Sonderdruck aus Mathematische Zeitschrift, Band 32 Heft 2.

Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes.

Von

J. Karamata in Belgrad.

Herr Littlewood bewies den folgenden Satz[1]):

Aus

$$f(r)=\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu r^\nu \to s \quad \text{für} \quad r\to 1 \text{ von links}$$

und

$$u_\nu = O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \to s \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

Dieser Satz und einige verwandte Sätze können sehr einfach aus dem folgenden Hauptsatz hergeleitet werden.

Hauptsatz. *Aus*

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu \to s \quad \textit{für} \quad r\to 1 \textit{ von links} \tag{2}$$

und

$$s_\nu \geqq -M, \quad M\geqq 0 \textit{ von } \nu \textit{ frei},$$

folgt

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu g(r^\nu) r^\nu \to s\cdot\int_0^1 g(t)\,dt \tag{3}$$

für jede im Intervalle $(0,1)$ *beschränkte und R-integrable Funktion* $g(t)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s_\nu\geqq 0$, da dieser Wortlaut sonst nur auf die beiden Folgen $s_\nu+M$ und M statt s_ν anzuwenden ist.

Setzt man alsdann in (2) $r^{1+\alpha}$, $\alpha\geqq 0$, statt r, so folgt

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^{\nu\alpha} r^\nu \to \frac{s}{1+\alpha};$$

[1]) Siehe E. Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. (1929), S. 57 und die dort angeführte Literatur.

also ist

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu P(r^\nu) r^\nu \to s\cdot\int_0^1 P(t)\,dt$$

für jedes Polynom $P(t)$. Da man aber jeder in $(0, 1)$ beschränkten und R-integrablen Funktion $g(t)$ bei jedem $\varepsilon > 0$ zwei Polynome $p(t)$ und $P(t)$ derart zuordnen kann, daß

$$p(t) \leqq g(t) \leqq P(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

und

$$\int_0^1 \{P(t) - p(t)\}\,dt \leqq \varepsilon$$

ist, und da die Zahlen $s_\nu \geqq 0$ sind, folgt die Gültigkeit von (3) für jede beschränkte und R-integrable Funktion $g(t)$.

Als erste Folge des Hauptsatzes kann man den folgenden von den Herren Hardy und Littlewood [2]) herrührenden Satz ableiten:

Satz. *Das Abelsche und Cesàrosche Limitierungsverfahren sind äquivalent für jede einseitig beschränkte Folge; mit andern Worten aus*

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu \to s \quad \textit{für} \quad r \to 1 \ \textit{von links}$$

und

$$s_\nu \geqq -M$$

folgt

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \to s.$$

Beweis folgt aus dem Hauptsatz, indem man in (3)

$$r = e^{-\frac{1}{n}}$$

und

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < e^{-1}, \\ \frac{1}{t} & \text{für} \quad e^{-1} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

setzt.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich bekanntlich[3]) die Hardy-Littlewoodsche Verschärfung des obigen Littlewoodschen Satzes, in der (1) durch die schwächere Voraussetzung

$$\nu u_\nu < c, \quad c \text{ von } \nu \text{ frei},$$

ersetzt ist, auf einen Tauberschen Satz zurückführen.

[2]) loc. cit. [1]) S. 12.

[3]) Siehe z. B. die 1. Auflage (1916) des unter [1]) zitierten Landauschen Buches S. 52—56.

(Eingegangen am 12. März 1930.)