Sommabilité et fonctionnelles linéaires

par

J. Karamata (Belgrade).

Dans cet exposé nous allons indiquer des rapports intimes existants entre certains procédés de sommations et les fonctionnelles linéaires. Sans donner une théorie générale, nous voulons simplement faire ressortir ce rapport dans un cas particulier, en indiquant le parti que l'on peut tirer d'un théorème sur les suites de fonctionnelles linéaires pour l'étude des procédés de sommation, les comparant entre eux et à la convérgence ordinaire. Ce cas particulier peut d'ailleurs servir de base à une étude plus générale. Le théorème en question, sur les suites de fonctionnelles linéaires, est à peu près celui de M. F. Riesz[1]), que nous mettrons sous la forme:

Théorème A. *Soit $v_n(x)$ une suite de fonctions à variation bornée dans l'intervalle [0, 1] avec*

$$v_n(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Les conditions suivantes étant remplies:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 x^k d[v_n(x)] = \int_0^1 x^k d[v(x)] \quad \textit{pour } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$$\int_0^1 |dv_n(x)| \leqslant M, \quad M \textit{ indépendant de } n\,^{2)}, \tag{3}$$

la suite de fonctionnelles linéaires

---

[1]) F. Riesz. C. R. 149, p. 974.

[2]) c.-à-d. que la suite $v_n(x)$ soit à variation uniformément bornée.

$$\int_0^1 f(x)\, d[v_n(x)] \to \int_0^1 f(x)\, d[v(x)], \qquad \textit{lorsque } n \to \infty,$$

pour toutes les fonctions $f(x)$ continues dans $[0, 1]$; et, si $v(x)$ est monotone, pour toutes les fonctions $f(x)$ intégrables-RS[1]) *par rapport à $v(x)$.*

La première moitié du théorème ainsi formulé se démontre immédiatement en appliquant le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes. Quant à la seconde moitié, on la démontre en utilisant la proposition suivante:

Si $v(x)$ est une fonction monotone et $f(x)$ intégrable-RS par rapport à $v(x)$, il existe toujours deux fonctions continues (même des polynômes) $g(x)$ et $G(x)$ telles que l'on ait:

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant G(x), \qquad \text{pour tout } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

et

$$\int_0^1 [G(x) - g(x)]\, d[v(x)] \leqslant \varepsilon$$

ε pouvant être choisi aussi petit que l'on veut.

Nous montrerons l'application de ce théorème à un procédé particulier de sommation, d'ailleurs assez général, que nous définirons de la manière suivante:

Une suite de nombres $\{a_n\}$ sera dite *sommable-$D(p_n, \lambda_n)$* avec la limite généralisée a si

$$(4) \qquad \frac{\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu p_\nu e^{-\lambda_\nu s}}{\sum_0^\infty{}_\nu\, p_\nu e^{-\lambda_\nu s}} \to a, \qquad \text{lorsque } s \to 0,$$

$\{\lambda_n\}$ étant une suite de nombres positifs, croissant constamment vers l'infini c.-à-d.

$$(5) \qquad 0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \to \infty \quad \text{avec } n$$

et $\{p_n\}$ une suite de nombres positifs tels que

[1]) c.-à-d. intégrable au sens de Riemann-Stieltjes.

$$(6) \qquad P_n = \sum_0^n{}_\nu\, p_\nu \to \infty \quad \text{avec } n$$

et que la série

$$(7) \qquad P(s) = \sum_0^\infty{}_\nu\, p_\nu e^{-\lambda_\nu s} \quad \text{converge pour tout } s > 0.$$

Dans ce qui suivra, nous assujétirons encore la suite $\{p_n\}$ à une certaine condition de régularité (par rapport à la suite $\{\lambda_n\}$) dont le rôle résulte du lemme suivant:

Lemme: *Pour que l'expression*

$$(8) \qquad \frac{\sum_0^\infty{}_\nu\, p_\nu f(e^{-\lambda_\nu s}) e^{-\lambda_\nu s}}{\sum_0^\infty{}_\nu\, p_\nu e^{-\lambda_\nu s}} = \int_0^1 f(x)\, d[v(s, x)]$$

tende vers une limite détérminée, lorsque $s \to 0$, pour toutes les fonctions $f(x)$ continues dans $[0, 1]$, il faut et il suffit que

$$(9) \qquad \frac{\sum_0^{\lambda_\nu \leqslant \omega}{}_\nu\, p_\nu \dfrac{\lambda_\nu}{\omega}}{\sum_0^{\lambda_\nu \leqslant \omega}{}_\nu\, p_\nu} \to \frac{\lambda}{1+\lambda}, \qquad \textit{lorsque } \omega \to \infty$$

et dans ce cas l'on a

$$(10) \qquad \lim_{s=0} \frac{1}{P(s)} \sum_0^\infty{}_\nu\, p_\nu f(e^{-\lambda_\nu s}) e^{-\lambda_\nu s} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 f(\xi) \left(lg \frac{1}{\xi}\right)^{\lambda-1} d\xi$$

et

$$(11) \qquad P(s) \sim \Gamma(1+\lambda) \sum_0^{\lambda_\nu \leqslant \frac{1}{s}}{}_\nu\, p_\nu.$$

Pour démontrer ce lemme nous aurons besoin de la proposition suivante (dont la démonstration pataîtra dans „Mathematica“ Vol. 4. Cluj, Roumanie).

Soit $g(t)$ une fonction monotone croissante vers l'infini, pour que la fonction

$$\frac{g(tx)}{g(t)} \quad \textit{tend vers une limite lorsque } t \to \infty$$

il suffit que

$$\int_0^1 \frac{g(tx)}{g(t)}\, dx \to \alpha, \quad \textit{lorsque } t \to \infty$$

et dans ce cas l'on a

$$\lim_{t=\infty} \frac{g(tx)}{g(t)} = x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Considérons maintenant l'expression

$$(12) \qquad \frac{1}{P(s)} \sum_0^\infty{}^\nu p_\nu e^{-\lambda_\nu x} \cdot e^{-\lambda_\nu s} = \frac{P[s(1+x)]}{P(s)}.$$

Si, pour $x = 1, 2, 3, \ldots$, elle tend vers une limite lorsque $s \to 0$, on voit par la formule (8) que les conditions (1), (2) et (3) du théorème A seront remplies, d'où résulterait l'existence de la limite de l'expression (8) pour toutes les fonctions continues $f(x)$, lorsque $s \to 0$. Or, en appliquant la proposition citée plus haut, (12) tendra vers une limite pour tous les $x \geqslant 0$ lorsque

$$\frac{s}{P(s)} \int_s^\infty P(\xi) \frac{d\xi}{\xi^2} \text{ tend vers un nombre } p = 1 + \lambda, s \text{ tendant vers } 0.$$

Ce qui aura toujours lieu lorsque

$$\frac{1}{\left(\frac{P(s)}{s}\right)'} \left(\int_s^\infty P(s) \frac{d\xi}{\xi^2}\right)' = 1 \Big/ 1 - \frac{sP'(s)}{P(s)} \to 1 + \lambda$$

c.-à-d. lorsque

$$-\frac{sP'(s)}{P(s)} \to \frac{1-p}{p} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

et comme

$$\frac{-sP'(s)}{P(s)} = \sum_0^\infty{}^\nu p_\nu \frac{\lambda_\nu}{\omega} e^{-\lambda_\nu/\omega} \Big/ \sum_0^\infty{}^\nu p_\nu e^{-\lambda_\nu/\omega}, \quad \omega = \frac{1}{s},$$

on voit que, lorsque $\omega \to \infty$, cette expression tendra vers $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ toutes les fois que la condition (9) est remplie, et on aura

$$\frac{P[(1+x)s]}{P(s)} \to (1+x)^{-\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 \xi^x \left(lg \frac{1}{\xi}\right)^{\lambda-1} d\xi$$

ainsi que l'équation (10) pour toutes les fonctions $f(x)$ continues (et même d'après le théorème (A), intégrables-R) dans $[0, 1]$. Ceci montre que la condition (9) est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécéssaire remarquons d'abord que, de l'existence de (10) pour toutes les fonctions continues, il résulte son existence pour toutes les fonctions intégrables-R. En posant donc

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant e^{-1} \\ \frac{1}{x} & \text{pour } e^{-1} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

on obtient l'équation (11); en posant, ensuite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant e^{-1} \\ \frac{lg\, x}{x} & \text{pour } e^{-\Gamma} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

on obtient

$$P(s) \sim \frac{\lambda+1}{\lambda} \Gamma(1+\lambda) \,.\, s \sum_0^{\lambda_\nu \leqslant \frac{1}{s}}{}^\nu \lambda_\nu p_\nu$$

puis, en divisant cette équation par l'équation (11), on obtient la condition (9), ce qui nous montre qu'elle est nécéssaire.

Nous allons passer au théorème principal, qui va nous montrer le rapport existant entre le procédé de sommation-$D(p_n, \lambda_n)$ et les fonctionnelles linéaires:

Théorème I. *Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres sommable-$D(p_n, \lambda_n)$ et bornée-* ~~*$D(p_n, \lambda_n)$ en module*~~ *c.-à-d.*

d'un côté

$$(4) \qquad \frac{1}{P(s)} \sum_0{}^\nu a_\nu p_\nu e^{-\lambda_\nu s} \to a, \quad \textit{lorsque } s \to 0,$$

et

$$(13) \qquad \cancel{\frac{1}{P(s)} \sum_0^\infty{}^\nu |a_\nu| p_\nu e^{-\lambda_\nu s} \leqslant M, \quad M \textit{ indépendant de } s},$$

$a_\nu \geqslant 0$,

les suites $\{p_n\}$ *et* $\{\lambda_n\}$ *satisfaisant à la condition (9), on aura*

$$(14)\quad \lim_{s\to 0}\frac{1}{P(s)}\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu f(e^{-\lambda_\nu s})\, e^{-\lambda_\nu s}=\frac{a}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 f(\xi)\left(lg\frac{1}{\xi}\right)^{\lambda-1}d\xi$$

ou bien

$$(14')\quad \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{P\left(\frac{1}{\omega}\right)}\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu\, \varphi\left(\frac{\lambda_\nu}{\omega}\right)e^{-\frac{\lambda_\nu}{\omega}}=\frac{a}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{\infty} e^{-\xi}\varphi(\xi)\xi^{\lambda-1}d\xi,$$

quelle que soit la fonction $f(\xi)$ *intégrable-R dans [0, 1],*

En effet, en posant dans (4) $s(1+k)$ au lieu de s, on aura, d'après le lemme précèdant

$$\frac{1}{P(s)}\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu (e^{-\lambda_\nu s})^k e^{-\lambda_\nu s}\to\frac{a}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{\infty}\xi^k\left(lg\frac{1}{\xi}\right)^{\lambda-1}d\xi$$

ce qui montre que les conditions (2) du théorème A sont remplies. D'autre part, la condition (13) exprime ~~que la condition (3) du théorème A est remplie, c.-à-d.~~ que la fonction $v(s,x)$ ~~est à variation uniformément bornée,~~ ne de pas quelque soit $s>0$. Donc l'application du théorème A nous donne l'équation (14).

Le théorème I. peut de même prendre la forme suivante:

Théorème II. *Une suite de nombres* $\{a_n\}$, *sommable et bornée* d'un $D(p_n, \lambda_n)$ ~~*en module*~~, *est sommable par tous les procédés de la forme*

$$\frac{\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu f(e^{-\lambda_\nu s})e^{-\lambda_\nu s}}{\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, p_\nu f(e^{-\lambda_\nu s})e^{-\lambda_\nu s}}\quad ou\quad \frac{\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu\varphi\left(\frac{\lambda_\nu}{\omega}\right)e^{-\frac{\lambda_\nu}{\omega}}}{\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, p_\nu\varphi\left(\frac{\lambda_\nu}{\omega}\right)e^{-\frac{\lambda_\nu}{\omega}}}$$

avec la même limite, quelque soit la fonction $f(x)$ *intégrable R dans [0, 1].*

Le cas le plus intéressant est lorsqu'on prend pour $\varphi(x)$ la fonction particulière

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^x & \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{pour } 1<x<\infty\end{cases}$$

ce qui nous donne le résultat suivant:

Théorème III. *Une suite de nombres* $\{a_n\}$ *étant sommable et bornée* $D(p_n, \lambda_n)$ ~~*en module*~~, *est de même sommable par le procédé* d'un coté

$$\frac{\sum_{0,\ \lambda_\nu\leqslant\omega}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu}{\sum_{0}{}^{\nu}\, p_\nu}\quad ou\quad \frac{\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu}{\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, p_\nu}$$

ec la même limite.

Les théorèmes I—III contiennent un grand nombre de résults connus, en particulier certains „Tauberians Théorèmes" de M. I. Hardy et Littlewood.

Nous voyons donc, sur ce cas particulier, le rapport existant ntre les fonctionnelles linéaires et les procédés de sommation ainsi que les résultats que l'on peut en tirer en ce qui concerne la comparaison de différents procédés de sommation entre eux.

Nous allons montrer encore, sur ce même exemple, comment on peut passer de la sommabilité à la convergence ordinaire. Nous utiliserons pour cela le théorème II. En prenant pour $\varphi(x)$ la fonction suivante:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour } 0\leqslant x\leqslant x_1\\ e^x & \text{pour } x_1<x\leqslant x_2\\ 0 & \text{pour } x_2<x<\infty,\end{cases}$$

nous obtenons pour toute suite $\{a_n\}$ sommable et bornés d'un côté $D(p_n, \lambda_\nu)$ ~~en module~~

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sum_{\omega x_1<\lambda_\nu\leqslant\omega x_2}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu}{\sum_{\omega x_1<\lambda_\nu\leqslant\omega x_2}{}^{\nu}\, p_\nu}=a.$$

Considérons la différence

$$D_\omega=\frac{\sum_{\omega x_1<\lambda_\nu\leqslant\omega x_1}{}^{\nu}\, a_\nu p_\nu}{\sum_{\omega x_1<\lambda_\nu\leqslant\omega x_1}{}^{\nu}\, p_\nu}-a,\quad \text{où } n \text{ est tel que } \omega x_1\leqslant\lambda_n\leqslant\omega x_2$$

on a

$$| D_\omega | \leqslant \frac{\sum\limits_{\omega x_1 < \lambda_\nu \leqslant \omega x_2}^{\nu} | a_\nu - a_n | p_\nu}{\sum\limits_{\omega x_1 < \lambda_\nu \leqslant \omega x_2}^{\nu} p_\nu} \leqslant \operatorname*{Max}_{\omega x_1 < \lambda_\nu \leqslant \omega x_2} | a_\nu - a_n | .$$

Donc, si

$$\limsup_{\omega = \infty} \operatorname*{Max}_{\omega x_1 < \lambda_\nu \leqslant \omega x_2} | a_\nu - a_n | = \omega(x_1, x_2) \to 0, \quad \text{lorsque } | x_1 - x_2 | \to 0$$

on aura

$$\lim_{\omega = \infty} D_\omega = 0$$

c.-à-d.

$$\lim_{n = \infty} a_n = a.$$

Nous obtenons donc le

Théorème IV. *Pour qu'une suite de nombres $\{a_n\}$ sommable $D(p_n, \lambda_n)$ soit convergente, il suffit (et il faut) que $\{a_n\}$ soit bornée* d'un cô ~~$D(p_n, \lambda_n)$ en module~~ *et que*

$$\limsup_{\omega = \infty} \operatorname*{Max}_{\omega x_1 < \lambda_\nu < \omega x_2} | a_\nu - a_n | = \omega(x_1, x_2) \to 0, \ \textit{lorsque} \ | x_1 - x_2 | \to 0.$$

Ce théorème, qui est un théorème inverse de sommabilité, résultant directement du théorème II, nous montre que le théorème A est en quelque sorte une source commune de bien de théorèmes différents, concernant la sommabilité.

Nous croyons avoir montré, par ces exemples, le rapport existant entre les fonctionnelles linéaires et la sommabilité, ainsi que l'ulilité que l'on peut en tirer.