+1)} \qquad (x\to\infty)$$

toutes les fois que

(17) $$\liminf_{x\to\infty}\min_{x<t\leqq\mu x}\frac{A(t)-A(x)}{\varphi(x)} > -w(\mu)\to 0 \quad \textit{lorsque } 1<\mu\to 1.$$

Ce théorème contient comme cas particulier la plupart des „Tauberian theorems". La démonstration que nous en avons donnée, étant assez longue, il s'agira ici de montrer que ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème 5.

Il suffit, pour cela, de remarquer que, dans ce cas, l'on a

$$\alpha_n(t) = A(-n \lg t)/\varphi(n) \quad \text{et} \quad u(t) = (-\lg t)^\sigma / \Gamma(\sigma+1),$$

car, en remplaçant dans (15) s par sk, et en y faisant les substitutions $e^{-s\zeta} = t$ et $1/s = x$, on en tire que

$$\int_0^1 t^k d\left\{\frac{A(-x \lg t)}{\varphi(x)}\right\} \to \frac{1}{k^\sigma} = \int_0^1 t^k d\left\{\frac{(-\lg t)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)}\right\} \qquad (x \to \infty)$$

et pour tout

$$k = 1, 2, \ldots,$$

ce qui montre en même temps que les relations (13) du théorème 5 sont remplies.

On s'assure, d'autre part, que la condition (12) se transforme, pour le cas considéré, en (17), et que $A(0) = 0$ entraîne les relations (11). On en tire donc, d'après (14), que

$$\frac{A(-x \lg t)}{\varphi(x)} \to \frac{(-\lg t)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} \quad (x \to \infty,\ u > 0), \text{ pour tout } 0 < t < 1,$$

c. à. d., en y posant $u = -\lg t$,

$$A(ux) \sim \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\sigma+1)}\, u^\sigma \quad (x \to \infty,\ u > 0).$$

Ceci donne pour $u = 1$ la relation (16), comme il fallait montrer.

Cet exemple suffit déjà pour montrer que le théorème 5 est la source commune de bien des théorèmes d'inversion relatifs aux procédés de sommabilité.

En appliquant ce théorème aux procédés de sommabilité de forme plus générale, on en tire d'autres conclusions intéressantes, ce qui fera l'objet d'un autre travail.

(Reçu par la Rédaction le 22. 1. 1931).

Remarque apportée le 10. 4. 1931 pendant la correcture: M. F. Riesz, par l'intermédiaire de M. Vilmos Schmidt, a eu

l'amabilité de me communiquer une construction fort simple des polynomes $P_k(t)$ en question. Si l'on veut, par exemple, approximer la fonction $1 - \varphi(x, 1)$ par de tels polynomes, il suffit d'abord de l'approximer par une fonction $f(t)$, différentiable, $f(0) = 0$, croissante de 0 à x, decroissante de x à $1, f(1) = 1$, et ayant une dérivée seconde au point $t = x$. En prenant alors un polynome $p(t)$ tel que

$$\left|\frac{f'(t)}{x-t} - p(t)\right| < \varepsilon, \text{ pour tout } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

on aura

$$P(t) = p(t) + \varepsilon \geqslant 0$$

et

$$|f'(t) - (x-t)P(t)| \leqslant 2\varepsilon |x-t| \leqslant 2\varepsilon, \text{ pour tout } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

de sorte que le polynome

$$\int_0^t (x-u)P(u)\,du,$$

multiplié par une constante convenable, fournit le polynome demandé.