UNE QUESTION DE MINIMUM RELATIVE AUX ENSEMBLES ET SON RAPPORT AVEC L'ANALYSE

PAR

JOVAN KARAMATA

à Belgrade

Soit E un ensemble plan, borné (que l'on peut supposer fermé) de points A_ν, d'affixe α_ν; M un point de son plan d'affixe z, et $\Omega(z)$ la plus grande des distances MP_ν, P_ν parcourant l'ensemble E; on se propose de chercher pour quelle valeur de z la fonction $\Omega(z)$ prend sa plus petite valeur.

Théorème. — La fonction $\Omega(z)$ prend sa plus petite valeur, Ω_m, en un seul point, C, d'affixe λ_m, qui est le centre du plus petit cercle contenant tous les points de l'ensemble E; et la valeur minimale $\Omega_m = \Omega(\lambda_m)$ est égale au rayon r de ce cercle.

La fonction $\Omega(z)$ étant égale au rayon du plus petit cercle de centre z contenant l'ensemble E, pour démontrer le théorème il suffit de montrer que la solution est unique. Supposons, en effet, qu'elle prenne sa plus petite valeur en deux points, λ_m et λ'_m; les deux cercles de centre λ_m et λ'_m et de rayon Ω_m devant contenir l'ensemble E, il existera un troisième cercle de rayon plus petit que Ω_m contenant l'ensemble E, ce qui est contraire à l'hypothèse; cela démontre complètement le théorème.

Le problème d'analyse où le théorème précédent se présente est le suivant:

Soit $g(z) = \sum_{0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!} z^\nu$ une fonction d'ordre un et de type moyen et

soit λ ($= \underset{r=\infty}{\mathrm{L\ sup.}} \frac{lg\ M(r)}{r}$) $= \underset{n=\infty}{\mathrm{L\ sup.}} \sqrt[n]{|a_n|}$ le type de $g(z)$.

Posons $g_1(z) = e^{\alpha z} g(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_\nu(\alpha)}{\nu!} z^\nu$, où $A_n(\alpha) = \sum_{0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu \alpha^{n-\nu}$

on aura toujours

$$\lambda(g_1) \leqq |\alpha| + \lambda(g)$$

Dans quelles conditions et pour quelles valeurs de α peut-on abaisser le type de $g_1(z)$? en d'autres termes quand l'inégalité

$$\lambda(g_1) \leqq \lambda(g)$$

aura-t-elle lieu ?

Pour donner une réponse à cette question, considérons les fonctions

$$\zeta(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \ et\ \zeta_1(z) = \frac{1}{1-\alpha z}\ \zeta\left(\frac{z}{1-\alpha z}\right) = \sum_{0}^{\infty} a_v(\alpha)\ z^v$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{\alpha\tau z}\ \xi(\tau z)\, d\tau = \frac{1}{1-\alpha z} \sum_{0}^{\infty} a_v \left(\frac{z}{1-\alpha z}\right)^v$$

dont $g(z)$ et $g_1(z)$ sont les fonctions associées de Borel.

Du fait que $\lambda(g_1) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L\ sup}} \sqrt[n]{|a_n(\alpha)|}$

il suit que $\lambda(g_1)$ est égal à l'inverse du module de la plus proche singularité de la fonction $f(z)$, en posant $\alpha_v = -1/z_v$ il résulte que $1/\alpha - \alpha_v$ est une singularité de $f_1(z)$ [de même $1/\alpha$ si $z = \infty$ n'est pas un zéro de $f(z)$]; il s'en suit que $\lambda(g_1)$ est égale à la fonction $\Omega(\alpha)$ relative à l'ensemble des points α_v, et le problème posé se ramène au problème précédent, c'est-à-dire à la recherche du minimum de la fonction $\Omega(\alpha)$; donc : $\lambda(g_1)$ prend sa plus petite valeur, Ω_m, lorsque α est égal à l'affixe λ_m du plus petit cercle contenant tous les points $\alpha_v = -1/z_v$, et sa plus petite valeur est égale au rayon de ce cercle.

Il s'en suit que, si $\lambda_m = 0$, on a $\Omega_m = \lambda(g)$; c'est-à-dire le minimum de $\lambda(g_1)$ est $\lambda(g)$ et, dans ce cas, on ne peut pas abaisser le type de $g(z)$.

Si, par contre, $\lambda_m \neq 0$ on a

$\Omega_m = \Omega(\lambda_m) < \Omega(0) = \lambda(g)$, ce qui montre que, dans ce cas, le type de $g(z)$ peut être abaissé ; donc, pour qu'on puisse abaisser le type de $g_1(z) = e^{\alpha z}\, g(z)$, il faut et il suffit que le centre du plus petit cercle contenant les points $\alpha_v = -1/z_v$ ne soit pas à l'origine.

Remarquons, enfin, que la fonction $\Omega(\alpha)$ relative à l'ensemble des points $\alpha_v = -1/z_v$, peut s'exprimer analytiquement sous la forme

$$\Omega(\alpha) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L\ surp.}} \sqrt[n]{|a_n(\alpha)|}$$

où $a_n(\alpha)$ est un polynôme de degré n en α.