SUR CERTAINS „TAUBERIAN THEOREMS" DE M. M. HARDY ET LITTLEWOOD.

par

Dr. J. Karamata

à Beograd.

Reçu le 30. Janvier 1930.

Depuis les travaux de M. M. CESÀRO et BOREL la théorie de la sommabilité des séries divergentes s'est extrêmement développée. Une seconde étape que l'on peut remarquer dans cette théorie sont les travaux de M. M. HARDY et LITTLEWOOD. Tandis qu'après les travaux de M. BOREL on cherchait plutôt à créer et à étudier des procédés de sommabilité de plus en plus généraux, M. M. HARDY et LITTLEWOOD s'occupaient surtout à comparer les différents procédés entre eux et à la convergence ordinaire. Leurs études consistaient à trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les termes d'une série pour que de la sommabilité par un procédé plus puissant on puisse passer à une sommabilité par un procédé moins puissant ou même à la convergence ordinaire. Les théorèmes donnant de telles conditions peuvent donc être appelés à juste raison des théorèmes d'inversion. Les procédés particuliers dont s'occupaient ces auteurs sont surtout ceux de CESÀRO, de BOREL et d'ABEL, (ainsi que certains de leurs correspondants aux séries de DIRICHLET) généralisant de différentes manières le théorème de TAUBER, d'où leur nom de „Tauberian theorems".

Il nous semble que la source commune d'un grand nombre de ces recherches réside dans un lien intime qui existe entre ces procédés particuliers de sommabilité et les fonctionnelles linéaires, moyennant lesquelles on pourra étudier tout cet ensemble de problèmes d'un point de vue général.

Le lien en question entre ces procédés particuliers de sommabilité, par exemple ceux de CESÀRO, d'ABEL et de BOREL, et les fonctionnelles linéaires, ressortira des formules suivantes :

1. Une suite de nombres s_ν est dite sommable - C (Cesàro) si la limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \qquad \text{existe},$$

et l'on a, d'autre part,

$$\lim_{n-\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

2. La suite s_ν est dite sommable - A (Abel) si la limite

$$\lim_{r=1} (1-r) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu \qquad \text{existe},$$

et il est facile de voir que

$$\lim_{r=1} (1-r) \sum_{\nu=0}^{\infty} f(r^\nu)\, r^\nu = \int_0^1 f(x)\,dx, \tag{2}$$

ou encore

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} g\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{-\frac{\nu}{n}} = \int_0^\infty e^{-x} g(x)\,dx.$$

Ces équations ont lieu quelles que soient les fonctions $f(x)$ ou $g(x)$ intégrables - R (au sens de Riemann).

3. De même, la suite s_ν est dite sommable - B (Borel) si la limite

$$\lim_{r=\infty} e^{-r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} r^\nu \qquad \text{existe},$$

et l'on peut montrer que

$$\lim_{r=\infty} e^{-r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f\left(\frac{\nu}{r}\right) r^\nu = f(1) = \int_0^\infty f(x)\, d\{v(x)\}, \tag{3}$$

où

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{pour } 1 < x < \infty \end{cases},$$

équation qui a lieu pour toute fonction $f(x)$ continue au point $x = 1$.

Dans la présente communication, nous ferons encore ressortir cette analogie sur certains procédés de sommabilité qui généralisent ceux d'Abel et de Cesàro, et que nous définirons de la manière suivante:

La suite de nombres s_n est dite sommable - $A(p)$ avec la limite généralisée s, si

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} \to s \quad \text{lorsque } r \to 1 \ ; \tag{4}$$

de même, elle sera dite sommable - $C(p)$ si

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} \to s \quad \text{lorsque } n \to \infty \ . \tag{5}$$

Nous tirerons, en outre, une conséquence de cette analogie à l'étude de la comparaison de ces deux procédés entre eux, qui nous permettra d'obtenir une extension du théorème suivant de M. M. Hardy et Littlewood[1]):

Soit $f(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu$, la série étant convergente pour $r < 1$, et soit

$$f(r) \sim \left(\frac{1}{1-r}\right)^\sigma L\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1, \quad \sigma > 0,$$

où

$$L(x) = (lgx)^{\sigma_1} (lglgx)^{\sigma_2} \cdots .$$

Si les coefficients a_ν sont positifs on a

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sim \frac{n^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} L(n) \ , \ n \to \infty .$$

Cette extension, du reste, a déjà été obtenue par M. R. Schmidt[2])

[1]) G. H. Hardy et J. E. Littlewood, „Taubérian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positifs", *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 13. 1914. 174 - 191.

[2]) R. Schmidt, „Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen". *Math. Zeitschr.* Bd. 22. 1915. 89—152.

e manière différente, ce qui ne diminue pas l'intérêt de la présente
e, d'une part, parce que la voie que nous suivons présente un inté-
en soi, d'autre part, parce qu'elle montre l'utilité que l'on peut
du lien existant entre ces procédés de sommabilité et les fonction-
es linéaires.

Pour entreprendre cette étude nous chercherons tout d'abord les
litions auxquelles doit satisfaire la suite de nombres $P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu$
qu'à la sommabilité $A(p)$ corresponde une relation analogue à
définie par l'équation (2), correspondant elle-même à la somma-
é A. En d'autres termes, nous chercherons quand est-ce que la
tionnelle linéaire

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu f(r^\nu)\, r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu},$$

ndant du paramètre r, tend vers une limite lorsque $r \to 1$. Il en
ltera que la suite $P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu$, ainsi que la fonction $p(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu$,
ent satisfaire à une certaine condition de régularité, dont nous
sommes occupé dans une Note présentée à la Société Mathéma-
de France et dans une autre Note intitulée „Sur un mode de
sance régulière des fonctions", et qui paraîtra dans le Vol. 4. de
hematica" (Cluj, Roumanie), page 38-53.

Définissons donc auparavant ce que nous entendons par la *croissance*
ière d'une suite de nombres, ou d'une fonction, et citons celles de
propriétés dont nous aurons besoin dans le présent exposé. Nous
isterons pas sur les démonstrations, celles-ci se trouvant dans la
citée.

Soit P_n une suite de nombres positifs, ou soit $g(x)$ une fonction
ive, tendant toutes les deux vers l'infini; elles seront à *croissance*
ière si

$$\frac{1}{nP_n}\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu \to \frac{1}{\sigma} \qquad \text{lorsque} \quad n \to \infty ,$$

$$\frac{1}{x\,g(x)}\int_0^x g(t)\,dt \to \frac{1}{\sigma} \qquad \text{lorsque} \quad x \to \infty ;$$

le nombre σ est appelé *l'indice de régularité* et est dans ce cas ≥ 1. Le cas où $\sigma = 1$ correspond à *la croissance lente*.

Les propriétés des suites et des fonctions à croissance régulière dont nous nous servirons, sont les suivantes :

I. Si P_n ou $g(x)$ sont à croissance régulière, à indice σ, on peut les mettre sous la forme

$$P_n = n^{\sigma-1}\,L(n) \qquad \text{ou} \qquad g(x) = x^{\sigma-1}\,L(x) ,$$

$L(x)$ étant une fonction à croissance lente, satisfaisant à la condition

$$\lim_{r=\infty}\frac{L(rx)}{L(r)} = 1 , \quad \text{pour tout} \quad x > 0 .$$

II. Pour tout $x > 0$, on a

$$\lim_{n-\infty}\frac{P_{[nx]}}{P_n} = x^{\sigma-1} \quad \text{ou} \quad \lim_{r\to\infty}\frac{g(rx)}{g(r)} = x^{\sigma-1}.$$

Inversement si ces limites existent pour tout $x > 0$, et sont différentes de zéro, la suite P_n, ainsi que la fonction $g(x)$, sont à croissance régulière.

III. Si $f(x) \sim g(x)$, $x \to \infty$, et si l'une de ces deux fonctions est à croissance régulière l'autre l'est aussi, avec le même indice.

IV. Si $g(x)$ est une fonction monotone, à croissance régulière et à indice $\sigma > 1$, sa fonction inverse est de même à croissance régulière, à indice $\frac{\sigma}{\sigma - 1}$.

V. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions à croissance régulière, à indices respectifs σ_1 et σ_2, $g(x) \to \infty$, la fonction $f\{g(x)\}$ est de même à croissance régulière, à indice $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) + 1$.

Nous dirons, en outre, qu'une fonction $h(y)$ *est à croissance régulière lorsque* $y \to a$, si la fonction $g(x) = h\left(a - \frac{1}{x}\right)$ est à croissance régulière lorsque $x \to \infty$.

Passons à présent à l'étude de l'expression (6), en y posant tout d'abord $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, et cherchons sous quelles conditions l'expression ainsi obtenue, tendera vers une limite lorsque $r \to 1$.

Or, en y posant

$$r = e^{-\frac{1}{t}}, \quad y = \frac{1}{1+\alpha}, \quad p\left(e^{-\frac{1}{t}}\right) = g_1(t) ,$$

cette expression prend la forme :

$$\frac{p\left(r^{1+\alpha}\right)}{p(r)} = \frac{g_1(yt)}{g_1(t)} ,$$

donc, pour qu'elle tende vers une limite pour tout $y > 0$, lorsque $t \to \infty$, il faut et il suffit que $g_1(t)$ soit une fonction à croissance régulière, {voir propriété II. page 37.}.

D'autre part, $g_1(t)$ sera à croissance régulière ou ne le sera pas, suivant que la fonction $g(t) = p\left(1-\frac{1}{t}\right)$ l'est ou ne l'est pas, puisque

$$g_1(t) = g\left(\frac{e^{\frac{1}{t}}}{e^{\frac{1}{t}}-1}\right), \quad \frac{e^{\frac{1}{t}}}{e^{\frac{1}{t}}-1} \sim t \,.$$

la fonction $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{e^{\frac{1}{t}}-1}$ étant en outre monotone, {voir propriétés III. IV. et V. page 37.}.

La fonction $g(t)$ doit donc satisfaire à la condition (8). Par suite, en posant

$$1-\frac{1}{t} = \tau \quad \text{et} \quad 1-\frac{1}{x} = r,$$

cette condition prend la forme:

$$\frac{1}{x\,g(x)}\int_1^x g(t)\,dt = \frac{1-r}{p(r)}\int_0^r \frac{p(\tau)}{(1-\tau)^2}\,d\tau \text{ doit} \to \frac{1}{\sigma} \quad \text{lorsque } r \to 1,$$

qui, d'après les relations,

$$\frac{p(r)}{1-r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu r^\nu \quad \text{et} \quad \int_0^r \frac{p(\tau)}{(1-\tau)^2}\,d\tau = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{P_0+P_1+\dots+P_\nu}{\nu+1}\, r^{\nu+1}$$

se transforme finalement en:

$$\frac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{P_0+P_1+\dots+P_\nu}{\nu+1}\, r^\nu}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu r^\nu} \text{ doit} \to \frac{1}{\sigma} \quad \text{lorsque } r \to 1.$$

Mais cette condition sera toujours remplie si P_ν est une suite à termes positifs, tendant vers l'infini et satisfaisant à la condition (7). Nous avons donc démontré le

LEMME 1. *Si $P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu$ est une suite à croissance régulière, tendant vers l'infini avec n, la fonction $p(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu$ sera à croissance régulière lorsque $r \to 1$, avec le même indice.*

Reprenons l'expression (6) et montrons qu'elle tend vers une limite lorsque $r \to 1$ si la fonction $p(r)$ est à croissance régulière et si la suite P_n satisfait en outre aux conditions suivantes:

$$\text{(9)} \qquad P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \to \infty \text{ avec } n \quad \text{et} \quad p_n \geq 0 \text{ pour tout } n = 0, 1, 2, \dots$$

En effet, $p(r)$ étant à indice σ, de ce qui précède et de la propriété II. (page 37.) des fonctions à croissance régulière, nous obtenons que

$$\text{(10)} \qquad \frac{p(r^{1+\alpha})}{p(r)} = \frac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^{\nu(1+\alpha)}}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} \to (1+\alpha)^{\sigma-1} = \frac{1}{\Gamma(\sigma-1)}\int_0^1 t^\alpha(-\lg t)^{\sigma-2}\,dt \,,$$

si $\sigma > 1$, et si $\sigma = 1$ cette intégrale a la valeur 1.

En posant dans cette équation $\alpha = 0, 1, 2, \dots n$, et en multipliant respectivement les équations ainsi obtenues par des constantes arbitraires, nous aurons

$$\lim_{r \to 1} \frac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} P(r^\nu)\, p_\nu r^\nu}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\sigma-1)}\int_0^1 P(t)(-\lg t)^{\sigma-2}\,dt \,, \quad \text{si } \sigma > 1 \,,$$

{cette limite étant égale à $P(1)$ lorsque $\sigma = 1$} $P(t)$ étant un polynome quelconque en t.

En se servant du théorème de WEIERSTRASS, que toute fonction continue peut être uniformément approximée par des polynomes, on obtient (p_ν étant positifs) la relation

$$\text{(11)} \qquad \lim_{r \to 1} \frac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu f(r^\nu)\, r^\nu}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} = \int_0^1 f(t)\, d\{a_\sigma(t)\} \,,$$

où

$$a_\sigma(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma-1)}\int_0^t (-\lg\tau)^{\sigma-2}\,d\tau \,, \quad \text{si } \sigma > 1 \,,$$

et

$$a_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pour } t = 1 \,. \end{cases}$$

$f(t)$ étant une fonction continue dans $(0, 1)$.

De même en utilisant le fait qu'à toute fonction $f(t)$ intégrable-R dans $(0, 1)$, on peut faire correspondre deux fonctions $g(t)$ et $G(t)$ de telle sorte que l'on ait

$$g(t) \leq f(t) \leq G(t) \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

et
$$\int_0^1 \{ G(t) - g(t) \} \, dt \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ étant arbitrairement petit,}$$

il s'ensuit que l'équation (11) reste valable pour toute fonction $f(t)$ intégrable - R dans $(0, 1)$ si $\sigma > 1$, tandis que dans le cas où $\sigma = 1$, $f(t)$ doit être continue au point $t = 1$. Nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème I. *Soit $P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu$ une suite monotone, tendant vers l'infini et soit $p(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu$ à croissance régulière, à indice σ, lorsque $r \to 1$; si $\sigma > 1$ on aura*

$$(11') \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu \, g\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{-\frac{\nu}{n}}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu \, e^{-\frac{\nu}{n}}} = \frac{1}{\Gamma(\sigma-1)} \int_0^\infty e^{-t} g(t) \, t^{\sigma-2} \, dt,$$

pour toute fonction $g(t)$ intégrable - R; tandis que si $\sigma = 1$, cette limite est égale à $g(0)$, $g(t)$ devant être continue au point $t = 0$.

{L'équation (11') se déduisant immédiatement de (11) en y posant

$$r = e^{-\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad f(e^{-x}) = g(x),$$

dans quel cas elle prend une forme analogue à la seconde équation (2).}

Des équations (11) et (11') ressort le lien annoncé existant entre le procédé de sommation $A(p)$ et les fonctionnelles linéaires; un résultat semblable s'obtient pour le procédé $C(p)$, exprimé par la formule

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu f\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} = \int_0^1 f(t) \, d\{ t^{\sigma-1} \}$$

valable pour toute fonction $f(t)$ intégrable - R si $\sigma > 1$, et pour toute fonction continue au point $t = 0$, si $\sigma = 1$, dans quel cas cette limite est égale à $f(0)$.

Avant de passer à un théorème plus général, qui nous permettra de comparer les procédés $A(p)$ et $C(p)$, nous allons en tirer quelques conséquences.

En posant dans l'équation (11')

$$(13) \qquad g(x) = \begin{cases} e^x & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{pour } 1 < x < \infty \end{cases},$$

on obtient

$$(14) \qquad P_{[t]} \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \, p\left(e^{-\frac{1}{t}}\right), \quad t \to \infty,$$

et cette équation montre, {d'après III}, que la suite P_n est de même à croissance régulière ayant même indice que la fonction $p(r)$. Nous pouvons, en effet, déduire l'équation (7) directement du théorème précédent, car en y posant

$$g(x) = \begin{cases} xe^x & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{pour } 1 < x < \infty \end{cases},$$

on tire

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu}{n} p_\nu = P_n - \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu \sim \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \, p\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

et en divisant cette équation par l'équation (14), on obtient l'équation (7), ce qui montre que la suite P_n est bien à croissance régulière.

Nous obtenons donc {voir I.} le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Soit $P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu$ une suite monotone de nombres, tendant vers l'infini. Si elle est à croissance régulière {c'est-à-dire si elle satisfait à la condition (7)} on peut poser*

$$P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \sim n^{\sigma-1} L(n), \quad n \to \infty,$$

et l'on aura

$$p(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu \sim \Gamma(\sigma) \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma-1} L\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1.$$

Inversement, la seconde de ces relations entraine la première.

Ce corollaire contient le théorème cité de M. M. HARDY et LITTLEWOOD, le généralisant en ce sens que la fonction $L(x)$ n'est assujétie qu'à satisfaire à la condition que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1, \quad \text{pour tout} \quad x > 0,$$

si $\sigma > 1$, mais si $\sigma = 1$ il faut en outre que $L(x) \to \infty$ avec x.

Comme seconde conséquence du théorème précédent démontrons encore le corollaire suivant, dont nous aurons besoin plus tard.

COROLLAIRE 2. *Soit q_ν une suite de nombres positifs; la suite p_ν satisfaisant aux conditions (7) et (9), on aura*

$$(15)\quad \limsup_{r=1} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} \leq \limsup_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} q_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} \leq \frac{e^{\sigma-1}\Gamma(\sigma)}{(\sigma-1)^{\sigma-1}} \limsup_{r=1} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu}.$$

La première de ces inégalités étant connue, il suffit de montrer la seconde. Or, nous avons

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu r^\nu > \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu r^\nu > r^n \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu ,$$

donc

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} q_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} < r^{-n} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} \cdot \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu},$$

et en prenant $r = e^{-\frac{h}{n}}$, $h > 0$, de l'équation (14) on obtient facilement que

$$r^{-n} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} \to \frac{e^h\,\Gamma(\sigma)}{h^{\sigma-1}} \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty ,$$

expression qui prend sa plus petite valeur pour $h = \sigma - 1$. Ce qui démontre la seconde inégalité.

Passons maintenant à l'étude de la comparaison des procédés de

sommabilité $A(p)$ et $C(p)$, la suite p_ν étant assujétie à satisfaire aux conditions (7) et (9).

Soit s_n une suite de nombres sommable - $A(p)$, avec la limite généralisée s que l'on peut toujours supposer positive et différente de zéro, car si l'on avait $s \leq 0$, au lieu de la suite s_n il suffirait de considérer la suite $a + s_n$, avec $a + s > 0$.

L'hypothèse que la suite s_n est sommable - $A(p)$ peut s'exprimer sous la forme

$$(16)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu r^\nu \sim s \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu , \quad r \to 1,$$

équation qui montre {d'après III.} que la fonction $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu r^\nu$ est à croissance régulière, à indice σ. Si l'on suppose donc que la suite s_n est à termes positifs, on peut obtenir une équation analogue à l'équation (11) à laquelle, moyennant (16), on peut donner la forme suivante

$$(17)\qquad \lim_{r=1} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu f(r^\nu) r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} = s \int_0^1 f(t)\, d\{a_\sigma(t)\} ,$$

$a_\sigma(t)$ étant la même fonction que dans (11); cette relation étant valable pour toute fonction $f(t)$ intégrable au sens de RIEMANN-STIELTJES par rapport à $a_\sigma(t)$.

De cette relation on obtient en particulier, en prenant pour $f(e^{-x})$ la fonction speciale (13), et en se servant de la relation (14), que *les procédés de sommabilité $A(p)$ et $C(p)$ sont équivalents pour toute suite de nombres s_n à termes positifs.*

Mais la relation (17) reste valable pour des suites plus générales que celles à termes positifs. On voit, en effet, facilement qu'elle aura encore lieu pour toute suite s_n qui peut être mise sous forme de différence de deux suites à termes positifs, les deux suites étant sommables - $A(p)$. Or, cette condition peut s'exprimer encore sous une autre forme en introduisant la notion suivante:

La suite s_n sera dite majorable - $A(p)$ en module, s'il existe une suite de nombres S_n, sommable - $A(p)$, et telle que l'on ait

$$|s_n| \leq S_n \text{ pour tout } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ceci posé, il est facile de voir que toute suite sommable - $A(p)$ et majorable - $A(p)$ en module, peut être mise sous la forme précédente et inversement.

Il résulte donc de ce qui précède, que la condition de la majorabilité de la suite s_n est suffisante pour l'existence de l'équation (17) pour toute fonction $f(t)$ intégrable - RS par rapport à $a_\sigma(t)$. D'autre part, pour que cette équation ait lieu pour toutes les fonctions continues $f(t)$, il résulte des considérations précédentes, qu'une condition suffisante est : que

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu p_\nu r^\nu|}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad r \leq 1,$$

M étant indépendant de r; ce que l'on peut exprimer en disant que la suite s_n est *bornée - A(p) en module*. Or, cette condition, d'après le corollaire 2, est équivalente à la condition que la suite s_n soit bornée - C(p) en module, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu| p_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

M étant indépendant de n.

{Rappelons ici encore qu'il en est de même pour les majorabilités A(p) et C(p) en module, c'est-à-dire qu'une suite majorable - A(p) en module est de même majorable - C(p) en module et inversement, ce qui résulte de l'équivalence des sommabilités A(p) et C(p) pour toute suite à termes positifs.}

Cherchons, en dernier lieu, à quelles conditions doit satisfaire la suite s_n pour que l'équation (17) existe pour toutes les fonctions $f(t)$ à variation bornée. Il suffit pour cela de voir sous quelles conditions cette équation existera pour les fonctions de la forme

$$v_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \xi \\ 1 & \text{pour} \quad \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

puisque toute fonction à variation bornée peut être mise sous la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu v_{\xi_\nu}(x),$$

la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ étant absolument convergente.

Il en résulte, tout d'abord, que la sommabilité C(p) de la suite s_ν est une condition nécessaire et suffisante pour que (17) existe pour toutes les fonctions à variation bornée. Ceci peut se vérifier directement en remarquant que l'on a

$$A_r(p,s) = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu f(r_\nu) r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(p,s) P_\nu \{f(r^\nu) - r f(r^{\nu+1})\} r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu}$$

où

$$C_n(p,s) = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} \to s, \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

donc

$$A_r(p,s) \to s \int_0^1 f(t)\, d\{a_\sigma(t)\}, \quad \text{lorsque} \quad r \to 1,$$

toutes les fois que

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu |f(r^\nu) - r f(r^{\nu+1})| r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad r \leq 1,$$

M étant indépendant de r, c'est-à-dire pour toutes les fonctions $f(t)$ à variation bornée.

D'autres formes que l'on peut donner encore à cette condition sont les suivantes :

Pour que (17) existe pour toutes les fonctions à variation bornée, il suffit que la suite s_n soit majorable - C(p) d'un côté, c'est-à-dire il suffit qu'il existe une suite S_n sommable - C(p) et telle que

$$s_n \leq S_n, \ (\text{ou} \quad s_n \geq S_n) \quad \text{pour tout} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ceci résulte encore du fait que les sommabilités A(p) et C(p) sont équivalentes pour toutes suites à termes positifs.

Une dernière forme que l'on donnera à cette condition est la suivante :

Il suffit que

$$(18)\qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=p}^{q} s_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu} = w(\varepsilon) \to 0 \quad \text{avec } \varepsilon,$$

pour tout p et q tels que $n(1-\varepsilon) \leq p < q \leq n(1+\varepsilon)$.

{Nous ne reproduirons pas ici la démonstration de ce fait, que nous exposerons dans un autre travail sous une forme plus générale.}

Nous avons ainsi obtenu en définitif le

Théorème II. *Soit donnée une suite de nombres s_n sommable - $A(p)$ avec la limite généralisée s; elle sera sommable par tous les procédés de la forme*

$$(19)\qquad \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu g\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{-\frac{\nu}{n}}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu g\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{-\frac{\nu}{n}}}$$

avec la même limite s:

1. *pour toutes les fonctions $g(x)$ intégrables - R ou continues au point $x=0$, (suivant que $\sigma > 1$ ou $=1$) si la suite s_n est majorable - $A(p)$ ou - $C(p)$ en module.*

2. *pour toutes les fonctions continues $g(x)$ si la suite s_n est bornée - $A(p)$ ou - $C(p)$ en module.*

3. *pour toutes les fonctions $g(x)$ à variation bornée, si la suite s_n est majorable - $C(p)$ d'un côté ou si elle satisfait à la condition (18) {ou encore si elle est sommable - $C(p)$}.*

En particulier il résulte de ce théorème, en prenant pour $g(x)$ la fonction (13), une généralisation du corollaire 1. à laquelle on peut donner la forme suivante:

Corollaire 3. *Les procédés de sommabilité $A(p)$ et $C(p)$ sont équivalents pour toute suite majorable - $C(p)$ d'un côté, ou satisfaisant à la condition (18).*

Remarquons ici encore que la condition (18) se trouve déjà dans la Note citée de M. R. Schmidt, sous une forme un peu différente.

On peut énoncer encore pour la sommabilité $C(p)$ un théorème analogue au théorème précédent sous la forme suivante:

Théorème III. *Une suite de nombres s_n étant sommable - $C(p)$, elle sera sommable, avec la même limite généralisée, par tous les procédés de la forme*

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu p_\nu f\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu f\left(\frac{\nu}{n}\right)},$$

$f(x)$ étant une fonction à variation bornée; si la suite s_n est en plus bornée - $C(p)$ en module, on peut prendre pour $f(x)$ toute fonction continue et si la suite est majorable - $C(p)$ en module, on peut prendre pour $f(x)$ toute fonction intégrable - R ou continue au point $x=0$, suivant que σ est >1 ou $=1$.

En dernier lieu étudions encore le rapport entre le procédé de sommabilité $A(p)$ et le procédé $N(p, q)$, défini par l'expression

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu p_\nu Q_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu Q_{n-\nu}},$$

$Q_n = \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu$ étant une suite monotone à croissance régulière.

Remarquons tout d'abord que toute suite sommable - $N(p, q)$ est de même sommable - $A(p)$ avec la même limite, (d'où il résulte en particulier, qu'une suite s_n étant sommable par deux procédés $N(p, q)$, à suites q_n différentes, doit avoir la même limite généralisée). D'autre part, on a pour le procédé de sommation $N(p, q)$, une formule analogue aux formules (11) et (12), c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) p_\nu Q_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu Q_{n-\nu}} = \int_0^1 f(t)\, t^{\sigma_2 - 1}\, d\{t^{\sigma_1 - 1}\},$$

et qui est valable pour toute fonction $f(t)$ intégrable - RS par rapport à $t^{\sigma_1 - 1}$, σ_1 et σ_2 étant les indices de régularité des suites P_n et Q_n.

Pour voir quand est-ce que la sommabilité - $A(p)$ d'une suite de nombres entraîne la sommabilité N(p, q), multiplions le numérateur et le dénominateur de

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu}$$

par

$$q(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu r^\nu,$$

on obtient alors

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} s_\mu p_\mu q_{\nu-\mu} r^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu q_{\nu-\mu} r^\nu}. \tag{20}$$

En posant

$$r_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu q_{n-\nu} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{\nu=0}^{n} r_\nu,$$

R_n sera de même une suite monotone à croissance régulière, dont l'indice est égal à $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) - 1$, car

$$R_n \sim \frac{\Gamma(\sigma_1)\,\Gamma(\sigma_2)}{\Gamma(\sigma_1 + \sigma_2)} P_n Q_n.$$

En appliquant, enfin, au côté droit de l'équation (20) le corollaire 3. nous obtenons en particulier la proposition suivante:

La suite s_n étant sommable - $A(p)$, elle sera sommable - $N(p,q)$ toutes les fois que l'on aura

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu p_\nu q_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu q_{n-\nu}} \leqq M, \ (\text{ou} \geqq M) \ \text{pour tout } n = 0, 1, 2, \ldots$$

le nombre M étant indépendant de n.

La sommabilité N(p,q) généralisant les procédés de sommabilité de Cesàro d'ordres supérieurs, la proposition précédente contient en particulier certains résultats de M. G. Doetsch.[1])

[1]) G. Doetsch, Über die Cesàro-sche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzbegriffes bei integrablen Funktionen. *Math. Zeitschr.* **11**, 1921, 161–79.