SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DES COÉFFICIENTS D'UNE SÉRIE DE TAYLOR

par

Dr. J. Karamata

Beograd.

Reçue le 20 Decembre 1926.

Soit

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1}$$

une fonction holomorphe dans le cercle $|z|=1$; dans cette note nous étudierons les relations qui existent entre la moyenne arithmétique des coéfficients a_ν c.-à.-d.

$$s_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}{}' a_\nu e^{\nu\theta i} \qquad \text{lorsque } n\to\infty \tag{2}$$

et la limite de

$$(1-r)\, f(r\, e^{\theta i}) \qquad \text{lorsque } r\to 1. \tag{3}$$

En supposant d'abord que les coéfficients a_ν sont des nombres réels, nous pouvons établir entre les expressions (2) et (3) (pour $\theta=0$), les inégalités suivantes :

Lemme 1⁰. *Soit* a_ν *une suite de nombres réels; en posant*

$$f(r)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \tag{4}$$

on a

$$\liminf_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leq \liminf_{r=1}\,(1-r)\,f(r) \leq \limsup_{r=1}\,(1-r)\,f(r) \leq \limsup_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \tag{5}$$

tandis que si les nombres a_ν *sont positifs, on a en plus*

$$\limsup_{r=1}\,(1-r) f(r) \leq \limsup_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leq e\,.\,\limsup_{r=1}\,(1-r)\,f(r). \tag{6}$$

En effet, on a

$$(7)\qquad m_n \leq \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \sigma_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu r^\nu} \leq M_n$$

M_n et m_n étant le plus grand et le plus petit des nombres $\frac{\sigma_\nu}{\nu}$, $(\nu = n, n+1, \ldots)$

Or si l'on pose

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

il s'ensuit

$$\frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \sigma_\nu r^\nu}{\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu r^\nu} = \frac{(1-r)\, f(r) - (1-r)^2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma_\nu r^\nu}{r - (1-r) \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu r^\nu}$$

donc

$$(1-r)^2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu} - m_n\right) r^\nu + r\, m_n \leq (1-r) f(r) \leq r\, M_n - (1-r)^2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \left(M_n - \frac{\sigma_\nu}{\nu}\right) r^\nu$$

et à fortiori

$$r\, m_n \leq (1-r)\, f(r) \leq r\, M_n$$

ce qui démontre les inégalités (5).

Quant à l'inégalité (6) on a, les a_ν étant positifs

$$\frac{1}{n} f(\sqrt[n]{r}) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^{\frac{\nu}{n}} \geq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu r^{\frac{\nu}{n}} \geq r\, \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = r\, s_n$$

donc, en posant

$$r^{\frac{1}{n}} = h \qquad , \qquad \frac{1}{n} = {}^{\lg h}/_{\lg r}$$

on obtient

$$s_n \leq \frac{1}{-r \lg r} \cdot \frac{-\lg h}{1-h} (1-h)\, f(h)$$

d'où

$$\limsup_{n=\infty} s_n \leq \frac{1}{-r \lg r} \limsup_{h=1} (1-h)\, f(h)$$

et en prenant pour r la valeur $^1/_e$, pour laquelle la fonction $^1/_{-r \lg r}$ prend sa plus petite valeur dans l'intervalle $(0, 1)$, on obtient l'inégalité (6).

Du lemme 1⁰ il resulte, en particulier, le fait connu, que l'existence de la limite

$$(8)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

entraine l'existence de la limite

$$(9)\qquad \lim_{r=1} (1-r)\, f(r)$$

quels que soient les nombres a_ν. Quant à la proposition inverse c.-à.-d. sous quelles conditions l'existence de la limite (9) entraine celle de la limite (8), elle resulte d'une généralisation dûe à M. R. Schmidt d'un théorème de M. M. Hardy et Littlewood, (Math. Zeitschrift. Bd. 22. 1925. p. 150) que l'on peut écrire sous la forme suivante:

Théorème 1⁰: *De l'existence de la limite*

$$(9')\qquad \lim_{r=1} (1-r) \sum_{1}^{\infty} a_\nu r^\nu = a$$

on peut conclure l'existence de

$$(8')\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n} a_\nu = a$$

toutes les fois que

$$(10)\qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{1}{n} \left| \sum_{n(1-\delta)}^{n(1+\delta)} a_\nu \right| = \varphi(\delta) \to 0 \text{ avec } \delta.$$

Tandisque si les nombres a_ν *sont positifs, l'existence de l'une des deux limites (8) ou (9) entraine celle de l'autre, la condition* ***(10)*** *étant satisfaite.*

Considérons maintenant la fonction

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

en supposant que les coéfficients satisfassent à la condition

$$(11)\qquad \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} |a_\nu|^2 = O(1).$$

On aura dans ce cas

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{n(1-\delta)}^{n(1+\delta)} a_\nu e^{\nu\theta i} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{n(1-\delta)}^{n(1+\delta)} |a_\nu| \leq \sqrt{\frac{2\delta}{n} \sum_{n(1-\delta)}^{n(1+\delta)} |a_\nu|^2} \leq M' \sqrt{\delta}$$

ce qui montre que la condition (10) du théorème 1⁰ est remplie, et il s'ensuit qu'il est indifférent d'étudier l'une ou l'autre des deux limites

(12) $$\varphi_r(\theta) = (1-r)\, f(r\,e^{i\theta}) \qquad \text{pour } r \to 1$$

ou

(13) $$\varphi_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} a_\nu\, e^{\nu\theta i} \qquad \text{pour } n \to \infty$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\, f(r\,e^{\theta i})\,|^2\, d\theta = \sum_{1}^{\infty} |\, a_\nu\,|^2\, r^{2\nu}$$

il s'ensuit du lemme 1⁰ que l'hypothèse (11) est équivalente à la suivante :

(14) $$(1-r)\int_0^{2\pi} |\, f(r\,e^{\theta i})\,|^2\, d\theta = 0\,(1) \qquad \text{pour } r \to 1$$

Considérons l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |\,\varphi_r(\theta)\,|^2\, d\theta = (1-r)^2\int_0^{2\pi} |\, f(r\,e^{\theta i})\,|^2\, d\theta \leq (1-r)\,\mathrm{M}$$

et prenons pour r une suite de valeurs r_ν où $\nu = 1, 2, \ldots$ et $r_\nu < r_{\nu+1}$, tendant vers l'unité de telle sorte que la série dont le terme général est $u_\nu = 1 - r_\nu$ converge. Du lemme suivant de M. H. Weyl (Math. Ann. Bd. 77. 1916): „Si $f_n(x)$ est une suite de fonctions continues et si la série $\sum_1^\infty \int_0^1 |\, f_\nu(x)\,|\, dx$ converge, la suite $f_n(x)$ converge vers zéro à un ensemble de mesure nulle près", il résulte que la suite de fonctions $\varphi_{r_\nu}(\theta)$ converge vers zéro à un ensemble de mesure nulle près. Soit, d'autre part,

$$|\,\varphi_r - \varphi_{r_\nu}\,| = |\,(1-r)\, f(r e^{\theta i}) - (1-r_\nu)\, f(r_\nu e^{\theta i})\,| \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} |\, a_\mu\,| \,.\, |\, r^\mu(1-r) - r_\nu^\mu(1-r_\nu)\,|$$

$$\leq \frac{r-r_\nu}{1-r}\left\{ (1-r)^2 \sum_{1}^{\infty} \nu\,|\, a_\nu\,|\, r^\nu + (1-r)\sum_{1}^{\infty} |\, a_\nu\,|\, r^\nu \right\}$$

et comme

$$(1-r)^2 \sum_{1}^{\infty} \nu\,|\, a_\nu\,|\, r^\nu \leq \sqrt{(1-r)^3 \sum_{1}^{\infty}{}' \nu^2\, r^\nu \cdot (1-r)\sum_{1}^{\infty} |\, a_\nu\,|^2\, r^\nu} \leq \mathrm{M}$$

on obtient

$$|\,\varphi_r(\theta) - \varphi_{r_\nu}(\theta)\,| \leq \frac{r_{\nu+1} - r_\nu}{1 - r_{\nu+1}}\, \mathrm{M}' = \left(\frac{1-r_\nu}{1-r_{\nu+1}} - 1\right)\mathrm{M}' = \left(\frac{\mathrm{U}_\nu}{\mathrm{U}_{\nu+1}} - 1\right)\mathrm{M}'\,;$$

d'autre part on peut choisir r_ν de telle sorte que $\frac{\mathrm{U}_\nu}{\mathrm{U}_{\nu+1}} \to 1$, d'où il r
sulte le

Théorème 2⁰. Si la fonction f (z) *satisfait à la condition*

$$(1-r)\int_0^{2\pi} |\, f(r\,e^{\theta i})\,|^2\, d\theta = 0\,(1) \qquad \textit{pour } r \to 1$$

l'expression

$$\varphi_r(\theta) = (1-r)\, f(r\,e^{\theta i}) \to 0 \qquad \textit{avec } r$$

***pour** toutes les valeurs de θ excepté au plus un ensemble de mesure nulle*

Théorème qui, d'après les considérations précédentes, équivaut à la proposition suivante :

Si

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} |\, a_\nu\,|^2 = 0\,(1) \qquad \textit{pour } n \to \infty$$

l'expression

$$\varphi_\nu(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} a_\nu\, e^{\nu\theta i} \to 0 \qquad \textit{avec } {}^1\!/_n$$

pour toutes les valeurs de θ excepté au plus un ensemble de mesure nulle.

Cette proposition se démontre du reste de la même manière que le théorème précédant.

Remarquons encore qu'en supposant l'existence de $(1-r)\, f(r\,e^{\theta i})$ **pour** toutes les valeurs de θ (ou bien excepté au plus un ensemble **dénombrable**) la fonction limite ne peut différer de zéro que sur un ensemble au plus dénombrable, ce que l'on peut exprimer sous la forme :

Théorème 3⁰. Si l'on a

$$(1-r)\int_0^{2\pi} |\, f(r\,e^{\theta i})\,|^2\, d\theta = 0\,(1) \qquad \textit{pour } r \to 1$$

et si la limite

$$\varphi(\theta) = \lim_{r=1}\, (1-r)\, f(r\,e^{\theta i})$$

existe pour toutes les valeurs de θ, $\varphi(\theta)$ est égale à zéro excepté au plus *sur un ensemble dénombrable, la fonction* $|\varphi(\theta)|^2$ *étant à variation bornée.*

De ce théorème aussi on a, d'après les considérations précédentes, une proposition équivalente relative à la suite de fonctions

$$\varphi_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_1^n a_\nu e^{\nu\theta i}.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer qu'une quelconque des fonctions $H_r(\theta)$ tendant vers $\varphi^2(\theta)$, lorsque $r\to 1$, est à variation uniformément bornée quelque soit $0<r<1$ [1].

Prenons pour cela l'intégrale de la fonction $\frac{f^2(z)}{z}$ sur le quadrangle $\left(r_0 e^{\theta_0 i}, r e^{\theta_0 i}, r e^{\theta i}, r_0 e^{\theta i}\right)$; on obtient

$$i\int_{\theta_0}^{\theta} f^2(re^{\theta i})\,d\theta=\int_{r_0}^{r} f^2(\tau e^{\theta i})\frac{d\tau}{\tau}-\int_{r_0}^{r} f(\tau e^{\theta_0 i})\frac{d\tau}{\tau}+i\int_{\theta_0}^{\theta} f^2(r_0 e^{\theta i})\,d\theta$$

Or

$$\lim_{r=1}(1-r)\int_{r_0}^{r} f^2(\tau e^{\theta i})\frac{d\tau}{\tau}=\lim_{r=1}(1-r)^2 f^2(re^{\theta i})=\varphi^2(\theta)$$

(règle de l'Hôpital).

(1) La variation $V_a^b(f)$ d'une fonction complexe $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ dans l'intervalle $[a,b]$ peut être définie de la même manière que celle d'une fonction réelle c'est-à-dire

$$V_a^b(f)=\limsup\sum_0^n|f(x_\nu)-f(x_{\nu+1})|\quad,\quad\text{lorsque } \operatorname{Max}(x_{\nu+1}-x_\nu)\to 0$$

ou, si $f(x)$ possède une dérivée

$$V_a^b(f)=\int_a^b|f'(x)|\,dx.$$

Il est facile de voir que si $f(x)$ est à variation bornée la partie réelle et imaginaire le sont aussi et inversement, ce qui resulte des inégalités :

$$\Sigma|f_1(x_{\nu+1})-f_1(x_\nu)|\leq\Sigma|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|,\ \Sigma|f_2(x_{\nu+1})-f_2(x_\nu)|\leq\Sigma|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|$$

et

$$\Sigma|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|\leq\Sigma|f_1(x_{\nu+1})-f_1(x_\nu)|+\Sigma|f_2(x_{\nu+1})-f_2(x_\nu)|$$

De même, si $f(x)$ est à variation bornée $|f(x)|$ l'est aussi puisque

$$\Sigma\big||f(x_{\nu+1})|-|f(x_\nu)|\big|\leq\Sigma|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|.$$

En posant

$$H_r=(1-r)\int_{r_0}^{r} f^2(\tau e^{\theta i})\frac{d\tau}{\tau}$$

on a

$$V_0^{2\pi}(H_r)=\int_0^{2\pi}|H_r'(\theta)|\,d\theta=(1-r)\int_0^{2\pi}|f^2(re^{\theta i})-f_1^2(r_0 e^{\theta i})|\,d\theta$$

$$\leq(1-r)\int_0^{2\pi}|f(re^{\theta i})|^2 d\theta+(1-r)\int_0^{2\pi}|f(r_0e^{\theta i})|^2 d\theta\leq M.$$

Donc la fonction $H_r(\theta)$, convergeant vers $\varphi^2(\theta)$, est à variation uniformément bornée quelque soit $0<r<1$. Il s'ensuit que $\varphi^2(\theta)$, l'est aussi, et comme elle doit être égale à zéro pour toutes les valeurs de θ excepté au plus un ensemble de mesure nulle, cet ensemble exceptionnel se réduit à un ensemble dénombrable [1].

Nous étudierons encore un cas particulier, d'ailleurs assez général, dans lequel la fonction $\varphi(\theta)$ existe et peut être calculée pour toutes les valeurs de θ. C'est le cas où les coéfficients a_ν sont de la forme

$$a_\nu=\psi(\nu\alpha)\qquad,\qquad \nu=1,2,3,\ldots$$

$\psi(x)$ étant une fonction bornée, intégrable R et périodique de période égale à l'unité, α un nombre réel.

On a à étudier dans ce cas la limite de

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}{}'\,\psi(\nu\alpha)\,e^{2\pi\nu\theta i}\qquad\text{pour } n\to\infty.$$

Des théorèmes de la Note citée de M. H. Weyl il resulte: si α et α/θ sont des nombres irrationnels

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\nu\alpha)\,e^{2\pi\nu\theta i}=\int_0^1\psi(x)\,dx\,.\int_0^1 e^{2\pi x i}\,dx=0$$

et si θ est de la forme $\frac{p}{q}\alpha$, p et q étant des nombres entiers, α un nombre irrationnel, en posant $\alpha=q\alpha'$ on obtient

(1) Car on peut poser $|\varphi(\theta)|^2=\alpha_1(\theta)-\alpha_2(\theta)$, α_1 et α_2 étant des fonctions monotones d'où $\int_0^\theta\alpha_1(\theta)\,d\theta=\int_0^\theta\alpha_2(\theta)\,d\theta$, donc $\alpha_1(\theta)=\alpha_2(\theta)$ en tout point de continuité.

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi(\nu q\alpha')\,e^{2p\pi\nu\alpha' i}=\int_0^1\psi(qx)e^{2p\pi xi}\,dx=\frac{1}{q}\int_0^q\psi(\tau)e^{2\frac{p}{q}\pi\tau i}\,d\tau=$$

$$\frac{1}{q}\sum_{\nu=0}^{q-1}\int_\nu^{\nu+1}\psi(\tau)e^{2\frac{p}{q}\pi\tau i}\,d\tau=\frac{1}{q}\sum_{\nu=0}^{q-1}\int_0^1\psi(t+\nu)\,e^{2\frac{p}{q}\pi(t+\nu)i}\,dt=$$

$$\frac{1}{q}\sum_{\nu=0}^{q-1}e^{2\frac{p}{q}\pi\nu i}\cdot\int_0^1\psi(t)\,e^{\frac{p}{q}\pi ti}\,dt=\begin{cases}0 & \text{si } p/q\neq n\\ \int_0^1\psi(t)\,e^{2n\pi ti}\,dt & \text{si } p/q=n\end{cases}\qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

ce qui conduit au résultat suivant:

Soit $f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(\nu\alpha)z^\nu$, *$\alpha$ étant un nombre irrationnel; on a*

$$\lim_{r=1}(1-r)f(re^{2\pi\theta i})=\begin{cases}0 & \textit{si } \theta \textit{ n'est pas de la forme } n\alpha\\ \int_0^1\psi(t)\,e^{2n\pi ti}\,dt & \textit{si } \theta=n\alpha\end{cases}$$

n étant un nombre entier positif ou négatif.

On peut de même montrer très facilement que dans le cas *où α* ***est un nombre rationnel on a:***

$$\lim_{r=1}(1-r)f(re^{2\pi\theta i})=0$$

si θ est un nombre irrationnel ou *si $\theta=p'/q'$ et $\alpha=p/q$, les fractions* ***étant irreductibles, avec $q\neq nq'$;*** *si par contre $q=nq'$ on a*

$$\lim_{r=1}(1-r)f(re^{2\pi\theta i})=\frac{1}{q}\sum_{\nu=1}^{n}\psi\left(\nu\frac{p}{q}\right)e^{2\pi\nu\frac{p'}{q'}i}$$

n étant un nombre entier positif *ou négatif.*

Comme conséquence de ce qui précède, il résulte, que si tous les coéfficients de Fourrier de la fonction $\psi(x)$ sont différents de zéro, la fonction $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(\nu\alpha)z^\nu$ a le cercle de convergence comme cercle de coupure.