ПАВЕЛ ТОДОРОВ, STANISLAV PEJOVIĆ, CHR. KARANIKOLOV, BRANISLAV MARTIĆ, DUŠAN ADAMOVIĆ, ГРОЗЬО СТАНИЛОВ, ANDRZEJ MĄKOWSKI I W. SIDRPIŃSKI

MATEMATIČKE NOTE

Математички весник
2 (17), Св. 3, 1965

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
2 (17) 1965 стр. 207–208.

UNE DÉMONSTRATION IMMÉDIATE DU THÉORÈME SUR LA REPRÉSENTATION DES ALGÈBRES DE BOOLE FINIES

Dušan Adamović

(Communiqué le 18 octobre 1965)

1. Il s'agit du théorème connu suivant:

Toute algèbre de Boole finie $(B, \vee, \wedge)$ *est isomorphe à une algèbre de Boole de la forme* $(P(S), \cup, \cap)$ *où* $P(S)$ *désigne l'ensemble partitif de l'ensemble* S, $\cup$ *et* $\cap$ *étant respectivement l'union et l'intersection des ensembles.*

Dans les manuels et les monographies que nous connaissons on démontre le théorème cité d'une manière indirecte, en le déduisant, au moyen de considérations supplémentaires, des résultats bien plus généraux (voir, par exemple, [1], p. 220—223).

La démonstration directe qui suit pourrait présenter quelque intérêt du point de vue de la méthode.

2. Soit $(B, \vee, \wedge)$ une algèbre de Boole finie, ce qui veut dire que l'ensemble B est fini, et soient 0 et 1 son minimum et son maximum, respectivement. Mis à part le cas trivial ou B n'a qu'un seul élément, l'ensemble S de tous les éléments de B qui sont différents de 0 et suivent immédiatement 0, par rapport à la relation d'ordre $\leqslant$ définie dans B par

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y,$$

n'est pas vide et tout élément $z \neq 0$ de B est précédé d'un élément de S au moins. En effet, cette assertion est valable pour n'importe quel ensemble ordonné, fini et possédant le minimum 0, ce qu'on prouve facilement par induction.

Posons

$$S_x = \begin{cases} \{z \mid x \geqslant z \in S\} & (0 \neq x \in B) \\ \varnothing & (x = 0). \end{cases}$$

D'après ce qui précède, $S_x \neq \varnothing$ pour $0 \neq x \in B$. On a aussi l'égalité

$$1 = \bigvee_{z \in S} z. \tag{1}$$

En effet, si l'on pose $\overline{1} = \bigvee_{z \in S} z$, on a, pour $0 \neq x \in B$,

$$\overline{1} \wedge x \geqslant a \wedge a = a \neq 0,$$

où $a \in S_x \, (\neq \varnothing)$, et par conséquent, $(\overline{1})' = 0$, le complément de l'élément $t \in B$ étant désigné par t', d'où $\overline{1} = ((\overline{1})')' = 0' = 1$.

Si l' on écrit par convention $0 = \bigvee_{t \in S_0} t$, on a

$$x = \bigvee_{z \in S_x} z \qquad (x \in B).$$

Il suffit, d'après le résultat et la convention qui précèdent, de démontrer ce fait pour $x \neq 0, 1$. En posant

$$\bar{x} = \bigvee_{z \in S_x} z, \qquad y = \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z,$$

on a, tout d'abord, $x \geqslant \bar{x}$ et, par conséquent, d'après (1),

$$x \vee y \geqslant \bar{x} \vee y = \bigvee_{z \in S_x} z \quad \vee \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z = \bigvee_{z \in S} z = 1,$$

$$\bar{x} \wedge y \leqslant x \wedge y = x \wedge \bigvee_{z \in S \setminus S_x} z = \bigvee_{z \in S \setminus S_x} (x \wedge z) = 0,$$

puisque, évidemment, $x \wedge z = 0$ pour $z \in S \setminus S_x$. Donc.

$$x' = (\bar{x})' = y \Rightarrow x = \bar{x}.$$

Posons

$$f(x) = S_x \qquad (x \in B).$$

Cette fonction, d'après tout ce qu'on vient d'établir, applique d'une manière biunivoque B sur $P(S)$. Comme on a de plus, pour x, $y \in B$:

$$f(x \vee y) = f(\bigvee_{z \in S_x} z \quad \vee \bigvee_{z \in S_y} z) = f(\bigvee_{z \in S_x \cup S_y} z) = S_x \cup S_y = f(x) \cup f(y),$$

$$f(x \wedge y) = f(\bigvee_{z \in S_x} z \quad \wedge \bigvee_{z \in S_y} z) = f(\bigvee_{(z, t) \in S_x \times S_y} (z \wedge t)) = f(\bigvee_{z \in S_x \cap S_y} z) = S_x \cap S_y = f(x) \cap f(y),$$

cette application est un isomorphisme de $(B, \vee, \wedge)$ sur $(P(S), \cup, \cap)$, ce qui termine notre démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] А. Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*, Москва 1962.