SUR UN MODE DE CROISSANCE RÉGULIÈRE DES FONCTIONS

par

Dr. J. Karamata
à Belgrade

Reçu le 27 Janvier 1930.

Dans le cas d'une suite monotone de nombres, M. G. Pólya (1) se rapportant à une Note de M. E. Landau (2), avait étudié une certaine notion de régularité définie de la manière suivante:

Soit $q_\nu \leq q_{\nu+1}$ la suite de nombres considérée; posons

$$N(r) = \sum_{\nu=0}^{q_\nu \leq r} 1 \tag{1}$$

$\{ N(r) =$ au nombre des éléments $q_\nu \leq r \}$; la suite est régulière si l'on a

$$N(r) = r^\lambda L(r), \quad \text{ou} \quad N(r) = \frac{L(r)}{r^\lambda} \tag{2}$$

$L(r)$ étant une fonction monotone, tendant vers l'infini, dite à croissance lente, et satisfaisant à la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{L(2r)}{L(r)} = 1. \text{ (3)} \tag{3}$$

Plus tard M. R. Schmidt (4) s'en occupa; il appelle „Vergleichsfolge" toute suite monotone satisfaisant à la condition que la limite

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{q_\mu}{q_\nu}$$

(1) G. Pólya, Goett. Nach. 1917. p. 149. Math. Ann. Bd. 88. 1923. p. 173 et G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben u. Lehrsaetze, Bd. I, 1925, p. 66–69.

(2) E. Landau, Bull. Acad. Belgique, 1911, p. 443.

(3) ou, ce qui revient au même $\lim\limits_{r=\infty} \frac{L(cr)}{L(r)} = 1$, quelque soit $c > 0$. Voir E. Landau loc. cit.(2).

(4) R. Schmidt, Math. Zeitsch. Bd. 22, 1925. p. 89.

existe pour toute suite $\mu = \varphi(\nu)$ telle que

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\mu}{\nu} \text{ existe.}$$

Ces suites sont, comme nous le verrons, un peu plus générales que les suites régulières définies par (1), (2) et (3).

M. R. Schmidt élargit ensuite cette notion aux suites qui ne sont plus monotones, en désignant par „gestrahlte Folgen" les suites p_ν, à termes positifs, telles que $p_\nu \sim q_\nu$, q_ν étant une „Vergleichsfolge".

Or, dans une Note présentée à la Société Mathématique de France, nous nous sommes occupé de ces suites et nous avons montré que toute suite régulière monotone est telle que la limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu}{n q_n} \text{ existe.} \tag{4}$$

Inversement, toute suite satisfaisant à la condition (4), peut être mise sous une forme analogue aux formes (2) et (3). Nous avons, de même, indiqué que moyennant la condition (4) on peut se passer de la monotonie et définir une régularité au sens large par l'unique condition (4), et nous verrons ici que ces suites régulières au sens large sont complétement équivalentes aux suites étoilées de M. R. Schmidt, à l'exception des suites à croissance lente.

Dans la présente Note nous allons continuer ces études, mais au lieu de suites, nous nous occuperons de fonctions à croissance régulière définies par une expression analogue à l'expression (4) et qui est de la forme

$$\frac{1}{r\,q(r)} \int_0^r q(t)\,dt. \tag{5}$$

Ce n'est qu'un changement de forme, car les résultats obtenus peuvent être immédiatement appliqués aux suites; il suffit de prendre pour $q(x)$ la fonction

$$q(x) = q_\nu \qquad \text{lorsque } \nu < x < \nu+1 \quad , \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Ainsi, par exemple, on aura dans ce cas, pour les expressions fondamentales (4) et (5), en posant $n = [r]$,

$$\frac{1}{r\,q(r)} \int_0^r q(t)\,dt = \frac{[r]}{r} \cdot \frac{1}{n q_n} \sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu + 1 - \frac{[r]}{r}$$

ce qui montre que l'existence de l'une des deux limites entraine celle de l'autre.

Il en résultera, entre autres, que les suites étoilées, difinies par M. R. Schmidt, sont équivalentes aux suites régulières ainsi définies, dans le cas où l'exposant λ dans (2) est > 0; pour $\lambda \leq 0$ cela n'est plus le cas, la définition (4) étant plus large.

Pour faciliter l'exposé, nous définirons les fonctions à croissance régulière en partant d'une expression analogue à l'expression (5) et dont nous verrons plus tard, le rapport mutuel.

Soit $q(x)$ une fonction positive, définie pour tout $x \geq 0$, bornée dans tout intervalle fini et telle que l'expression

$$A_k(r) = \frac{1}{r^{k+1}\,q(r)} \int_0^r t^k\,q(t)\,dt \quad , \quad \text{avec } k > 0, \tag{6}$$

ait un sens pour toutes les valeurs finies de r; ces hypothèses étant remplies, nous dirons que $q(x)$ est une fonction à croissance régulière au sens large s'il existe un nombre positif k tel que l'expression (6) tende vers une limite déterminée, finie et différente de zéro, lorsque $r \to \infty$; en d'autres termes, si

$$A_k(r) = \frac{1}{r^{k+1}q(r)} \int_0^r t^k q(t)\,dt \to \frac{1}{\sigma_k}, \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} 0 < k < \infty \\ 0 < \sigma_k < \infty \end{matrix} \tag{7}$$

Le nombre $\sigma = \sigma_k - k$, sera appelé l'indice de régularité de la fonction $q(x)$. Cet indice ne dépend pas du nombre k, mais seulement de la fonction $q(x)$.

Cette définition posée, nous étudierons les propriétés des fonctions ainsi définies démontrant en premier lieu le théorème suivant:

Théorème 1. *Si $q(x)$ est une fonction à indice de régularité σ ([1]), on peut la mettre sous la forme*

$$q(x) = x^{\sigma-1} L(x); \tag{8}$$

la fonction $L(x)$ est dite à croissance lente, et satisfait à la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{L(cr)}{L(r)} = 1, \qquad \text{pour tout } c > 0. \tag{9}$$

Inversement, si $q(x)$ peut être mise sous la forme (8) et (9), elle est une fonction à indice de régularité σ.

En premier lieu, de la définition même, il s'ensuit l'existence d'un nombre positif k, tel que $\sigma_k = \sigma + k > 0$, et que $A_k(x) \to \frac{1}{\sigma_k}$; en posant donc

([1]) Pour abréger, en disant que „$q(x)$ est une fonction à indice de régularité σ" nous sousentendrons que „$q(x)$ est une fonction à croissance régulière et à indice de régularité σ".

$$\frac{1}{A_k(r)} = \sigma_k + \varepsilon_k(r)\,, \quad \text{où} \quad \varepsilon_k(r) \to 0 \text{ lorsque } r \to \infty,$$

on a

$$\frac{r^k q(r)}{\displaystyle\int_0^r t^k q(t)dt} = \frac{\sigma_k}{r} + \frac{\varepsilon_k(r)}{r}$$

d'où l'on obtient, en multipliant par dr et intégrant entre les limites α et x

$$\int_0^x t^k q(t)dt = \int_0^\alpha t^k q(t)dt \cdot x^{\sigma_k} e^{\int_\alpha^x \frac{\varepsilon_k(t)}{t} dt}$$

et de là

$$q(x) = x^{\sigma_k - k - 1} \{\underbrace{\sigma_k + \varepsilon_k(x)}_{\propto \sigma_k}\} \int_0^\alpha t^k q(t)dt\; e^{\int_\alpha^x \frac{\varepsilon_k(t)}{t} dt}. \tag{10}$$

Donc, en posant $\sigma_k - k = \sigma$

$$L(x) = \{\underbrace{\sigma_k + \varepsilon_k(x)}_{\propto \sigma_k}\} \int_0^\alpha t^k q(t)dt\; e^{\int_a^x \frac{\varepsilon_k(t)}{t} dt} \tag{11}$$

on obtient la forme (8), et il suffit de montrer que la fonction (11) satisfait à la condition (9). Or

$$\frac{L(cr)}{L(r)} = \frac{\sigma_k + \varepsilon_k(cr)}{\sigma_k + \varepsilon_k(r)}\, e^{\int_r^{rc} \frac{\varepsilon_k(t)}{t} dt} \sim e^{\eta(r) \int_r^{rc} \frac{dt}{t}} = c^{\eta(r)} \to 1 \text{ lorsque } r \to \infty,$$

puisque $\eta(r)$, qui est une quantité située entre le maximum et le minimum de $\varepsilon_k(t)$ pour $r \leq t \leq cr$ (ou $cr \leq t \leq r$, suivant que $c \gtrless 1$), tend vers zéro lorsque $r \to \infty$.

Pour démontrer l'inverse, c. à. d. que les équations (8) et (9) entrainent l'équation (7), montrons d'abord les faits suivants, à savoir:

1. Quelque soit le nombre $k > 0$, l'expression

$$a(r) = \frac{q(r) r^{k+1}}{\displaystyle\int_0^r t^k q(t)dt}$$

reste bornée lorsque $r \to \infty$.

En posant $q_1(x) = x^k q(x)$, on a

$$a(r) = 1 \Big/ \int_0^1 \frac{q_1(rt)}{q_1(r)}\, dt.$$

Désignons d'autre part par $M_r(t)$ et $M(t)$ les fonctions

$$M_r(t) = \begin{cases} \dfrac{q_1(tr)}{q_1(r)} & \text{lorsque } \dfrac{q_1(rt)}{q_1(r)} \leq M \\[2mm] M & \quad\text{»} \quad \dfrac{q_1(rt)}{q_1(r)} > M \end{cases}$$

et

$$M(t) = \begin{cases} \lim\limits_{r=\infty} \dfrac{q_1(tr)}{q_1(r)} & \text{lorsque } \lim\limits_{r=\infty} \dfrac{q_1(rt)}{q_1(r)} \leq M \\[2mm] M & \quad\text{»} \quad \lim\limits_{r=\infty} \dfrac{q_1(rt)}{q_1(r)} > M \end{cases}$$

M étant un nombre positif quelconque. On aura

$$\lim_{r=\infty} \int_0^1 \frac{q_1(rt)}{q_1(r)}\, dt \geq \lim_{r=\infty} \int_0^1 M_r(t)dt = \int_0^1 M(t)dt > 0,$$

ce qui montre que $a(r)$ reste bornée.

2. Si l'intégrale $\int_0^\infty t^k q(t)dt$ converge, $a(r)$ et par suite $r^{k+1} q(r) \to 0$.

En premier lieu

$$\frac{a(rx)}{a(r)} = x^{k+1} \frac{q(rx)}{q(r)} \frac{\displaystyle\int_0^r t^k q(t)dt}{\displaystyle\int_0^{rx} t^k q(t)dt} \to x^{\sigma+k}.$$

D'autre part, de

$$r^{k+1} q(r) = c\, a(r)\, e^{\int_a^r \frac{a(t)}{t} dt}$$

on déduit que

$$e^{\int_r^{rx} \frac{a(t)}{t} dt} \to 1,$$

et de là, que

$$\int_0^y a(re^\tau)\, d\tau \to 0; \qquad \times \quad e^{y} \quad t = re^{\tau}$$

en soustrayant de cette expression l'égalité

$$\int_0^y a(r) e^{\tau(k+\sigma)}\, d\tau = \frac{a(r)[e^{y(k+\sigma)} - 1]}{k+\sigma},$$

on obtient

$$\int_0^y \left\{a(re^\tau) - a(r)\, e^{\tau(k+\sigma)}\right\} d\tau = \frac{a(r)[e^{y(k+\sigma)}-1]}{k+\sigma} + o(1)$$

c'est-à-dire

$$a(r) \leq \frac{k+\sigma}{e^{y(k+\sigma)}-1} \int_0^y \left| a\,(re^\tau) - a(r)e^{\tau(k+\sigma)} \right| d\tau + o(1)$$

et puisque d'après ce qui précède et 1): $|a(re^\tau) - a(r)e^{\tau(k+\sigma)}|$ est uniformément bornée et $\to$ o, il en résulte que

$$a(r) \to o, \text{ c. à. d. que } r^{k+1}q(r) \to o.$$

3. Les conditions (8) et (9) étant remplies, il existe toujours un nombre fini $k > o$, tel que l'intégrale $\int_0^\infty t^k q(t)dt$ diverge.

Car s'il n'existait pas un tel nombre, il s'ensuivrait, d'après ce qui précède, que $x^{k\cancel{+1}}q(x) \to o$, quelque soit le nombre k. $q(x)$ devrait donc avoir la forme suivante

$$q(x) = x^{-k(x)} \qquad \text{où} \qquad k(x) \to \infty \text{ avec } x.$$

L'expression

$$\frac{q(rx)}{q(r)} = \frac{1}{x^{k(r)}} \cdot \frac{1}{r^{k(rx)-k(r)}}$$

ne peut donc tendre vers une limite finie et différente de zéro, puisqu'en supposant $x < 1$, $x^{k(r)} \to o$, donc $r^{k(rx)-k(r)}$ doit $\to \infty$ et il faut pour cela que $k(rx)-k(r)$ soit constamment positif à partir d'une valeur de r, ce qui est impossible puisque $x < 1$ et $k(r) \to \infty$.

4. En prenant un k tel que $\int_0^\infty t^k q(t)dt$ diverge, $a(rx)-a(r) \to o$ pour tout $x > o$.

$a\,(r)$ étant bornée, il suffit de montrer que $\dfrac{a(rx)}{a(r)} \to 1$ lorsque $r \to \infty$, pour tout $x > o$. Or, on a

$$\frac{a(rx)}{a(r)} = x\, \frac{q_1(rx)}{q_1(r)} \cdot \frac{\int_0^r q_1(t)dt}{\int_0^{rx} q_1(t)dt}\,;$$

d'autre part

$$\frac{q_1(rx)}{q_1(r)} \to x^{\sigma_k - 1}, \qquad \sigma_k = \sigma + k\,,$$

donc:

$$\frac{\int_0^{rx} q_1(t)dt}{\int_0^r q_1(t)dt} \to x^{\sigma_k},$$

puisque $\int_0^r q_1(t)dt$ est monotone et $\to \infty$ (¹); par suite

$$\frac{a(rx)}{a(r)} \to 1.$$

D'autre part on a $\quad q_1 = \dfrac{c\,a(r)}{r\,e^{\int_a^r \frac{a(t)}{t}dt}}$ d'où l'on déduit

que $e^{\int_r^{rx} \frac{a(t)}{t}} \to x^{\sigma_k}$ c. à. d. que $\displaystyle\int_r^{rx} \frac{a(t)}{t}\,dt \to \sigma_k\, lg(x)$,

ou, en posant $\qquad t = re^\tau \quad lg(x) = y$,

il résulte que

$$\int_0^y a(re^\tau)d\tau \to \sigma_k\, y.$$

En soustrayant de cette équation l'égalité

$$a(r)\int_0^y d\tau = a(r)y$$

on obtient

$$\int_0^y \{\, a\,(re^\tau)-a(r)\}d\tau = y[\sigma_k - a(r)] + o\,(1)$$

$$|\,a(r)-\sigma_k\,| < \frac{1}{y}\int_0^y |\,a(re^\tau)-a(r)\,|\,d\tau + o(1).$$

Or, la fonction $|\,a(re^\tau)-a(r)\,| \to o$ pour tout τ, et est uniformément bo-
née par rapport à r; donc

$$\int_0^y |\,a(re^\tau)-a(r)\,|\,d\tau \to o,$$

d'où il résulte que $\qquad a(r) \to \sigma_k. \qquad$ c. q. f. d.

Exprimons sous forme de corollaires quelques conséquences de
théorème. En premier lieu, remarquons que pour la démonstration
la seconde moitié de ce théorème on aurait pu supposer moins de co
ditions. En effet, à la place des conditions (8) et (9), il aurait suffi
supposer que

$$\lim_{r=\infty} \frac{q(rx)}{q(r)} \text{ existe pour tout } x > o, \text{ et tend vers une limite p}$$

(¹) Ce qui résulte de la règle de L'Hôpital, précisée par O. Stolz, Grundzu der Diff.-und Integralrechnung, Bd. I. 1893, p. 72—77.

grande que zéro. De là, d'après ce théorème, il résulte l'existence de (8) et (9); nous avons donc le

Corollaire 1. *Soit $q(r)$ une fonction positive, telle que*

$$\lim_{r=\infty} \frac{q(rx)}{q(r)} = h(x) > 0 \qquad \textit{pour tout } x > 0,$$

On a

$$\lim_{r=\infty} \frac{q(rx)}{q(r)} = x^{\sigma-1} \qquad \textit{pour tout } x > 0.$$

Rappelons que ce corollaire généralise un théorème de M. R. Schmidt, les hypothèses étant moins restrictives (1).

Comme seconde conclusion du théorème 1. nous obtenons le

Corollaire 2. *Toute fonction à croissance lente $L(x)$ peut être mise sous la forme*

$$L(x) = c(x) e^{\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} \tag{12}$$

où $c(x) \to c \neq 0$ et $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$. Et de là il résulte immédiatement

1. que $x^{\varepsilon} L(x) \to \infty$ et $x^{-\varepsilon} L(x) \to 0$, lorsque $x \to \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$.
2. que $\dfrac{L(rx)}{L(x)} \to 1$ uniformément dans tout intervalle ne contenant pas le point $x = 0$.

Il résulte de ce corollaire qu'une fonction est:

à croissance régulière si son indice $\sigma > 1$,

à croissance ou décroissance lente si $\sigma = 1$, et

à décroissance régulière si $\sigma < 1$.

Il en résulte en outre que le quotient $\dfrac{q(r\lambda)}{q(r)} \to x^{\sigma-1}$ uniformément dans tout intervalle fini si $q(x)$ est à indice $\sigma > 1$; de là on peut déduire le lemme suivant.

Lemme 1. Soit $q(x)$ à indice $\sigma > 1$; posons

$$P(x) = \operatorname{Max} \{q(t)\} \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq x,$$
$$p(x) = \operatorname{Min} \{q(t)\} \qquad \text{pour } x \leq t \leq \infty,$$

(1) Dans la note citée, M. R. Schmidt, pour tirer la même conclusion, suppose en effet

1) que $q(r)$ soit monotone,

2) que $\dfrac{q(rx)}{q(x)}$ tend vers une limite pour n'importe quelle suite $x_r \to x > 0$.

Nous verrons plus tard que les fonctions à croissance régulière satisfont en effet, à la condition 2).

$$\text{alors } \frac{P(x)}{q(x)} \to 1 \quad \text{et} \quad \frac{p(x)}{q(x)} \to 1 \text{ lorsque } x \to \infty.$$

De la définition de $P(x)$ il s'ensuit que

$$P(r) = q(x_r r), \text{ avec } 0 \leq x_r \leq 1,$$

et il suffit, d'après la remarque précédente, de montrer que $x_r \to 1$ lorsque $r \to \infty$. Or, si cela n'avait pas lieu, on pourrait extraire une suite x_{r_ν} telle que $x_{r_\nu} \to x < 1$, lorsque $r_\nu \to \infty$. D'autre part $\dfrac{q(xr)}{q(r)}$ convergeant uniformément, on aurait donc

$$\frac{P(r_\nu)}{q(r_\nu)} = \frac{q(r_\nu x_{r_\nu})}{q(r_\nu)} \to x^{\sigma-1} < 1,$$

ce qui est impossible, puisque $P(x) \geq q(x)$, donc $x_r \to 1$. De la même manière on pourrait montrer que $\dfrac{q(x)}{p(x)} \to 1$.

De ce lemme il s'ensuit, en particulier qu'à toute fonction $q(x)$ à indice $\sigma > 1$ on peut faire correspondre une fonction monotone $m(x)$, à indice σ telle que $q(x) \backsim m(x)$.

Le lemme 1. n'est plus valable lorsque $\sigma = 1$, c'est-à-dire pour les fonctions à croissance lente. En effet, ~~on aura dans ce cas pour P(x),~~ ~~ayant supposé que $c(x) = 1$,~~ supposons que $c(x) = 1$

$$P(x) = e^{\int_a^x \frac{|\varepsilon(t)| + \varepsilon(t)}{t} dt}$$

donc

$$\frac{P(x)}{L(x)} = e^{\int_a^x \frac{|\varepsilon(t)| - \varepsilon(t)}{t} dt}$$

et Et nous pouvons toujours choisir $\varepsilon(t)$ de telle sorte que ce quotient ne tende pas vers l'unité. Ainsi par exemple, posons

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour} & 0 \leq t \leq 1 \\ a_n \text{ pour} & (2n-1)! < t \leq (2n)! \\ -\frac{a_n}{2} \text{ pour} & (2n)! < t \leq (2n+1)! \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

où $a_n > 0$, et $a_n \to 0$ de telle sorte que $a_n \lg(n) \to \infty$.

Nous obtenons, moyennant cette fonction $\varepsilon(t)$, une fonction $L(x)$ telle que

$$L(x) \to \infty,$$

~~et que~~

$$\frac{P(x)}{L(x)} \to \infty;$$

et ~~et plus la~~ fonction $\dfrac{L(rx)}{L(r)}$, qui lorsque $r \to \infty$, tend uniformément vers 1 dans tout intervalle ne contenant pas le point $x=0$, n'est pas uniformément bornée dans l'intervalle $(0, 1)$.

De cette seconde remarque, il résulte, ~~en outre~~, que pour cette fonction $L(x)$ il n'existe pas de fonction monotone $m(x)$ telle que

$$L(x) \sim m(x)$$

Car s'il en existait une, on aurait, x_r étant <1,

$$\frac{L(x_r r)}{L(r)} = \frac{m(x_r r)}{m(r)} \cdot \frac{L(x_r r)}{m(x_r r)} \cdot \frac{m(r)}{L(r)} \le \frac{L(x_r r)}{m(x_r r)} \cdot \frac{m(r)}{L(r)};$$

donc, pour tout x_{r_n} tel que $r_n x_{r_n} \to \infty$,

$$\limsup \frac{L(x_{r_n} r_n)}{L(r_n)} \le 1,$$

ce qui est impossible, puisque pour la fonction considérée, en posant

$$r_n = (2n+1)!\,, \quad x_{r_n} = \frac{1}{2n} \mp 1,$$

il résulte que

$$\frac{L(x_{r_n} r_n)}{L(r_n)} \to \infty \text{ avec } n.$$

Donc, dans le cas où $\sigma = 1$, il n'existe pas, en général, une fonction monotone telle que $q(x) \sim m(x)$.

De ce qui précède nous voyons que les suites étoilées de M. R. Schmidt équivalent aux suites à croissance régulière dans le cas où $\sigma > 1$, et en diffèrent lorsque $\sigma \le 1$, la définition (7) étant moins restrictive.

Montrons encore ici, qu'à la place de la condition (7) définissant la régularité, on peut en poser d'autres, semblables, où n'intervient pas le nombre plus ou moins arbitraire k, en faisant toutefois exception du cas où $\sigma = 0$. A ce sujet nous démontrerons les deux lemmes suivants :

Lemme 2. Soit $q(x)$ une fonction à indice σ; si $\int_0^x q(t)\,dt$ diverge lorsque $x \to \infty$, (c. à. d. $\sigma \ge 0$) alors

(13) $$\frac{1}{r\,q(r)} \int_0^r q(t)\,dt \to \frac{1}{\sigma} \text{ lorsque } r \to \infty .$$

Inversement, si (13) est remplie avec $\sigma > 0$, la fonction est à indice de régularité σ.

En effet, $q(x)$ étant régulière, il existe un k tel que

$$\frac{1}{q(r)\, r^{k+1}} \int_0^r t^k q(t)dt \to \frac{1}{\sigma + k} \text{ lorsque } r \to \infty,$$

or

$$\frac{1}{q(r)\,r} \int_0^r q(t)\,dt = \frac{1}{q(r) r^{k+1}} \int_0^r t^k q(t)dt \cdot \frac{r^k \int_0^r q(t)\,dt}{\int_0^r t^k\, q(t)\,dt}$$

D'autre part, d'après la règle de L'Hôpital, précisée par O. Stolz, on a

$$\frac{\frac{1}{r^k}\int_0^r t^k q(t)dt}{\int_0^r q(t)dt} \sim \frac{q(r) - \frac{k}{r^{k+1}}\int_0^r t^k q(t)dt}{q(r)} = 1 - \frac{k}{r^{k+1} q(r)} \int_0^r t^k q(t)dt \to 1 - \frac{k}{\sigma + k} = \frac{\sigma}{\sigma + k}$$

puisque

$$q(t) > 0 \quad , \quad \text{et} \int_0^r q(t)dt \to \infty .$$

Donc

$$\frac{1}{r\,q(r)} \int_0^r q(t)\,dt \to \left(\frac{1}{\sigma + k}\right) . \frac{(\sigma + k)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}.$$

L'inverse est évident, car si (13) est remplie avec $\sigma > 0$, il en est de même de (7), ayant dans ce cas $k = 0$. Mais si dans (13) $\sigma = 0$, $q(t)$ n'est pas nécessairement à croissance régulière, comme le montre l'exemple $q(x) = \frac{2 + \sin x}{x}$.

Lemme 3. Soit $q(x)$ une fonction à indice de régularité σ; si $\int_0^x q(t)dt$ converge lorsque $x \to \infty$ (c. à. d. si $\sigma \le 0$) alors

(14) $$\frac{1}{r\,q(r)} \int_r^\infty q(t)\,dt \to -\frac{1}{\sigma} \text{ lorsque } r \to \infty .$$

Inversement, si (14) est remplie avec $\sigma < 0$, la fonction $q(x)$ est à indice de régularité σ.

Pour le montrer, il suffit, comme précédemment, de mettre l'expression (14) sous la forme

$$\frac{1}{r\,q(r)} \int_r^\infty q(t)dt = \frac{1}{q(r) r^{k+1}} \int_0^r t^k\, q(t)dt \, \frac{\int_r^\infty q(t)\,dt}{\frac{1}{r^k}\int_0^r t^k\, q(t)\,dt}$$

et de remarquer que

$$\int_r^\infty q(t)\,dt \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r^k}\int_0^r t^k q(t)dt \to 0 \text{ puisque } q(t) \to 0;$$

d'où, en appliquant au second quotient la règle de L'Hôpital, précisée par O. STOLZ, on voit que (14) est remplie.

Pour montrer l'inverse, posons

$$\frac{1}{r\,q(r)}\int_r^\infty q(t)\,dt = -\frac{1}{\sigma}+\varepsilon(r)\,,\quad \text{avec } \varepsilon(r)\to 0\,,$$

d'où l'on tire

$$q(r) = -C\cdot\{\sigma+\varepsilon(r)\}\,r^{\sigma-1}e^{\int_a^r \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}$$

c. à. d. la fonction $q(r)$ est bien à indice de régularité σ.

Le cas où $\sigma=0$ fait encore défaut, comme nous le montre l'exemple $q(x)=\dfrac{2+\sin x}{x\,lg^2 x}$.

Nous voyons de ces deux lemmes, qu'une fonction est à croissance régulière si l'une des deux conditions (13) ou (14) est remplie avec $0<|\sigma|<\infty$. Si, par contre $\sigma=0$, elles ne nous fournissent pas de répose, (on peut conclure seulement que la fonction $\int_0^x q(t)\,dt$ est à croissance lente). Il faut, dans ce cas, au lieu de la fonction $q(x)$, étudier la fonction $xq(x)$ et voir si elle remplit la condition (13).

Dans ce qui précède, nous avons donné les principales propriétés caractérisant les fonctions à croissance régulière, définies par la condition (7). Étudions encore les opérations exécutées sur de telles fonctions.

Nous avons à ce sujet les faits suivants:

1. Si $q_1(x)$ et $q_2(x)$ sont deux fonctions à indices respctifs σ_1 et σ_2 la fonction $q_1(x).q_2(x)$ est á indice $\sigma_1+\sigma_2-1$.

2. Si $q(x)$ est une fonction à indice σ, la fonction $\{q(x)\}^k$ est à indice $k\sigma-k+1$.

Ces faits résultent immédiatement de l'équation (8).

3. Si $q(x)$ est une fonction monotone à indice $\sigma>1$, la fonction inverse est à indice $\dfrac{\sigma}{\sigma-1}$.

En effet, considérons l'expression

$$A(r)=\frac{1}{rp(r)}\int_0^r p(t)dt$$

$p(t)$ étant la fonction inverse, et posons $p(t)=y$, $p(r)=x$; on aura

$$A(r)=\frac{1}{x\,q(x)}\int_{p(0)}^x y\,d\{q(y)\},$$

ou en intégrant par parties

$$A(r)=1-\frac{1}{x\,q(x)}\int_{p(0)}^x q(y)dy\to 1-\frac{1}{\sigma}=\frac{\sigma-1}{\sigma}$$

$$\frac{1}{rp(r)}\int_0^r p(t)dt\to\frac{\sigma-1}{\sigma}$$

ce qui montre bien que l'indice de $p(x)$ est égal à $\cancel{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$. $\frac{\sigma}{\sigma-1}$

4. Si $q_1(x)$ et $q_2(x)$ sont deux fonctions à indices recpectifs σ_1 et σ_1 et $q_2(x)\to\infty$ avec x, (c. à. d. $\sigma_2\geq 1$) la fonction $q_1\{q_2(x)\}$ est à indice $(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)+1$.

Ce qui résulte immédiatement de (7) et du corollaire 2.

5. Soit $q_1(x)\sim q_2(x)$; si l'une de ces deux fonctions est à indice σ l'autre l'est aussi.

6. Si $q(x)$ est à indice σ, l'une des deux fonctions $\int_0^x q(t)\,dt, \int_x^\infty q(t)\,dt$ est à indice $\sigma+1$, suivant que l'intégrale $\int_0^\infty q(t)dt$ diverge ou converge.

Pour $\sigma\neq 0$, ceci résulte des lemmes 2. et 3. et de 5). Si $\sigma=0$, c. à. d. si l'on a $q(x)=\dfrac{L(x)}{x}$ alors

$$Q(r)=\frac{1}{rq(r)}\int_0^r q(t)\,dt=\frac{1}{L(r)}\int_0^r\frac{L(t)}{t}dt\to\infty$$

resp.

$$Q(r)=\frac{1}{rq(r)}\int_r^\infty q(t)\,dt=\frac{1}{L(r)}\int_r^\infty\frac{L(t)}{t}dt\to\infty$$

et

$$Q(rx)-Q(r)=\frac{1}{L(r)}\int_r^{rx}\frac{L(t)}{t}dt\to lg(x)$$

resp. avec le signe moins.

Donc

$$\frac{Q(rx)}{Q(r)}=\frac{\int_0^{xr}q(t)\,dt}{\int_0^r q(t)\,dt}\to 1$$

$$\left\{\text{resp}: \frac{\int_{xr}^\infty q(t)dt}{\int_r^\infty q(t)dt}\to 1\right\}\ \text{pour } x>0\,.$$

Donc $\int_{}^{x} q(t)dt$ { resp. $\int_{x}^{\infty} q(t)dt$ } est à croissance lente.

7) Il n'en est pas de même pour la dérivée, mais à ce sujet on peut dire ceci :

Si $q(x)$ est une fonction telle que sa dérivée, est à croissance régulière, on peut la mettre sous la forme

$$q(x) = x^{\sigma-1}\,\mathrm{L}(x)$$

(15) où $\qquad \mathrm{L}(x) = e^{\int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt} \qquad \varepsilon(t) \to 0.$

En effet, si $q'(x)$ est à indice $\sigma-1$, on aura

$$\frac{xq'(x)}{q(x)} = a(x) = \sigma-1+\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \to 0,$$

d'où, en divisant par x et intégrant on obtient l'équation (15).

Mais inversement, de (15) il ne résulte pas la régularité de $q'(x)$ que si $\sigma \neq 1$. Dans le cas où $\sigma=1$ il faut en outre que $\varepsilon(x)$ soit à décroissance régulière et si elle est à indice σ_1, $q'(x)$ sera à indice $\sigma+\sigma_1$-1.

On pourrait donner encore un grand nombre de propriétés de ces fonctions, que nous réserverons pour un autre travail.

Nous allons donner encore deux applications des résultats précédents

En premier lieu, du théorème 1. et du corollaire 2. il résulte le

Théorème 2. *Pour qu'une suite de fonctions $v_n(x)$ de la forme*

$$v_n(x) = \frac{q(nx)}{q(n)} \qquad q(n) > 0,$$

converge dans $(0, 1)$, il faut et suffit que l'un quelconque des moments de $v_n(x)$ soit :

$$\mathrm{M}_n^{(k)} = \int_0^1 t^k v_n(t)dt \to m_k, \qquad \text{avec } m_k > 0;$$

et dans ce cas

$$v_n(x) \to x^{\frac{1}{m_k}-k-1},$$

uniformément dans tout intervalle ne contenant pas le point $x=0$.

Comme seconde application considérons le quotient de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, définies dans $(0,\infty)$, $g(x) \to \infty$ avec x.

D'après la règle de L'Hôpital, précisée par O. Stolz, si $g(x)$ est

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c,$$

on aura

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c.$$

Examinons les conditions auxquelles doit satisfaire une fonction monotone $a(x)$ pour qu'on puisse appliquer à *l'un des facteurs* de

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a(x)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)}{a(x)}$$

la règle citée plus haut, de telle sorte que de l'existence de la limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{a(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{a'(x)}$$

résulte l'existence de la limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Posons pour cela :

$$\frac{a(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{a'(x)} = u(x), \qquad \text{avec } u(x) \to c;$$

alors :

$$f(x) = \int_a^x u(t)\,g(t)\frac{a'(t)}{a(t)}\,dt = \int_a^x u(t)\,g(t)\frac{da(t)}{a(t)}$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)}\int_a^x u(t)\,g(t)\frac{da(t)}{a(t)}.$$

Par suite si $a(t)$ est telle que

(16) $$\frac{1}{g(x)}\int_a^x \frac{g(t)da(t)}{a(t)} \to k$$

il s'ensuit que ($a(x)$ étant monotone, $g(x) \to \infty$, $u(x) \to c$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)}\int_a^x u(t)\,g(t)\frac{da(t)}{a(t)} \to ck.$$

Il faut donc que (16) soit remplie.

Or, en désignant par $b(x)$ l'inverse de $a(x)$, et en posan

$$a(t)=\tau, \quad a(x)=r, \quad \text{et} \quad \frac{gb(\tau)}{\tau} = q(\tau),$$

(16) se transforme en

$$\frac{1}{r\,g(r)}\int_{a(a)}^{r} g(\tau)d\tau \to k\,,$$

ce qui montre que $a(x)$ doit être telle que la fonction $g\{b(x)\}$ soit régulière à indice égal à $1+\frac{1}{k}$.

Nous obtenons donc le résultat suivant:

Théorème 3. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies dans $(0, \infty)$, où $g(x) \to \infty$ avec x, et soit $b(x)$ la fonction inverse d'une fonction monotone $a(x)$ qui $\to \infty$ avec x. Si la fonction $g\{b(x)\}$ est à croissance régulière à indice $1+\frac{1}{k}$, de l'existence de la limite*

$$\lim_{x=\infty} \frac{a(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{a'(x)} = c\,,$$

on peut conclure l'existence de la limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = d\,,$$

avec

$$d = k\,c\,.$$