Rapport entre les limites d'oscillation des procédés de sommation d'Abel et de Cesàro.

Par

JOVAN KARAMATA.

Soit a_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, une suite de nombres réels, tels que la série

$$(1) \qquad f(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \quad \textit{converge pour tout} \quad r < 1;$$

on a alors l'inégalité bien connue

$$(2) \qquad \limsup_{r=1} \, (1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \leqslant \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu ,$$

qui exprime que la limite supérieure de l'intervalle d'oscillation du procédé de sommation d'Abel ne peut dépasser celle du procédé de sommation de Cesàro, quelque soit la suite de nombres réels $\{ a_\nu \}$.

Or, dans une de mes Notes [1]), j'ai démontré que pour les suites de nombres $\{ a_\nu \}$ à termes *positifs*, on a même la double inégalité suivante:

$$(3) \quad \limsup_{r=1} \, (1-r) \, f(r) \leqslant \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqslant e \, \limsup_{r=1} \, (1-r) \, f(r),$$

$f(r)$ désignant la fonction (1) et la constante e étant la base des logarithmes naturels.

[1]) J. Karamata, Sur la moyenne arithmétique des coéfficients d'une série de Taylor, Mathematica vol. 1, p. 99 et 100 (Cluj, 1929).

Pour pouvoir déduire du théorème A, d'une manière plus directe, les théorèmes de nature tauberienne, nous lui donnerons d'abord une autre forme, d'ailleurs équivalente. Ainsi, en remplaçant dans les fonctions et intégrales y figurant t par e^{-t}, $\alpha_n(e^{-t})$ par $A_n(t)$, et y faisant quelques autres légères modifications, l'on obtient le

Théorème B. *Soit* $A_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *une suite de fonctions définies dans* $(0,\infty)$, *telles que les intégrales*

$$\int_0^\infty e^{-kt} d\{A_n(t)\} \quad (n,k=1,2,3,\ldots)$$

existent, et

(1) $A_n(0)=0$, *pour tout* $n=1,2,3,\ldots.$

Si ces fonctions satisfont à la condition

(2) $$\liminf_{n=\infty} \min_{x<t<\lambda x} \{A_n(t)-A_n(x)\} > -w(\lambda)\to 0$$

lorsque $1<\lambda\to 1$, *pour tout* x, *alors des relations*

(3) $$\int_0^\infty e^{-kt} d\{A_n(t)\} \to \int_0^\infty e^{-kt} d\{A(t)\} \quad (n\to\infty),$$

pour tout $k=1,2,3,\ldots$, *il résulte que*

(4) $A_n(x)\to A(x)$ $(n\to\infty)$ *en tout point de continuité* x *de* $A(x)$.

L'indice n figurant dans ce théoréme peut de même varier d'une manière continue de 0 à ∞, ce qui se présentera, du reste, dans les applications suivantes.

Appliquons, à présent, le théorème B à l'étude de la valeur asymptotique d'une fonction $A(x)$ qui satisfait à la relation suivante:

(5) $$\int_0^\infty e^{-\sigma t} d\{A(t)\} = o\left\{\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\} \quad (\sigma\to 0),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction positive telle que

(6) $\varphi(ux)=O\{\varphi(x)\}$ $(x\to\infty)$, pour tout $u>0$.

A cet effet, posons dans (5) $\sigma=k/n$, $k>0$, puis remplaçons t/n par t; l'on en déduit alors la relation

$$\int_0^\infty e^{-kt} d\{A(nt)\} = o\{\varphi(n/k)\} \quad (n\to\infty),$$

valable pour tout $k>0$. En divisant cette relation par $\varphi(n)$ et en tenant compte de (6), l'on obtient:

$$\int_0^\infty e^{-kt} d\left\{\frac{A(nt)}{\varphi(n)}\right\} \to 0 \quad (n\to\infty), \text{ pour tout } k>0.$$

En posant donc

$$A_n(t)=\frac{A(nt)}{\varphi(n)}$$

et en appliquant à cette fonction le théorème B, on en déduit le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction positive et telle que*

((6)) $\varphi(ux)=O\{\varphi(x)\}$ $(x\to\infty)$, *pour tout* $u>0$;

de la relation

((5)) $$\int_0^\infty e^{-\sigma t} d\{A(t)\} = o\left\{\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\} \quad (\sigma\to 0)$$

il résulte

(7) $A(x)=o\{\varphi(x)\}$ $(x\to\infty)$

toutes les fois que l'on a

(8) $$\liminf_{x=\infty} \min_{x<x'<\lambda x} \left\{\frac{A(x')-A(x)}{\varphi(x)}\right\} > -w(\lambda)\to 0$$

lorsque $1<\lambda\to 1$.

En ce qui concerne la condition (8), on peut la remplacer, dans le cas où $A(x)$ possède une dérivée première, par une plus simple, mais moins générale:

Théorème 2. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *satisfait à la condition* (6), *de la relation* (5) *il résultera* (7) *toutes les fois que* $A(x)$ *possède une dérivée première telle que*

(9) $A'(x)>O\{\varphi(x)/x\}$ $(x\to\infty)$.

On peut, en effet, montrer que la condition (8) est satisfaite toutes les fois que (9) est rempli. Car, en intégrant cette dernière inégalité entres les limites x et $x'\leqslant\lambda x$, $\lambda>1$, l'on en déduit, en tenant compte de (6),

$$A(x')-A(x) > -M\int_x^{x'} \varphi(t)\,dt/t > -M\int_1^\lambda \varphi(xt)\,dt/t > -M'\varphi(x)\lg\lambda\to 0$$

avec $\lambda\to 1$, ce qui montre bien que la condition (8) est satisfaite dès que (9) l'est.

En posant, à présent, dans les théorèmes 1 et 2

$$A'(x) = s(x) - s \text{ et } \psi(x) = \varphi(x)/x,$$

l'on en déduit le

Théorème 3. *De la relation*

$$\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} s(t)\, dt = s + o\left\{\psi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\} \quad (\sigma \to 0) \tag{10}$$

il résulte que

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\, dt = s + o\{\psi(x)\} \quad (x \to \infty) \tag{11}$$

si la fonction $s(x)$ satisfait à l'une des deux conditions suivantes:

$$\underset{\cancel{x=\infty}}{\cancel{\lim}\inf} \min_{x < x' < \lambda x} \frac{1}{x}\int_x^{x'} s(t)\, dt \geqslant s(\lambda - 1) - w(\lambda)\, \psi(x) \tag{12}$$

$$(w(\lambda) \to 0\,,\ 1 < \lambda \to 1),$$

où bien

$$s(x) \geqslant s - M\psi(x) \quad (M > 0),\ \textit{pour tout } x, \tag{13}$$

$\psi(x)$ satisfaisant à la condition que

$$\psi(ux) = O\{\psi(x)\} \quad (x \to \infty),\ \textit{pour tout } u > 0. \tag{14}$$

En particulier, si l'on pose dans ce théorème

$$s(x) = s_n \text{ lorsque } n \leqslant x < n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et $e^{-\sigma} = r$, l'on en déduit que de la relation

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu = s + o\left\{\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \quad (r \to 1)$$

il résultera

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = s + o\{\psi(n)\} \quad (n \to \infty)$$

toutes les fois que la suite s_n satisfait à la condition

$$s_n \geqslant s - M\psi(n)\,,\ \text{pour tout } n = 0, 1, 2, \ldots\ (M > 0),$$

$\psi(x)$ étant une fonction positive satisfaisant à la condition (14).

Si l'on pose dans ce dernier résultat $\psi(x) = x^{-h}$ $(h \geqslant 0)$, l'on obtient une réponse à la question posée au début de cette Note.

(Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1932).

Rapport entre les limites d'oscillation des procédés de sommation d'Abel et de Cesàro.

Par

JOVAN KARAMATA.

Soit a_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, une suite de nombres réels, tels que la série

$$(1) \qquad f(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \quad \textit{converge pour tout} \quad r < 1;$$

on a alors l'inégalité bien connue

$$(2) \qquad \limsup_{r=1} (1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \leqslant \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu ,$$

qui exprime que la limite supérieure de l'intervalle d'oscillation du procédé de sommation d'Abel ne peut dépasser celle du procédé de sommation de Cesàro, quelque soit la suite de nombres réels $\{ a_\nu \}$.

Or, dans une de mes Notes [1]), j'ai démontré que pour les suites de nombres $\{ a_\nu \}$ à termes *positifs*, on a même la double inégalité suivante:

$$(3) \quad \limsup_{r=1} (1-r) f(r) \leqslant \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqslant e \limsup_{r=1} (1-r) f(r),$$

$f(r)$ désignant la fonction (1) et la constante e étant la base des logarithmes naturels.

[1]) J. Karamata, Sur la moyenne arithmétique des coéfficients d'une série de Taylor, Mathematica vol. 1, p. 99 et 100 (Cluj, 1929).

La seconde des inégalités (3) complète donc l'inégalité (2) dans le cas des suites à termes positifs et exprime que dans ce cas la moyenne de Cesàro doit rester bornée toutes les fois que la moyenne d'Abel l'est. (Évidemment ce fait n'a pas lieu pour les suites à termes réels quelconques, comme on le vérifie, du reste, facilement sur l'exemple $a_\nu = (-1)^\nu \nu^2$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$).

D'autre part, puisque $e > 1$, il ne résulte pas des inégalités (3) que (pour $a_\nu \geqslant 0$) les deux limites supérieurs

$$(4) \qquad \Lambda = \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \quad \text{et} \quad \lambda = \limsup_{r=1} (1-r) f(r),$$

doivent être égales entre elles. La question suivante se pose donc tout naturellement: Les deux limites supérieures Λ et λ sont-elles égales entre elles, lorsque les termes de la suite $\{a_\nu\}$ sont positifs? Ou, ce qui revient au même, peut-on dans ce cas remplacer la constante e par l'unité et, si ce n'est pas le cas, cette constante e est-elle la plus petite possible, pour que la seconde inégalité (3) ait lieu pour toute suite $\{a_\nu\}$ à termes positifs?

Nous allons montrer ici par un exemple, que la réponse à la première question est négative, contrairement à celle de la seconde. En d'autres termes, nous allons construire effectivement une suite de nombres $\{a_\nu\}$ qui satisfait à l'égalité

$$(5) \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = e \limsup_{r=1} (1-r) f(r),$$

c'est-à-dire pour laquelle $\Lambda = e\lambda$.

Cette suite des nombres $\{a_\nu\}$ est la suivante:

$$(6) \qquad a_n = \begin{cases} n & \text{si} \quad n = p! \\ 0 & \text{si} \quad n \neq p! \end{cases}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Pour montrer que l'égalité (5) a lieu lorsqu'on y remplace la suite $\{a_\nu\}$ par la suite (6), il suffit de démontrer que l'on a

$$(7) \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{\mu! \leq n} \mu! = 1,$$

et

$$(8) \qquad \limsup_{r=1} (1-r) f(r) = \limsup_{r=1} (1-r) \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu!\, r^{\mu!} = 1/e.$$

La relation (7) est facile à vérifier; d'une part, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{\mu! \leq n} \mu! \leqslant \frac{1}{p!} \sum_{\mu=1}^{p} \mu! \quad \text{pour tout} \quad (p-1)! < n \leqslant p!,$$

et puisque

$$\frac{1}{p!} \sum_{\mu=1}^{p} \mu! \sim \frac{p!}{p! - (p-1)!} \to 1 \quad p \to \infty,$$

il s'ensuit que

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{\mu! \leq n_p} \mu! \leqslant 1.$$

D'autre part, il existe effectivement une suite de valeurs n_p, $p = 1, 2, 3, \ldots$, de n telle que

$$\frac{1}{n_p} \sum_{\mu=1}^{\mu! \leq n_p} \mu! \to 1, \quad n_p \to \infty,$$

ce que l'on voit en posant $n_p = p!$.

Des deux dernières relations il résulte l'affirmation (7).

Pour démontrer la relation (8), il suffit de montrer que l'on a

$$(9) \qquad \limsup_{r=1} (1-r) \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu!\, r^{\mu!} \leqslant 1/e.$$

Car, d'après (7) et la seconde inégalité (3), il résulterait que

$$1 \leqslant e \limsup_{r=1} (1-r) \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu!\, r^{\mu!} \leqslant e/e = 1,$$

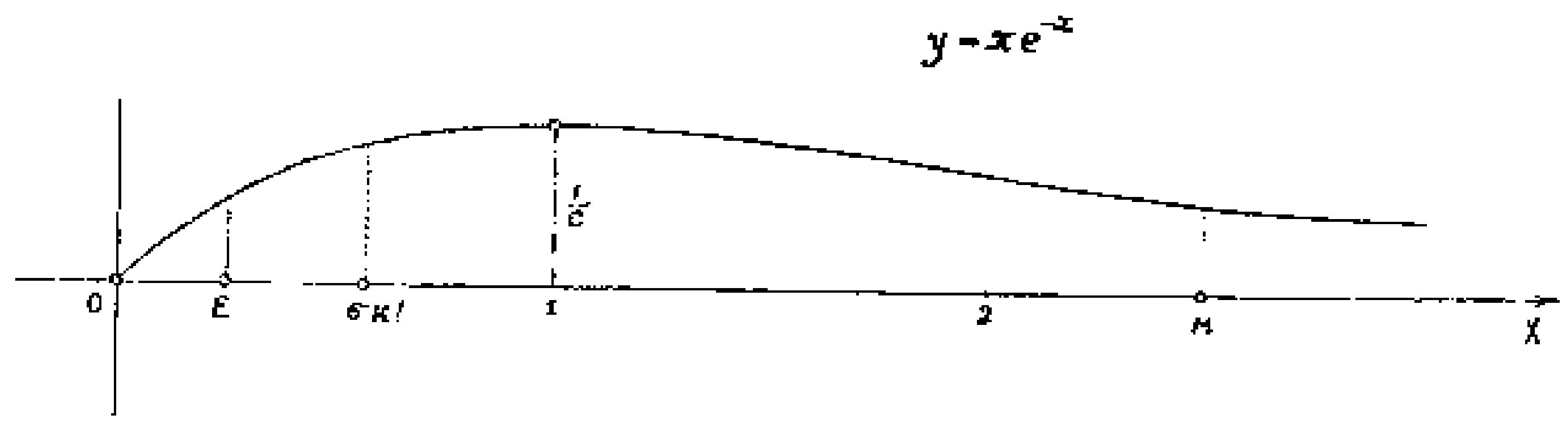
c'est-à-dire l'affirmation (8).

Or, l'inégalité (9) peut être obtenue par des considérations suivantes.

Remplaçons, d'abord, r par $e^{-\sigma}$; alors, pour que $r \to 1$, il faut que $\sigma \to 0$, et l'on a dans ce cas $(1-r) = (1-e^{-\sigma}) \sim \sigma$ lorsque $\sigma \to 0$.

Par suite, au lieu d'étudier les limites de l'expression $(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, r^{\nu!}$, lorsque $r \to 1$, on peut étudier celles de $\sigma \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, e^{-\sigma\nu!}$ lorsque $\sigma \to 0$. Mais, cette expression ayant la forme $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma\nu!\, e^{-\sigma\nu!}$, l'on voit qu'elle a pour valeur la somme des ordonnées de la fonction xe^{-x} aux points $x_\nu = \sigma\nu!$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Soit sur l'axe des X un intervalle quelconque, mais fixe (ε, M), où ε et $1/M$ peuvent être choisis aussi petits que l'on veut Il est facile de montrer que, pour σ suffisamment petit, il peut y avoir au plus *un* parmis les points $x_\nu = \sigma\nu!$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, qui soit situé dans l'intervalle (ε, M). En effet, pour que $\sigma k!$ soit situé dans cet intervalle il faut que $\varepsilon \leqslant \sigma k!$, et pour qu'un second



point y soit situé il faudrait en outre que $\sigma(k+1) \leqslant M$; en multipliant ces deux inégalités membres à membres, il résulterait $\varepsilon(k+1) \leqslant M$. k devrait donc être inférieur à $\frac{M}{\varepsilon} - 1$, ce qui contredirait la première des deux inégalités précédentes: $k! \geqslant \frac{\varepsilon}{\sigma}$ d'après laquelle on peut choisir σ assez petit pour que k dépasse la quantité $\frac{M}{\varepsilon} - 1$. Donc, en choisissant σ assez petit, si l'un des points x_ν, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, est situé dans (ε, M) tous les autres doivent être extérieurs à cet intervalle, ce qui démontre l'affirmation.

Considérons, à présent, la somme des ordonnées de la fonction $y = xe^{-x}$, correspondant aux points x_ν extérieurs à l'intervalle (ε, M). La somme des ordonnées correspondant aux points à droite de M est évidemment inférieure à la surface $\int_{M-1}^{\infty} xe^{-x}dx = eMe^{-M}$. En ce qui concerne la somme s des ordonnées correspondant aux points à gauche de ε, l'on a

$$s = \sum_{\nu=1}^{\sigma\nu! \leqslant \varepsilon} \sigma\nu!\, e^{-\sigma\nu!} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\sigma\nu! \leqslant \varepsilon} \sigma\nu! \leqslant \varepsilon\left(\frac{1!}{\nu!} + \frac{2!}{\nu!} + \frac{3!}{\nu!} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{(\nu-1)\nu} + \frac{1}{\nu} + 1\right) \leqslant \varepsilon\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \dots + \frac{1}{\nu} + 1\right) \leqslant 2\varepsilon .$$

Par suite, puisque pour σ suffisamment petit, un des points $x_\nu = \nu$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, au plus est situé dans l'intervalle (ε, M), et puisque la plus grande valeur de la fonction xe^{-x} est $1/e$, la somme de toutes les ordonnées de cette fonction correspondant aux points $\sigma\nu!$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, ne peut dépasser la quantité $2\varepsilon + e^{-1} + eMe^{-M}$, c'est-à-dire, on a l'inégalité

$$(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, r^{\nu!} = \sigma \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, e^{-\sigma\nu!} \leqslant 2\varepsilon + e^{-1} + eMe^{-M},$$

pour σ suffisamment petit. Donc

$$\limsup_{r=1}\, (1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, r^{\nu!} \leqslant 2\varepsilon + e^{-1} + eMe^{-M},$$

et puisque dans cette inégalité on peut choisir, d'une part, ε arbitrairement petit et d'autre part, M arbitrairement grand, l'on en déduit l'inégalité (9), et par suite l'affirmation (8).

Il est, du reste, facile de trouver une suite particulière r_p, $p = 1, 2, 3, \dots$, de valeurs de r, telle que

$$(10) \qquad (1-r_p)\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, r_p^{\nu!} \to e^{-1} \quad \text{lorsque} \quad r_p \to 1 .$$

Une telle suite est, par exemple, $r_p = e^{-1/p!}$, $p = 1, 2, 3, \dots$ En effet, du fait que

$$(1-r_p) = (1-e^{-1/p!}) \backsim 1/p!, \quad p \to \infty,$$

et des relations

$$\frac{1}{p!}\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, e^{-\nu!/p!} = \frac{1}{p!}\sum_{\nu=1}^{p-1} \nu!\, e^{-\nu!/p!} + e^{-1} + \frac{1}{p!}\sum_{\nu=p+1}^{\infty} \nu!\, e^{-\nu!/p!},$$

$$\frac{1}{p!}\sum_{\nu=1}^{p-1} \nu!\, e^{-\frac{\nu!}{p!}} \leqslant \frac{1}{p!}\sum_{\nu=1}^{p-1} \nu! = \frac{1}{p}\,\frac{1}{(p-1)!}\sum_{\nu=1}^{p-1} \nu! \to 0, \; p \to \infty,$$

$$\frac{1}{p!}\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\nu!\,e^{-\frac{\nu!}{p!}}=\frac{(p+1)}{e^{p+1}}+\frac{(p+1)\,(p+2)}{e^{(p+1)\,(p+2)}}+\ldots\leqslant\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\nu e^{-\nu}=$$

$$=\frac{e\,(p+1)-p}{(e-1)^2\,e^{p}}\to 0\,,\quad p\to\infty\,,$$

il résulte l'affirmation (10).

Cet exemple suffit pour donner les réponses complètes aux questions posées au début de cette Note.

D' ailleurs, on peut en donner une infinité de suites $\{a_\nu\}$ satisfaisant à la relation (5). Ainsi, par exemple, toute suite $\{a_n\}$ de la forme

$$a_n=\begin{cases} n & \text{pour} \quad n=n_k\,, \\ 0 & \text{pour} \quad n\neq n_k\,, \end{cases} \qquad k=1,2,3,\ldots,$$

où n_k, $k=1,2,3,\ldots$, est une suite d'entiers tels que $\frac{n_{k+1}}{n_k}\to\infty$ avec k, satisfait à la relation (5); ce que l'on peut montrer en suivant la même marche comme il vient d'être exposé pour la suite (6). (Dès que dans ces suites le quotient $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ ne tend pas vers l'infini, l'égalité (5) ne peut avoir lieu).

Ainsi, on a démontré le théorème suivant:

Tout suite de nombres positifs $\{a_\nu\}$ *satisfait aux inégalites*

$$\limsup_{r=1}\,(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu r^\nu\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\leqslant e\limsup_{r=1}\,(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu r^\nu\,,$$

où la constante e, base des logarithmes naturels, ne peut être remplacée par aucun nombre plus petit, tant qu'on reste dans le cas général considéré.

Beograd, le 25 mars 1923.