STATISTIČKI METOD ODREDJIVANJA DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA LINEARNIH SISTEMA, REŠAVANJEM INTEGRALNIH JEDNAČINA NA REPETITIVNOM DIFERENCIJALNOM ANALIZATORU

- doktorska disertacija -

Nedeljko S. Parezanović

BEOGRAD

Januara 1962

S A D R Ž A J

str.

Uvod 4

Glava I. Matematička osnova metode 6

1. Fredholm-ova integralna jednačina 6
   a) Druge vrste 6
   b) Prve vrste 9

2. Volterr-ina integralna jednačina 10
   a) Druge vrste 10
   b) Prve vrste 13

3. Povećanje tačnosti kod rešavanja Volterr-ine jednačine 13

Glava II. Rešavanje integralnih jednačina na repetetivnom diferencijalnom analizatoru 16

4. Realizacija jezgra 16
   a) Rešavanjem diferencijalnih jednačina 16
   b) Generiranjem funkcija na generatorima jedne nezavisno promenljive 18

5. Rešavanje integralnih jednačina Fredholm-ovog tipa 23
   a) Prve vrste 23
   b) Druge vrste 25
   Primer 27

6. Rešavanje integralnih jednačina Volterr-inog tipa 29
   a) Prve vrste 29
   b) Druge vrste 31
   Primer 32

7. Povećanje tačnosti rešavanja Volterr-ine integralne jednačine 33
   a) Druge vrste 33
   b) Prve vrste 35
   Primer 36

Glava III. Mogućnost rešavanja drugih problema sa istom analognom tehnikom 38

8. Mogućnost rešavanja nekih matematičkih problema sa istom analognom tehnikom 38
   a) Integralna transformacija 38
   b) Nelinearne integralne transformacije 40
   c) Konvolucioni integral 40
   d) Razvijanje funkcija u ortogonalne redove 40
   Primer 41

9. Mogućnost rešavanja nekih tehničkih problema sa istom analognom tehnikom 43
a) Impulsni odziv sistema 43
b) Odziv sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju 44

Glava IV. Automatsko rešavanje integralnih jednačina 45

Glava V. Analiza greške i ispitivanje osetljivosti rešenja na greške, u realizaciji funkcija na repetetivnom diferencijalnom analizatoru 47
a) Greška u nehomogenom članu 47
b) Greška u jezgru 48
c) Greška u postavljanju parametara 51
d) Greška u granicama integrala 51

Glava VI. Analiza dinamičkih karakteristika linearnih sistema, rešavanjem integralne jednačine prve vrste Fredholm-ovog tipa 53
a) Uvod 53
b) Odziv sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju 53
c) Određivanje dinamičkih karakteristika linearnih sistema, poznavanjem impulsnog odziva 55
d) Korelaciona i kros - korelaciona funkcija ulaza i izlaza 56
e) Statistički metod određivanja impulsnog odziva sistema 59
f) Određivanje impulsnog odziva sistema, rešavanjem integralne jednačine prve vrste Fredholm-ovog tipa na repetativnom diferencijalnom analizatoru 61
Primer 63

Zaključak 68

Reference 69

Literatura 71

Objašnjenje oznaka na šemama 72

U V O D

Bitan napredak u računskoj tehnici je učinjen pojavom elektronskih uredjaja za rešavanje matematičkih problema. Elektronski uredjaji su uneli pre svega veliku brzinu u rešavanju, a odlikuju se i lakoćom konstrukcije, što nije slučaj sa mehaničkim uredjajima.

Analogna elektronska računska tehnika je našla veliku primenu u rešavanju diferencijalnih jednačina, a posebno u problemima simuliranja i ispitivanja stabilnosti fizičkih sistema. Kako promena modela simuliranog sistema ne predstavlja nikakvu teškoću, na mašini, to se može vrlo lako vršiti analiza i sinteza sistema, i pratiti promene karakteristika sistema sa promenom pojedinih parametara u sistemu. Frekventna karakteristika simuliranog sistema može se dobiti poznavajući odziv sistema na ulaznu impulsnu funkciju /1/.

Pored ovih primena analogne računske tehnike razvijaju se postupci za rešavanje drugih matematičkih problema. Tako se nalaženje realnih i kompleksnih nula polinoma može vršiti na repetitivnom diferencijalnom analizatoru na jednostavan način /2/. Primena repetitivnog diferencijalnog analizatora za rešavanje integralnih jednačina /3,4/, čini da ova mašina sve više dobija karakter univerzalnog elektronskog računara.

Medju prvim uredjajima za rešavanje integralnih jednačina nalazi se fotoelektrični integraf, konstruisan od strane T.S. Gray /5/, 1931 godine. Uredjaj je bio snabdeven fotoelektričnim ćelijama, a vrednost integrala se pojavljivala kao intenzitet svetlosti, koja je propuštana kroz prethodno napravljenu masku funkcije.

./.

Posle ovog integrafa pojavljuje se 1948 godine mehanički integraf./6/ čiji je osnovni nedostatak u vrlo složenoj manipulaciji oko rešavanja integralnih jednačina.

Prvi uredjaj koji koristi i elektroniku za rešavanje integralnih jednačina jeste Wolman-ov/7/ uredjaj, koji jezgro integralne jednačine prethodno snima na fotografskim pločama.

Svi ovi postupci kao i drugi do sada poznati /8,9/ koriste specijalne uredjaje za rešavanje integralnih jednačina. Tako Fisheršov metod zahteva izgradnju specijalnih analognih memorija koje naizmenično izmenjuju svoje sadržaje.

Ovde iznet metod rešavanja integralnih jednačina ne zahteva izgradnju specijalnih uredjaja, već samo standardnih elemente elektronske analogne tehnike. Jezgro integralne jednačine se takodje dobija na mašini bez uvodjenja posebnih uredjaja za realizaciju jezgra. Manipulacija oko rešavanja je jednostavna. Brzina rešavanja zavisi od brzine konvergencije Gauss - Seidel-ovog postupka za sistem linearnih algebarskih jednačina, koji se dobija od rešavane integralne jednačine. U ovom radu je pokazano kako se može poboljšati tačnost i znatno ubrzati postupak rešavanja integralnih jednačina Volterrinog tipa.

Na kraju je izložen statistički metod odredjivanja dinamičkih karakteristika linearnih sistema, rešavanjem integralne jednačine prve vrste Fredholm-ovog tipa, na repetitivnom diferencijalnom analizatoru.

GLAVA I

MATEMATIČKA OSNOVA METODE

Izbor matematičke metode rešavanja integralnih jednačina, predstavlja najvažniji korak u problemu rešavanja integralnih jednačina na analognim računskim mašinama. Od matematičke metode zavisiće i složenost tehničke realizacije. Od svih postupaka za rešavanje integralnih jednačina Fredholm-ov postupak za prevodjenje integralne jednačine u sistem linearnih algebarskih jednačina je najlakše primeniti na analognim računskim mašinama. Ovaj postupak pored toga što se može primeniti na šire polje integralnih jednačina, u osnovi svodi problem na rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Tako, da se kao sledeći problem postavlja pitanje izbora metode rešavanja linearnih algebarskih jednačina. Kako su za mašinsko rešavanje poželjne metode koje se izvode na jednoobrazan način, to je najbolje izabrati metod proste iteracije ili Gauss - Seidel-ov metod. U ovom radu biće korišćen Gauss - Seidel-ov metod, kako zbog brže konvergencije postupka, tako i zbog prednosti u tehničkim realizacijama u odnosu na postupak proste iteracije.

1. FREDHOLM-OVA INTEGRALNA JEDNAČINA

a/ Fredholm-ova jednačina druge vrste

Ova jednačina može se napisati u obliku:

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt \qquad (1)$$

gde su $F(x)$ i $K(x,t)$ poznate funkcije, λ, a i b poznate konstante, a $y(x)$ nepoznata funkcija.

Za funkcije $F(x)$, $K(x,t)$ i $y(x)$ se predpostavlja, u buduće, da su kontinualne i da su integrali:

$$\int_a^b |F(x)|^2 dx$$

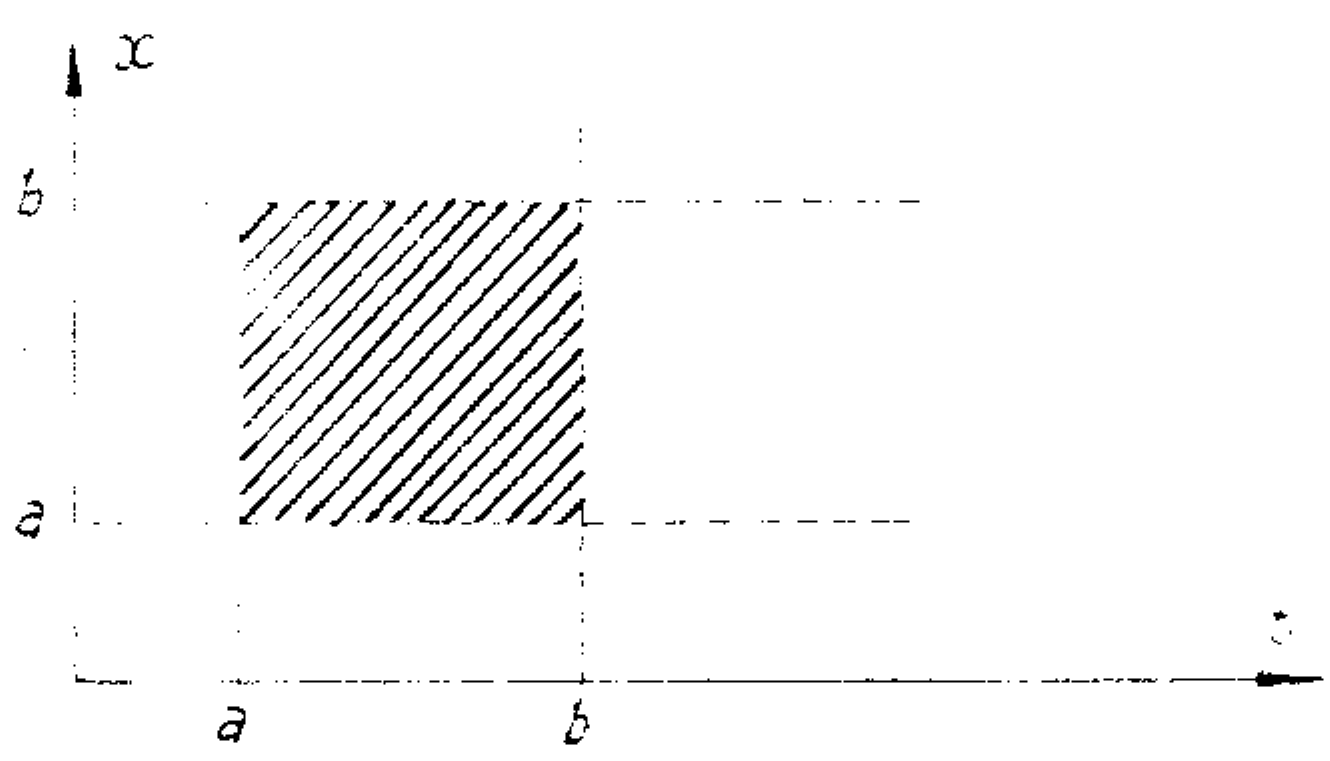
i

$$\int_a^b |y(x)|^2 dx$$

konačni. Za jezgro integralne jednačine se predpostavlja da postoji takav broj A da je:

$$\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \leq A$$

unutar osnovnog kvadrata, pokazanog na sl. 1.



Sl. 1

Podelom intervala $[a,b]$ na n jednakih delova $[t_{i-1},t_i]$, gde je $i=1,2,\ldots,n$, a $t_0=a$ i $t_n=b$, jednačina /1/ dobija oblik:

$$y(x)=F(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x,t)\,y(t)\,dt$$

aproksimacijom funkcije $y(t)$ u intervalu $[t_{i-1},t_i]$ sa $y(T_i)$, gde $T_i \in [t_{i-1},t_i]$, tako da je:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)y(t)dt = y(T_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)dt \qquad /3/$$

dobija se iz /2/

$$y(x) = F(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} y(T_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x,t)dt \qquad /4/$$

Uzimanjem diskretnog niza vrednosti za x

$$x_k = \frac{t_{k-1}+t_k}{2} \quad ; \quad k = 1,2,\dots,n$$

dobija se sistem od n linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih:

$$y(x_k) = F(x_k) + \lambda \sum_{i=1}^{n} y(T_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)dt \qquad /5/$$

gde je $y(x_k) = y(T_k)$. Odredjeni integrali

$$\lambda \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)dt$$

predstavljaju koeficijente uz nepoznate $y(T_i)$.

Kako je problem rešavanja integralne jednačine /1/ sveden na rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina /5/ , to će brzina rešavanja integralne jednačine zavisiti od brzine konvergencije Gauss - Seidel-ovog postupka primenjenog na rešavanje sistema /5/ . Za brzu konvergenciju Gauss - Seidel-ovog postupka potrebno je da dijagonalni koeficijenti, u matrici sistema /5/ , budu izrazito veći od ostalih koeficijenata sistema. Može se pokazati da je ovaj uslov ispunjen za sisteme, koji se dobijaju od integralnih jednačina oblika /1/ . Dijagonalni koeficijenti sistema /5/ se dobijaju za i = k, njihov oblik je:

$$1 - \lambda\int_{t_{k-1}}^{t_k} K(x_k,t)dt \qquad /6/$$

./.

Ostali koeficijenti sistema su:

$$\lambda \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)\,dt \tag{7}$$

gde je $i \neq k$. Kako se interval $[t_{i-1}, t_i]$ može izabrati dovoljno mali, da sa obzirom na karakter funkcije $K(x,t)$ bude:

$$\lambda \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)\,dt \ll 1 \tag{8}$$

uključujući i i = k. Uporedjujući dijagonalne koeficijente (6), sa ostalim koeficijentima sistema (7), i imajući u vidu relaciju (8), zaključujemo da su dijagonalni koeficijenti sistema veći od ostalih koeficijenata sistema.

b/ Fredholm-ova jednačina prve vrste

Ova se jednačina može napisati u obliku:

$$F(x) = \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt \tag{9}$$

gde su a i b poznate konstante, $F(x)$ i $K(x,t)$, poznate funkcije, a $y(t)$ nepoznata funkcija.

Na sličan način kao i za slučaj Fredholm-ove jednačine druge vrste može se doći do sistema linearnih algebarskih jednačina:

$$F(x_k) = \sum_{i=1}^{n} y(T_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)\,dt \tag{10}$$

gde su $y(T_i)$ nepoznate, a odredjeni integrali:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)\,dt$$

koeficijenti uz nepoznate. Vrednosti funkcije $F(x_k)$, $k = 1,2,\dots,n$ odredjuju kolonu nezavisnih članova sistema (10).

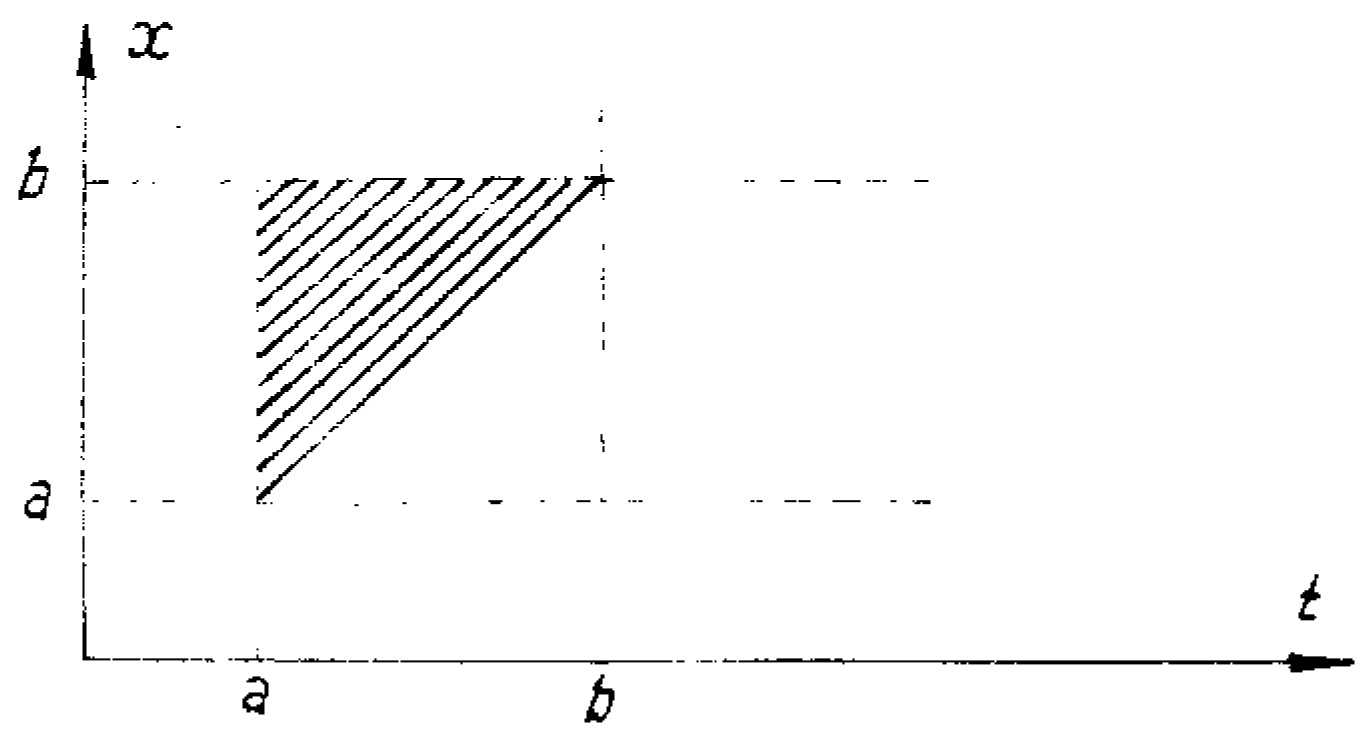
2. VOLTERR-INA INTEGRALNA JEDNAČINA

a. Volterr-ina jednačina druge vrste

Ova jednačina se može napisati u obliku:

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt \qquad /11/$$

gde su λ i a poznate konstante, $F(x)$ i $K(x,t)$ poznate funkcije a $y(x)$ nepoznata funkcija. Kod ove jednačine, jezgro $K(x,t)$ postaje nula za $t>x$, tako da jezgro postoji samo u šrafiranoj površini osnovnog kvadrata sl.2.



Sl. 2

Za jezgro ćemo pretpostaviti da postoji takav broj M da je:

$$|K(x,t)| \leq M = const. \qquad /12/$$

Neka se traži rešenje jednačine /11/ u intervalu $a \leq x \leq b$. Podelom intervala $[a,b]$ na n jednakih delova $[t_{i-1}, t_i]$, gde je $i = 1,2,\ldots,n$, a $t_0 = a$; $t_n = b$, za diskretan niz vrednosti x:

$$x_k = \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \quad ; \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

./.

iz jednačina (11) dobija se:

$$y(x)=F(x)+\lambda\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(x_k,t)y(t)dt \qquad (13)$$

Aproksimacijom funkcije $y(t)$ u intervalu $[t_{i-1},t_i]$ sa $y(T_i)$, gde $T_i\in[t_{i-1},t_i]$, tako da je:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(x_k,t)y(t)dt = y(T_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(x_k,t)dt$$

dobija se iz (13) :

$$y(x_k)=F(x_k)+\lambda\sum_{i=1}^{k}y(T_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(x_k,t)dt \qquad (14)$$

gde treba uzeti da je $y(x_k)=y(T_k)$. Odredjeni integrali

$$\lambda\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(x_k,t)dt$$

pretstavljaju koeficijente uz nepoznate $y(T_i)$ za $i\neq k$, dok je koeficijenat uz nepoznatu $y(T_k)$:

$$\lambda\int_{t_{k1}}^{t_k}K(x_k,t)dt-1$$

Sistem jednačina (14) napisan u razvijenom obliku ima izgled:

$$\left.\begin{aligned}
y(T_1)&=F(x_1)+y(T_1)\lambda\int_{t_0}^{t_1}K(x_1,t)dt\\
y(T_2)&=F(x_2)+y(T_1)\lambda\int_{t_0}^{t_1}K(x_2,t)dt+y(T_2)\lambda\int_{t_1}^{t_2}K(x_2,t)dt\\
&-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\\
y(T_k)&=F(x_k)+y(T_1)\lambda\int_{t_0}^{t_1}K(x_k,t)dt+\dots+y(T_k)\lambda\int_{t_{k-1}}^{t_k}K(x_k,t)dt
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

vidi se da je prva nepoznata $y(T_1)$ odredjena iz prve jednačine, druga iz druge itd., tako da proces rešavanja nije iterativan.

Kako se na mašini, u nekim slučajevima, mora pretpostaviti vrednost za nepoznatu $y(T_K)$ na desnoj strani sistema (15) pa metodom sukcesivne aproksimacije odrediti tačne vrednost $y(T_K)$. Da bi ovaj postupak bio konvergentan potrebno je da

$$\left| \lambda \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_K,t)\,dt \right| < 1 \tag{16}$$

Ovaj uslov je lako ispuniti sa obzirom na karakter funkcije $K(x_K,t)$ i to da se interval $[t_{i-1}, t_i]$ može učiniti dovoljno malim.

Da je uslov (16) potreban može se dokazati na sledeći način. Neka je

$$A = F(x_K) + \lambda \sum_{i=1}^{K-1} y(T_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_K,t)\,dt \tag{17}$$

onda je

$$y(T_K) = A + y(T_K)\,\lambda \int_{t_{K-1}}^{t_K} K(x_K,t)\,dt \tag{18}$$

Obeležimo:

$$\lambda \int_{t_{K-1}}^{t_K} K(x_K,t)\,dt = B \tag{19}$$

onda je:

$$y(T_K) = A + B\,y(T_K) \tag{20}$$

Pretpostavimo da je $y_0(T_K) = 0$ iz (20) dobijamo:

$$y_1(T_K) = A$$

Ako postupak nastavimo, biće:

$$y_2(T_K) = A(1+B)$$

$$y_3(T_K) = A(1+B+B^2)$$

$$- - - - - - - - -$$

$$y_n(T_K) = A(1+B+B^2$$

kako je red

$$1+B+B^2+---+B^{n-1}$$

konvergentan za $|B|<1$ to znači da se predložen postupak može primeniti za integralne jednačine kod kojih je:

$$\left|\lambda\int_{t_{k-1}}^{t_k} K(x_k,t)dt\right| < 1$$

za $k=1,2,---,n$.

2. Volterr-ina jednačina prve vrste

Na sličan način Volterr-ina jednačina prve vrste:

$$F(x)=\int_a^x K(x,t)y(t)dt \tag{21}$$

gde su $F(x)$ i $K(x,t)$ poznate funkcije, a $y(t)$ nepoznata funkcija, može dovesti do sistema jednačina:

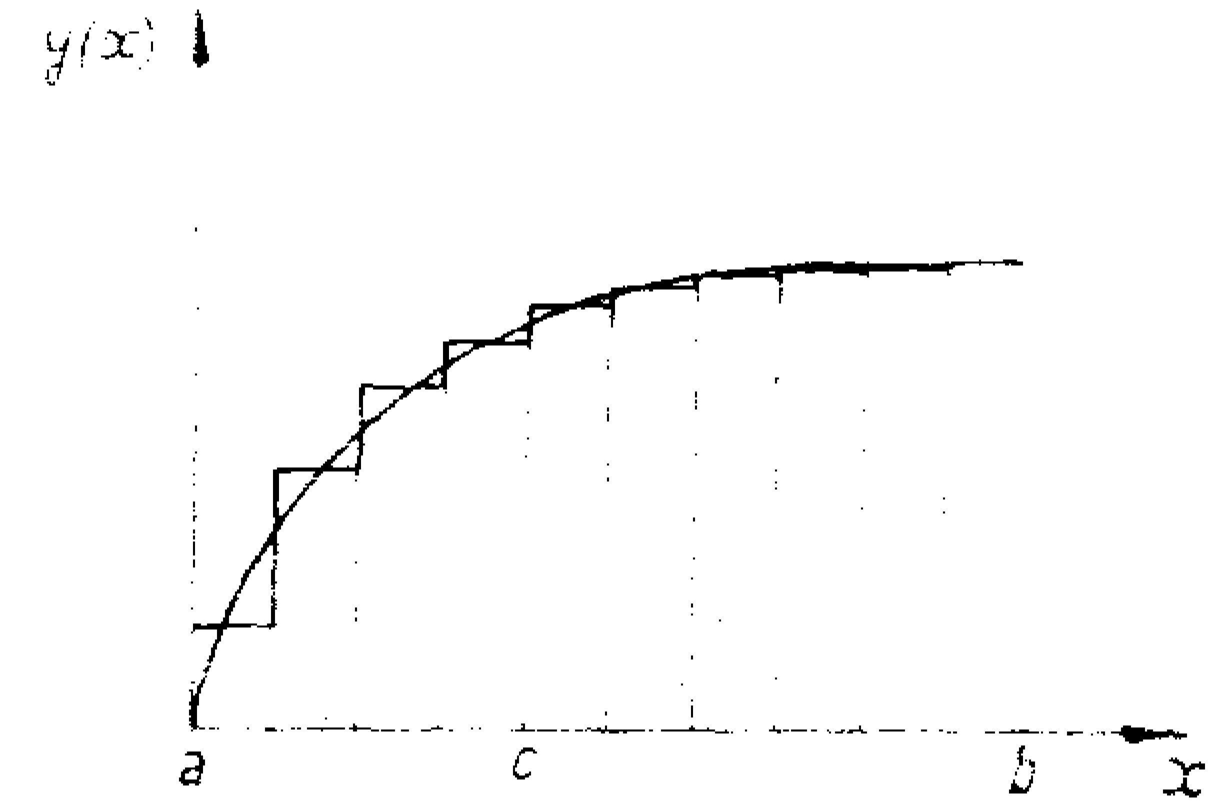
$$F(x_k)=\sum_{i=1}^{k} y(T_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)dt \tag{22}$$

I ovde proces rešavanja nije iterativan, jer je $y(T_1)$ odredjeno iz prve jednačine, $y(T_2)$ iz druge itd.

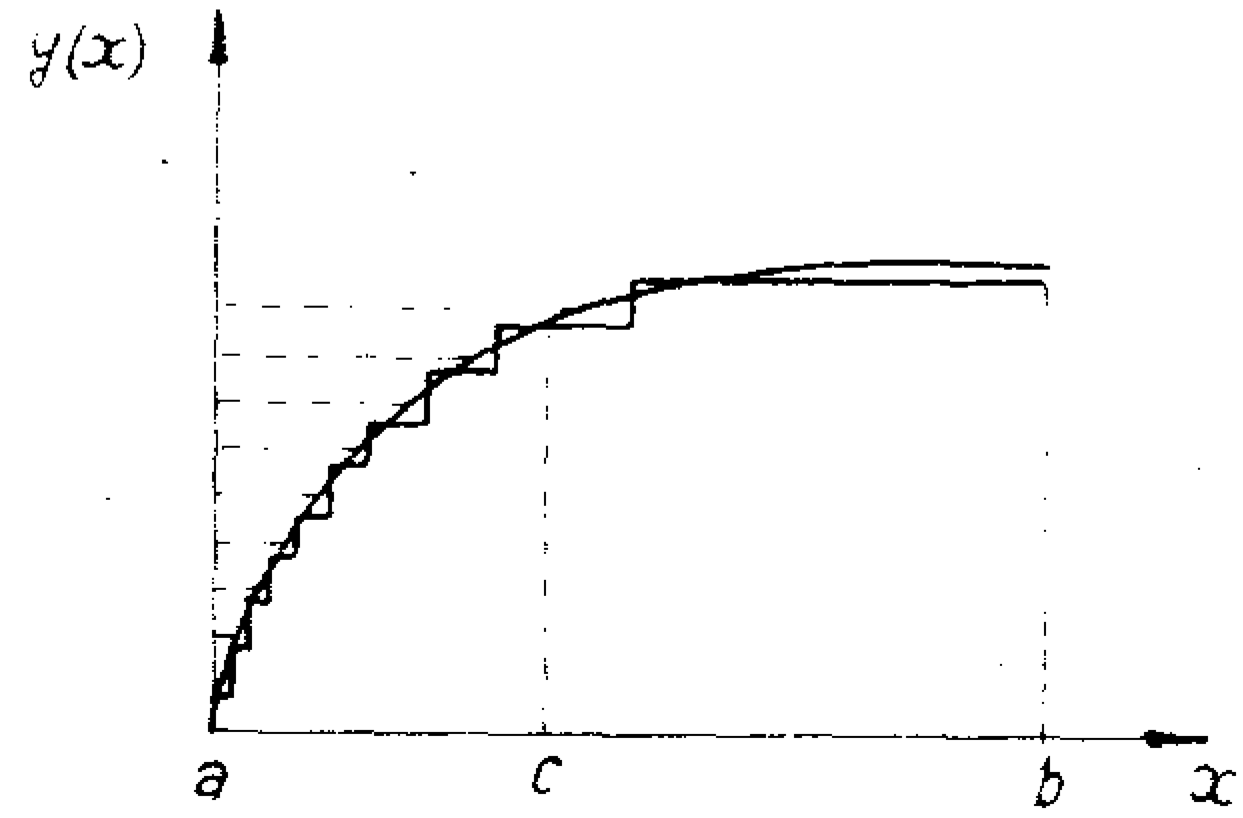
3. POVEĆANJE TAČNOSTI KOD REŠAVANJA VOLTERR-INE JEDNAČINE

Rešenje Volterr-ine jednačine se dobija na mašini u vidu stepenaste aproksimacije. Pri ovome se uzima da je širina svakog stepenika ista. Medjutim, kako funkcija $y(x)$ može biti u intervalu $[a,c]$ sa velikim usponom (sl. 3), a u intervalu $[c,b]$ sa malim usponom, to je očigledno nepotrebno funkciju $y(x)$ aproksimirati sa istom gustinom stepenika u intervalu $[a,c]$ kao u intervalu $[c,b]$.

./.



Sl.3



Sl.4

Kako je na mašinama broj stepenika ograničen konstrukcijom generatora funkcija, to je interesantno kako se sa brojem stepenika, sa kojim se raspolaže može izvršiti najbolja aproksimacija funkcije $y(x)$.

Aproksimacija se može učiniti daleko boljom ako se postavi uslov da je

$$y(T_i) - y(T_{i-1}) = \delta \qquad (23)$$

za $i = 1, 2, ---, n$ gde je δ konstantan dovoljno mali priraštaj funkcije.

Iz uslova (23) sledi da je:

$$y(T_i) = y(T_0) + i\delta \qquad (24)$$

Smenom (24) u (14) i uzimajući da je:

$$y(x_K) = y(T_K)$$

za Volterr-inu jednačinu druge vrste dobija se:

$$y(T_K) = F(x_K) + y(T_0)\lambda \sum_{i=1}^{K} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_K,t)\,dt + \lambda \sum_{i=1}^{K} i\delta \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_K,t)\,dt \qquad (25)$$

Kako je $y(T_K) = y(T_0) + K\delta$ to je:

$$y(T_0)+\kappa\delta = F(x_\kappa)+y(T_0)\lambda\int_a^{t_\kappa} K(x_\kappa,t)\,dt + \lambda\sum_{i=1}^{\kappa} i\delta\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_\kappa,t)\,dt \tag{26}$$

odnosno

$$y(T_0)\left[1-\lambda\int_a^{t_\kappa} K(x_\kappa,t)\,dt\right]+\kappa\delta-\lambda\sum_{i=1}^{\kappa} i\delta\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_\kappa,t)\,dt - F(x_\kappa)=0 \tag{27}$$

u relaciji (27) treba prethodno odrediti $y(T_0)$. Zatim treba odrediti t_κ, $\kappa=1,2,\dots,n$ tako da uslov (24) bude ispunjen.

Na sličan način se za Volterr-inu jednačinu prve vrste dobija sistem:

$$F(x_\kappa)-y(T_0)\lambda\int_a^{t_\kappa} K(x_\kappa,t)\,dt-\lambda\sum_{i=1}^{\kappa} i\delta\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_\kappa,t)\,dt=0$$

u kome treba odrediti t_κ, $\kappa=1,2,\dots,n$, tako da uslov (24) bude ispunjen.

GLAVA II

REŠAVANJE INTEGRALNIH JEDNAČINA NA REPETITIVNOM DIFERENCIJALNOM ANALIZATORU

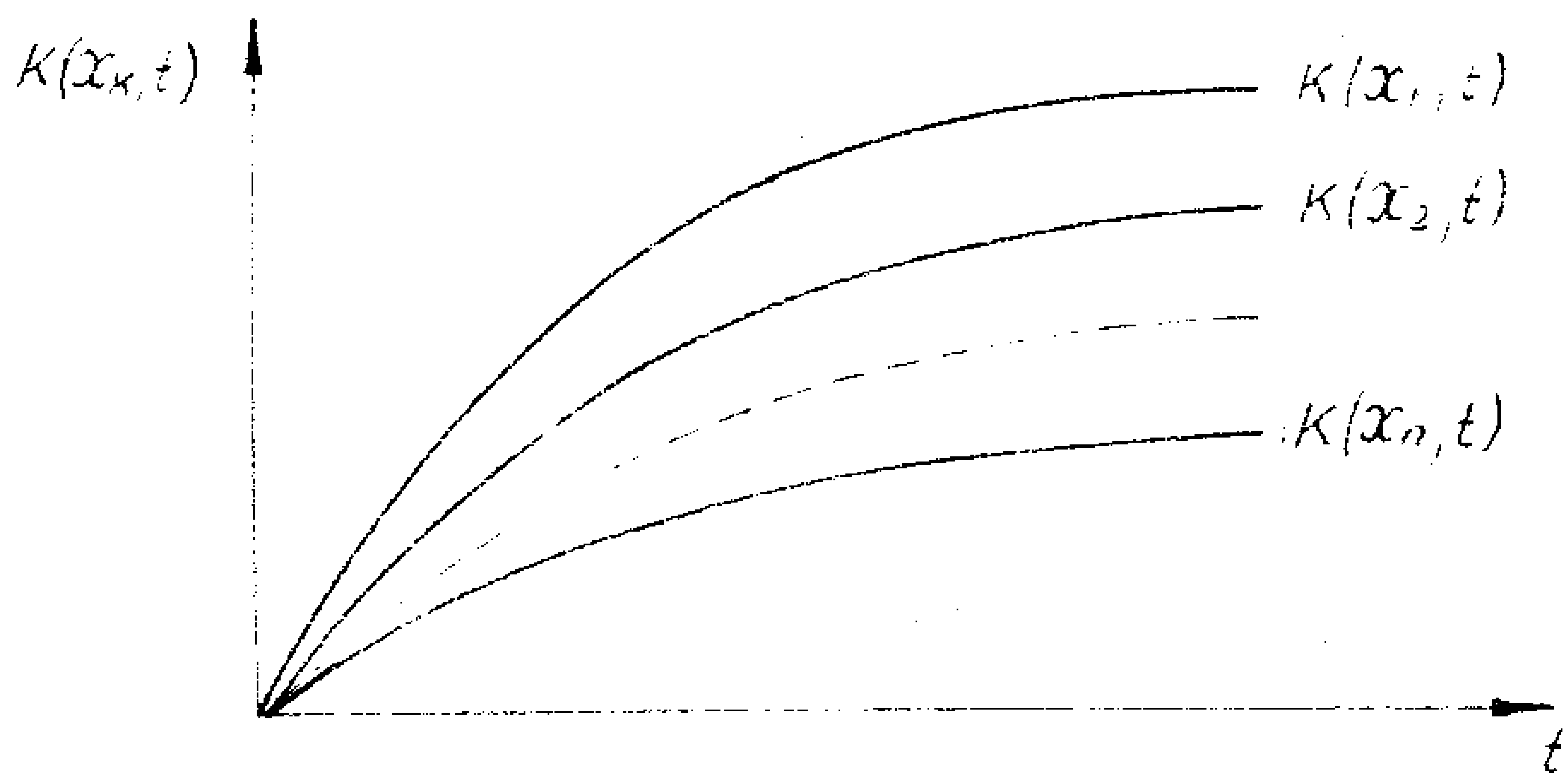
4. REALIZACIJA JEZGRA INTEGRALNE JEDNAČINE

Prvi problem na koju se naidje pri mašinskom rešavanju integralnih jednačina, jeste problem realizacije jezgra $K(x,t)$. Teškoća je u dobijanju funkcije dve nezavisno promenljive na elektronskim analognim mašinama. Kod realizacije jezgra $K(x,t)$ jedna nezavisno promenljiva je vreme t, koja inače predstavlja nezavisno promenljivu na elektronskim analognim mašinama. Problem realizacije druge nezavisno promenljive x, je problem realizacije jezgra integralne jednačine. Ovde će biti izložena mogućnost realizacije jezgra na repetitivnom diferencijalnom analizatoru, bez korišćenja posebne tehnike /16/.

a. Realizacija jezgra rešavanjem diferencijalnih jednačina

Posmatrajmo jezgro $K(x,t)$ kao funkciju od t, a x kao parametar, koji uzima niz diskretnih vrednosti x_k $(k=1,2,\ldots,n)$. Neka se jezgro, kao funkcija od t, može dobiti kao rešenje diferencijalne jednačine. Parametar x bi se pojavio kao koeficijent u diferencijalnoj jednačini ili bi početni uslov bio funkcija od x. U slučaju da se x pojavi kao koeficijenat u diferencijalnoj jednačini, jezgro se može ostvariti sa linearnim delom analizatora i potenciometarskim množenjem. Ako se x pojavljuje u početnom uslovu, treba ostvariti takvu naponsku funkciju, obeležimo je sa P/t/, čiji će trenutni napon u trenutku t=tk imati vrednost početnog uslova za $x=x_k$.

Za dobijanje funkcije $P/t/$ može se koristiti linearni deo analizatora kao i nelinearni elementi, što zavisi od oblika funkcije $P/t/$. Na ovaj način se lako dobija na analizatoru skup funkcija $K/x_k, t/$ za $k=1,2,\ldots, n$ /sl.5/.



Sl. 5

Ovaj način realizacije jezgra biće ilustrovan primerom. Neka treba realizovati jezgro:

$$K(x,t) = A\, e^{\alpha x + \beta t} \tag{28}$$

Ova funkcija se može dobiti kao rešenje diferencijalne jednačine:

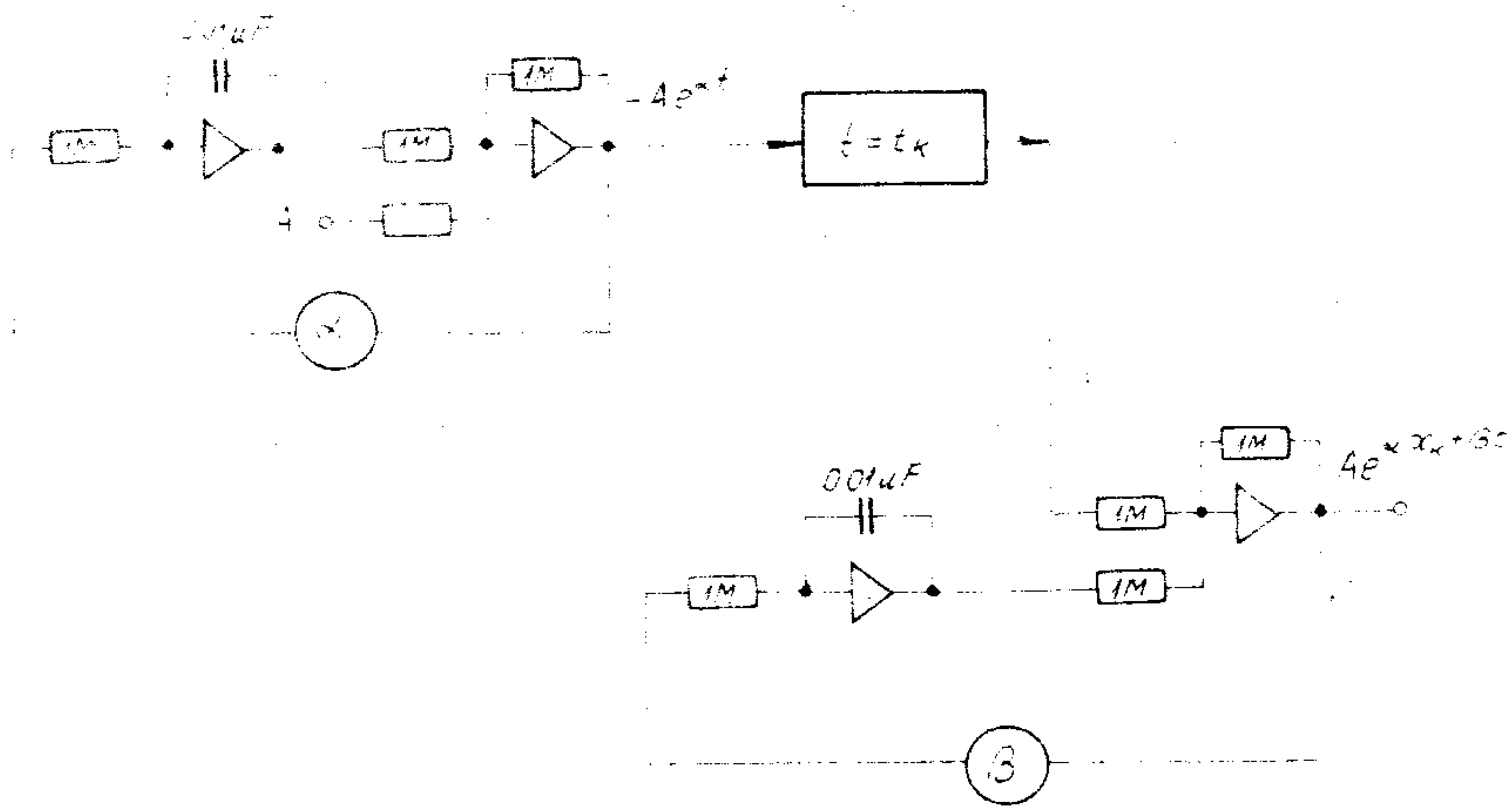
$$\frac{dy}{dt} - \beta y = 0 \tag{29}$$

za početni uslov $y(0) = A e^{\alpha x}$. Početni uslov $y(0)$ za $x = x_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ može se dobiti kao diskretni niz ordinata funkcije, koja predstavlja rešenje diferencijalne jednačine:

$$\frac{dz}{dt} - \alpha z = 0 \tag{30}$$

za početni uslov $z(0) = A$.

Veza elemenata na analizatoru za realizaciju jezgra /28/ data je na sl.6.



Sl 6

Napomena: Ovaj način realizacije jezgra može se primeniti i u slučajevima kada se jezgro nemože dobiti rešavanjem diferencijalnih jednačina. U tom slučaju jezgro treba aproksimirati funkcijama koje se mogu realizovati na predložen način. /20/

b. Realizacija jezgra generiranjem funkcija na generatorima jedne nezavisno promenljive

Za realizaciju jezgra može se koristiti univerzalni nelinearni element /10/ za repetitivne diferencijalne analizatore /11/, koji može da obavi operaciju tipa:

$$y(t) = r(t)\, f\,[g(t)] \qquad (31)$$

gde je

$v(t)$ – naponska funkcija kojom se napajaju potenciometri P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ na sl.7.

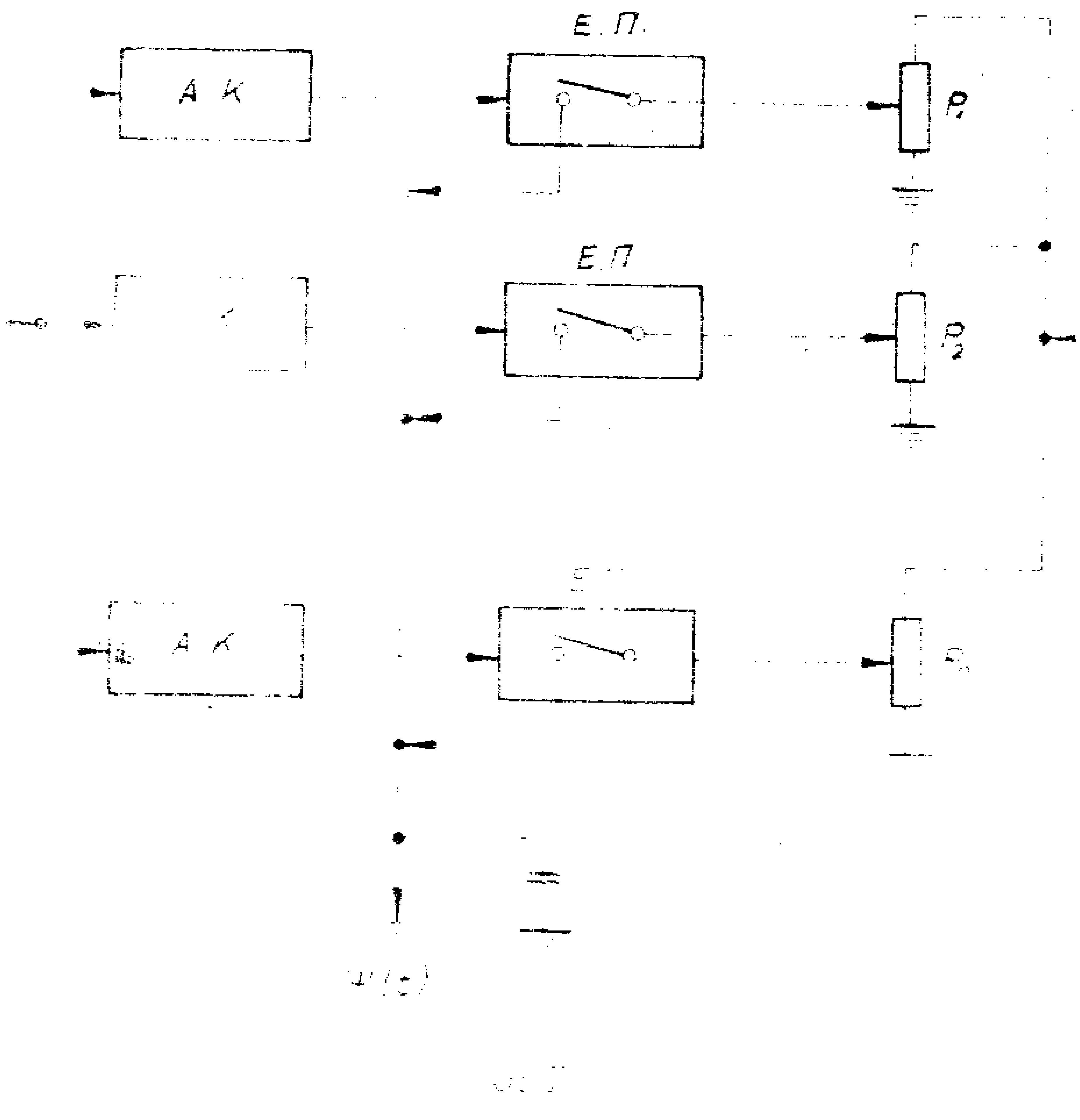
$g(t)$ – naponska funkcija koja se dovodi na ulaz amplitudnih komparatora /A.K./

$f(t)$ – funkcija koja se namešta na potenciometrima Pi

$\psi(t)$ – izlaz iz nelinearnog elementa.

Na slici 7 je data šema univerzalnog nelinearnog elementa za repetativne diferencijalne analizatore.

Amplitudni komparatori /A.K/ na sl.7, u izabranom vremenskom trenutku, koji je u zavisnosti od funkcije g/t/, daju impuls koji omogućava da elektronski prekidač /EP/ u tome trenutku prenese napon V/t/ na izlaz generatora u vidu impulsa, čiji se nivo produžava pomoću kondenzatora C do trenutka aktiviranja sledećeg elektronskog prekidača.



Generator funkcija na sl.7 moguće je napraviti i tako da svaki elektronski prekidač /E.P/ prenosi napon sve dotle dok sledeći amplitudni komparator /A.K/ ne aktivira sledeći elektronski prekidač i otvori prethodni elektronski prekidač. U ovom slučaju na izlazu generatora netreba kondenzator C, pošto izlaz iz elektronskih prekidača nije impuls, već step funkcija, koja gasi sledeći elektronski prekidač./15/

Neka treba realizovati jezgro oblika:

$$K(x,t) = K_1\left[\varphi(x,t)\right] \tag{32}$$

gde funkcija $\varphi(x,t)$ može biti realizovana iz linearnog dela repetitivnog diferencijalnog analizatora /4 pod a/.

Na generatoru treba postaviti:

$$g(t) = \varphi(x_k,t)$$

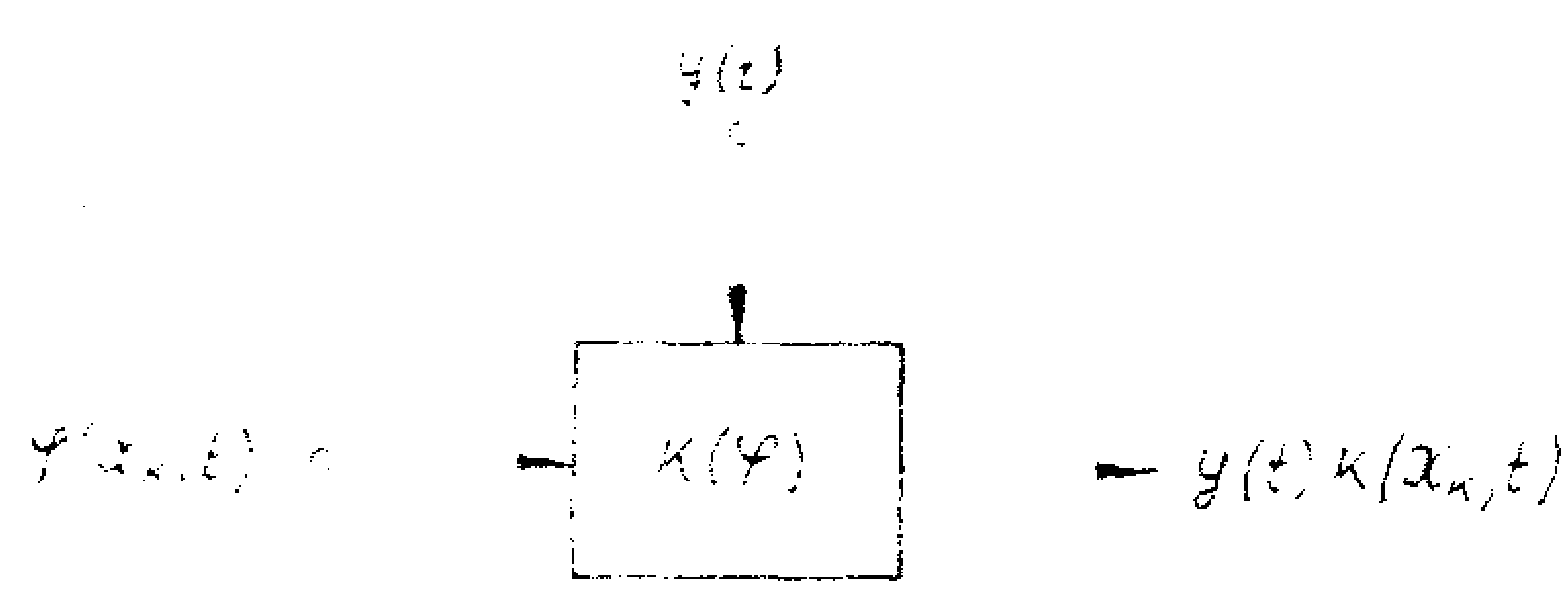
$$f\left[g(t)\right] = K_1\left[\varphi(x_k,t)\right]$$

i ako se želi ostvariti pod integralna funkcija u integralnim jednačinama, treba staviti /sl.8/:

$$v(t) = y(t)$$

pa je:

$$\psi(t) = y(t)\,K(x_k,t)$$



U praksi je vrlo čest slučaj jezgra oblika $K(x-t)$.

Za ilustraciju ovog načina realizacije jezgra neka treba realizovati jezgro oblika:

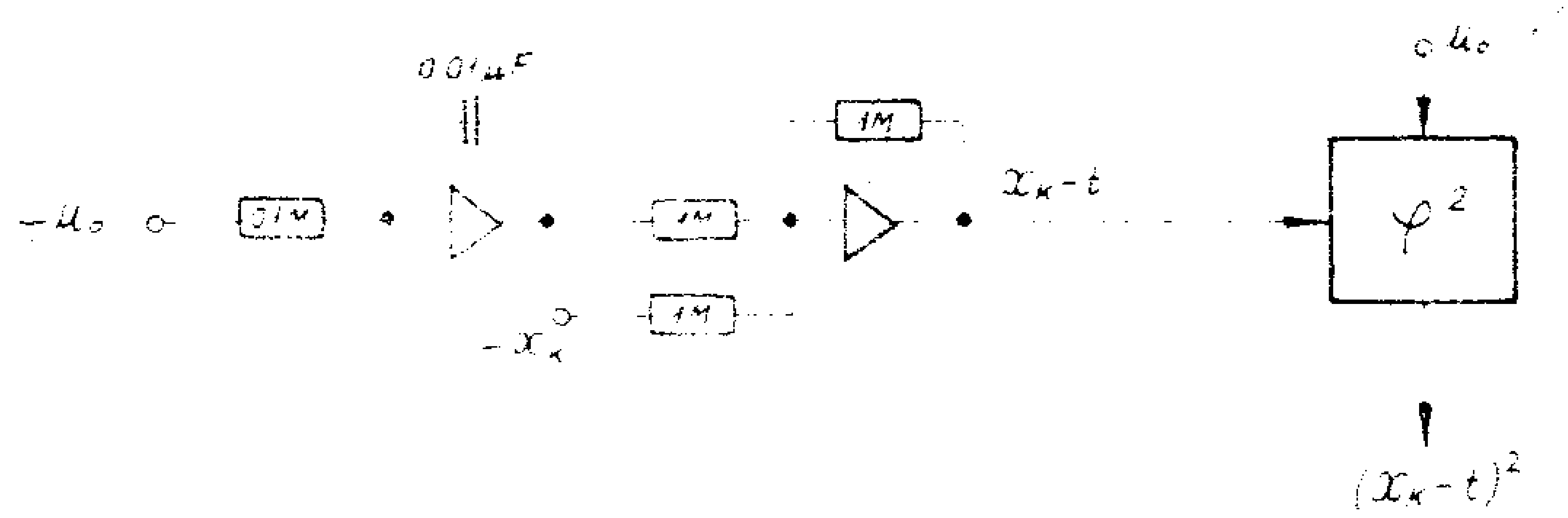
$$K(x,t)=(x-t)^2 \tag{33}$$

Ovde je:

$$\varphi(x,t)=(x-t)$$

$$K_1(\varphi)=\varphi^2$$

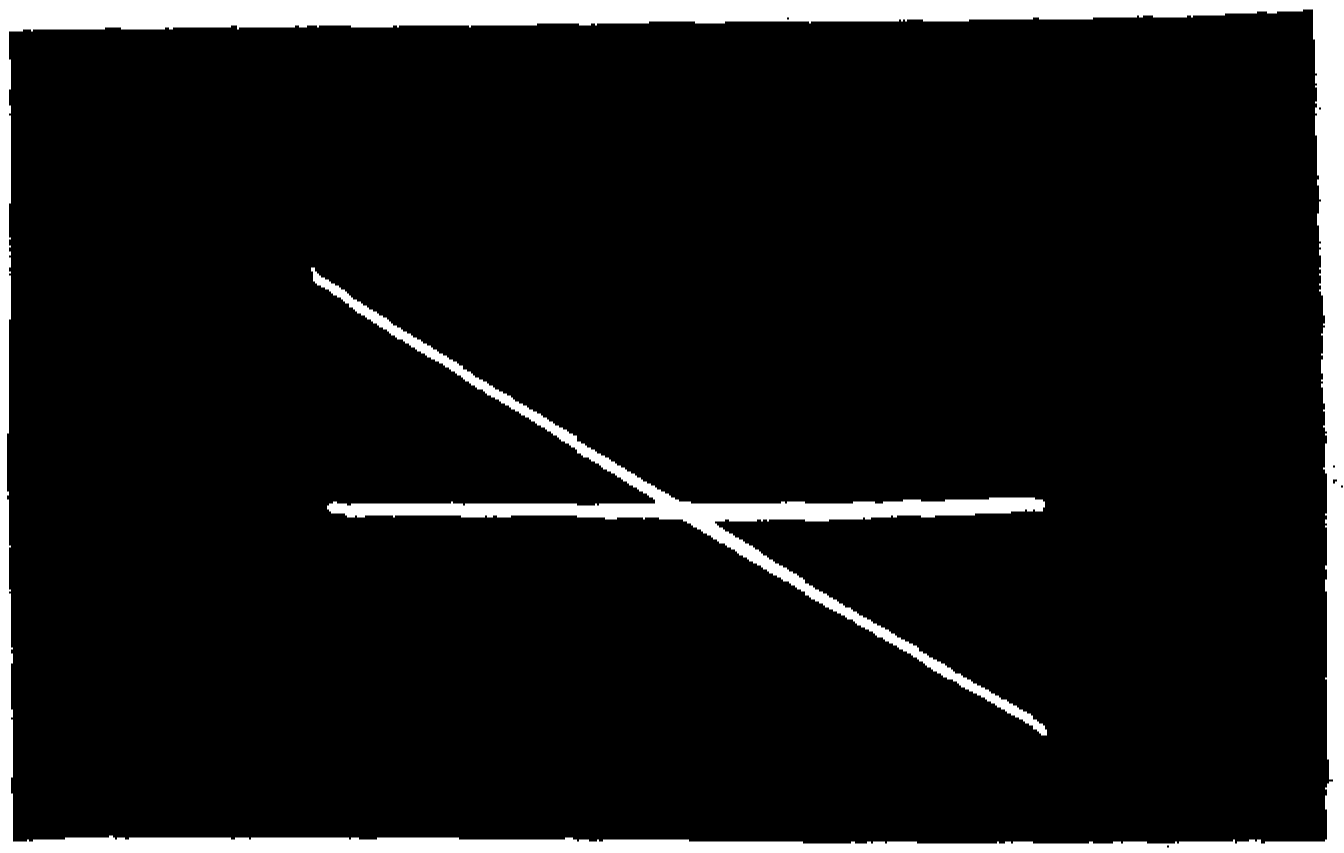
Šema veze elemenata za realizaciju jezgra /33/ data je na sl.9.



Sl 9

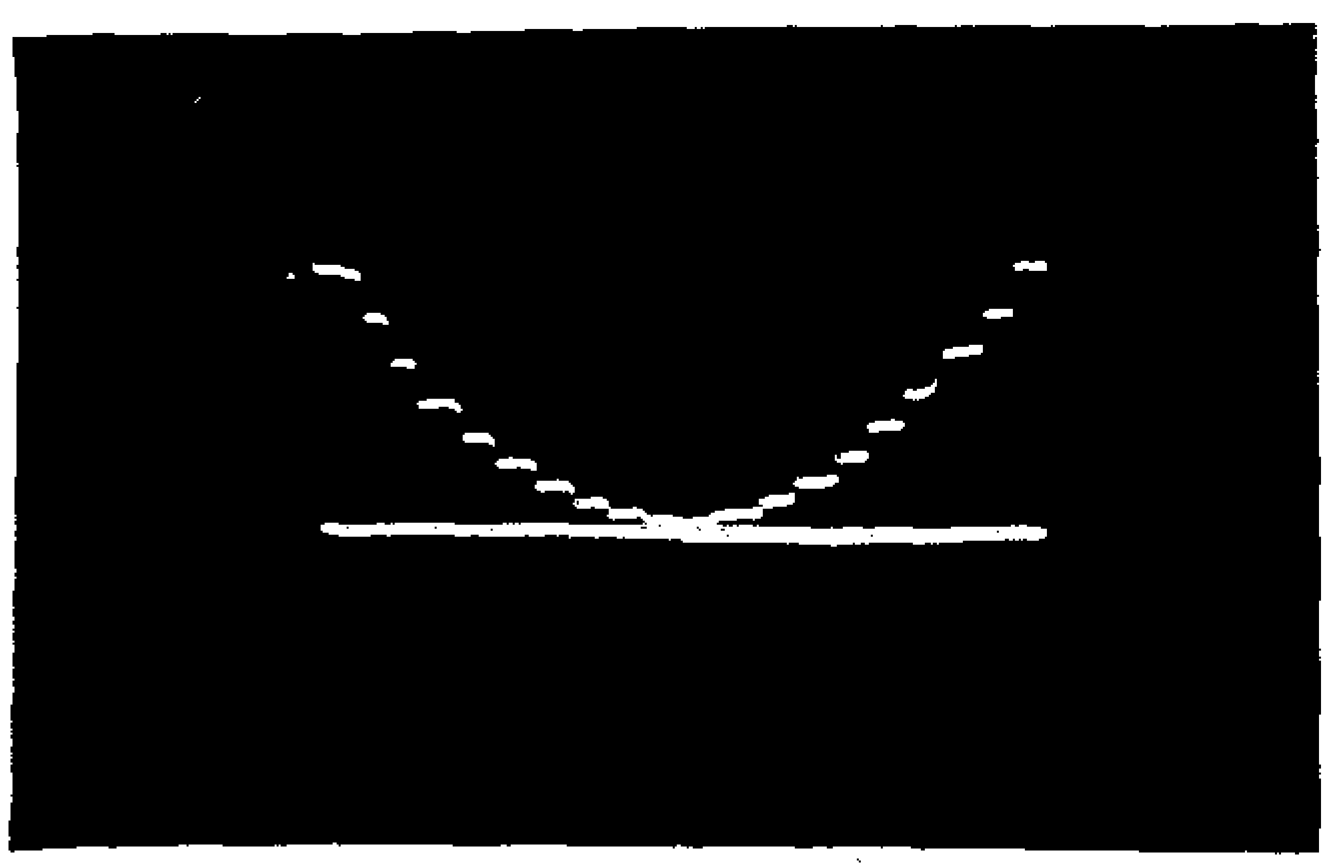
Na sl.9 je sa u_0 označen izabran jedinični napon. Naponski oblik funkcije $\varphi(x,t)=x-t$ snimljen sa ekrana katodnog osciloskopa dat je na sl.10.

./.



sl. 10

Izlaz iz generatora funkcija, koji predstavlja funkciju $(x_k-t)^2$ stepenasto aproksimiranu, snimljen sa ekrana katodnog osciloskopa dat je na sl.11.



sl. 11

Tačnost generiranja funkcije je povećana sa obzirom da je funkcija simetrična u odnosu na pravu $t=x_k$. Primer je prikazan sa $0 \le t \le 10$ i $x_k = 5$.

5. REŠAVANJE INTEGRALNIH JEDNAČINA FREDHOLM-OVOG TIPA NA REPETITIVNOM DIFERENCIJALNOM ANALIZATORU

a. Fredholm-ova integralna jednačina prve vrste

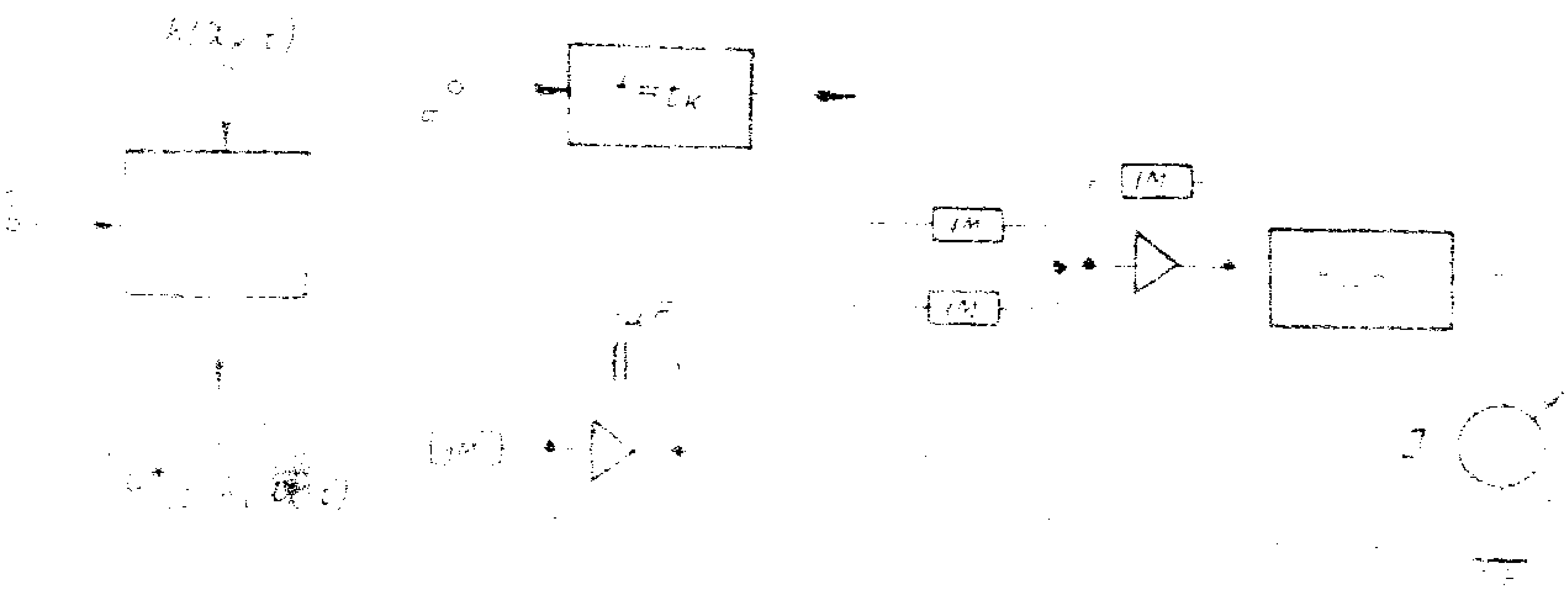
Problem rešavanja Fredholm-ove integralne jednačine prve vrste sveden je na rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina

(1 pod b.) oblika:

$$F(x_k) = \sum_{i=1}^{n} y(T_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k, t)\,dt \qquad (34)$$

Funkcija $F/x/$ može biti realizovana iz linearnog dela analizatora, kao $F/t/$ i za $t=t_k$ dobiti $F/x_k/=F/t_k/$. U slučaju da se F(t) koristi generator funkcija za dobijanje funkcije, može se na generatoru ostvariti $F'(t)$ i integriranjem dobiti linearno aproksimirana funkcija $F(t)$ /12/.

Blok šema za rešavanje sistema linearnih jednačina /34/ data je na sl.12.



Sa sl.12 se vidi da je na analizatoru suma na desnoj strani jednačine /34/ odredjena sa:

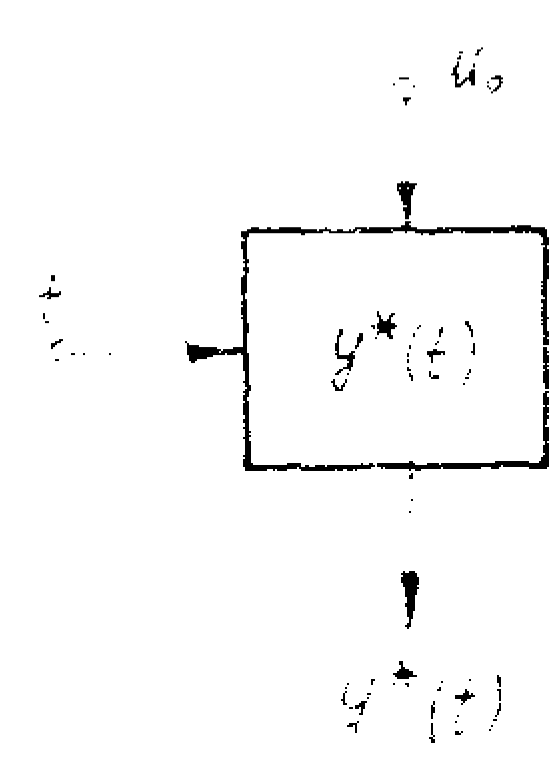
$$\int_0^t K(x_k,t)\,y^*(t)\,dt \qquad (35)$$

gde je $y^*(t)$ stepenasta aproksimacija funkcije $y(t)$. Ovde je predpostavljeno da se integracija vrši u intervalu $0 \le t \le b$.

Postupak rešavanja na analizatoru je sledeći:

Operator postavlja vrednost nezavisne promenljive X na X_1, i zatim podešava potenciometar P_1 /sl.7/ tako da instrumenat J pokazuje nulu. Kada je ovo podešeno odredjena je prva aproksimacija prve nepoznate $y_1(x_1)$ s tim što je pretpostavljena početna vrednost $y_0(x_K)=0$ $(K=1,2,\dots,n)$. Zatim na isti način postavlja $X=X_2$ i podešava potenciometar P_2, da instrumenat J pokazuje nulu. Postupak se nastavlja i dalje dok se ne podesi i zadnji potenciometar P_n. U praksi se grade generatori funkcija kod kojih je $n=20$. Kada je podešen i zadnji potenciometar izvršen je prvi korak u Gauss-Seidel-ovom postupku rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina.

Postupak se ponavlja dok se nepostigne da instrumenat J pokazuje nulu za sve vrednosti $X=X_k$ /$k=1,2,\dots,n$/. Dovodjenjem jediničnog napona na ulaz u generator /sl.13/ na izlazu se dobija



Sl. 13

stepenasto aproksimirana funkcija $y^*(t)$.

Brzina rešavanja zavisi od brzine konvergencije Gauss-Seidel-ovog postupka za sistem /34/. Praktično je dovoljno napraviti 3 do 4 iteracije i na generatoru se dobija dovoljno tačno rešenje, sa obzirom na grešku svih ostalih elemenata u analognoj tehnici/13,14/.

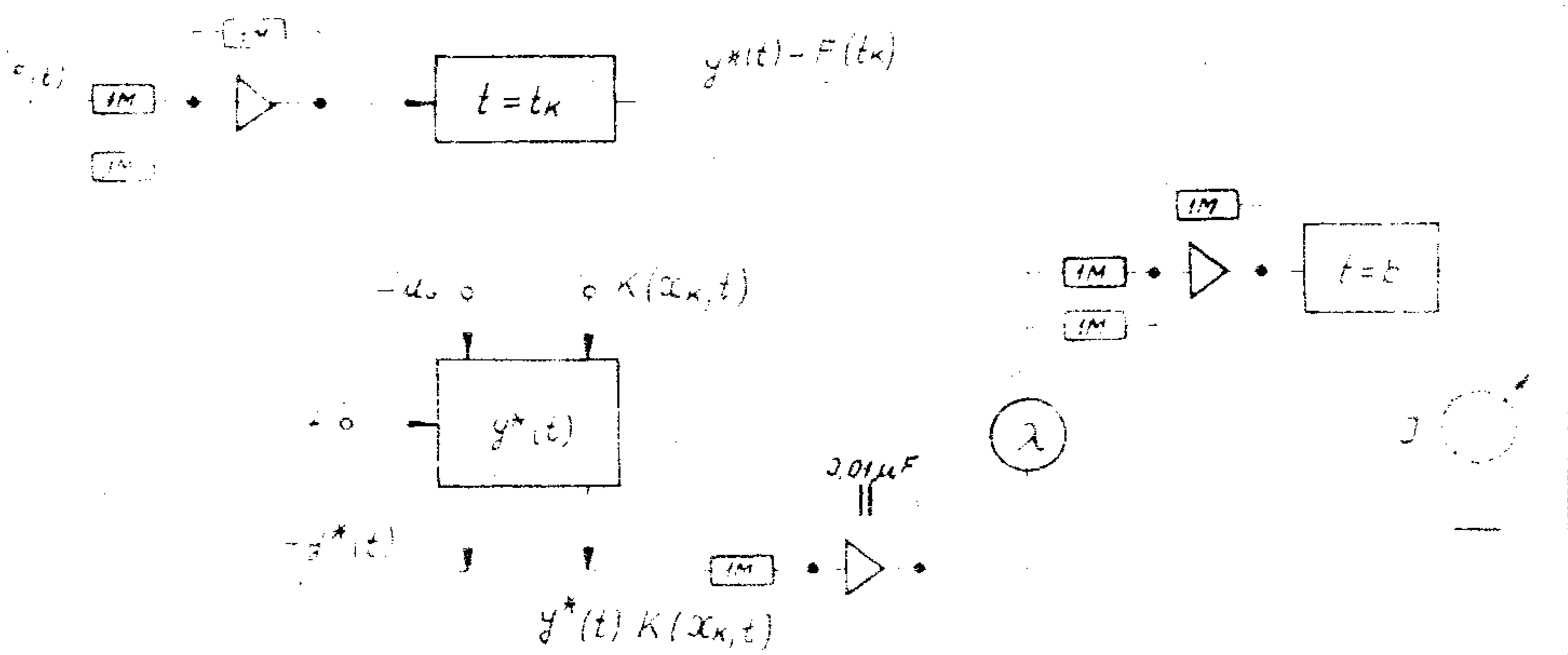
b/ Fredholm-ova jednačina druge vrste

Ovde treba rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina (1 pod a.):

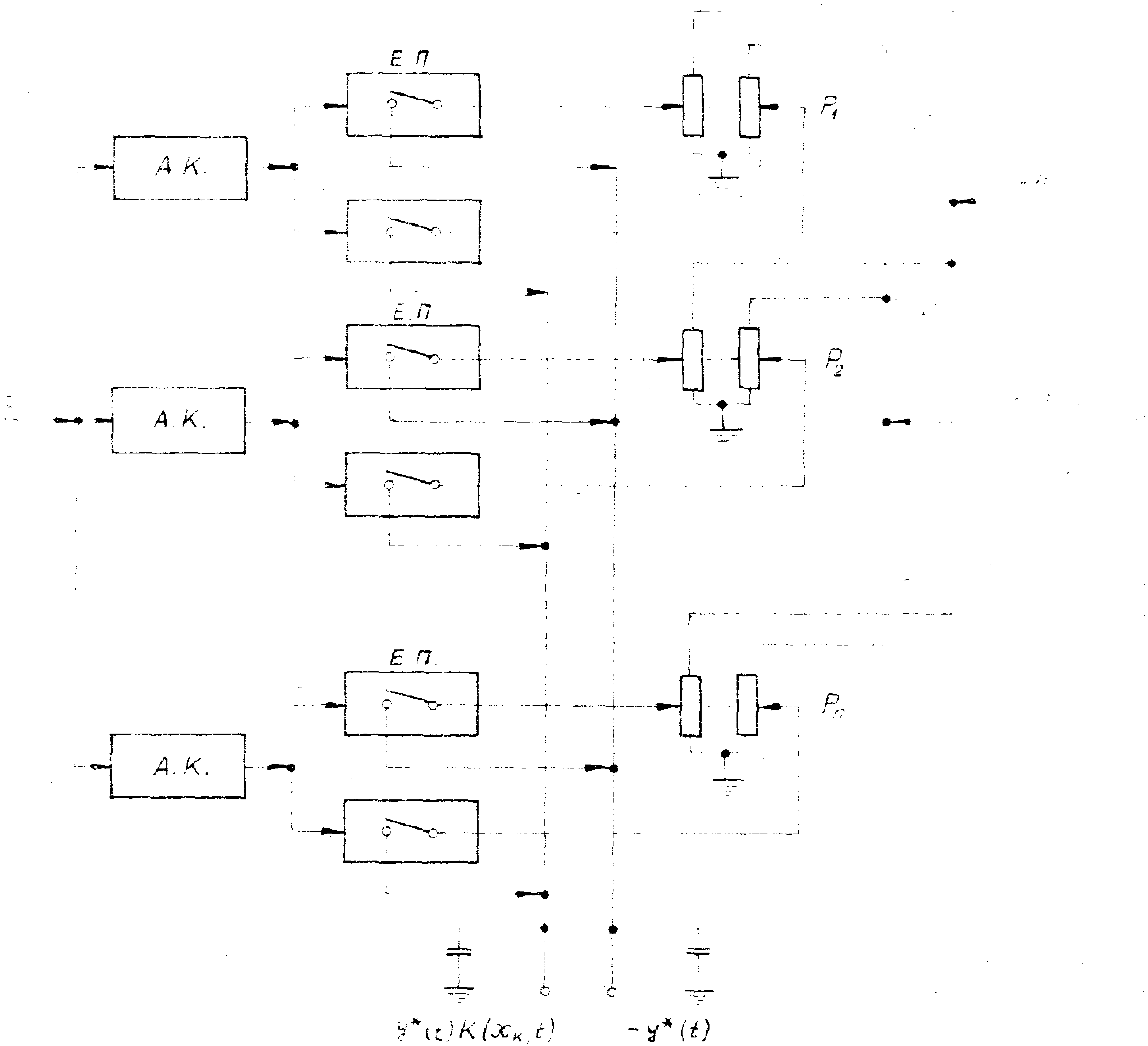
$$y(x_k) = F(x_k) + \lambda \sum_{i=1}^{n} y(T_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k, t)\,dt \qquad (36)$$

Za dobijanje funkcije F/x/, kao i za sumu na desnoj strani sistema /36/, važi isto što je rečeno kod Fredholm-ove jednačine prve vrste.

Blok šema za rešavanje sistema jednačina /36/ data je na sl.14.

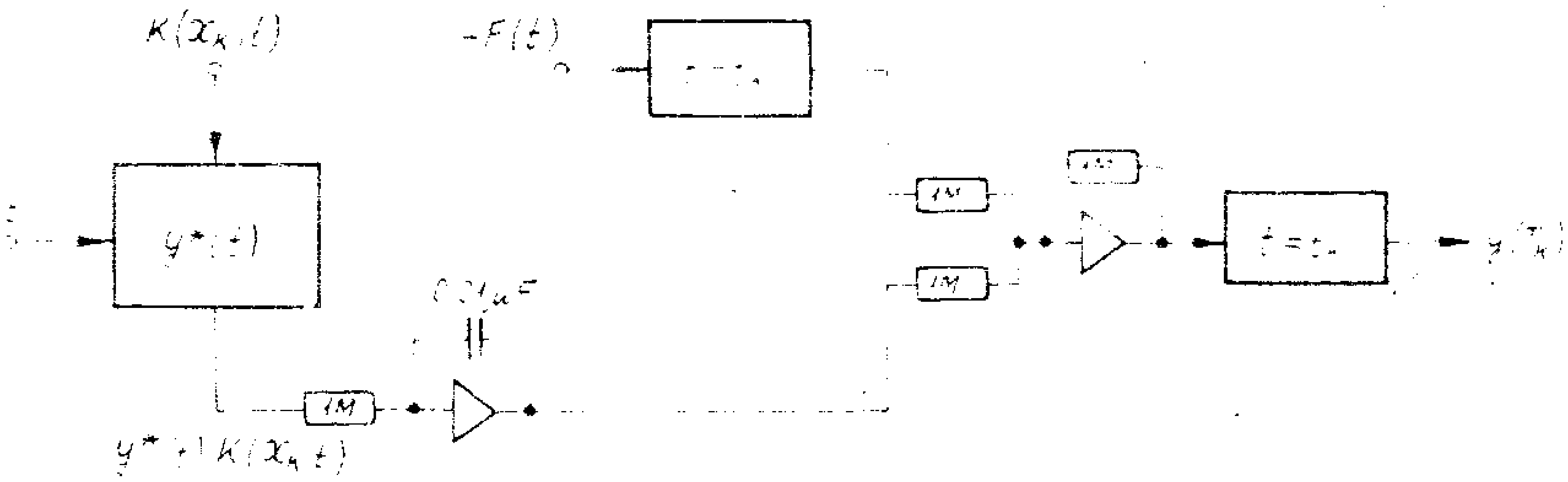


Ovde je radi lakše manipulacije uvedeno da generator funkcije /sl.7/ ima potenciometre Pi/i=1,2,....,n/ dvostruke, tako da se preko jednih prenosi jedinični napon U_0, i na izlazu dobija $y^*(t)$, a preko drugih se prenosi $K/x_k,t/$ i na izlazu dobija $y^*(t)K(x_k,t)$ tako da generator ima dva ulaza i dva izlaza /sl.15/.



Sl. 15

Postupak rešavanja je isti kao i za Fredholm-ovu jednačinu prve vrste. Rešavanje počinje sa $y_0/x_k/=0$, k=1,2,....,n. Može se izbeći potreba za generatorima funkcija, sa dvostrukim potenciometrima u koliko se na izlazu iz sabirača meri $y_i/x_k/$ i postavlja na potenciometar P1 /sl.16/. Ovo neznatno otežava manipulaciju,



Sl 16

ali čini da postupak rešavanja integralnih jednačina prve i druge vrste nije jednoobrazan.

Primer:

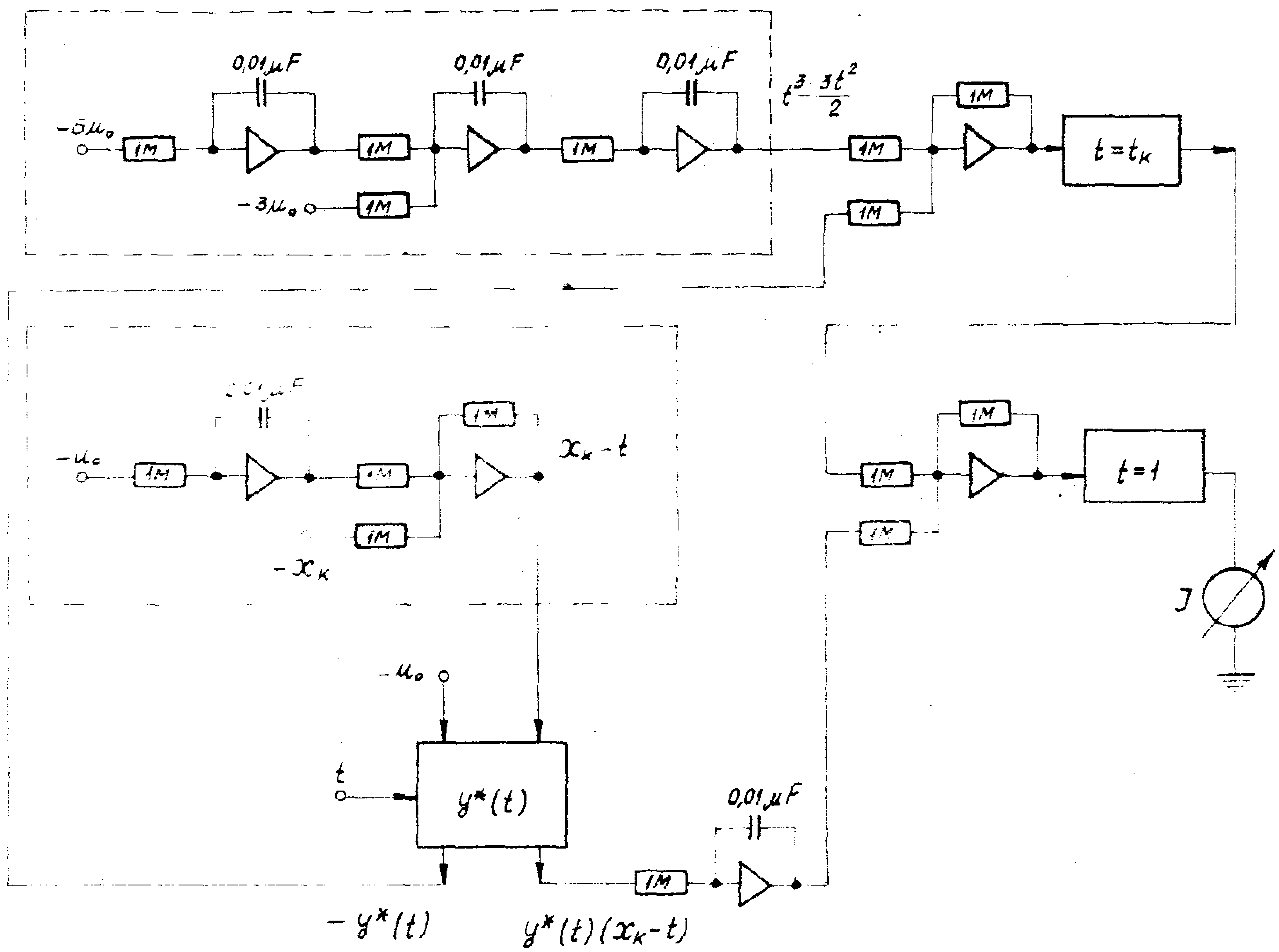
Radi ilustracije biće rešena integralna jednačina:

$$y(x)=\frac{3x^2}{2}-x^3+\int_0^1(x-t)y(t)\,dt \qquad (37)$$

čije je tačno rešenje:

$$y(x)=x^2$$

Šema veze elemenata repetitivnog diferencijalnog analizatora data je na sl.17.



Sl. 17

Blok za realizaciju funkcije $\left(\frac{3t^2}{2} - t^3\right)$ je označen tačkasto na sl.17, kao i blok za realizaciju jezgra $(x-t)$.

sl. 17a

Na slici 17a nalazi se snimljeno rešenje integralne jednačine /37/, sa ekrana katodnog oscilografa.

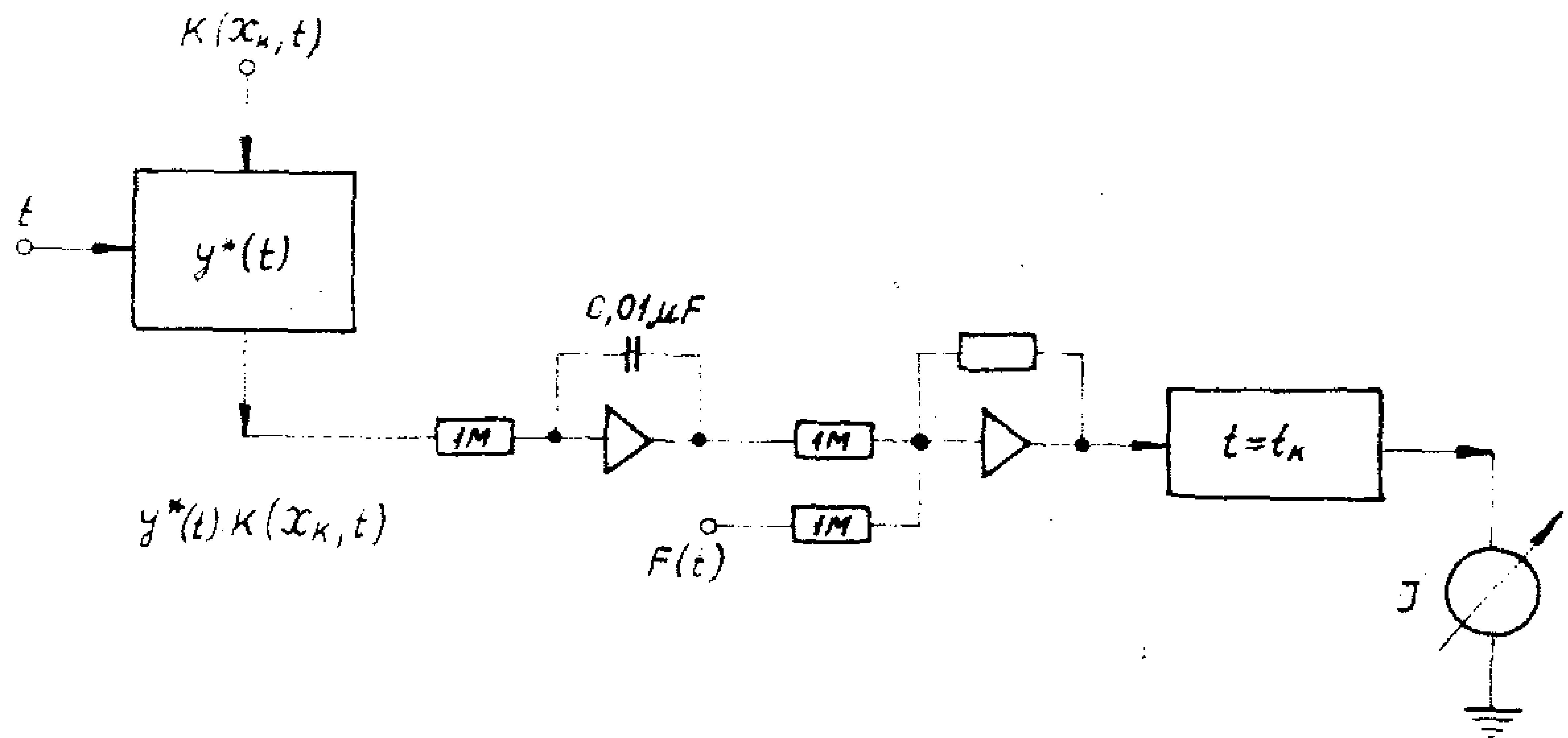
6. REŠAVANJE INTEGRALNIH JEDNAČINA VOLTERR-INOG TIPA NA REPETITIVNOM DIFERENCIJALNOM ANALIZATORU

a. Volterr-ina integralna jednačina prve vrste

Problem rešavanja Volterr-ine integralne jednačine prve vrste sveden je na rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina (2 pod b.) oblika:

$$F(x_k) = \sum_{i=1}^{k} y(T_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k, t)\, dt \qquad (38)$$

Blok šema za rešavanje sistema /38/ na analizatoru data je na sl.18.



Sl.18

Vidi se da je blok šema slična onoj za rešavanje Fredholm-ove jednačine prve vrste, samo što se na instrumentu očitava nula za t=tk. Suma na desnoj strani jednačine /38/ je na mašini odredjena sa:

$$\int_{t_0}^{t_k} y^*(t)\,K(x_k,t)\,dt$$

gde je $y^*(t)$ stepenasta aproksimacija funkcije $y(t)$.

Postupak rešavanja na analizatoru zahteva iste radnje kao i za Fredholm-ovu jednačinu prve vrste. Samo što se ovde za svaku promenu k-a menja i vreme očitavanja na izlazu, i na isti način odredjuje nula okretanjem odgovarajućeg potenciometra $P_i \; (i=1,2,\dots,n)$ na generatoru funkcija /sl.7/. Ovde nije potreban odabirač ordinata za funkciju F/t/ pre izlaznog sabirača.

./.

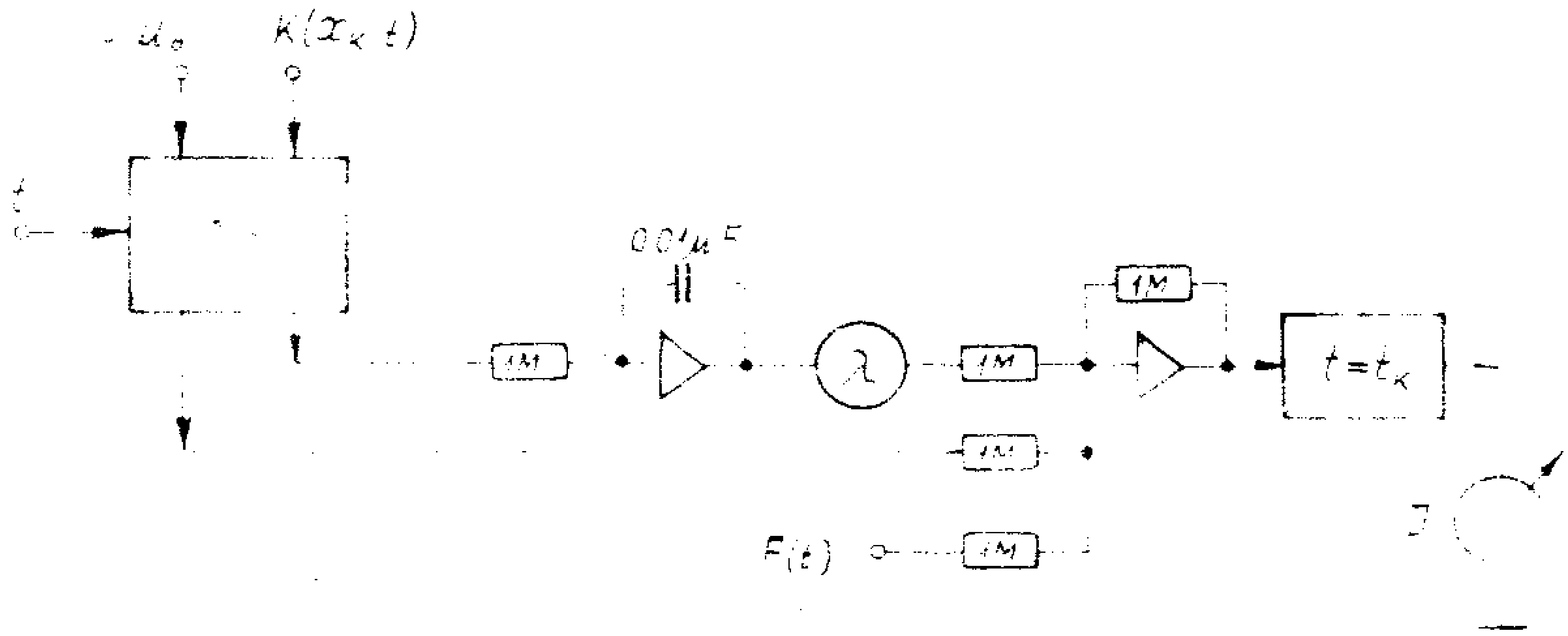
b. Volterr-ina integralna jednačina druge vrste

Ovde treba rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina

$$y(x_k)=F(x_k)+\lambda\sum_{i=1}^{k} y(T_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)\,dt \qquad (39)$$

Za rešavanje sistema /39/, na analizatoru, može se koristiti slična blok šema kao na sl.14. za Fredholm-ovu jednačinu druge vrste, samo što se umesto odredjivanja nule na izlaznom sabiraču za t=b, odredjuje nula za t=tk /k=1,2,1111,m/. Postupak rešavanja na analizatoru je jasan imajući u vidu primedbe za rešavanje Volterr-ine integralne jednačine prve vrste (6 pod a.).

Blok šema za rešavanje sistema /39/ na analizatoru data je na sl.19/



Sl. 19

Primer:

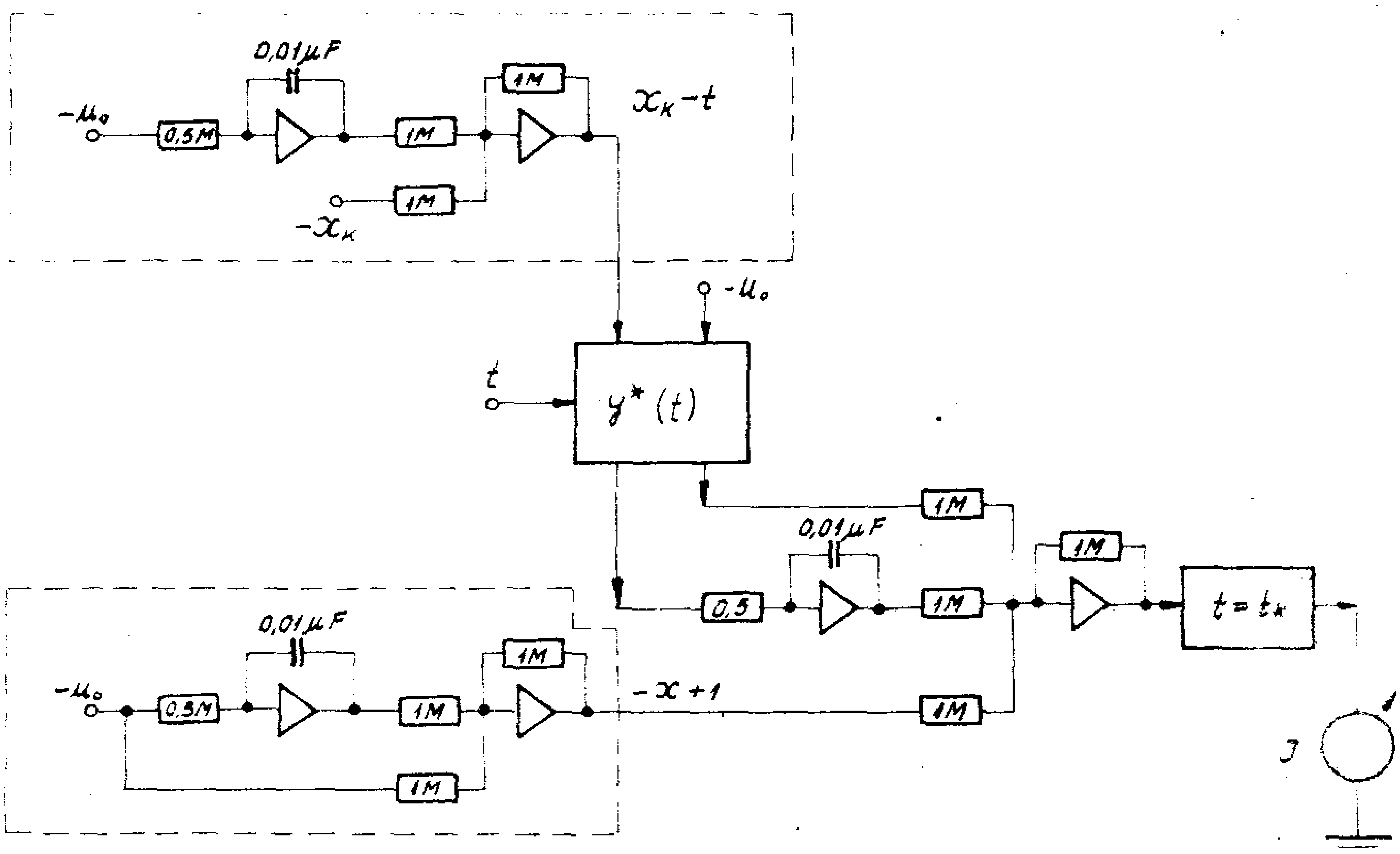
Radi ilustracije biće rešena Volterr-ina integralna jednačina druge vrste:

$$y(x) = -x + 1 + \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt$$

čije je tačno rešenje:

$$y(x) = e^{-x}$$

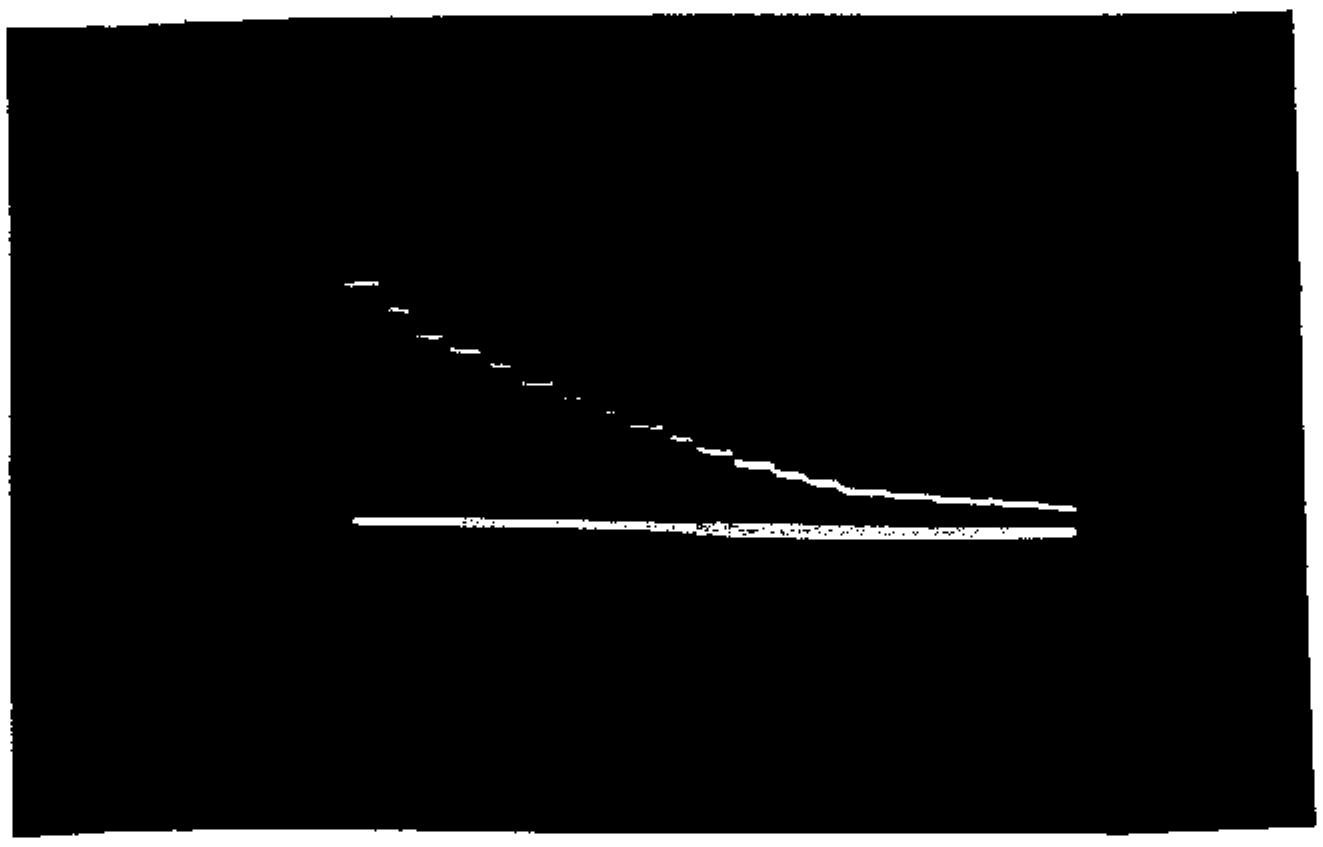
Šema veze elemenata repetitivnog diferencijalnog analizatora data je na sl.20.



Sl.20

Blok za realizaciju funkcije/- x + 1/ je označen tačkasto na sl.20, kao i blok za realizaciju jezgra /x - t/.

./.



sl. 21

Na sl.21 nalazi se snimljeno rešenje, zadate integralne jednačina, sa ekrana katodnog osciloskopa, za $0 \leq x \leq 2$.

7. POVEĆANJE TAČNOSTI REŠAVANJA VOLTERR-INE INTEGRALNE JEDNAČINE POBOLJŠANJEM STEPENASTE APROKSIMACIJE

a. Rešavanje Volterr-ine integralne jednačine druge vrste sa poboljšanjem stepenaste aproksimacije

Kako je pokazano u § 3, može se povećati tačnost stepenaste aproksimacije uvodeći uslov da je priraštaj sledeće ordinate u odnosu na predhodnu konstantan. Ovaj uslov dovodi do sistema linearnih algebarskih jednačina oblika:

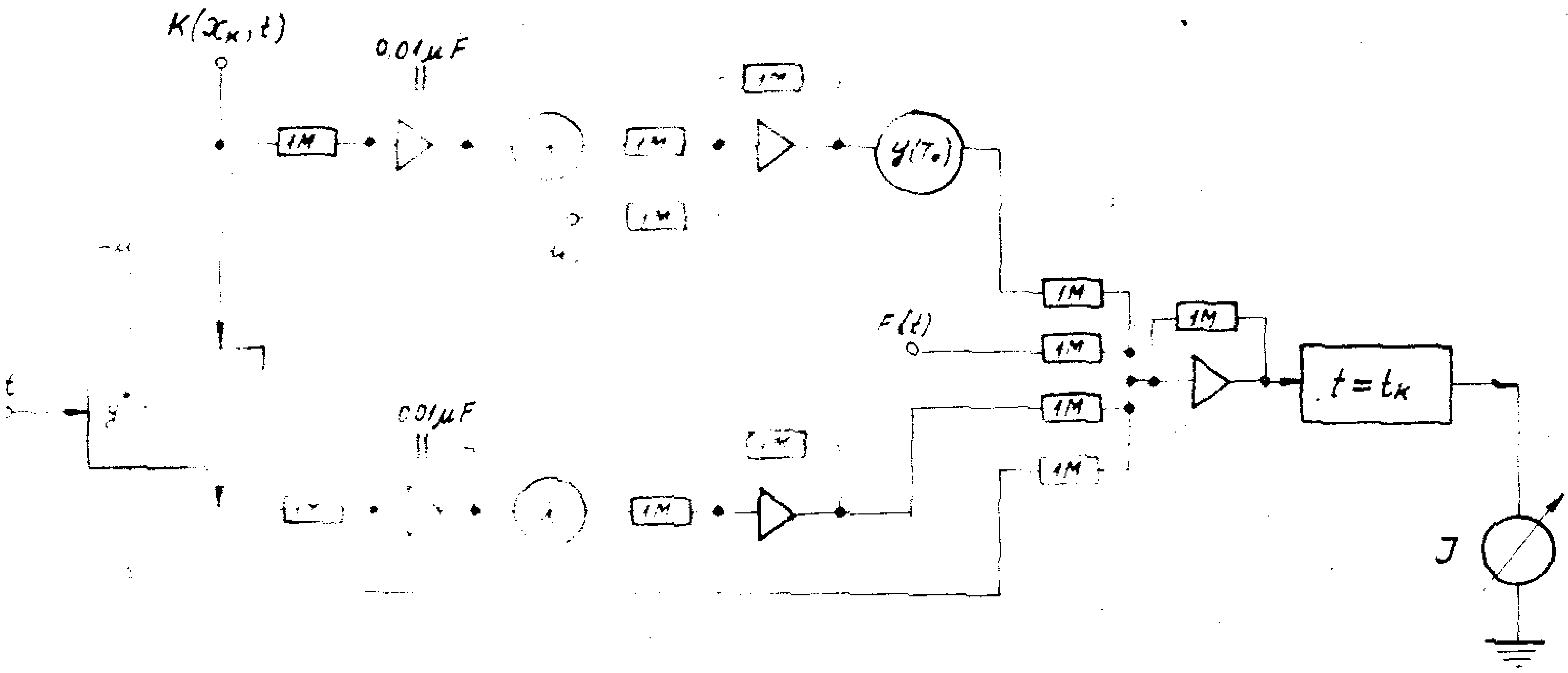
$$y(T_0)\left[1-\lambda\int_a^{t_k} K(x_k,t)\,dt\right]+k\delta-\lambda\sum_{i=1}^{k} i\delta\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k,t)\,dt-F(x_k)=0 \qquad (40)$$

gde kao nepoznatu treba smatrati integral

$$\int_a^{t_k} K(x_k,t)\,dt$$

čija veličina treba da bude odredjena pogodnim izborom gornje granice integracije tk/k=1,2,......,n/.

Na sl.22 data je šema veze elemenata na analizatoru za rešavanje sistema /40/.



Sl. 22

Na generatoru funkcija se prethodno postave ordinate, i to tako da je vrednost prve ordinate δ, druge 2δ itd. Postavljanje ordinata se vrši na potenciometrima Pi /sl.7/. Zatim operator sa potenciometrom za odredjivanje apscise, na generatoru funkcija, odredjuje širinu prvog stepenika, u stepenasto aproksimiranoj funkciji $y^*(t)$, tako da za $t=t_1$, bude izlaz iz izlaznog sabirača jednak nuli. Potom se odredjuje širina drugog stepenika, tako da je izlaz iz izlaznog sabirača jednak nuli za $t=t_2$ itd. Postupak nije iterativan, tako da kada se odredi i $t=t_{20}$, rešenje integralne jednačine se nalazi

./.

postavljeno na generatoru funkcija, umanjeno za y/To/. Dodavanjem konstante y/To/ može se dobiti traženo rešenje na ekranu katodnog osciloskopa.

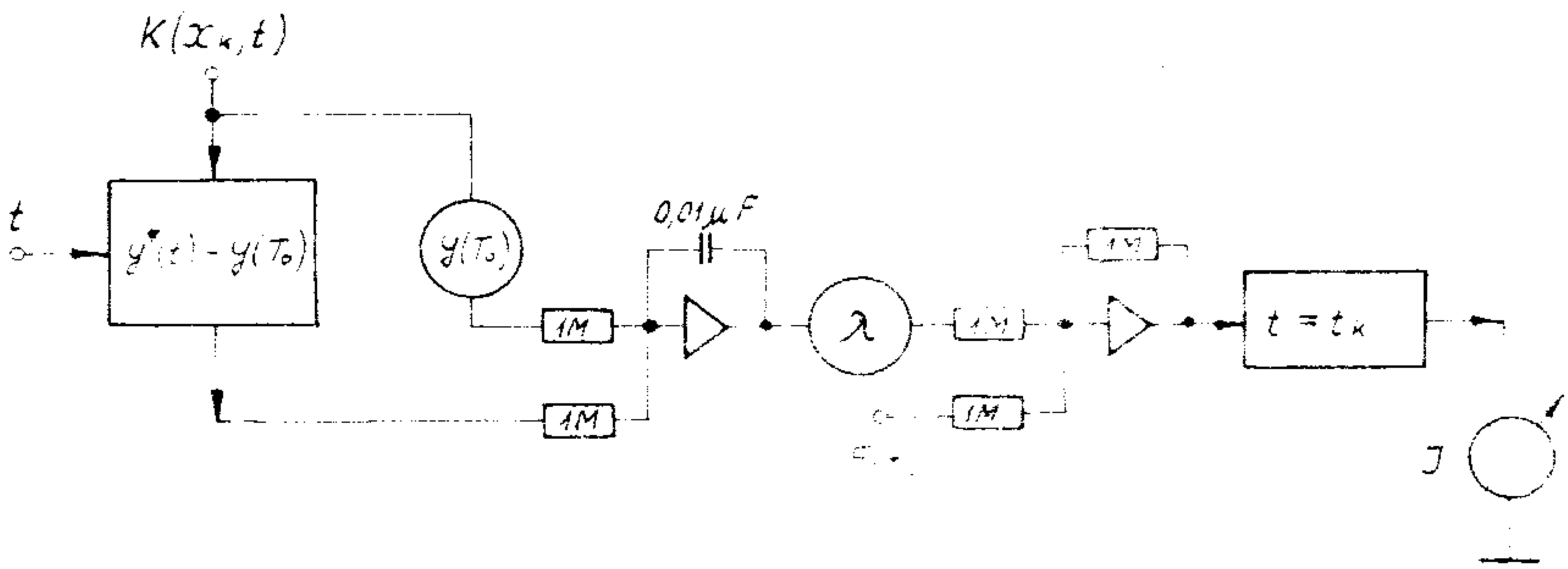
U slučaju da rešenje integralne jednačine nije monotono rastuća funkcija, treba promeniti znak na odgovarajućem potenciometru Pi, tako da se može dobiti rešenje za ma kakav oblik funkcije y/t/.

b. Rešavanje Volterr-ine jednačine prve vrste sa poboljšanjem stepenaste aproksimacije

Ovde treba rešiti sistem

$$F(x_K) - y(T_0)\lambda \int_a^{t_K} K(x_K,t)dt - \lambda \sum_{i=1}^{K} i\delta \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_K,t)dt = 0 \qquad (41)$$

Blok šema za rešavanje sistema /41/ na analizatoru data je na sl.23.



Sl. 23

Postupak rešavanja, prema šemi na sl.23, je isti kao i za Volterr-inu jednačinu druge vrste, samo što je šema nešto jednostavnija.

Primer:

Radi ilustracije biće rešena integralna jednačina:

$$y(x) = sh(x) - \int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt \qquad /42/$$

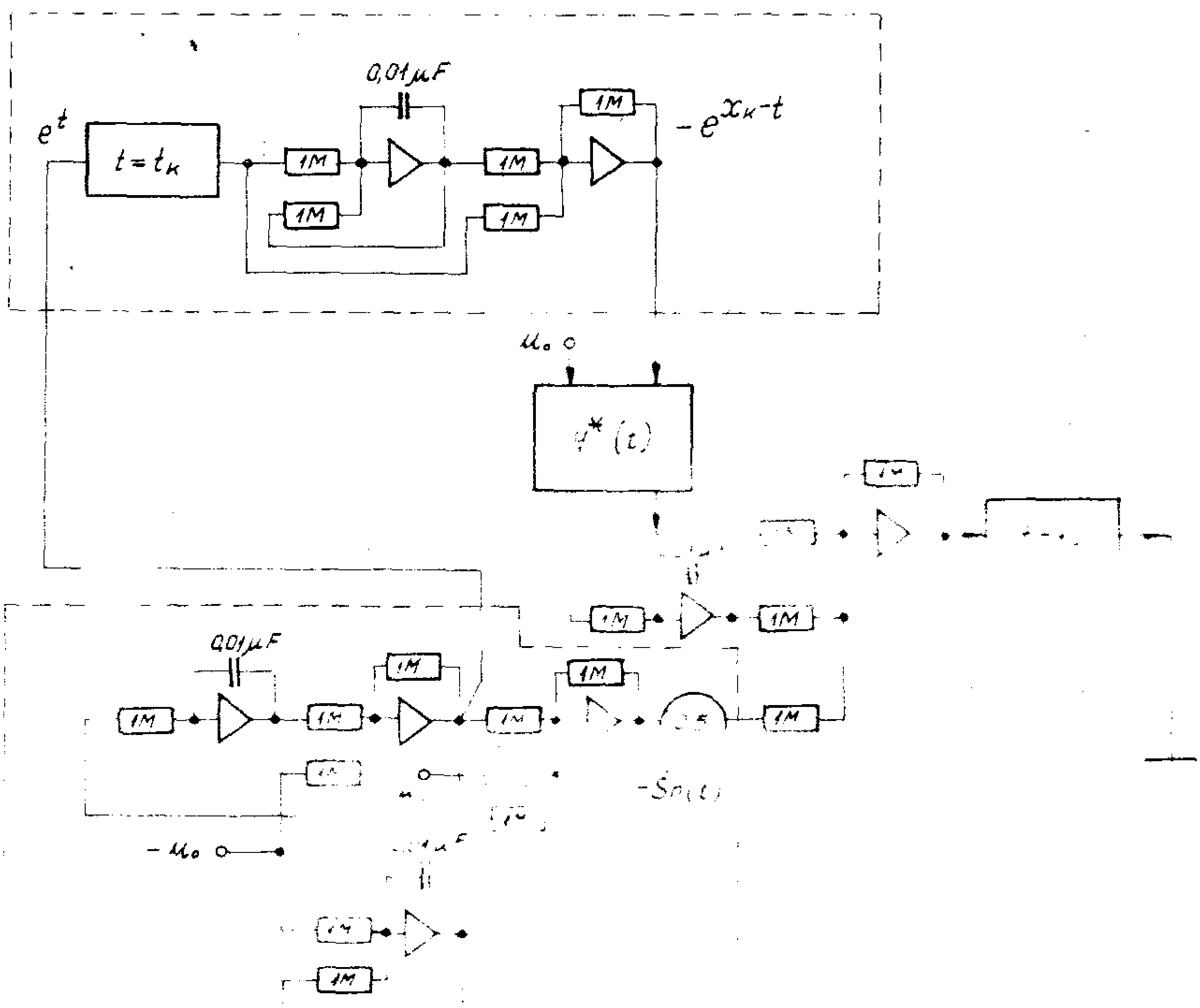
čije je tačno rešenje $y(x) = 1 - e^{-x}$.

Ovde je $y(0) = 0$ i $\lambda = 1$. To se prema /40/ dobija opšta jednačina sistema u obliku

$$k\delta + \sum_{i=1}^{k} i\delta \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{x_k - t}\,dt - sh(x_k) = 0 \qquad /43/$$

Jezgro e^{x-t} se dobija kao jezgro /28/ kada se uzme da je A=1, $\alpha = 1$ i $\beta = -1$.

Blok šema za rešavanje sistema /43/ na analizatoru data je na sl.24.



Sl.24

Funkcija Sh/t/ je dobijena iz linearnog dela analizatora. Na sl.25 nalazi se snimljeno rešenje integralne jednačine /42/ sa ekrana katodnog osciloskopa.

sl. 25

GLAVA III

MOGUĆNOST REŠAVANJA DRUGIH PROBLEMA SA ISTOM ANALOGNOM TEHNIKOM

8. Mogućnost rešavanja nekih matematičkih problema sa istom analognom tehnikom.

a. Integralna transformacija. Problem dobijanja integralne transformacije neke funkcije f/t/ svodi se na rešavanje integrala

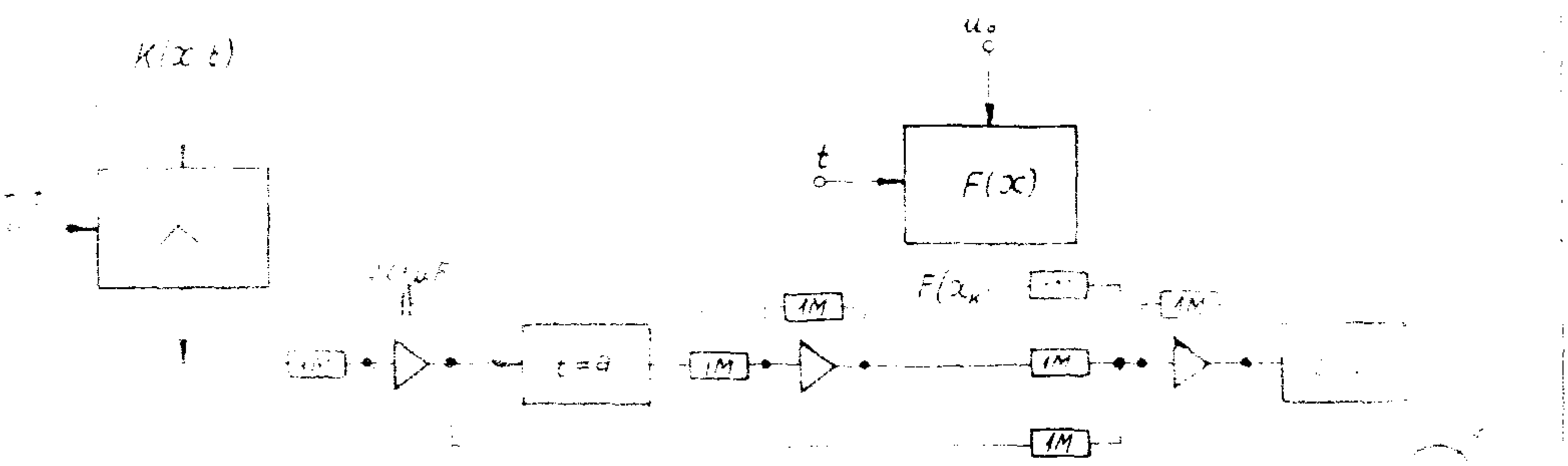
$$F(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt \qquad /44/$$

gde su a i b poznate konstante, K/x,t/ poznata funkcija. U zavisnosti od oblika funkcije K/x,t/, dolazi se do posebnih integralnih transformacija. Tako za

$$K(x,t) = \cos xt \qquad /45/$$

dobija se izraz za Fourier-ovu transformaciju funkcije f/t/.

Blok šema za rešavanje integralne transformacije /44/ na repetitivnom diferencijalnom analizatoru data je na sl.26.



Na analizatoru se dobija stepenasto aproksimirana funkcija F/x/, pošto se nezavisno promenljiva menja u diskretnim vrednostima $x=x_k$ /k=1,2,.....,n/. Tako da se rešavanje integrala /44/ na mašini vrši u obliku

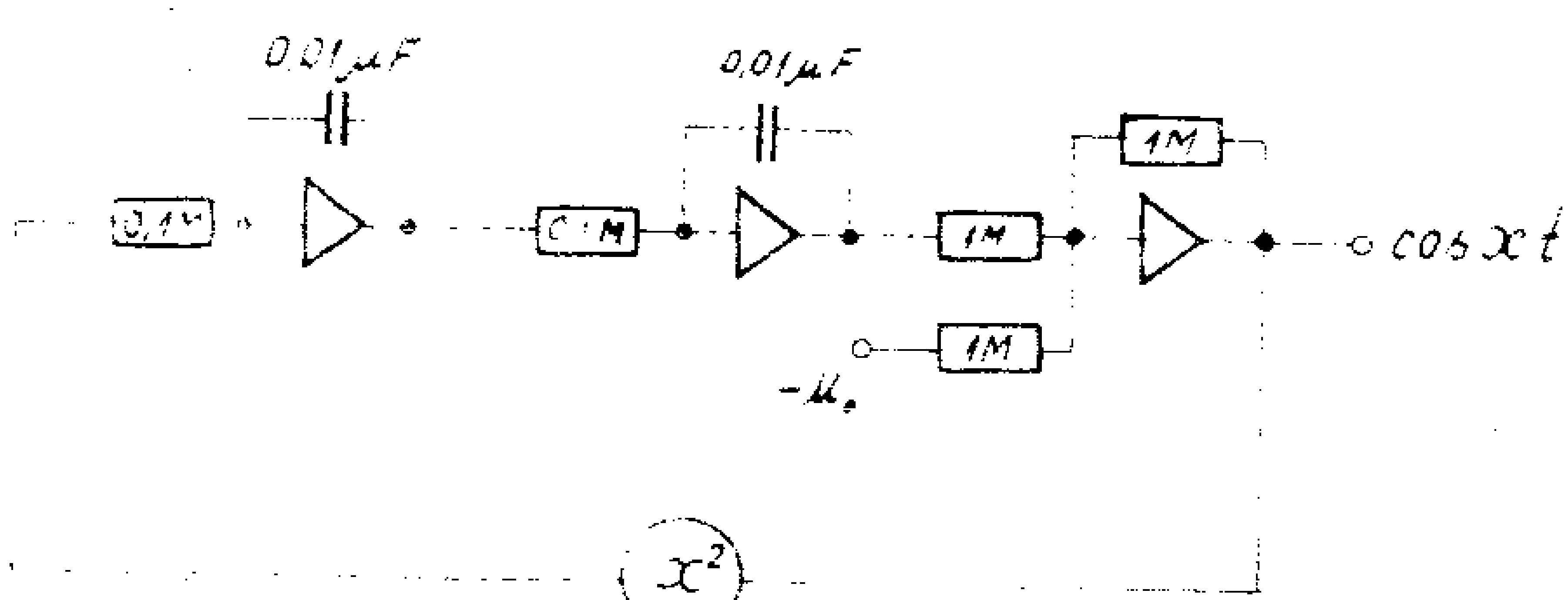
$$\int_0^b K(x_k,t)f(t)dt - \int_0^a K(x_k,t)f(t)dt - F(x_k) = 0 \qquad /46/$$

Postupak rešavanja je sledeći: postavi se $x=x_1$, tako da se dobija $K/x_1,t/$. Zatim se na generatoru funkcija odredjuje ordinata $F/x_1/$ tako da instrumenat J pokazuje nulu za t=b.

Problem realizacije jezgra K/x,t/ je izložen u § 4. Na sl.27 data je blok šema za realizaciju jezgra /45/ za slučaj Fourier-ove transformacije. Jezgro /45/ je na analizatoru realizovano kao rešenje diferencijalne jednačine.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + x^2 y = 0 \qquad /47/$$

za početne uslove $y(0)=1$; $y'(0)=0$.



Sl. 27

h. Na linearne integralne transformacije.

Ovo su transformacije oblika:

$$F(x) = \int_a^b K(x,t) f[t, \varphi(t)]\, dt \qquad /48/$$

Ove transformacije mogu biti realizovane na analizatoru na sličan način, kao i predhodne, imajući u vidu mogućnosti generatora funkcija (§ 4 pod b.).

g. Konvolucioni integral. Ovo je integral oblika

$$F(x) = \int^{+\infty} K(x,t) f(t)\, dt \qquad /49/$$

Realizacija jezgra oblika K/x-t/ je obradjena u § 4 pod b. Postupak rešavanja je isti kao i rešavanje integralnih transformacija. Ovde se kao problem pojavljuju granice integracije, sa obzirom da se na mašini može raditi samo sa konačnim granicama, pošto je nezavisno promenljiva t vreme. Medjutim, u praktičnim problemima često je oblik funkcije čiju konvoluciju treba odrediti, takav da integraciju nije potrebno vršiti u intervalu $[-\infty, +\infty]$. Primer ovakvih funkcija dat je u § 9 pod a i b.

d. Razvijanje funkcija u ortogonalne redove.

Prolbemi odredjivanja koeficijenata a_n, kod razvijanja funkcije f/t/ u red ortogonalnih funkcija P_n/t/ svodi se na reša - vanje integrala

$$a_n = \int_a^b P_n(t) f(t)\, dt \qquad /58/$$

gde su a i b poznate konstante.

Funkcija P_n/t/ u specijalnim slučajevima dovodi do razvijanja funkcije f/t/ u red Laguerre-ovih, Hermite-ovih ili Tschebyscheffljevih polinoma. U slučaju kada je P_n/t/= const dolazi se do razvijanja funkcije u Fourier-ov red. Za rad na analizatoru je od posebnog interesa razvijanje u Fourier-ov red funkcija koje su dobijena na mašini i čiji analitički izraz nije poznat.

Primer

Neka funkciju zadatu sa

$$f(0)=0$$
$$f(t)=+1 \quad za \quad 0<t<\pi$$
$$f(\pi)=0$$
$$f(t)=-1 \quad za \quad \pi<t<2\pi$$

treba razviti u Fourier-ov red:

$$F_n(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \qquad /51/$$

gde su:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt \qquad /52/$$

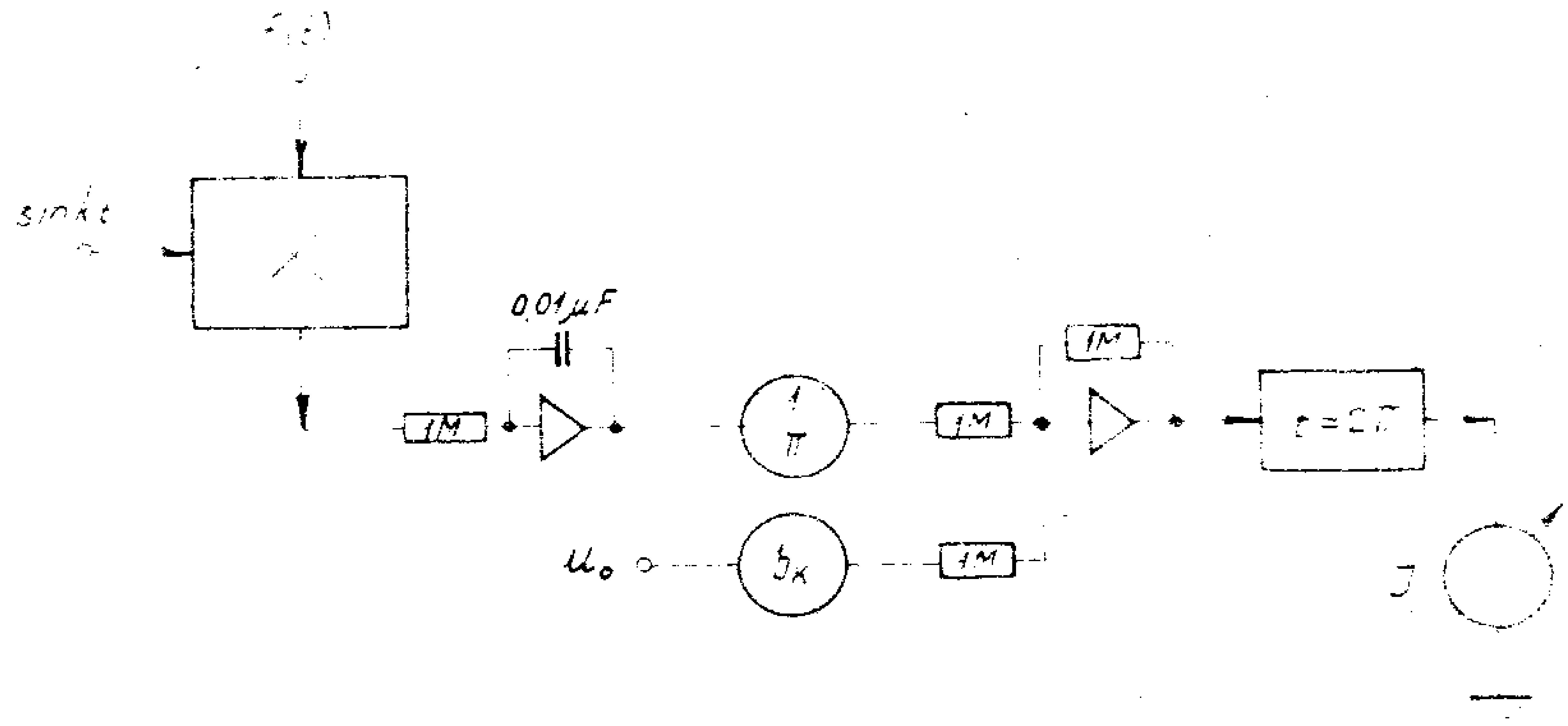
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt \qquad /53/$$

za $k=0,1,2,\dots,n$.

Kako je f/t/ ne parna funkcija to je $a_k=0$. Pa treba odrediti samo koeficijente b_k date sa /53/. Na analizatoru se odredjuje b_k tako da je

$$b_k-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt=0 \qquad /54/$$

Blok šema za dobijanje koeficijenata b_k prema jednačini /54/ data je na sl.28.



Sl 28

Kako je ovde potrebno realizovati funkciju sinkt, gde k uzima samo cele brojeve, to postoji ograničenje tehničke prirode, da broj k ne može biti veći od 10, što znači da se mogu dobiti samo prvih 10 članova Fourier-ovog reda. Na mašini su dobijene sledeće vrednosti za b_k:

$$b_1 = 1,27$$
$$b_2 = 0$$
$$b_3 = 0,43$$
$$b_4 = 0$$
$$b_5 = 0,27$$

Tačne vrednosti su:

$$b_1 = \frac{4}{\pi} = 1,2738$$

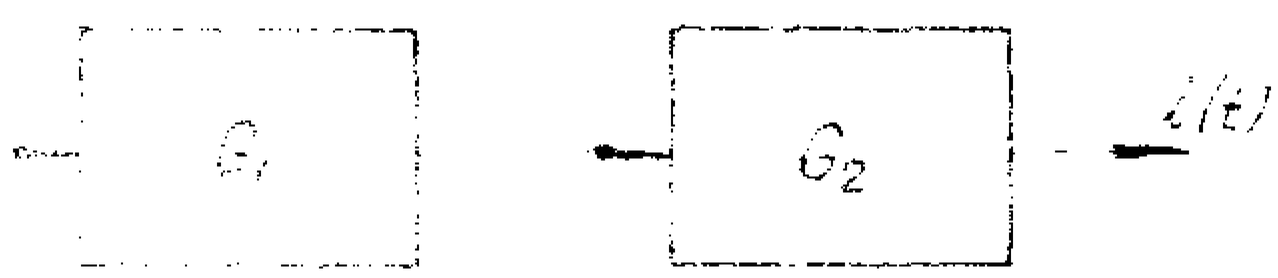
$$b_3 = \frac{4}{3\pi} = 0,4246$$

$$b_5 = \frac{4}{5\pi} = 0,2567$$

i $b_k=0$ za k parno.

9. Mogućnost rešavanja nekih tehničkih problema sa istom analognom tehnikom.

a. Impulsni odziv sistema. U slučaju da se neki fizički sistem može podeliti u blokove /G_1 i G_2/, tako da ovi blokovi spregnugi jedan sa drugim /sl.29/ čine ceo sistem, onda se može dobiti impulsni odziv sistema poznavajući impulsni odziv pojedinih blokova.



Sl. 29.

Ako je impulsni odziv blokova G_1 dat sa $g_1/t/$, a impulsni odziv bloka G_2 sa $g_2/t/$, onda je impulsni odziv sistema $g/t/$:

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x-t)\,g_2(t)\,dt \qquad /55/$$

Kako se ovde radi o stabilnim linearnim sistemima to

$$\lim_{t\to\infty} g_1(t)\to 0$$

i

$$\lim_{t\to\infty} g_2(t)\to 0$$

U aproksimaciji može se uzeti da je

$$g_1(t)\cong 0$$

$$g_2(t)\cong 0$$

za $t>T$ tako da se integral /55/ svodi na

$$g(x)=\int_{0}^{T} g_1(x-t)\,g_2(t)\,dt \qquad /56/$$

jer je

$$g_1(t)=0 \quad i \quad g_2(t)=0 \quad za \quad t<0$$

Postupak na mašini je jasan sa obzirom da je integral /56/ specijalan slučaj integrala /44/.

Ovaj način traženja impulsnog odziva sistema je naročito koristan u slučajevima, kada se simuliranjem na mašini nemože predstaviti ceo sistem. Onda se odredi impulsni odziv pojedinih blokova i po relaciji /56/ nadje impulsni odziv sistema.

U slučajevima kada se u jedan blok /kao na sl.29/ može izdvojiti fiksni deo sistema čiji je impulsni odziv poznat, onda se drugi blok može simulirati na mašini i dobijati impulsni odziv celog sistema vršeći promene unutar simuliranog bloka u cilju poboljšanja karakteristika sistema.

b. Odziv sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju.

Odziv linearnih sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju f/t/ i odredjen sa

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)dt \qquad /57/$$

gde je g/t/ impulsni odziv sistema. Imajući u vidu karakter funkcije g/t/ integral /57/ može se napisati u obliku:

$$F(x)=\int_{0}^{T} g(x-t)f(t)dt \qquad /58/$$

pa se problem svodi na ranije opisan slučaj.

GLAVA IV

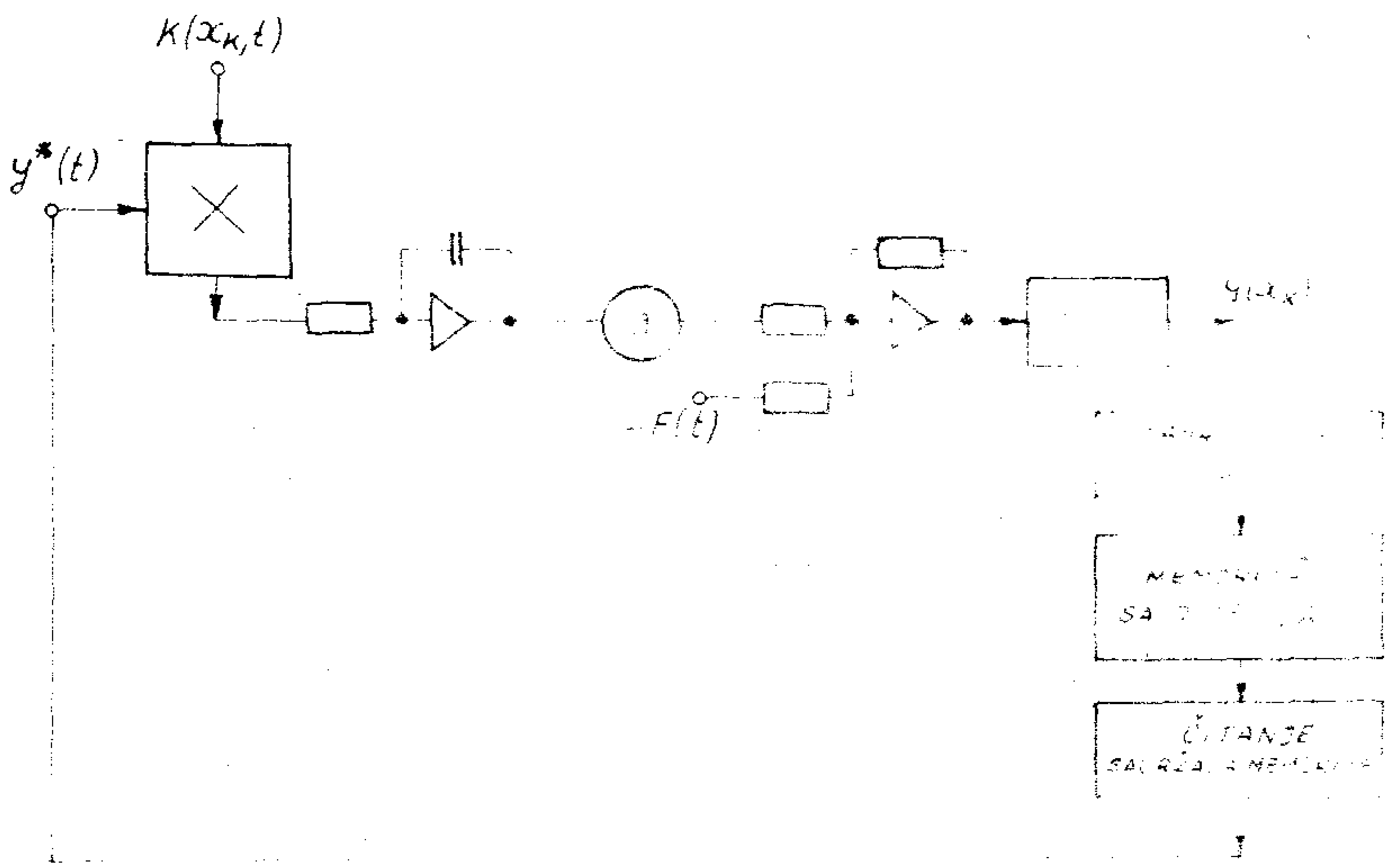
AUTOMATSKO REŠAVANJE INTEGRALNIH JEDNAČINA

Opisan postupak rešavanja integralnih jednačina može se sa izvesnim modifikacijama automatizovati. Za automatizaciju potrebno je obezbediti memoriju u kojoj bi bile smeštane računate ordinate nepoznate funkcije y/t/. Mašina bi za svaki ciklus integracije izračunala jednu ordinatu i smestila u odgovarajuću ćeliju memorije. Stanje memorije moralo bi se čitati u vremenu integracije. Ovo će biti pokazano na primeru automatskog rešavanja Fredholm-ove jednačine druge vrste. Ovde treba rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:

$$y(x_k) = F(x_k) + \lambda \sum_{i=1}^{n} y(T_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k, t)\,dt \qquad /59/$$

gde je nepoznata $y/x_k/$ sadržana i na desnoj strani jednačine /59/. Ranije je bilo reči o uslovima konvergencije ovakvog postupka rešavanja (§2 pod a.).

Blok šema za automatsko rešavanje sistema /59/ data je na sl.30.



Uredjaj za biranje odgovarajuće ćelije k, vršio bi i odredjivanje X-a, a samim tim i funkcija $K/x_k,t/$ i $F/t_k/$.

Pošto se sadržaj memorije uzima u svakom vremenu integracije, to se predhodno izračunata ordinata, uzima za računanje sledeće ordinate. Ovo odgovara Gauss - Seidel-ovom postupku rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina.

Na sličan način se može rešavati i Volterr-ine integralne jednačine druge vrste. Samo što se ovde može u izlazni sabirač dovoditi direktno funkcija $F/t/$, jer se vrednost ordinate $y/T_k/$ dobija pri očitavanju napona na izlaznom sabiraču za $t=t_k$.

Automatsko rešavanje integralnih jednačina prve vrste je nešto komplikovanije. Ovde se nemože dobiti vrednost $y/T_k/$ na izlazu iz sabirača, već treba omogućiti da veličina ordinate $y/T_k/$ u memoriji bude takva da je:

$$F(x_k) - \sum_{i=1}^{n} y(T_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(x_k, t)\,dt = 0 \qquad /60/$$

Ovo se može učiniti povećanjem vrednosti ordinate $y/T_k/$, za izvesnu konstantnu dovoljno malu veličinu ε, sve dotle dokle vrednost izraza, na levoj strani jednačine /60/, opada, zatim se prelazi na sledeću ordinatu itd.

Na sličan način bi mogle biti rešavane i Volterr-ine integralne jednačine prve vrste. Samo što ovde postupak ne bi bio iterativan.

G L A V A V

ANALIZA GREŠAKA I ISPITIVANJE OSETLJIVOSTI REŠENJA NA GREŠKE U REALIZACIJI FUNKCIJA NA REPETITIVNOM DIFERENCIJALNOM ANALIZATORU

Ovde će biti razmatrana greška u rešavanju integralnih jednačina na repetitivnom diferencijalnom analizatoru, posmatrajući uticaj svih grešaka, koje se na mašini mogu pojaviti, a prema blok šemi koje se koristi za rešavanje /sl.14/. Za razmatranje greške izabrana je Fredholm-ova jednačina druge vrste, jer se za ostale oblike integralnih jednačina na sličan način dolazi lako do uvida u grešku.

Greške pojedinih elemenata analizatora kao što su integratori, sabirači i dr. neće biti razmatrane ovde, pošto su greške ovih elemenata analizirane od strane drugih autora /17, 18, 19/.

a. Greška u nehomogenom članu integralne jednačine.

Posmatrajmo Fredholm-ovu jednačinu druge vrste.

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt \qquad /61/$$

Neka je funkcija F/x/ na mašini postavljena kao F_M/x/, tako da je:

$$F(x) = F_M(x) + \Delta F(x) \qquad /62/$$

gde je ΔF/x/ greška u pretstavljanju funkcije F/x/ na mašini. Neka je usled ove greške tačno rešenje

$$y(x) = y_M(x) + \Delta y(x) \qquad /63/$$

gde je $\Delta y(x)$ greška u rešenju $y_M(x)$ odredjenom na mašini. Na mašini se rešava jednačina

$$y_M(x) = F_M(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,y_M(t)\,dt \qquad /64/$$

umesto zadate jednačine /61/. Smenom /62/ i /63/ u /61/ dobija se

$$y_M(x) + \Delta y(x) = F_M(x) + \Delta F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left[y_M(t) + \Delta y(t)\right]dt \qquad /65/$$

./.

Uzimajući u obzir /64/ iz /65/ se dobija

$$\Delta y(x) = \Delta F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\Delta y(t)\,dt \qquad /66/$$

Iz /66/ se vidi da greška u rešavanju $\Delta y(x)$ može biti odredjena sa istom blok šemom, na sl.14, samo što umesto $F_M/x/$ treba uvesti $\Delta F(x)$. Na ovaj način se može otkloniti greška usled drifta kod dobijanja funkcije F/x/ na mašini. U bloku za dobijanje funkcije F/x/ treba dovesti početne uslove na nulu, na izlazu iz bloka dobija se greška usled drifta. Rešavanjem jednačine /66/ može se odrediti $\Delta y(x)$ u cilju korekcije rešenja.

Pre nego što se reši jednačina /66/ poželjno je ispitati uticaj greške $\Delta F(x)$ na rešenje. Zato treba prvo odrediti ΔF_{max} i dodati na $F_M/x/$, a zadržati ranije dobijeno rešenje $y_M/x/$ na mašini. Tako da za ocenu osetljivosti rešenja na grešku $\Delta F(x)$ služi jednačina

$$y_M(x) = F_M(x) \pm \Delta F_{max} + \lambda \int_a^b K(x,t)y_M(t)\,dt \qquad /67/$$

Promenom X-a u intervalu a kome je odredjeno rešenje $y_M/x/$ na izlaznom sabiraču se čita greška u trenutku t=b. U koliko je ova greška velika treba pomoću jednačine /66/ odrediti grešku u rešenju $\Delta y(x)$. Slična ocena uticaja greške na rešenje, može se izvršiti i za ocenu uticaja izvršene aproksimacije funkcije F/x/, u koliko je to učinjeno u cilju dobijanja ove funkcije iz linearnog dela analizatora.

b/ Greška u jezgru integralne jednačine

I ovde će biti posmatrana Fredholm-ova jednačina druge vrste

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt \qquad /67a/$$

Neka je jezgro K/x,t/ na mašini realizovano kao $K_M/x,t/$, tako da je:

$$K(x,t) = K_M(x,t) + \Delta K(x,t) \qquad /68/$$

i neka je:

$$y(x) = y_M(x) + \Delta y(x) \qquad /69/$$

Na mašini se rešava jednačina

$$y_M(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K_M(x,t) y_M(t)\, dt \qquad /70/$$

Smenom /68/ i /69/ u /67/ dobija se

$$y_M(x) + \Delta y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \left[K_M(x,t) + \Delta K(x,t)\right]\left[y_M(t) + \Delta y(t)\right] dt \qquad /71/$$

Uzimajući u obzir /70/ iz /71/ se dobija

$$\Delta y(x) = \lambda \int_a^b \Delta K(x,t)\, y_M(t)\, dt + \lambda \int_a^b \left[K_M(x,t) + \Delta K(x,t)\right] \Delta y(t)\, dt$$

i ako zanemarimo izraz $\Delta K(x,t)\, \Delta y(t)$ biće

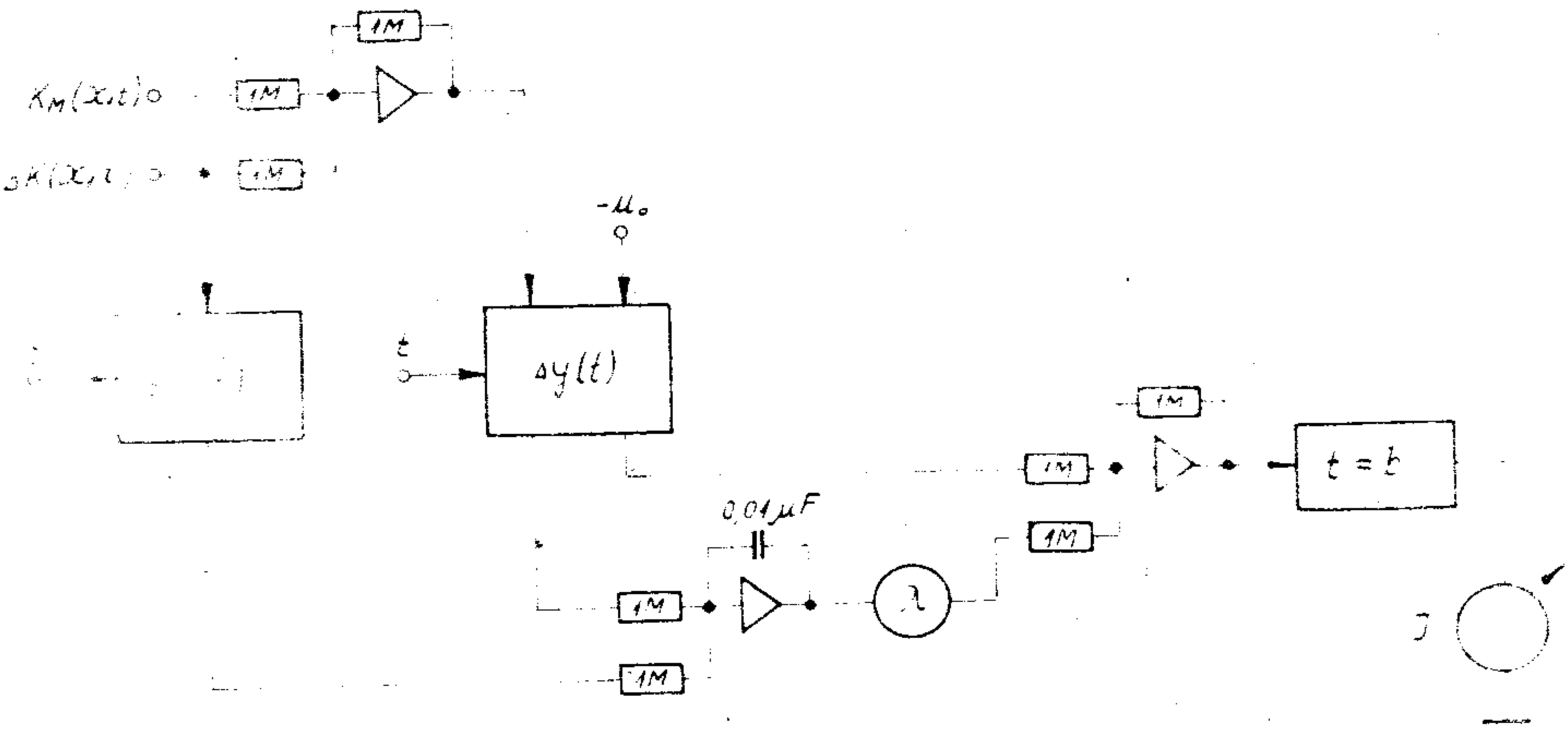
$$\Delta y(x) = \lambda \int_a^b \Delta K(x,t)\, y_M(t)\, dt + \lambda \int_a^b K_M(x,t)\, \Delta y(t)\, dt \qquad /72/$$

Greška u jezgru, $\Delta K(x,t)$ se i ovde dobija kao i za funkciju F/x/, samo što je sada funkcija dve nezavisno promenljive. Pre nego što se reši jednačina /72/ treba oceniti uticaj greške $\Delta K(x,t)$ na rešenje y_M/x/. Na mašini se postavi umesto K_M/x,t/ funkcija $K_M(x,t) \pm \Delta K_{max}$, a zadrži ranije odredjeno rešenje y_M/x/, tako da se dobija

$$y_M(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \left[K(x,t) \pm \Delta K_{max}\right] y_M(t)\, dt \qquad /73/$$

Menjajući x u intervalu u kome je odredjeno rešenje y_M/x/ na izlaznom sabiraču se čita greška za t=b. U koliko je ova greška mala nije potrrbno rešavati jednačinu /72/, jer je uticaj greške $\Delta K(x,t)$ na rešenje zanemarljiv. U koliko je greška velika moguće je rešavanjem jednačine /72/ odrediti $\Delta y(x)$.

Blok šema za reša-vanje jednačine /72/ data je na sl.31.



Sl. 31

Sa sl.31 se vidi da je potrebno zadržati na mašini i rešenje $y_M/x/$. Kako je jednačina /70/ prethodno rešena na mašini to na generatoru funkcija, već postoji $y_M/t/$ i treba samo dovesti $\Delta K(x,t)$ i na izlazu se dobija $\Delta K(x,t)\, y_M(t)$.

Ako se vrši aproksimacija jezgra $K/x,t/$ sa funkcijama koje se lako dobijaju na mašini, tako da je

$$K(x,t) = K_a(x,t) + \Delta K(x,t)$$

onda posle ocene ΔK_{max}, može se pomoću jednačine /73/ oceniti greška usled učinjene aproksimacije. Na mašini se može takodje lako oceniti kako izvršena stepenasta aproksimacija aproksimira traženo rešenje. Kada se odredi rešenje $y_M/x/$, treba menjati x kontinualno u intervalu $a \le x \le b$, i na izlaznom sabiraču čitati grešku usled izvršene stepenaste aproksimacije.

c. Greška u postavljanju parametra λ

Neka kod postavljanja jednačine

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt \qquad /74/$$

parametar λ bude postavljen kao λ_M i tako da je

$$\lambda = \lambda_M + \Delta\lambda \qquad /75/$$

i odredjeno rešenje $y_M(x)$, tako da je

$$y(x) = y_M(x) + \Delta y(x) \qquad /76/$$

Na mašini se rešava jednačina /74/ u obliku

$$y_M(x) = F(x) + \lambda_M \int_a^b K(x,t)\, y_M(t)\, dt \qquad /77/$$

smenom /75/ i /76/ u /74/ i uzimajući u obzir /77/ dobija se

$$\Delta y(x) = \Delta\lambda \int_a^b K(x,t)\, y_M(t)\, dt + (\lambda_M + \Delta\lambda) \int_a^b K(x,t)\, \Delta y(t)\, dt \qquad /78/$$

Ako se u /78/ zanemare greške drugog reda, biće

$$\Delta y(x) = \Delta\lambda \int_a^b K(x,t)\, y_M(t)\, dt + \lambda_M \int_a^b K(x,t)\, \Delta y(t)\, dt \qquad /79/$$

Najčešće nije potrebno rešavati jednačinu /79/, već je dovoljno oceniti uticaj greške $\Delta\lambda$ na rešenje pomoću jednačine

$$y_M(x) = F(x) + (\lambda_M \pm \Delta\lambda) \int_a^b K(x,t)\, y_M(t)\, dt \qquad /80/$$

Menjajući x u intervalu $[a, b]$ na izlaznom sabiraču se čita greška u trenutku t=b.

d. Greška u gornjoj granici integrala

Pored svih pomenutih grešaka može se dogoditi i greška u gornjoj granici integrala, tj. da na izlaznom sabiraču ne bude izabrano vreme t=b, već t=b_M, tako da je

$$b = b_M + \Delta b \qquad /81/$$

i da je

$$y(x) = y_M(x) + \Delta y(x) \qquad /82/$$

Na mašini je, u ovom slučaju, rešavana jednačina

$$y_M(x) = F(x) + \lambda \int_a^{b_M} K(x,t)\, y_M(t)\, dt \qquad /83/$$

Smenom /81/ i /82/ u /74/ i uzimajući u obzir /83/ dobija se

$$\Delta y(x) = \lambda \int_{b_M}^{b_M+\Delta b} K(x,t)\, y_M(t)\, dt + \lambda \int_a^{b_M+\Delta b} K(x,t)\, \Delta y(t)\, dt \qquad /84/$$

i ako se u /84/ zanemari

$$\int_{b_M}^{b_M+\Delta b} K(x,t)\, \Delta y(t)\, dt$$

dobija se

$$\Delta y(x) = \lambda \int_{b_M}^{b_M+\Delta b} K(x,t)\, y_M(t)\, dt + \lambda \int_a^{b_M} K(x,t)\, \Delta y(t)\, dt \qquad /85/$$

Kako je odredjivanje trenutka očitavanja na izlaznom sabiraču tačnosti do 1%, to je ova greška za analognu tehniku najčešće bez značaja.

Ako se želi oceniti osetljivost rešenja na ovu grešku, treba na mašini postaviti jednačinu

$$y_M(x) = F(x) + \lambda \int_a^{b_M \pm \Delta b_{max}} K(x,t)\, y_M(t)\, dt \qquad /86/$$

i menjajući x u intervalu $[a,b]$ očitati grešku u trenutku $t=b_M \pm \Delta b_{max}$.

GLAVA VI

ANALIZA DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA LINEARNIH SISTEMA, REŠAVANJE INTEGRALNE JEDNAČINE PRVE VRSTE FREDHOLM-OVOG TIPA

a. Uvod

Za odredjivanje dinamičkih karakteristika linearnih sistema dovoljno je poznavati odziv sistema na impulsnu ili neku drugu karakterističnu funkciju. Medjutim, u mnogim slučajevima se nemogu ispitivati dinamičke karakteristike sistema dovodjenjem impulsne funkcije na ulaz sistema. Takav je slučaj kod sistema kod kojih nema smisla dovodjenje impulsne funkcije na ulaz, jer usled inercije nisu sposobni da reaguju na impulsnu ulaznu funkciju. Još češći slučaj je kada treba ispitivati dinamičke karakteristike sistema koji je već u radu, i dovodjenje impulsne funkcije na ulaz poremetilo bi red sistema. U ovakvim slučajevima može se primeniti statistički metod odredjivanja dinamičkih karakteristika linearnih sistema.

b. Odziv sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju

Neka je na ulaz linearnog sistema/sl.32/, sa jednim ulazom i izlazom, dovedena proizvoljna funkcija $u(t)$.

Sl. 32

Pretstavljajući funkciju $u(t)$ u vidu sume impulsa, od kojih svaki ima širinu Δt_i i visinu $u(t_i)$ može se približno napisati:

$$u(t) \cong \sum_{i=-n}^{n} u(t_i)\,\delta(t-t_i)\,\Delta t_i \qquad /87/$$

gde je $\delta(t)$ Dirakova funkcija definisana sa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_i)\,dt = 1$$

i

$$\delta(t-t_i) = 0 \qquad \text{za} \quad t \neq t_i$$

Kako je reč o linearnim sistemima to se odziv sistema na funkciju /87/ može shvatiti kao suma odziva na svaki impuls pojedinačno, pa je:

$$i(t) = \sum_{i=-n}^{n} u(t_i)\,g(t-t_i)\,\Delta t_i \qquad /88/$$

gde je $g(t)$ odziv sistema na ulaznu impulsnu funkciju.

Ako se u /88/ pusti da $\Delta t_i \to 0$ onda se može napisati:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \qquad /89/$$

Kako je:

$$g(t-\tau) = 0 \qquad \text{za} \quad t < \tau$$

to je iz /88/:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \qquad /90/$$

Smenom $t-\tau = s$ iz /90/ se dobija:

$$i(t) = -\int_{+\infty} g(s)\,u(t-s)\,ds \qquad /91/$$

ili

$$i(t) = \int_{0}^{\infty} u(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau \qquad /92/$$

Iz relacije /92/ se vidi da je lako dobiti odziv na proizvoljnu funkciju, ako je poznat impulsni odziv sistema.

Kako je pokazano u § 9 pod a, rešavanje integrala /92/, je moguće na mašini za stabilne sisteme, pošto

$$\lim_{t \to \infty} g(t) \to 0$$

tako da se može uzeti gornja granica integrala, kao konačna.

c. Uvid u dinamičke karakteristike sistema, poznavanjem impulsnog odziva sistema.

Iz poznatog impulsnog odziva sistema, $g(t)$, lako se dobija odziv sistema na step funkciju, $c(t)$, definisanu sa:

$$c(t-t_i)=0 \qquad za \quad t<t_i$$

i

$$c(t-t_i)=1 \qquad za \quad t \geq t_i$$

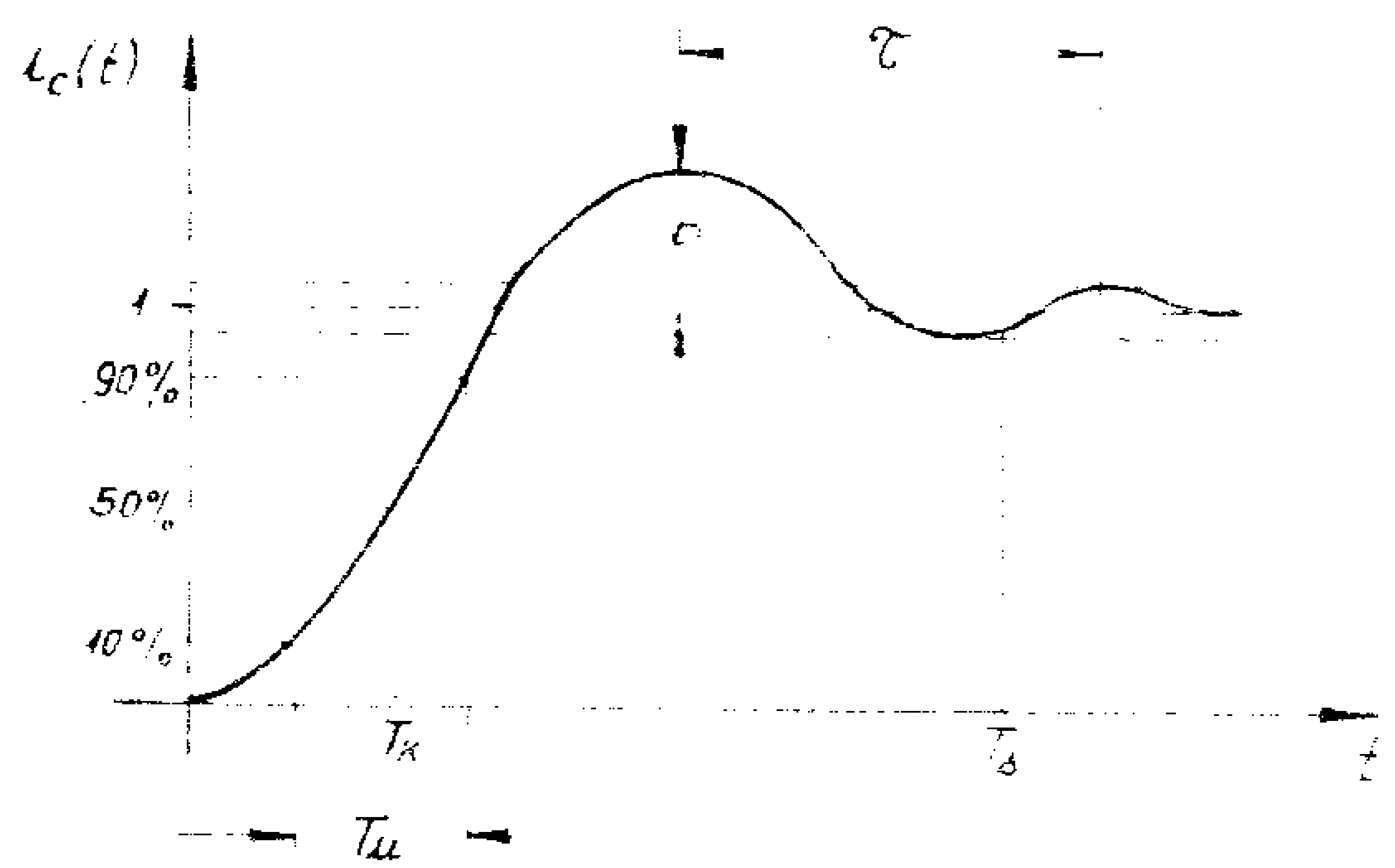
Stavljanjem

$$u(t-\tau)=1 \qquad za \quad t>\tau$$

u relaciju /92/ dobija se

$$i_c(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau \qquad /93/$$

gde je $i_c(t)$ odziv sistema na step funkcije. Odziv sistema na step funkciju za linearne stabilne sisteme dat je na /sl.33/.



Sl. 33

gde je:

p - preskok i definiše se kao razlika izmedju prvog maksimuma i granične vrednosti izražena u procentima od granične vrednosti.

T_k - vreme kašnjenja i definiše se kao vreme za koje odskodni odziv dostigne polovinu granične vrednosti.

T_u - vreme uspona se definiše kao vreme potrebno da odziv predje od 10% do 90% granične vrednosti ili kao recipročna vrednost nagiba tangente u trenutku T_k.

T_s - vreme smirenja i definiše se kao vreme potrebno da amplituda oscilacija opadne na vrednost manju od 5% od granične vrednosti.

τ - Perioda oscilacija i definiše se kao vremenski razmak izmedju dva sukcesivna maksimuma.

Od dinamičkih karakteristika sistema za stabilnost je najvažniji preskok. Pored uticaja na stabilnost važan je i sa gledišta tačnosti u prelaznom periodu.

Vreme kašnjenja ukazuje na vreme za koje se pojavljuje primetan signal na izlazu sistema.

Vreme uspona je značajno, jer stoji u vezi sa izobličenjem signala kod servosistema, sa porastom vremena uspona povećava se izobličenje signala.

d. Korelaciona i kros-korelaciona funkcija ulaza i izlaza

Neka se na ulaz linearnog sistema sa konstantnim parametrima dovodi stacionarna slučajna funkcija $u_s(t)$ i neka je $i_s(t)$ stacionarna slučajna funkcija na izlazu iz sistema /sl.34/: onda se korelaciona funkcija ulaza $u_s(t)$ može izračunati kao:

$$\mathcal{K}_u(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T u_s(t)\, u_s(t-\tau)\, dt \qquad /94/$$

Sl 34

a kros-korelaciona funkcija ulaza i izlaza kao:

$$K_{iu}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T} i_s(t)\,u_s(t-\tau)\,dt \qquad /95/$$

Izraz /95/ se dobija ako se u definiciji korelacione funkcije za slučajnu funkciju $u_s(t)$, unese svojstvo ergodičnosti stacionarnih slučajnih procesa.

Prema definiciji korelaciona funkcija je matematičko očekivanje proizvoda vrednosti slučajne funkcije za dva trenutka vremena t_1 i t_2. Označimo $t_1-t_2=\tau$, onda je:

$$K_u(\tau)=M\left\{\left[u_s(t)-m_{ou}\right]\left[u_s(t-\tau)-m_{ou}\right]\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_{s1}-m_{ou}\right)\left(u_{s2}-m_{ou}\right)W_2(u_{s1},u_{s2},\tau)\,du_{s1}\,du_{s2} \qquad /96/$$

gde je:

m_{ou} - matematičko očekivanje za slučajnu funkciju $u_s(t)$,

dato sa:

$$m_{ou}=\int_{-\infty}^{+\infty} u_s\, w(u_s)\,du_s$$

za stacionarne slučajne procese je: $m_{ou}=const.$

$W_2(u_{s1},u_{s1},\tau)$ - funkcija raspodele verovatnoća, tako da $W_2(u_{s1},u_{s2},\tau)du_{s1}du_{s2}$ predstavlja verovatnoću toga, da se u_{s1} nadje u intervalu u_{s1} i $u_{s1}+du_{s1}$ a u_{s2} u intervalu u_{s2} i $u_{s2}+du_{s2}$

ako su ova dva intervala odvojeni jedan od drugog za τ.

Kako stacionarni slučajni procesi imaju svojstvo ergodičnosti, to se iz /96/ dobija:

$$K_u(\tau) \approx \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left[u_s(t)-m_{ou}\right]\left[u_s(t-\tau)-m_{ou}\right]dt \qquad /97/$$

gde T treba izabrati dovoljno veliko.

Uzimajući u /97/ da je $m_{ou}=0$, i posmatrajući integral samo za pozitivan vremenski integral dobija se:

$$K_u(\tau) \cong \frac{1}{T}\int_{0}^{T}u_s(t)\,u_s(t-\tau)\,dt$$

a što je oblik /94/ za korelacionu funkciju ulaza.

Na sličan način se može pokazati da za dve slučajne funkcije $u_s(t)$ i $i_s(t)$ kros-korelaciona funkcija definisana sa

$$K_{iu}(\tau) = M\left\{\left[i_s(t)-m_{oi}\right]\left[u_s(t-\tau)-m_{ou}\right]\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[i_s(t)-m_{oi}\right]\left[u_s(t-\tau)-m_{ou}\right]w\,(i_s,u_s,\tau)\,di_s\,du_s \qquad /98/$$

postaje:

$$K_{iu}(\tau) \cong \frac{1}{T}\int_{0}^{T} i_s(t)\,u_s(t-\tau)\,dt$$

kada su u /98/ uzme u obzir osobina ergodičnosti stacionarnih slučajnih procesa, i stavi da je

$$m_{oi} = 0$$

$$m_{ou} = 0$$

kao i samo pozitivan vremenski interval.

Računanje korelacionih i kros-korelacionih funkcija po formalisma /94/ i /95/ može se izvršiti na više načina. Jedan od načina je i numeričko rešavanje integrala. Sa obzirom na to da su slučajne funkcije najčešće zadate grafički i da je vreme integracije veliko u integralima /94/ i /95/ posao oko računanja je veliki. Zato se tražilo rešenje za mašinsko računanje korelacionih funkcija. Specijalne mašine izgradjene u cilju računanja korelacionih funkcija zovu se korelatori.

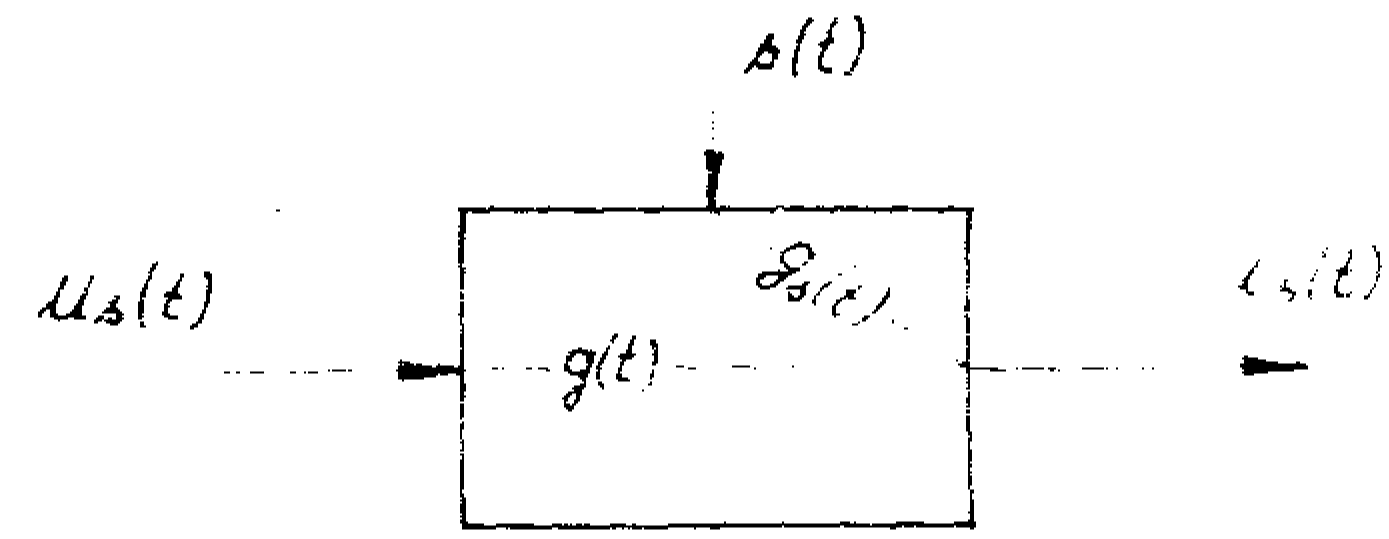
e. Statistički metod odredjivanja impulsnog odziva sistema.

Posmatrajmo linearan sistem na sl.34. Prema /92/ odziv sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju $u_s(t)$ je:

$$i_s(t)=\int_0^\infty u_s(t-p)\,g(p)\,dp \qquad /99/$$

Medjutim, ako unutar samog sistema postoje izvori šuma i smetnji $s(t)$, koji se prenose na izlaz sistema /sl.35/, onda je izlaz sistema odredjen sa:

$$i_s(t)=\int_0^\infty u_s(t-p)\,g(p)\,dp+\int_0^\infty s(t-p)\,g_s(p)\,dp \qquad /100/$$



Sl.35

gde je $g_s(p)$ impulsni odziv sistema, od ulaza šuma $s(t)$ do izlaza sistema.

Kako je $s(t)$ i $g_s(t)$ za sistem nepoznato to je jasno da je primena statističkih metoda neophodna za nalaženje dinamičkih karakteristika sistema.

Kros-korelaciona funkcija izlaza i ulaza u sistem je odredjena prema /95/ sa

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T i_s(t)u_s(t-\tau)dt \qquad /101/$$

unoseći u /101/ relacija /100/ za $i_s(t)$ dobija se:

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau) \approx \frac{1}{T}\int_0^T\left[\int_0^\infty u_s(t-p)g(p)dp + \int_0^\infty s(t-p)g_s(p)dp\right]u_s(t-\tau)dt \qquad /102/$$

Is relacije /102/ se lako odredjuje:

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau) = \int_0^\infty g(p)\left[\frac{1}{T}\int_0^T u_s(t-p)u_s(t-\tau)dt\right]dp + \int_0^\infty g_s(p)\left[\frac{1}{T}\int_0^T s(t-p)u_s(t-\tau)dt\right]dp \qquad /103/$$

Kako je:

$$\mathcal{K}_u(\tau-p) \cong \frac{1}{T}\int_0^T u_s(t-p)u_s(t-\tau)dt \qquad /104/$$

i

$$\mathcal{K}_{su}(\tau-p) \cong \frac{1}{T}\int^T s(t-p)u_s(t-\tau)dt \qquad /105/$$

to smenjujući /104/ i /105/ u /103/ dobija se:

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau) = \int_0^\infty \mathcal{K}_u(\tau-p)g(p)dp + \int_0^\infty \mathcal{K}_{su}(\tau-p)g_s(p)dp \qquad /106/$$

Ako u /106/ pretpostavimo da je unutrašnji šum $s(t)$ nezavisan od spoljašnjeg dejstva $u_s(t)$, onda je

$$\mathcal{K}_{su}(\tau) = 0 \qquad /107/$$

pa /106/ daje:

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau) = \int_0^\infty \mathcal{K}_u(\tau-p)g(p)dp \qquad /108/$$

Jednačina /108/ je analogna jednačini /92/, gde treba korelacionu funkciju ulaza smatrati kao ulazni signal, a kros-korelacionu funkciju ulaza i izlaza kao izlazni signal iz sistema.

Jednačina /108/ je vrlo važna, jer omogućuje odredjivanje impulsnog odziva sistema, bez dovodjenja impulsa na ulaz sistema, a preko korelacione funkcije ulaza i kros-korelacione funkcije ulasa i izlaza.

Pošto oko odredjivanja impulsnog odziva sistema, na predložen način, zahteva sledeću radnju:

- snimanje slučajnih procesa na ulazu i izlazu sistema.
- računanje korelacione funkcije ulaznog signala, i kros-korelacione funkcije ulaza i izlaza
- rešavanje integralne jednačine /108/ po $g(p)$.

f. Odredjivanje impulsnog odziva sistema, rešavanjem integralne jednačine prve vrste Fredholm-ovog tipa na repetitivnom diferencijalnom analizatoru

Integralna jednačina /108/ se svodi na linearnu integralnu jednačinu prve vrste Fredholm-ovog tipa, ako se ima u vidu da je za stabilne linearne sisteme:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) \to 0$$

i da se može uzeti da je:

$$g(t) \approx 0 \quad za \ t > T$$

tako da jednačina /108/ postaje:

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau) = \int_0^T \mathcal{K}_u(\tau - p)\, g(p)\, dp \qquad /109/$$

Kako je pokazano u § 1 pod b. ova jednačina dovodi do sistema linearnih algebarskih jednačina:

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau_K) = \sum_{i=1}^{n} g(\tau_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{K}_u(\tau_K - t)\, dt \qquad /110/$$

gde je izvršena smena $p = t$ i $t_0 = 0$; $t_n = T$.

Rešljivost sistema /110/ zavisi od oblika korelacione funkcije. Zato će ovde biti pomenute neke osobine korelacionih

./.

funkcija, koje čine da sistem /110/ bude lako rešljiv na mašini:

1/ Korelaciona funkcija $\mathcal{K}(\tau)$ slučajne funkcije sa srednjom vrednošću ravnoj nuli teži nuli kada τ teži beskonačnosti

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathcal{K}(\tau) \to 0 \qquad /111/$$

2/ Početna vrednost K/o/ korelacione funkcije $K/\tau/$ jednaka je srednjoj vrednosti kvadrata slučajne funkcije, pa je prema tome uvek pozitivna.
Iz /96/ sledi za $\tau = 0$ i $m_{ou} = 0$ da je:

$$\mathcal{K}(0) = M\left[u_1^2(t)\right] \qquad /112/$$

i prema /97/ je:

$$\mathcal{K}(0) \approx \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u_1^2(t)\,dt = \overline{u_1^2(t)} \qquad /113/$$

gde je sa $\overline{u_1^2(t)}$ označena srednja vrednost kvadrata slučajne funkcije $u_1(t)$.

3/ Korelaciona funkcija $\mathcal{K}(\tau)$ je parna funkcija od τ, tj.

$$\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(-\tau) \qquad /114/$$

Ovo tvrdjenje sledi iz sledećeg

$$\mathcal{K}(\tau) = \overline{x(t+\tau)x(t)} = \overline{x(t)x(t-\tau)} = \mathcal{K}(-\tau)$$

4/ Vrednost korelacione funkcije $\mathcal{K}(\tau)$ za ma koje τ ne može biti veća od početne vrednosti $\mathcal{K}(0)$, tj.

$$\mathcal{K}(0) \geq |\mathcal{K}(\tau)| \qquad /115/$$

Ovo se može dokazati polazećiod nejednakosti

$$\left[u_1(t) \pm u_1(t+\tau)\right]^2 \geq 0 \qquad /116/$$

ili

$$u_1^2(t) + u_1^2(t+\tau) \geq \mp 2u_1(t)u_1(t+\tau) \qquad /117/$$

uzimajući srednje vrednosti po vremenu u /117/ na osnovu osobine 2, dolazi se do relacije /115/.

Dijagonalni koeficijenti u sistemu /110/ su uz nepoznatu $g(\tau_K)$ i iznose:

$$\int_{t_{K-1}}^{t_K} \mathcal{K}_u(\tau_K - t)\,dt \qquad /118/$$

kako $\tau_K \in [t_K, t_{K-1}]$ i kako je $t_K - t_{K-1}$ vrlo mali broj to je:

$$\tau_K - t \approx 0 \quad za \quad t_K \leq t \leq t_{K-1}$$

pa sledi prema osobini korelacione funkcije

$$\mathcal{K}(0) \geq |\mathcal{K}(\tau)|$$

da su dijagonalni koeficijenti veći od ostalih kojeficijenata sistema.

Na osnovu iznetih osobina korelacionih funkcija vidi se da je njihovo generiranje, na generatorima funkcija za repetitivne diferencijalne analizatore, lako ostvarljivo. Tačnost njihovog generiranja je dvostruko veća s obzirom da su korelacione funkcije parne. Na osnovu ovoga se vidi da je rešavanje integralne jednačine /109/ po postupku predloženom u § 5 pod a. moguće, i da su sistemi /110/ dobro rešljivi.

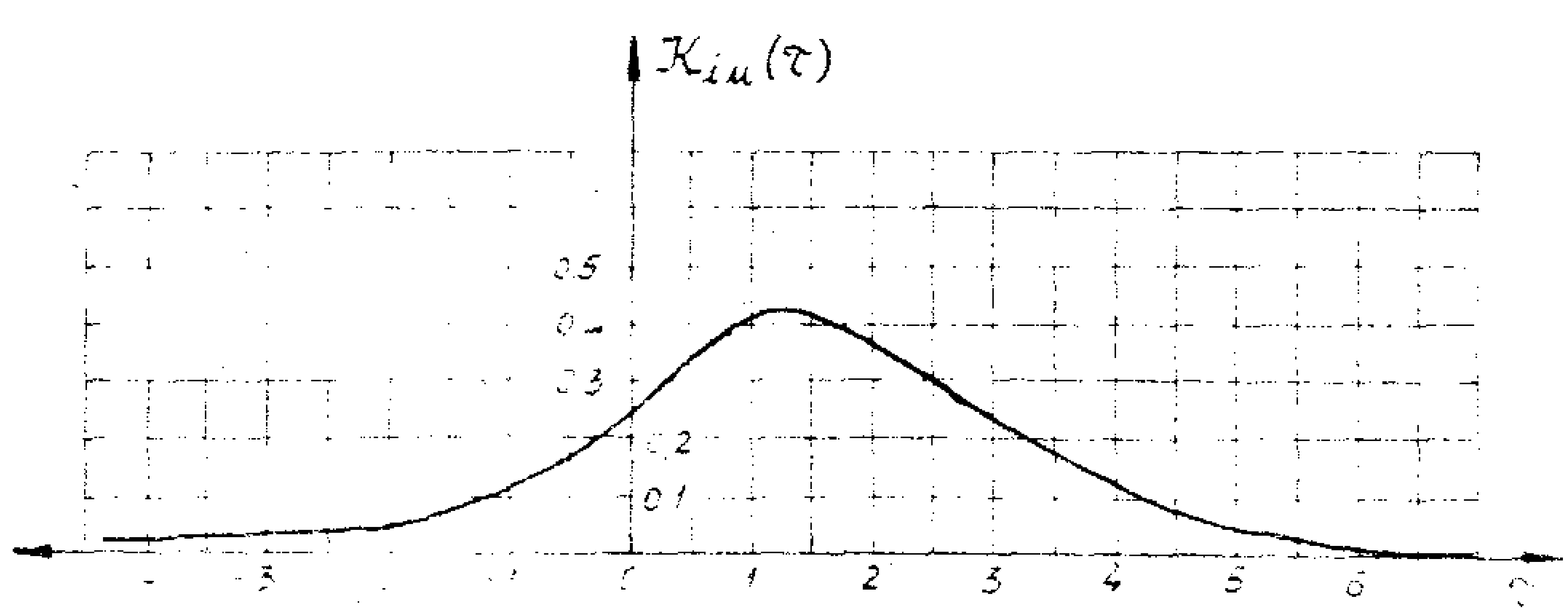
Primer

Za ilustraciju predloženog postupka dobijenja impulsnog odziva sistema rešavanjem integralne jednačine /109/ na repetitivnom diferencijalnom analizatoru biće reden sledeći primer:

Neka je korelaciona funkcija ulaznog signala

$$\mathcal{K}_u(\tau) = e^{-|\tau|} \qquad /119/$$

i neka je kros-korelaciona funkcija ulaza i izlaza $\mathcal{K}_{iu}(\tau)$ data grafički na slici 36.



Sl. 36

Treba odrediti impulsni odziv sistema na repetitivnom diferencijalnom analizatoru.

Integralna jednačina /109/ za ovaj primer ima oblik:

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau)=\int_0^5 e^{-|\tau-t|}g(t)\,dt \qquad /120/$$

gde je uzeto da je T=5 sek. Funkcija $\mathcal{K}_{iu}(\tau)$ je zadata grafički na slici 36.

Jednačina /120/ dovodi prema /110/ do sistema linearnih algebarskih jednačina

$$\mathcal{K}_{iu}(\tau_k)=\sum_{i=1}^{20} g(\tau_i)\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-|\tau_k-t|}\,dt \qquad /121/$$

gde je prema /110/, uzeto n=20. Prema tome /121/ prestavlja sistem od 20 jednačina sa 20 nepoznatih $g(\tau_i)$, $i=1,2,\ldots,20$.

Za realizaciju jezgra

$$\mathcal{K}(\tau,t)=e^{-|\tau-t|} \qquad /122/$$

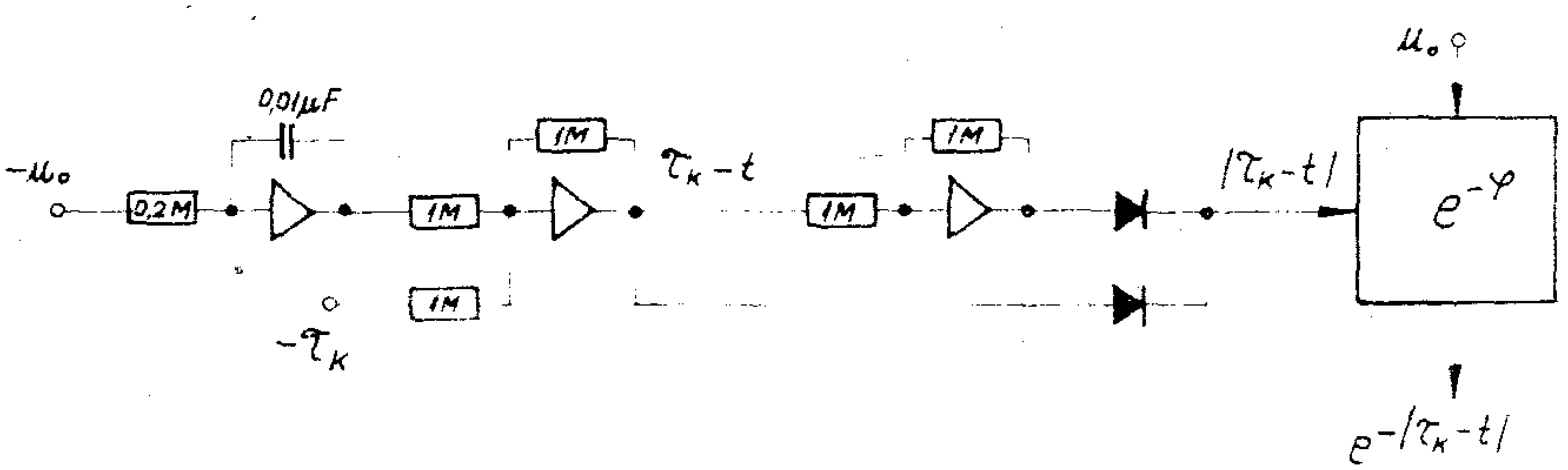
prema § 4 pod b treba staviti

$$\varphi(\tau,t)=|\tau-t| \qquad /123/$$

i

$$\mathcal{K}(\varphi)=e^{-\varphi} \qquad /124/$$

Šema veze elemenata za realizaciju jezgra /122/ data je na slici 37.

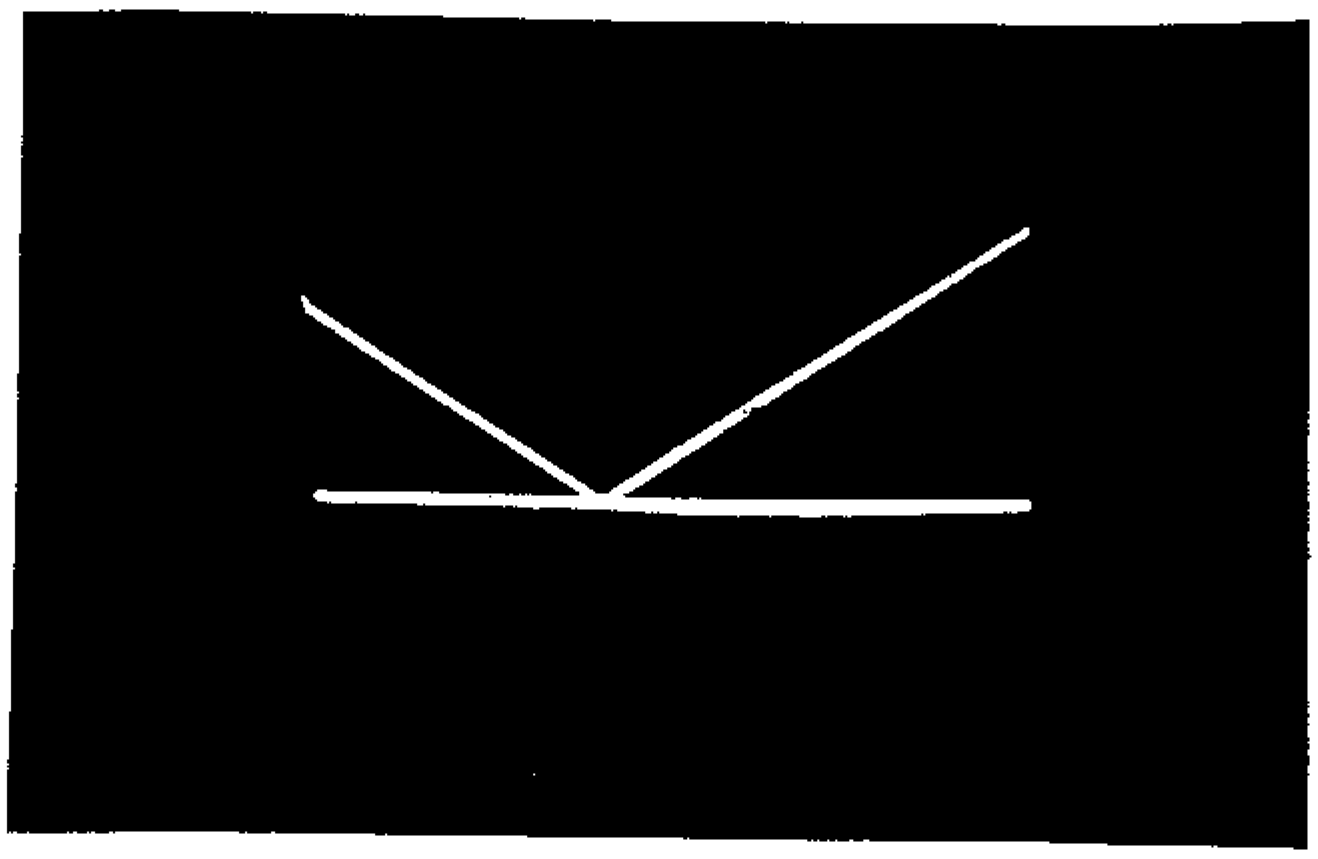


Sl. 37

Naponski oblik funkcije

$$\varphi(\tau, t) = |\tau - t|$$

snimljen sa ekrana katodnog osciloskopa, za $\tau_K = 2$, dat je na slici 38.



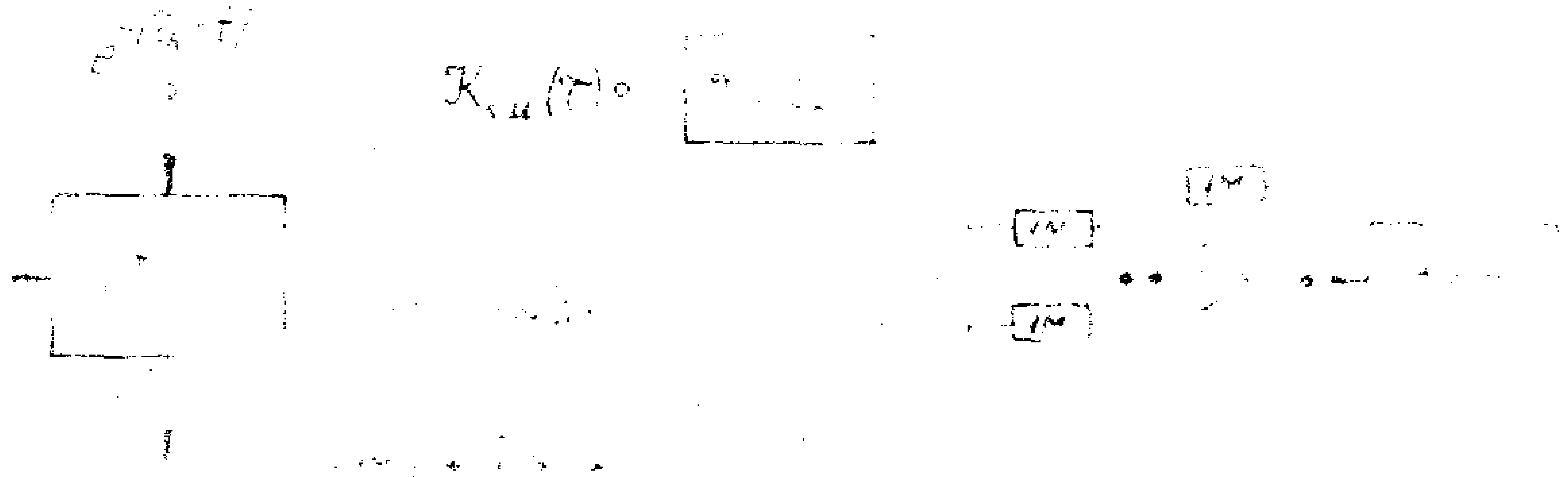
sl. 38

Blaz iz generatora funkcija, koji predstavlja funkciju $e^{-|\tau_K - t|}$, stepenasto aproksimiranu, snimljen sa ekrana katodnog osciloskopa dat je na sl. 39.

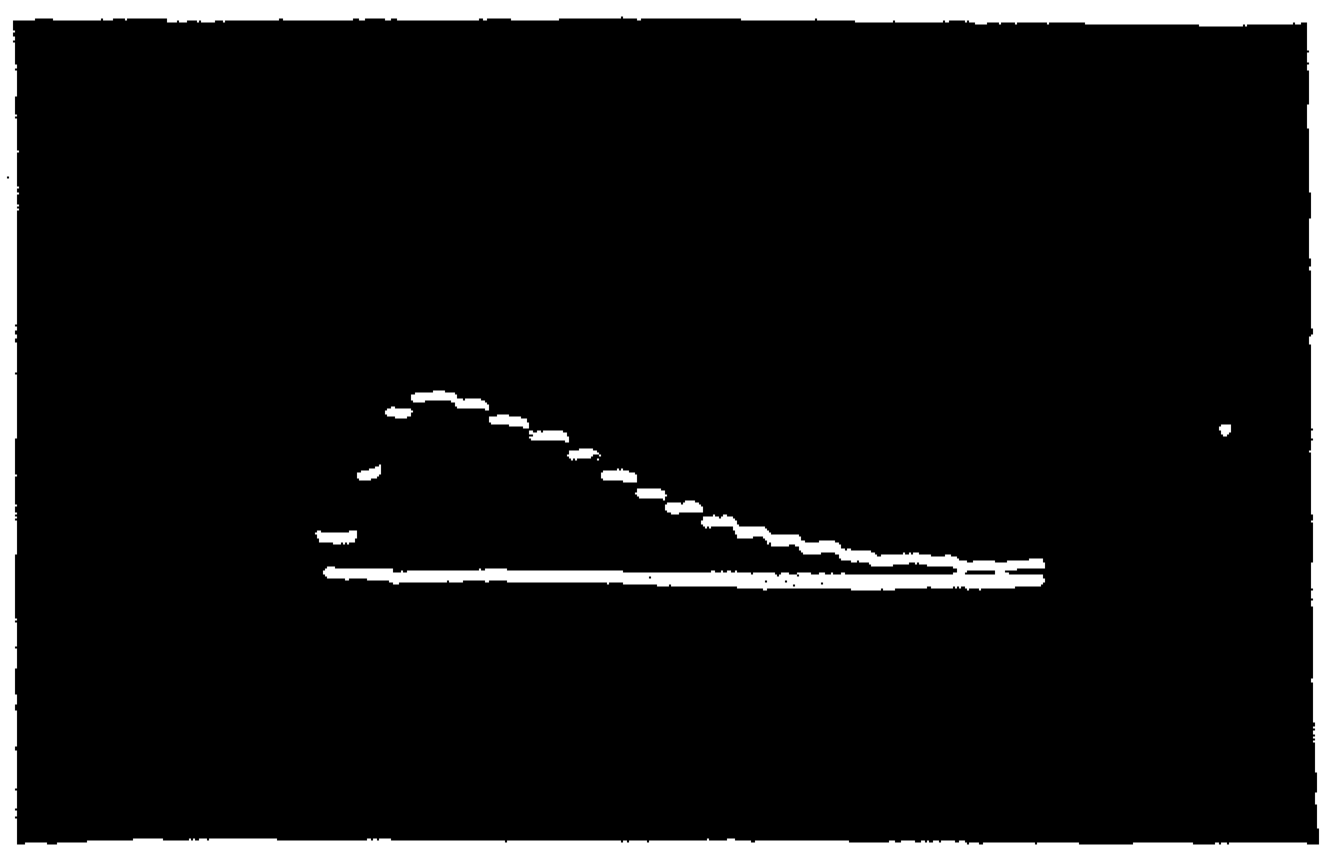
sl. 39

Tačnost generiranje funkcije $e^{-|\tau_K - t|}$ je dvostruko veća sa obzirom da je funkcija simetrična u odnosu na pravu $t = \tau_K$.

Blok šeme za rešavanje sistema jednačina/121/ data je na slici 40.

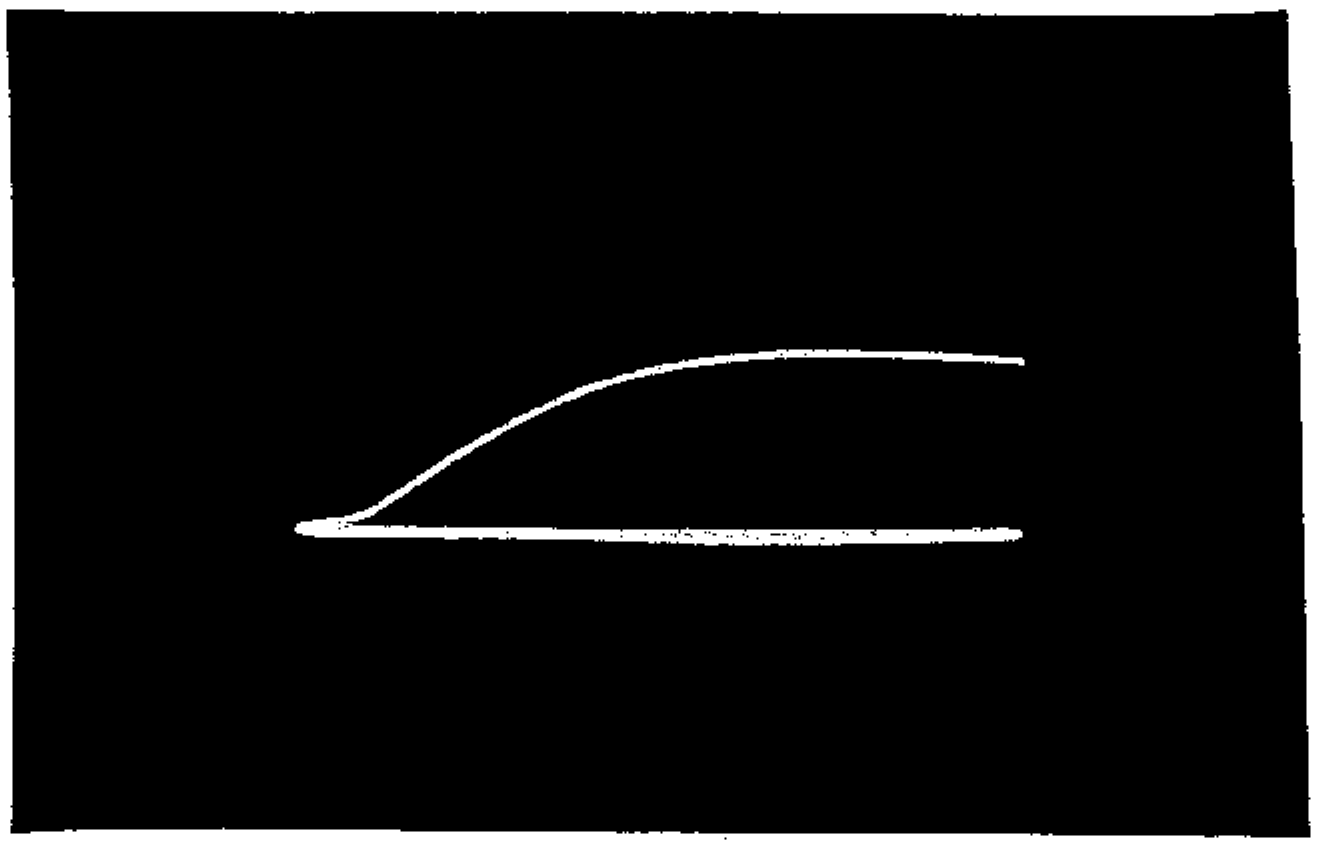


Postupak rešavanja je objašnjen u § 5 pod a. Rešenje dobijeno na analizatoru dato je na sl. 41.



sl. 41

Integriranjem rešenja $g^*(t)$ dobija se linearno aproksimirani odziv sistema na step funkciju /glava VI pod b/. Ovako dobijen step odziv sistema dat je na sl. 42.



sl. 42

Iz slike 42 se vidi da je sistem aperiodično stabilan.

Z A K L J U Č A K

U ovom radu je izložen postupak za rešavanje linearnih integralnih jednačina Fredholm-ovog i Volterr-inog tipa prve i druge vrste, na repetitivnom diferencijalnom analizatoru. Postupak ne zahteva izgradnju specijalnih uredjaja, već koristi standardne elemente analogne tehnike. Pored poznatog načina rešavanja integralnih jednačina metodom Fredholm-a, prevodjenjem integralne jednačine u sistem linearnih algebarskih jednačina, izložen je postupak za rešavanje integralnih jednačina Volterr-inog tipa (§3 i §7), koji je vrlo pogodan za primenu na analognim računskim mašinama. Realizacija jezgra integralnih jednačina je vršena na linearnom delu analizatora, kao i korišćenjem nelinearnih elemenata.

Pokazano je da se ista analogna tehnika može iskoristiti za rešavanje i drugih matematičkih problema /glava III, §8 i §9/.

Praktična potreba rešavanja integralnih jednačina sa analognom računskom tehnikom se naročito ističe u statističkoj metodi analize dinamičkih karakteristika linearnih sistema. Pre svega zato što su funkcije koje figurišu u integralnoj jednačini, koju treba rešiti, zadate grafički i vrlo lako se generiraju, na generatorima funkcija za elektronske analogne mašine. U radu je istaknuto da se integralna jednačina, koja se dobija kod statističke metode odredjivanja dinamičkih karakteristika linearnih sistema, može lako rešiti na predložen način, jer se problem svodi na reša vanje integralne jednačine Fredholm-ovog tipa prve vrste.

REFERENCA

1. N. Parezanović: "Frequency Characteristic Determination from the System Pulse Response, by the Use of a Repetitive Differential Analyser". III-ća medjunarodna konferencija za analogni račun, septembar 1961 god., Opatija.

2. P. Madić, J. Petrić, and N. Parezanović: "The Use of a Repetitive Differential Analyzer for Finding Roots of Polynomial Equations". IRE Trans. on Electronic Computers, 8 /1959/

3. R. Tomović and N. Parezanović: "Solving Integral Equations on a Repetitive Differential Analyzer". IRE Trans. on Electronic Computers, 9/1960/.

4. N. Parezanović: "Solving of Integral Equations on a Differential Analyzer by Fredholm's method", Bull. Inst. Nucl. Sci" "Boris Kidrich", 2/1961/.

5. T.S. Gray: "Photoelectric Integraph". Jour. of the Franklin Inst., 212, 1/1931/.

6. P.A. Tee: "Mechanical Integraph for the Numerical Solution of Integral Equations". Jour. of the Franklin Inst., 245, 5/1948/.

7. H.Wollman: "An Electronic Integral - transform Computer and the Practical Solutions of Integral Eyuations.". Jour. of the Franklin Inst., 250, 45/1950/.

8. M. Fisher: "On the Continuous Solution of Integral Equations by an Electronic Analogue." Proc. Cambridge Phil. Soc.53, 162 /1957/.

9. J.S. Valdenberg: "Uredjaji za rešavanje jedne klase integralnih jednačina" Automatika i telemehanika, 8/1958/.

10. R. Tomović: "A Versatile Electronic Function Generator". Jour. of the Franklin Inst., 257, 109 /1954/.

./.

11. R. Tomović and D. Mitrović: "Some Experiences with a Repetitive Differential Analyser". Bull. Inst. Nucl. Sci. "Boris Kidrič", 8, 109 /1958/

12. R. Tomović, P. Madić: "Function Approximation by Integration", Bull. Inst. Nucl.Sci."Boris Kidrič", Belgrade, 10, 93 /1960/.

13. Macne: "Some Limitions on the Accuracy of Electronic Differential Analyzers". Proc. IRE, 40 /1952/.

14. Paul C Dow: "An Analyzis of certain Errors in Electronic Differential Analysers ". Trans. IRE, 6 /1957/.

15. N. Parezanović and M. Dujmović: "Improvements of the Tapped - Potentiometer Function Genera tors". IRE Trans., Februar,1962, biće publikovano.

16. Dm Mitrović: "Sur certaines applications des organes a fonctionnement discontinu dans le calcul analogique". Bull. Inst. Nucl. Sci. "Boris Kidrich" 4, 50/1954/.

17. Macne, Murray: "A Mathematical Basis for an Effor Analysis of Differential Analyzers". Jour. of Mathem. and Phys., 32,136/1953/

18. Marsocci: "An Effor Analysers of Electronic Analog Computers". Trans. IRE, 5, 207 /1956/.

19. Moon, Spencer: "Effors in the Solution of Integral Equations". Jour. of the Franklin Inst., 1, 264 /1957/.

20. M.R. Šura-Bura: "Aproksimacija funkcija više promenljivih funkcijama, od kojih svaka zavisi od jedne promenljive". Računska matematika 2/1957/.

L I T E R A T U R A

I. S.G.Mihlin: Linearne integralne jednačine;
Moskva, 1959

2. F.Trikomi: Integralne jednačine,
Moskva, 1960

3. E.Gursa: Kurs matematičke analize,
Moskva, 1933

4. C.Page: Phjsical Mathematics,
New York, 1955

5. V.Smirnov: Kurs više matematike,
Moskva, 1958

6. D.Skarboro: Numeričke metode matematičke analize,
Moskva, 1934

7. G.Korn and T.Korn: Electronic Analog Computes,
New York, 1956

8. R. Tomović: Calculateurs analogiques repetitifs,
Paris, 1958

9. W.Karplus, W.Soroka: Analog Methods Computation and
Simulation
New York, 1959

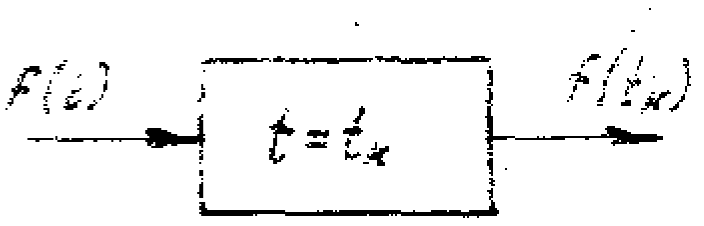
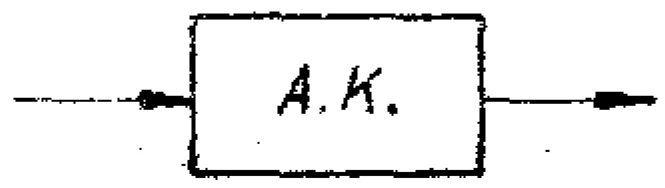
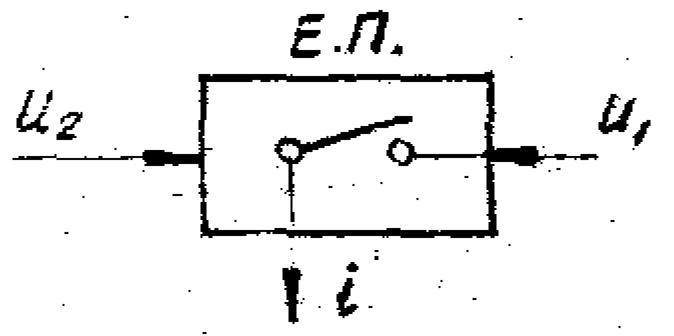
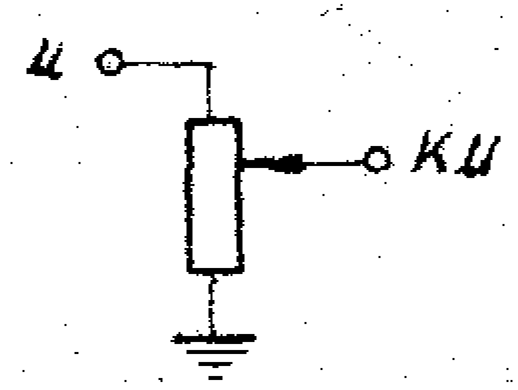
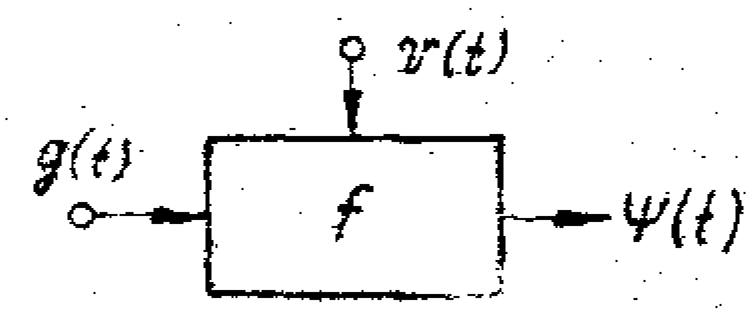
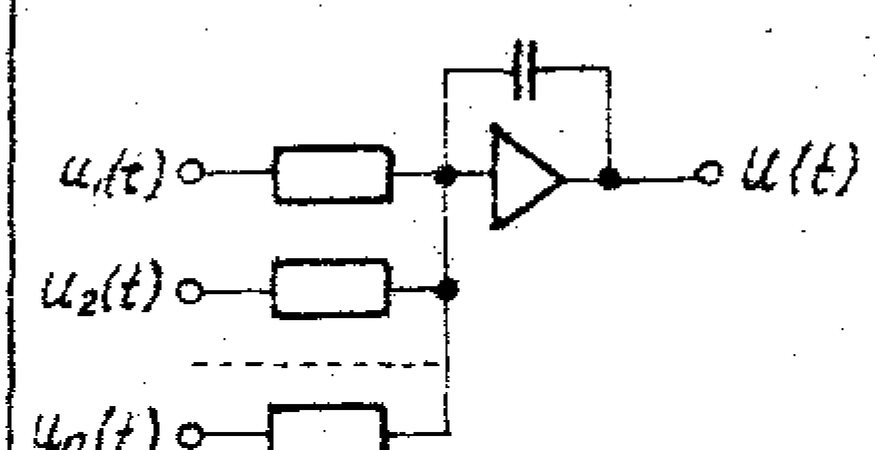
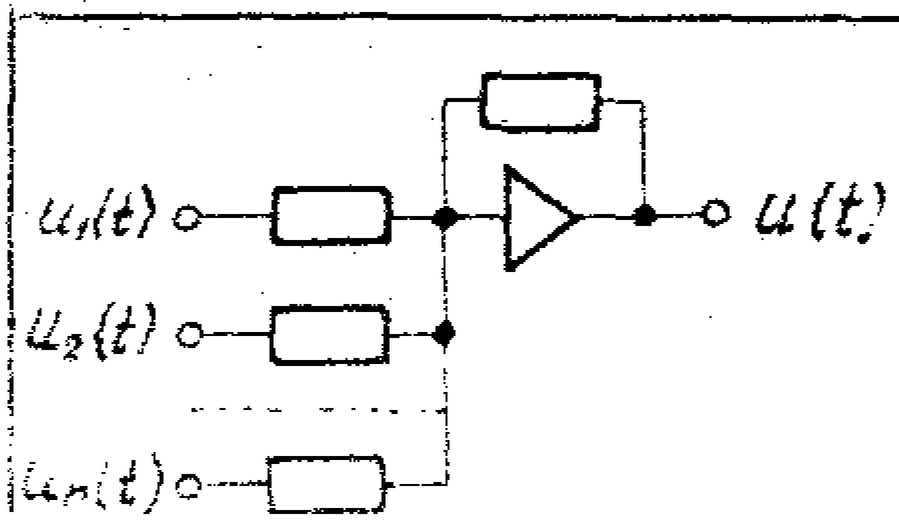
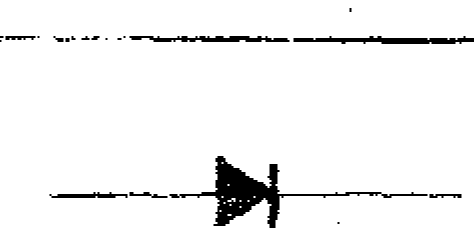
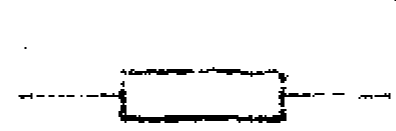
10. B.J. Kogan: Elektronski uredaji za modeliranje i
njihova primena za izučavanje sistema automatske regulacije,
Moskva, 1959

11. G.Smith and R.Wood: Principles of Analog Computation,
New York, 1959

12. W.W. Solodovnikov: Statistička dinamika linearnih sistema
automatskog upravljanja
Moskva, 1960

13. J.Truxal: Automatic Feedback Control System Synthesis,
New York, 1955

14. J.S.Bendat: Principles and Applications of Random Noise
Theory,
New York, 1958

oznaka	naziv	funkcija
	[illegible]	[illegible]onje ordinate [illegible]cije f/t/ za $t=t_x$
	Amplitudni komparator	Služi za komparaciju dva napona po amplitudi
	Elektronski prekidač	Prenošenje napona u_1 na izlaz i je uslovljeno prisustvom napona u_2
	Potenciometar	množenje sa konstantom $0 \leq K \leq 1$
	Univerzalni nolinearni element	Služi za množenje i generiranje funkcija. $\Psi(t) = v(t)\, f[g(t)]$
	Integrator	$u(t) = -\int_0^t [u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t)]\,dt$
	Sabirač	$u(t) = -\sum_{i=1}^{n} u_i(t)$
	Dioda	
	Otpornik	