

UNIVERZITET U PRIŠTINI

PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

QERIM S. KAMBERI

MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA

SA DRUGIM SISTEMIMA KRIVIH LINIJA

– doktorska disertacija –

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA
Dokt. Broj 239/1 Datum 6. 5. 1991.

Priština, 1987.

Univerzitet u Beogradu
Priradno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ **Datum** _____

Ovom prilikom želim da izrazim duboku zahvalnost mom mentoru prof. Dr Josipu Moseru, koji je predložio ovu temu, rukovodio mojim radom i nesebično je pomagao u toku pisanja ove disertacije.

Zahvaljujem se prof. Dr Rasimu Bejtullahu -u, koji je dao niz korisnih prijedloga i sugestija u cijelom toku rada.

U eksperimentalnom radu koji je obavljen u Laboratoriji za Holografiju Odseka za fiziku kao i u toku pisanja toga dijela, dragocjenu pomoć mi je pružio prof. Dr Jahja Koka, te mu se srdačno zahvaljujem.

Zahvaljujem se i svima ostalim drugovima koji su pomogli da ova disertacija dobija ovakav sadržaj i izgled.

Posebnu zahvalnost dugujem Prirodno - matematičkom fakultetu u Prištini, koji je omogućio ovaj rad i Pokrajinskoj zajednici za naučni rad, koja je finansirala deo troškova.

Priština, Decembar 1987.

Gerim Kamberi

Ovaj rad posvjećujem svojoj porodici, u znaku duboke zahvalnosti na ukazanu pomoć, veliko strpljenje i odricanje.

S A D R Ž A J

1.	U V O D	1
1.1.	Muare figure i njihove osobine	1
1.2.	Pregled dosadašnjih proučavanja muare figura i njihova primjena	9
1.3.	Jednadžba sistema koncentričnih lemniskata	13
2.	MUARE FIGURE DVAJU ZONSKIH SISTEMA LEMNISKATA	19
2.1.	Odredjivanje komutacione granice	19
2.2.	Slučaj koncentričnih lemniskata	21
2.3.	Slučaj pomaknutih lemniskata	25
3.	MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA SISTEMOM PARALELNIH EKVIDISTANTNIH PRAVACA	29
4.	MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA ZONSKIM SISTEMOM PARALELNIH PRAVACA	37
5.	MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA SISTEMOM EKVIDISTANTNIH KRUŽNICA	42
6.	MUARE FIGURE SISTEMA ZONSKIH LEMNISKATA SA SISTEMOM ZONSKE KRUŽNE MREŽICE	47
7.	MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA ELIPTIČKOM ZONSKOM MREŽICOM	61
8.	MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA ZONSKIM SISTEMOM HIPERBOLA	89
9.	MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA SISTEMOM EKVIDISTANTNIH PARABOLA	123

10.	PRIMJENA MUARE FIGURA U METROLOGIJI	147
10.1.	Postavljanje problema	147
10.2.	Izrada i projektiranje tragova na predmet ispitivanja	148
10.3.	Projektiranje dveju rešetaka i opservacija muare figura	151
10.4.	Shadow muare metoda	152
10.5.	Projekciona metoda	154
10.6.	Muare kombinacije mrežice lemniskata sa projektiranom ekvidistantnom mrežicom . . .	157
10.6.1.	Prednost ovih mjerenja nad konvencionalnim mjerenjima	158
10.7.	Mjerenje deformacija određenog dijela stroja	158
10.7.1.	Vezivanje tipova deformacija sa nastalim formama muare figura . . .	162
10.7.2.	Mjerenje deformacije tijela u realnim uvjetima	162
10.8.	Mjerenje nastalih promjena na transparentnoj kapi	163
10.9.	Metrološke specifičnosti dobivenih rezultata	168
10.9.1.	Problem nelinearnosti	168
10.9.2.	Problem nehomogenosti	168
10.9.3.	Osjetljivost i tačnost metode muare	169
10.10.	Prednost muare figura dobivenih sistemom lem- niskata za postavljanje metroloških ciljeva	170
11.	ZAKLJUČAK	171
	LITERATURA	173

1. U V O D

1.1. Muare figure i njihove osobine

Kad se dva sistema krivulja polaže jedan na drugi, vidi se jedan treći sistem krivulja koji zovemo njihove *m u a r e f i g u r e*. Svaki od zadanih sistema možemo posebno nacrtati i takva slika zove se *m r e ž i c a l i n i j a*.

Bilo koji sistem krivulja možemo analitički izraziti jednadžbom takve krivulje, koja općenito glasi

$$f(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

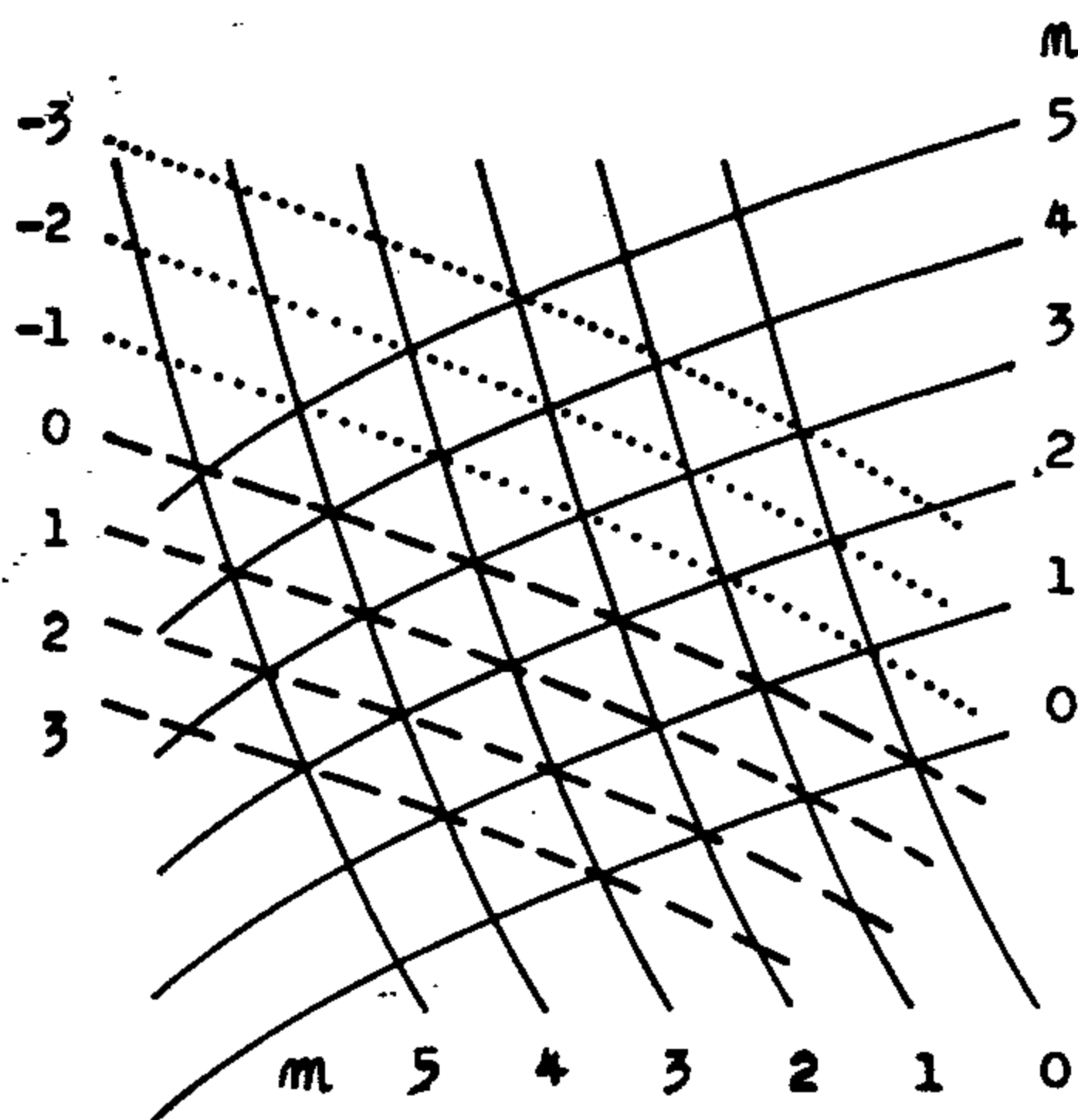
gdje je f funkcija koja povezuje varijable x i y . Želimo li izraziti sistem takvih krivulja, tad se u jednadžbi mora javljati jedan cijeli broj m koji je redni broj određene krivulje u sistemu. Da to analitički izrazimo, pišemo jednadžbu ovako

$$f_1(x, y, m) = 0 \quad (1.2)$$

Drugi sistem krivulja povezati će varijable nekom drugom funkcijom f_2 . I u tom sistemu javlja se redni broj krivulje. Označimo ga sa M . Stoga je jednadžba drugog sistema krivulja

$$f_2(x, y, m) = 0 \quad (1.3)$$

Kad se ta dva sistema dovedu do pokrivanja, onda se krivulje tih sistema presjecaju i spojnice njihovih presjeka generiraju njihove muare figure. Na slici 1.1 je jedan isječak tih krivulja kod pokrivanja i na svakoj od njih su napisani redni brojevi. Vidimo da bi slijedeća linija dolje i desno morala imati redni broj -1 . Dakle



Slika 1.1.

ti redni broj -1 . Dakle kao redni brojevi mogu nastupati kako pozitivni tako i negativni cijeli brojevi.

Kao muare figure javljaju se linije koje prolaze kroz presjeka linija sistema i zato su dijagonale malih četverokuta koji se nalaze između linija sistema. One su na slici označene iscertanim linijama. Promat-

rajmo ih redom. Najgornja od njih prolazi sjecištem $m=0$ i $n=0$ što ćemo kraće pisati $(0,0)$. Slijede sjecišta $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, ... Za sve njih je karakteristično da je $m-n=0$. To je 0 -ta linija muare sistema.

Slijedeća linija prolazi sjecištima $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,3)$, ... Vidimo da je tu $m-n=1$ i to je linija muare sistema sa rednim brojem 1 . Slijedeća linija ide kroz sjecišta $(2,0)$, $(3,1)$, $(4,2)$, ... Tu je $m-n=2$. Jednako bi dobili odgovarajuće rezultate kod slijedećih kombinacija rednih brojeva. Stoga možemo općenito pisati

$$m - m = p \quad (1.4)$$

gdje je p cijeli broj i on je redni broj linije u muare sistemu. Dakako ako je $m < m$ onda izlazi za p negativna vrijednost. I na slici to su tačkicama izvučene linije. Tako prva od njih prolazi kroz sjecišta $(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), \dots$ Tu je $m - m = -1$, i analogno ide dalje.

Zbog toga što ovdje treba oduzimati redne brojeve, dobiveni sistem muare linija zove se suptraktivni sistem.

Da nadjemo jednadžbu muare linija treba iz jednadžbi (1.2) i (1.3) odrediti redne brojeve. Dobivamo

$$m = F_1(x, y) \quad (1.5)$$

$$m = F_2(x, y) \quad (1.6)$$

gdje su F_1 i F_2 funkcije koje povezuju varijable nakon izdvajanja rednih brojeva. To treba uvrstiti u formulu (1.4). Dobiva se jednadžba muare sistema

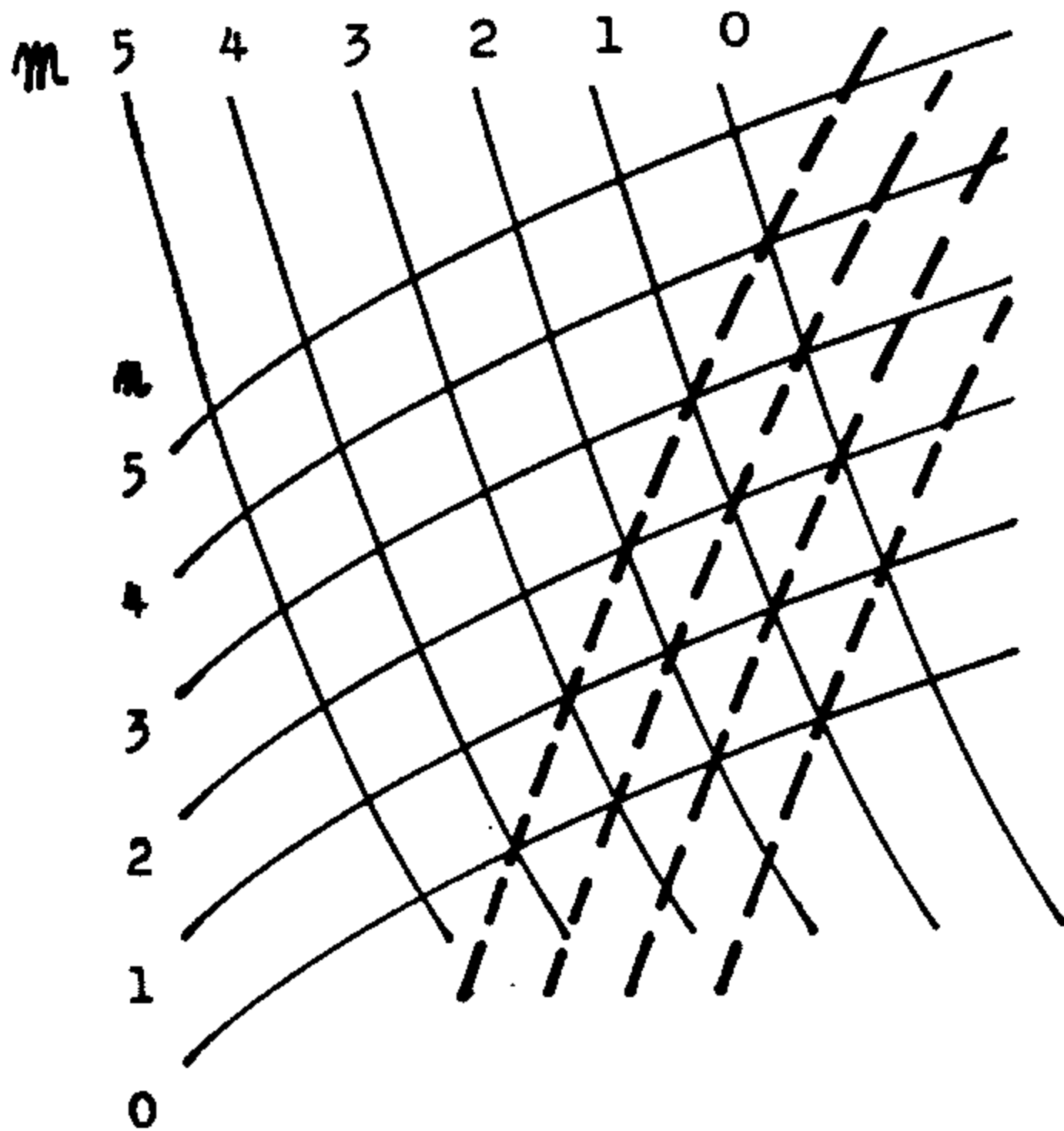
$$F_1(x, y) - F_2(x, y) = p \quad (1.7)$$

i time je zadatak općenito riješen.

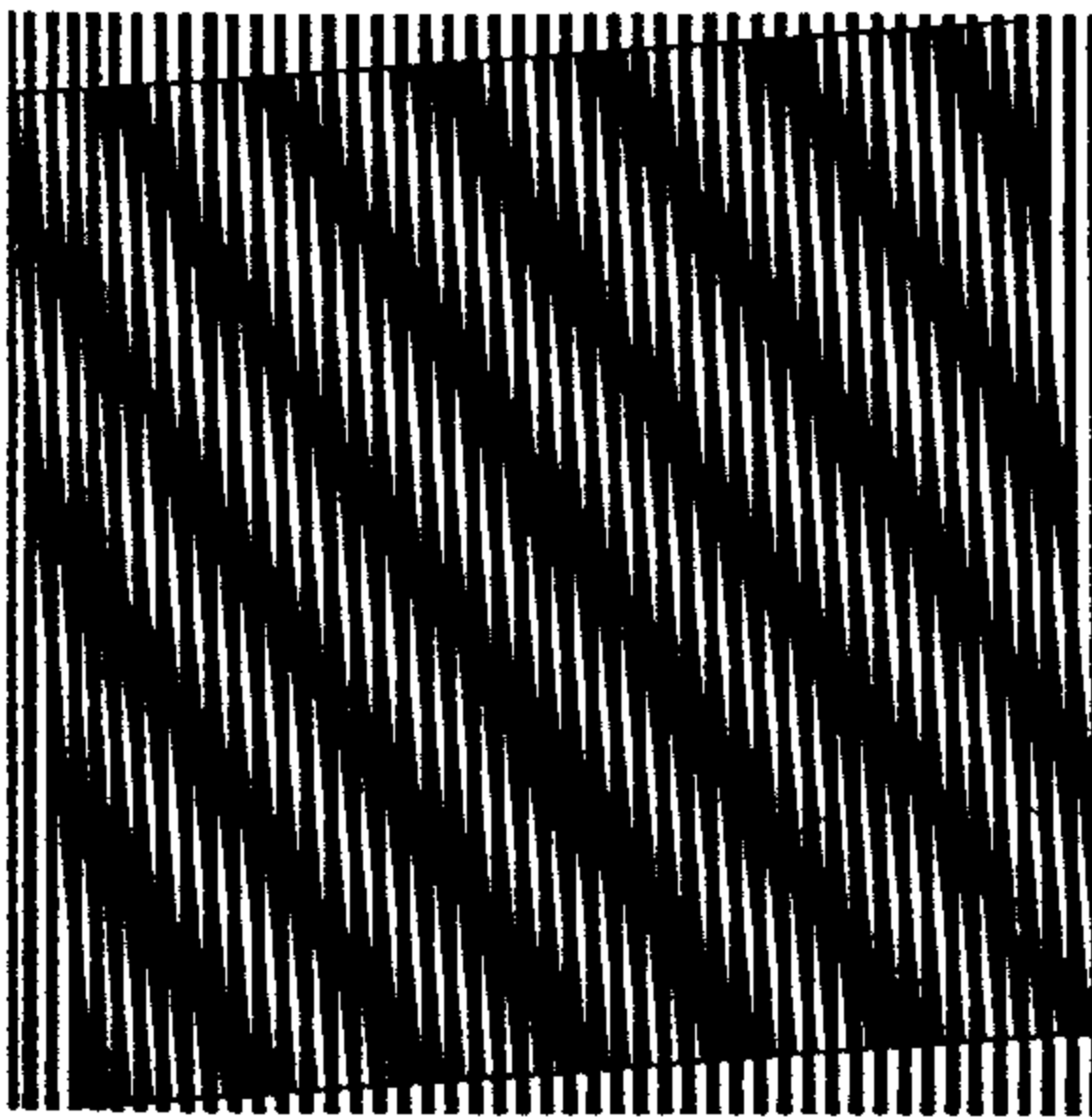
Ali četveokuti na slici 1.1 imaju i još jednu dijagonalu. Na slici 1.2 nacrtan je isti isječak mreže krivih zadanog sistema ali su spojene druge dijagonale njihovih malih četverokuta. Gornja linija ide kroz sjecišta $(4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4), \dots$ Vidimo da je tu $m + m = 4$. Slijedeća linija ide kroz sjecišta $(3,0), (2,1), (1,2), (0,3), \dots$ Za nju vri-

jedi $m + n = 3$. Slično izlazi za ostale linije. Dakle u tom slučaju imamo uslov

$$m + n = p \quad (1.8)$$



Slika 1.2.



Slika 1.3.

Kako ovdje redne brojeve treba zbrajati, te ove muare figure zovu se aditivne. Na isti se način dobiva njihova jednadžba koja glasi

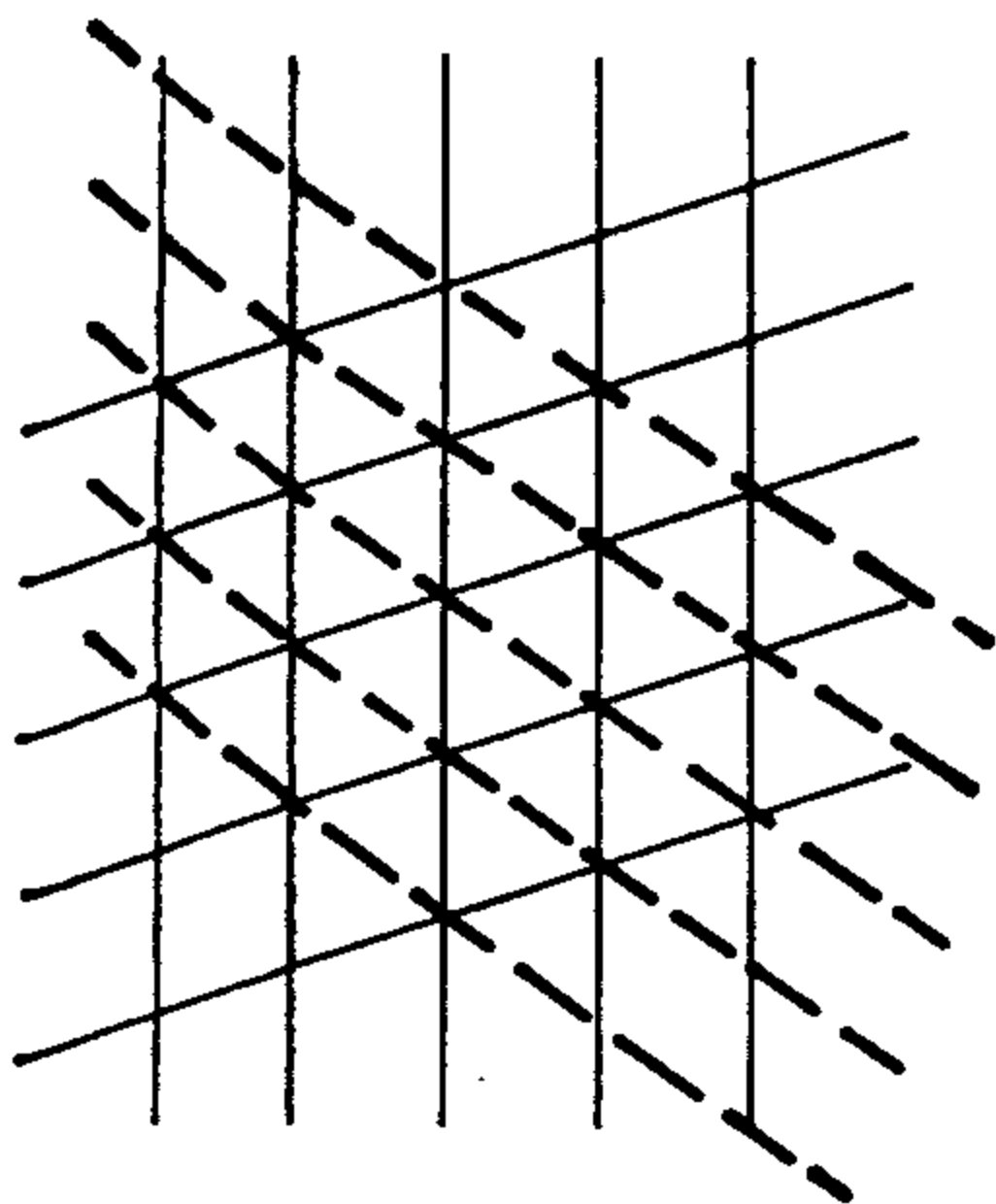
$$F_1(x, y) + F_2(x, y) = p \quad (1.9)$$

Vidimo da postoje dva tipa muare figura: *s u p t r a k t i v n e* i *a d i t i v n e*.

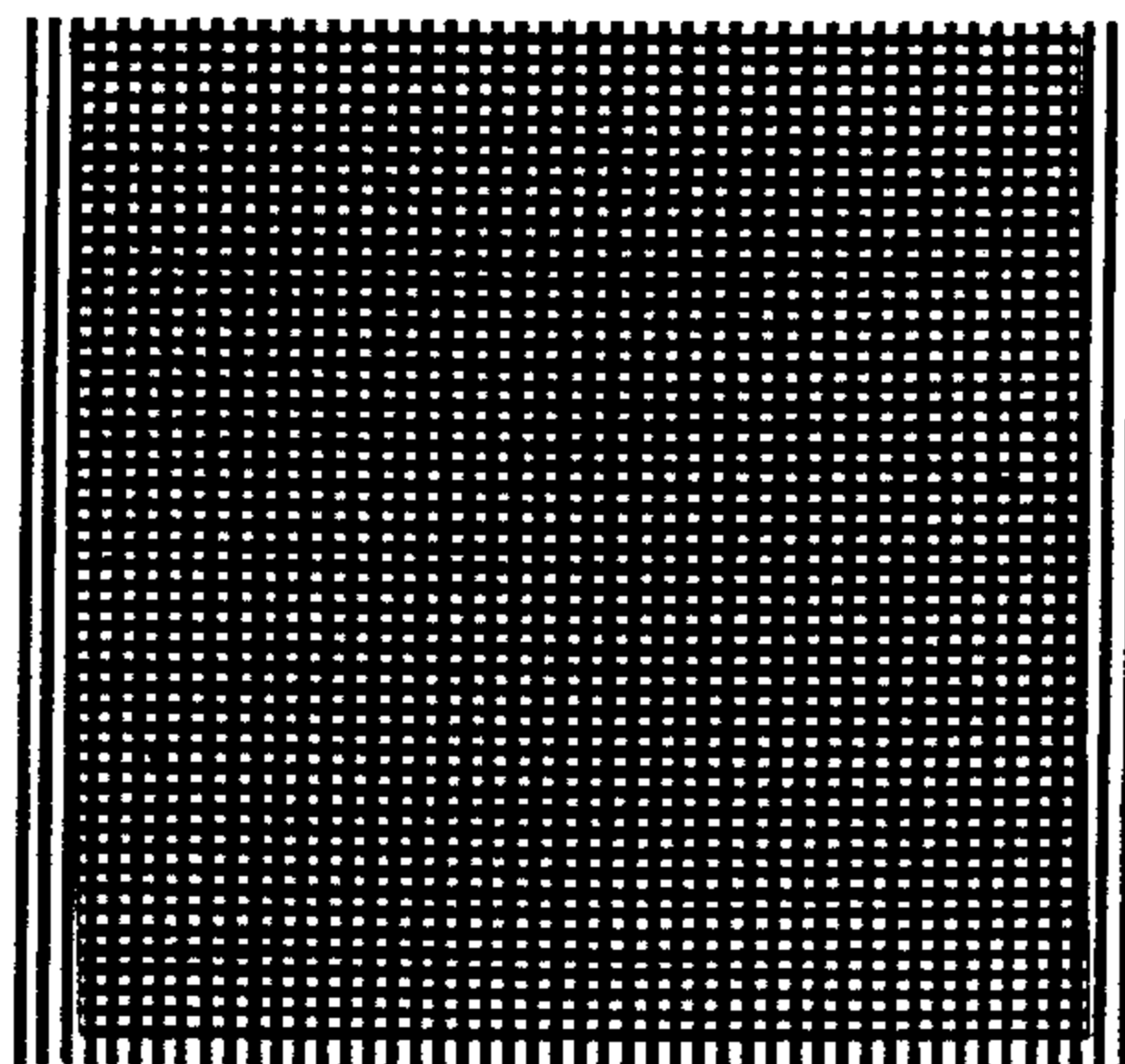
Na slici 1.3 je fotografija muare figura koje nastaju pokrivanjem dvaju sistema ekvidistantnih paralelnih pravaca, ali vidi se samo jedan sistem tih linija a ne dva. Kad se to detaljno promatra, vidi se da su muare figure kraće dijagonale malih četverokuta, kako je to nacrtano na sl. 1.4. Drugi se sistem ne vidi i za-

to kažemo da on nije efikasan.

Na slici 1.5 je fotografija tih sistema pravaca kad su oni postavljeni pod kutem od 90° . Jasno se gleda da sada muare figura nema. Znači sad nije efikasan ni jedan od dviju tipova



Slika 1.4.



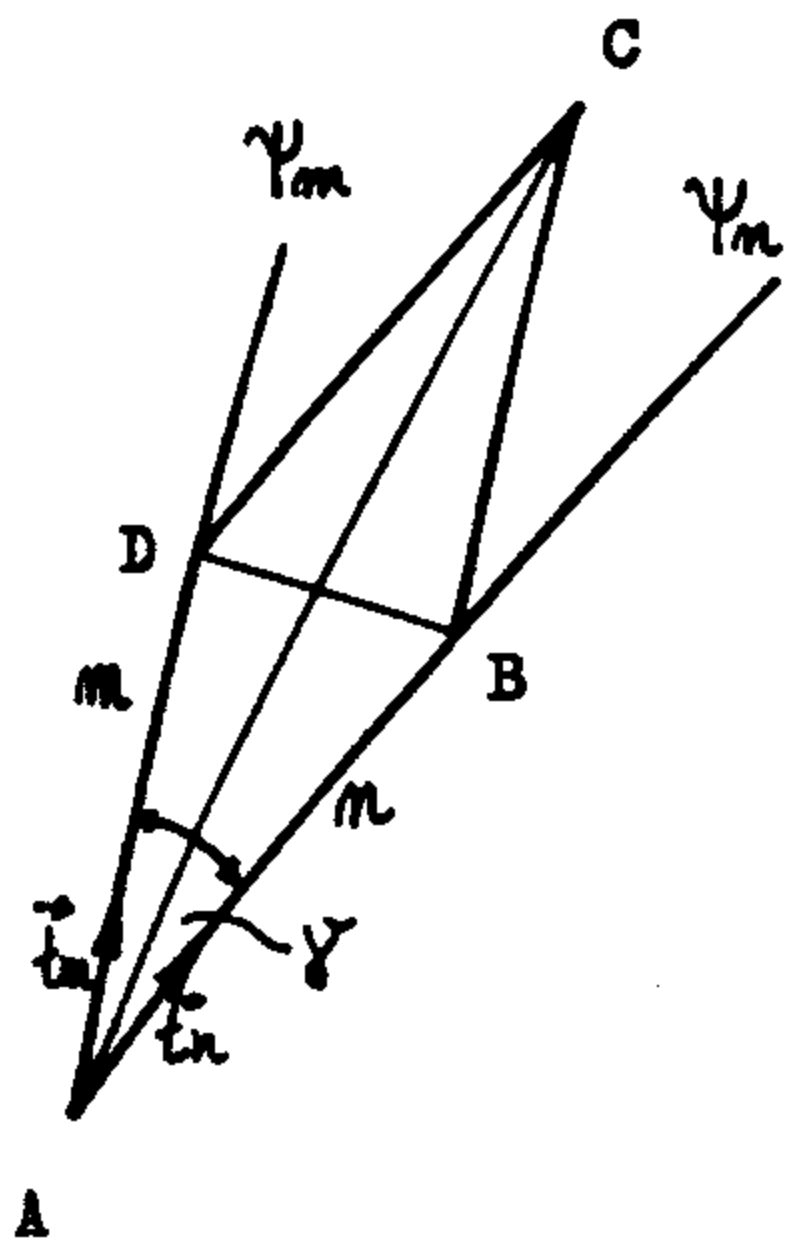
Slika 1.5.

muare linija. Detaljnija analiza pokazuje da su u tom slučaju obje dijagonale malih četverokuta jednake. Prema tomu, ako hoćemo da se vidi muare sistem, onda treba mrežice tako postaviti da su jedne dijagonale kraće od drugih, pa će se sistem kraćih dijagonala vidjeti i zato će on biti efikasan.

Postoje i takvi sistemi mrežica koje daju muare figure kod kojih su u jednom dijelu ravnine efikasne suptraktivne, a u drugom dijelu aditivne muare figure. Linija koja ograničava ta područja zove se **k o m u t a c i o n a g r a n i c a**. Stoga treba odrediti analitičku metodu za izračunavanje komutacione granice i područje efikasnosti pojedinih vrsta muare figura.

Na slici 1.6 nacrtan je jedan elementarni četverokut ABCD i njegove dijagonale. U slučaju efikasnosti suptrak-

tivnih muare figura je kraća dijagonala BD ona koja prikazuje suptraktivne figure, a dulja AC je ona koja odgovara aditivnim figurama. Sa slike se vidi da će dijagonala BD biti kraća ako se linije sistema m i n



Slika 1.6.

sjeku pod oštrim kutem. Stoga je kut medju vektorima tangenata stranica \vec{t}_m i \vec{t}_n , kut γ uvijek u intervalu $0 < \gamma < \pi/2$, i zato je

$$\cos \gamma > 0 \quad (1.10)$$

Skalarni produkt dvaju vektora je

$$\vec{t}_m \cdot \vec{t}_n = |\vec{t}_m| \cdot |\vec{t}_n| \cdot \cos \gamma$$

pa slijedi da je

$$\vec{t}_m \cdot \vec{t}_n > 0 \quad (1.11)$$

Označimo sa Ψ_m i Ψ_n funkcije

$$\Psi_m = F_1(x, y) - m \quad (1.12)$$

$$\Psi_n = F_2(x, y) - n \quad (1.13)$$

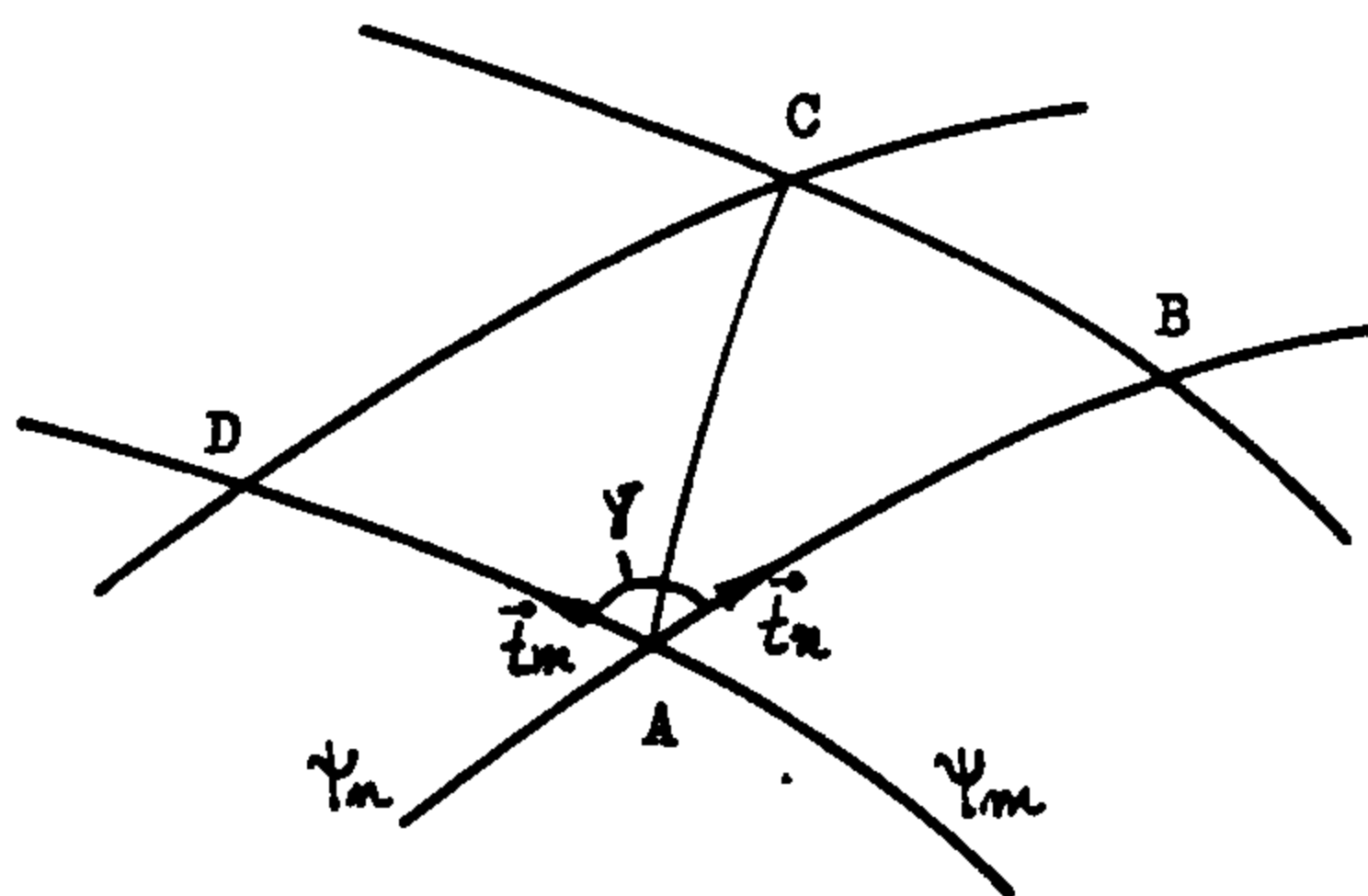
Kutevi koje zatvaraju vektori tangenata krivulja Ψ_m i Ψ_n jednaki su kutevima koje zatvaraju vektori gradijenata tih funkcija. Stoga umjesto (1.11) možemo pisati i uvjet

$$\text{grad } \Psi_m \cdot \text{grad } \Psi_n > 0 \quad (1.14)$$

Dakle, gdje je to ostvareno, efikasne su suptraktivne muare figure.

Ako trebaju biti efikasne aditivne muare figure, onda

elementarni četverokut izgleda kao na slici 1.7. Da bi dijagonala AC bila kraća, što je potrebno kad su aditivne figure efikasne, mora kut između tangenata \vec{t}_m i \vec{t}_n biti tup i zato mo-



Slika 1.7.

ra biti γ u intervalu $\pi/2 < \gamma < \pi$ ili $\cos \gamma < 0$. I dalje istim rasudjivanjem izlazi uvjet za efikasnost aditivnih figura:

$$\text{grad } \Psi_m \cdot \text{grad } \Psi_n < 0 \quad (1.15)$$

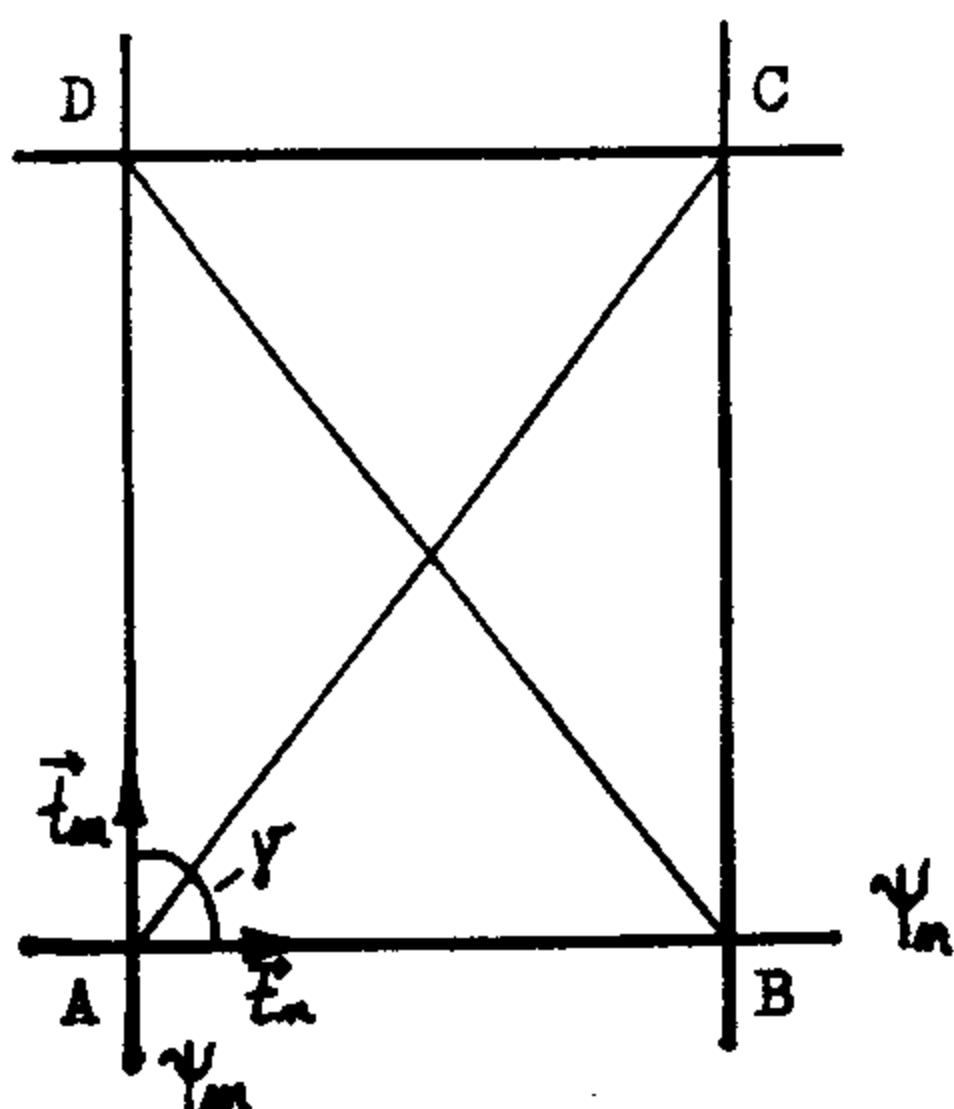
Na granici tih dvaju područja je linija određena jednačicom

$$G = \text{grad } \Psi_m \cdot \text{grad } \Psi_n = 0 \quad (1.16)$$

Ta je linija komutaciona granica muare figura. Za nju je

$$\cos \gamma = 0$$

pa slijedi da je kut između tangenata linija pravokut $\gamma = \pi/2$. U tom su slučaju obje dijagonale elementarnih četverokuta jed-



Slika 1.8.

nake i na toj liniji i u njezinoj blizoj okolini se muare figure uopće ne vide, kao na sl. 1.8.

Treba ovom razmatranju dati još i analitički oblik. Jednadžba zadanih sistema krivulja su (1.12) i (1.13). Za tako zadane linije je

$$\text{grad } \Psi_m = \vec{i} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial y}$$

$$\text{grad } \Psi_m = \vec{i} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial y}$$

pa slijedi njihov skalarni produkt

$$\text{grad } \Psi_m \cdot \text{grad } \Psi_m = \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_m}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial y} \quad (1.17)$$

i zato na mjestima gdje je izraz (1.17) jednak nuli nalazi se komutaciona granica, a u području gdje je on > 0 efikasne su suptraktivne a gdje je on < 0 efikasne su aditivne muare figure.

Kako ćemo u ovom radu uglavnom koristiti polarne koordinate, treba taj izraz razviti u tim koordinatama. U polarnim koordinatama imamo jednadžbe linija

$$\Psi_m = \mathcal{F}_1(r, \varphi) - m \quad (1.18)$$

$$\Psi_m = \mathcal{F}_2(r, \varphi) - m \quad (1.19)$$

i zato je

$$\text{grad } \Psi_m = \vec{r}_0 \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial r} + \frac{\vec{r}_0}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \varphi}$$

$$\text{grad } \Psi_m = \vec{r}_0 \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial r} + \frac{\vec{r}_0}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \varphi}$$

gdje je \vec{r}_0 jedinični vektor u smjeru radija vektora a \vec{r}_0 je jedinični vektor normalan na taj smjer. Skalarni produkt je

$$G = \text{grad } \Psi_m \cdot \text{grad } \Psi_m = \frac{\partial \Psi_m}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \varphi} \quad (1.20)$$

pa pomoću tog izraza možemo odrediti komutacionu granicu muare figura i područje efikasnosti suptraktivnih i aditivnih muare figura. Ovo su proveli Moser i Janićijević u radu [24].

1.2. Pregled dosadašnjih proučavanja muare figura i njihova primjena

Foucault je 1859. god. [1] preporučio jednu metodu za provjeru ispravnosti optičkih leća i sistema korišćenjem mrežica sa paralelnim linijama male frekvencije, i to se može smatrati začetkom proučavanja i primjene muare figura u povjesti nauke. Nažalost, on tu metodu nije dalje razradjivao niti koristio, jer je smatrao da je manje osjetljiva od jedne druge metode, te ostaje njegova zasluga što ju je prvi spomjenio kao jednu od mogućig metoda.

Slijedeći korak čini Rayleigh 1874. god. [2], koji je prvi opisao fenomen muare figura i to otprilike na ovaj način: uzimaju se dvije fotografije jedne rešetke i polažu jedna na drugu pod nekim malim kutom, tada se pojave muare figure koje imaju oblik pravih linija. Ako rešetke nisu potpuno pravil-

ne, tada se prave linije muare figura iskrive. Ovu metodu je preporučio za provjeru tačnosti optičkih rešetaka.

Dalje je Righi 1887. god. [3] proučavao raspodjelu svjetlosti u sistemu muare pruga koje nastaju prekrivanjem dvaju sistema pravaca, i slučaj muare linija koje nastaju prekrivanjem mrežice sastavljene od kružnica sa mrežicom pravaca.

Ronchi je 1922. god. [4] razradio Foucault -ovu ideju o upotrebi muare figura za provjeru tačnosti optičkih leća i ogledala. On je takodjer 1925. god. [5], proučavao muare figure koje nastaju pokrivanjem mrežice sastavljene od pravaca sa mrežicom sastavljenom od kružnica.

Raman i Datta 1926. godine [6] prvi proučavaju muare figure koje nastaju prekrivanjem dviju zonskih mrežica.

Poslije II svjetskog rata dolazi do svestranog proučavanja muare figura i njihove primjene.

Problemima primjene linearnih mrežica za precizna mjerenja bavi se u svojim knjigama J. Guild [7] i [8]. U sponjenu tim knjigama nalazi se opsežna lista citiranih radova i bilo bi nepotrebno ovdje takvu ili sličnu listu ponavljati.

Metrološke primjene linearnih mrežica opisuje u jednom preglednom članku J. M. Burch [9], u zbirci preglednih radova „Progress in Optics II“. Na njegovom kraju citiraju se 55 rada o tim problemima. Ta činjenica pokazuje kako je ova tema aktuelna bila i koliko se po njoj radilo.

Drugi smjer primjene muare figura je kod ispitivanja elastičnih deformacija. O toj temi postoji knjiga P. Theocaris -a [19], koja detaljno razradjuje problem i na kraju donosi listu od 278 objavljenih radova o toj temi i srodnim problemima.

Uspješno primjenjivanje muare figura umnogome zavisi

od njihovog poznavanja. Zato je šezdesetih godina našeg stoljeća uzimalo maha objavljivanje radova koji se odnose na razne tipove muare figura. Tako 1964. god. izlaze rad M. Stecher -a [10] i rad koji su objavili Oster, Wasserman i Zwerling [11]. U tim se radovima pojavljuju muare figure nekih najjednostavnijih sistema geometrijskih linija kao što su pravci i koncentrične kružnice. Oni takodjer daju i osnovni matematički aparat pomoću kojeg se mogu odrediti analitičke jednadžbe muare figura.

Moser, Bahčevandžiev, Jonoska i Janićijević su 1964. god. [13] detaljno obradili muare figure koje nastaju pokrivanjem dviju Fresnel -ovih zonskih mrežica. Isti autori su kasnije obradili i slučaj Cornu -evih linearnih zonskih mrežica i njihove kombinacije sa Soret -ovim mrežicama [14].

Ista grupa autora objavljuje čitav niz radova gdje su istraživane muare figure drugih tipova krivih linija kao što su elipse [15], spirale [22], sinusoida [26], hiperbole [29] itd.

Muare figure su našle vrlo veliku primjenu u oblasti metrologije raznih fizičkih fenomena, naročito u optičkoj metrologiji. U ovoj disertaciji je naročita pažnja posvjećena primjeni muare figura u metrologiji deformacija tijela.

U zadnje vrijeme se razvila prava „optička umjetnost“ u oblasti slikarstva primjenom raznih sistema linija i muare figura kao rezultat njihovih kombinacija. Ova vrsta umjetnosti je prodrila do televizijskog medijuma gdje su scenografi, koristeći ljepotu, raznovrsnost kao i lakoću dobijanja i mijenjanja muare figura, dobili vrlo prijatan i lijep umjetnički dojam u pogledu estetike.

Kad smo tu, moramo upozoriti da muare efekti u nekim slučajevima predstavljaju i smetnju u televizijskoj tehnici ako

se ne eliminišu [23], [28]. Naročito smetaju kada imamo pojavu interferencije između spektralnih komponenti video signala sa nekim drugim parazitnim periodičnim signalom. Ove smetnje se mogu eliminisati u potpunosti ako se nalazi izvor signala koji smeta. Međutim, ima slučajeva kao npr. pri magnetnom snimanju videosignala, gdje se muare efekat pojavljuje zbog fizičkih pojava koje nastaju frekventnom modulacijom videosignala prije nego što se snimi na traku. Jasno je da je zadatak TV tehničara i inženjera u ovom slučaju da muare efekte svedu u što je moguće manjoj mjeri.

Muare figure se primjenjuju u još jednu vrstu umjetnosti a to je oblast dizajna, naročito u dizajneriji tekstila. Sposobni i daroviti ljudi danas mogu pomoću računala napraviti fantastične kombinacije sistema linija i boja, a time i muare figura. Kada se to prenese na tekstilnu tkaninu, mogu se dobiti vrlo efektne i lijepe šare.

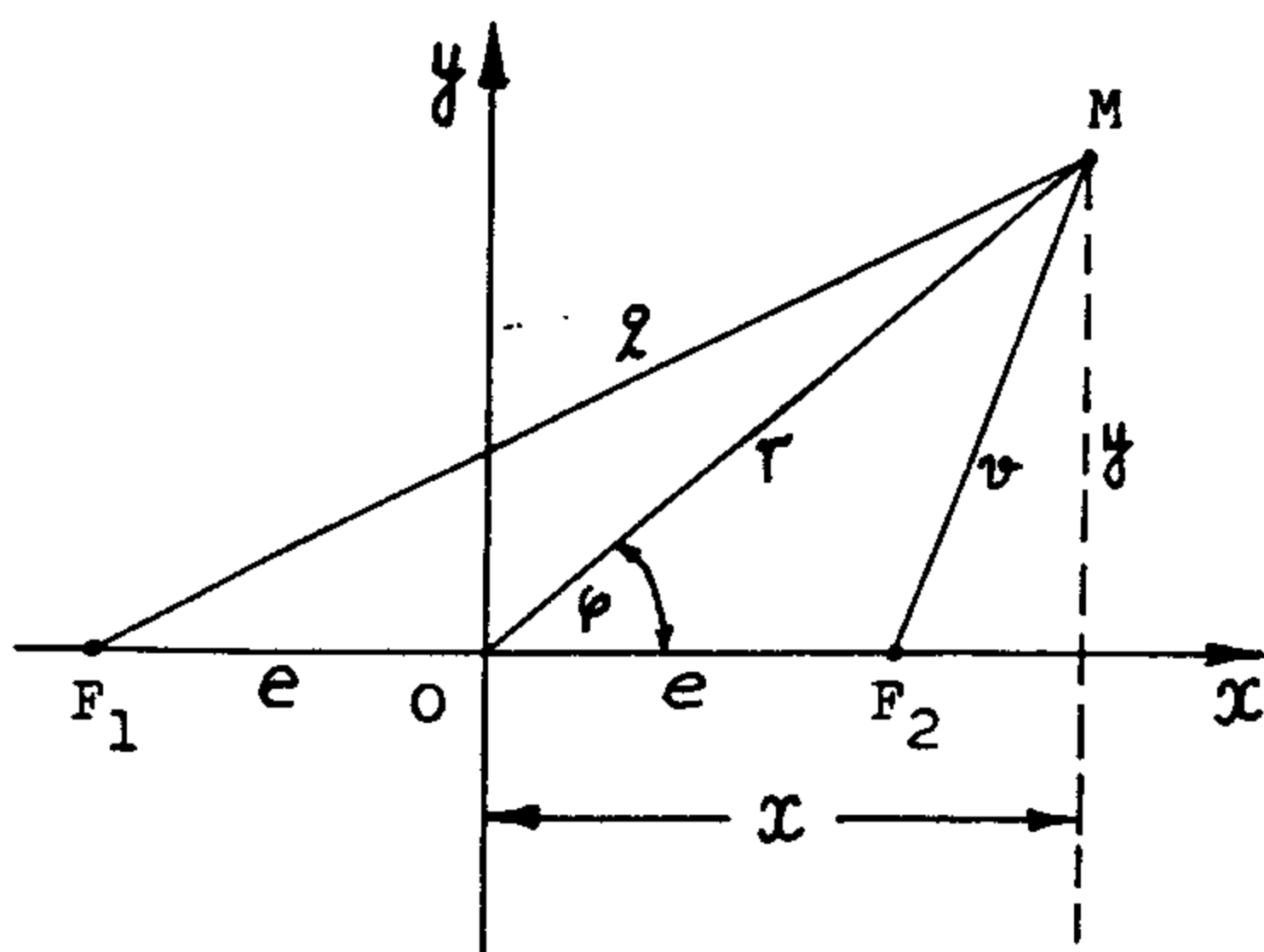
Kompjuterska tehnika nagovještava da se u budućnosti mogu očekivati i druge mogućnosti primjene muare figura, te prema tomu vrlo je važno znati osobine što je moguće većeg broja sistema muare figura. To je ujedno i jedan od ciljeva ove disertacije.

Jedno vrlo važno područje primjene muare figura je to da se pomoću njih mogu odrediti oblik pruga interferencije dvaju a i više koherentnih valova svjetlosti. Naime, muare figure dvaju sistema krivulja su spojnice presječnih točaka tih krivulja i predstavljaju njihovu geometrijsku interferenciju, jer spajaju najcrnija i najsvjetlija mjesta ravnine. Moser i dr. [20] su dokazali da se maksimumi interferencije dvaju snopova svjetlosti podudaraju sa muare figurama sistema krivulja jed-

nakih faza tih snopova svjetlosti u ravnini interferencije. U istom radu je pokazano da su linije jednakih faza sfernog vala svjetlosti granične kružnice zonske mrežice, da su linije jednakih faza cilindričnog vala u ravnini paralelnoj izvoru svjetlosti granični pravci Cornu-eve mrežice i da su linije jednakih faza ravnih valova sistem paralelnih ekvidistantnih pravaca.

1.3. Jednadžba sistema koncentričnih lemniskata

Zadane su dvije čvrste tačke F_1 i F_2 . Njihov je razmak $2 \cdot e$. Lemniskatu definiramo kao sistem točaka za koje je pro-



Slika 1.9.

dukt udaljenosti od tih čvrstih točaka upravo jednak e^2 . Označimo li udaljenosti sa ν i ρ , onda za tačke lemniskate vrijedi formula

$$\nu \cdot \rho = e^2 \quad (1.21)$$

To je već jednadžba u bipolarnim koordinatama.

Provesti ćemo je u polarne koordinate. Biramo os x na spojnicu F_1F_2 sa ishodištem O u sredini između njih. Sa slike slijedi

$$\nu^2 = (x - e)^2 + y^2 \quad (1.22)$$

$$\rho^2 = (x + e)^2 + y^2 \quad (1.23)$$

Kada zamjenimo u (1.21), dobijamo

$$(x^2 - 2 \cdot e \cdot x + e^2 + y^2) \cdot (x^2 + 2 \cdot e \cdot x + e^2 + y^2) = e^4$$

$$(x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4 \cdot e^2 \cdot x^2 = e^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2 \cdot e^2 \cdot (x^2 + y^2) + e^4 - 4 \cdot e^2 \cdot x^2 = e^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 \cdot e^2 \cdot (x^2 - y^2) \quad (1.24)$$

To je jednačba 4-tog stepena. Dakle lemniskata je krivulja 4-tog stepena, što znači da ju pravac može sjeći najviše u 4 točke.

Jednačbu lemniskate ćemo još provesti i u polarne koordinate. Transformacije glase

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Kako je

$$x^2 + y^2 = r^2$$

i

$$x^2 - y^2 = r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = r^2 \cdot \cos 2\varphi$$

zamjenom u (1.24), izlazi

$$r^2 = 2 \cdot e^2 \cdot \cos 2\varphi$$

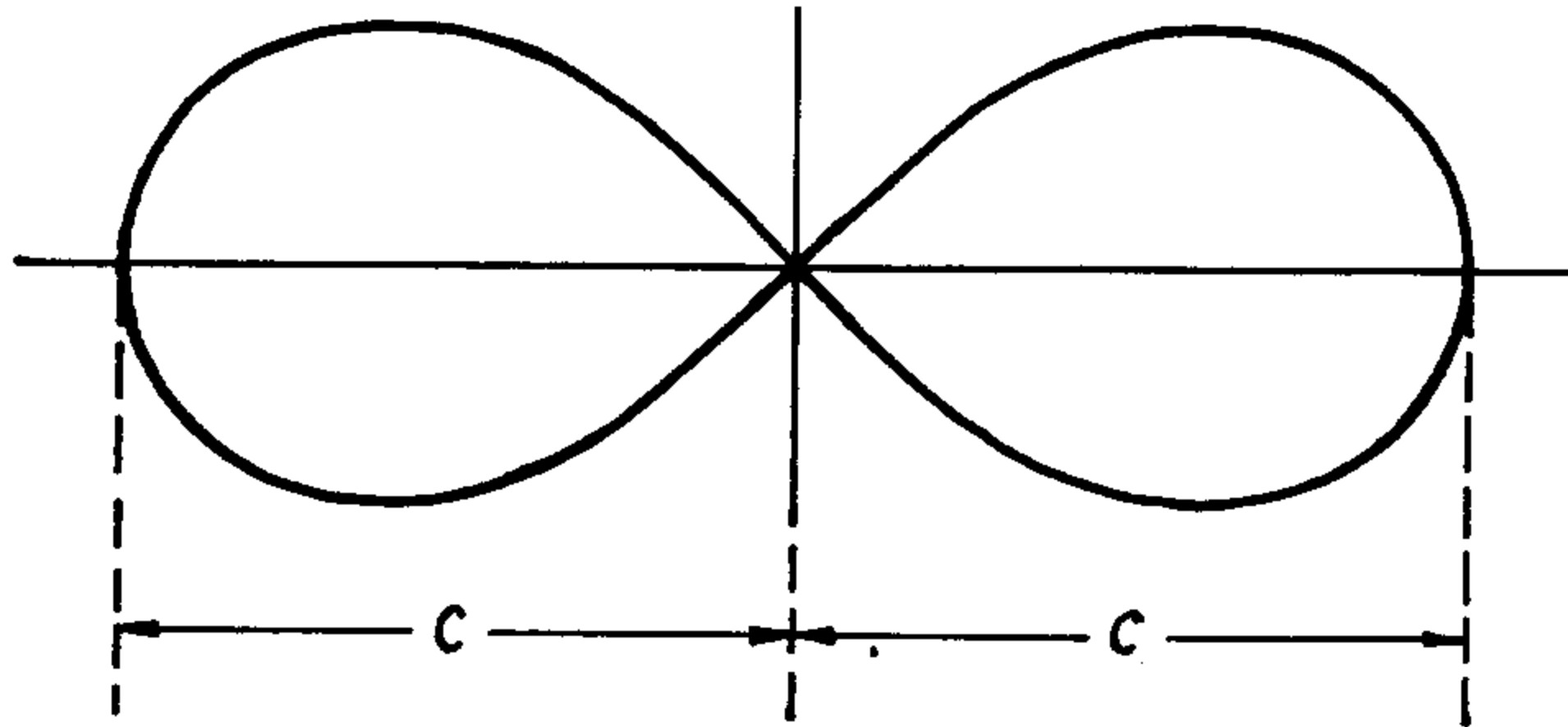
Označimo li

$$2 \cdot e^2 = c^2$$

imaćemo

$$r^2 = c^2 \cdot \cos 2\varphi \quad (1.26)$$

kao jednadžbu lemniskate u polarne koordinate. To je jednadžba koju donosi Demidovič u zbirci [31]. Jedna lemniskata, nacrtana prema formuli (1.26) predstavljena je na slici 1.10.



Slika 1.10.

Treba napomenuti da je lemniskata jedan poseban slučaj Cassinijevih ovala, koje imaju jednadžbu u općem obliku

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \cdot d^2 \cdot (x^2 - y^2) = e^4 - d^4$$

gdje je $d = e$.

Lemniskate se razlikuju po konstanti C . Zato jednadžbu sistema lemniskata možemo tako napisati da u toj konstanti uvedemo neki cijeli broj m . Najjednostavnije je staviti konstantu $C \cdot m$, gdje je C konstanta najmanje krive a kod ostalih su te konstante cijeli broj puta veći.

Postoji i mogućnost da izgradimo sistem lemniskata kod kojih se konstante odnose kao kvadratni korjени iz cijelih brojeva, dakle da uzmemo za konstantu $C \cdot \sqrt{m}$. Takav sistem zvat ćemo zonski sistem lemniskata i on će biti osnov ovog rada. Ime potiče iz analogije sa zonskim sistemom kružnica, koji predstav-

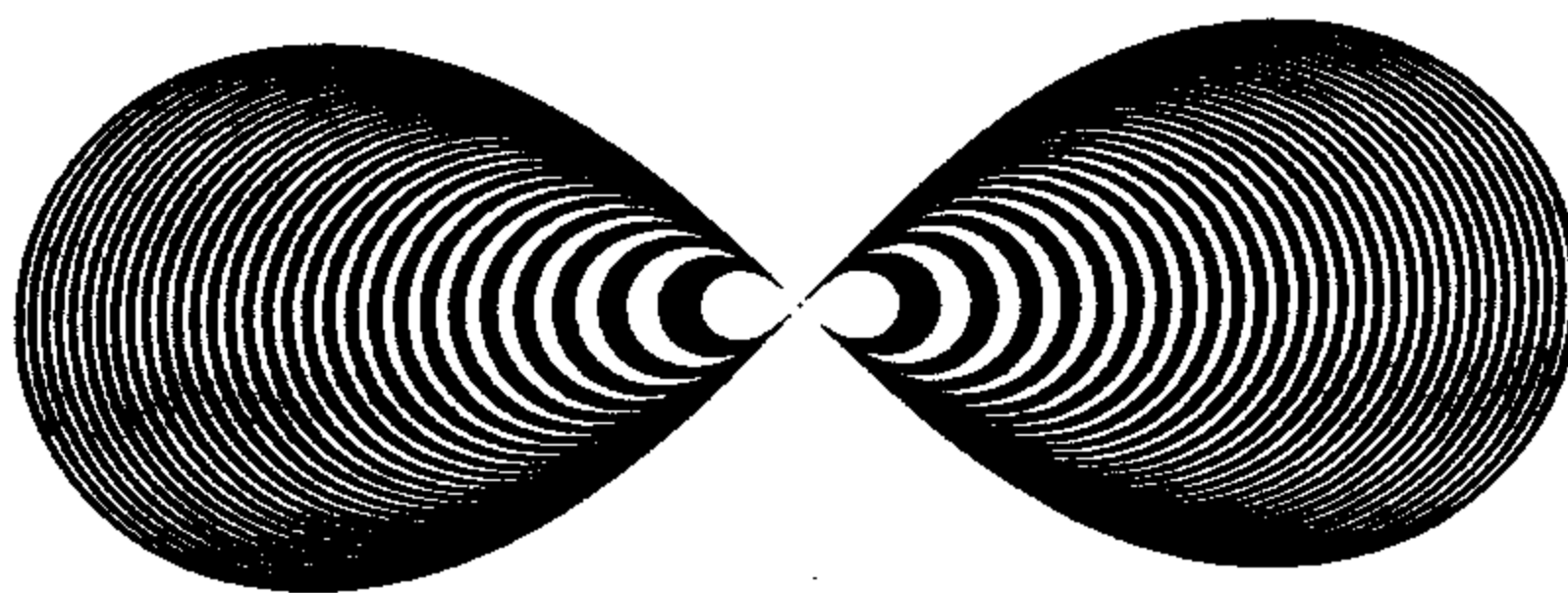
lja sistem koncentričnih kružnica kojima se polunjeri odnose kao kvadratni korjени iz cijelih brojeva. Naime takav sistem kružnica ograničuje Fresnel-ove zone kod objašnjenja difrakcije svjetlosti na okruglom otvoru.

Takav zonski sistem lemniskata imat će jednadžbu

$$r^2 = c^2 \cdot m \cdot \cos 2\varphi \quad (1.27)$$

Kako je ta jednadžba dosta jednostavna, bit će zgodno za upotrebu u daljem radu.

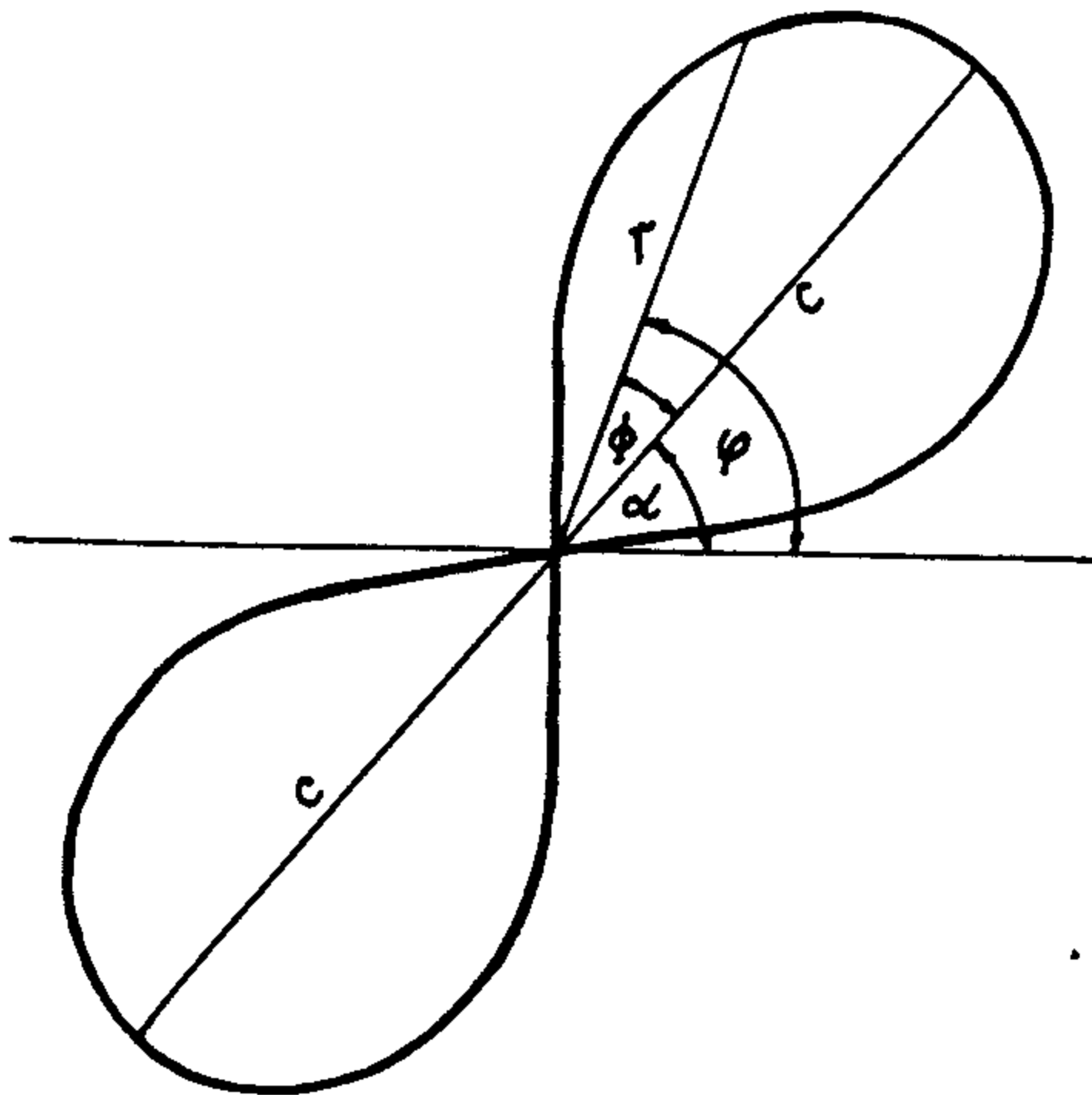
Slika 1.11 prikazuje takav sistem lemniskata, određen numeričkim izračunavanjem pomoću formule (1.27).



Slika 1.11.

Da bi se muare figure bolje vidjele, razmaci između susjednih krivulja naizmenično su crni i bijeli. Karakteristično je za taj sistem krivulja da ne pokriva cijelu ravninu nego je polovina ravnine između $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$ i $5\pi/4 < \varphi < 7\pi/4$ prazna. To pokazuje i jednadžba jer za interval $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$ veličina 2φ između $\pi/2$ i $3\pi/2$ u kojem je intervalu $\cos 2\varphi$ negativan pa izlazi za r imaginarna vrijednost.

Zbog toga se kod muare figura mora voditi računa o područjima u kojima postoje lemniskate.



Slika 1.12

U našim računima će se javiti i slučaje-
vi kod kojih je mrežica
zakrenuta za neki kut α .
Uzmimo jednu lemniskatu
sa jednadžbom

$$r^2 = c^2 \cdot m \cdot \cos 2\phi \quad (1.28)$$

Ako je zakrenemo za kut
 α , kao na slici 1.12,
onda udaljenost r osta-
je ista u oba sistema ali
se mijenja polarni kut.

Taj je kut u novom siste-

mu φ i iz slike se vidi da je

$$\phi = \varphi - \alpha$$

i zato zakrenuti sistem lemniskata ima jednadžbu

$$r^2 = c^2 \cdot m \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \quad (1.29)$$

Uzmimo dalje da je sistem lemniskata paralelno pomak-
nut tako da mu je središte u točku (s, t) . Tada se jednadžba
u pravokutnom sistemu može pisati ovako:

$$[(x-s)^2 + (y-t)^2]^2 = c^2 \cdot m \cdot [(x-s)^2 - (y-t)^2]$$

ili

$$(x^2 + y^2 - 2sx - 2ty + s^2 + t^2)^2 = c^2 \cdot m \cdot (x^2 - y^2 - 2sx + 2ty + s^2 - t^2)$$

i pomoću transformacije izlazi za polarne koordinate

$$\begin{aligned} & (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi - 2r \cdot s \cos \varphi - 2r \cdot t \sin \varphi + s^2 + t^2)^2 = \\ & = c^2 \cdot m \cdot (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi - 2r \cdot s \cdot \cos \varphi + 2r \cdot t \cdot \sin \varphi + s^2 - t^2) \end{aligned}$$

i konačno

$$\begin{aligned} & [r^2 - 2r \cdot (s \cos \varphi + t \sin \varphi) + s^2 + t^2]^2 = \\ & = c^2 \cdot m \cdot [r^2 \cos 2\varphi - 2r \cdot (s \cos \varphi - t \sin \varphi) + s^2 - t^2] \quad (1.30) \end{aligned}$$

To je jednačba paralelno pomaknutog sistema lemniskata. Vidimo da je ona četvrtog stepena po r što je u skladu sa stepenom jednačbe u pravokutnim koordinatama. Samo kad je središte u ishodištu, kad je $s = 0$ i $t = 0$, može se sa r^2 kratiti pa izlazi jednačba drugog stepena.

Ako se pomak izvrši samo u smjeru osi sistema, treba uzeti $t = 0$, i dobije se jednačba

$$(r^2 - 2r \cdot s \cdot \cos \varphi + s^2)^2 = c^2 \cdot m \cdot (r^2 \cos 2\varphi - 2r \cdot s \cdot \cos \varphi + s^2) \quad (1.31)$$

Ako je pomak izvršen normalno na os lemniskate treba uzeti $s = 0$, pa izlazi jednačba

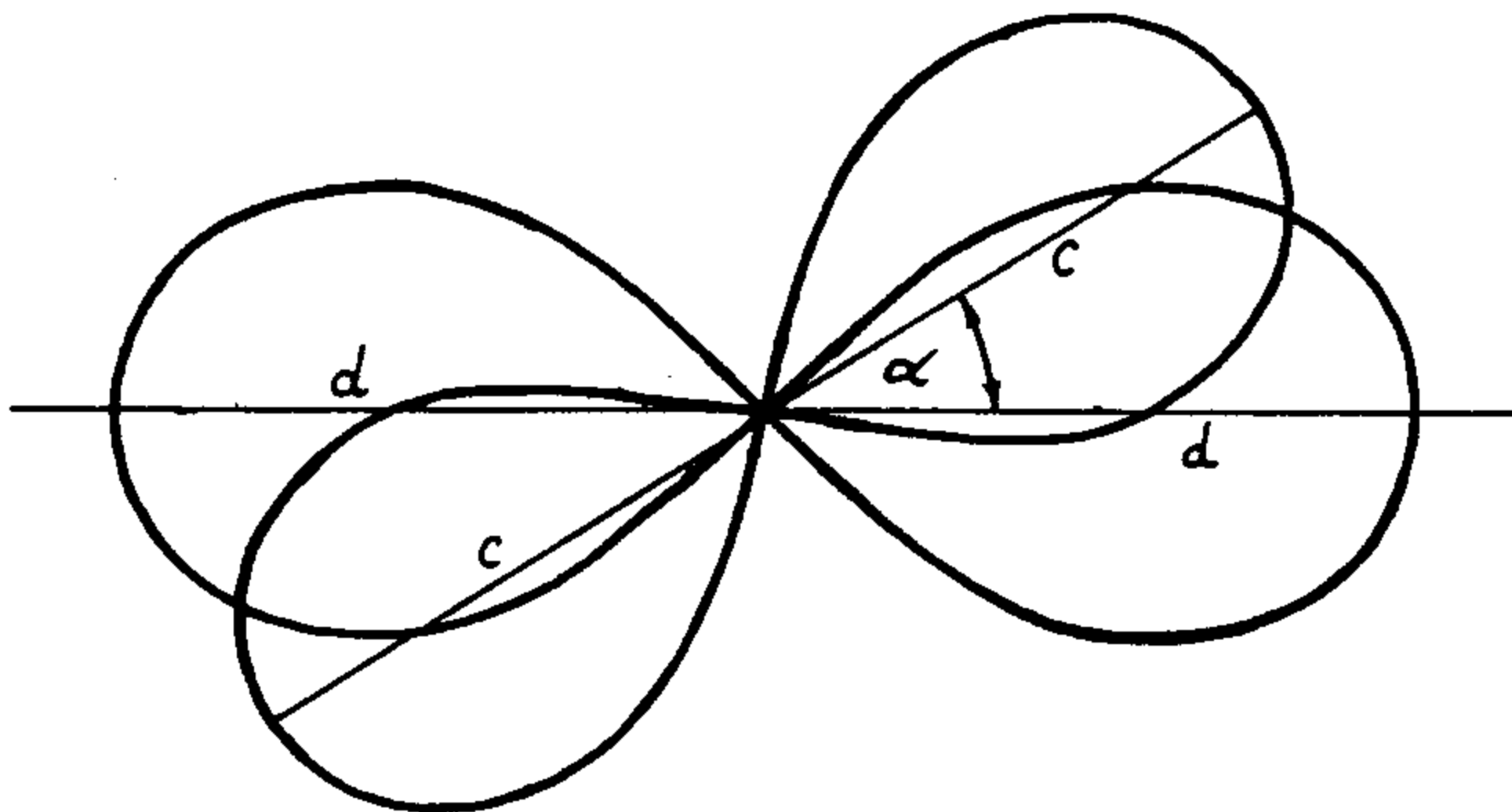
$$(r^2 - 2r \cdot t \cdot \sin \varphi + t^2)^2 = c^2 \cdot m \cdot (r^2 \cos 2\varphi + 2r \cdot t \cdot \sin \varphi - t^2) \quad (1.32)$$

U slučaju da je os sistema lemniskata još i zakrenuta za neki kut α , onda u ovim formulama treba samo mjesto kuta φ pisati $\varphi - \alpha$.

2. MUARE FIGURE DVAJU ZONSKIH SISTEMA LEMNISKATA

2.1. Odredjivanje komutacione granice

Pokrijmo dva sistema lemniskata koncentrično jedan na drugi. Osi tih dvaju sistema neka zatvaraju kut α . Tada su jed-



Slika 2.1.

nadžbe tih sistema

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= c^2 \cdot m \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \\ r^2 &= d^2 \cdot m \cdot \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Na slici 2.1 se vidi da se krivulje pokrivaju samo u intervalu $-\frac{\pi}{4} + \alpha < \varphi < \frac{\pi}{4}$ i u simetričnom području $\frac{3\pi}{4} - \alpha < \varphi < \frac{5\pi}{4}$. U ostalim djelovima ravnine nalaze se ili samo linije jednog

sistema ili linije uopće nema.

Ispitat ćemo najprije koje su muare figure efikasne u tim područjima. Zato pomoću (2.1) izračunavamo funkcije Ψ_1 i Ψ_2 .

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} - m \\ \Psi_2 &= \frac{r^2}{d^2 \cdot \cos 2\varphi} - m \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Derivacije tih funkcija po varijablama su

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} &= \frac{2r}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} \quad , & \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} &= \frac{2r}{d^2 \cdot \cos 2\varphi} \quad , \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} &= \frac{2r^2 \sin 2(\varphi - \alpha)}{c^2 \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha)} \quad , & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} &= \frac{2r^2 \sin 2\varphi}{d^2 \cdot \cos^2 2\varphi} \quad . \end{aligned}$$

To uvrstimo u formulu (1.20), pa dobivamo

$$G = \frac{4 \cdot r^2}{c^2 \cdot d^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \cdot \cos 2\varphi} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4 \cdot r^4 \sin 2(\varphi - \alpha) \cdot \sin 2\varphi}{c^2 \cdot d^2 \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha) \cdot \cos^2 2\varphi}$$

ili

$$G = \frac{4 \cdot r^2}{c^2 \cdot d^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \cdot \cos 2\varphi} \cdot [1 + \operatorname{tg} 2(\varphi - \alpha) \cdot \operatorname{tg} 2\varphi] \quad (2.3)$$

Prvi je faktor uvijek pozitivan. I drugi je faktor pozitivan za $\varphi > \alpha$. Da ispitamo što je u slučaju da je $\varphi < \alpha$, odredit ćemo komutacionu granicu $\underline{G} = 0$. To je kad

$$1 + \operatorname{tg} 2(\varphi - \alpha) \cdot \operatorname{tg} 2\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} (2\varphi - 2\alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi}$$

$$\frac{\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\varphi \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi}$$

$$\operatorname{tg}^2 2\varphi - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\varphi = -1 - \operatorname{tg} 2\varphi \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 2\varphi = -1 \quad (2.4)$$

i ova jednadžba nema realno rješenje. Zato nema ni komutacione granice i svuda je $G > 0$, dakle vide se samo suptraktivne muare figure.

2.2. Slučaj koncentričnih lemniskata

Odredit ćemo jednadžbe muare figura za slučaj kada lemniskate imaju zajedničko ishodište. Iz (2.1) slijedi

$$m = \frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)}$$

$$n = \frac{r^2}{d^2 \cdot \cos 2\varphi}$$

Jednadžbu suptraktivnih muare linija dobijamo zamjenom u jednadžbu (1.4)

$$\frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} - \frac{r^2}{d^2 \cdot \cos 2\varphi} = p$$

$$r^2 [d^2 \cdot \cos 2\varphi - c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)] = c^2 \cdot d^2 \cdot p \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \cdot \cos 2\varphi$$

$$r^2 = \frac{c^2 \cdot d^2 \cdot p \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \cdot \cos 2\varphi}{d^2 \cdot \cos 2\varphi - c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} \quad (2.5)$$

To je jednadžba muare figura u polarnim koordinatama. Prema toj formuli su numeričkim računom određene krive za slučaj $C=3.87$, $d=4.45$ i $\alpha=4^\circ$. Nekoliko muare linija nacrtano je na slici

$c=3.37$

$d=1.15$

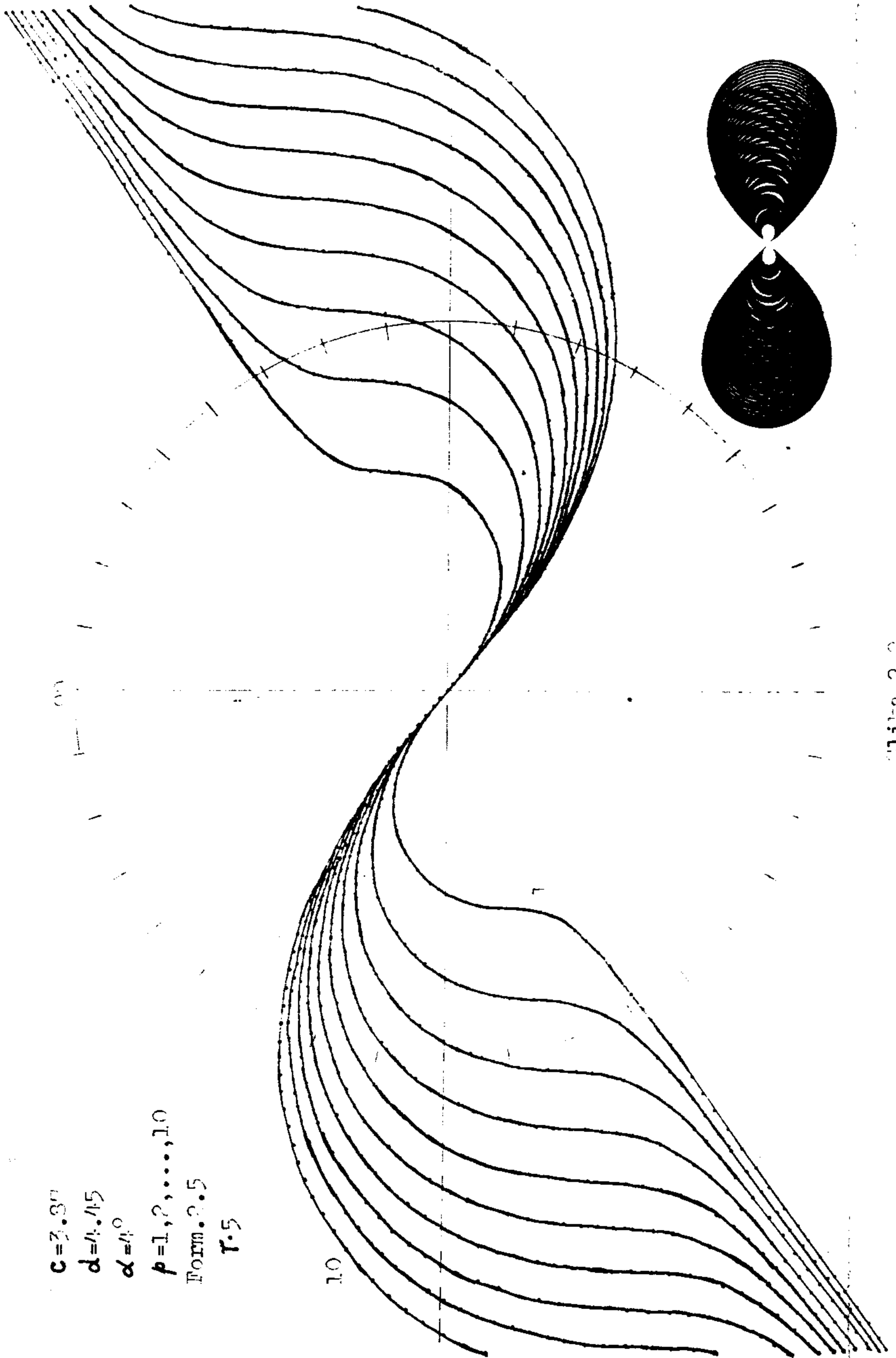
$\alpha=1^{\circ}$

$p=1, 2, \dots, 10$

Form. 2.5

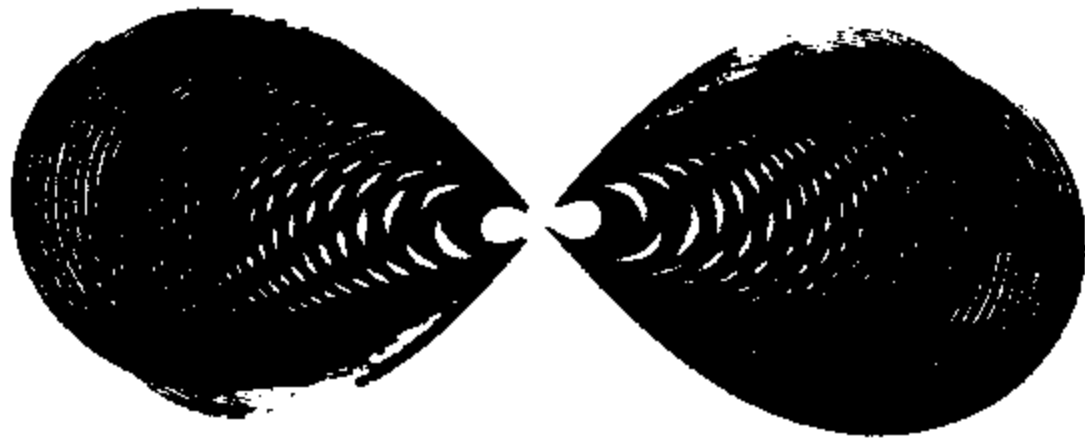
$r=5$

1.0



Линия 2.5.

2.2, a uz njih je predstavljena i fotografija pokrivanja dviju zonskih mrežica sa takvim elementima. Vidi se da se muare figure na grafikonu i fotografiji slažu.



Slika 2.3.

Kod većih kuteva između oviju mrežica muare figure su sve sličnije pravcima, što se vidi na fotografiji 2.3.

Ako obje mrežice imaju iste dimenzije $d=c$, jednačba (2.5) prelazi u

$$r = \frac{c^2 \cdot p \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \cdot \cos 2\varphi}{\cos 2\varphi - \cos 2(\varphi - \alpha)} \quad (2.6)$$

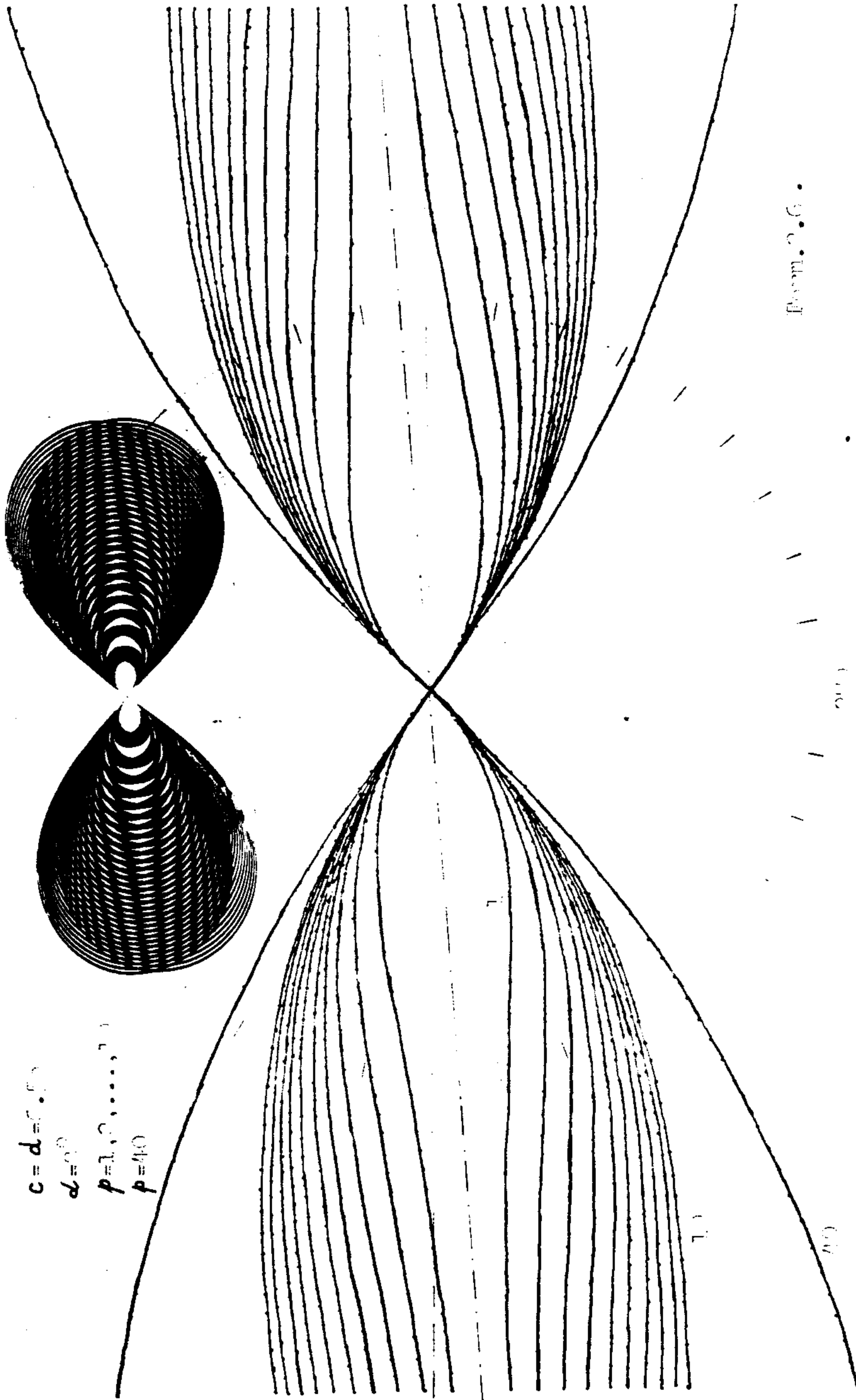
Prema toj formuli, za $c=6.5$ i $\alpha=8^\circ$, na grafikonu slike 2.4 numeričkim izračunavanjem dobivene su linije sa rednim brojem od 1 do 10 i linija sa rednim brojem 40. Fotografija uz njih pokazuje da se rezultati potpuno slažu. Treba napomenuti da sve te linije prolaze kroz ishodište koordinatnog sistema, udaljavaju se od jedne osi a zatim se njoj približavaju asimptotski to dalje što je redni broj linije p muare figure veći. Ta je osa jedna linija koja raspolovljava kut zakretanja jednog sistema u odnosu na drugi sistem α .

Uzmimo specijalni slučaj da su osi obaju sistema lemniskata identične. Tada treba uzeti $\alpha=0$, pa iz (2.5) izlazi

$$r^2 = \frac{c^2 d^2 p \cdot \cos^2 2\varphi}{(d^2 - c^2) \cdot \cos 2\varphi}$$

$$r^2 = \frac{c^2 d^2}{d^2 - c^2} \cdot p \cdot \cos 2\varphi \quad (2.7)$$

Ovo je sistem zonskih lemniskata sa konstantom $\frac{c^2 d^2}{d^2 - c^2}$. Kako je



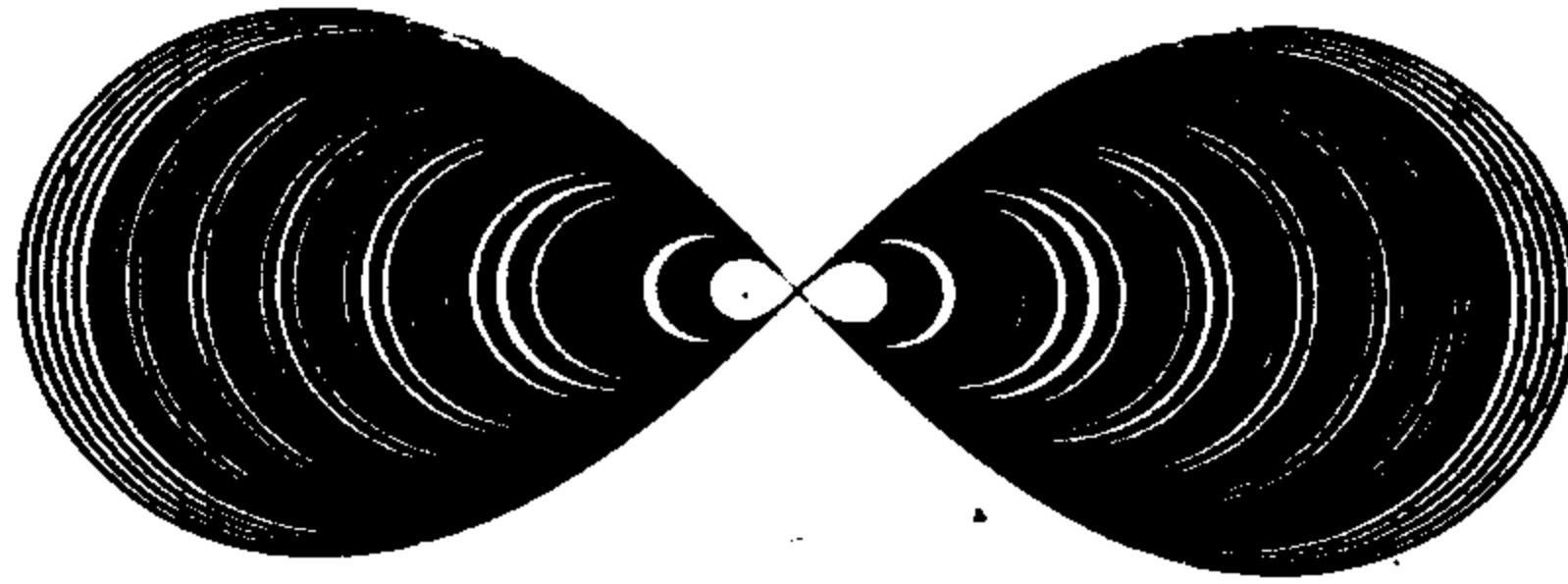
$c = d = 0.50$
 $d = 0.0$
 $p = 1, 0, 0, 0, 0, 0$
 $p = 40$

From 0.6

0.4

$$\frac{c^2 d^2}{d^2 - c^2} = c^2 + \frac{c^4}{d^2} + \dots,$$

vidi se da je ta konstanta veća od c^2 , pa to pokazuje da će muare figure predstavljati uvećani sistem lemniskata. To se vidi i na fotografiji slike 2.5.



Slika 2.5.

Ovo je poznata pojava muare povećanja koja je karakteristična kod muare figura ostalih vrsta mrežica.

Ova se pojava može koristiti u metrologiji za prividno povećanje neke pojave.

2.3. Slučaj pomaknutih lemniskata

Prelazimo dalje na slučaj kad su mrežice paralelno pomaknute u smjeru svojih glavnih osi za dužinu s .

Iz jednačbe pomaknute mrežice (1.31) dobiva se

$$m = \frac{(r^2 - 2rs \cos \varphi + s^2)^2}{c^2 (r^2 \cos 2\varphi - 2rs \cos \varphi + s^2)}$$

a iz jednačbe mrežice čije je središte u ishodištu

$$m = \frac{r^2}{d^2 \cos 2\varphi}$$

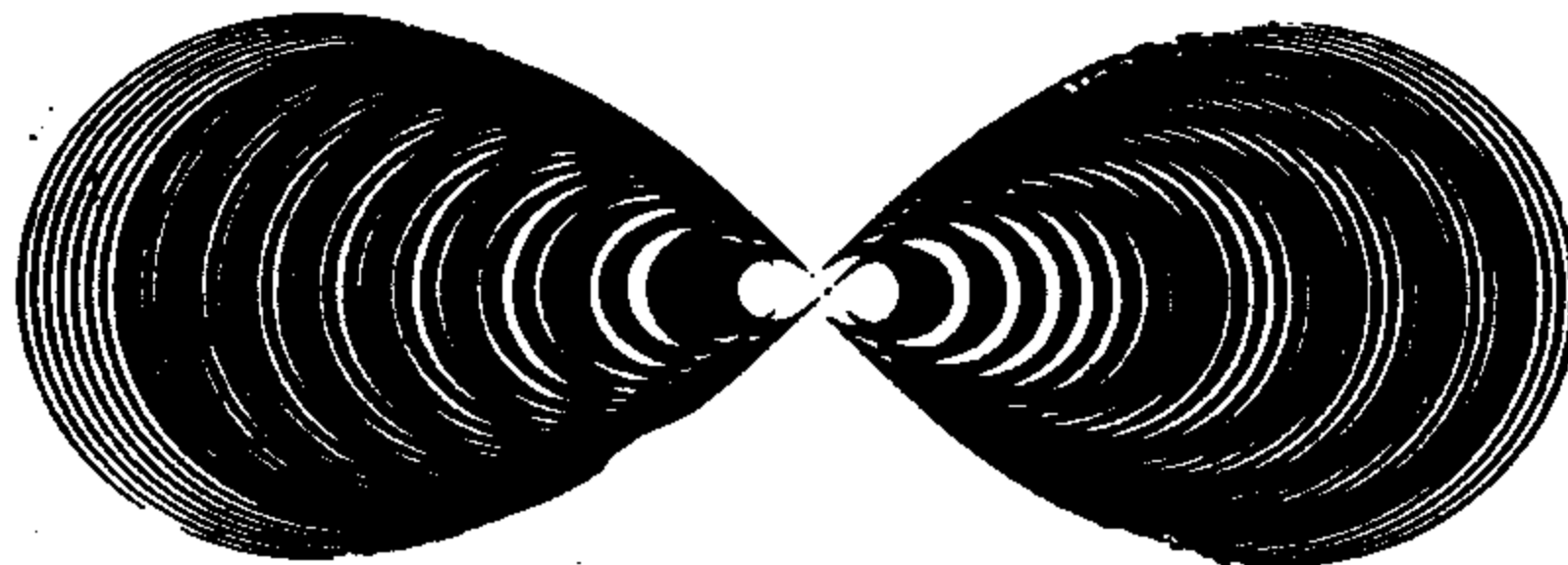
Jednadžba suptraktivnih muare figura glasi:

$$\frac{(r^2 - 2rs \cos \varphi + s^2)^2}{c^2(r^2 \cos 2\varphi - 2rs \cos \varphi + s^2)} - \frac{r^2}{d^2 \cos 2\varphi} = p$$

ili, kad se to malo sredi, dobiva se

$$\begin{aligned} & r^4 \cdot (d^2 - c^2) \cos 2\varphi + \\ & + r^3 \cdot (2c^2 - 4d^2 \cos 2\varphi) \cdot s \cos \varphi + \\ & + r^2 \cdot (4d^2 s^2 \cos^2 \varphi \cos 2\varphi + 2d^2 s^2 \cos 2\varphi - c^2 s^2 - pc^2 d^2 \cos^2 2\varphi) + \\ & + r \cdot (2pc^2 - 4s^2) \cdot s \cdot d^2 \cos \varphi \cos 2\varphi + \\ & + (s^2 - p^2 c^2) \cdot s^2 \cdot d^2 \cos 2\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

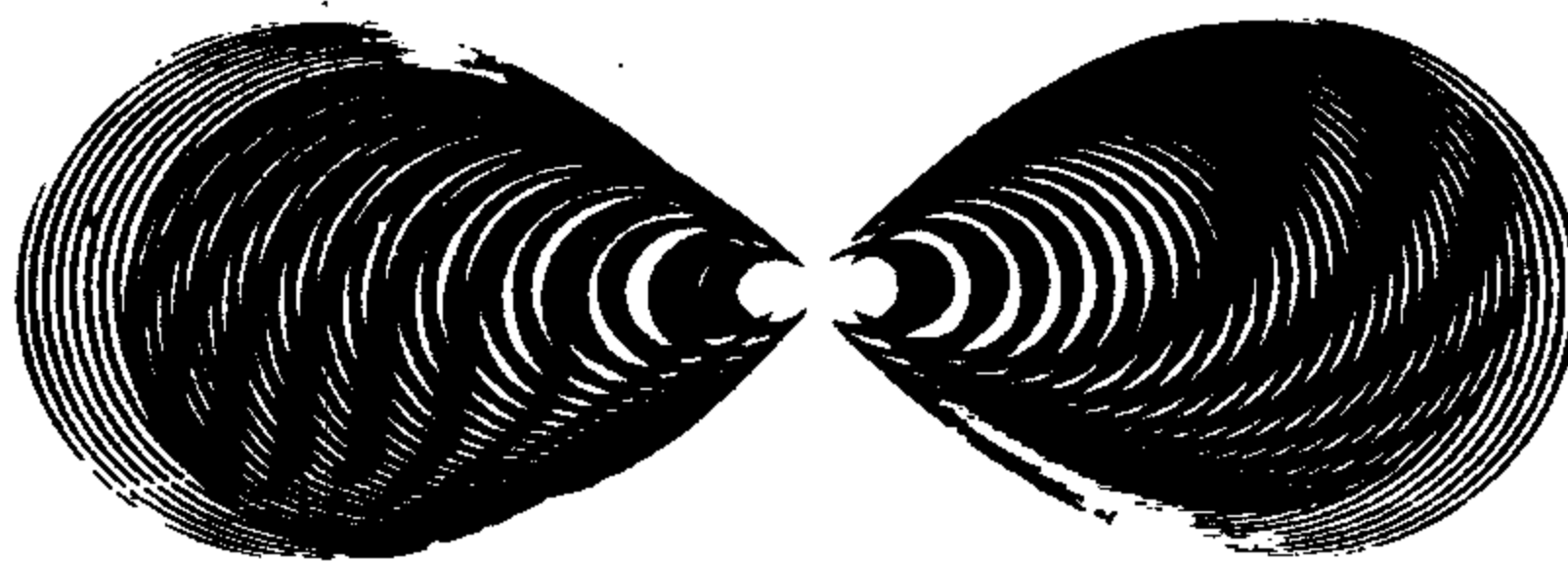
Ovo je jednadžba četvrtog reda i njezino rješenje je vrlo teško. Još bismo kompliciraniju jednadžbu dobili kad bi imali opći slučaj - zakrenuto. Zato ćemo se zadovoljiti sa pokazivanjem nekih fotografija. Karakteristični elementi parametara i položaja tih sistema prikazani su na tabeli 1, dok oblik muare figura jasno se vidi po priloženim slikama.



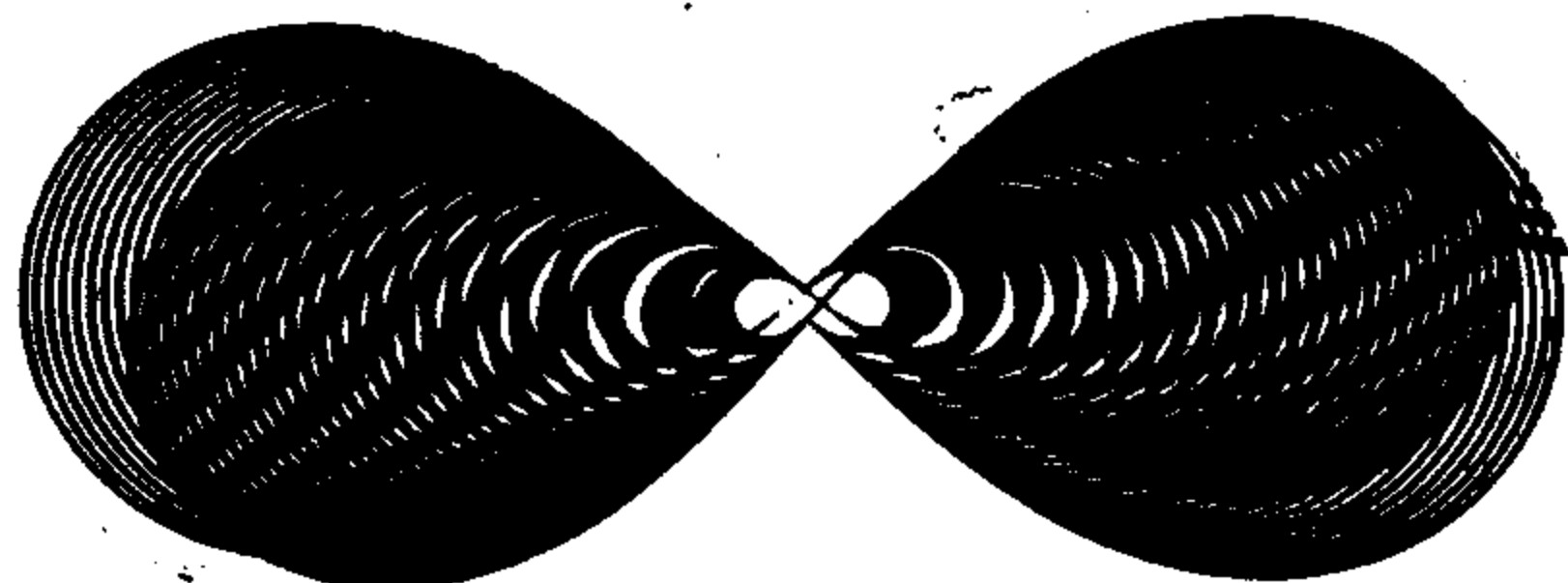
Slika 2.6.

Tabela 1.

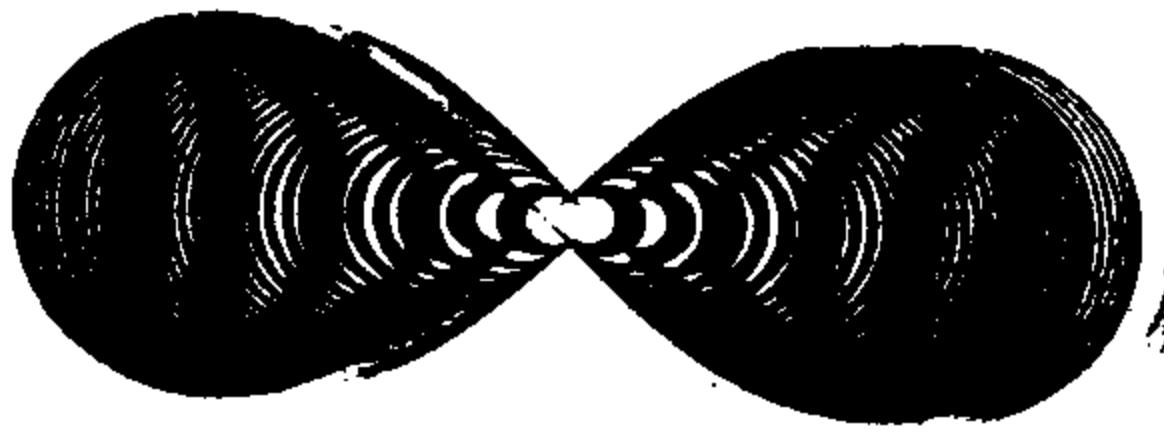
Slika	c	d	g	t	d
2.6.	6.5	5.848	2	0	0
2.7.	6.5	5.848	2	0	3
2.8.	6.5	5.848	2	0	7
2.9.	4.45	4.45	3	0	0
2.10.	4.45	4.45	3	0	6
2.11.	6.5	5.848	0	2	0
2.12.	6.5	5.848	0	2	6
2.13.	4.45	4.45	0	3	0
2.14.	4.45	4.45	0	3	10



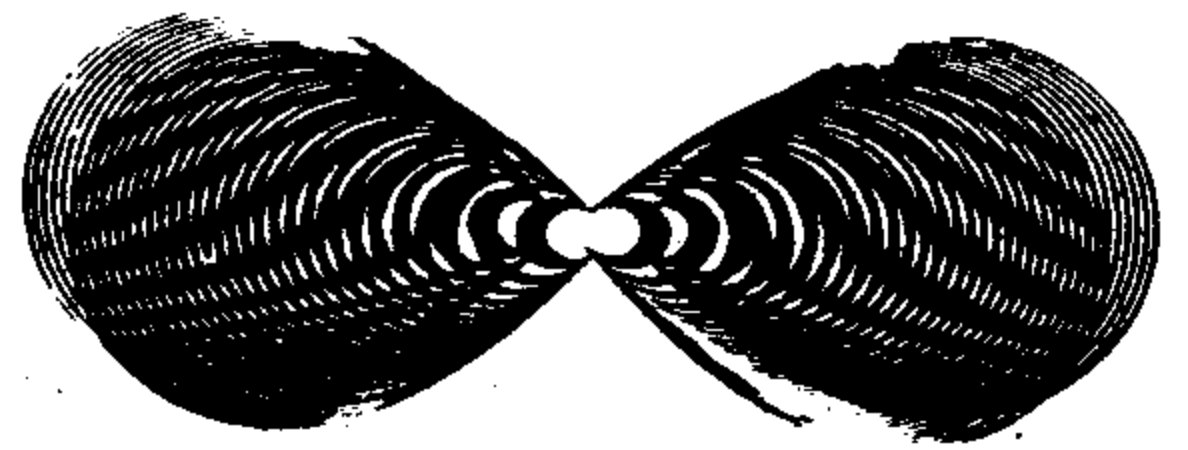
Slika 2.7.



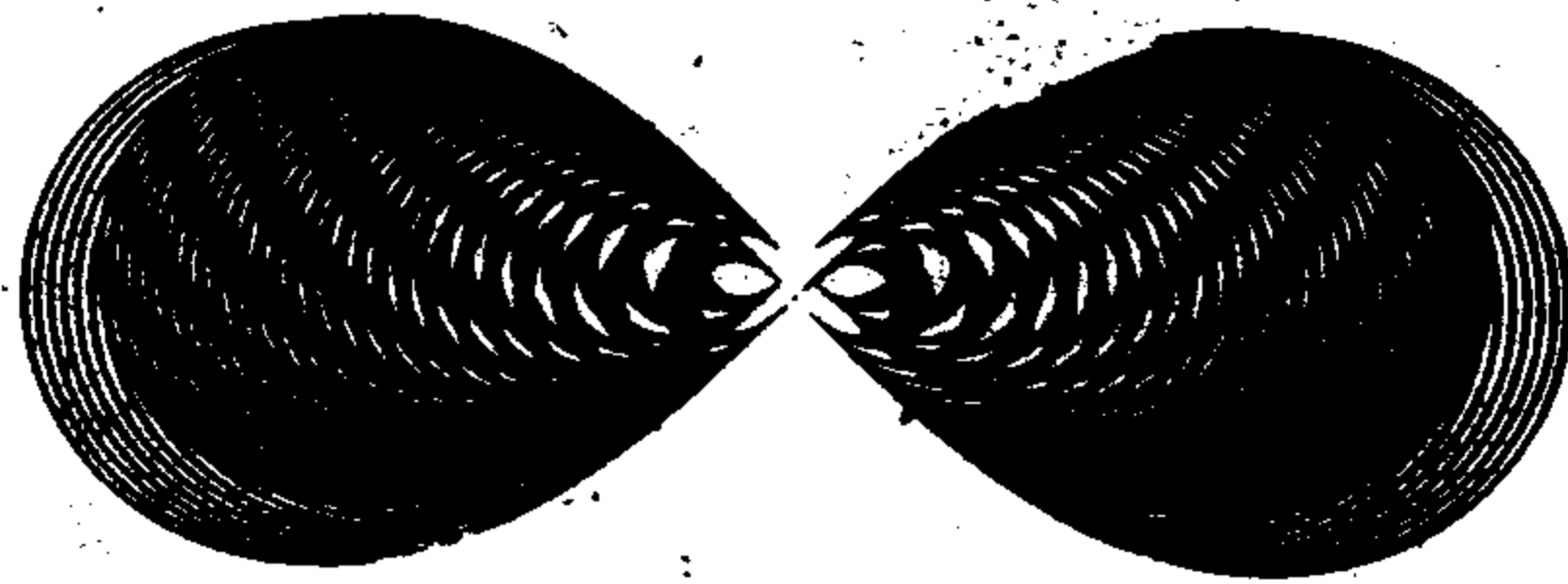
Slika 2.8.



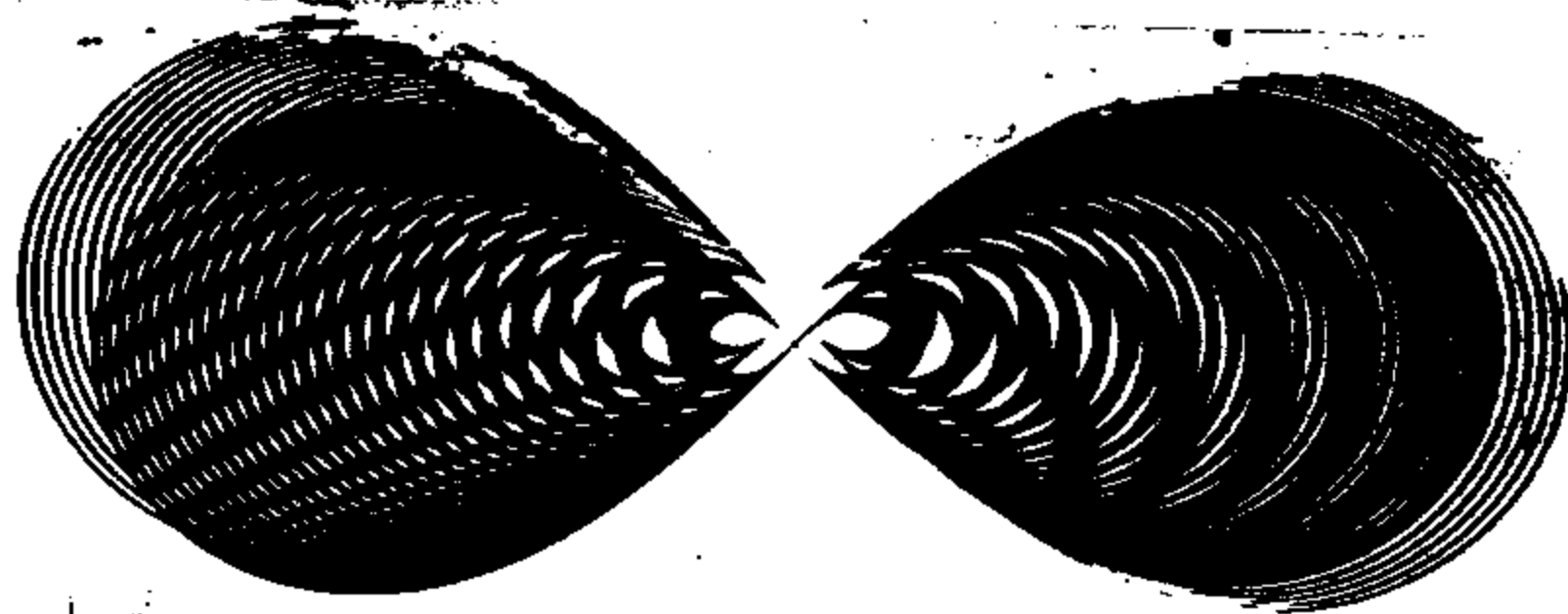
Slika 2.9.



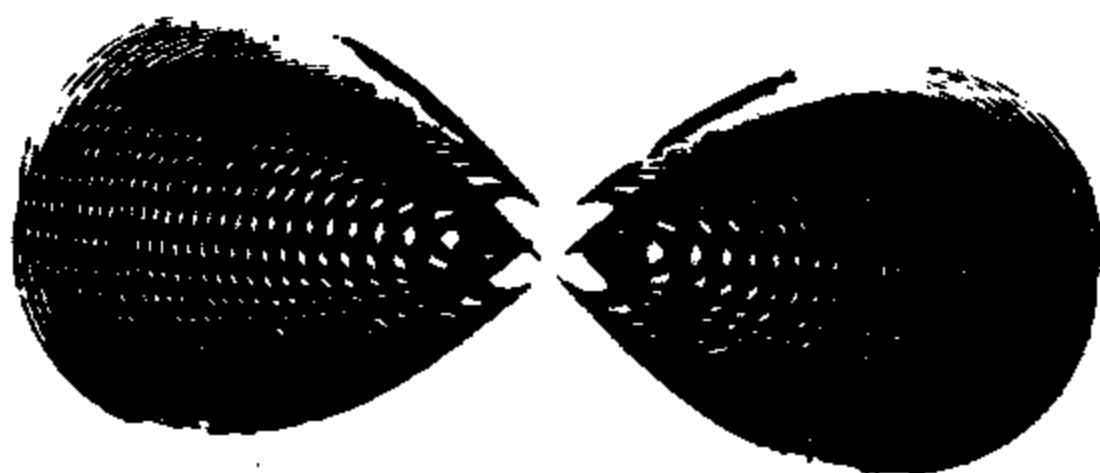
Slika 2.10.



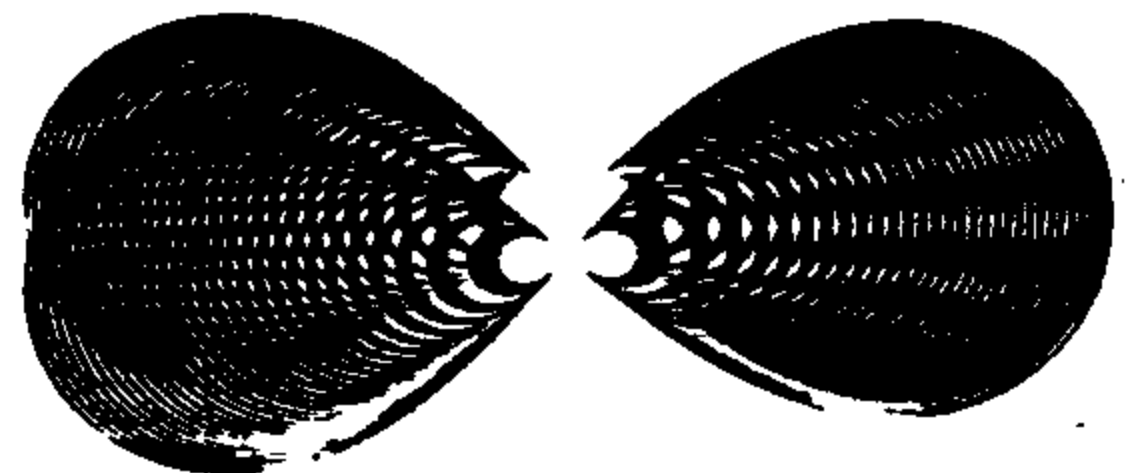
Slika 2.11.



Slika 2.12.



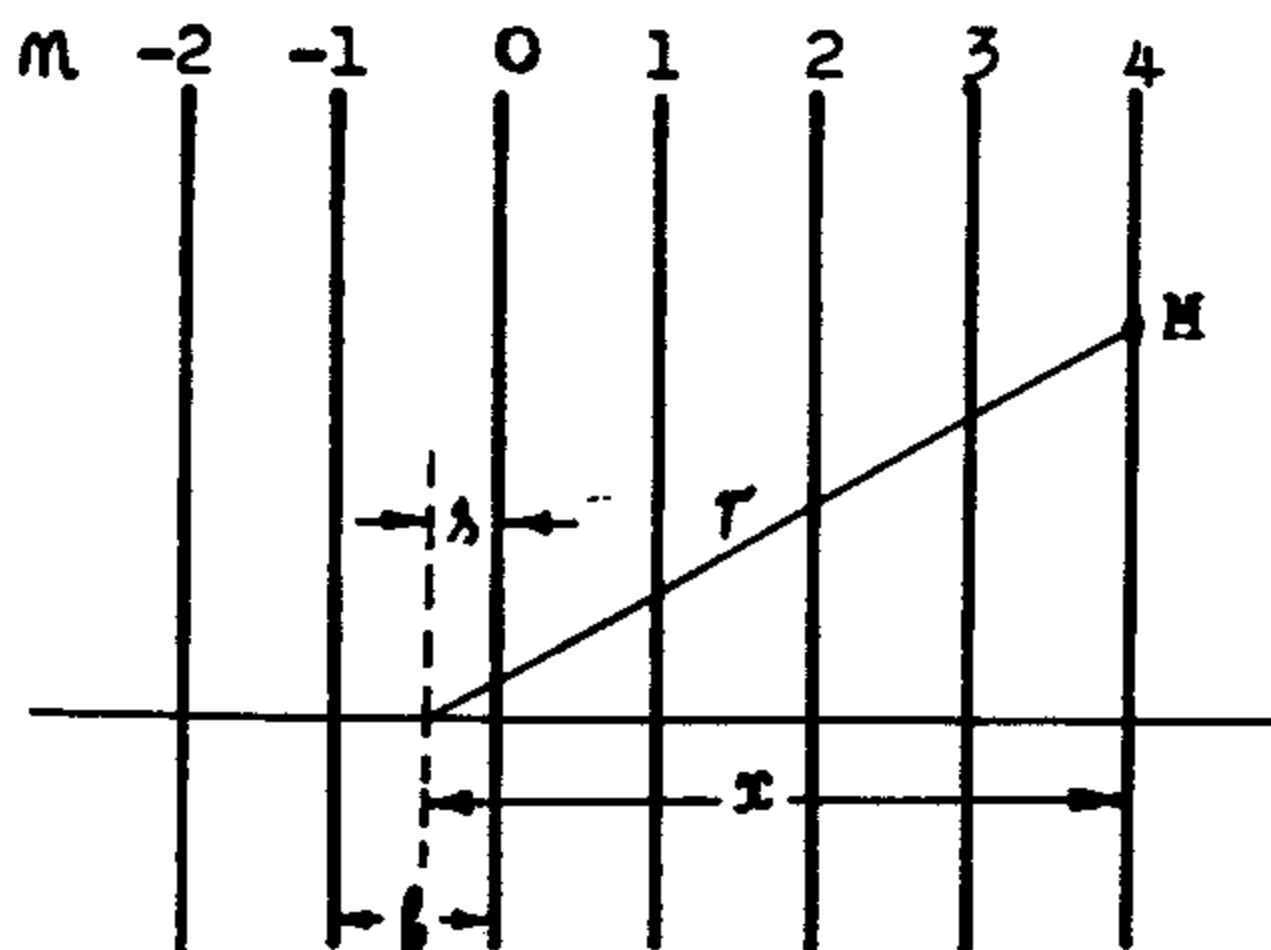
Slika 2.13.



Slika 2.14.

3. MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA SISTEMOM PARALELNIH EKVIDISTANTNIH PRAVACA

Pokrit ćemo zonski sistem lemniskata sa sistemom paralelnih ekvidistantnih pravaca. Položimo ishodište polarnog koordinatnog sustava u središte sistema lemniskata, a polarnu



Slika 3.1.

os uzmimo normalnu na sistem pravaca. U tom slučaju ćemo kut između osi lemniskata i polarne osi koordinatnog sistema označiti sa α .

Jednadžba sistema lemniskata je određena formulom (1.29). Treba još odrediti jednadžbu sistema pravaca. Na slici 3.1 prikazan je takav sistem pravaca. U pravokutnim koordinatama taj sistem bi imao jednadžbu

$$x = m \cdot b + s \quad (3.1)$$

Ovdje je b razmak medju pravcima a $s < b$ je udaljenost pravca $m=0$ od ishodišta.

U polarnim koordinatama ta jednadžba glasi

$$r \cdot \cos \varphi = m \cdot b + s \quad (3.2)$$

Ispitat ćemo najpre područje efikasnosti. Postavit ćemo najpre funkcije

$$\Psi_1 = \frac{r^2}{c^2 \cdot \cos^2(\varphi - \alpha)} - m \quad (3.3)$$

$$\Psi_2 = \frac{r \cdot \cos \varphi - s}{b} - m \quad (3.4)$$

i uvrstiti ih u formulu (1.20). Odredjujemo najpre izvode tih funkcija

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{2 \cdot r}{c^2 \cdot \cos^2(\varphi - \alpha)}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = \frac{\cos \varphi}{b},$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = \frac{2 \cdot r^2 \sin 2(\varphi - \alpha)}{c^2 \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha)}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} = -\frac{r \cdot \sin \varphi}{b}.$$

Slijedi

$$G = \frac{2 \cdot r \cdot \cos \varphi}{c^2 \cdot b \cdot \cos^2(\varphi - \alpha)} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2 \cdot r^2 \sin \varphi \sin 2(\varphi - \alpha)}{c^2 \cdot b \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha)}$$

$$G = \frac{2 \cdot r}{c^2 \cdot b \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha)} [\cos \varphi \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) - \sin \varphi \cdot \sin 2(\varphi - \alpha)]$$

$$G = \frac{2 \cdot r}{c^2 \cdot b \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha)} \cdot \cos(3\varphi - 2\alpha) \quad (3.5)$$

Prvi je faktor uvijek pozitivan i zato predznak tog izraza zavisi samo o drugom faktoru. Komutaciona granica se

nalazi na mjestima gdje je

$$\cos(3\varphi - 2\alpha) = 0$$

Dakle za

$$3\varphi - 2\alpha = \left(\begin{array}{c} \pm \frac{\pi}{2} \\ \pm \frac{3\pi}{2} \end{array} \right)$$

Prema tomu komutacionu granicu čine pravci

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \alpha \\ i \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \alpha \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

Područje efikasnosti suptraktivnih muare figura je ono za koje je

$$\cos(3\varphi - 2\alpha) > 0$$

to će biti u intervalu

$$-\frac{\pi}{2} \leq 3\varphi - 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

i zato

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\alpha \quad (3.7)$$

Analogno izlazi da su aditivne muare figure efikasne u intervalu

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\alpha$$

Kako eksperiment pokazuje da se uz suptraktivne figure nikad ne gledaju i aditivne, jer su ili u području gdje nema lemniskata ili je njihovo područje toliko usko da ih u njemu ne vidimo, ispitivat ćemo dalje samo suptraktivne muare figure toga sistema.

Iz (1.29) i (3.2) možemo sastaviti jednadžbu suptraktivnih muare figura

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2(\varphi - \alpha)} - \frac{r \cos \varphi - s}{b} = p$$

$$b \cdot r^2 - r \cdot c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \cos \varphi + c^2 \cos 2(\varphi - \alpha) (s - pb) = 0 \quad (3.8)$$

Njeno rješenje je

$$r = \frac{c^2}{2b} [c^2 \cos 2(\varphi - \alpha) \cos \varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2(\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi - 4c^2 b (s - pb) \cos 2(\varphi - \alpha)}] \quad (3.9)$$

Za numerički račun zgodniji je oblik te formule

$$r = \frac{c^2 \cos 2(\varphi - \alpha) \cos \varphi}{2 \cdot b} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{b \cdot (s - pb)}{c^2 \cos 2(\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi}} \right] \quad (3.10)$$

Prema ovoj formuli je proveden numerički račun za $c=4.45$, $b=0.8$, $s=0.2$ i $\alpha=12^\circ$. Rezultati su grafički predstavljeni na slici 3.2, a do njih je fotografija tog slučaja. Vidimo saglasnost izmedju teorije i eksperimenta.

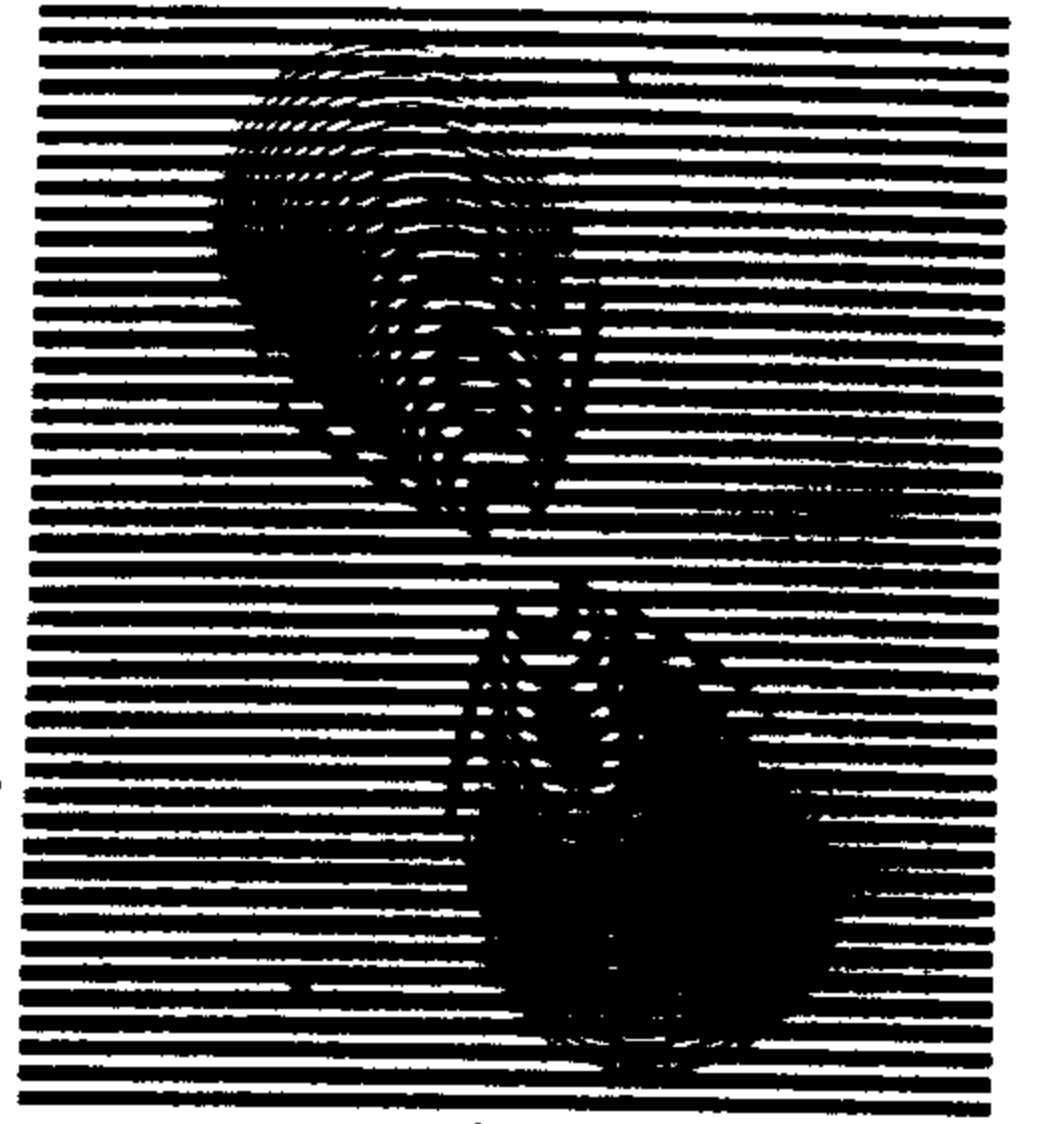
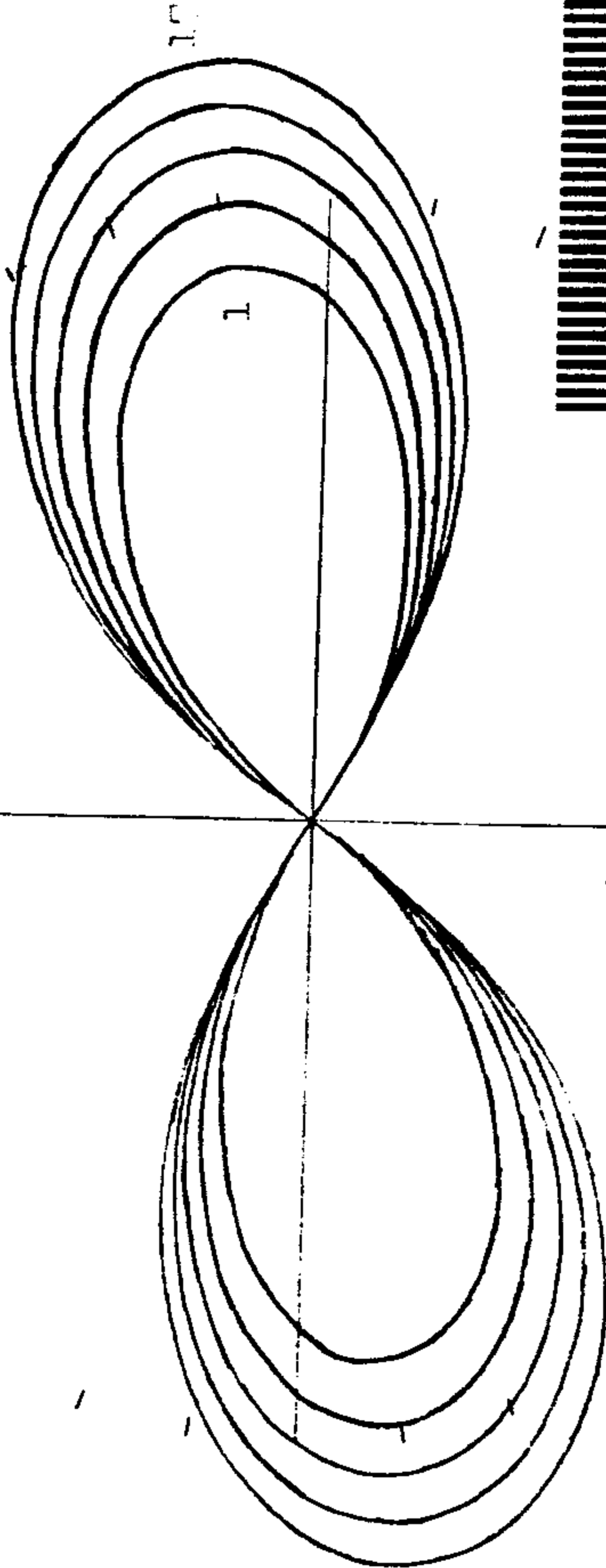
$$C = 4.15$$

$$b = 0.2$$

$$s = 0.2$$

$$\alpha = 120^\circ = \pi/1.5$$

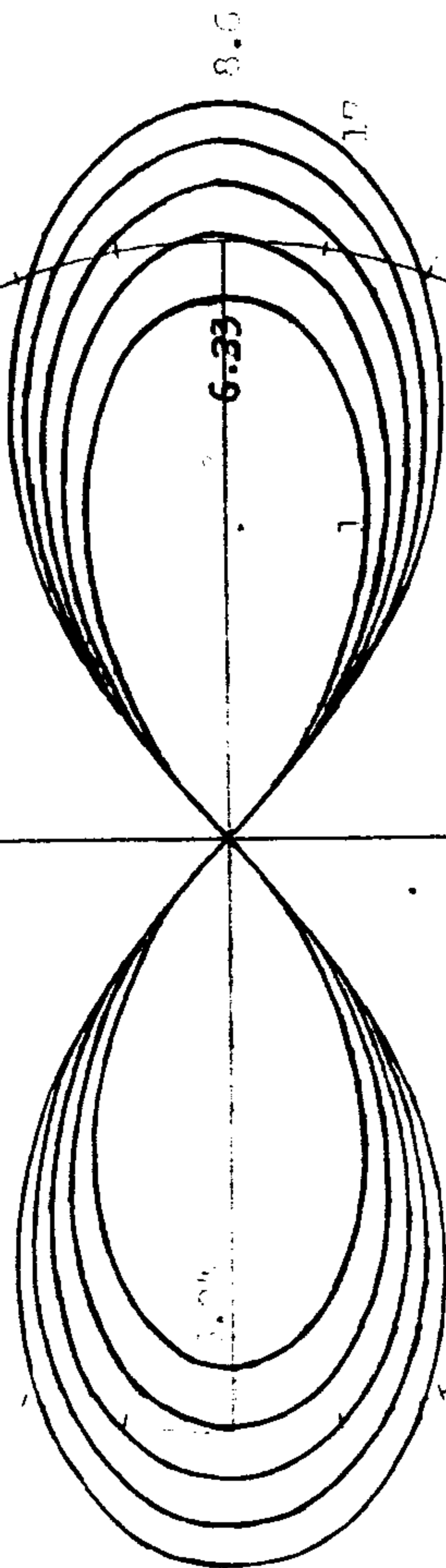
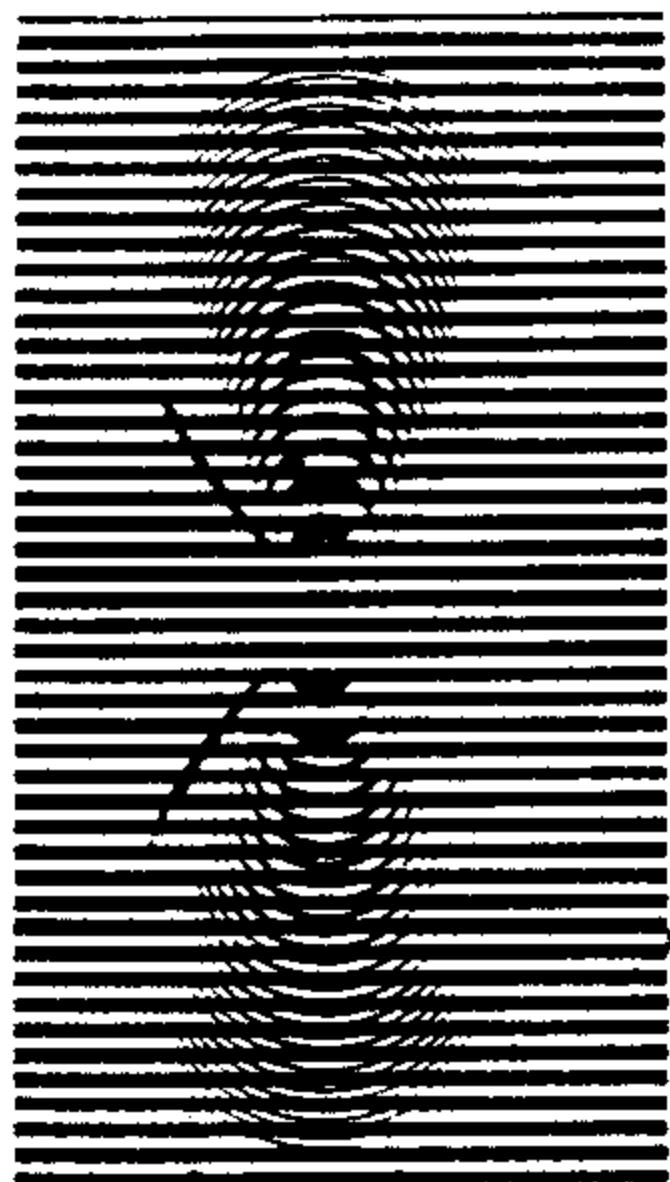
$$p = 1, 5, 9, 13, 17$$



Form. 3.10.

$r/15$

Figure 3.2.



$c = 0.475$
 $b = 0.2$
 $s = 0.2$
 $\alpha = 0$

$p = 1, 5, 0, 13, 17$

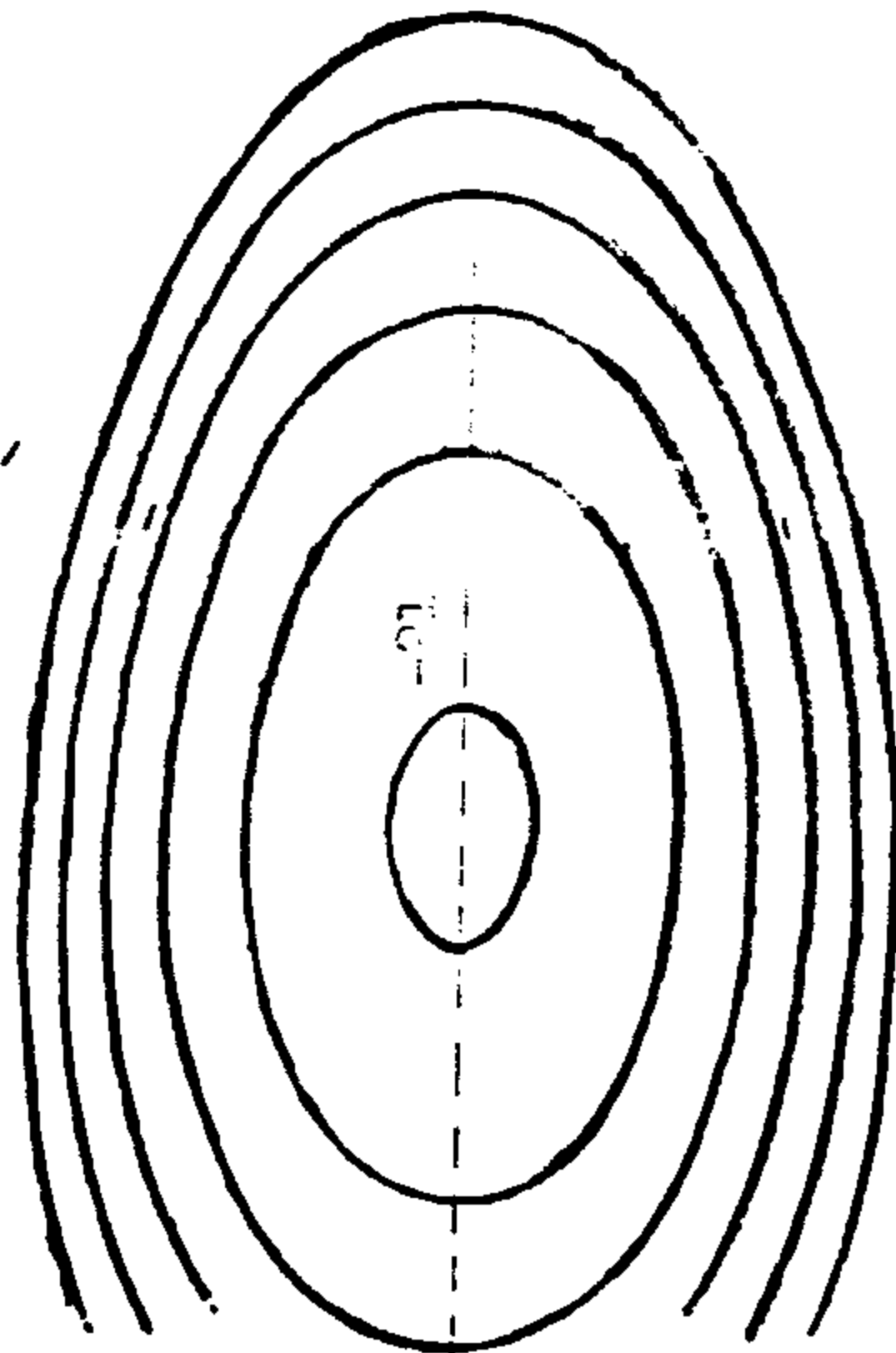
Form. 3.11.

$r/1$

Fig. 3.3.

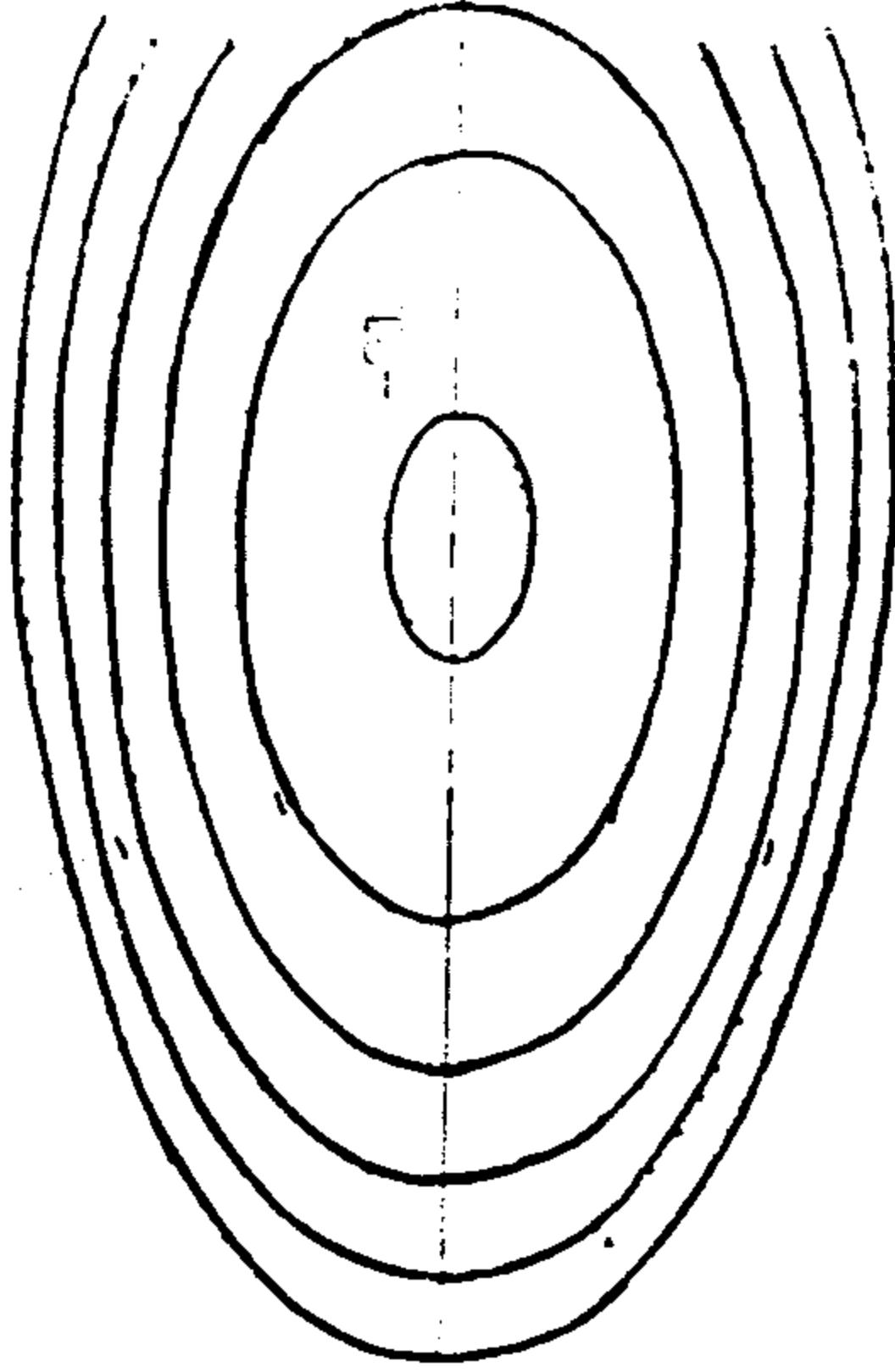
$c = 3.07$
 $b = 0.12$
 $\alpha = 0$
 $\beta = 0$

$p < 0$



-0.1

-1.1



-1.1

-0.1

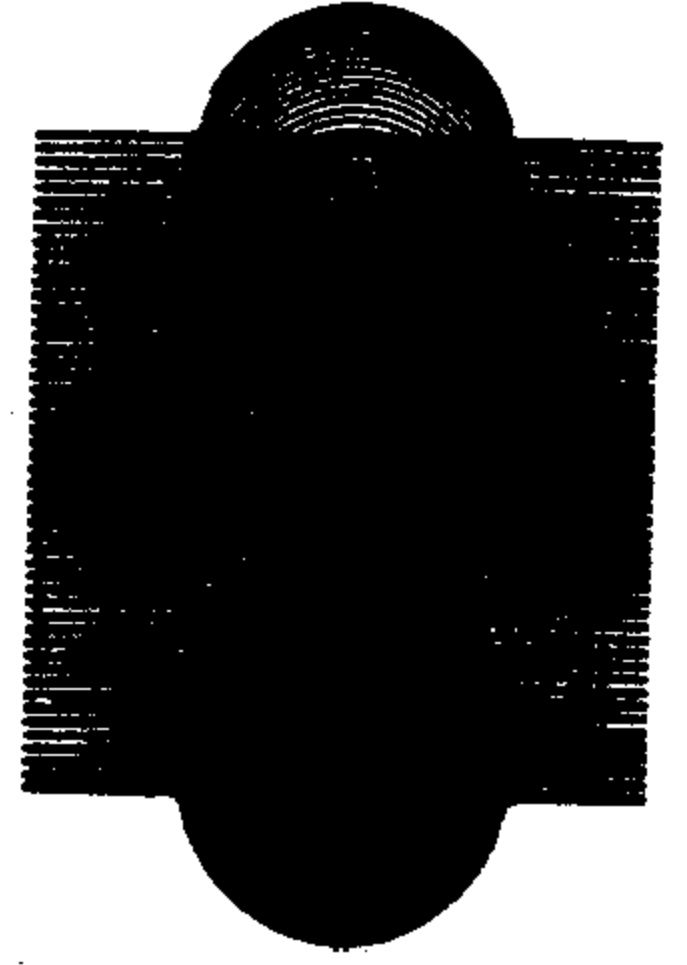
55

$p = -1.1, -1.3, -1.5, -1.7, -1.9, -2.1$

Form. 3.11.

1/2

Form. 3.11.



Rješenje (3.9) možemo specijalizirati za slučaj da je $\alpha=0$, dakle da je os lemniskate normalna pravcima. Izlazi

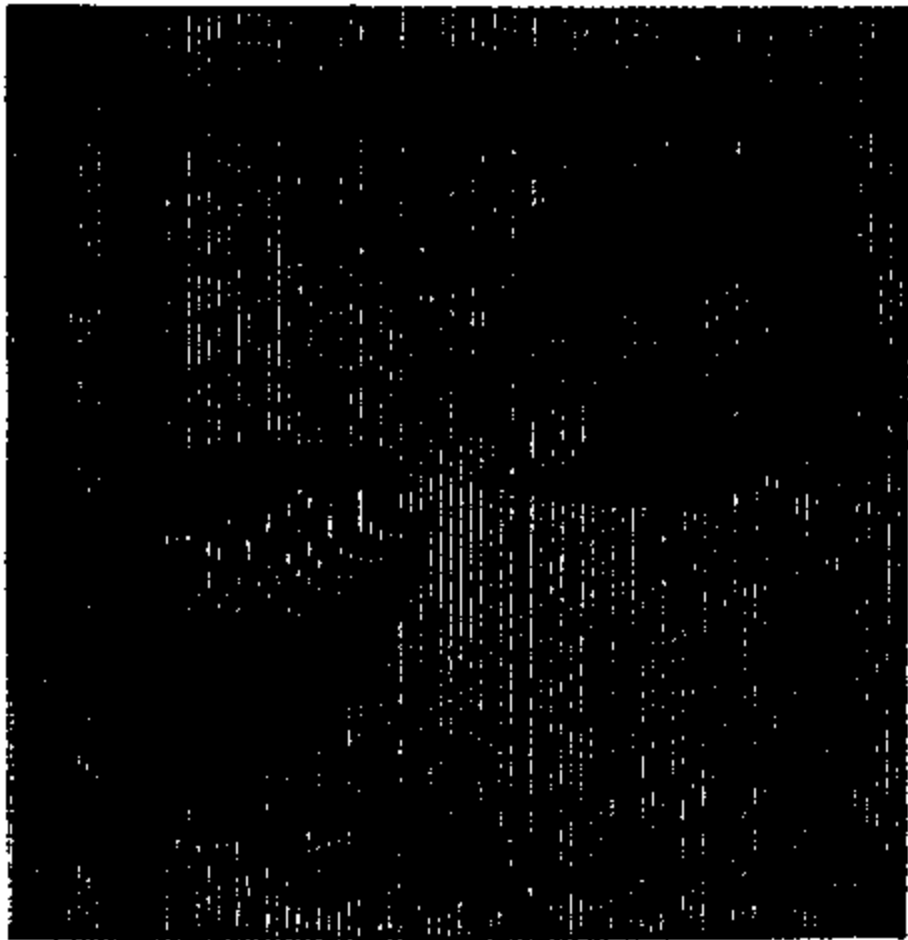
$$r = \frac{1}{2b} \left[c^2 \cos 2\varphi \cos \varphi \pm \sqrt{c^2 \cos^2 2\varphi \cos^2 \varphi - 4c^2 b \cdot (1 - pb) \cos 2\varphi} \right] \quad (3.11)$$

Na slici (3.3) se nalaze grafikoni tih linija i fotografija ovog slučaja muare figura.

U slučaju da je $\lambda=0$ rješenje glasi

$$r = \frac{1}{2b} \left[c^2 \cos 2(\varphi - \alpha) \cos \varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2(\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi + 4c^2 b^2 p \cos 2(\varphi - \alpha)} \right] \quad (3.12)$$

Medjutim, sve ovo što je pokazano je jedno rješenje, i to za $p \geq 0$. Već na rubovima fotografija na slikama 3.2 i 3.3 se mogu primjetiti neke druge linije što liče na elipse, a najbolje se mogu vidjeti na fotografiji slike 3.4. To su



Slika 3.5.

suptraktivne muare figure koje se dobijaju za $p < 0$. Na slici 3.4 su isto tako prikazani grafikoni tih figura, dobijeni numeričkim izračunavanjem pomoću formule (3.11) za $p < 0$.

Slika 3.5 prikazuje te figure za slučaj da je $\alpha = 30^\circ$.

Koje će se figure više vidjeti, zavisi od međusobnog odnosa veličine parametara c i b sistema koji se pokrivaju. Jasno je da kad je b puno manje od c , onda se bolje vide muare figure koje liče na elipsu.

**4. MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA ZONSKIM
SISTEMOM PARALELNIH PRAVACA**

Zonski sistem lemniskata ima jednadžbu

$$r^2 = c^2 \cdot m \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \quad (1.29)$$

a zonski sistem paralelnih pravaca

$$r \cdot \cos \varphi = \sqrt{m} \cdot b \quad (4.1)$$

Ovdje smo pretpostavili da se središta dvaju sistema linija podudaraju.

Da ispitamo konutacionu granicu i područje efikasnosti odredjujemo funkcije

$$\Psi_1 = \frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} - m \quad (4.2)$$

$$\Psi_2 = \frac{r^2 \cdot \cos^2 \varphi}{b^2} - m \quad (4.3)$$

Slijede izvode

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{2 \cdot r}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} \quad , \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = \frac{2 \cdot r \cdot \cos^2 \varphi}{b^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = \frac{2 \cdot r^2 \sin 2(\varphi - \alpha)}{c^2 \cos^2 2(\varphi - \alpha)} \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} = - \frac{2 \cdot r^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{b^2}$$

i možemo sastaviti funkciju

$$G = \frac{4 \cdot r^2 \cos^2 \varphi}{c^2 \cdot b^2 \cos 2(\varphi - \alpha)} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4 \cdot r^4 \sin 2(\varphi - \alpha) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{c^2 \cdot b^2 \cos^2 2(\varphi - \alpha)}$$

ili

$$G = \frac{4 \cdot r^2 \cos \varphi}{c^2 \cdot b^2 \cos^2 2(\varphi - \alpha)} \cdot \cos(3\varphi - 2\alpha) \qquad (4.4)$$

Vidimo da se ovaj rezultat razlikuje od onog u slučaju sistema ekvidistantnih pravaca samo za faktor $\cos \varphi$. U osnovnom intervalu vidljivosti suptraktivnih figura taj je faktor pozitivan i zato treba očekivati da će se vidjeti suptraktivne muare figure. Njihova je jednadžba

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2(\varphi - \alpha)} - \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{b^2} = p$$

ili

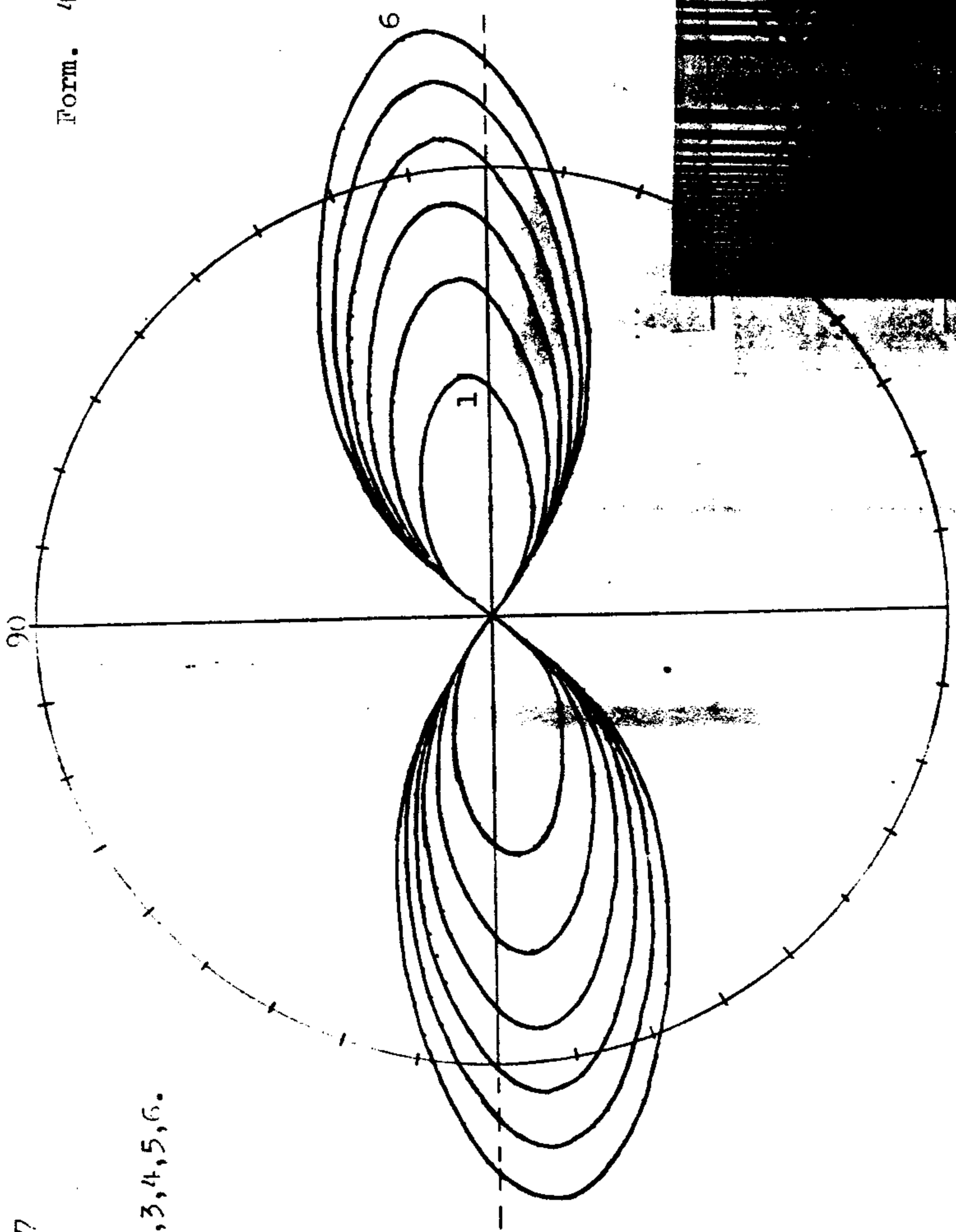
$$r^2 = \frac{c^2 \cdot b^2 \cdot p \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)}{b^2 - c^2 \cos 2(\varphi - \alpha) \cos^2 \varphi} \qquad (4.5)$$

Pomoću te formule izvršeno je numeričko izračunavanje za slučaj kad je $c=3.87$, $b=4.5$, $\alpha=8^\circ$ i krivulje su grafički prikazane na slici 4.1. Na istoj slici je predstavljena i fotografija pokrivanja takvih mrežica.

Oblik muare figura zavisi od kuta α . U slučaju sli-

Form. 4.5.

$c = 3.87$
 $b = 4.5$
 $\alpha = 8^\circ$
 $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$
 $p > 0$



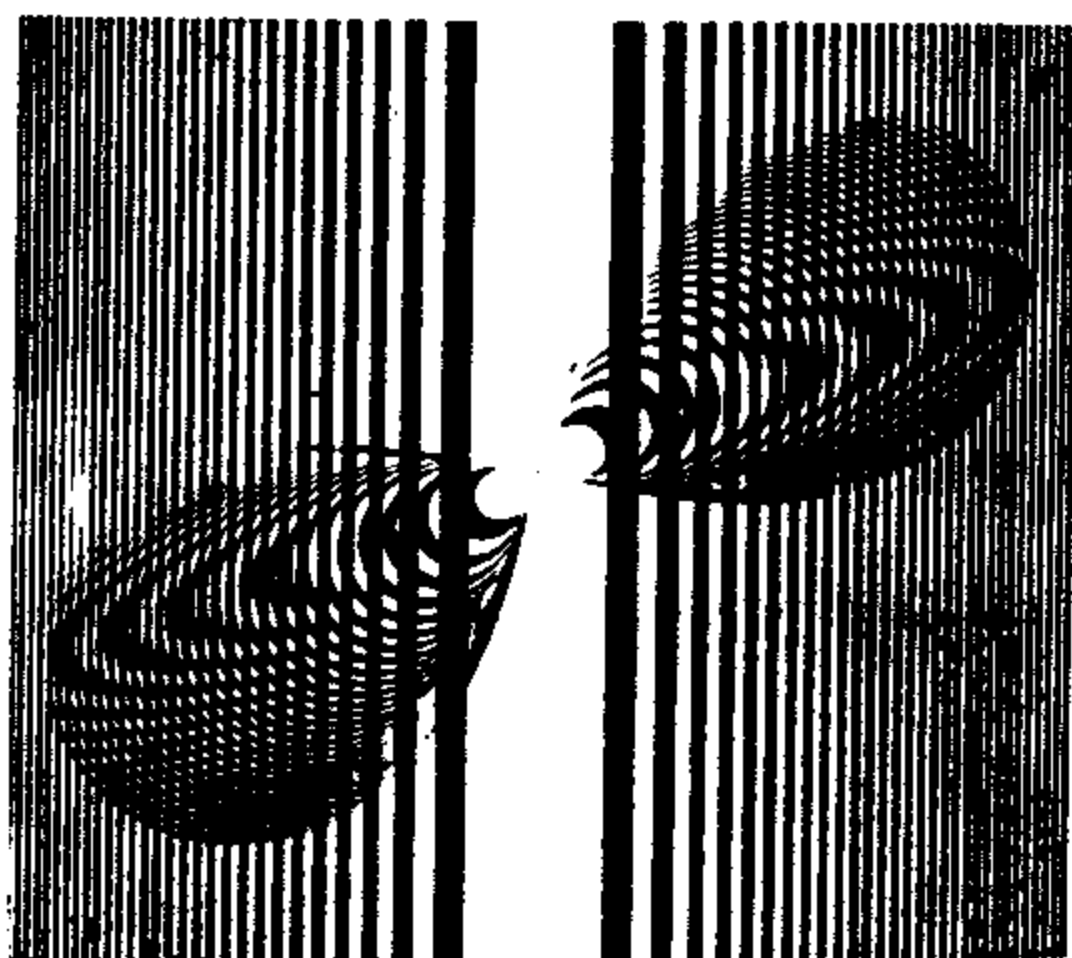
Slika 4.1.

ke 4.1 taj kut je mali. Za veći kut α imamo sliku 4.2.

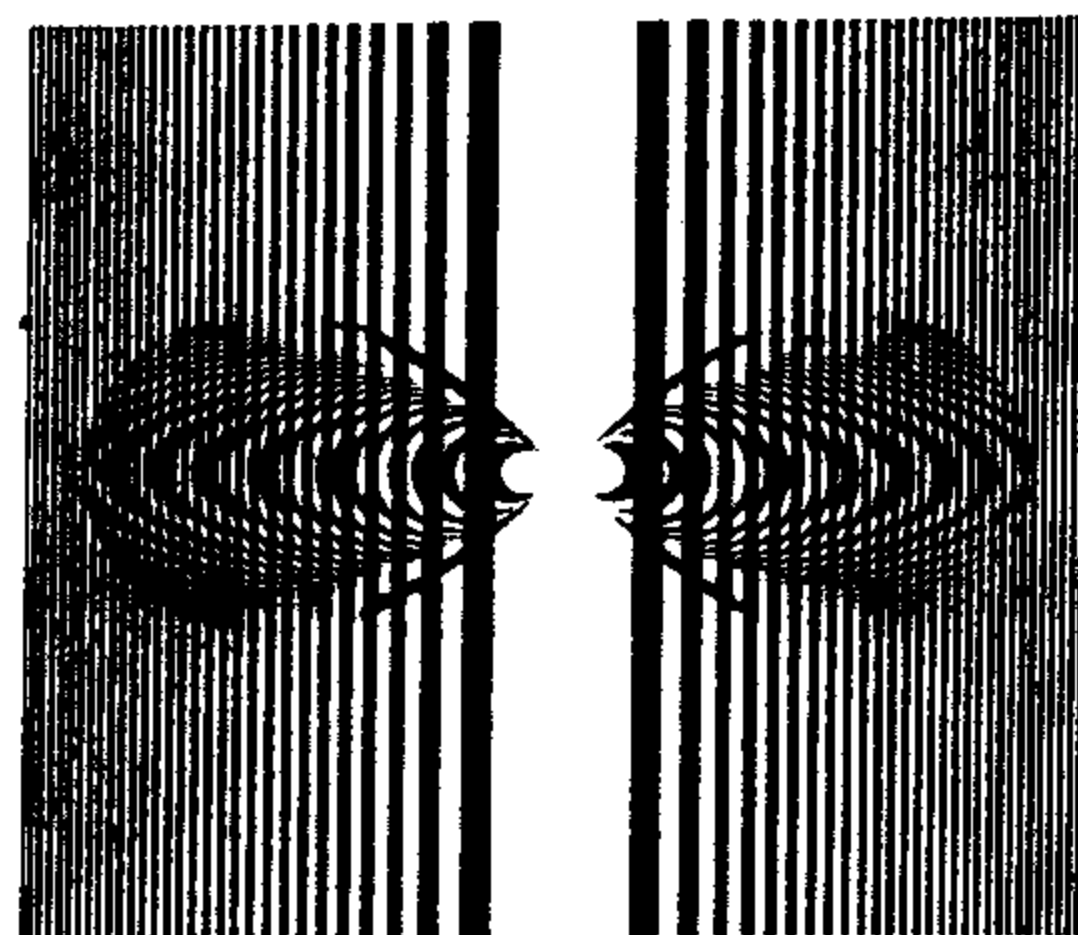
U slučaju kad je os lemniskata paralelna sa normalom na pravce, treba uzeti specijalno $\alpha = 0$ pa imamo jednadžbu

$$r^2 = \frac{c^2 b^2 p \cos 2\varphi}{b^2 - c^2 \cos 2\varphi \cos^2 \varphi} \quad (4.6)$$

Na slici 4.3 je fotografija takvog sistema muare figura.

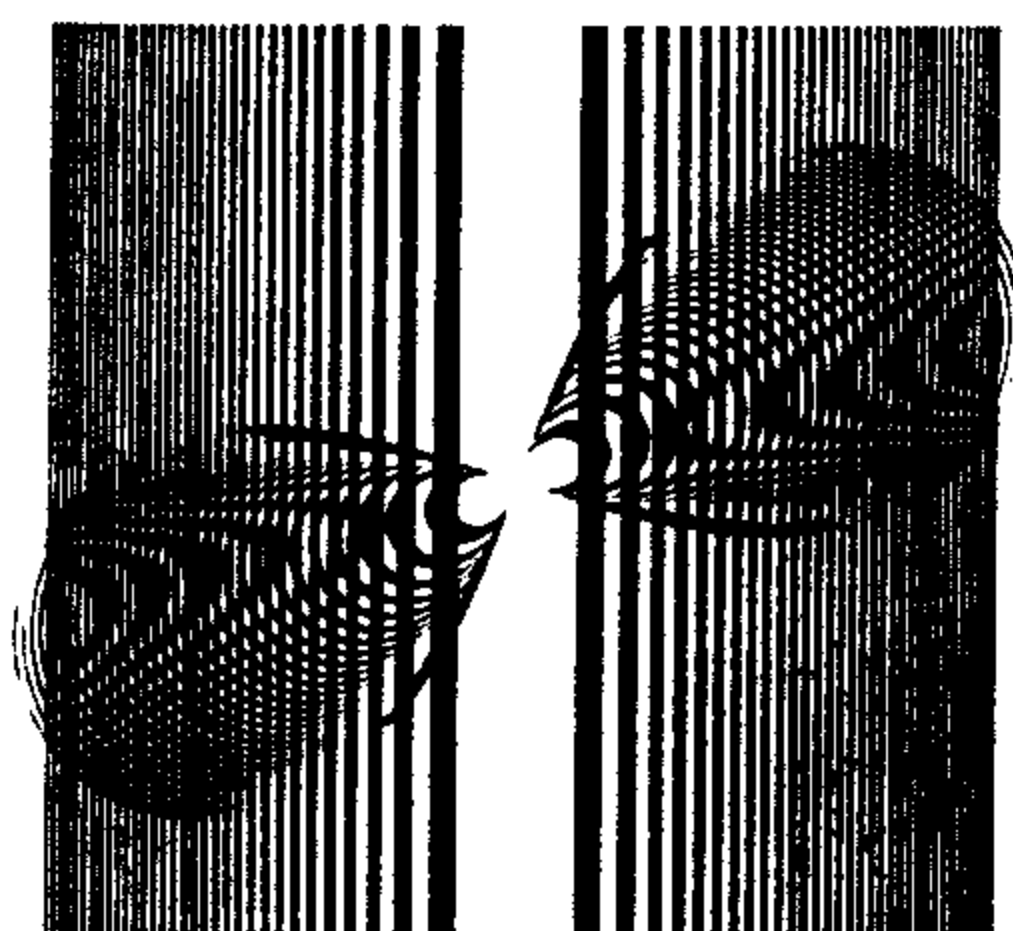


Slika 4.2.



Slika 4.3.

Svi gornji primjeri su za slučaj $c < b$. Tada postoje samo linije sa $p > 0$ i imaju oblik kao što pokazuju gornje slike.



Slika 4.4.

Medjutim, u slučaju da je $c > b$, onda muare figure izgledaju kao na fotografiji prikazanoj na slici 4.4, gdje je $\alpha = 26^\circ$. Na slici 4.5 prikazani su grafikoni numerički izračunatih krivulja uz $p < 0$, jer za $p > 0$ ne postoje realna rješenja, a $\alpha = 0$. Uz njih je i fotografija tog slučaja.

Vidi se potpuna saglasnost između teorije i eksperimenta.

5. MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA SISTEMOM EKVIDISTANTNIH KRUŽNICA

Ispitat ćemo dalje muare figure koje nastaju pokrivanjem zonske mrežice lemniskata sa sistemom ekvidistantnih koncentričnih kružnica. Uzet ćemo slučaj da obje mrežice imaju zajedničko središte. Zbog toga što je sistem kružnica neutralan prema smjeru polarne osi, postavljamo polarnu os u smjeru osi lemniskata. Tada jednažba sistema lemniskata glasiće kao (1.27).

Jednažba sistema ekvidistantnih koncentričnih kružnica sa središtem u ishodištu ima oblik

$$r = b \cdot m \tag{5.1}$$

Ispitat ćemo efikasnost muare figura. Naše funkcije će, prema (1.27) i (5.1), glasiti

$$\Psi_1 = \frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2\varphi} - m \tag{5.2}$$

$$\Psi_2 = \frac{r}{b} - m \tag{5.3}$$

Izvodi tih funkcija su

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{2r}{c^2 \cdot \cos 2\varphi} \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = \frac{2r^2 \sin 2\varphi}{c^2 \cdot \cos^2 2\varphi} \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} = 0$$

Stoga možemo sastaviti prema (1.20) funkciju

$$G = \frac{2r}{c^2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi} > 0 \qquad (5.4)$$

Ona je uvijek pozitivna i zato su efikasne samo suptraktivne muare figure. Njihova jednađba glasi

$$\frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2\varphi} - \frac{r}{b} = p$$

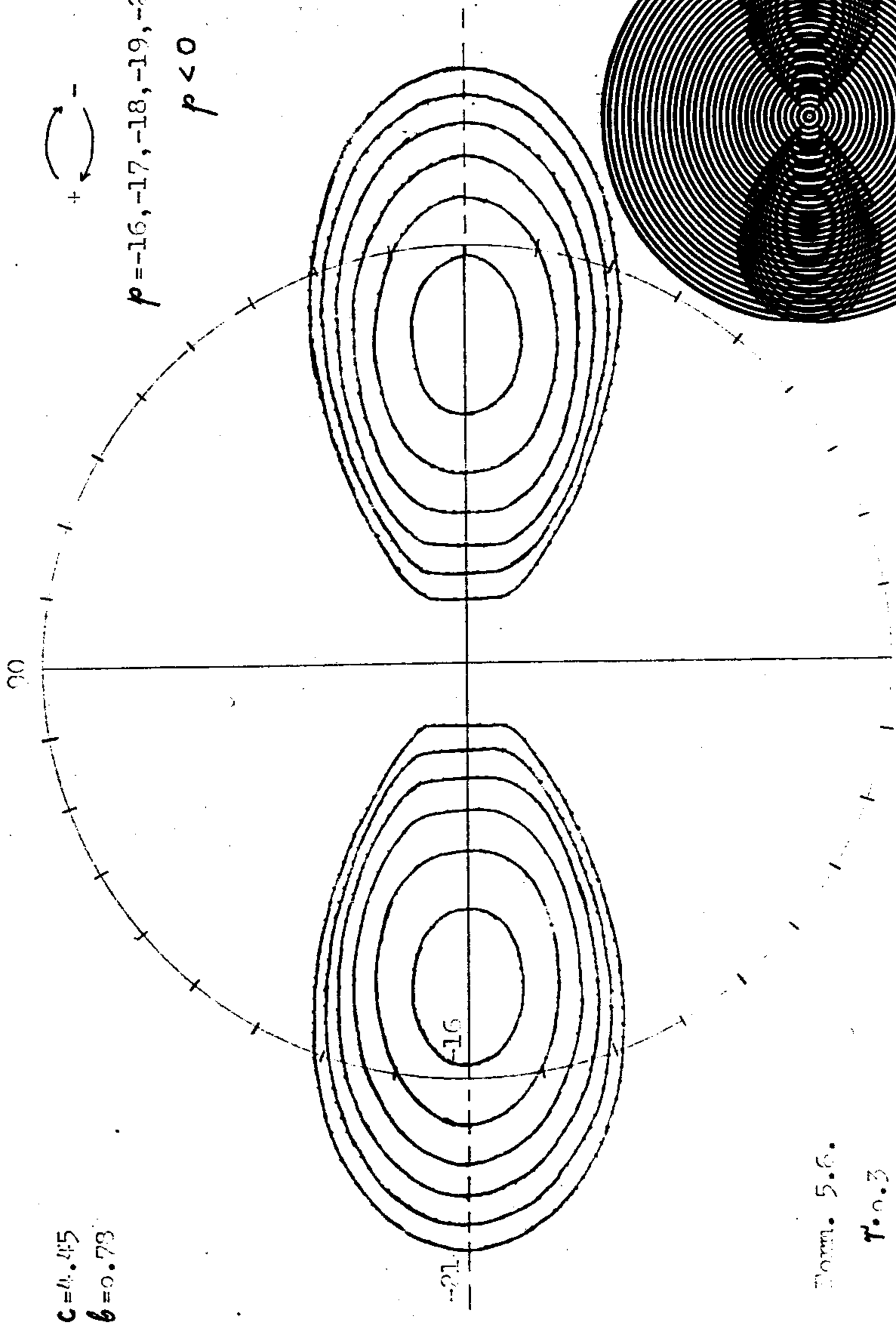
ili

$$r^2 \cdot b - r \cdot c^2 \cdot \cos 2\varphi - c^2 \cdot b \cdot p \cdot \cos 2\varphi = 0 \qquad (5.5)$$

Rješenje te jednađbe glasi

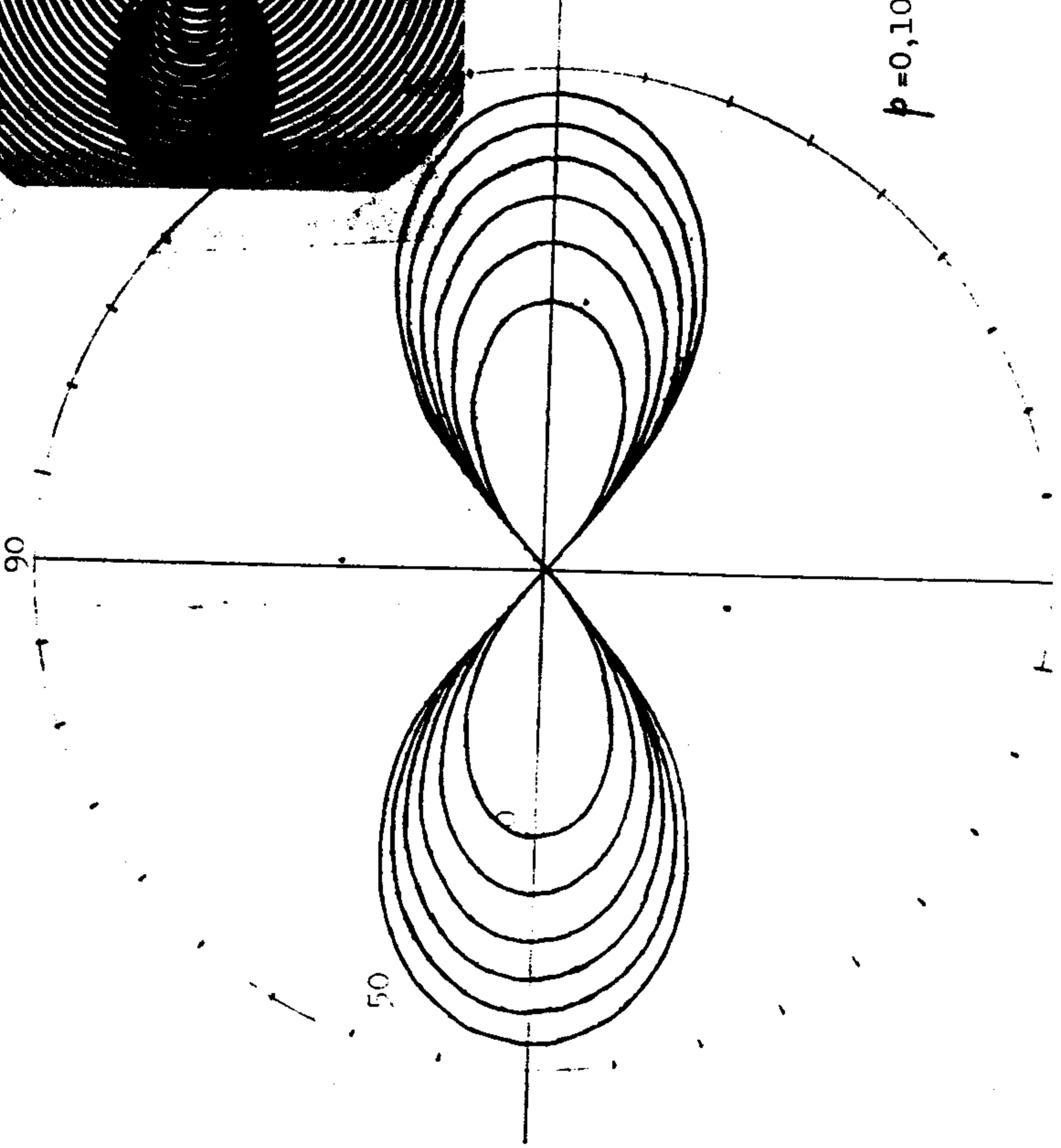
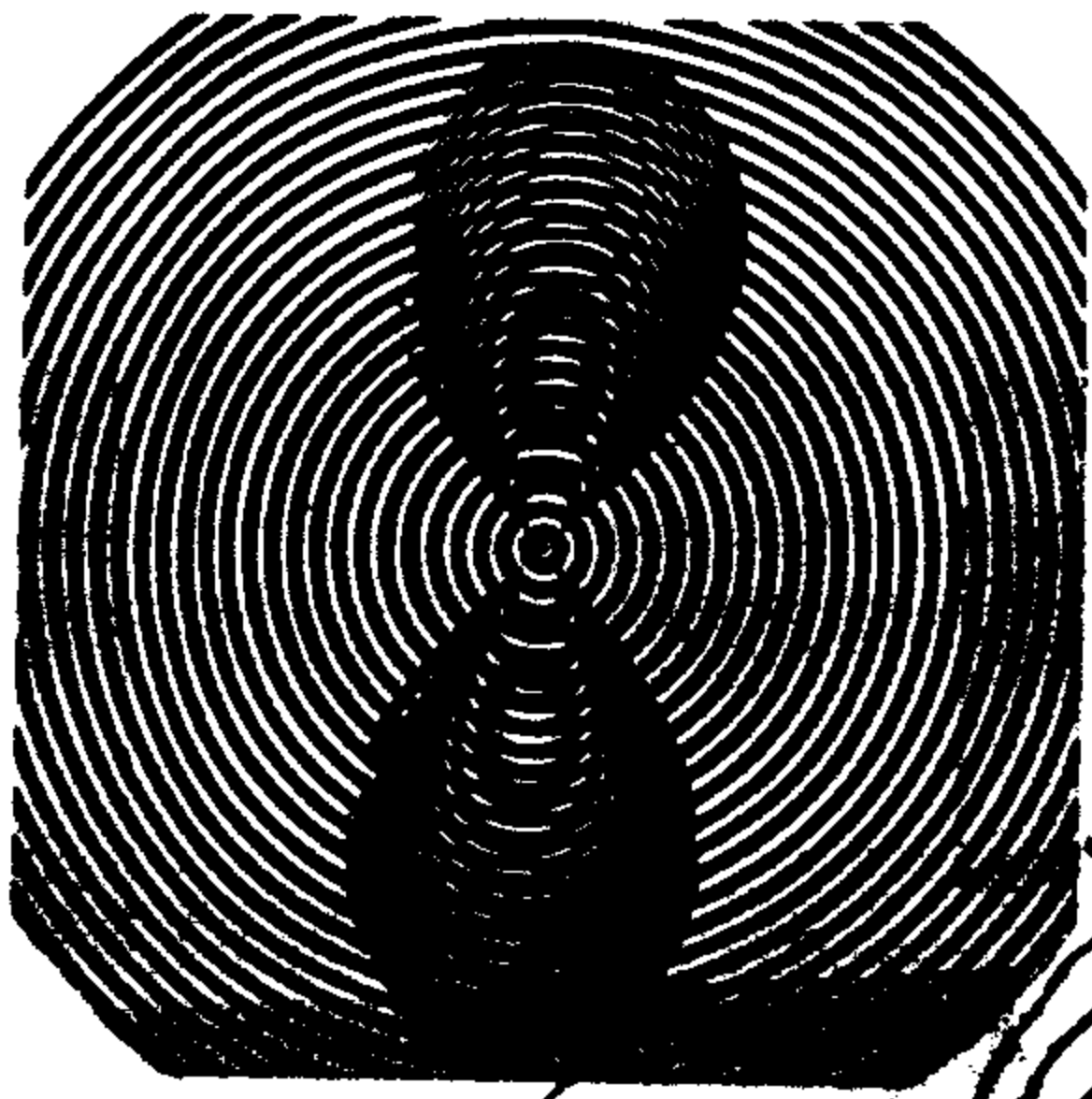
$$r = \frac{1}{2b} \cdot \left[c^2 \cdot \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cdot \cos^2 2\varphi + 4 \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot p \cdot \cos 2\varphi} \right] \qquad (5.6)$$

Prema toj formuli je numeričkim računom određeno nekoliko linija. Njihovi grafikoni nalaze se na slici 5.1. Pored njih je fotografija tih muare figura. Figure liče na elipse iako to nisu.



Form. 5.6.
T.0.3

Figure 5.1.



$c = 4.45$
 $b = 0.54$

Form. 5.6.

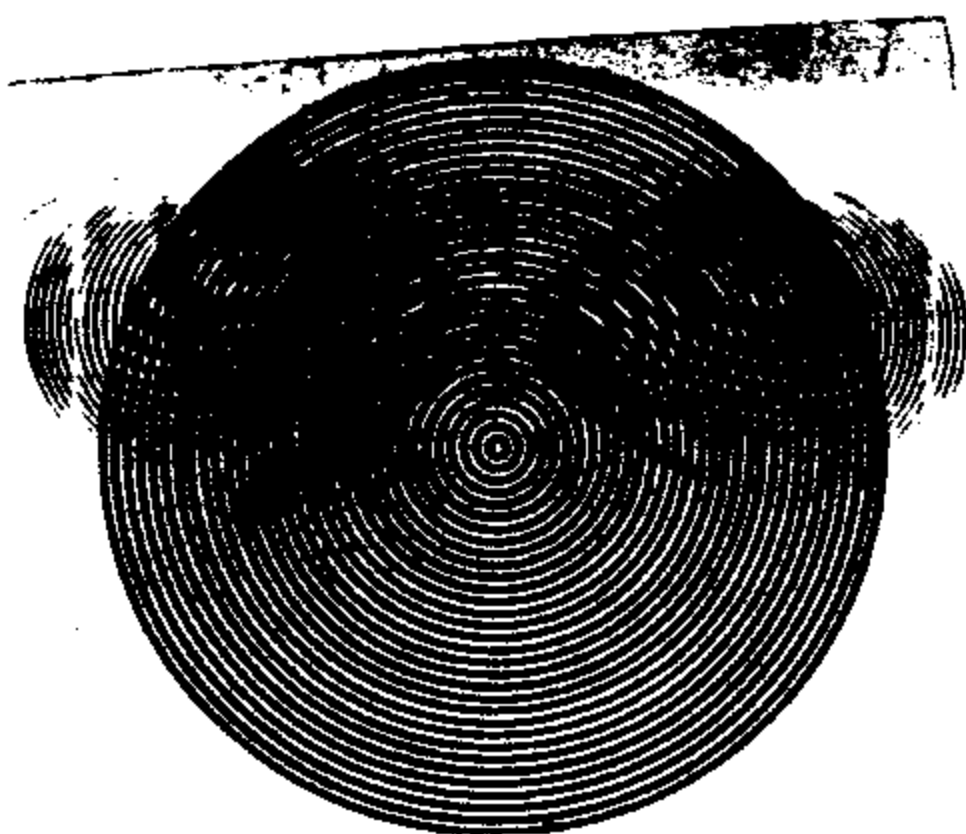
$r = 0.1$

$p = 0, 10, 20, 30, 40, 50.$

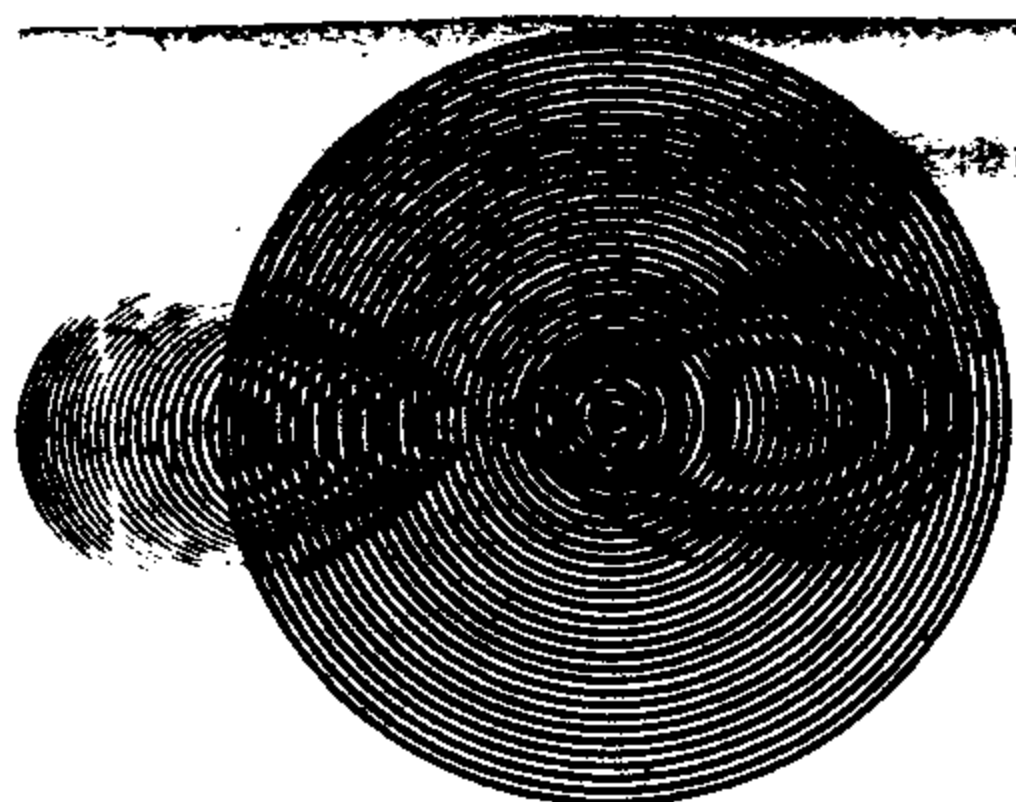
$p \geq 0$

Interesantno je napomjeniti da, kao i u slučaju pokrivanja sa sistemom paralelnih ekvidistantnih pravaca, i ovdje postoje dvije grupe muare figura. Jedna grupa, prikazana na slici 5.1, dobiva se numeričkim izračunavanjem prema formuli (5.6) pri $p < 0$, a druga grupa, koja je prikazana grafički na slici 5.2 i fotografijom pored nje, izračunava se prema istoj formuli samo pri $p \geq 0$. Da li će se jasnije vidjeti prva ili druga grupa muare linija, zavisi od toga kakav je odnos između parametara c i b sistema koji se pokrivaju, što se jasno vidi i na našim slikama. Vidi se i saglasnost između izračunatih krivulja sa stvarnima.

Interesantne su i fotografije u slučaju kad obje mrežice nisu koncentrične. Slika 5.3 pokazuje slučaj pomaknute središte lemniskate u smjeru y , a slika 5.4 u smjeru osi x .



Slika 5.3.



Slika 5.4.

6. MUARE FIGURE SISTEMA ZONSKIH LEMNISKATA SA SISTEMOM ZONSKE KRUŽNE MREŽICE

Mrežicu zonskih lemniskata (1.27) pokrivamo sa zonskim sistemom koncentričnih kružnica. Taj sistem ima jednadžbu

$$r = b \cdot \sqrt{m} \quad (6.1)$$

kad obje mrežice imaju zajedničko središte.

Ispitat ćemo najprije koje su muare figure efikasne.

Sastavljamo funkcije

$$\Psi_1 = \frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2\varphi} - m \quad (6.2)$$

$$\Psi_2 = \frac{r^2}{b^2} - m \quad (6.3)$$

Izvodi tih funkcija su

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{2r}{c^2 \cdot \cos 2\varphi} \quad , \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = \frac{2r}{b^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = \frac{2r^2 \sin 2\varphi}{c^2 \cdot \cos^2 2\varphi} \quad , \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} = 0$$

Funkcija komutacione granice, prema (1.20) će biti

$$G = \frac{4 \cdot r^2}{c^2 \cdot b^2 \cdot \cos^2 2\varphi} \quad (6.4)$$

Kako je ona veće od nule, bit će efikasne samo suptraktivne muare figure. Njihova jednačba glasi

$$\frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2\varphi} - \frac{r^2}{b^2} = p$$

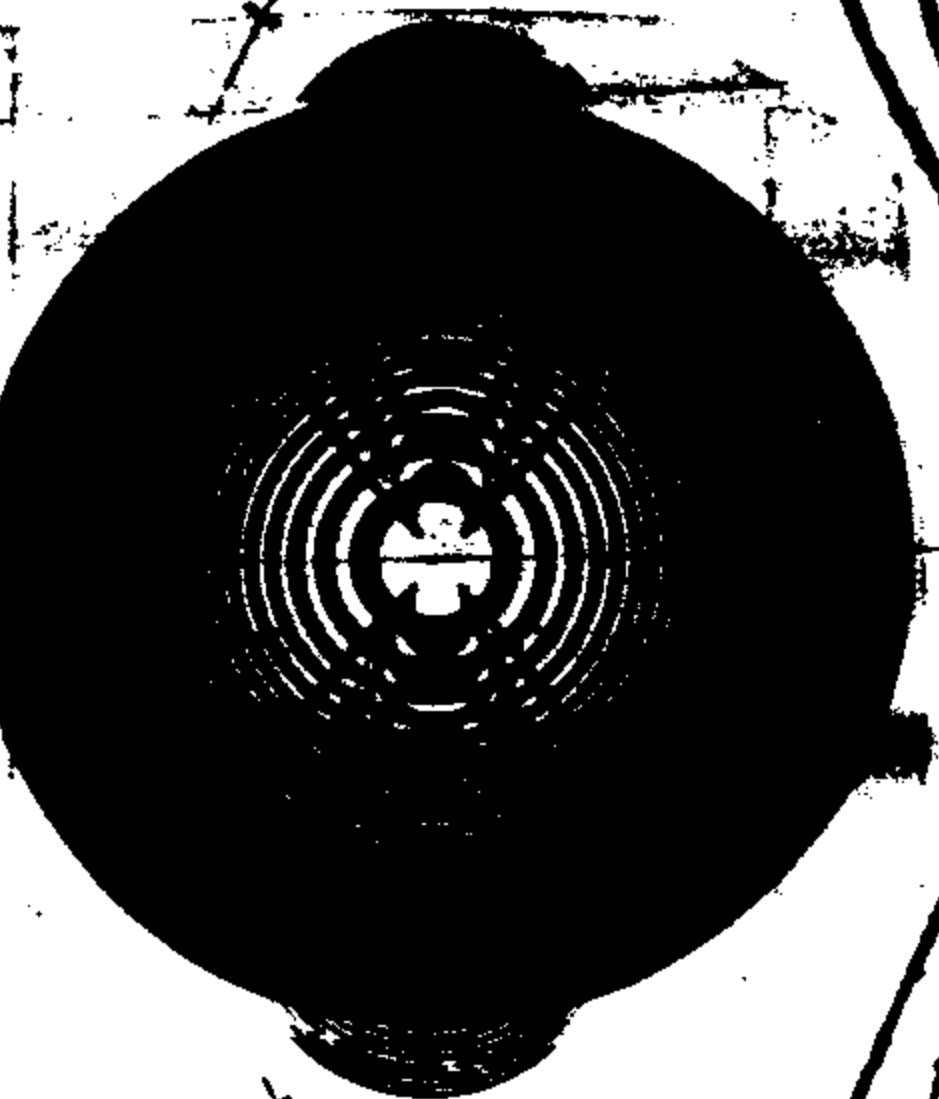
ili

$$r^2 = \frac{c^2 \cdot b^2 \cdot p \cdot \cos 2\varphi}{b^2 - c^2 \cdot \cos 2\varphi} \quad (6.5)$$

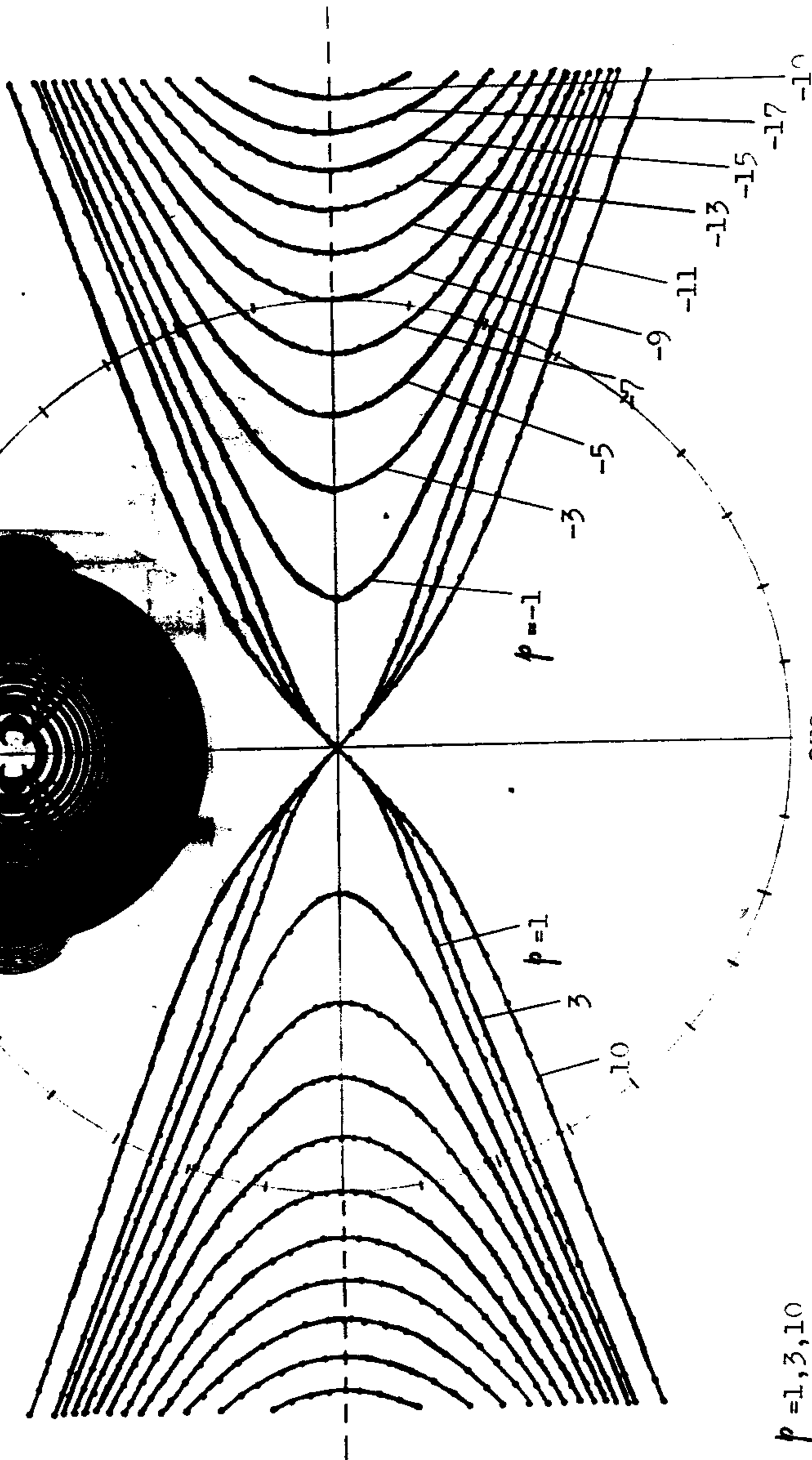
Numerički račun za slučaj kad je $c = 4.45$, $b = 3.75$ daje krivulje koje su grafički prikazane na slici 6.1. Pokraj njih je fotografija tog slučaja i vidi se dobra saglasnost. Muare figure koje su slične sistemu hiperbola dobivaju se pomoću formule (6.5) za $p < 0$, dok za $p > 0$ dobivaju se krivulje muare figura koje prolaze kroz ishodište sistema. Sve je ovo za slučaj kad je $c > b$

Medjutim, za slučaj kad je $c < b$ i ovdje se dobivaju drugojačije krivulje, a to vjerno pokazuju grafikoni na slici 6.2 i fotografija pored njih, za takav slučaj. To znači da i ovdje oblik muare figura zavisi, pored ostalih, i od odnosa između parametara c i b sistema koji se pokrivaju. Za slučaj $c < b$ muare figure su zatvorene, a za slučaj $c > b$ one su otvorene krivulje.

$c = 4.45$
 $b = 3.75$
 $\delta = 0$
 $\lambda = 0$



Form. 6.5.
 $\tau/3$

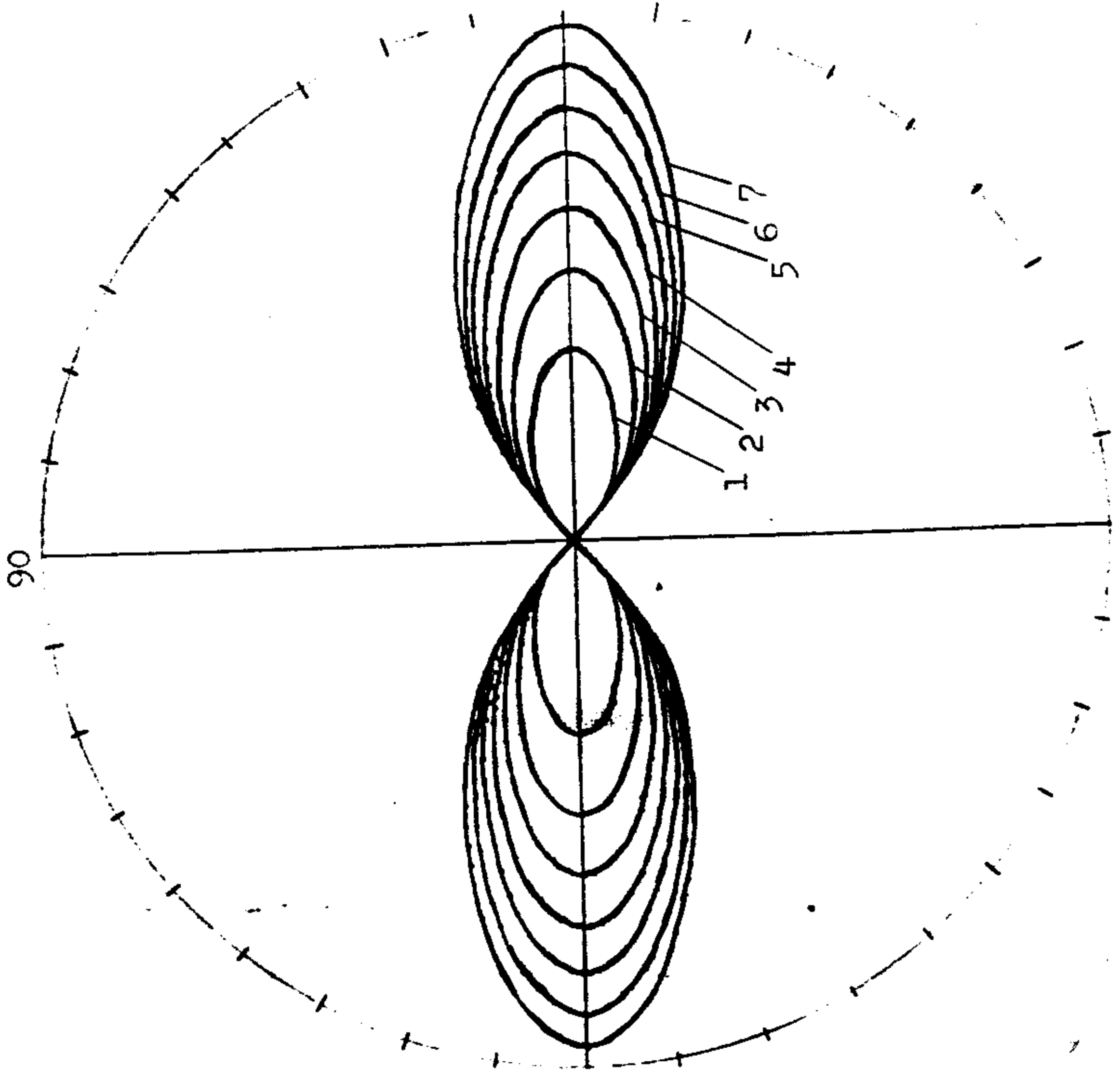
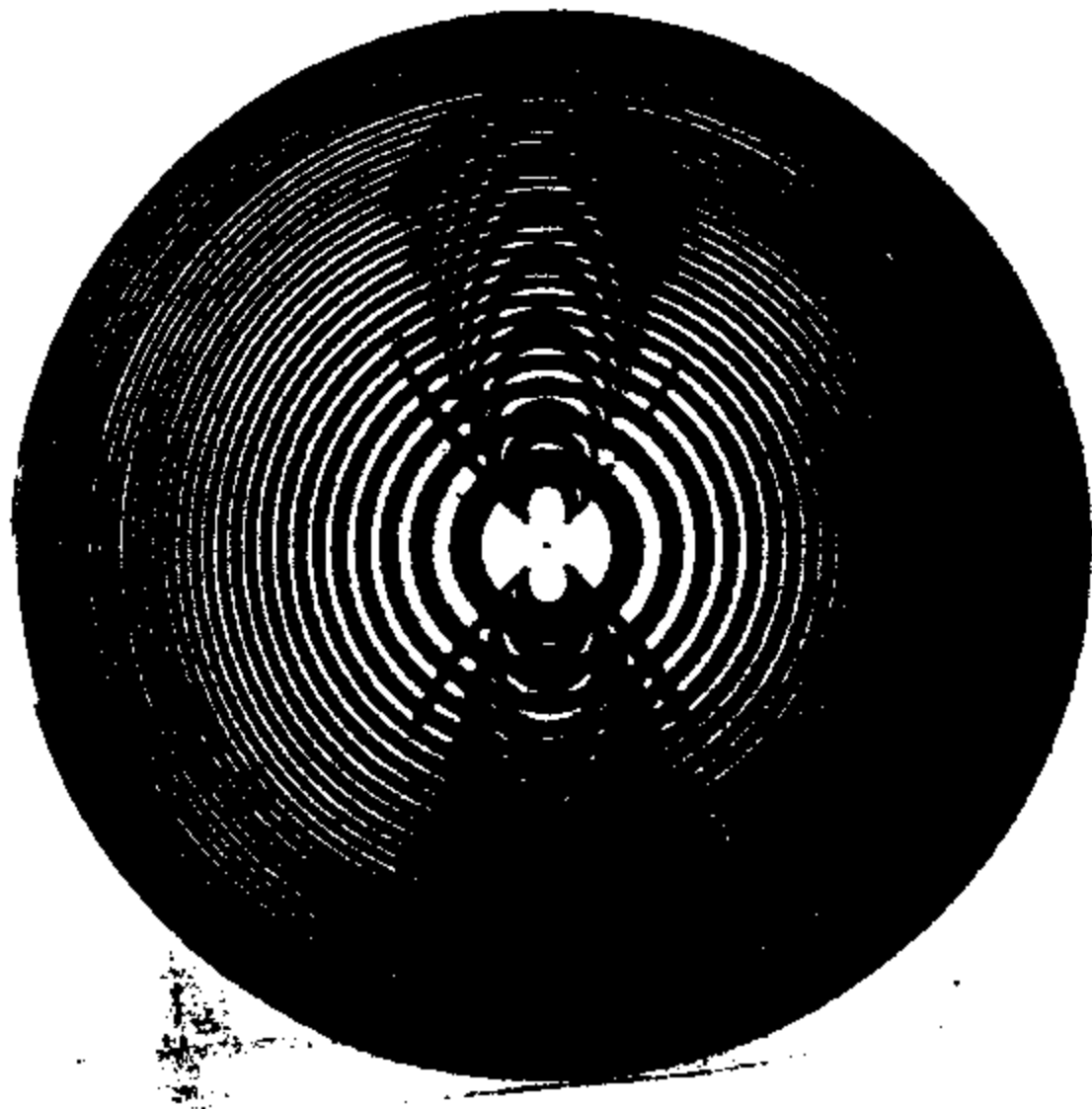


$p = 1, 3, 10$
 $p = -1, -3, -5, -7, -9, -11, -13, -15, -17, -19.$

270

Slika 6.1.

$c = 3.87$ $\lambda = 0$ $c < b$
 $b = 4.314$ $\mu = 0$
 $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$



Form. 6.5.

r. o. 3

Slika 6.2.

Do sada je uzeto da se središta dvaju sistema krivulja poklapaju. Sad će se taj račun proširiti za slučaj da se one ne poklapaju. Postavit ćemo ishodište polarnog sistema u središte sistema lemniskata. Tada će taj sistem imati jednadžbu (1.27). Središte sistema zonskih kružnica neka je u tački (s, t) . Onda jednadžba zonskih kružnica u pravokutnom koordinatnom sistemu ima oblik

$$(x - s)^2 + (y - t)^2 = b^2 \cdot m \quad (6.6)$$

To, kada prevodimo u polarni sistem, izlazi

$$(r \cos \varphi - s)^2 + (r \sin \varphi - t)^2 = b^2 \cdot m$$

ili

$$r^2 - 2r \cdot (s \cos \varphi + t \sin \varphi) + s^2 + t^2 = b^2 \cdot m \quad (6.7)$$

Pomoću (1.27) i (6.7) možemo sastaviti jednadžbu suptraktivnih muare figura

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2\varphi} - \frac{1}{b^2} [r^2 - 2r \cdot (s \cos \varphi + t \sin \varphi) + s^2 + t^2] = p$$

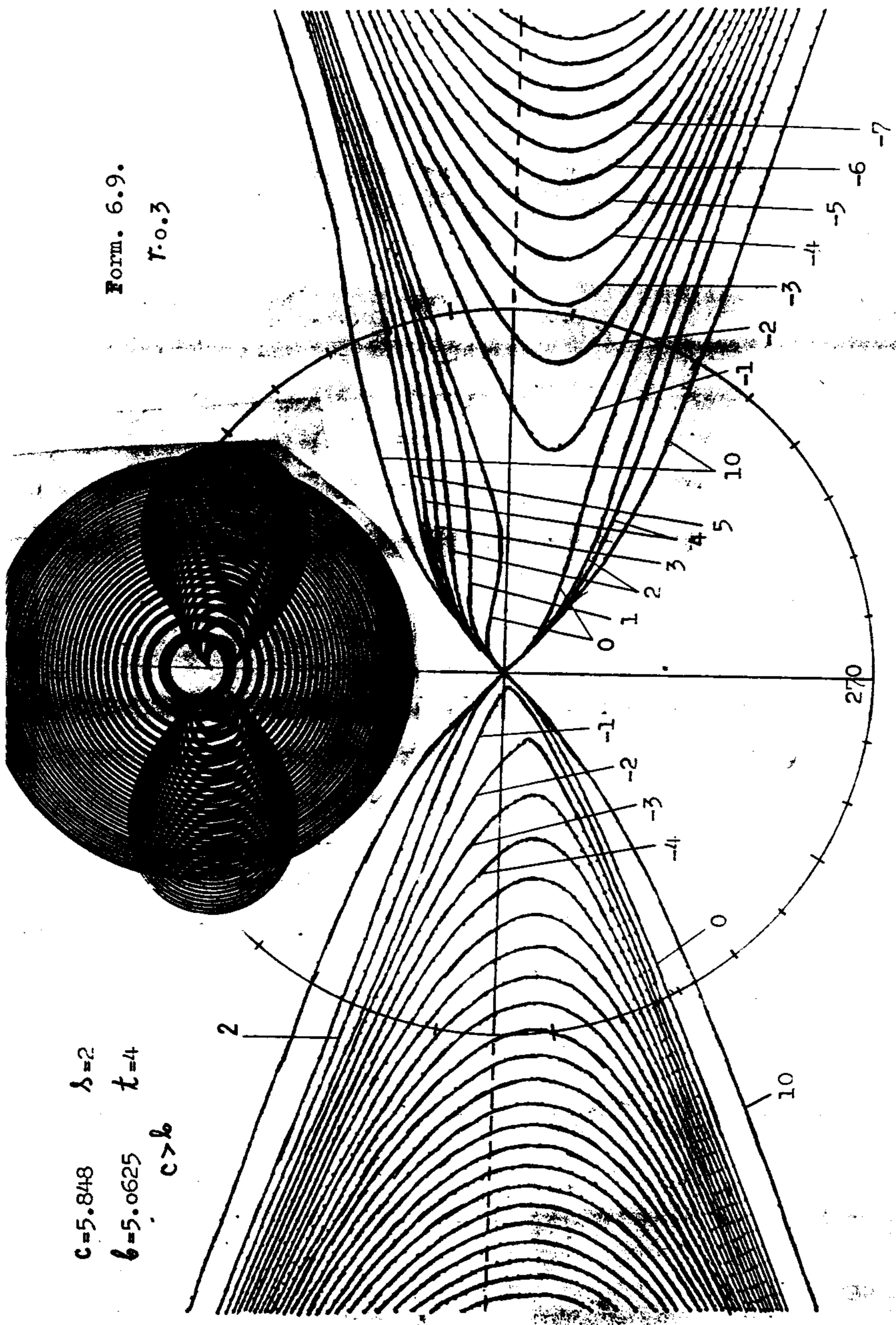
$$r^2 \cdot (b^2 - c^2 \cos 2\varphi) + 2r \cdot (s \cos \varphi + t \sin \varphi) \cdot c^2 \cos 2\varphi -$$

$$- c^2 \cos 2\varphi \cdot (s^2 + t^2 + p \cdot b^2) = 0 \quad (6.8)$$

Rješenje te jednadžbe glasi

Form. 6.9.
r=0.3

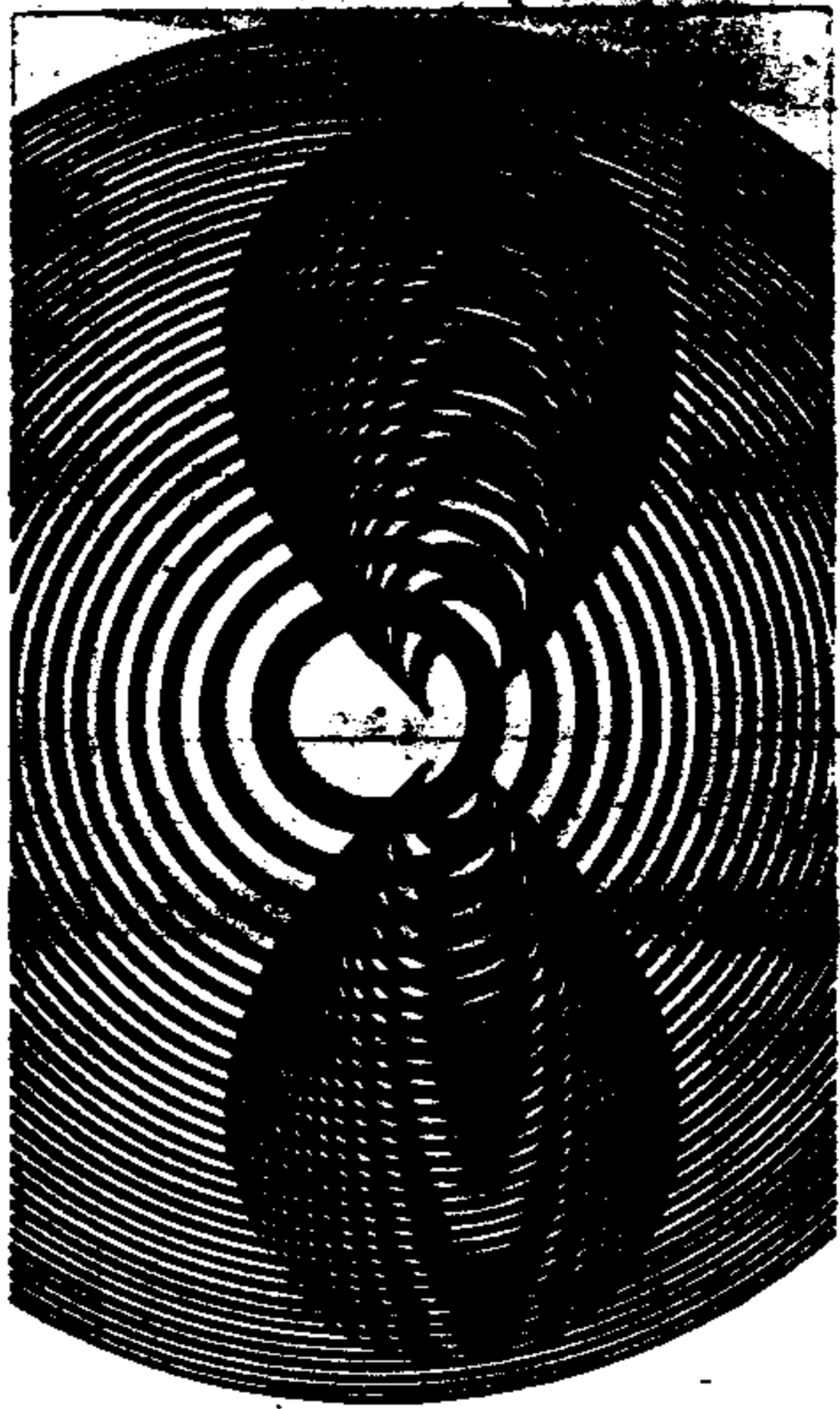
c=5.848 $\lambda=2$
b=5.0625 t=4
 c>b



Slika 6.3.

Form. 6.9.

$r/4$

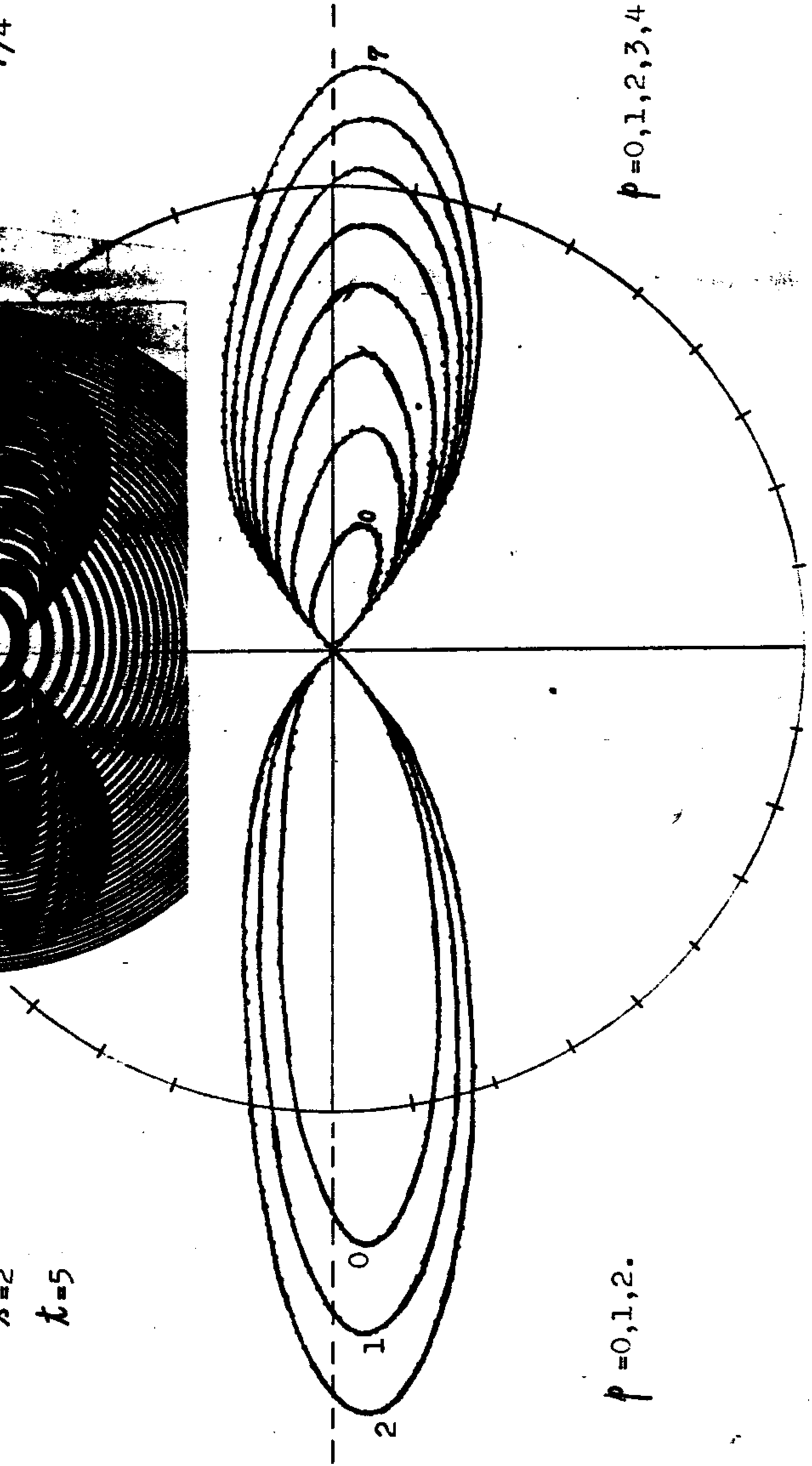


$c=5.848$

$b=6.25$

$\lambda=2$

$k=5$

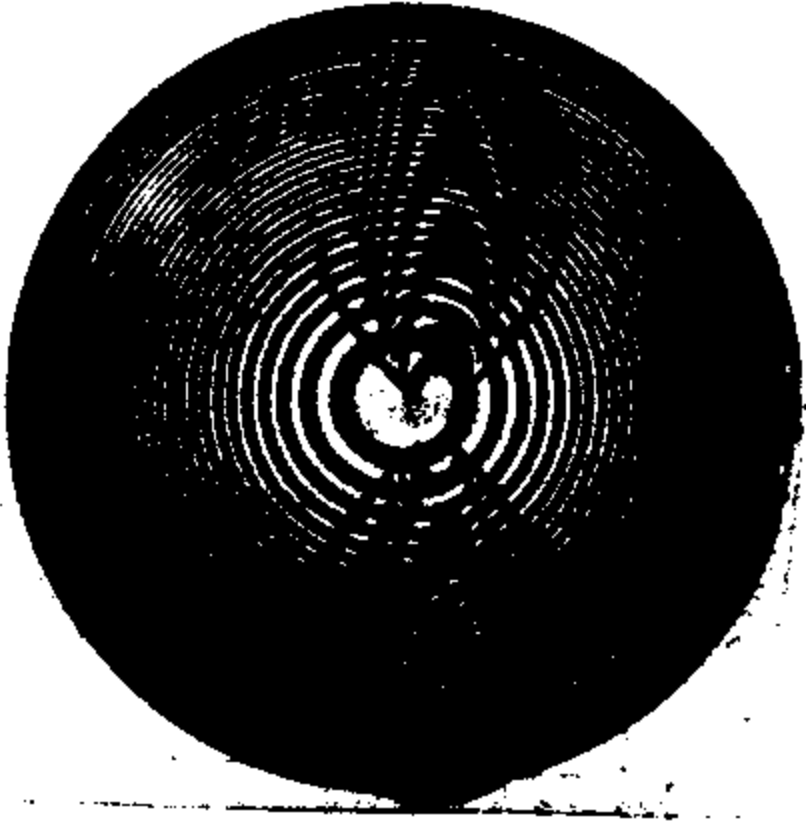


$p=0,1,2.$

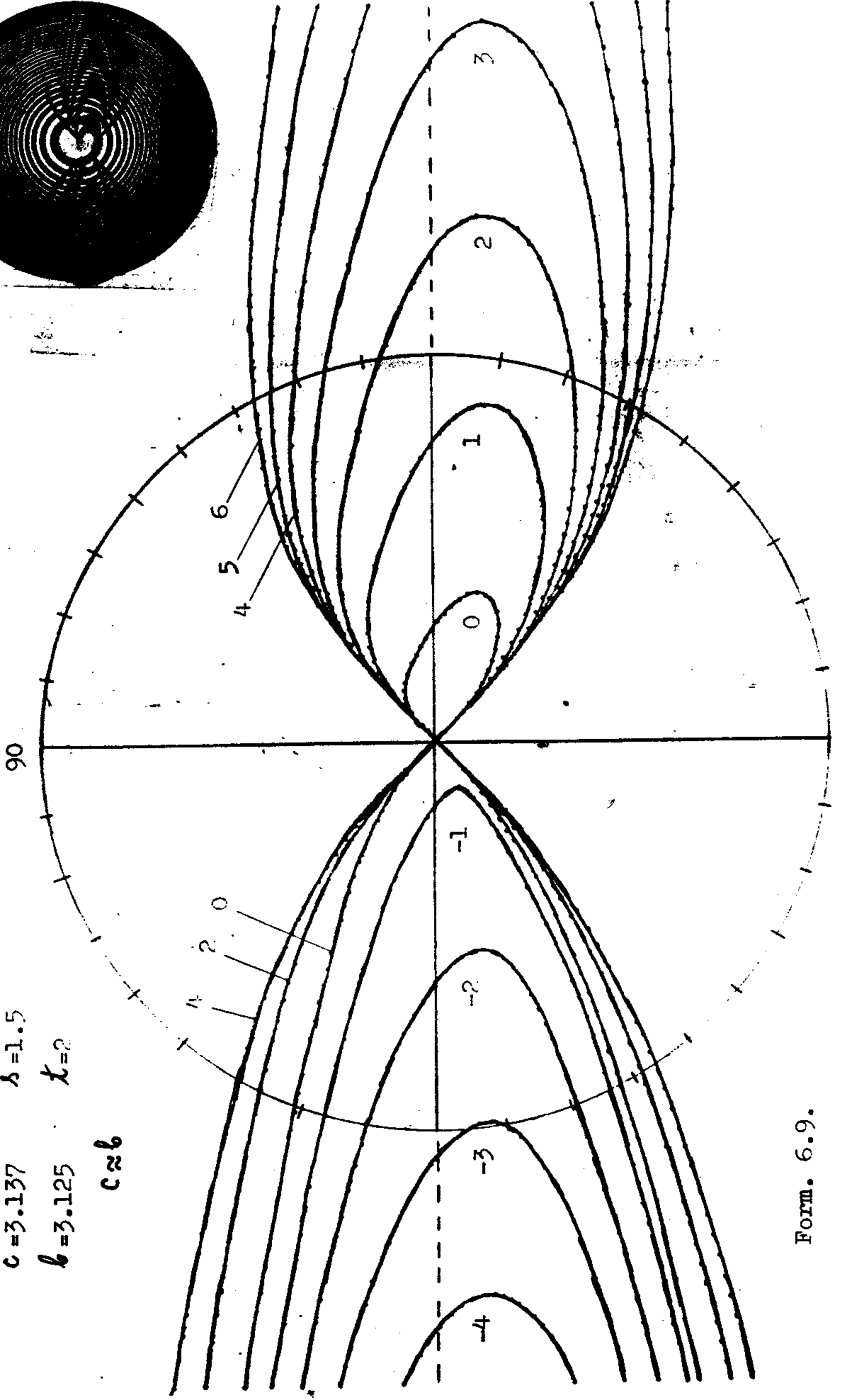
$p=0,1,2,3,4,5,6,7.$

270

Slika 6.4.



$c = 3.137$ $\lambda = 1.5$
 $b = 3.125$ $\lambda = 2$
 $c \approx b$



Form. 6.9.

Slika 6.5.

$$r_{1;2} = \frac{-(s \cos \varphi + t \sin \varphi) \cdot c^2 \cos 2\varphi}{b^2 - c^2 \cos 2\varphi} \pm \frac{\sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi [(s \cos \varphi + t \sin \varphi)^2 - (s^2 + t^2 + b^2 p)] + c^2 b^2 \cos 2\varphi (s^2 + t^2 + b^2 p)}}{b^2 - c^2 \cos 2\varphi} \quad (6.9)$$

Na slici 6.3 su grafikoni numeričkih računa za $c=5.848$, $b=5.063$, $s=2$, $t=4$ i pokraj njih je fotografije tog sistema muare figura. Primjećujemo da su to sve otvorene krivulje (zbog $c > b$), jedne koje liče na sistem hiperbola za $p < 0$, a druge koje prolaze kroz ishodište koordinatnog sistema za $p \geq 0$.

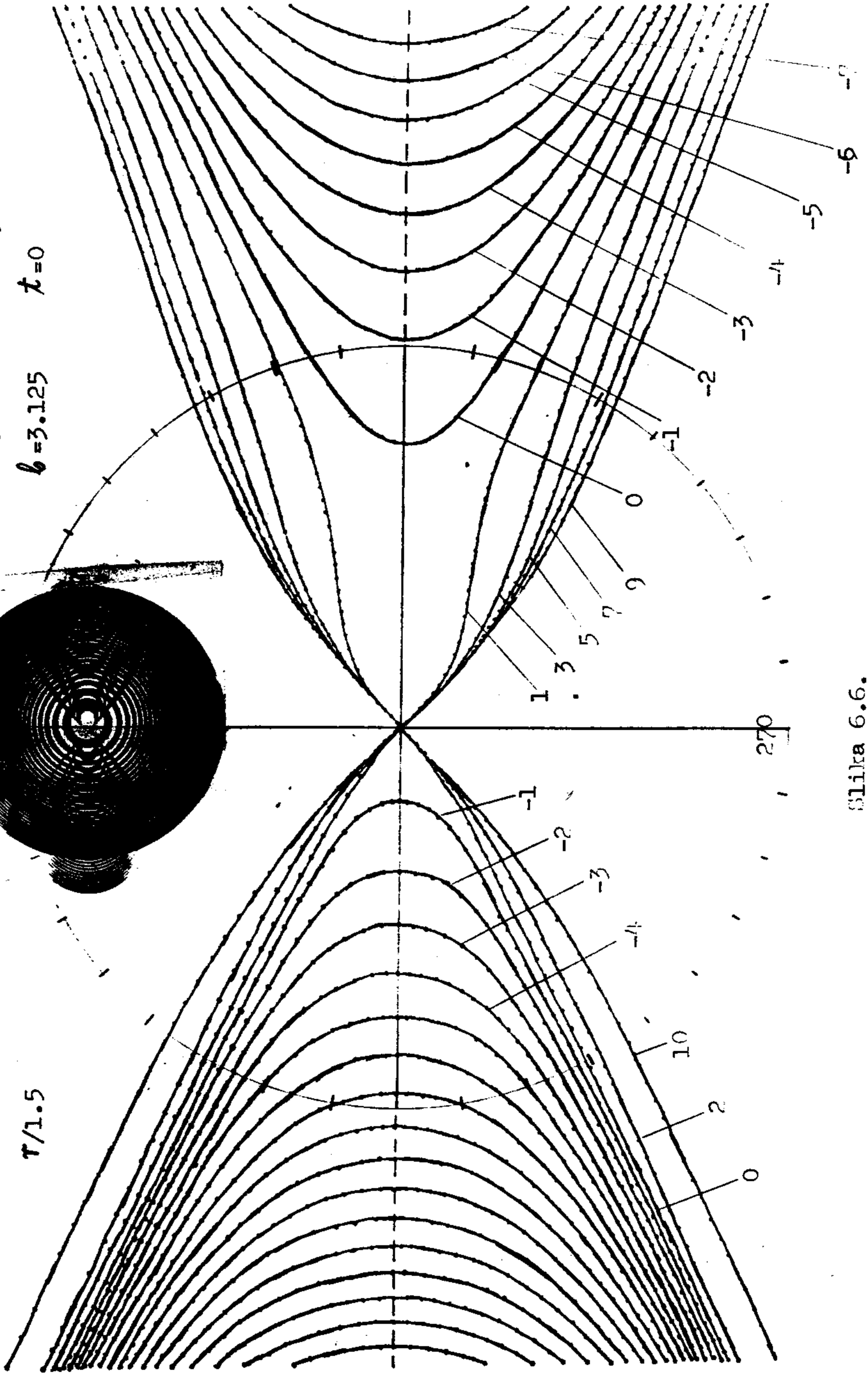
Shodno tome da za $c < b$ se dobiva zatvoreni oblik muare figura, potvrđuje fotografija slike 6.4, a i odgovarajući grafikoni koji su također nacrtani na osnovu formule (6.9), za $p \geq 0$, $c=5.848$, $b=6.25$, $s=2$ i $t=5$.

Vrlo je interesantno ovdje primjetiti da kada su parametri sistema krivulja jednaki ili približno jednaki i kada su centri pomaknuti, dobivaju se slijedeće krivulje: jedne za $p < 0$ koje su otvorene, a druge za $p \geq 0$ koje su s jedne strane zatvorene, prolaze kroz ishodište i otvaraju se s druge strane. To dokazuju računski dobivene krivulje na slici 6.5 i uz njih eksperimentalno dobivena fotografija, za slučaj kad su $c=3.137$, $b=3.125$, $s=1.5$ i $t=2$.

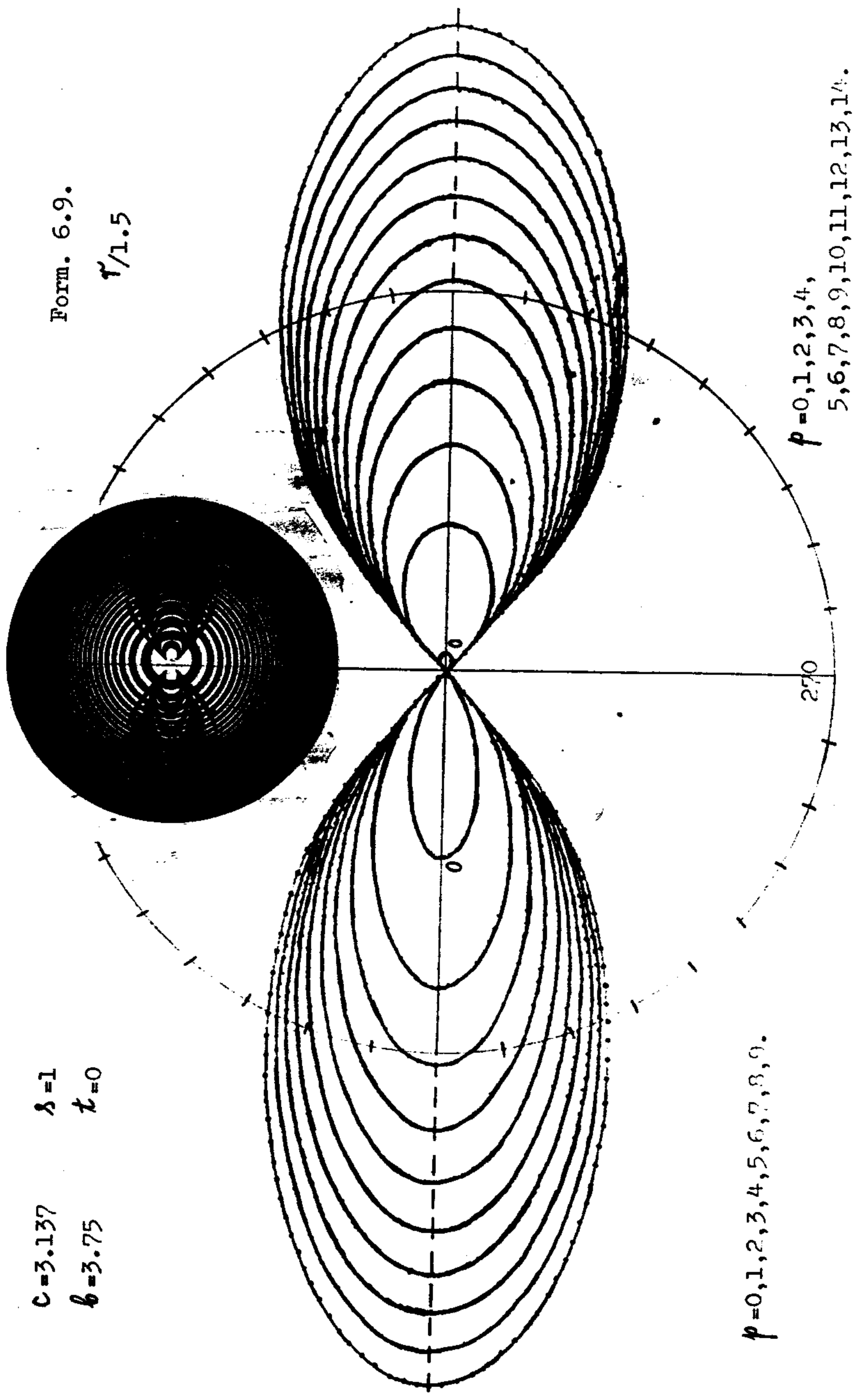
Slijede nekoliko slika karakterističnih muare figura dobijenih za različite slučajeve razmaka između središta sistema zonskih lemniskata i sistema zonskih koncentričnih kružnica. To su slike 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 i 6.10. Različiti je i odnos između parametara krivulja. Uz svaku sliku teorijski izračunatih grafikona pomoću formule (6.9) stoje i fotografije.

$c=3.87$ $\lambda=1.5$
 $b=3.125$ $\lambda=0$

Form. 6.9.
 $\tau/1.5$

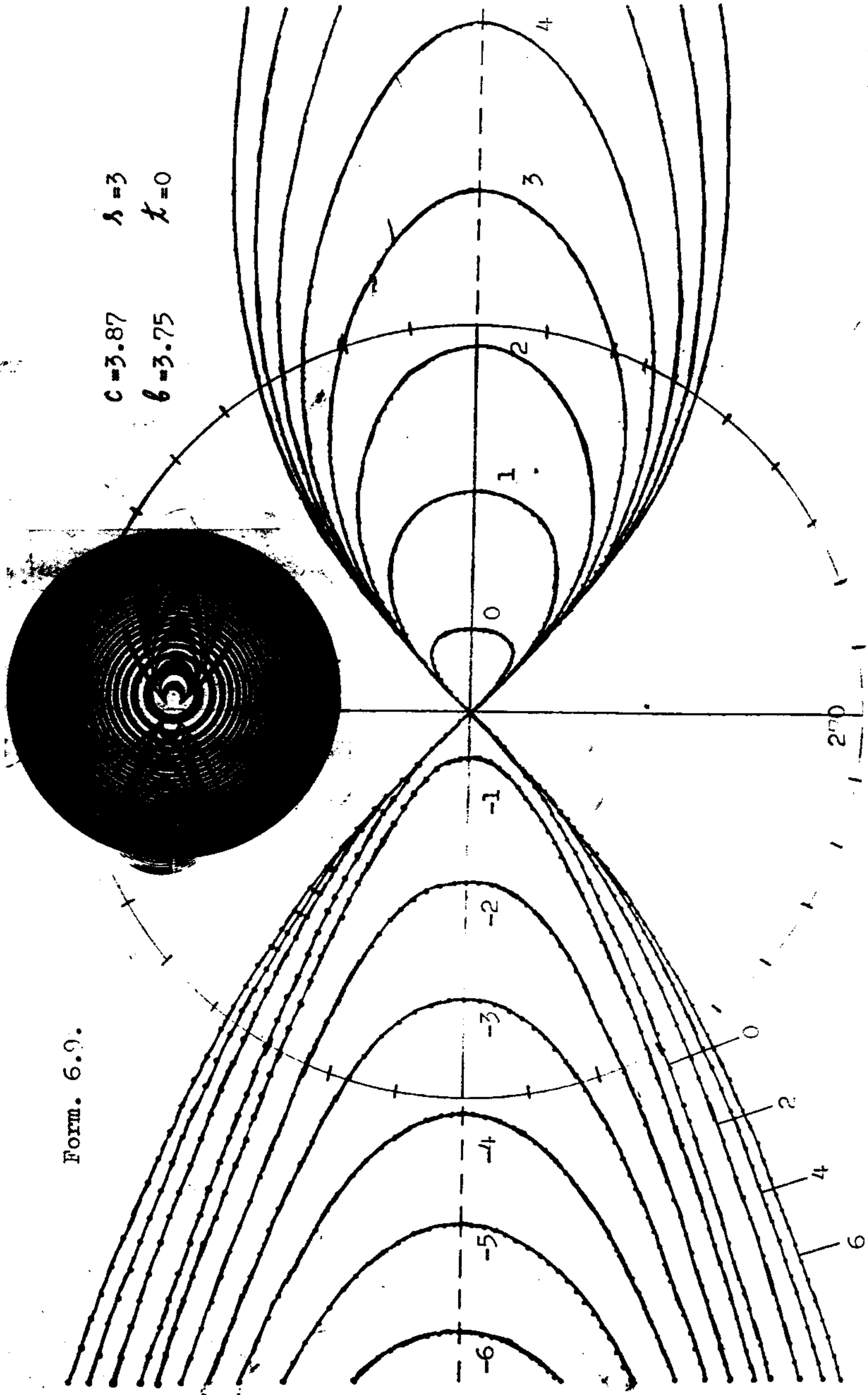


Blika 6.6.



Slika 6.7.

Form. 6.9.

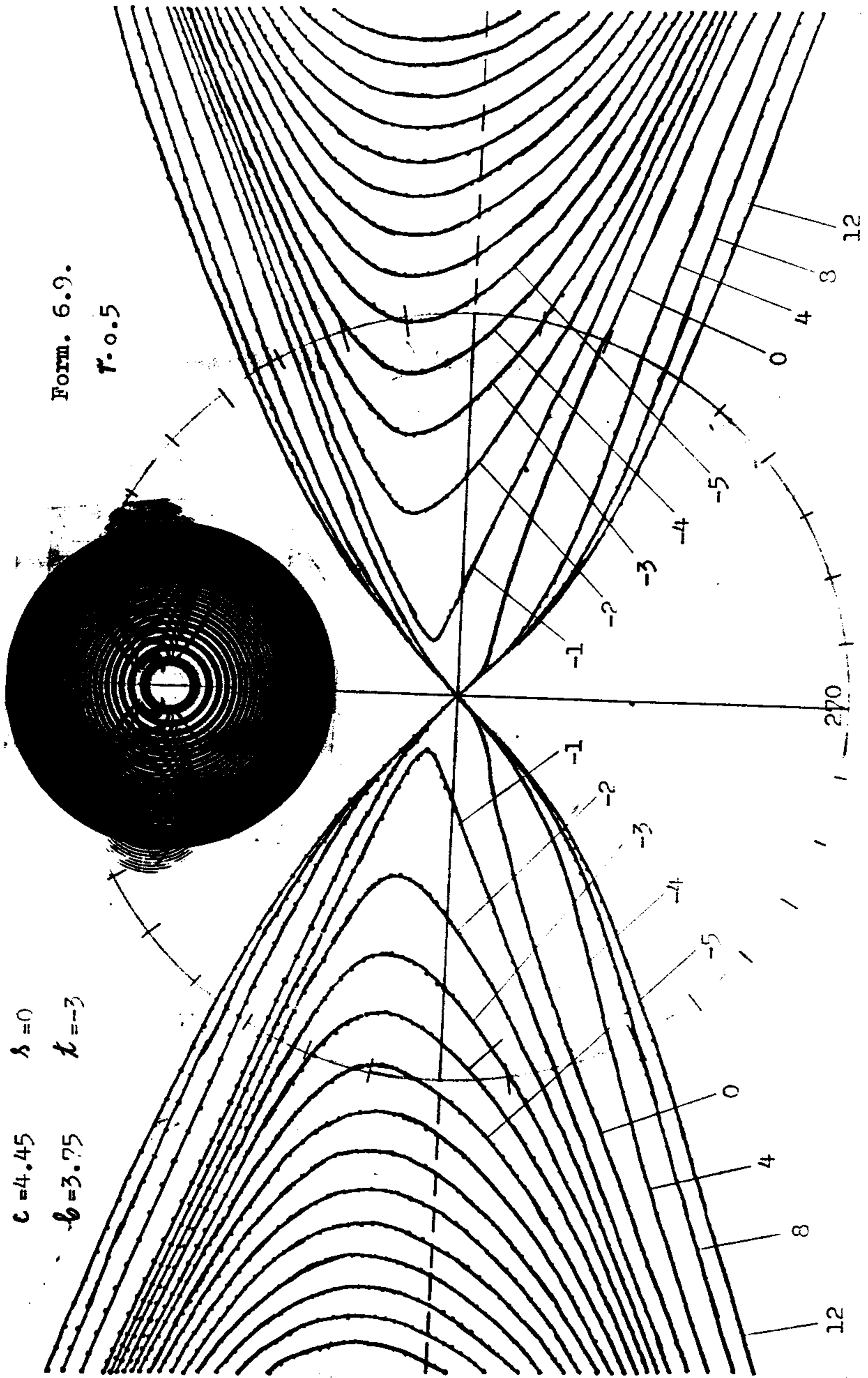


$c = 3.87$ $\lambda = 3$
 $b = 3.75$ $\lambda = 0$

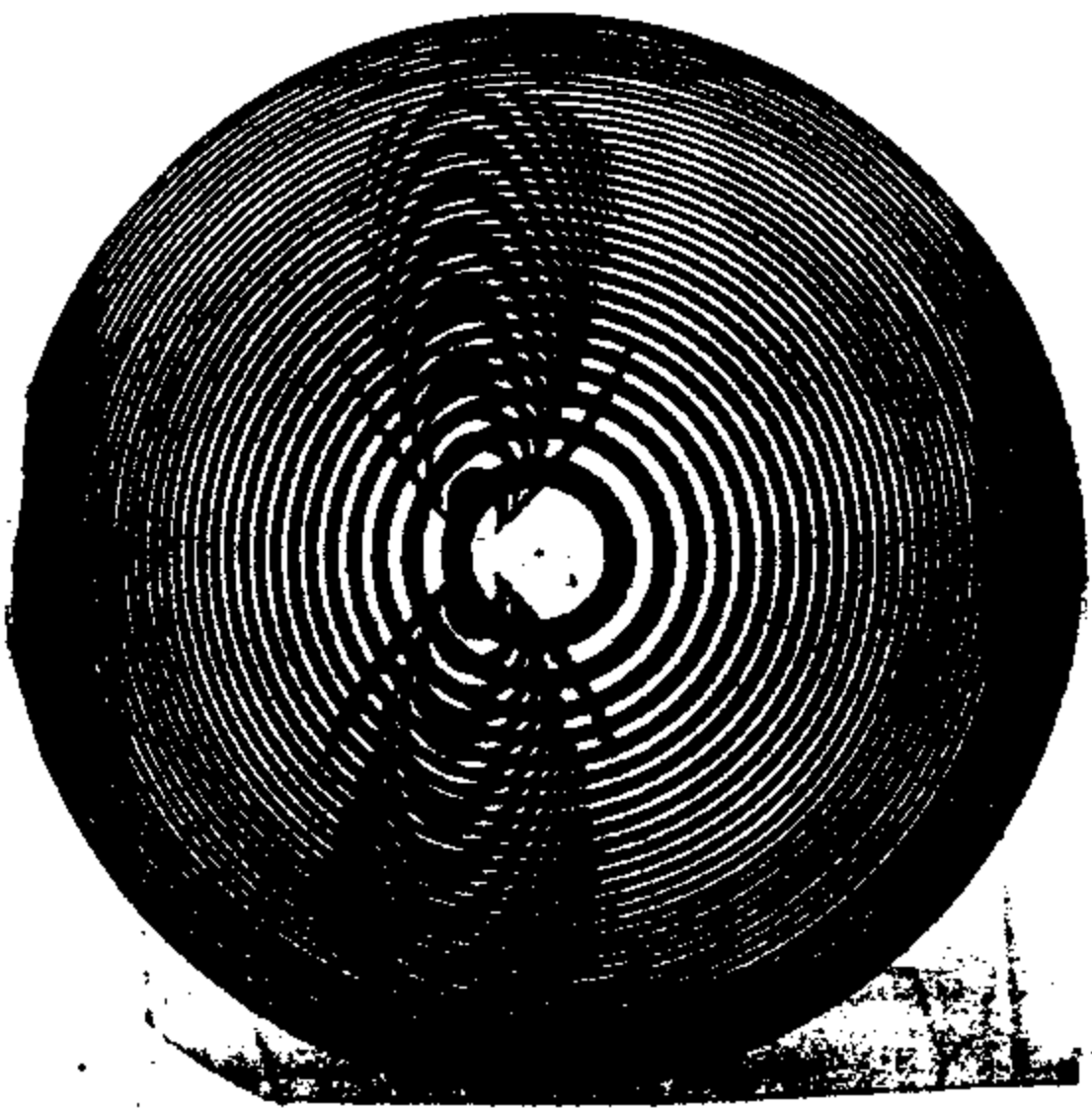
Blika 6.8.

$c = 4.45$ $h = 0$
 $b = 3.75$ $k = -3$

Form. 6.9.
 $r = 0.5$

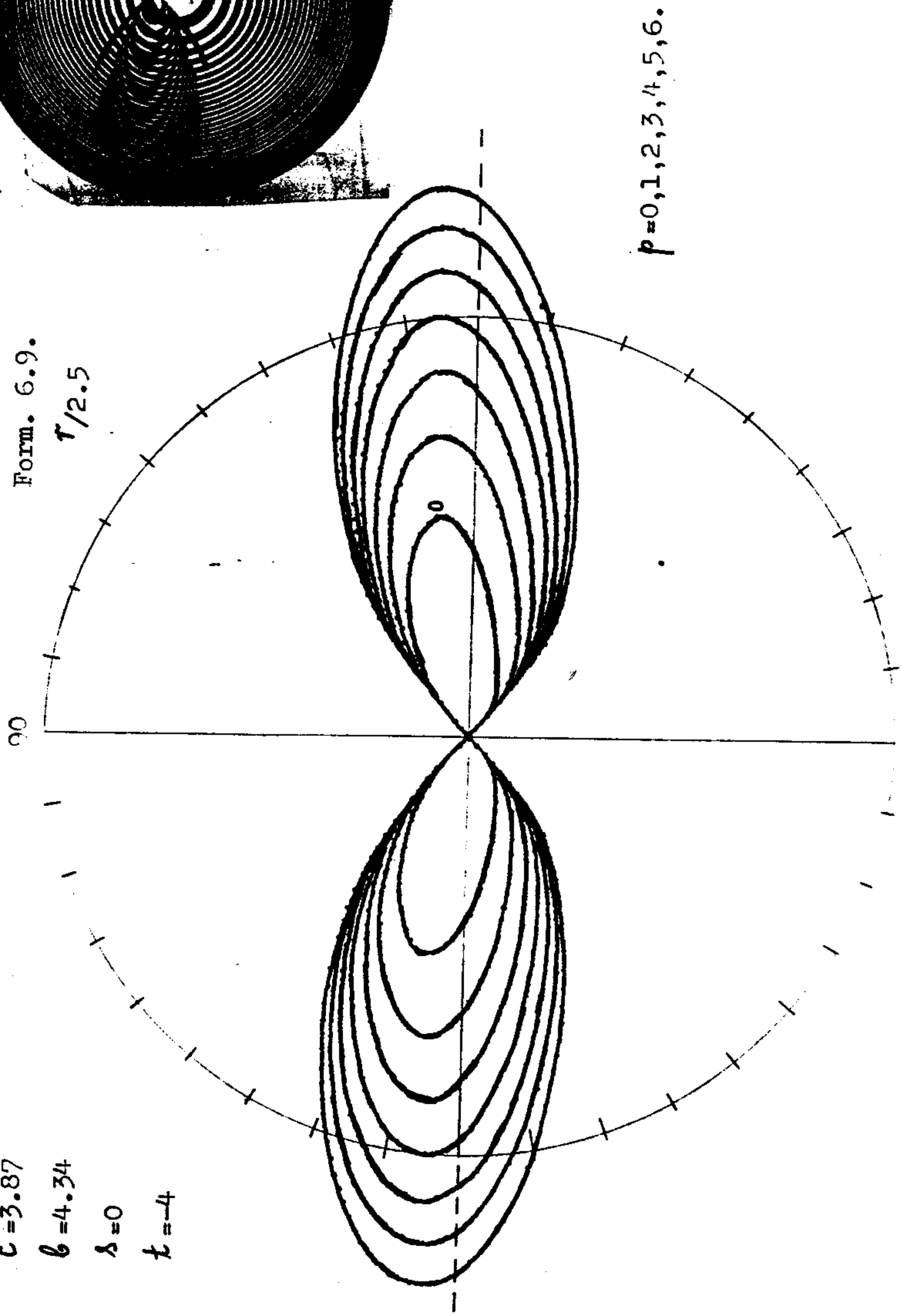


Slika 6.9.



Form. 6.9.
 $r/2.5$

$c = 3.87$
 $b = 4.34$
 $\lambda = 0$
 $t = -4$



$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Slika 6.10.

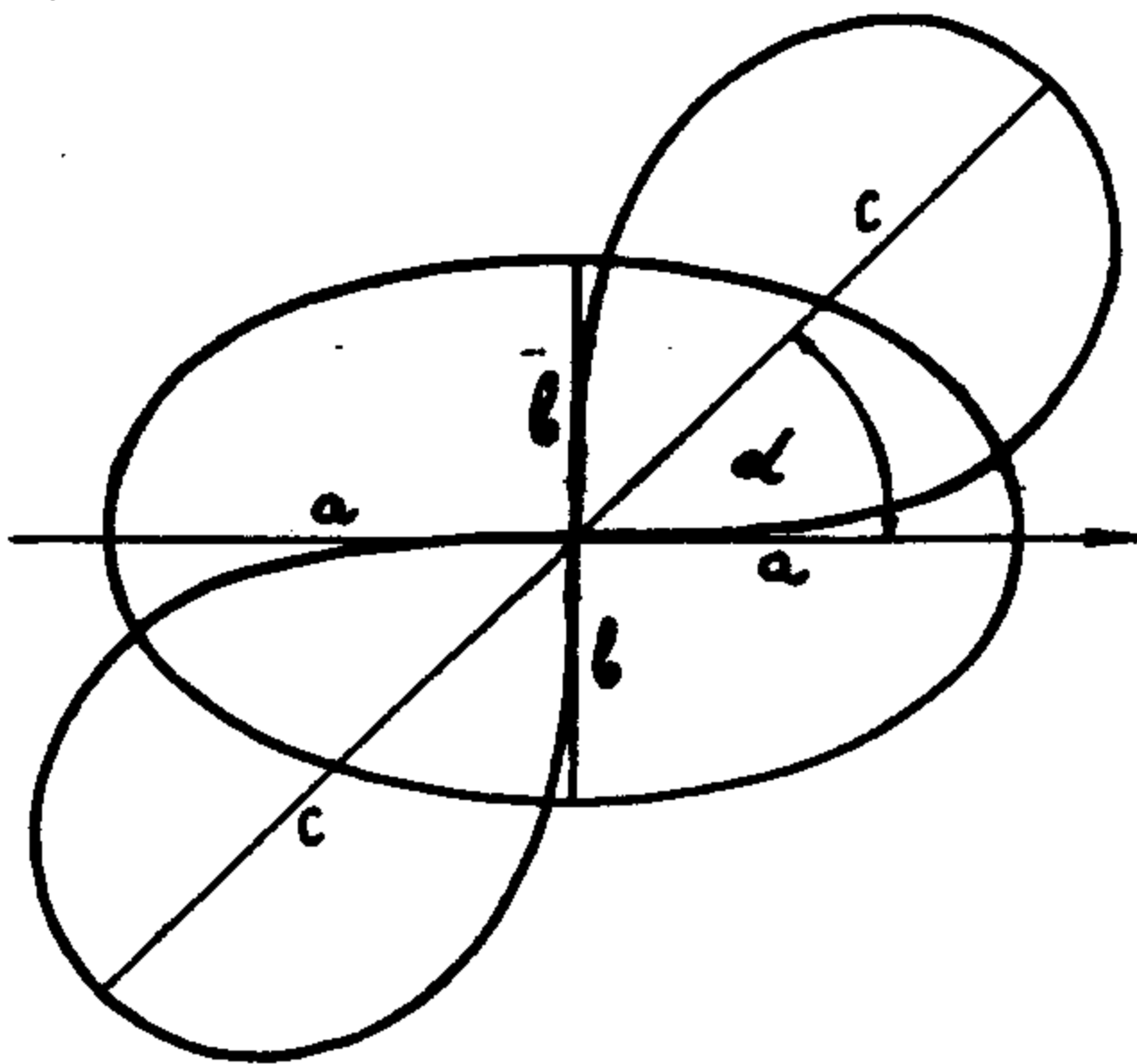
7. MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA ELIPTIČKOM ZONSKOM MREŽICOM

Pokrit ćemo najprije zonski sistem lemniskata sa eliptičkim zonskim sistemom tako da se njihovi centri poklapaju i tu ćemo postaviti ishodište koordinatnog sistema, a polarnu os u

smjeru velike poluosi elipse (slika 7.1).

Za zonski sistem lemniskata koristit ćemo jednadžbu (1.29).

Da bi postavili jednadžbu zonskog eliptičkog sistema u polarnim koordinatama, polazit ćemo iz formule u pravokutnom koordinatnom sistemu:



Slika 7.1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = n \quad (7.1)$$

Za polarne koordinate vrijede $x = r \cdot \cos \varphi$ i $y = r \cdot \sin \varphi$, pa dobijamo

$$r^2 \cdot \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) = n$$

ili

$$r^2 = \frac{m \cdot a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi} \quad (7.2)$$

Da bi odredili područje efikasnosti aditivnih odnosno suptraktivnih muare figura, moramo odrediti komutacionu granicu. Iz (1.29) i (7.2) možemo odrediti funkcije

$$\Psi_1 = \frac{r^2}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} - m \quad (7.3)$$

$$\Psi_2 = \frac{r^2 \cdot (a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi)}{a^2 \cdot b^2} - m \quad (7.4)$$

Njihovi izvodi glase

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \frac{2r}{c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = \frac{2r \cdot (a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi)}{a^2 \cdot b^2},$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = \frac{2r^2 \cdot \sin 2(\varphi - \alpha)}{c^2 \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha)}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} = \frac{2r^2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{a^2 \cdot b^2}.$$

Zamjenom u (1.20), dobijamo posle sredjivanja

$$G = \frac{4 \cdot r^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 2(\varphi - \alpha)} \cdot \left[(a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi) \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) + (a^2 - b^2) \cdot \sin 2(\varphi - \alpha) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right] \quad (7.5)$$

Za komutacionu granicu vrijedi $\underline{G} = 0$. Pošto je prvi faktor u jednadžbi (7.5) uvijek pozitivan, onda mora biti

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos 2(\varphi - \alpha) + (a^2 - b^2) \sin 2(\varphi - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad (7.6)$$

Dalje sredjivanje vodi ka jedne komplicirane jednadžbe trećega stepena koju je vrlo teško riješiti, zato ćemo komutacionu granicu, a time i područje gdje su efikasne aditivne odnosno suptraktivne muare figure naći prilikom numeričkog računa.

Da bi smo odredili jednadžbu muare figura, koristimo uvjet

$$m \pm n = p \quad (7.7)$$

gdje gornji predznak vrijedi za aditivne, a donji za suptraktivne muare figure. Koristeći (1.29) i (7.2), imamo

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2(\varphi - \alpha)} \pm \frac{r^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)}{a^2 b^2} = p$$

ili

$$r^2 = \frac{p \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)}{a^2 b^2 \pm c^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos 2(\varphi - \alpha)} \quad (7.8)$$

Na osnovu ove jednadžbe riješeni su nekoliko karakteristični slučajevi dobijanja muare figura pokrivanjem zonskog sistema lemniskata sa eliptičkom zonskom mrežicom. Prije nego što dajem rezultate tih izračunavanja i eksperimentalnih ispitivanja, treba istaći da je izvršeno numeričko izračunavanje jednadžbe (7.6) na osnovu koje se određuje područje efikasnosti muare figura. Ustanovljeno je da je $G > 0$ u oblastima gdje se pokrivaju ovi sistemi krivih linija, te prema tomu efikasne su suptraktivne muare figure. Dakle u daljem računu uzi-

ma se samo znak " - " u jednadžbi (7.8).

Važno je napomenuti da, kada kombinujemo jedan sistem zonskih elipsa (fiksni parametri a i b) sa sistemom zonskih lemniskata različitih parametara c , oblik muare figura zavisi od veličine parametra c u odnosu na udaljenost tačke elipse (koja se nalazi duž osi lemniskate) iz njenog centra. Uzmimo najprije slučaj da je $\alpha=0$. Tada se os lemniskate poklapa sa velikom poluosi elipse. U tom slučaju ako je $c < a$, onda muare figure imaju oblik zatvorenih linija koje prolaze kroz ishodište. Ovo potvrđuje slika 7.2, gdje su prikazani grafički numeričkog izračunavanja na osnovu jednadžbe (7.8) za slučaj $a=4.543$, $b=3.407$, $c=3.87$, $\alpha=0$ i $p=1, 2, 3, \dots, 8$, a uz njih i fotografija.

U slučaju pak da je $c > a$, onda se dobijaju muare figure oblika kao na slici 7.3. Za $p > 0$ dobijaju se otvorene linije koje prolaze kroz ishodište (na prikazanoj slici to su $p=1, 3$ i 5) a za $p < 0$ dobijaju se muare figure koje liče na sistem hiperbola ($p = -1, -2, \dots, -7$).

Utjecaj odnosa c/a na oblik muare figura najbolje ilustruje slika 7.4, gdje su nacrtani nekoliko karakteristični slučajevi za fiksnu a i b (u ovom slučaju $a=4.543$ i $b=0.7 \cdot a$) i $\alpha=0$. Desni dio te slike prikazuje $p=8$ za $c \leq a$. Nacrtane su linije za $c/a = 0.67, 0.76, 0.85, 0.94$ i 1 . Primjećujemo da povećavanjem vrijednosti c u odnosu na a , muare figure postaju sve rastezanije, a kada je $c=a$ one se potpuno otvaraju. Daljim povećavanjem c , počinju da se približavaju neke otvorene linije koje liče na hiperbolu, a dobijaju se za $p < 0$. Ovo se može vidjeti na lijevoj strani te iste slike, gdje je nacrtana linija $p = -8$ za $c/a = 1.1, 1.3, 1.5$

Form. F.O.

r/c

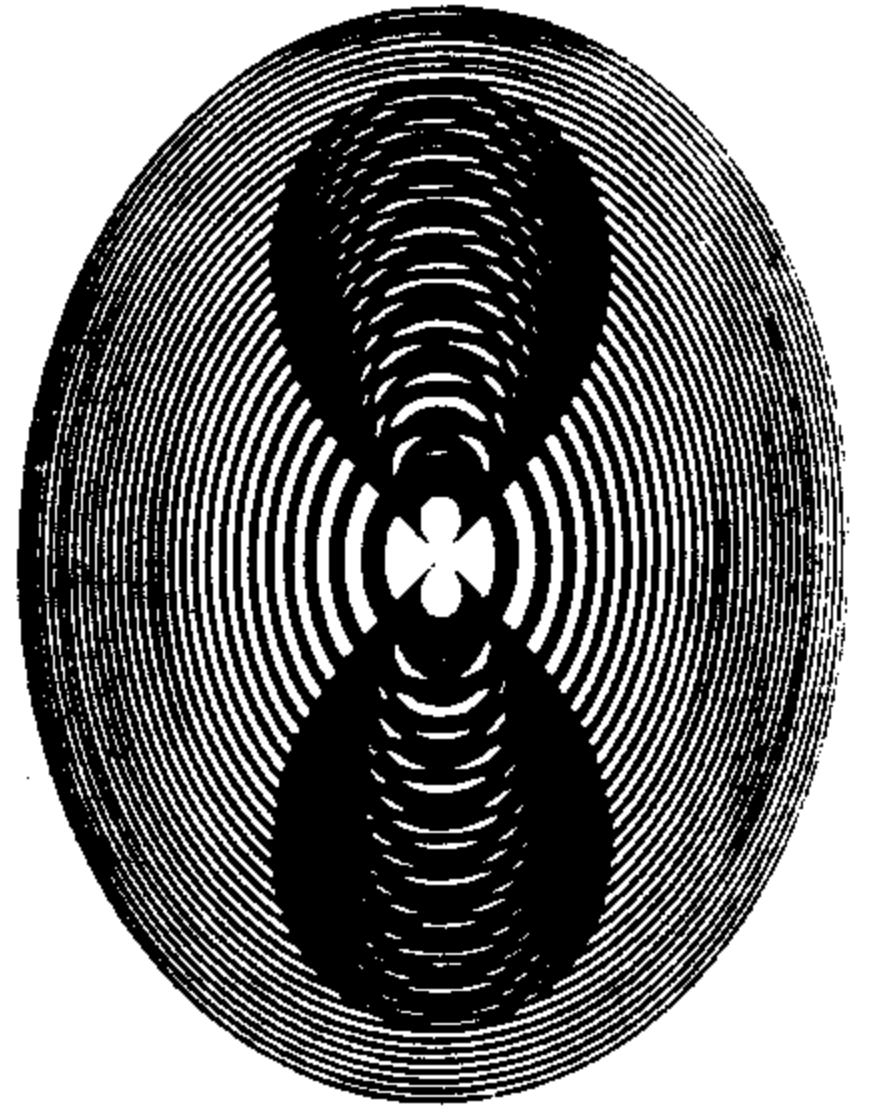
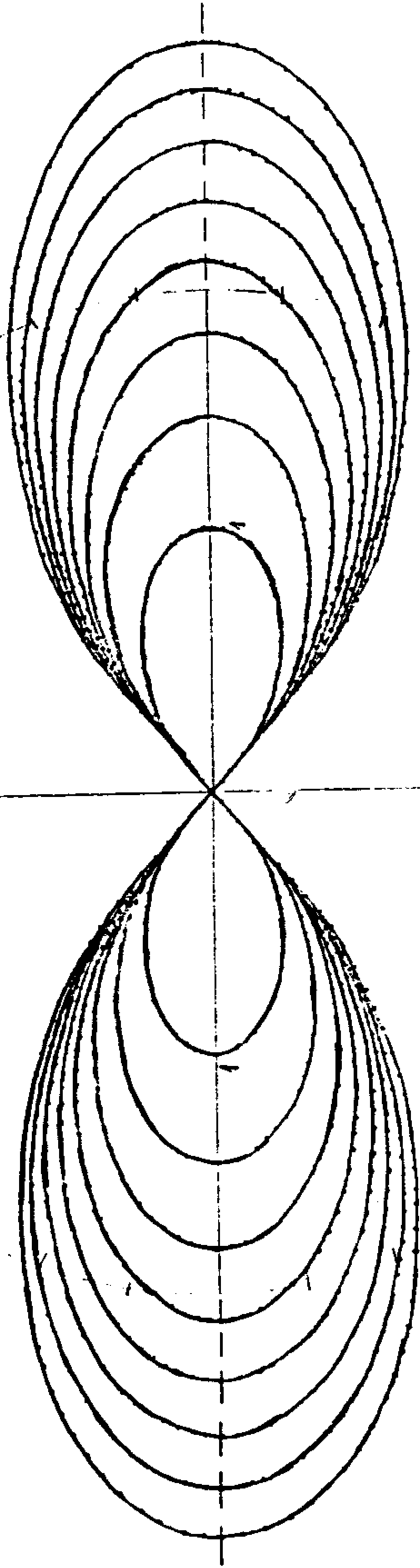
$$a = 1.5403$$

$$b = 3.1407$$

$$c = 3.0000$$

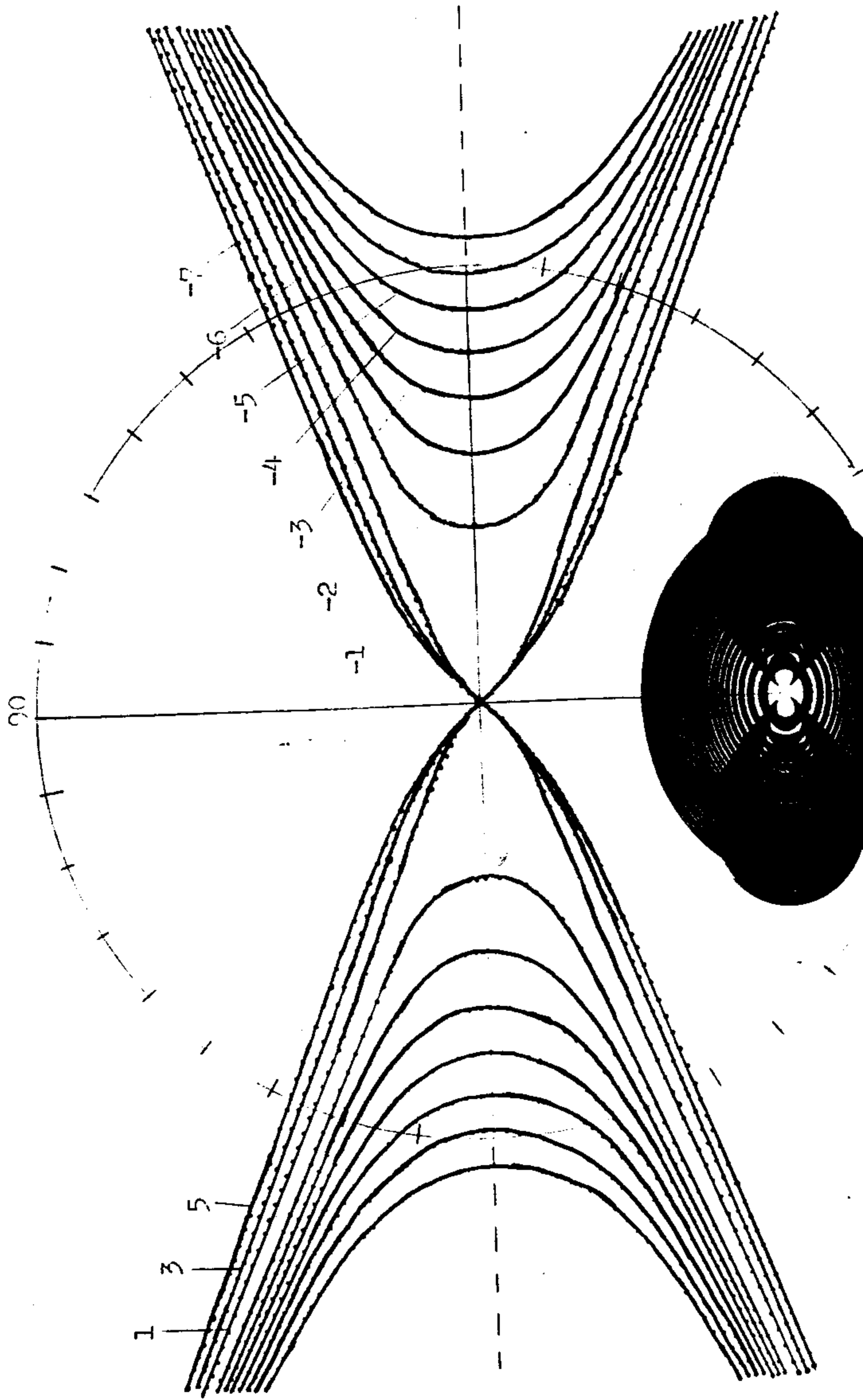
$$d = 0$$

$c < a$



PERIODICITY

FIG. 10



Form. 7.8.
r/3

$a = 3.939$ $c = 4.415$
 $b = 2.954$ $\alpha = 0$
 $\delta = 0$ $t = 0$

Sluka r.3.

$c > a$

i 2.o. Vidi se i ovdje da približavanjem veličine c vrijednosti a , ove linije se udaljavaju, u momentu $c = a$ izčežavaju, a daljim smanjenjem c ($c < a$) otvorene linije (za $p > 0$) se zatvaraju i nadalje ide suprotnim postupkom u odnosu na ono što je kazano za desnu stranu slike 7.4.

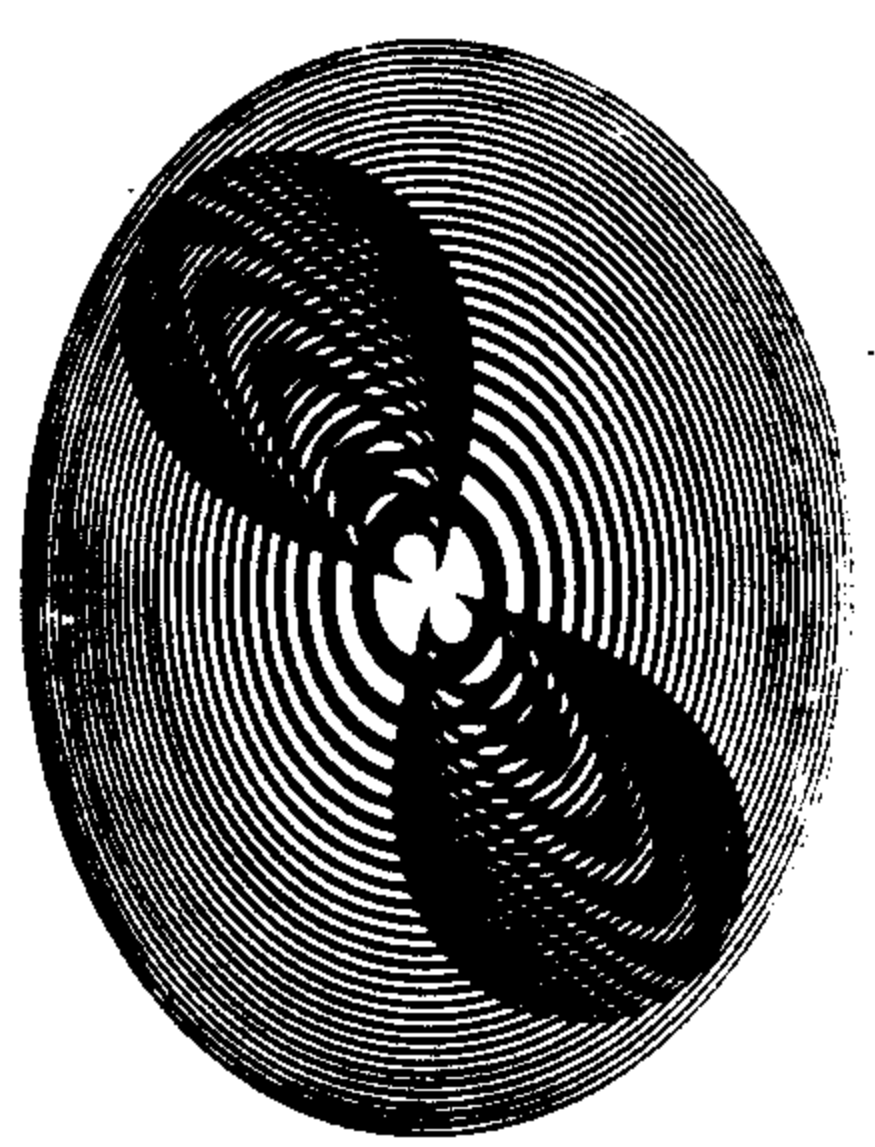
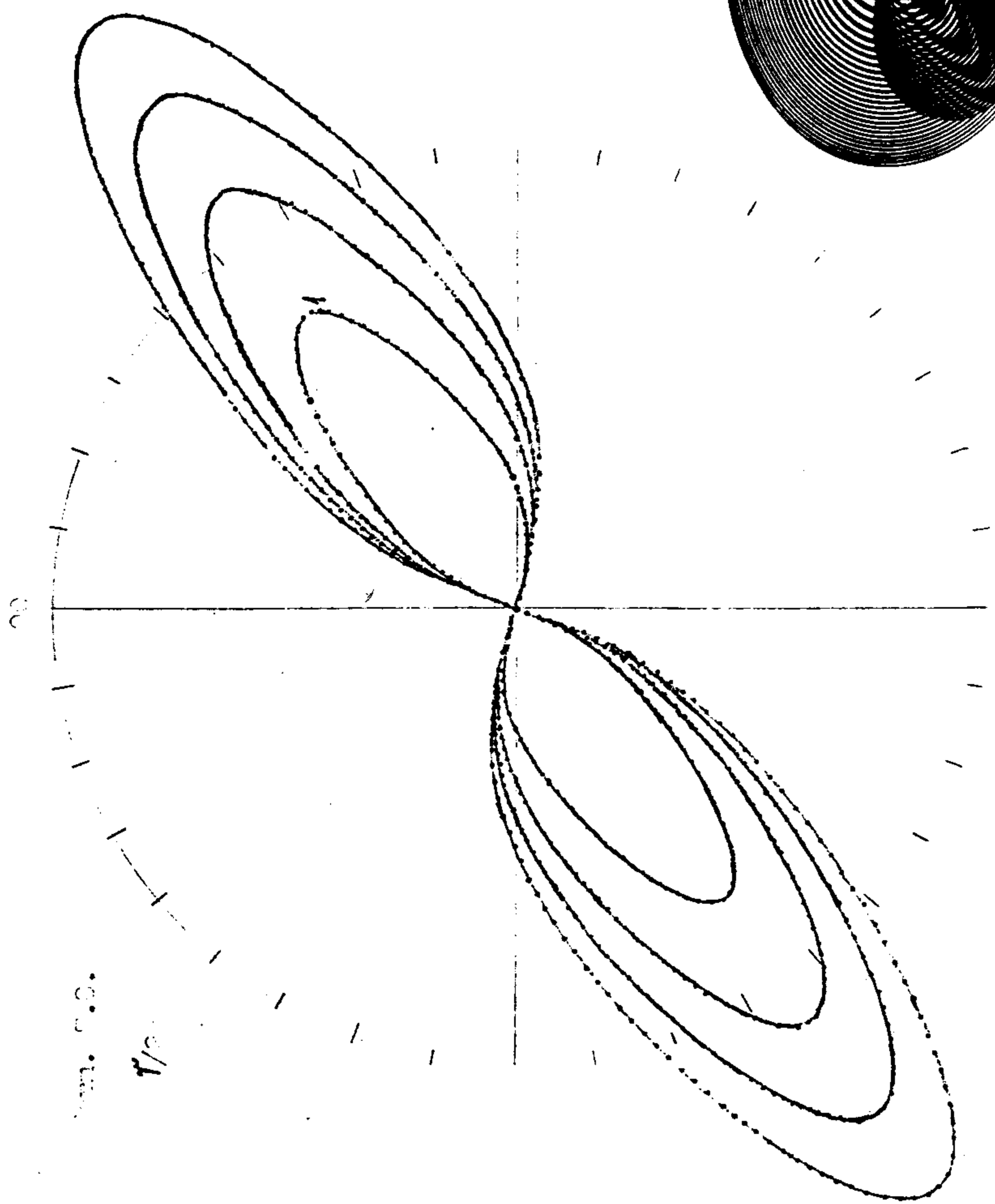
Ovo što je do sada razmotreno potvrđuju i naredne slike, koje su dobivene eksperimentalno a i numeričkim izračunavanjem na osnovu formule (7.8). Isto tako, one pokazuju kako se mijenja oblik muare figura mijenjanjem kuta zakretanja osi zonskog sistema lemniskata.

Slike 7.5, 7.6 i 7.7 prikazuju rezultate pokrivanja dvaju sistema sa istim parametrima kao na slici 7.2, ali mijenjanjem kuta zakretanja osi sistema lemniskata za $\alpha = 28^\circ$, 45° i 90° . Kada ove figure uporedimo sa onima na slici 7.2, vidimo da se one rastežu (za $\alpha = 28^\circ$) sve dok se potpuno otvaraju ($\alpha = 45^\circ$) i pojavljuju se još i figure slične hiperbolama (za $\alpha = 90^\circ$) za $p < 0$ (slika 7.7). Ovo se objašnjava tako što se veličina c približava po dužini udaljenosti tačke elipse (koja se nalazi duž c) od ishodišta (slika 7.5), zatim postaje jednaka toj udaljenosti (slika 7.6), a u slučaju $\alpha = 90^\circ$ (slika 7.7) ta udaljenost je jednaka maloj poluosi elipse koja je u ovom slučaju manja od parametra c lemniskate, te prema tomu dobivaju se otvorene linije koje prolaze kroz ishodište za $p > 0$ i one koje liče na hiperbole za $p < 0$.

Osim veličine parametra c lemniskate, na oblik muare figura vrlo mnogo utječe i veličina odnosa između male i velike poluosi elipse. Kako je u ovim eksperimentima taj odnos uvijek $b/a = 0.7$, numeričkim računom mijenjen je taj odnos i ispitivan je njegov utjecaj na oblik muare figura. Neki rezul-

$a = 1, c = 0$
 $b = 2, d = 0$
 $e = 3, f = 0$
 $g = 4, h = 0$

$p = 1, q = 1, r = 1$



$r = 0.5$

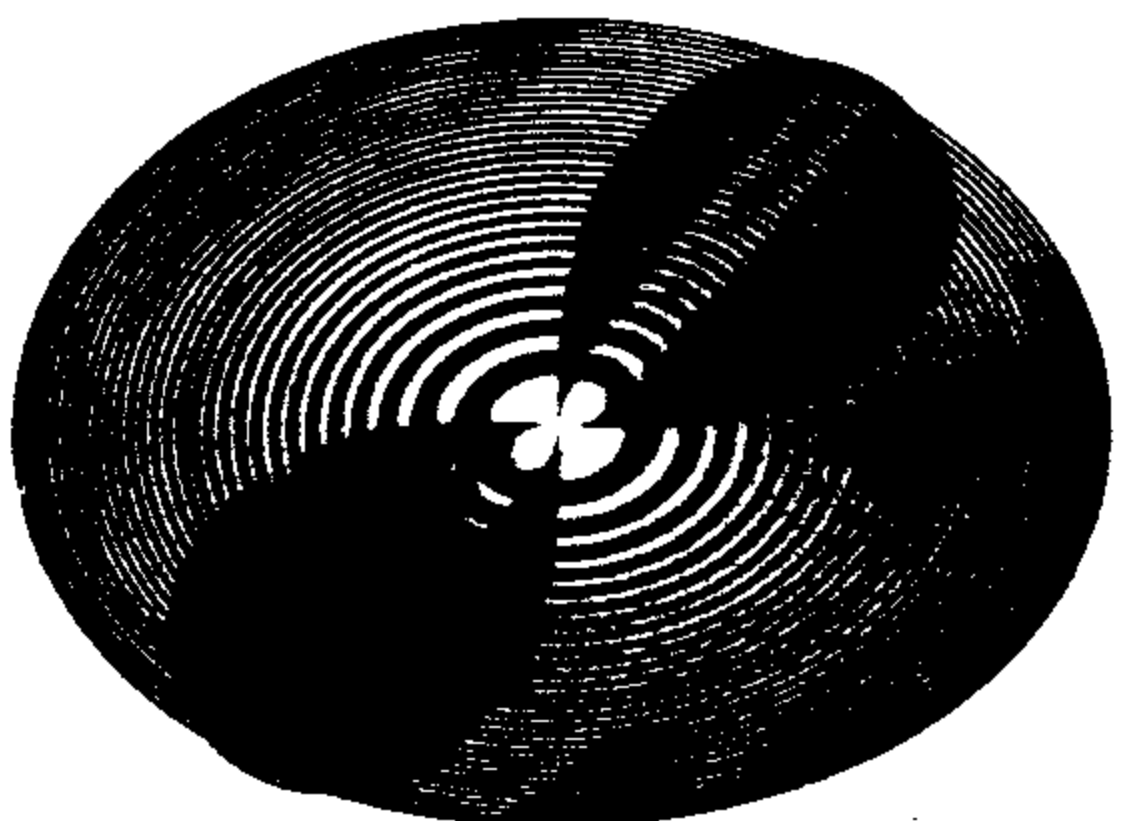
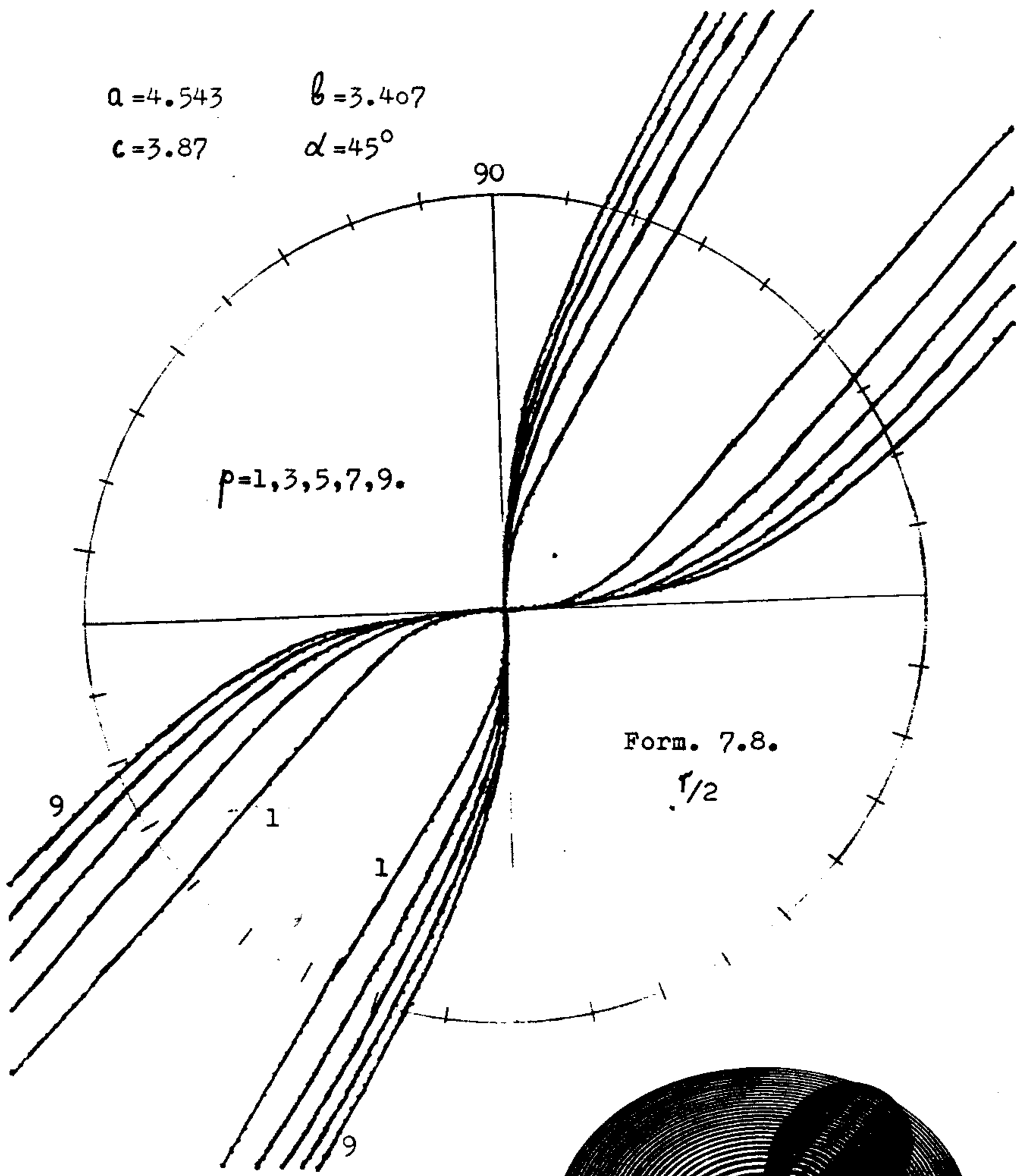
$r = 1$

$a = 4.543$

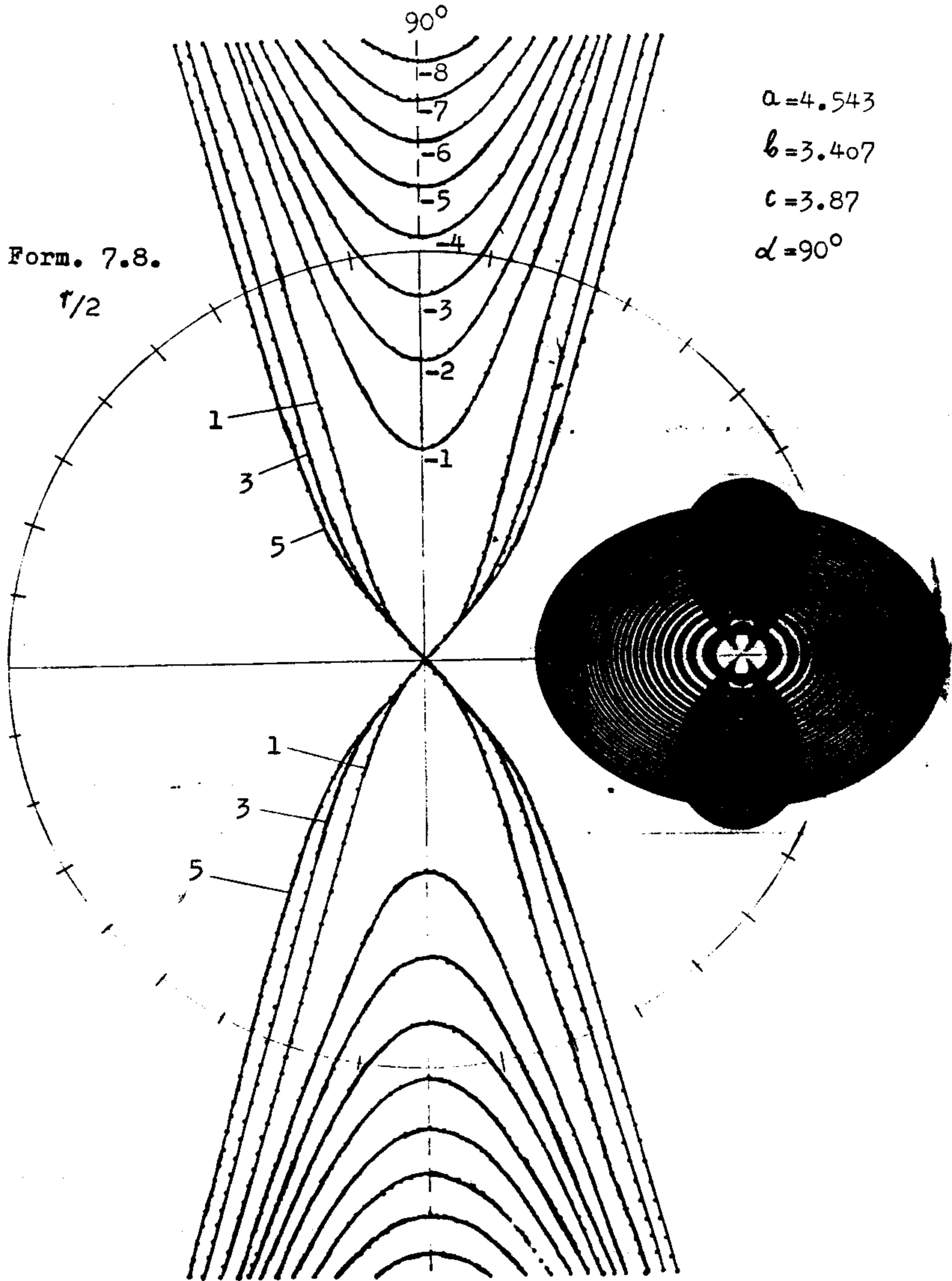
$b = 3.407$

$c = 3.87$

$\alpha = 45^\circ$



Slika 7.6.



Slika 7.7.

tati su prikazani na slici 7.8.

Lijeva strana slike 7.8 predstavlja slučaj $c > a$ ($\alpha = 0$). Nacrtani su grafikoni muare linije $p = -3$ za $b/a = 0.9$, 0.6 i 0.4 . Vidi se da smanjenjem odnosa b/a linija dobiva dva vrha, širi se sve dok ne izčezava potpuno za $b/a = 0$. Treba konstatirati da mijenjanjem veličine b/a ne mijenja se tačka presjecanja muare linije sa polarnom osom. Na toj strani slike je nacrtana i linija $p = 30$ koja ima tačku u ishodištu ($p > 0$), za iste slučajeve mijenjanja odnosa b/a . Ova linija se isto tako širi i prilagodjava se širenju linije sa $p < 0$.

Desna strana slike 7.8 predstavlja slučaj $c < a$ ($\alpha = 0$). Nacrtana je linija $p = 4$ za $b/a = 0.9$, 0.6 , 0.4 i 0.3 . Primjećujemo da se ove linije šire, dobivaju dva vrha ($b/a = 0.4$) a onda se otvaraju potpuno ($b/a = 0.3$), dok tačka presjecanja sa polarnom osom ne mijenja položaj. U tom slučaju se dobivaju dvije grupe muare linija, jedne koje liče na hiperbolu i vrijede za $p < 0$, a druge koje imaju tačku u ishodištu i računaju se sa $p > 0$.

Uzet ćemo sada slučaj da se centri eliptičkog sistema i sistema lemniskata ne poklapaju. Neka se ishodište koordinatnog sistema nalazi u centru zonskog sistema lemniskata, a ugao skretanja njene osi bude jednak nuli. Eliptički sistem čiji je centar pomaknut za (s, t) imao bi slijedeću jednadžbu

$$\frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = m \quad (7.9)$$

Kada to prevodimo u polarne koordinate, dobiva se

$$b^2 \cdot (r \cos \varphi - s)^2 + a^2 \cdot (r \sin \varphi - t)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot m$$

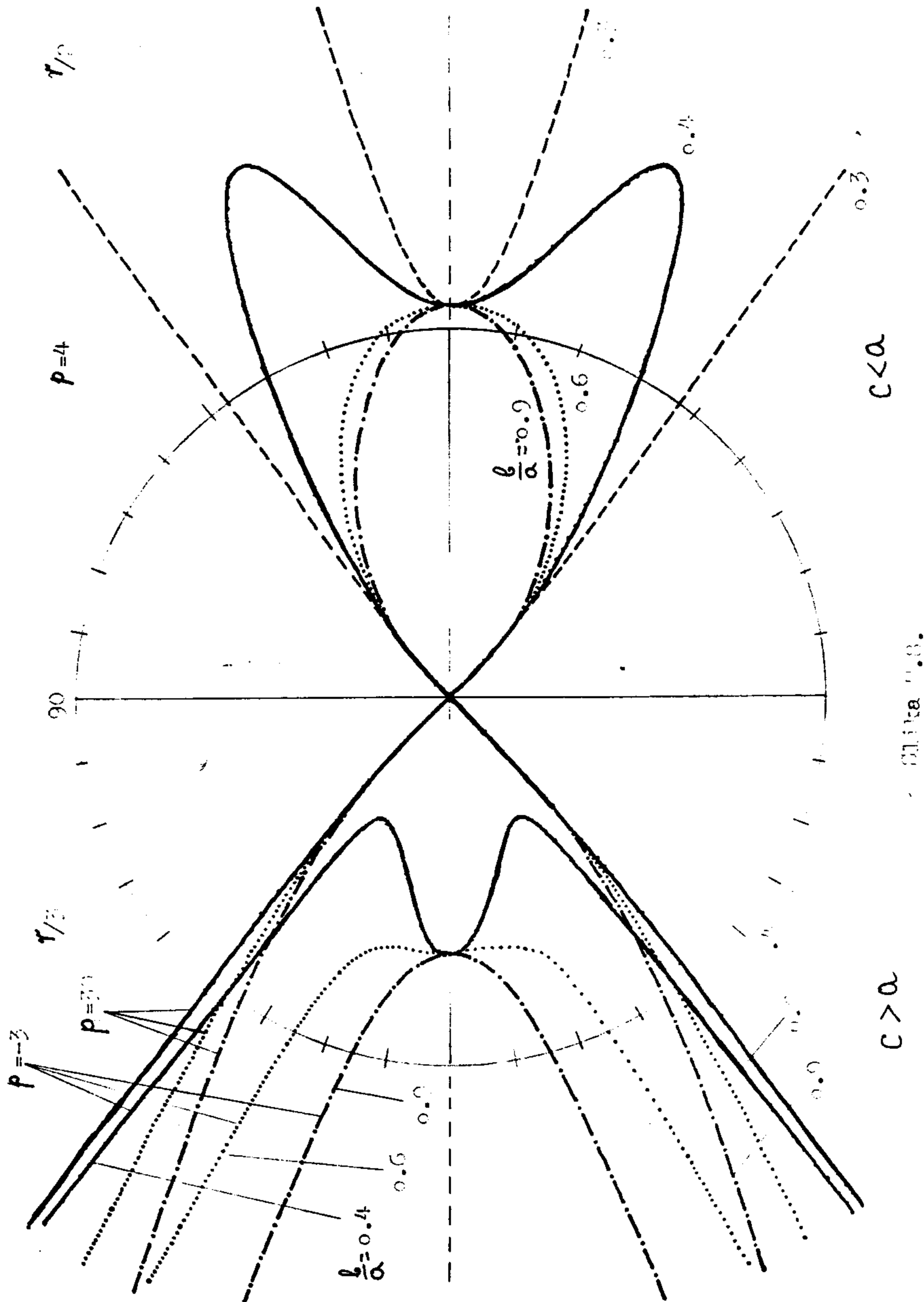


Figure 1.8.

ili

$$r^2 \cdot (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) - 2r \cdot (a^2 t \sin \varphi + b^2 s \cos \varphi) + a^2 t^2 + b^2 s^2 - a^2 b^2 m = 0 \quad (7.10)$$

Kada zamjenimo (1.29) uz $\alpha=0$ i (7.10) u uvjet za muare figure (7.7), onda se dobiva

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2\varphi} \pm \frac{1}{a^2 b^2} \cdot [r^2 \cdot (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) - 2r \cdot (a^2 t \sin \varphi + b^2 s \cos \varphi) + a^2 t^2 + b^2 s^2] = p$$

Sredjivanjem ove jednadžbe uz zamjene

$$W = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cdot c^2 \cos 2\varphi, \quad V = (a^2 t \sin \varphi + b^2 s \cos \varphi) \cdot c^2 \cos 2\varphi,$$

$$D = (a^2 t^2 + b^2 s^2) \cdot c^2 \cos 2\varphi \quad \text{i} \quad H = a^2 b^2 c^2 p \cos 2\varphi$$

dobiva se

$$r^2 \cdot (a^2 b^2 \pm W) \mp r \cdot 2 \cdot V \pm D - H = 0 \quad (7.11)$$

Rješenje ove jednadžbe glasi

$$r_{1;2} = \frac{\pm V \pm \sqrt{V^2 - (a^2 b^2 \pm W) \cdot (\pm D - H)}}{a^2 b^2 \pm W} \quad (7.12)$$

Gornji predznak ispred W , V i D vrijedi za aditivne a donji za suptraktivne muare figure. To da jednažba (7.11) treba imati dva rješenja, označava predznak ispred kvadratnog korijena u jednažbi (7.12).

Na osnovu formule (7.12) riješeni su nekoliko karakteristični slučajevi, koje ćemo na osnovu odnosa veličine parametra c prema velikoj poluosi a elipse, podijeliti na dvije grupe.

a) Slučaj $c < a$

Kada se centri sistema elipsi i sistema lemniskata nalaze na istom mjestu, imamo simetričnu sliku muare figura koje se dobivaju za $p > 0$ (sl. 7.2). Medjutim, pomjeranjem centra sistema elipsi duž polarne osi, pomjeraju se i muare linije i to: s desne strane postaju šire i zgusnute, a s lijeve strane se rastežu i postaju rjedje. Ovo nam ilustrira slika 7.9, gdje su nacrtani grafikoni dobiveni računskim putem na osnovu formule (7.12) za $a=4.543$, $b=3.407$, $c=3.87$, $\lambda=2$ i $t=0$; s lijeve strane nacrtane linije $p=0, 1, 2, \dots, 7$ a s desne strane $p=1, 3, 5, 7, 9, \dots, 17$. Pored ovih grafikona priložena je i fotografija istog slučaja.

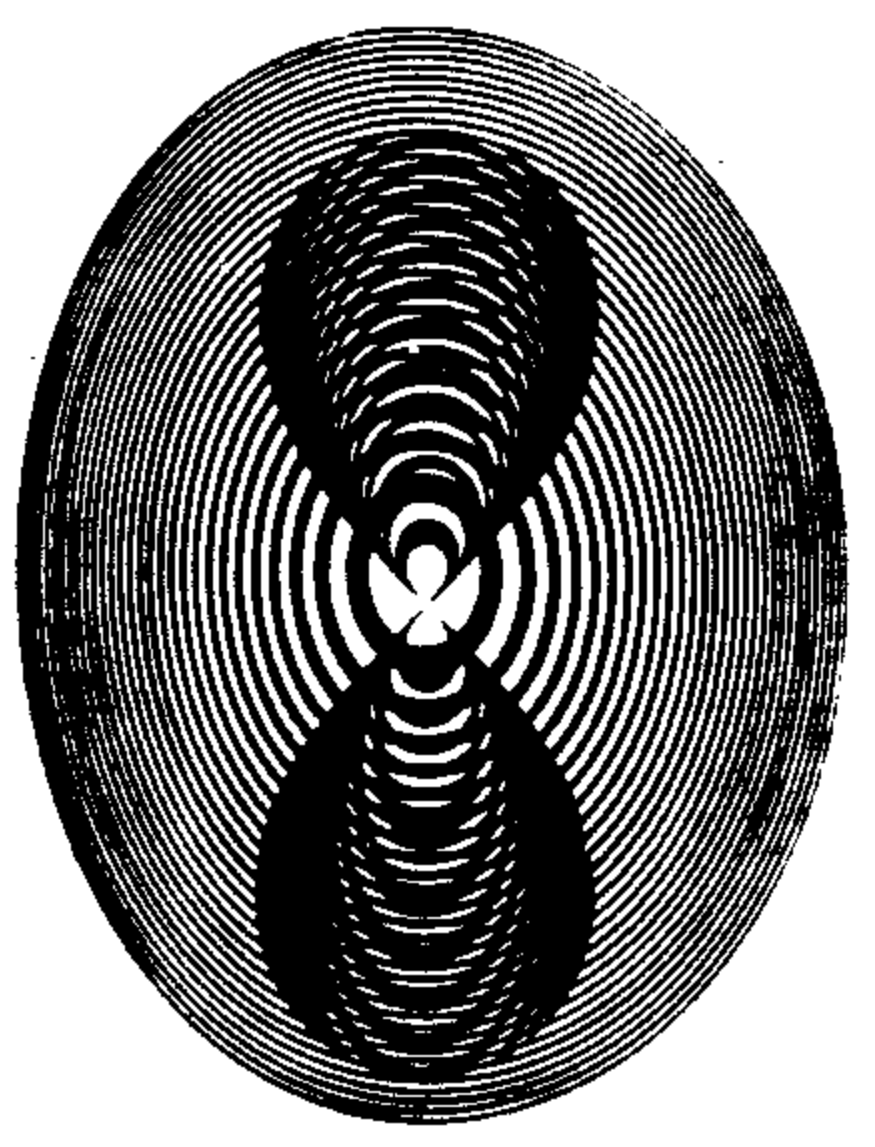
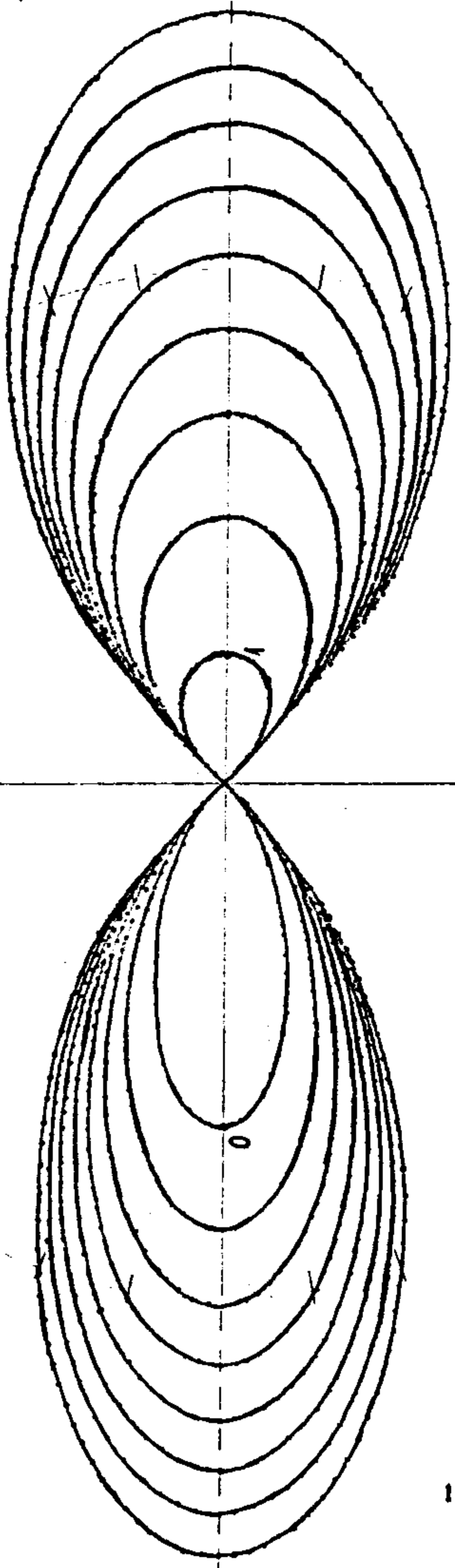
Daljim pomjeranjem centra sistema elipsi, s desne strane muare linije postaju sve gušće, a s lijeve strane u jednom trenutku počinju da se pojavljuju neke nove muare linije koje liče na elipsu i dobivaju se za negativno p . Daljim povećavanjem λ -a pojavljuju se nove "elipse" sa većim negativnim rednim brojem, a one prve počinju da prelaze u obliku zatvorenih linija koje imaju zajedničku tačku u ishodištu, kao one koje imaju $p \geq 0$. Ovu činjenicu potkrepljuje slika 7.10, koja je

Form. 0.12.

1/2

90

$a = 1.512$
 $b = 1.000$
 $c = 1.000$
 $d = 0$
 $s = 0.0$
 $t = 0$



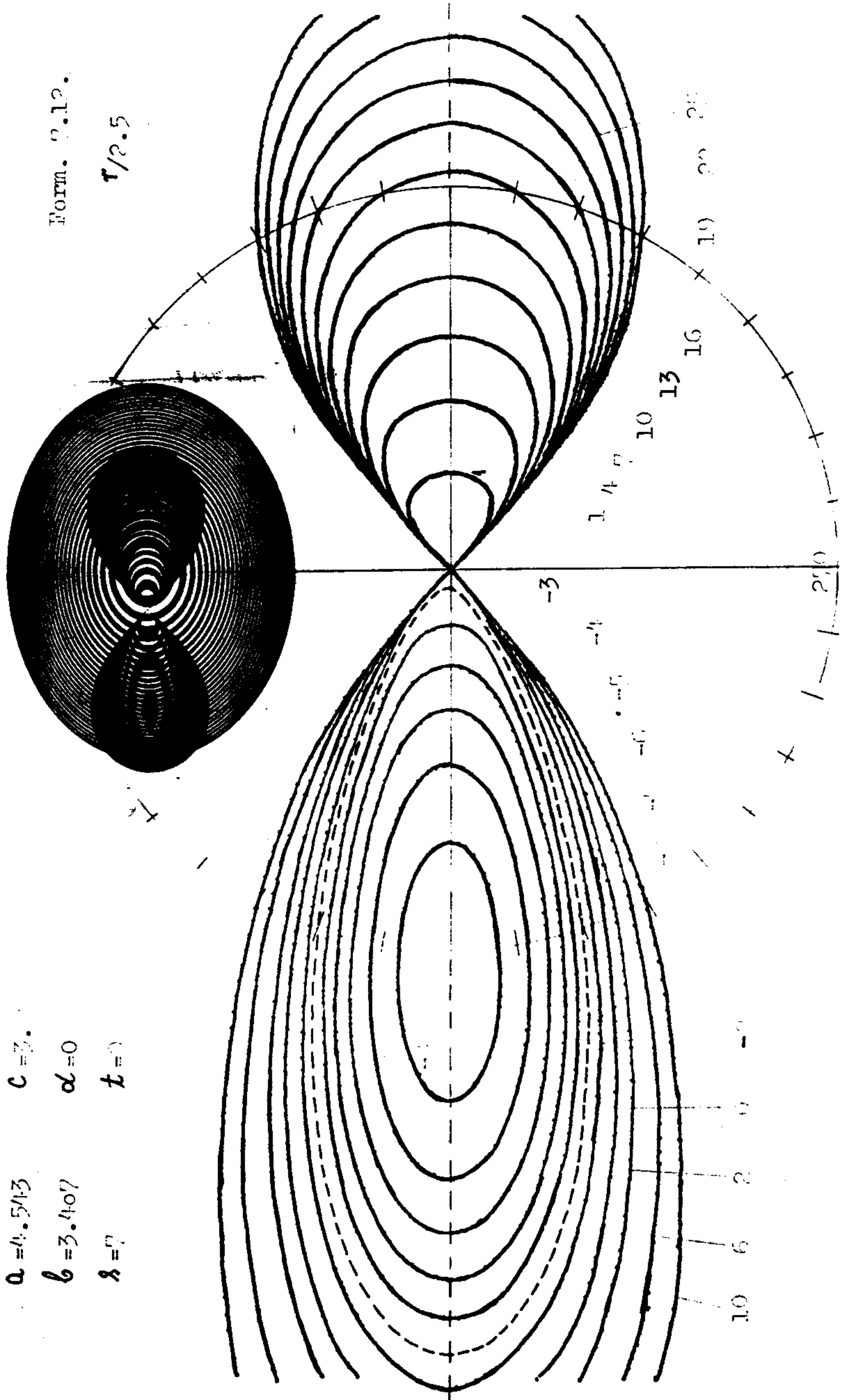
$p = 0.1000000000$
 $p = 0.1000000000$
 $p = 0.1000000000$
 $p = 0.1000000000$

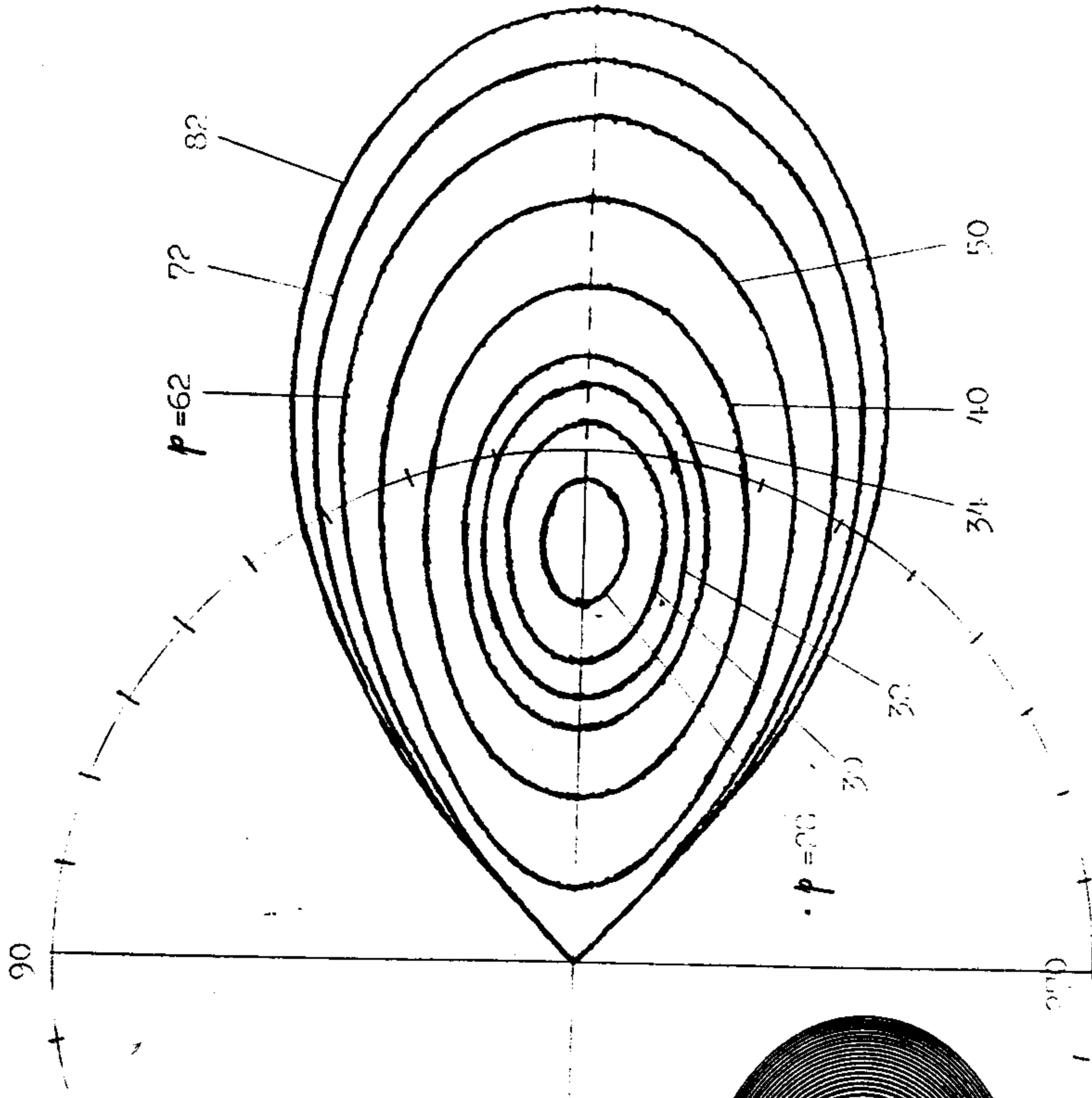
0.1000000000

$a = 4.5/13$ $c = 3.$
 $b = 3.4/7$ $\alpha = 0$
 $\lambda = 7$ $t = 1$

Form. 9.10.

$r/2.5$





$a = 3.039$

$b = 2.054$

$c = 4.45$

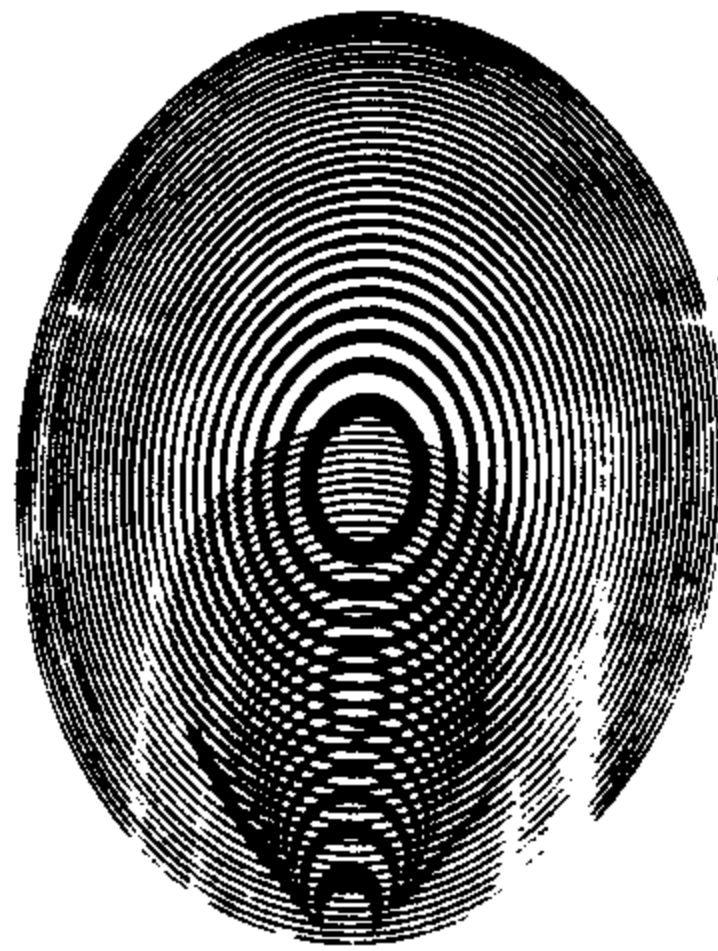
$\alpha = 0$

$\lambda = 21.0$

$k = 0$

Form. C.L.C.

$r/3$



nastala pokrivanjem istih sistema samo uz $\lambda=7$, gdje s desne strane su nacrtani grafikoni muare linija $p = 1, 4, 7, \dots, 31$, a s lijeve strane su nacrtane "elipse" $p = -8, -7, \dots, -3$ i zatvorene linije sa zajedničkom tačkom u ishodištu $p = -2, 0, 2, 6, 10$. Vidimo da su se prve "elipse" $p = -1$ i -2 pretvorile u drugi oblik muare linije.

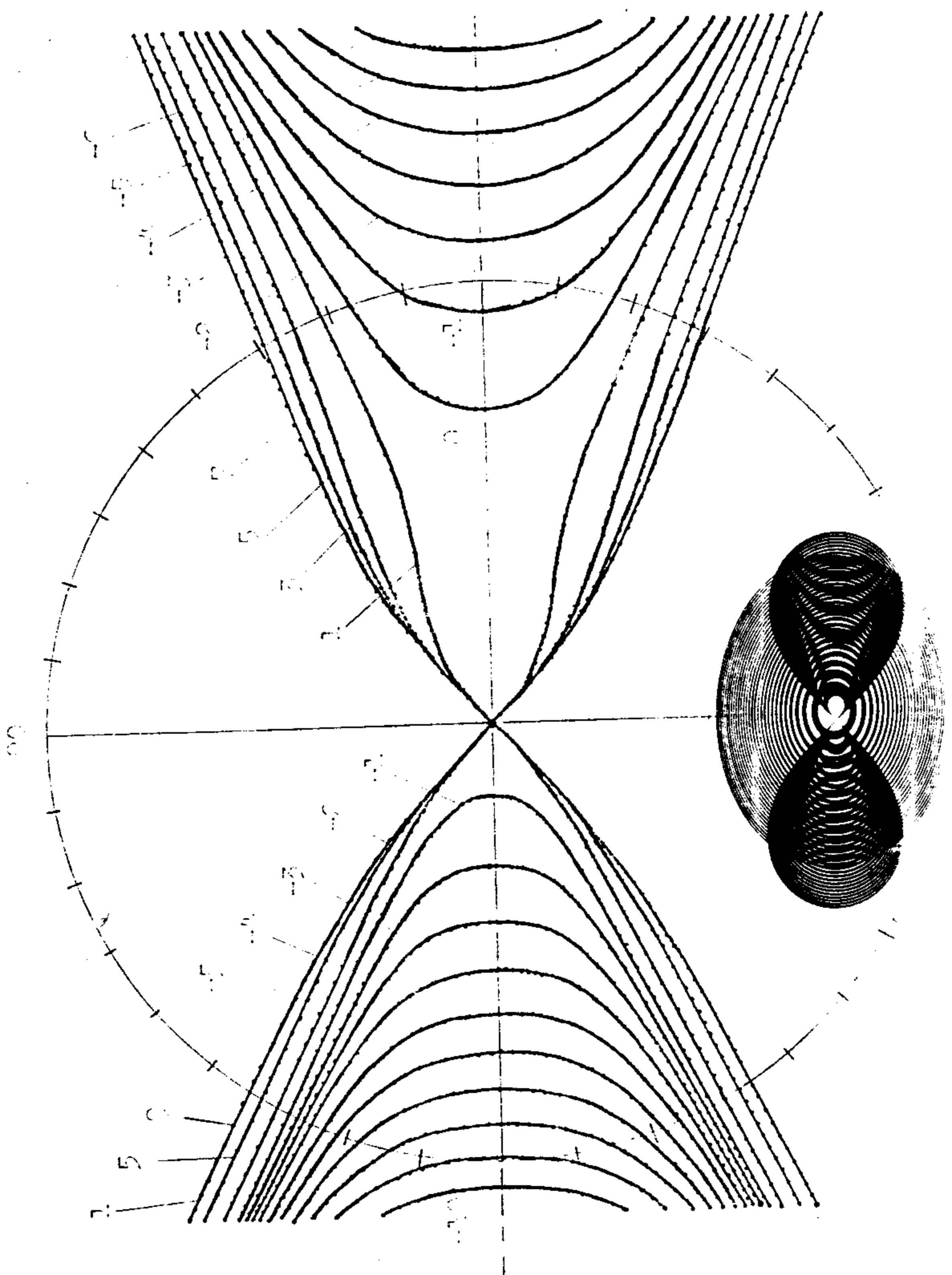
Kada se λ povećava u takvoj mjeri da centar zonskog sistema elipsi ulazi duboko medju desnim linijama zonskog sistema lemniskata, onda dobivaju se nove muare linije koje liče na elipsu, a koje se računaju za $p > 0$. Znači da se u takvom obliku pretvaraju one zatvorene linije koje su prethodno imale jednu tačku u ishodištu. Slika 7.11 ilustrira tu pojavu i rezultat je pokrivanja istih sistema kao na dvije prethodne slike, ali za $\lambda=31$. Tu su nacrtane "elipse" $p = 28$ (kao prva), 30, 32, 34, 40 i 50, zatim zatvorene linije koje imaju tačku u ishodištu $p = 62$ (prva kao takva), 72 i 82. Isto tako, na istoj slici priložena je i fotografija tog slučaja.

Daljim povećavanjem λ -a, "elipse" $p = 28, 29$ itd. se gube postepeno, a zatvorene linije $p = 62, 63, \dots$ prelaze u "elipsu". Treba istaći da povećavanjem λ -a povećava se i broj "elipsi", a to znači da se one sporije gube nego što se pojavljuju nove.

Lijeva strana slike 7.11 nije nacrtana (a ne vidi se i na fotografiji), ali se podrazumijeva da postoji i ona, enakva kao što je opisana uz sliku 7.10.

b) Slučaj $c > a$

U slučaju da je $c > a$, kada se centar zonskog siste-

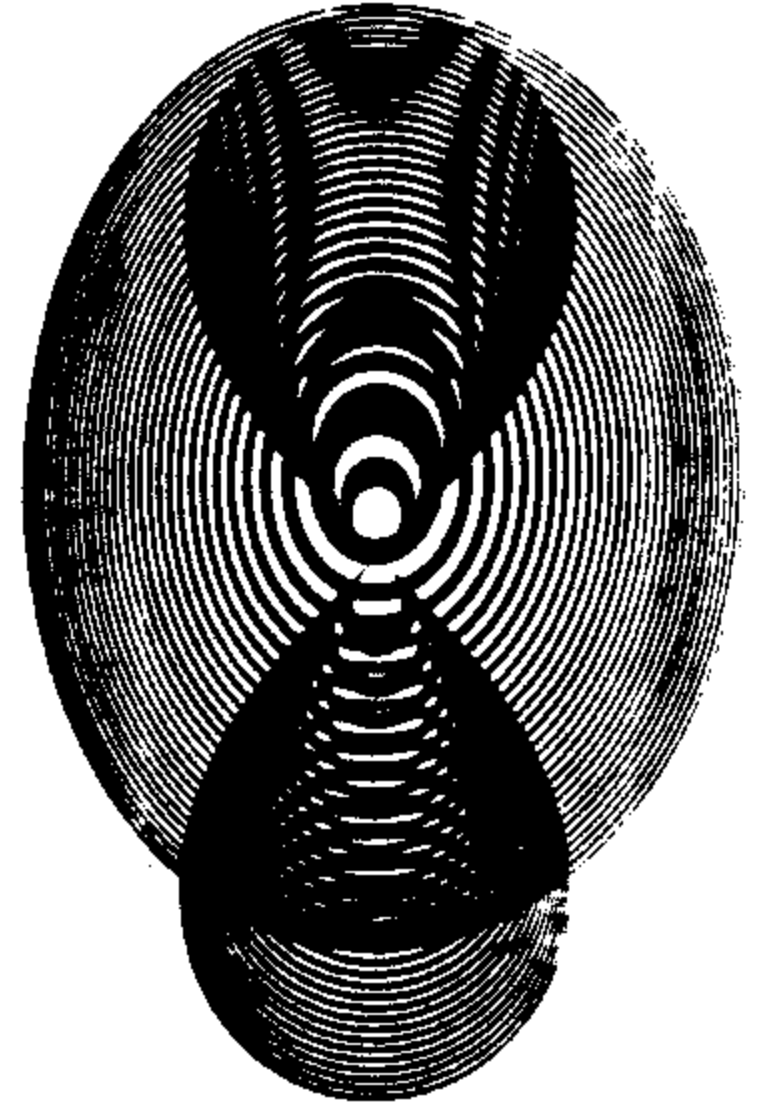
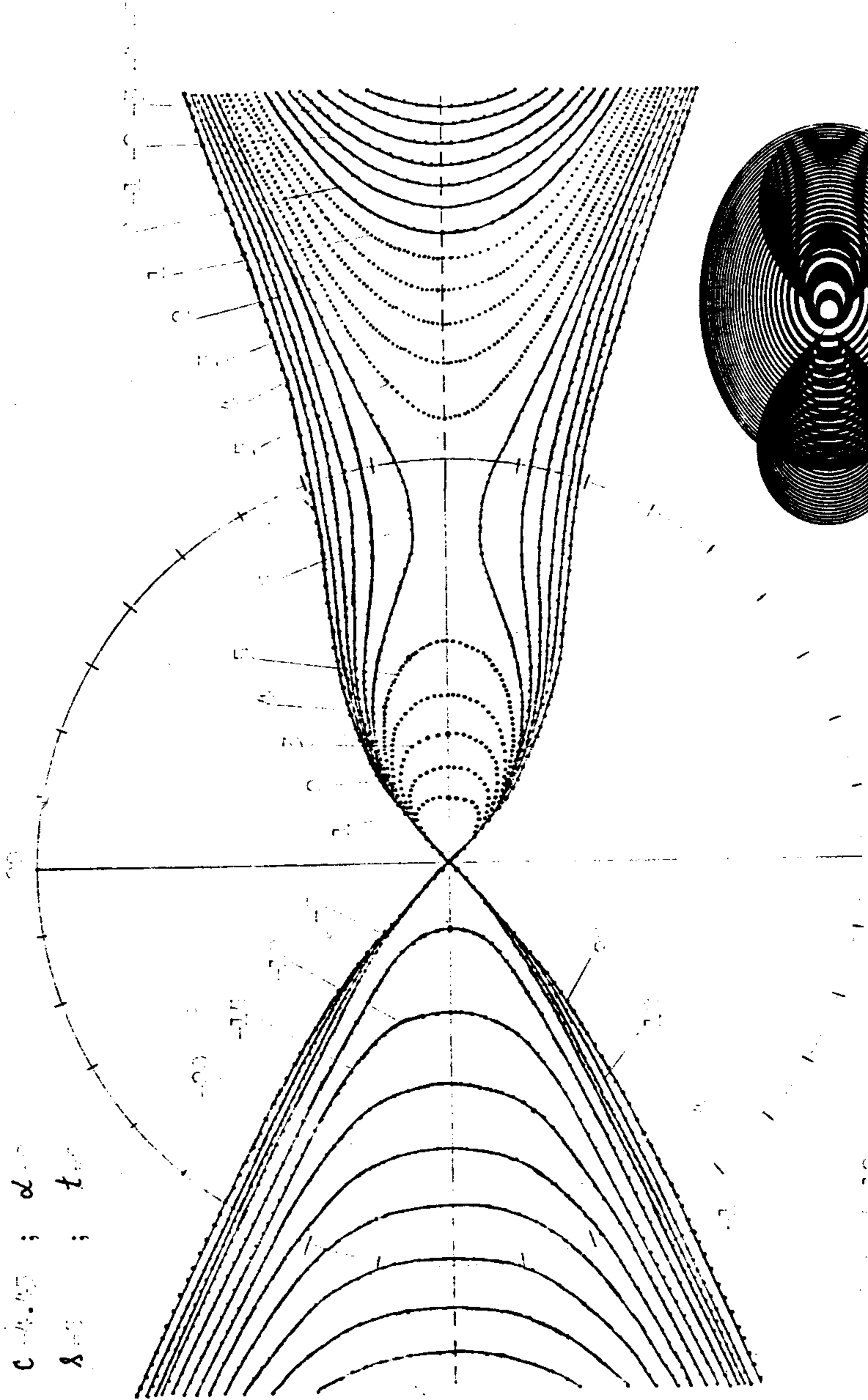


$a = 2.000$
 $b = 0.000$
 $c = 2.000$
 $d = 0$
 $s = 2.000$
 $t =$

...
 T/2

...


$a = 2.000$; $b = 2.000$
 $c = 4.000$; $d = 0$
 $\delta = 0$; $t = 0$



Zur Darstellung

Tm

ma elipsa počinje pomicati udesno iz ishodišta, slika 7.3 počinje da mijenja oblik, što ilustrira slika 7.12. S lijeve strane te slike primjećujemo da se linije koje liče na hiperbolu ($p \leq 0$) pomjeraju prema ishodištu i postaju gušće, također i otvorene linije koje imaju tačku u ishodištu ($p > 0$). S desne strane je obrnuto: linije koje liče na hiperbolu ($p \leq 0$) se udaljavaju a linije sa $p > 0$ u jednom dijelu počinju da se približavaju polarnoj osi.

Daljim povećavanjem λ -a, s lijeve strane linije sa $p \leq 0$ počinju da prelaze u oblik linija sa $p > 0$ (otvorene linije sa tačkom u ishodištu), a s desne strane linije sa $p \leq 0$ još više se udaljavaju, linije sa $p > 0$ počinju da se dijele na dva dijela: jedan dio se satvara a drugi dio se pridružuje linijama sa $p \leq 0$ koje se udaljavaju. Ovu dinamičku promjenu muare figura ilustrira slika 7.13, gdje su nacrtani grafikoni numeričkih izračunavanja za slučaj $a=3.939$, $b=2.954$, $c=4.45$, $\alpha=0$, $\lambda=5$ i $t=0$, pa i slika 7.14 sa istim sistemima, samo za $\lambda=9$, gdje se više ne vide linije  sa $p \leq 0$ s desne strane.

U daljem postupku je razmatran oblik muare figura kada se centar eliptičkog sistema pomjera u vertikalnom smjeru.

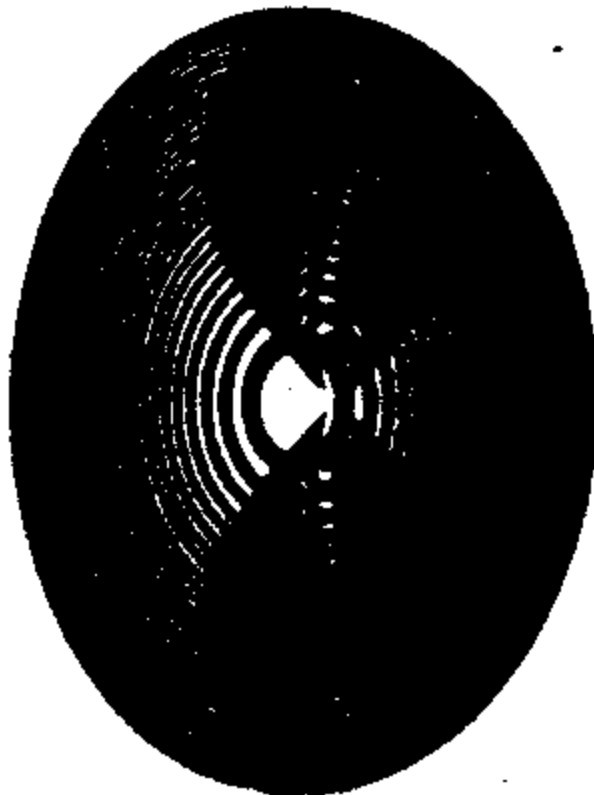
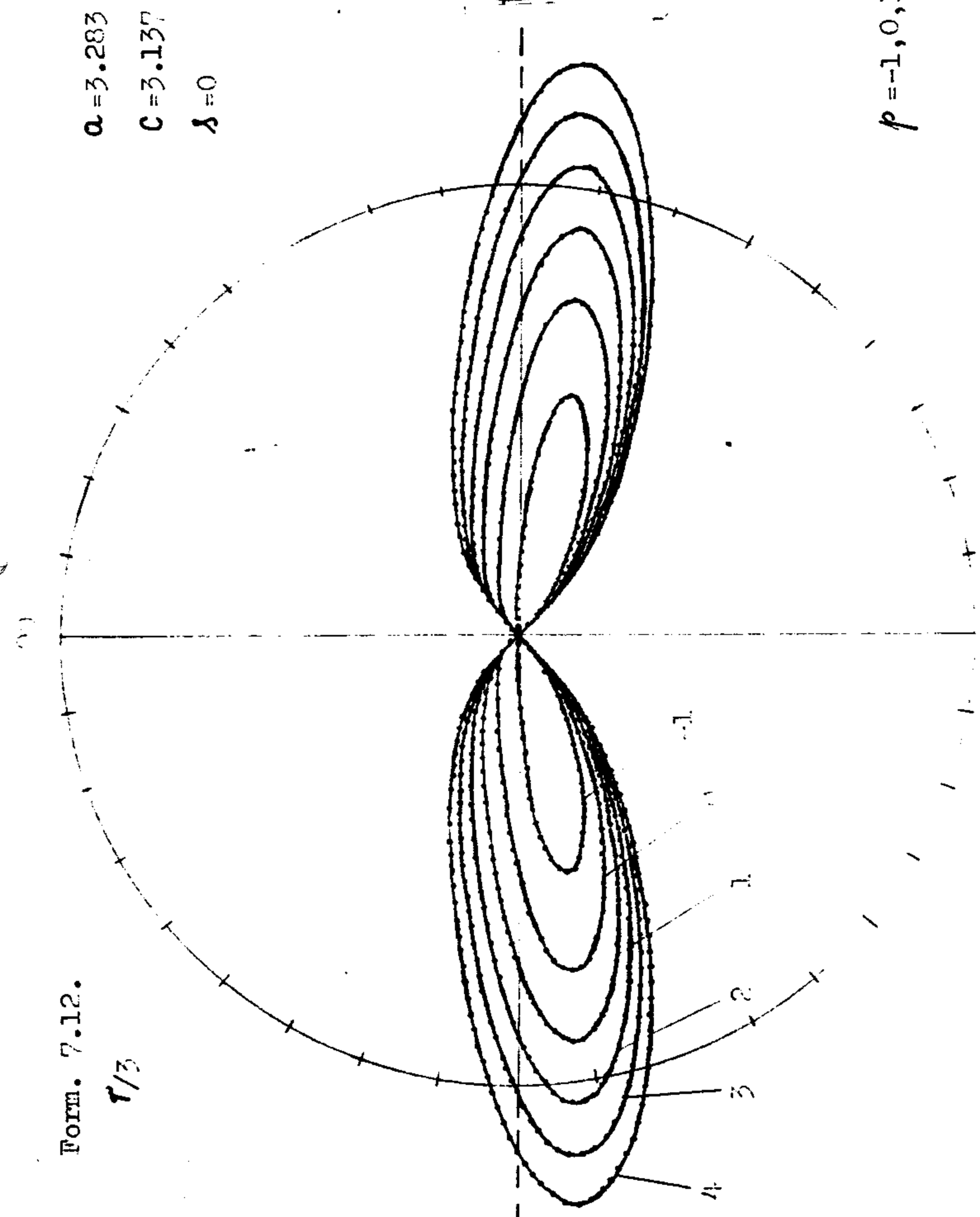
U slučaju kad je $c < a$, povećavanjem t , muare linije iz slike 7.2 počinju da se rastežu i pojavljuju se potpuno nove zatvorene linije sa $p \leq 0$. Sve se ove figure malo okrenu suprotno smjeru povećavanja t . Na slici 7.15 su nacrtani grafikoni numeričkih računa na osnovu formule (7.12) za slučaj da je $c < a$, $\lambda=0$, $t=2.5$, $p=-1, 0, 1, 2, 3$ i 4 . Uz tu sliku vidimo i fotografiju za isti slučaj, koja eksperimentalno potpuno potvrđuje teorijska razmatranja.

Form. 7.12.

$r/3$

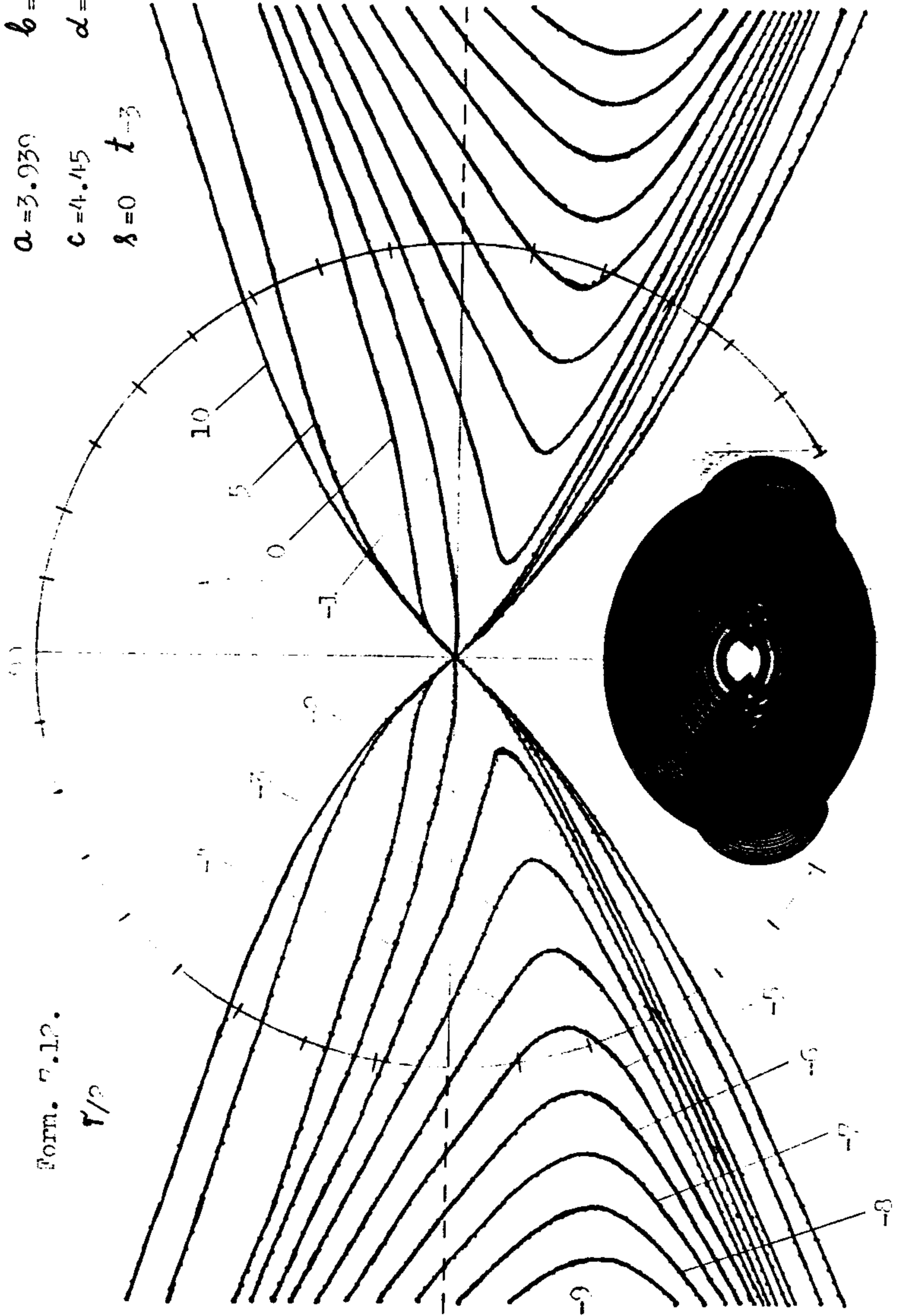
$a = 3.283$
 $c = 3.137$
 $\delta = 0$

$b = 2.462$
 $d = 0$
 $t = 2.5$



$p = -1, 0, 1, 2, 3, 4.$

$a = 3.939$ $b = 2.054$
 $c = 4.445$ $d = 0$
 $\lambda = 0$ $t = 3$



Form. 7.12.

r/2

$a = 3.020$ $b = 2.054$
 $c = 4.417$ $\alpha = 0$
 $\lambda = 2$ $t = 0$

Fig. 110.

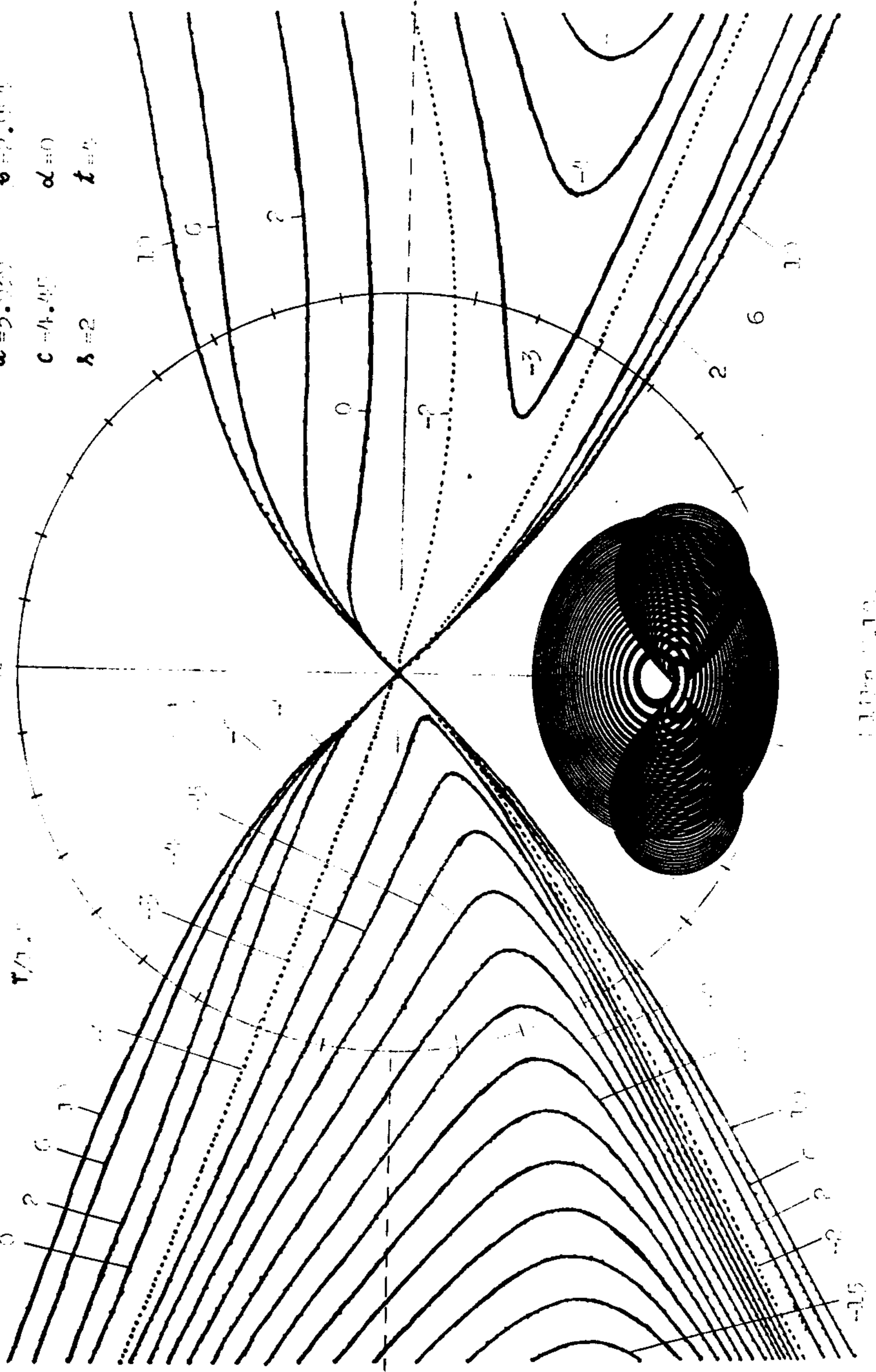


Fig. 110.

Za slučaj kad je $c > a$ dobiva se drugojačija slika. Sada linije sa $p \leq 0$ iz slike 7.3, pomjeranjem centra sistema elipsi prema gore, približavaju se ishodištu i počinju da predju u oblik otvorenih linija sa tačkom u ishodištu, kao što su linije sa $p > 0$. Slika 7.16 prikazuje grafički, a fotografija uz njih i eksperimentalno potvrđuje ovu pojavu. Tu su parametri $c > a$, $\lambda = 0$ i $t = 3$.

Kad se t povećava u negativnom smjeru, a to znači da se centar sistema elipsi pomjera na dolje, dobiva se ista slika, samo simetrično okrenuta prema gore.

Slijedeće slike ilustriraju numerički i eksperimentalno pojavu muare figura pokrivanjem zonskog sistema lemniskata sa eliptičkom zonskom mrežicom, kada je centar ovog drugog sistema pomjeren i u λ -smjeru i u t -smjeru. Slika 7.17 je dobijena pomoću formule (7.12) i predstavlja slučaj kad je $c < a$ za $\alpha = 0$, $\lambda = 5$ i $t = 4$, a slika 7.18 isto samo za slučaj kad je $c > a$, $\alpha = 0$, $\lambda = 2$ i $t = 4$.

Sve promjene koje su nastale u slučajevima što pokazuju slike 7.17 i 7.18 opisuju se u skladu sa pojedinačnim slučajevima što su razmotreni u vezi sa prethodnim slikama.

8. MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA ZONSKIM SISTEMOM HIPERBOLA

Zonski sistem lemniskata (1.29) pokrivat ćemo sa zonskim sistemom i njemu pridruženim sistemom hiperbola koji ćemo izraziti slijedećom formulom

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm m \quad (8.1)$$

ili u polarnim koordinatama

$$r^2 = \frac{\pm m \cdot a^2 \cdot b^2}{b^2 \cdot \cos^2 \varphi - a^2 \cdot \sin^2 \varphi} \quad (8.2)$$

Traženje komutacione granice muare figura koje se stvaraju pokrivanjem ovakvih sistema krivih linija ponovo vodi ka trigonometrijskoj jednažbi trećega stepena za koju je teško naći rješenje. Zato će se i ovdje područje efikasnosti suptraktivnih i aditivnih muare figura naći prilikom numeričkog računanja.

Riješit ćemo prvo slučaj da se centar zonskog sistema lemniskata poklapa sa centrom zonskog sistema hiperbola. Postavit ćemo ishodište koordinatnog sustava u tom centru, a polarnu os ćemo položiti duž realne osi sistema hiperbola. Na takvom položaju ta osa je imaginarna u odnosu na pridruženi sistem zonskih hiperbola.

Zamjenom (1.29) i (8.2) u uvjet dobijanja muare figura (7.7), imat ćemo

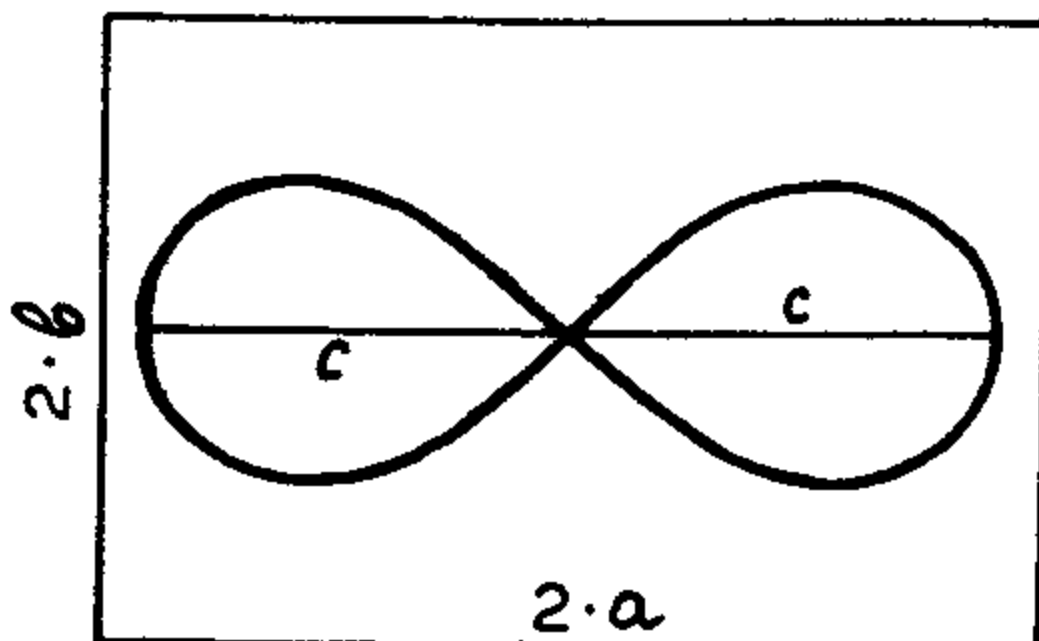
$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2(\varphi - \alpha)} \pm \frac{\pm r^2 (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi)}{a^2 \cdot b^2} = p \quad (8.3)$$

ili

$$r^2 = \frac{p \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)}{a^2 \cdot b^2 \pm [\pm (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) \cdot c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)]} \quad (8.4)$$

Znak "+" ili "-" ispred srednjih zagrada vrijedi za aditivne odnosno za suptraktivne muare figure, a ti znaci unutar srednjih zagrada označavaju da se radi $\overset{0}{V}$ zonskom sistemu hiperbola ili o njemu pridruženom sistemu.

Na osnovu formule (8.4) izvršena su numerička izračunavanja za nekoliko karakterističnih slučajeva pokrivanja ovih sistema, koji su potkrepljeni sa fotografijama kao eksperimentalni dokaz. U prvom redu treba istaći da oblik muare figura koje nastaju pokrivanjem sistema ovakvih krivih linija, zavi-



Slika 8.1.

si od toga da li je lemniskata sa rednim brojem $m=1$ unutar prvog četverokuta $2a \cdot 2b$ sistema hiperbola ili je van njega (slika 8.1).

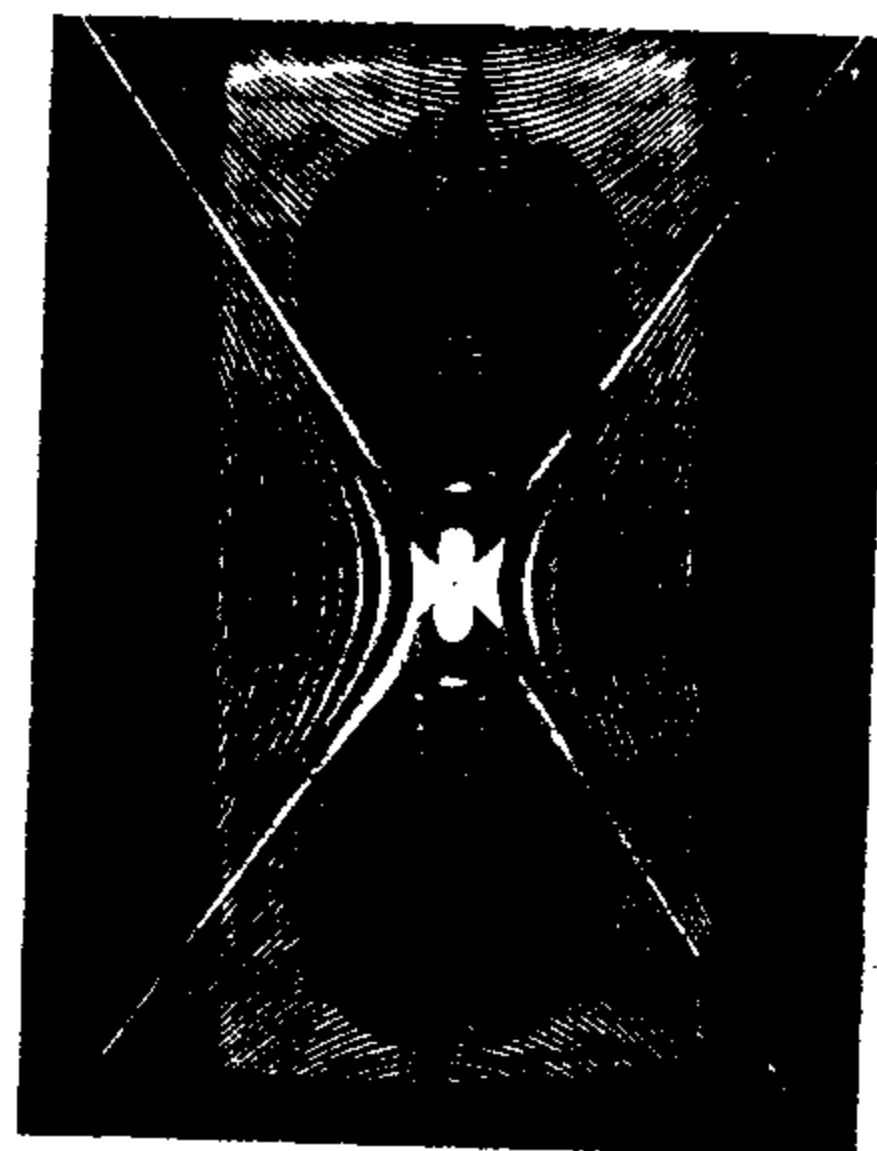
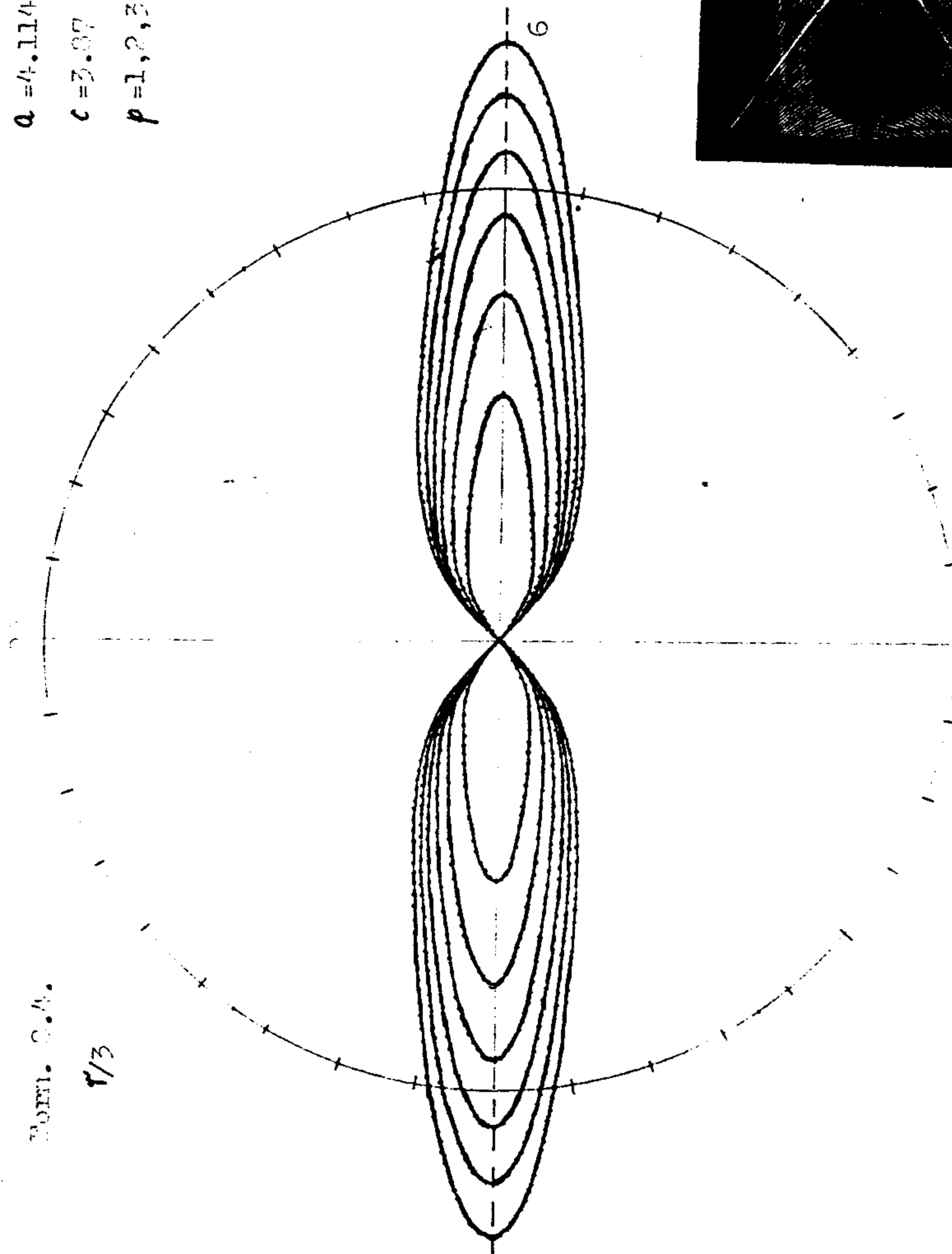
Kada je prva lemniskata unutar prvog četverokuta $2a \cdot 2b$ sistema hiperbola, onda su muare figure oblika zat-

vorenih linija sa $p > 0$, što se vidi na slici 8.2, gdje su nacrtani grafikoni za slučaj $a = 4.114$, $b = 2.88$, $c = 3.87$, $\alpha = 0$ i $p = 1, 2, 3, \dots, 6$, a uz njih je i fotografija istog slučaja.

Kada prva lemniskata izlazi iz okvira prvog četverokuta sistema hiperbola, onda muare figure imaju oblik linija koje liče na zonski sistem hiperbola za $p < 0$, kao što pokazuje slika 8.3 ($p = -1, -2, \dots, -10$) i oblik otvorenih linija koje prolaze kroz ishodište za $p > 0$ (na slici 8.3 su nacrtane $p = 1$ i 10). Ovdje je riješen slučaj $a = 4.114$, $b = 2.88$, $\alpha = 0$ i $c = 4.45$ ($c > a$).

Osim toga, pošto je zonski sistem lemniskata ograničen na $-45^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$, da li ćemo imati muare figure i u oblasti sistema pridruženih hiperbola zavisi od kuta skretanja sistema lemniskata. Osim toga, kad je taj kut mali ili jednak nuli, onda to zavisi od odnosa između male i velike poluosi hiperbole b/a , odnosno od koeficijenta smjera asimptota hiperbole $k = \pm \tan \delta = \pm b/a$. Pošto je u ovim eksperimentima taj odnos svugdje isti ($k = b/a = 0.7$), numeričkim putem je ispitivana ta zavisnost i prikazana je na slici 8.4. Desna strana te slike prikazuje slučaj $a = 4.114$, $c = 3.87$ ($c < a$), $\alpha = 0$, $p = 5$ a odnos $b/a = 1, 0.5$ i 0.3 . Primjećujemo da u zoni hiperbola smanjenjem odnosa b/a , linija $p = 5$ ne mijenja tačku presjecanja sa polarnom osi i sužava se sve dok se ne izgubi potpuno kada postaje $b/a = 0$. A u zoni pridruženih hiperbola, kada je $b/a = 1$ odnosno $\delta = 45^\circ$ (što znači da se asimptote hiperbola poklapaju sa granicom sistema lemniskata), muare figure ne postoje uopće. Primjećujemo da se one počinju pojaviti kada se taj odnos smanjuje (vidimo ih za $b/a = 0.5$), zatim postaju sve izražajnije (za $b/a = 0.3$), ali kad se taj odnos smanjuje još više, onda se one dijele na dva dijela: jedan u ob-

$a = 4.114$ $b = 2.28$
 $c = 3.87$ $d = 0$
 $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$



Math. S.A.

r/3

$a = 4.117$

$b = 0.0$

$c = 4.05$

$d = 0$

$p = -1, -2, -3, \dots, -10.$

$p = 1, 10.$

Form. 0.4.
r/3

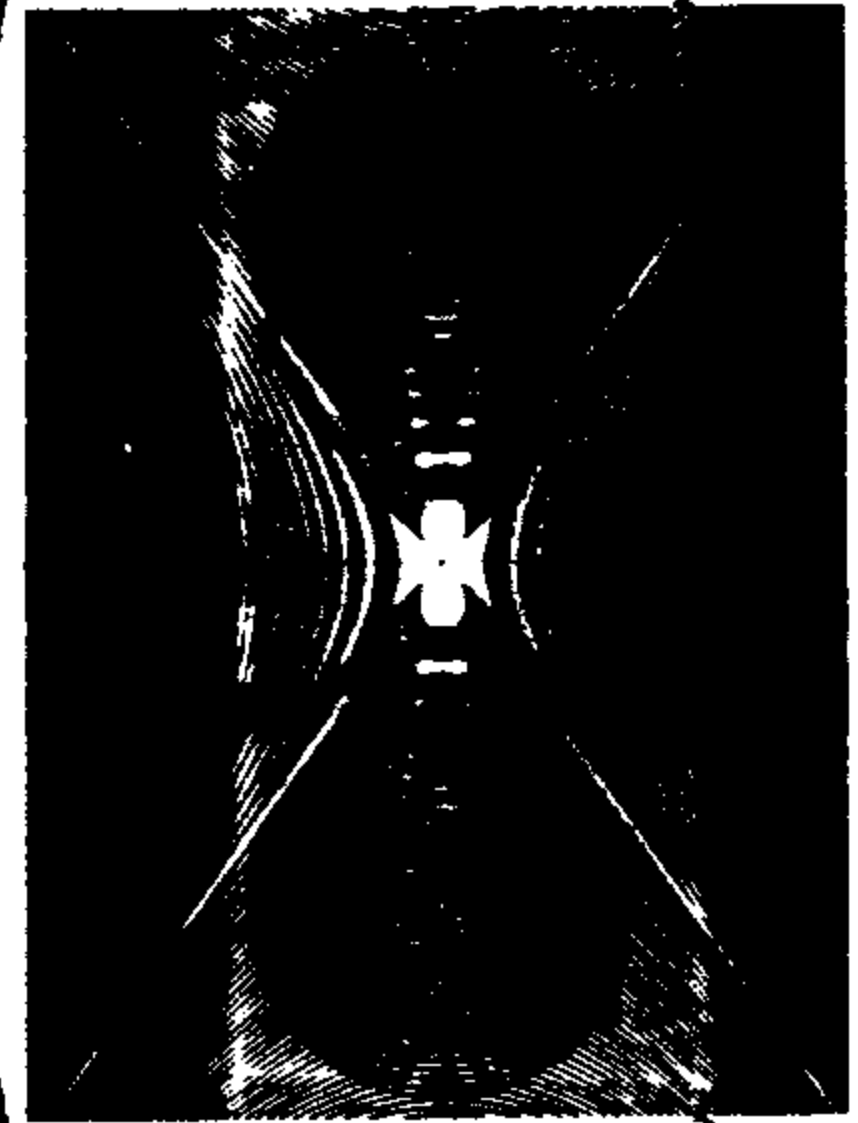
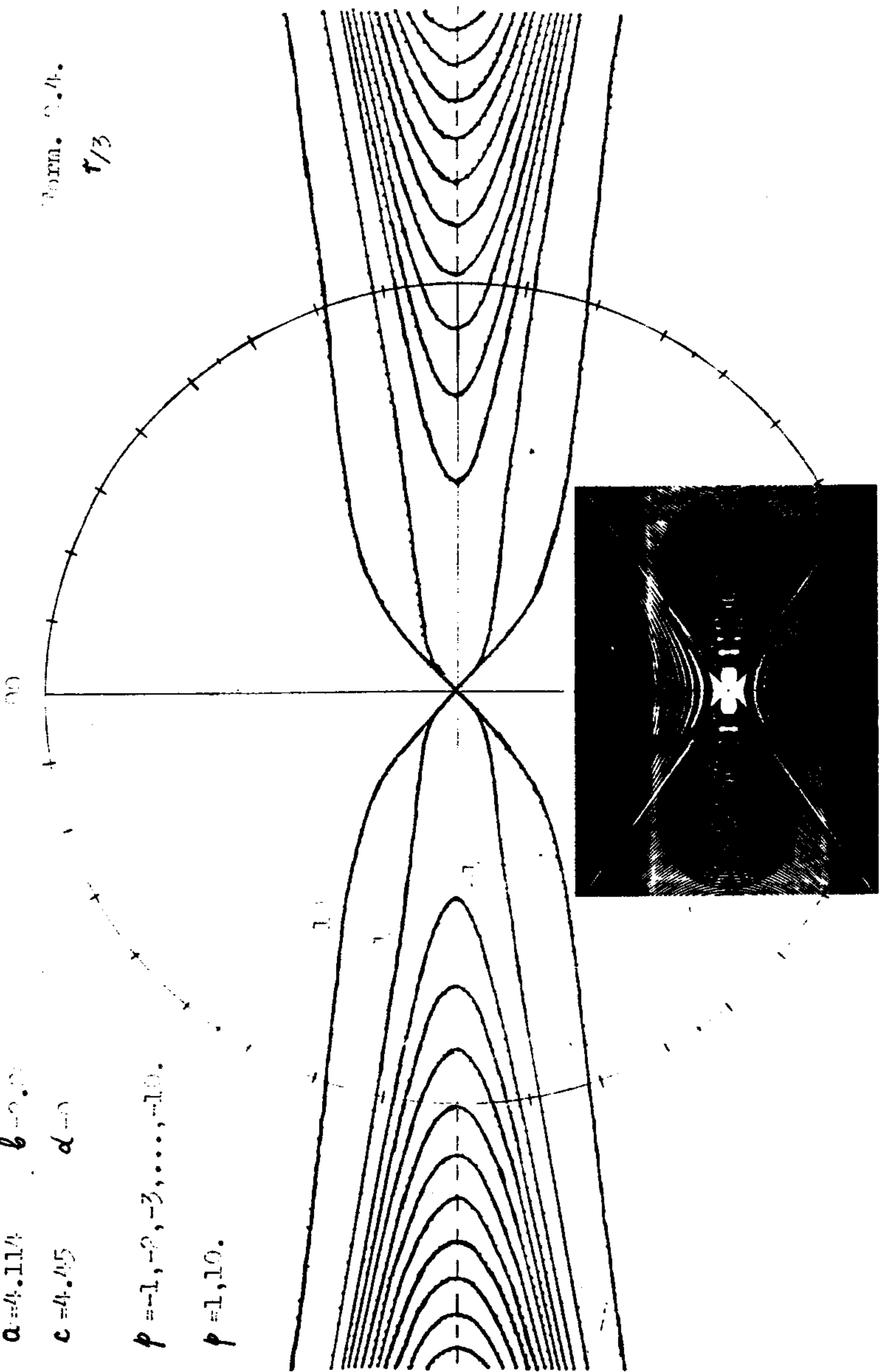
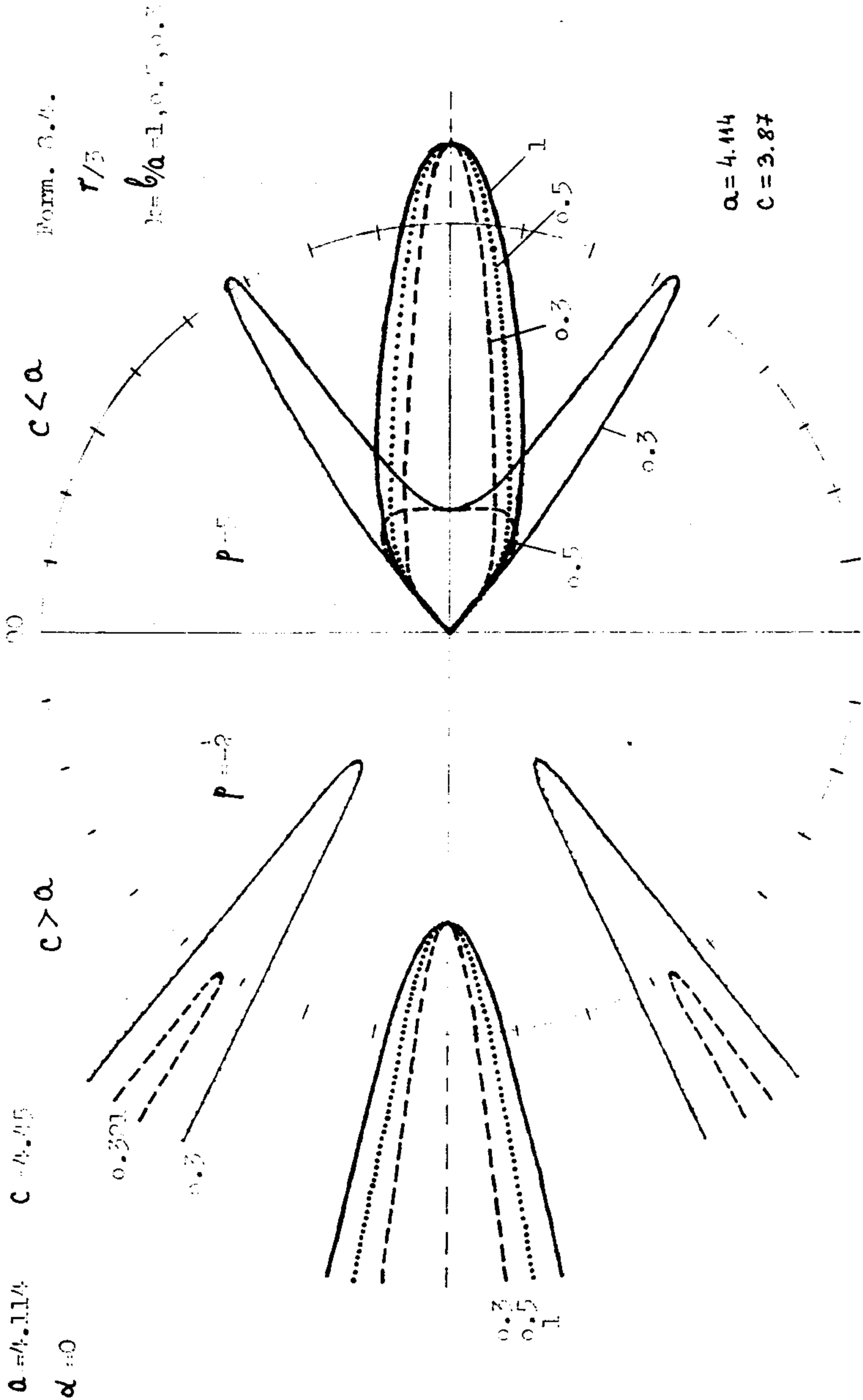


Figure 0.3.



Form. 3.4.

liku hiperbole koja se udaljava i drugi dio linije koji je otvoren, ima tačku u ishodištu, smanjenjem odnosa b/a se sve više sužavaju i obje strane se spajaju u jedan pravac kada postaje $b/a = 0$, što je potpuno razumljivo.

Lijeva strana slike 8.4 ilustrira slučaj $a = 4.114$, $c = 4.45$ ($c > a$), $\alpha = 0$, $p = -2$ i nekoliko slučajeva odnosa b/a .

U oblasti hiperbola, linije sa $p < 0$ ne mijenjaju tačku presjecanja sa polarnom osom, ali se one sužavaju smanjenjem odnosa b/a (1, 0.5, 0.3) i zatvaraju se potpuno kada je $b/a = 0$. Linije sa $p > 0$ koje imaju tačku u ishodištu (na slici 8.4 nisu nacrtane) se isto tako sužavaju i prilagodjavaju se linijama sa $p < 0$.

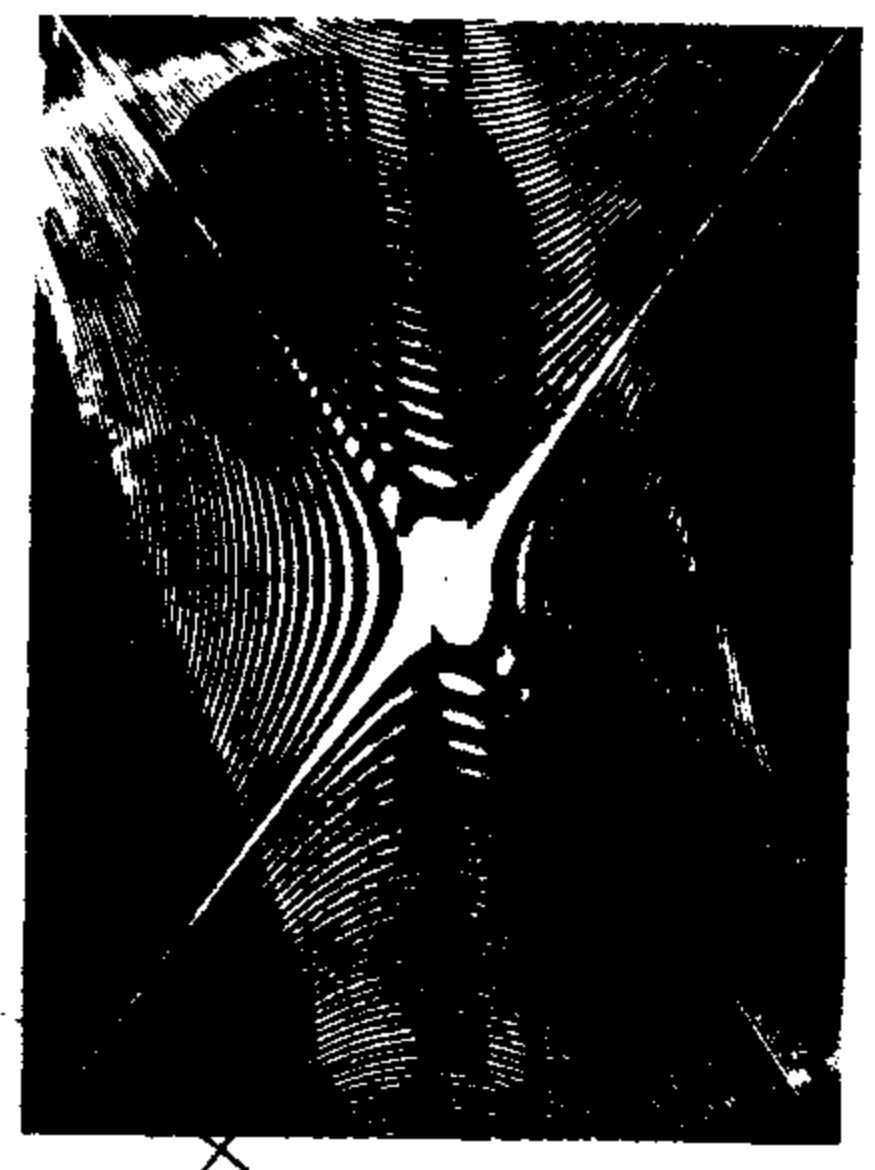
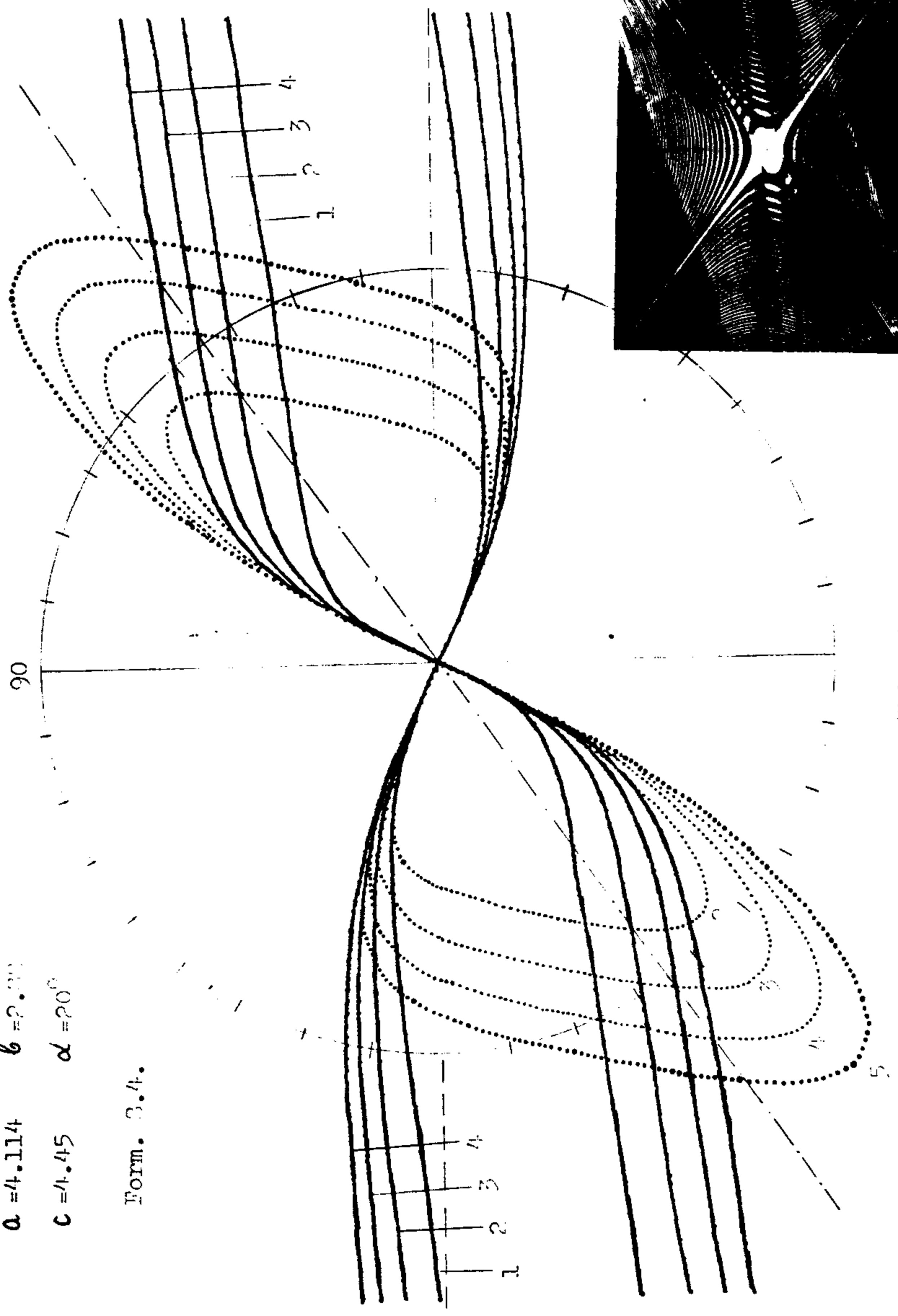
U oblasti pridruženih hiperbola nacrtana je linija $p = -2$ za $b/a = 0.300$ i 0.321 . Može se opaziti da, kada je $b/a = 1$ te muare figure ne postoje, a kada se taj odnos smanjuje one se osjetno počinju pojaviti. I u ovu oblast za linije sa $p > 0$ koje prolaze kroz ishodište važi isto kao i ranije. Sve se ove linije izgube potpuno kada se izgubi i sistem hiperbola ($b/a = 0$).

Slijedeće slike ilustriraju promjenu muare figura mijenjanjem kuta zakretanja sistema lemniskata.

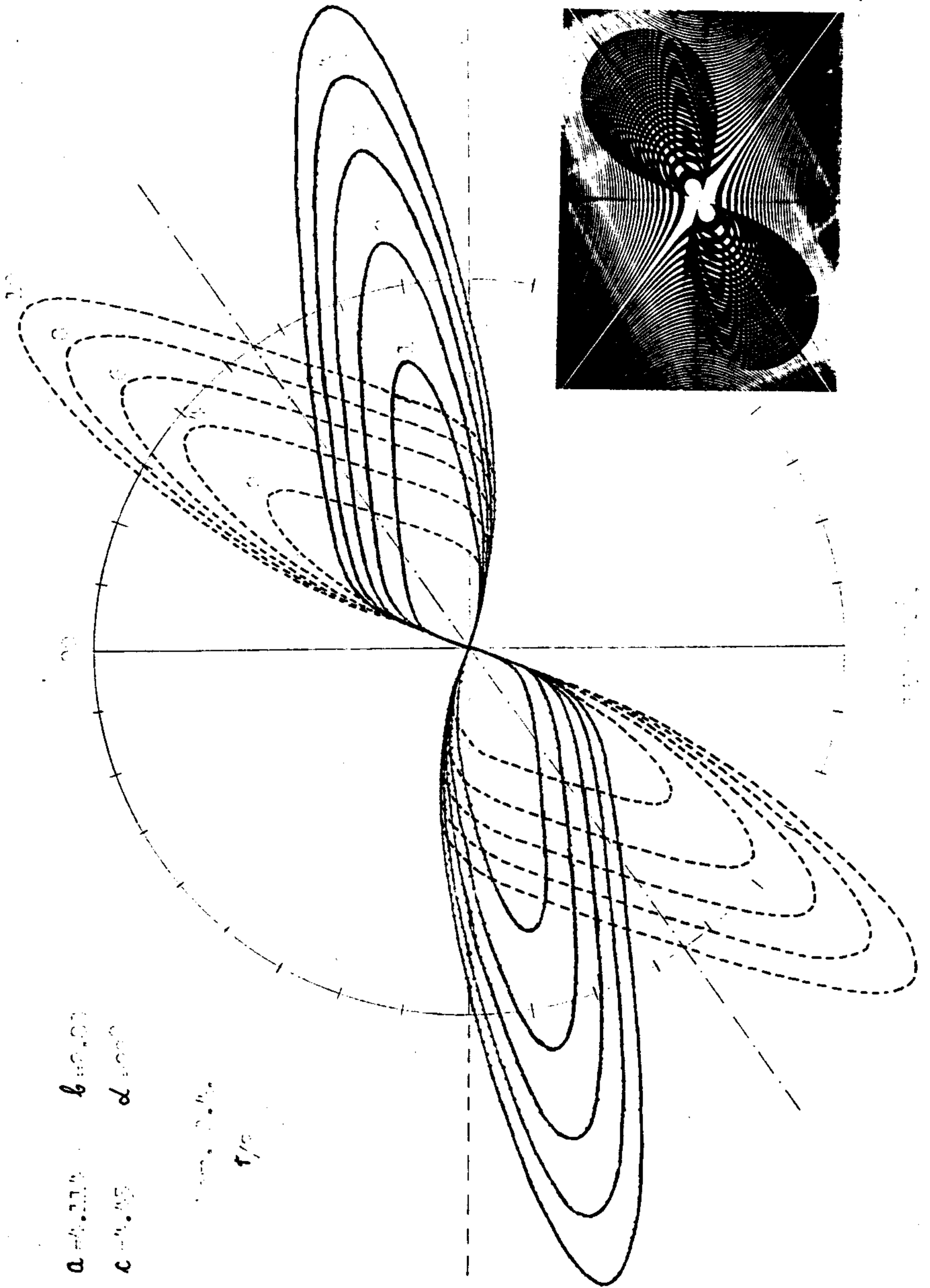
Slike 8.5, 8.6 i 8.7 imaju iste karakteristike kao slika 8.3. Razlika je samo u kutu pod kojim stoji osa sistema lemniskata u odnosu na polarnu os, za koju je po dogovoru uzeto da bude duž realne osi zonskog sistema hiperbola. Može se opaziti da povećavanjem kuta zakretanja α , one muare figure za $p < 0$ u oblasti sistema hiperbola počinju se približavati i postaju skoro paralelne (sl. 8.5), a zatim se zatvaraju potpuno (sl. 8.6, koja je riješena za $\alpha = 28^\circ$), postaju sve gušće

$a = 4.114$ $b = 2.222$
 $c = 1.45$ $\alpha = 20^\circ$

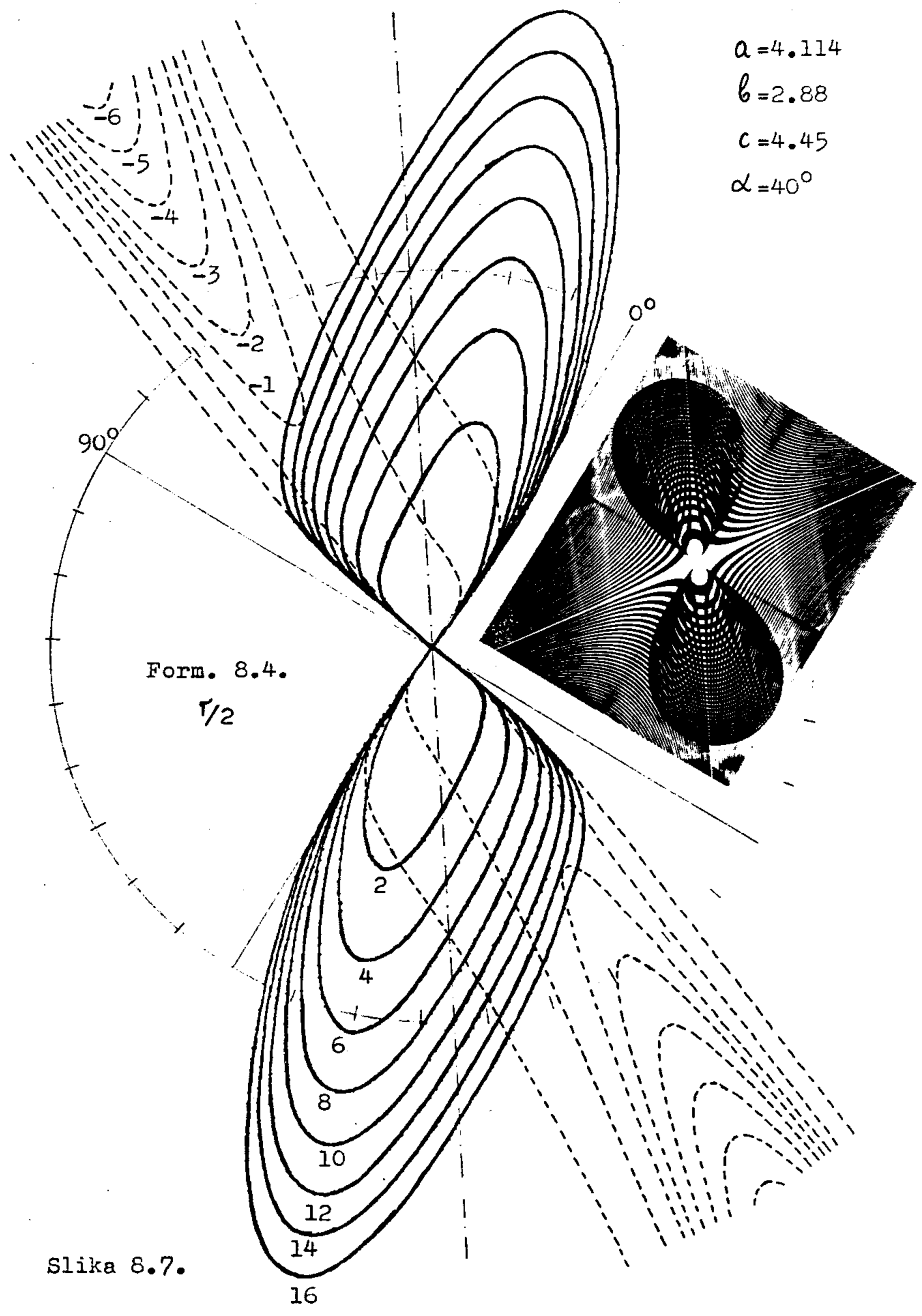
Form. 3.4.



Blika 8.5.



a = 4.11" b = 5.00"
 c = 4.75" d = 5.00"
 e = 5.00" f = 5.00"



Slika 8.7.

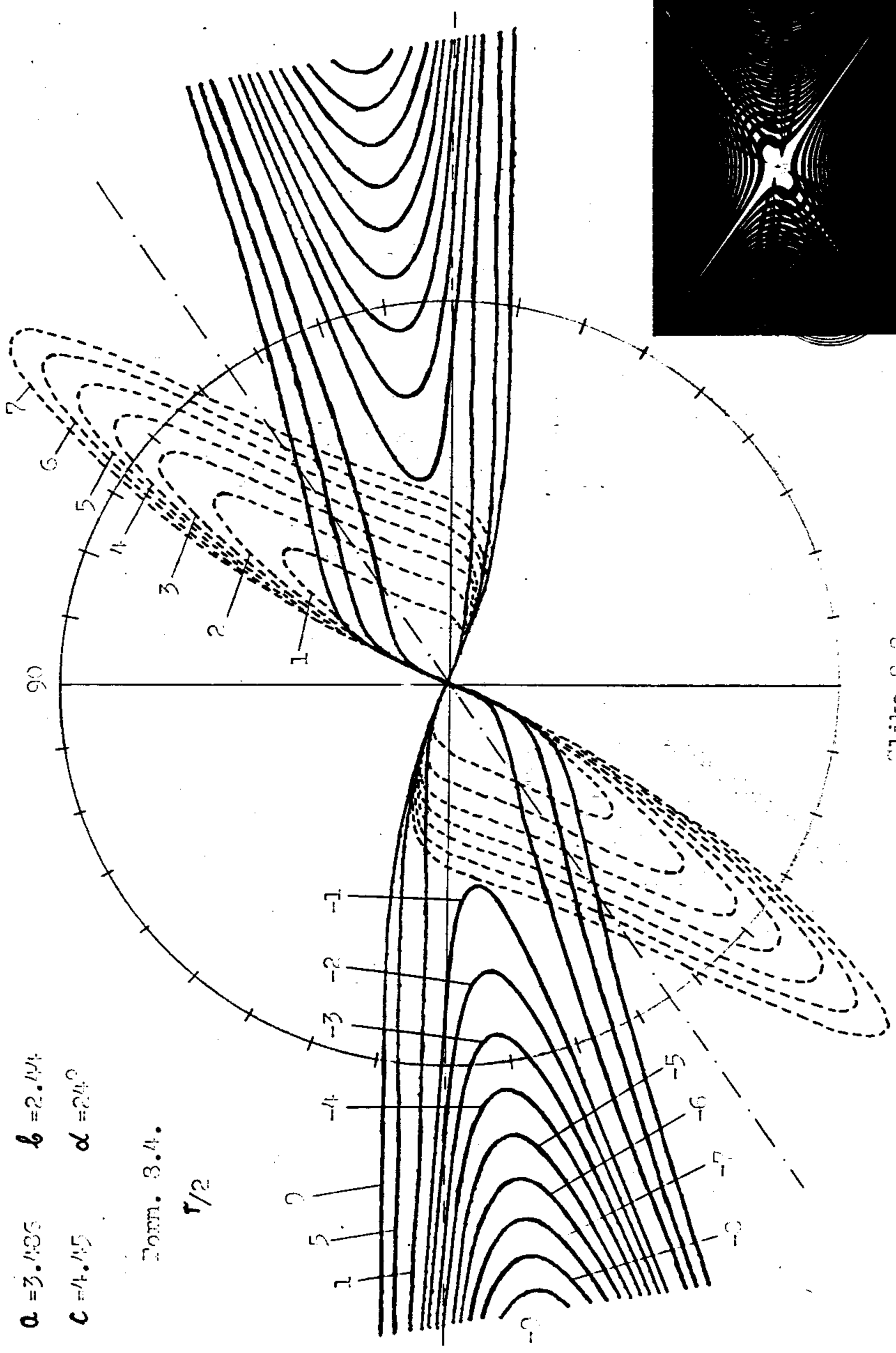
a njihov vrh se približava sve više ishodištu (sl. 8.7) i izgube se potpuno kada granica lemniskata prelazi asimptotu sistema hiperbola. Mijenja se oblik muare figura, ali sve je to u skladu s onim što je kazano u vezi sa slikom 8.1. U ovom slučaju, kada je $\alpha=0$ i $c>a$ dobijaju se figure kao na sl. 8.3.

Ovo se može objasniti na slijedeći način: kada se kut α povećava, onda osa sistema lemniskata ide ka dijagonali četverokuta $2a \cdot 2b$ sistema hiperbola, koja je očito duža od osi $2a$ sistema hiperbola. To znači da osa prve lemniskate ulazi unutar tog četverokuta i dobijaju se zatvorene muare linije.

Na istim slikama ali u oblasti pridruženih hiperbola, dešava se obrnuti proces promjene muare figura sa povećavanjem kuta α . U početku, kada je $\alpha=0$, te muare linije se ne vide jer su na krajnjoj granici egzistiranja linija sistema lemniskata. Medjutim, vidi se kako se pojavljuju na slici 8.5, rastežu se kao na slici 8.6 i otvaraju se potpuno pri čemu nadolaze nove otvorene linije sa $p<0$ kao na slici 8.7. Vidi se potpuni sklad između numeričkih računa na osnovu teorije koja daje formulu (8.4) i eksperimenta na osnovu pokrivanja konkretnih sistema krivih linija sa istim karakteristikama.

Slijedeće dvije slike 8.8 i 8.9 su karakteristične po tomu da su napravljene za malo veću razliku između dužine poluosi a hiperbole i parametra c lemniskate. To su slike za $a=3.486$, $b=2.44$ i $c=4.45$. Prva slika je za $\alpha=24^\circ$ a druga za $\alpha=31^\circ$. Vidimo da u oblasti hiperbola linije ostaju u istom obliku samo što se udaljavaju, a to je tako jer u tom dijelu prva lemniskata ostala još uvijek van četverokuta $2a \cdot 2b$ iz slike 8.1.

Slika 8.10 je karakteristična po tomu što je tu iza-



$a = 3.135$ $b = 2.174$

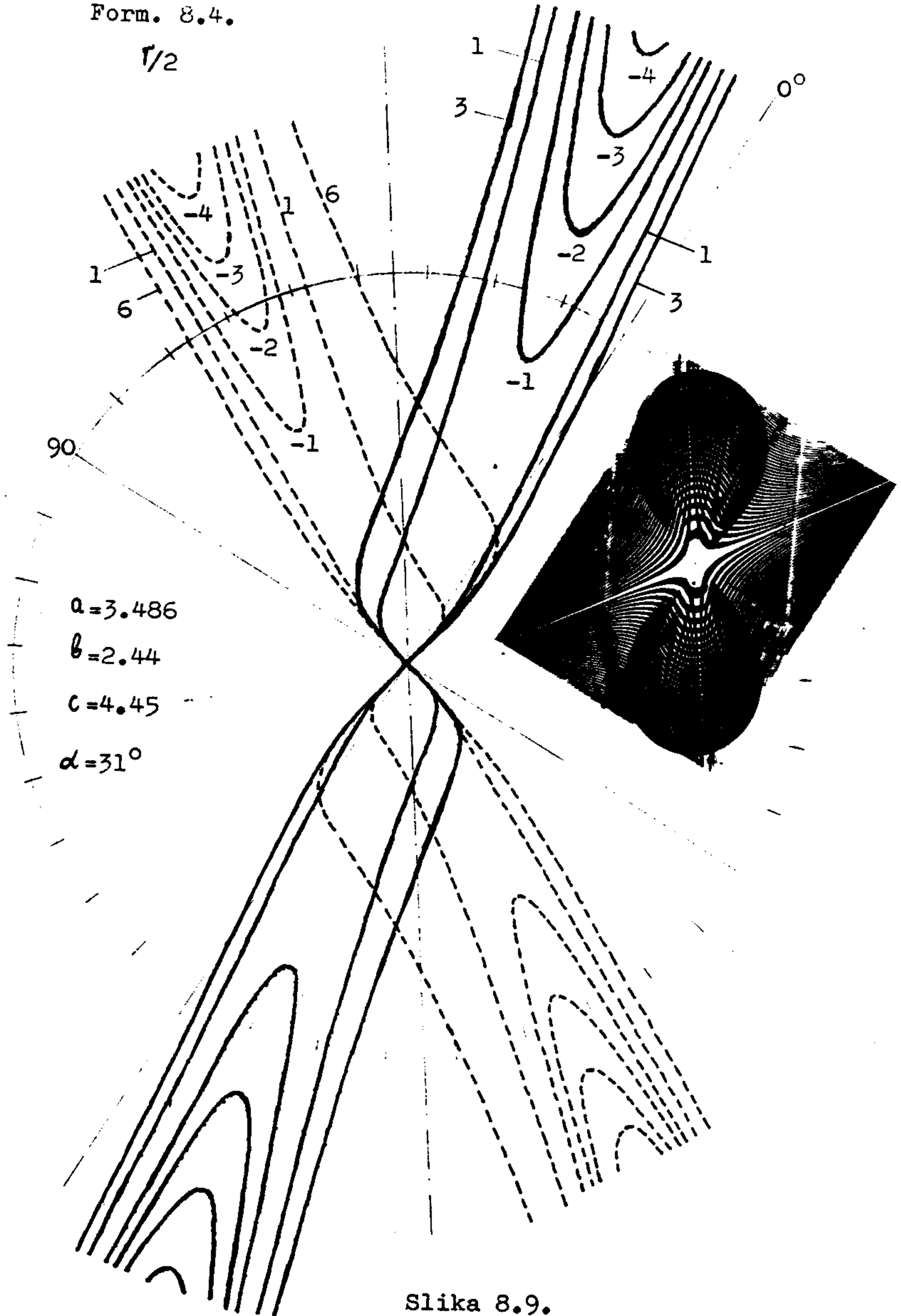
$c = 4.145$ $d = 2.49$

Form. 3.4.

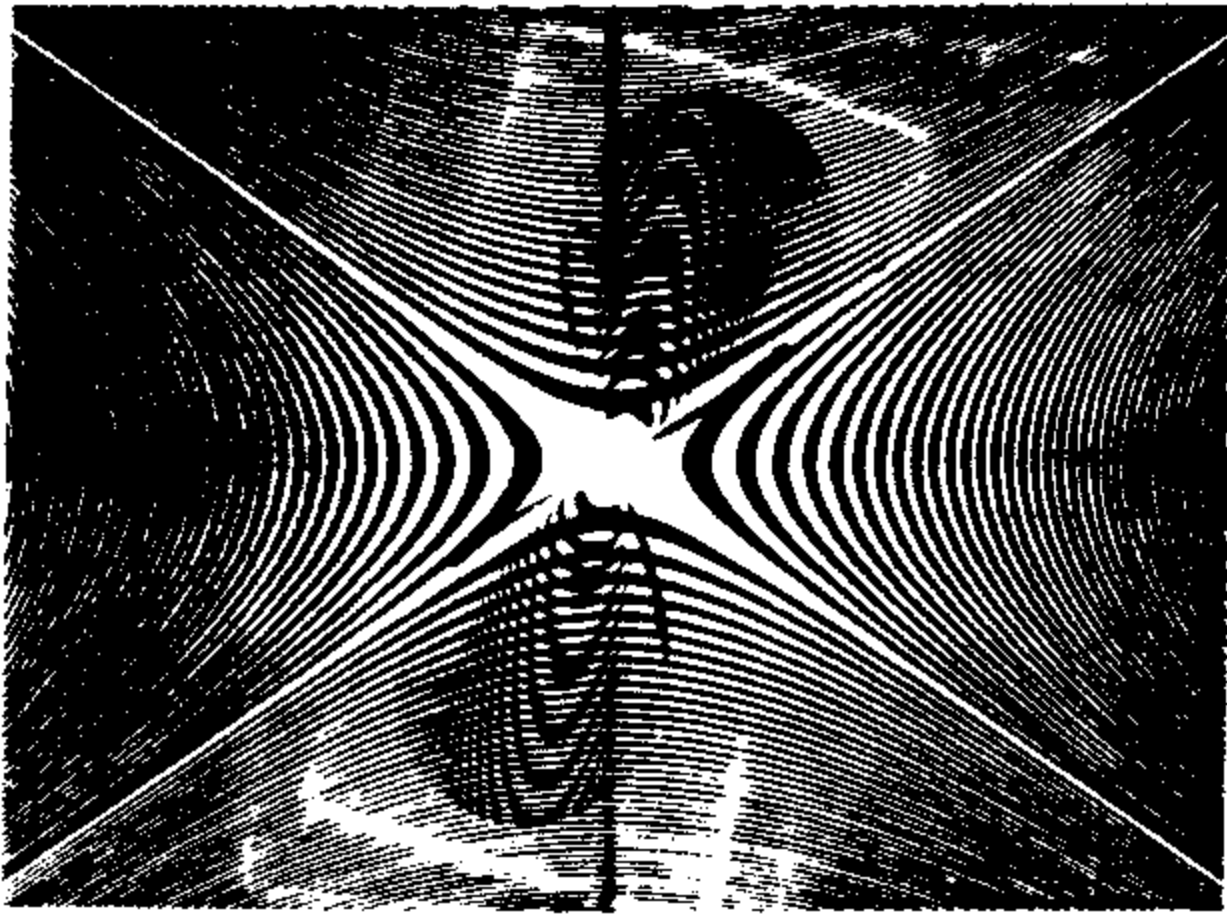
$r/2$

Clips 2.6.

Form. 8.4.

 $r/2$ 

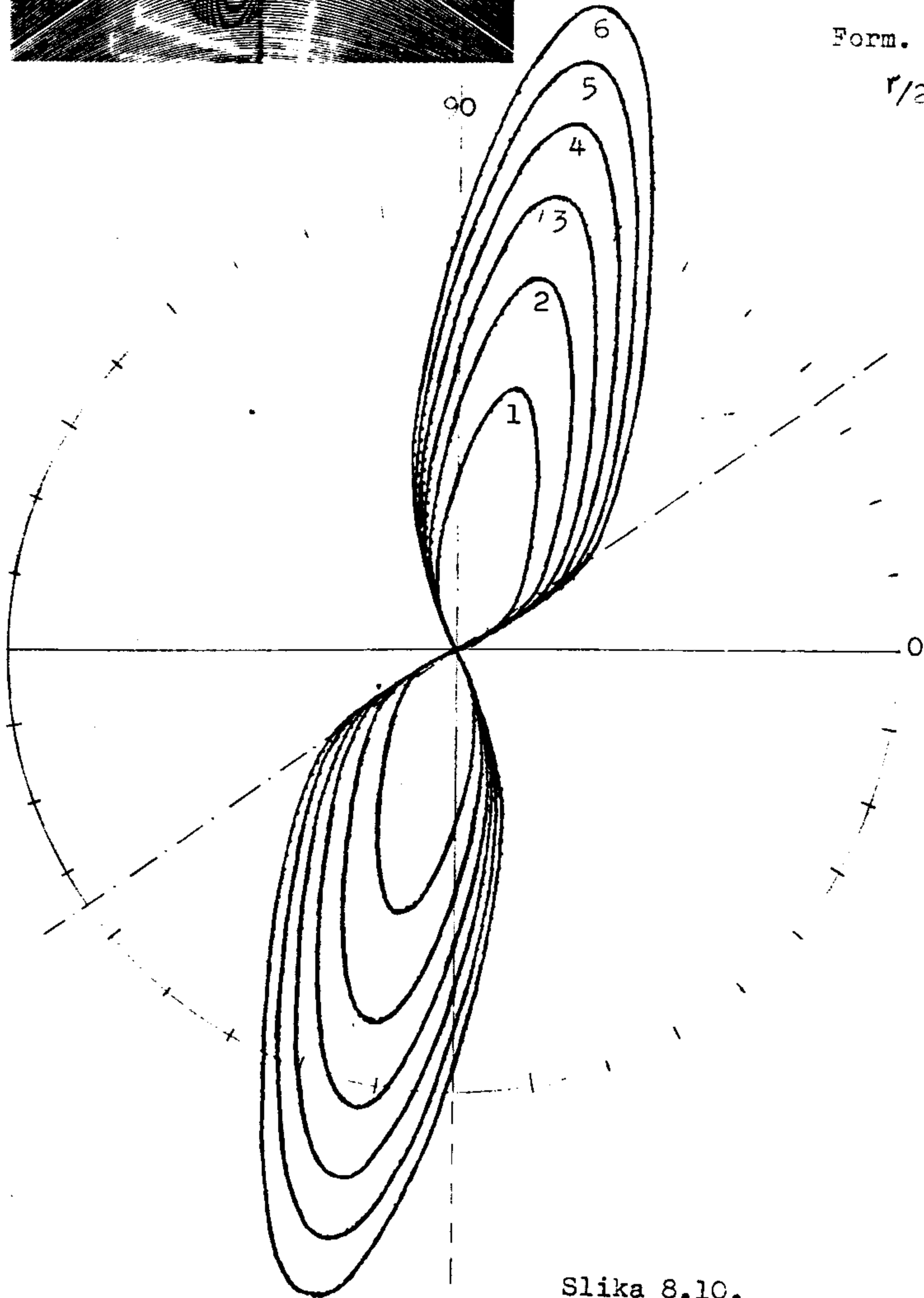
Slika 8.9.



$a=4.57$
 $b=3.2$
 $c=3.137$
 $d=70^\circ$

Form. 8.4.

$r/2$



Slika 8.10.

brana takva dimenzija prve lemniskate, da ona uvijek ostaje unutar četverokuta $2a \cdot 2b$. Ta slika je dobivena za slučaj $a=4.57$, $b=3.2$, $c=3.137$ i $\alpha=70^\circ$. Vidimo da je c manje i od a i od b , prema tomu lemniskata ostaje unutar četverokuta $2a \cdot 2b$ pod bilo kojim kutem α , te zbog toga se ne mijenja oblik maura figura. Razumije se da povećavanjem kuta α te linije postaju rjedje. Linije su ovakvog oblika i u oblasti zonskog sistema hiperbola a i u oblasti njemu pridruženog sistema. Nešto slično bi se desilo kad se uzima da je parametar $2c$ sistema lemniskata veći od dijagonale četverokuta koji je gore sponje-nut, tj. da bude uvijek van tog četverokuta.

Slijedećim korakom će se riješiti opći slučaj, kad se centri sistema koji se pokrivaju ne poklapaju. Uzet ćemo da se centar zonskog sistema lemniskata nalazi u ishodištu koordinatnog sistema, ugao skretanja osi tog sistema da bude jednak nuli, a centar zonskog sistema hiperbola da bude pomjeren na točku (s, t) . Tada će jednačba zonskog sistema hiperbola biti

$$\frac{(x-s)^2}{a^2} - \frac{(y-t)^2}{b^2} = \pm m \quad (8.5)$$

gdje znak " - " ispred m vrijedi za pridruženi sistem hiperbola (za koji je x -osa imaginarna).

U polarnim koordinatama je

$$b^2 \cdot (r \cos \varphi - s)^2 - a^2 \cdot (r \sin \varphi - t)^2 = \pm m \cdot a^2 \cdot b^2$$

Sredjivanjem ove jednačbe, dobija se

$$r^2 \cdot (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) - 2 \cdot r \cdot (b^2 s \cos \varphi - a^2 t \sin \varphi) + \\ + b^2 s^2 - a^2 t^2 = \pm m \cdot a^2 b^2 \quad (8.6)$$

Kada jednađbe (1.29) uz $\alpha = 0$ i (8.6) zamjenimo u uvjet (7.7), dobija se

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2\varphi} \pm (\pm) \frac{1}{a^2 b^2} \cdot [r^2 \cdot (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) - \\ - 2 \cdot r \cdot (b^2 s \cos \varphi - a^2 t \sin \varphi) + b^2 s^2 - a^2 t^2] = p$$

Ovdje znak " \pm " označava aditivne odnosno suptraktivne muare figure, a znak " \pm " unutar malih zagrada vrijedi za zonski sistem hiperbola odnosno za njemu pridruženi sistem.

Uz zamjene

$$W = (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) \cdot c^2 \cos 2\varphi, \quad V = (b^2 s \cos \varphi - a^2 t \sin \varphi) \cdot c^2 \cos 2\varphi,$$

$$D = (b^2 s^2 - a^2 t^2) \cdot c^2 \cos 2\varphi \quad \text{i} \quad H = p \cdot a^2 b^2 c^2 \cos 2\varphi$$

gornja jednađba bi glasila

$$r^2 [a^2 b^2 \pm (\pm) \cdot W] \mp (\pm) \cdot 2 \cdot r \cdot V \pm (\pm) \cdot D - H = 0 \quad (8.7)$$

a rješenje ove jednađbe glasi

$$r_{1;2} = \frac{\pm(\pm) \cdot V \pm \sqrt{V^2 - (a^2 b^2 \pm(\pm) \cdot W) \cdot (\pm(\pm) \cdot D - H)}}{a^2 b^2 \pm(\pm) W} \quad (8.8)$$

gdje znak " \pm " ispred kvadratnog korijena označava dva rješenja jednadžbe drugoga reda (8.7).

Na osnovu formule (8.8), prigodnim programom pomoću kompjutera, numerički su riješeni nekoliko karakteristični slučajevi. Prije toga je, takodjer numerički, konstatovano da u svim mogućim kombinacijama pokrivanja ovih sistema, zamjenom numeričkih vrijednosti u formuli za komutacionu granicu, izlazi pozitivna vrijednost, a to znači da postoje samo suptraktivne muare figure. Prema tomu, u daljem računu prema formuli (8.8) uzet je samo znak " $-$ " ispred V , W i D (van zagrada).

U skladu sa zahtjevom za bolji pregled, ovaj korak je podijeljen na tri slučaja.

a) λ se mijenja, $t=0$

i) $c < a$

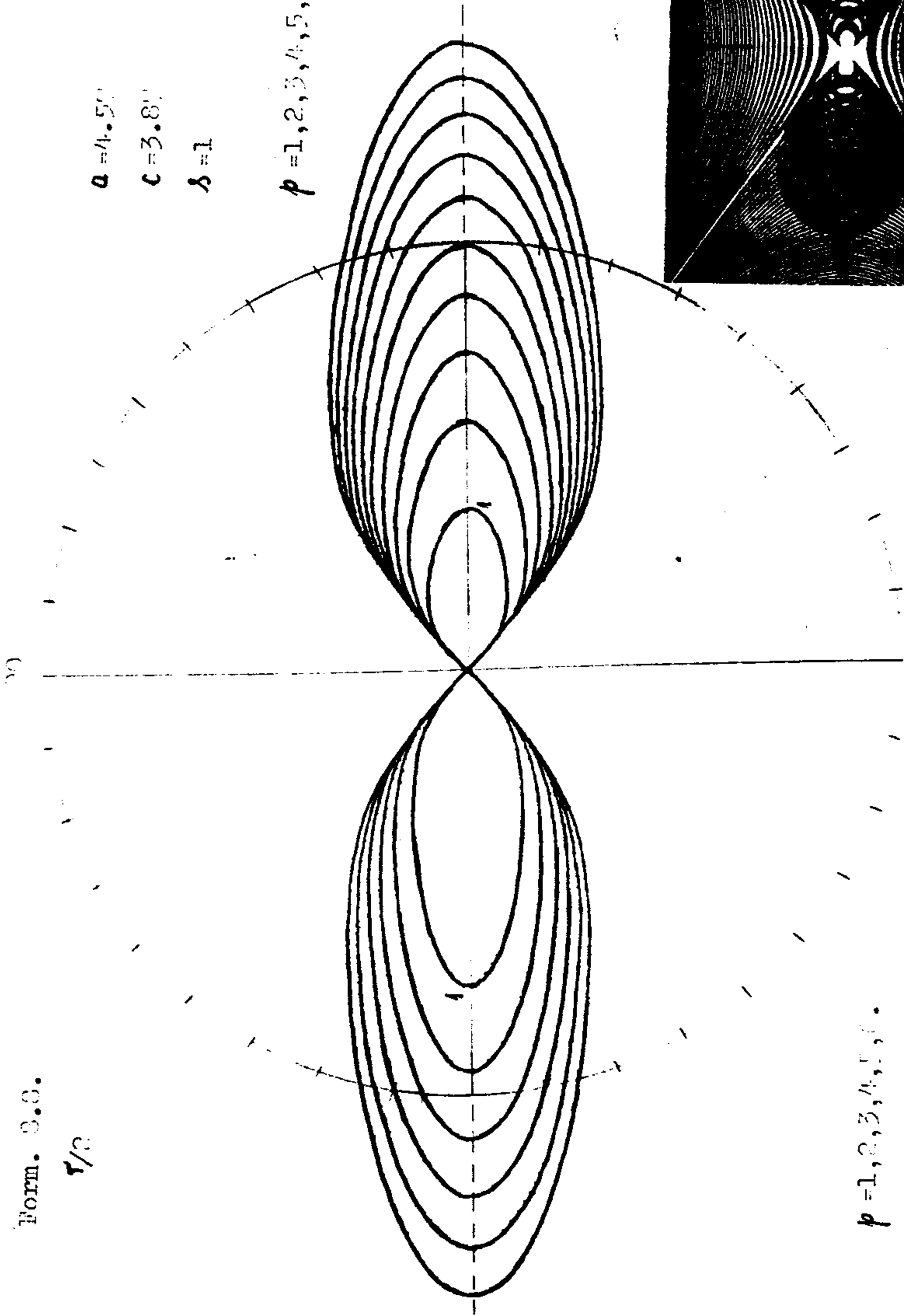
Kada je $c < a$, pomjeranjem centra sistema hiperbola udesno, s desne strane slike muare linije postaju gušće a s lijeve strane se rastežu (sl. 8.11) sve dok počinju da se pojavljuju zatvorene linije sa $p < 0$ koje liče na elipsu. Daljim povećavanjem λ -a, pojavljuju se nove "elipse" a one prve počinju da se pretvaraju u obliku kao linije sa $p \geq 0$ koje su isto tako zatvorene ali imaju jednu tačku u ishodištu. Slika 8.12 ilustrira to. Vidi se da kada je $\lambda = 7$, prva elipsa s lijeve strane je $p = -8$, a zatim slijede $p = -7, -6$ i -5 . Isto tako kao "elipse" u ovom slučaju postoje $p = -4$ i $p = -3$, ali nisu nacrtane radi boljeg pregleda. Za ovakve karakteristike, linija $p = -2$ je zadnja što je prešla iz oblika "elipse" u

Form. 3.3.

$\frac{1}{2}$

$a = 4.5'$ $b = 3.2'$
 $c = 3.8'$ $d = 0'$
 $\delta = 1$ $\lambda = 0$

$p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$



$p = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

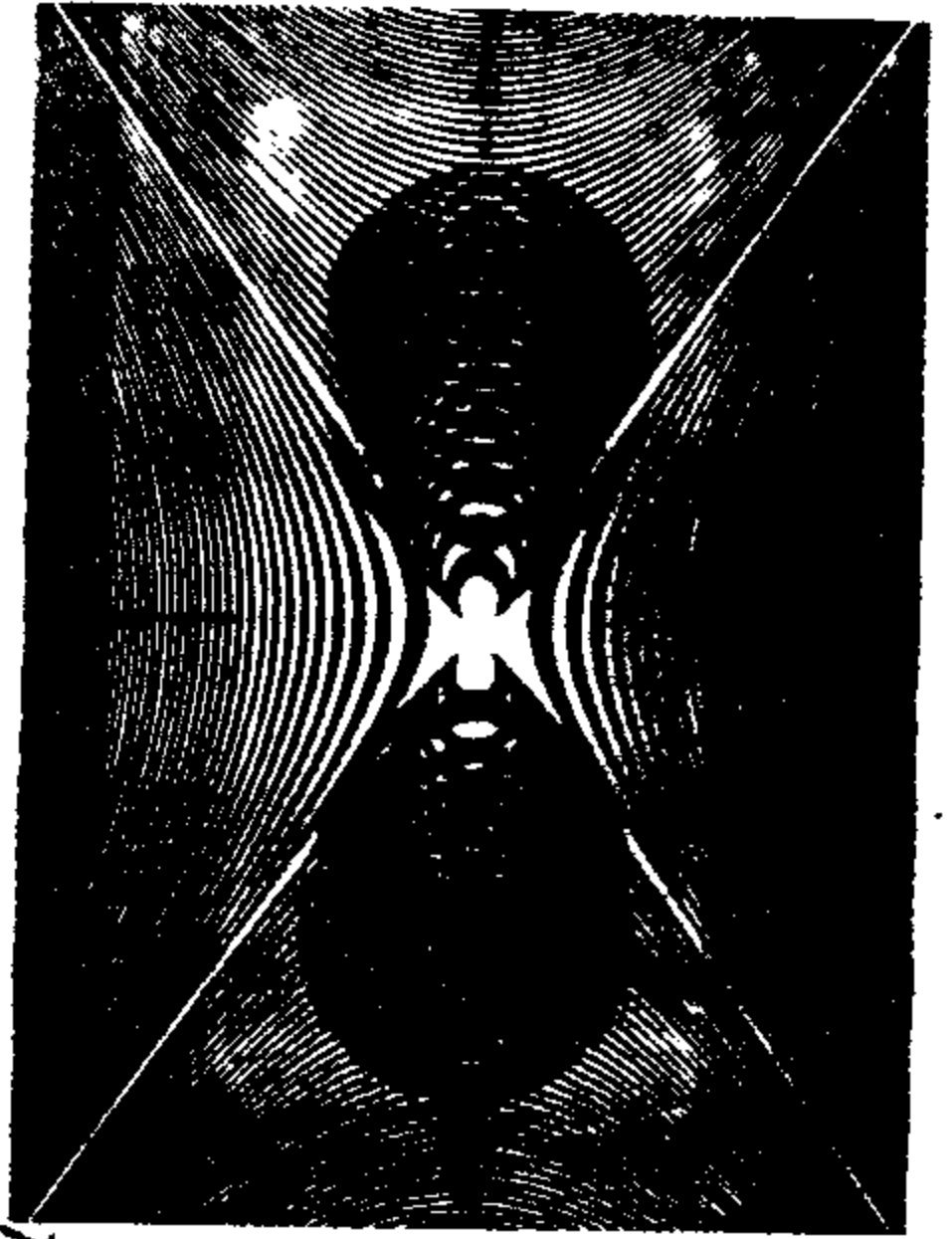


Figure 3.11

1000000
 $\tau/3.0$

$a=4.50$ $b=3.0$
 $c=3.07$ $d=0$
 $\delta=0$ $t=0$

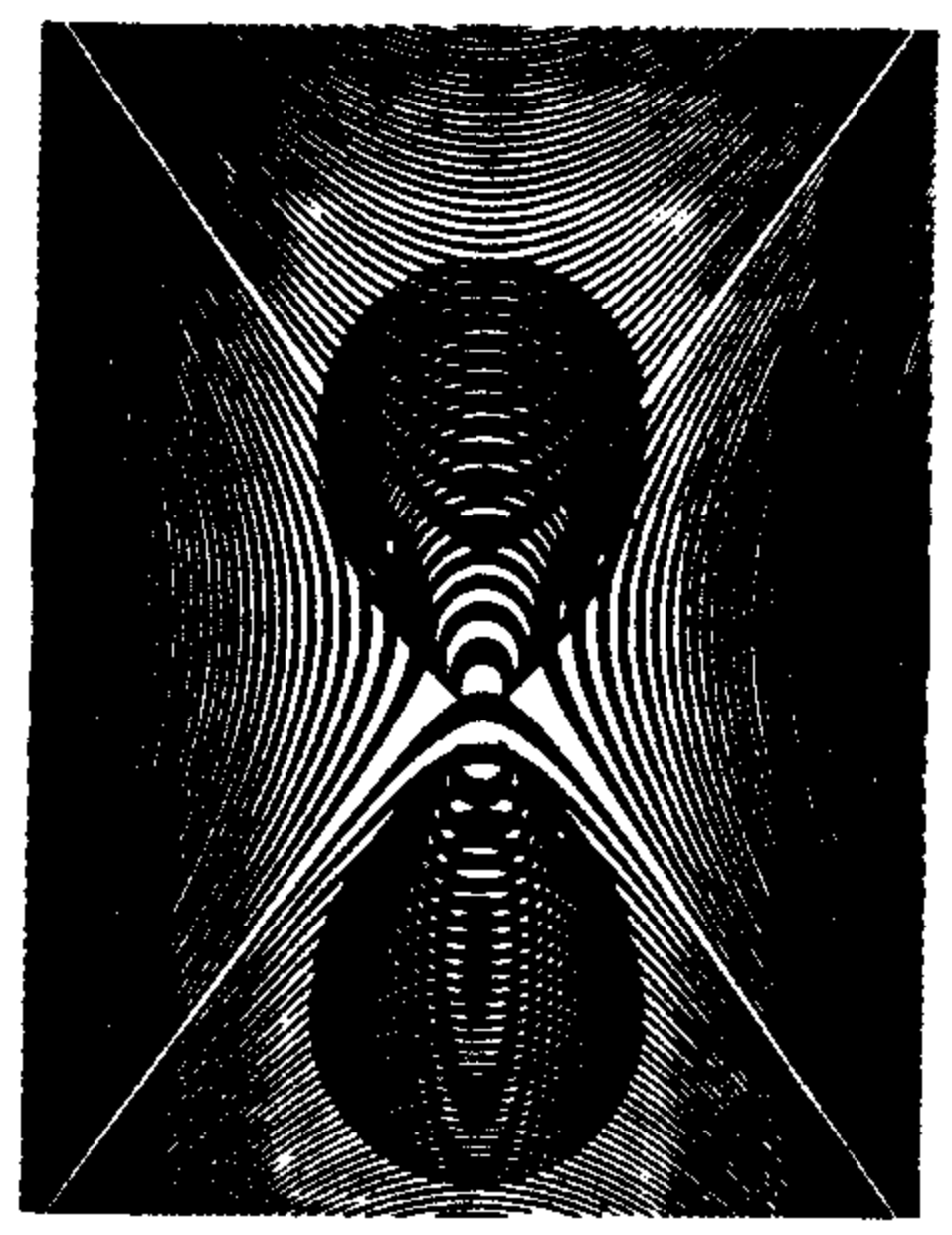
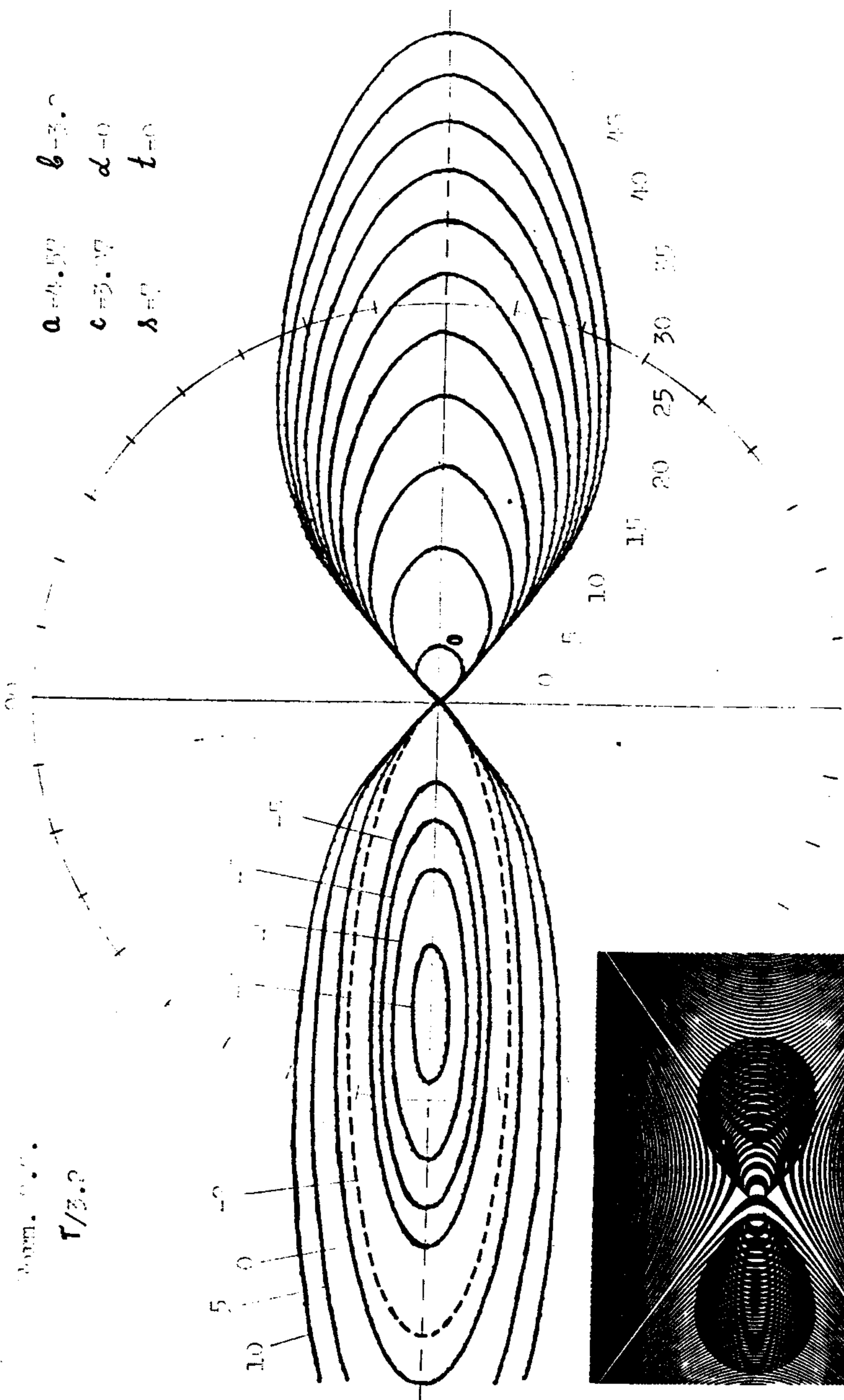
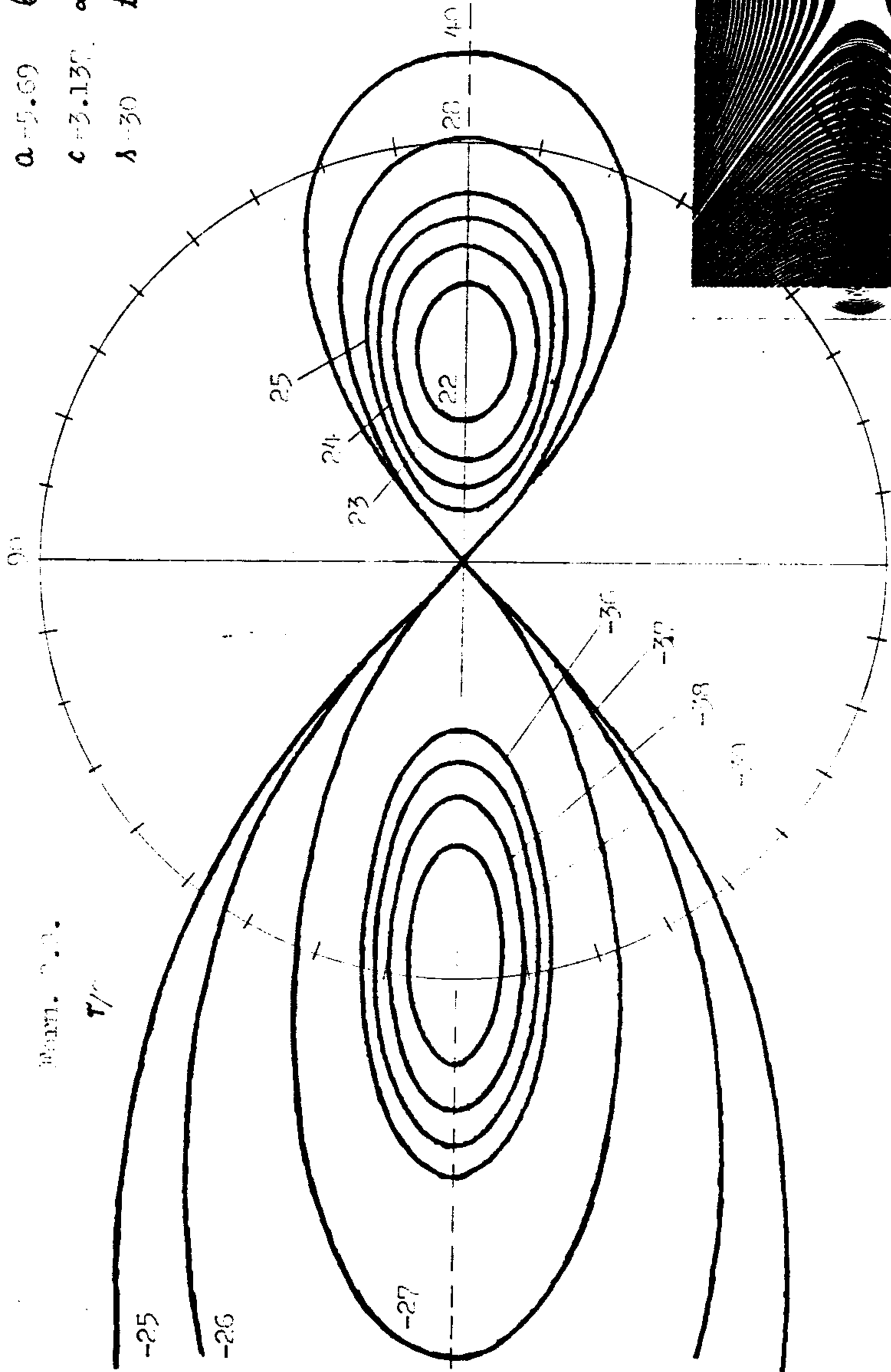
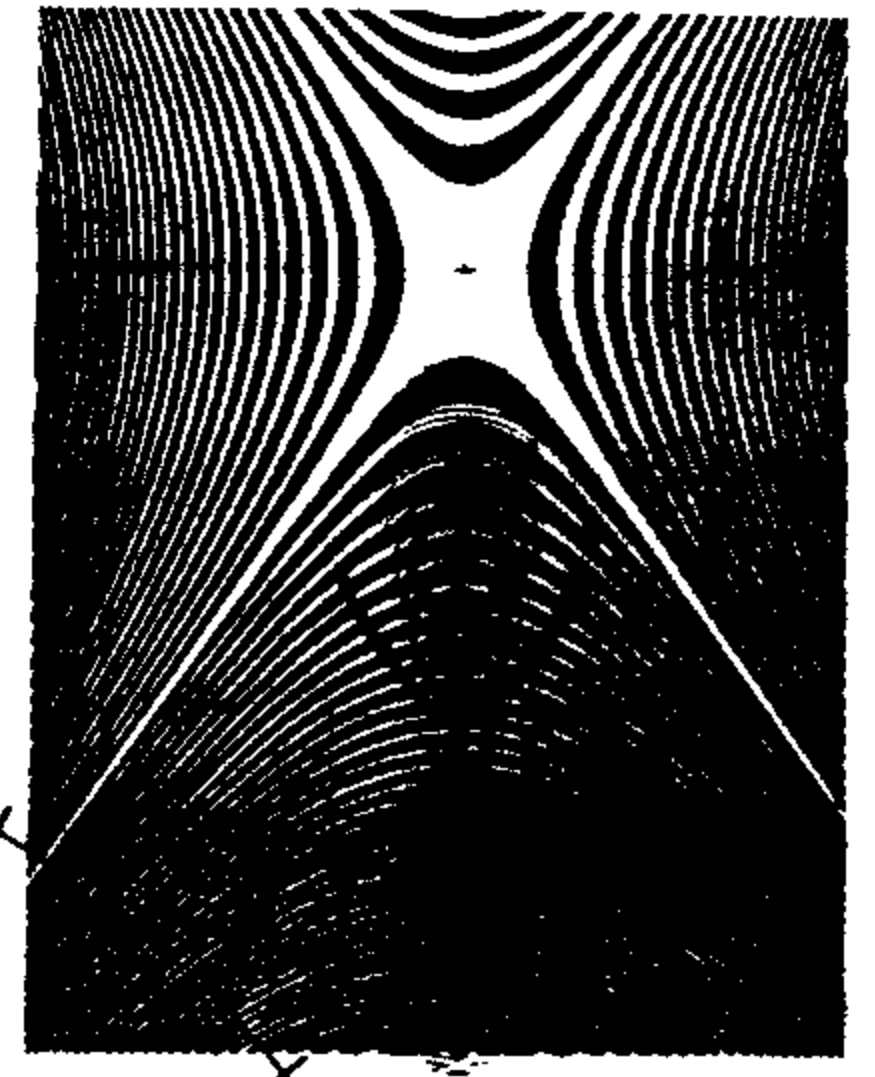


Figure 110.

$a = 5.69$ $b = 7.0$
 $c = 3.137$ $d = 0$
 $\lambda = 30$ $t = 0$



Wam. 2.3.
 r/r_0



Bilka 8.13.

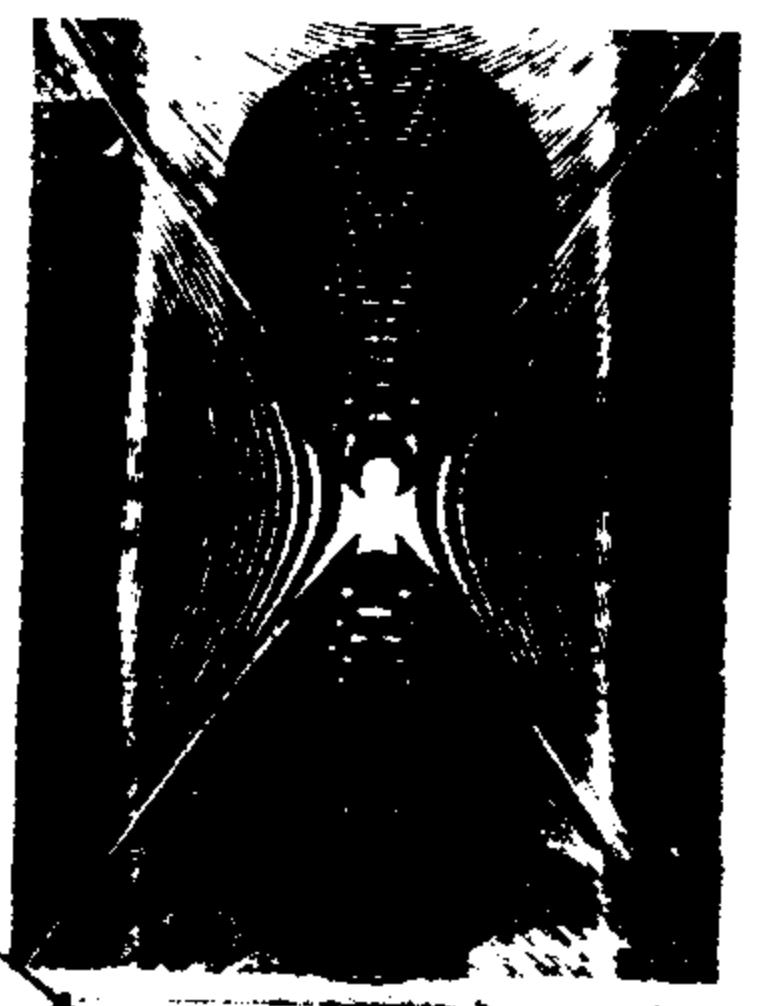
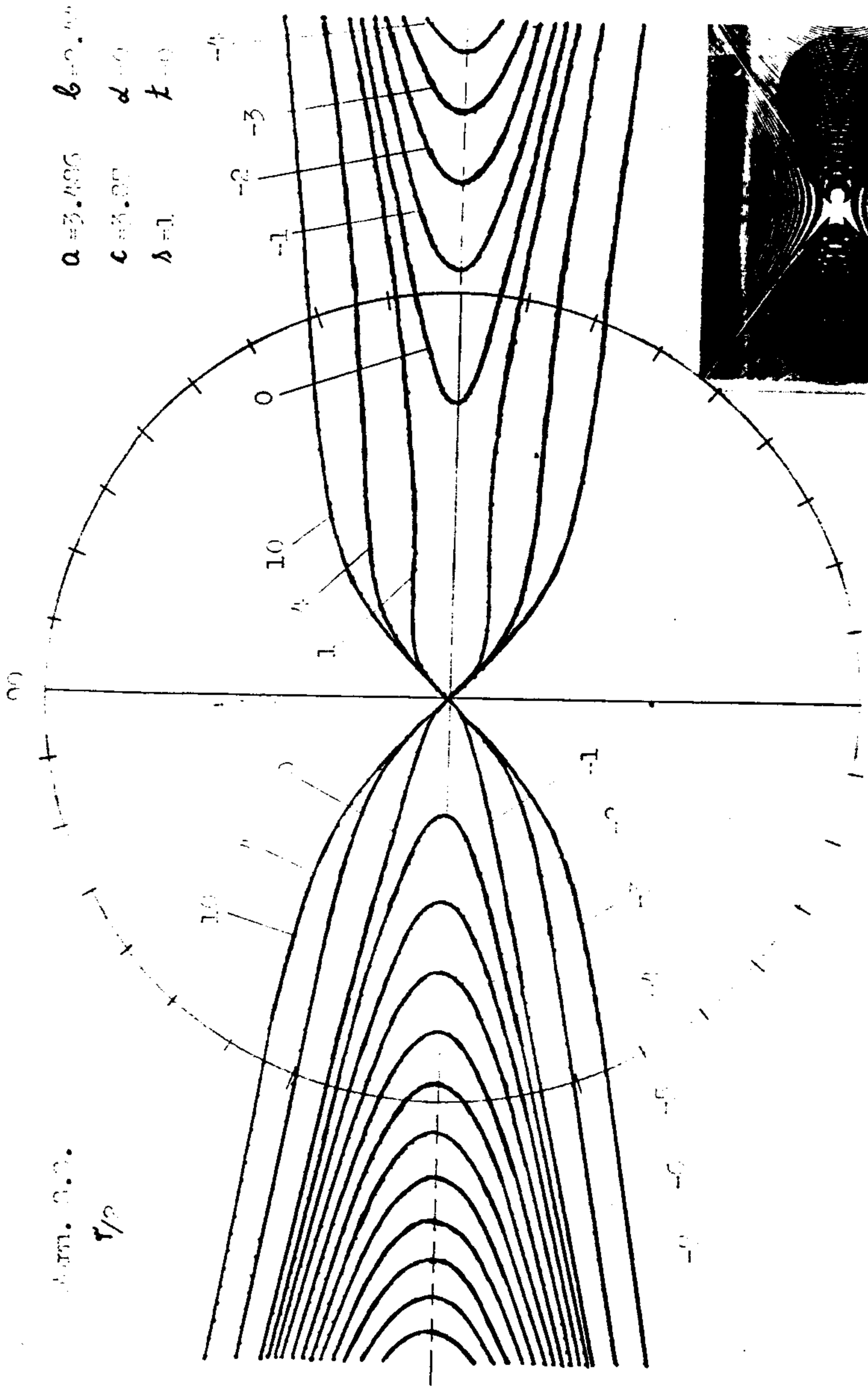
obliku koji imaju linije sa $p \geq 0$.

Još većim povećavanjem λ -a, kada centar sistema hiperbola ulazi duboko u polju desne strane sistema lemniskata, onda se i s desne strane slike pojavljuju novi oblici muare figura, a to su one linije sa $p \geq 0$ koje sada napuštaju onu zajedničku tačku u ishodištu, postaju zatvorene u sebi i nestaju jedna po jedna daljim pomjeranjem centra sistema hiperbola udesno. Slika 8.13 sa grafikonima i sa fotografijom ilustrira ovu pojavu. Namjerno je uzet da sistem lemniskata bude puno manjih dimenzija, radi toga da se vide obje strane slike.

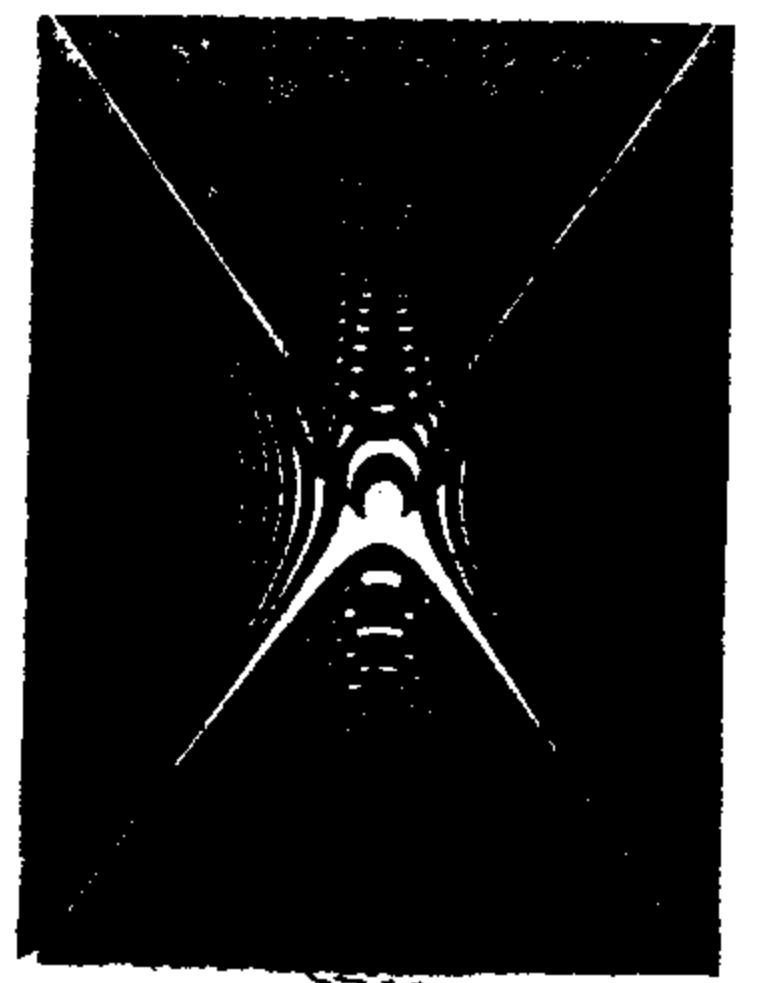
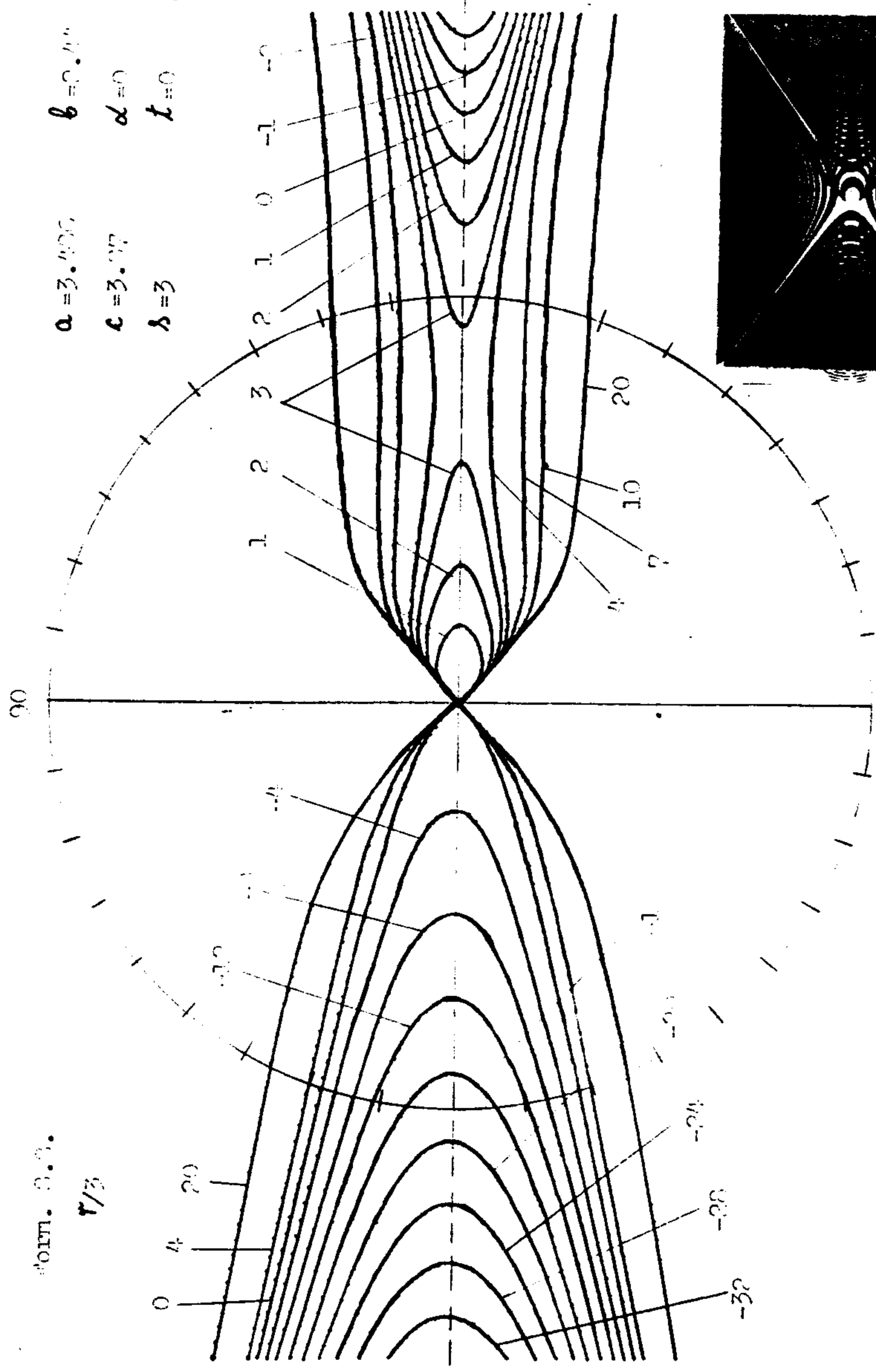
ii) $c > a$

Kada je $c > a$ i $\lambda = 0$, dobija se slika 8.3. Pomjeranjem centra sistema hiperbola udesno, s lijeve strane te slike muare linije se približavaju, a s desne strane: linije sa $p \leq 0$ se udaljavaju a linije sa $p > 0$ se u jednom dijelu savijaju, što se vidi na slici 8.14. Daljim povećavanjem λ -a, linije sa $p \leq 0$ se udaljavaju još više a linije sa $p > 0$ savijaju u takvoj mjeri da od njih se dobijaju dva dijela, jedan dio linije se zatvara a drugi se pridružuje linijama sa $p \leq 0$, što dokazuje slika 8.15, pa i one figure koje su nacrtane iscrtanim linijama na slici 8.16. To je u skladu s tim da lemniskate ulaze unutar četverokuta slike 8.1.

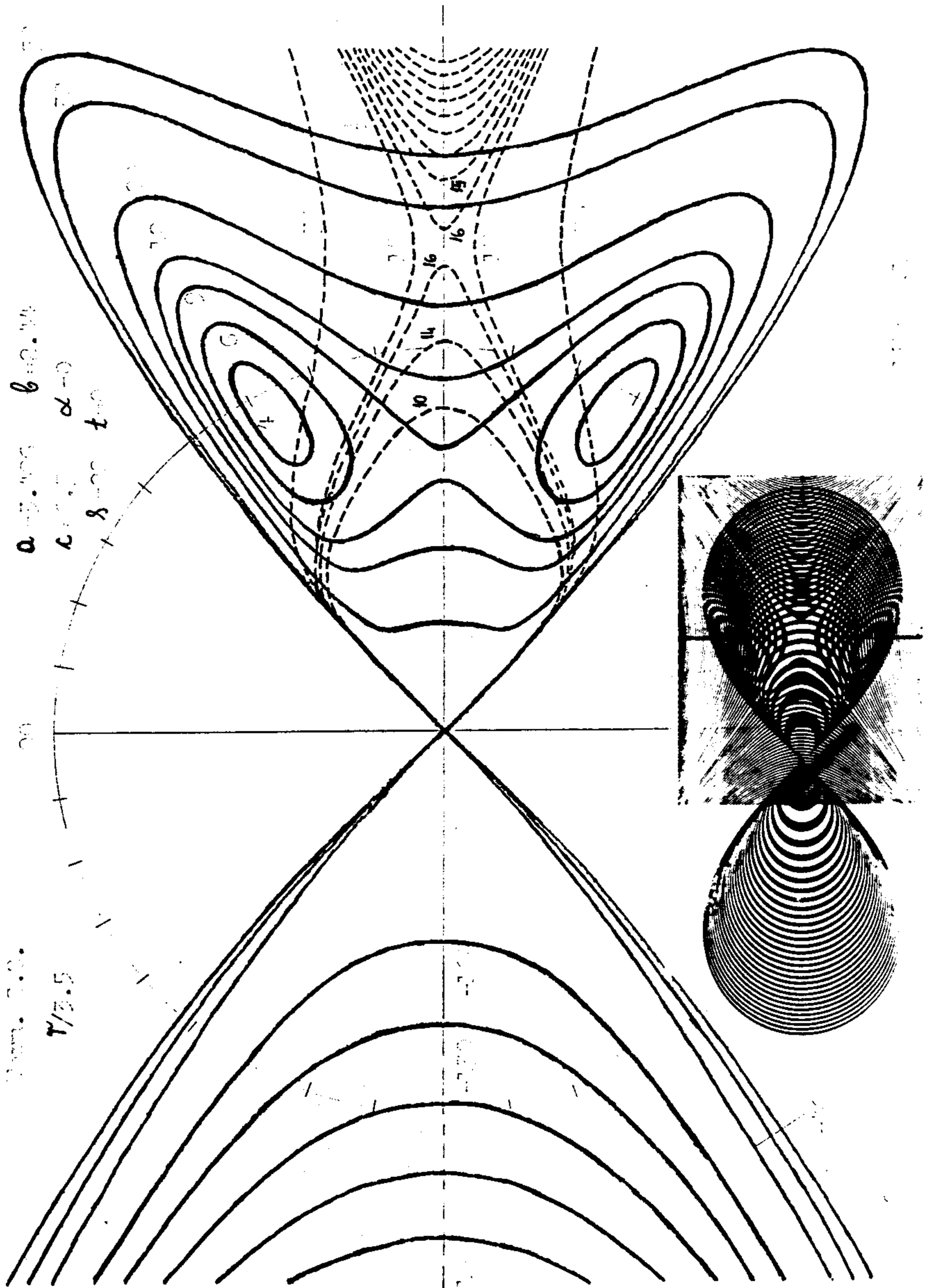
Sve su to muare figure koje se javljaju u polju sistema hiperbola. Međutim, kada se povećava λ , onda u polju desne strane zonskog sistema lemniskata duboko ulazi i zonski sistem pridruženih hiperbola, te prema tomu moraju se javljati muare figure zbog tog razloga. Ovo najbolje dokazuje desna strana



Plika 8.14.



Слика 8.15.



slike 8.16. Pored figura koja su nacrtana iscrtanim linijama i koje se tiču figurama u oblasti sistema hiperbola, vidimo i figure (sa punim linijama) koje se tiču polju njemu pridruženog sistema hiperbola.

S lijeve strane slike 8.16 nacrtani su neki grafikoni, mada se na fotografiji ne vide zbog ograničenosti broja linija u sistemima. Te figure ustvari postoje i nije se mijenjao njihov oblik povećavanjem λ -a, osim što su postale gušće. Razumije se da u ovom dijelu lemniskate izlaze sve više iz četverokuta $2a \cdot 2b$ sistema hiperbola.

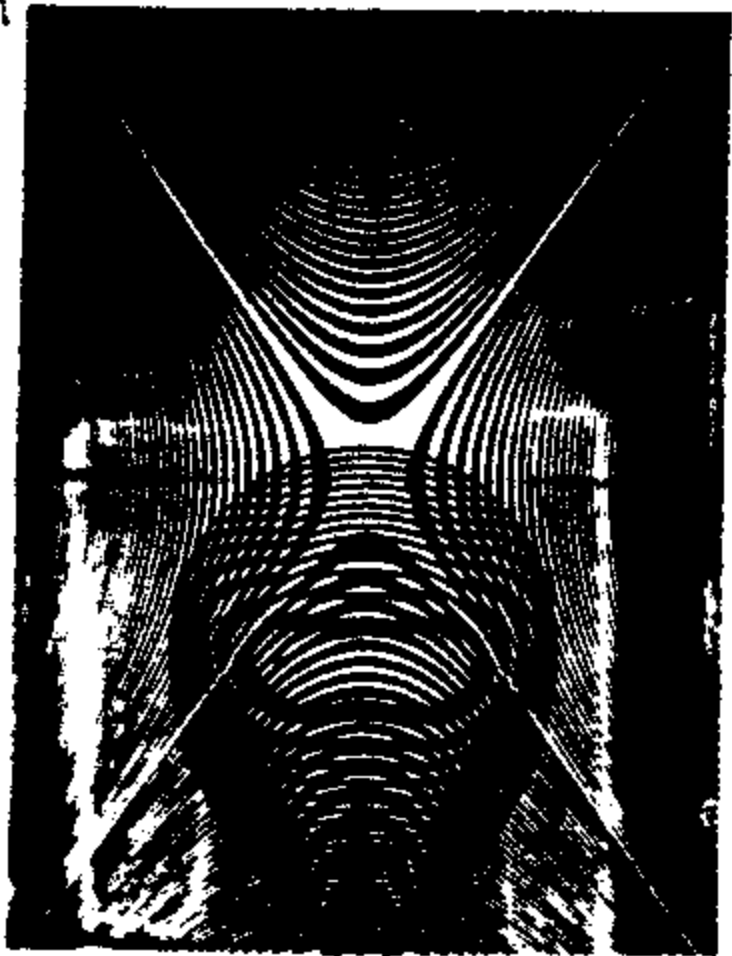
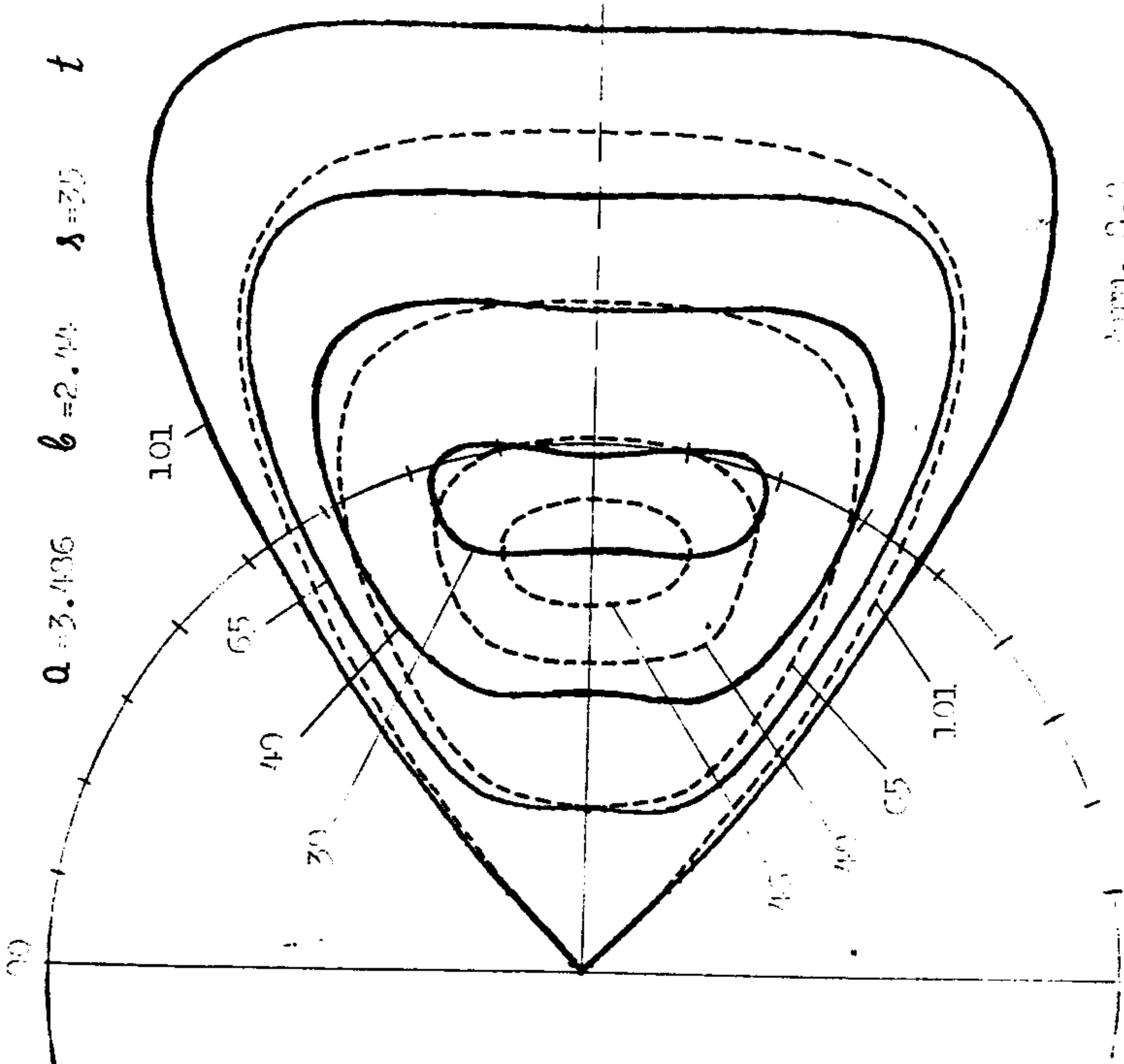
Slika 8.16 je dobijena za slučaj $a=3.486$, $b=2.44$, $c=6.5$, $\lambda=22$ i $\tau=0$. Opisat ćemo malo one muare figure koje nastaju u polju pridruženog sistema hiperbola. Za ove karakteristike pokrivanja sistema primjećuju se tri vrste muare figura. Prvu vrstu čine one dvije linije koje su zatvorene i stoje simetrično gore i dolje a nacrtane su po dvije, za $p=4$ i 6 . Postoje još i $p=5, 7$ i 8 , ali nisu nacrtane zbog preglednosti. Druga vrsta linija je ona koja je zatvorena i ide oko onih prvih. Nacrtane su $p=9$ (kao prva takvog oblika), 12 i 20 , a postoje redom od $p=9$ do $p=37$. Slijedi prva linija iz treće vrste $p=38$, koja je isto tako zatvorena, ide oko onih drugih ali ima tačku u ishodištu. Nacrtana je još i $p=50$, a ustvari ima ih bezbroj.

Postojanje oblika muare figura kao što su gore opisivana može se objasniti lako ako sliku 8.16 analiziramo detaljnije i ako je usporedimo sa onim što je ranije kazano u vezi sa slikom 8.4. Tamo vidi se potpuna analogija oblika muare figura dobivenim u polju pridruženih hiperbola sa onima što pokazuje i slika 8.16. Prema tomu i ovdje ulaskom pridruženog sis-

tema hiperbola u polju sistema lemniskata, počinju da se javljaju zatvorene linije sa $p > 0$ koje imaju jednu tačku u ishodištu. Povećavanjem λ -a ove linije napuštaju ishodište i sada imaju dvije tačke presjecanja sa polarnom osom. Takve su linije na slici $p = 9, 12$ i 20 . Daljim povećavanjem λ -a, tačke presjecanja se sve više približavaju jedna drugoj. Kada se te dvije tačke spoje u jednu onda se dobivaju dvije zatvorene linije. Te dvije linije se povećavanjem λ -a razdvajaju jedna od druge, udaljavaju se simetrično (ako je $\alpha = 0$) sužavajući se sve dok konačno nestanu pri određenoj vrijednosti λ -a. Tako, na slici 8.16 nema više $p = 1, 2$ i 3 . Ovako teorijski ide do beskonačnosti, a realno sve dok sistem pridruženih hiperbola ne izlazi iz polja desne strane zonskog sistema lemniskata.

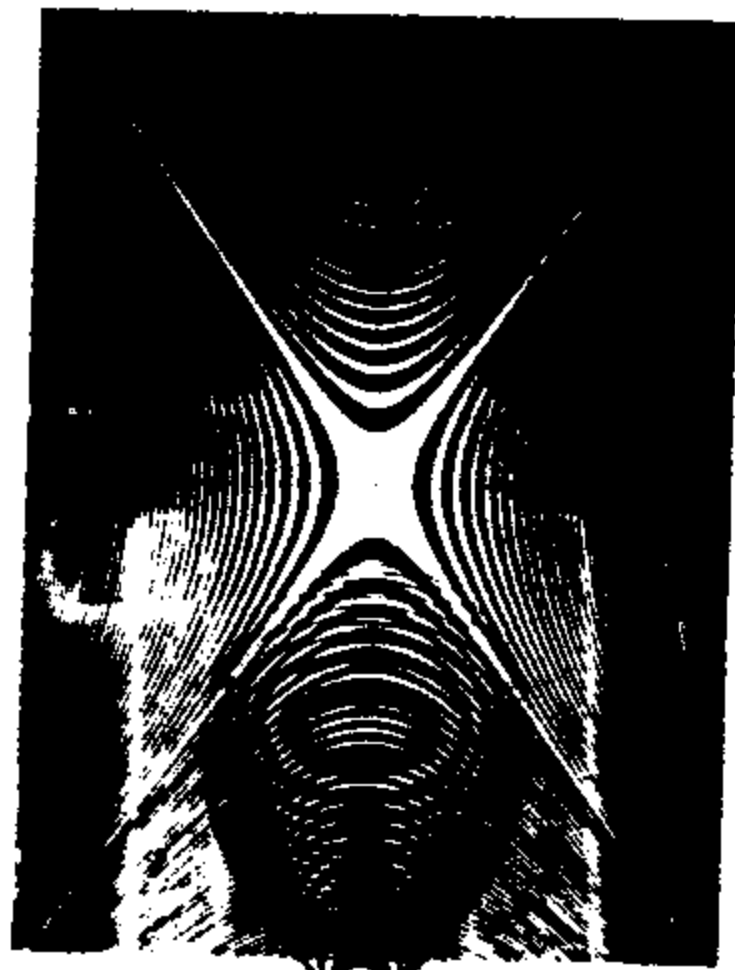
Treba istaći da oblik ovih muare figura zavisi i od odnosa između veličina parametara a, b i c . Slika 8.16 je dobivena za određene vrijednosti parametara koji su označeni gore. Naredna slika 8.17 prikazuje kako izgledaju ove figure za isti sistem hiperbola ($a = 3.486$ i $b = 2.44$) ali za sistem lemniskata sa parametrom $c = 4.45$ i $c = 3.87$. U oba slučaja je $\lambda = 35$ i $\alpha = 0$. Punom su linijom nacrtani grafikoni za slučaj $c = 4.45$, i to zatvorene linije $p = 39, 49$ i 65 (a postoje sve od $p = 39$ do $p = 100$) pa i prva zatvorena linija sa tačkom u ishodištu $p = 101$ (a postoje bezbroj takvih). Na istoj su slici nacrtane i nekoliko linije za $c = 3.87$, sa crticama radi razdvajanja. Tu je prva u sebi zatvorena linija $p = 46$ (prethodne su nestale), pa $p = 49$ i $p = 65$, a postoje sve do $p = 100$. Nacrtana je i prva zatvorena linija sa tačkom u ishodištu $p = 101$.

Primjećuje se da je razlika samo u broju nestalih linija: u prvom slučaju su nestale $p = 1, 2, 3, \dots, 38$ a u dru-



1) $C=4.45$;

in a liquid



2) $C=3.4$

in a liquid

Fig. 3.2.

r/3.5

Fig. 3.1.

gom slučaju $p = 1, 2, 3, \dots, 45$. Sve je ostalo isto, samo što se razlikuju po obliku.

Lijeva strana slike 8.17 nije nacrtana, a ne vidi se i na fotografijama, zbog ograničenog broja linija u sistemima. Muare figure ustvari postoje i s te strane, ali bez karakterističnih promjena.

b) $\lambda = 0, t$ se mijenja

i) $c < a$

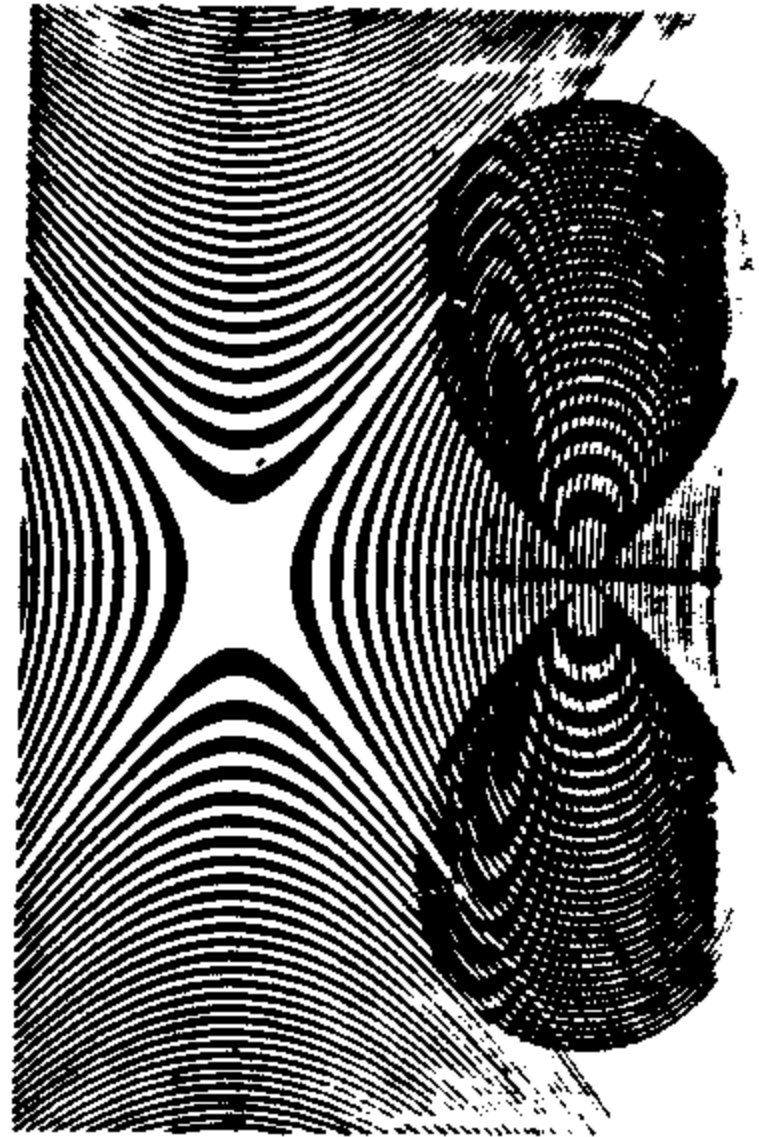
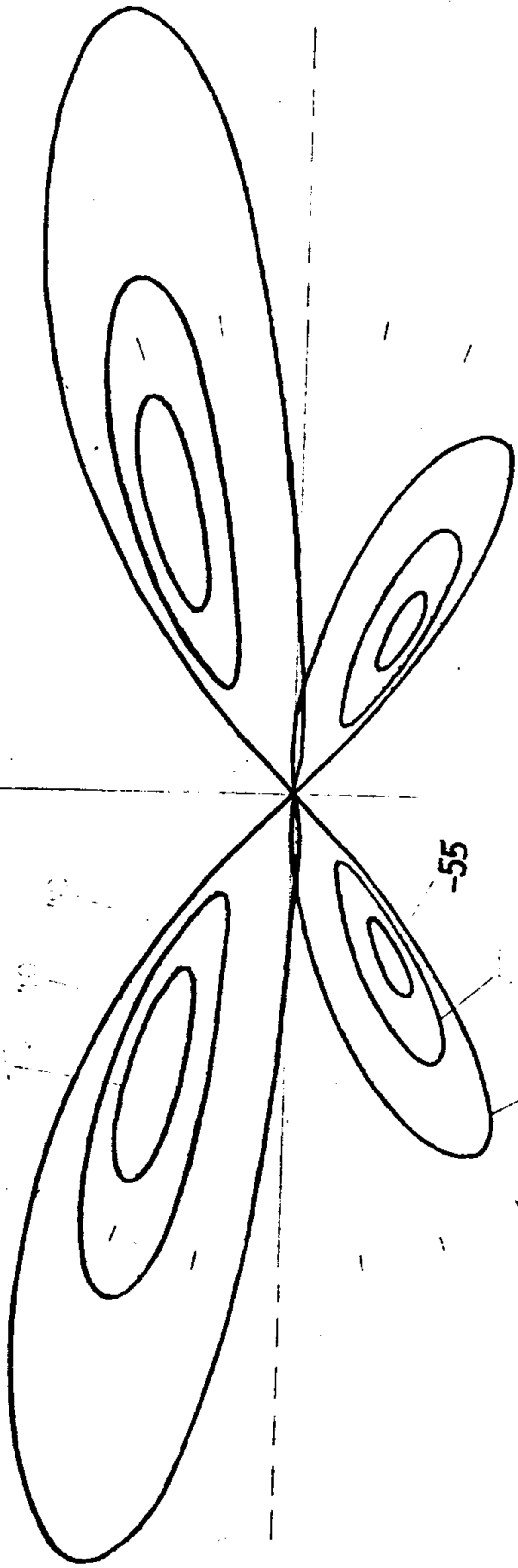
Kada se centar sistema hiperbola pomjera naviše, one muare figure za $p > 0$ iz slike 8.2 počinju da se razdvajaju iz ishodišta, postaju u sebi zatvorene i nestaju jedna iza druge sa povećavanjem t -a. To su linije u oblasti sistema hiperbola. Slika 8.18 prikazuje slučaj $a = 4.57, b = 3.2, c = 3.87, \lambda = 0$ i $t = 22$. Spomenute figure su na gornjem dijelu slike. Nacrtani su grafikoni zatvorenih linija $p = 38$ i $p = 40$, a postoje od $p = 38$ pa sve do $p = 47$. Zatim je nacrtana samo prva zatvorena linija sa tačkom u ishodištu $p = 48$, a ima ih bezbroj. Linije $p = 1, 2, 3, \dots, 37$ su nestale.

S druge strane, povećavanjem t -a, donja strana pridruženih hiperbola ulazi u polju sistema lemniskata, pa prema tomu moraju se javljati nove muare figure. Ista slika 8.18 (donji dio) prikazuje tu pojavu. Nacrtani su grafikoni za prvu zatvorenu liniju $p = -55$ pa i $p = -53$. Za $t = 22$ postoje još i $p = -54, -52, -51, -50, -49$ i -48 . Zatim dolaze zatvorene linije koje imaju tačku u ishodištu a to su $p = -47$ (koja je nacrtana), $-46, -45, \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ Daljim povećavanjem

b
d
t

a
c
s

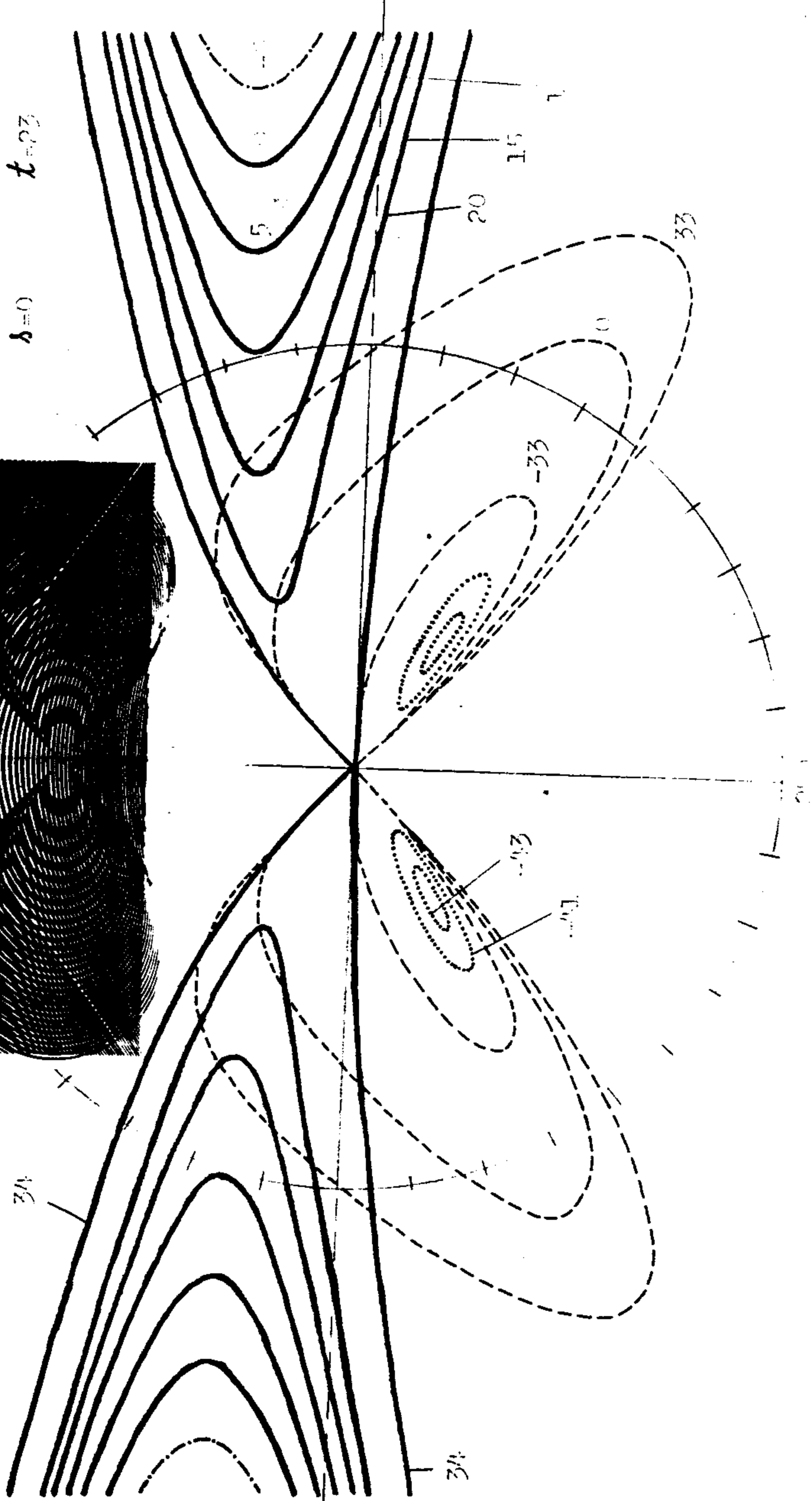
20



117



$a = 5.69$ $b = 3.000$
 $c = 0.5$ $d = 0$
 $h = 0$ $t = 23$



Form. 8.9.
 7/5

t -a pojavljuju se nove zatvorene linije $p = -56, -57$ itd., dok one zadnje $p = -43, -49, \dots$ redom prelaze u oblik zatvorenih linija sa tačkom u ishodištu.

Ako se centar sistema zonskih hiperbola pomjera u suprotnom smjeru, događa se obrnuti proces: linije sa tačkom u ishodištu $p = -46, -45, -44, \dots$ redom se pretvaraju u sebi zatvorene linije i nestaju jedna za drugom sve do $p = 0$ u momentu kada postaje $t = 0$, a u tom slučaju se vraćamo na sliku 8.2.

ii) $c > a$

U ovom slučaju, povećavanjem t -a, u oblasti sistema hiperbola one otvorene linije sa $p < 0$ iz slike 8.3 se udaljavaju, a otvorene linije sa tačkom u ishodištu sa $p \geq 0$ napuštaju tu tačku i pridružuju se onim prvim. Slika 8.19 (gornje figure) je rješenje za slučaj $a = 5.69, b = 3.984, c = 6.5, \lambda = 0$ i $t = 23$. Nacrtane su otvorene linije $p = -5, 0, 5, 10, 15, 20$. Nacrtana je i prva otvorena linija sa tačkom u ishodištu $p = 34$.

Na istoj slici su prikazani i grafikoni nekoliko muare linija u oblasti sistema pridruženih hiperbola. Nacrtana je prva u sebi zatvorena linija $p = -43$, pa i $p = -41$. Isto tako, nacrtana je i prva zatvorena linija sa tačkom u ishodištu $p = -33$, onda $p = 0$ i $p = 33$, a teorijski ih ima bezbroj. Ove linije nastaju potpuno analogno kao u prethodnom slučaju, kada je bilo $c < a$, a vide se na donjoj strani slike 8.19.

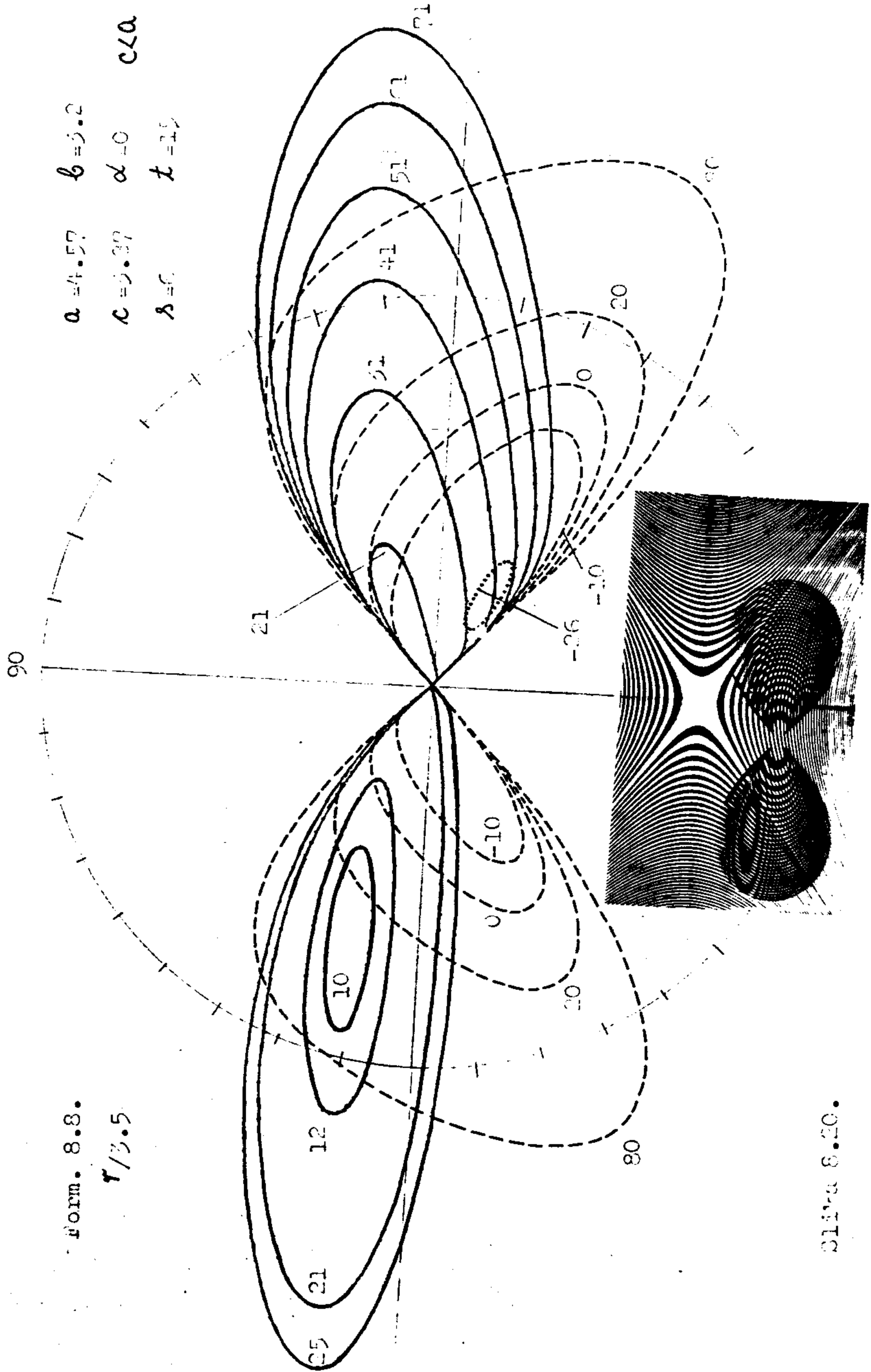
e) Mijenja se i λ i t

Konačno, kada se centar zonskog sistema hiperbola po-

Form. 8.8.

r/3.5

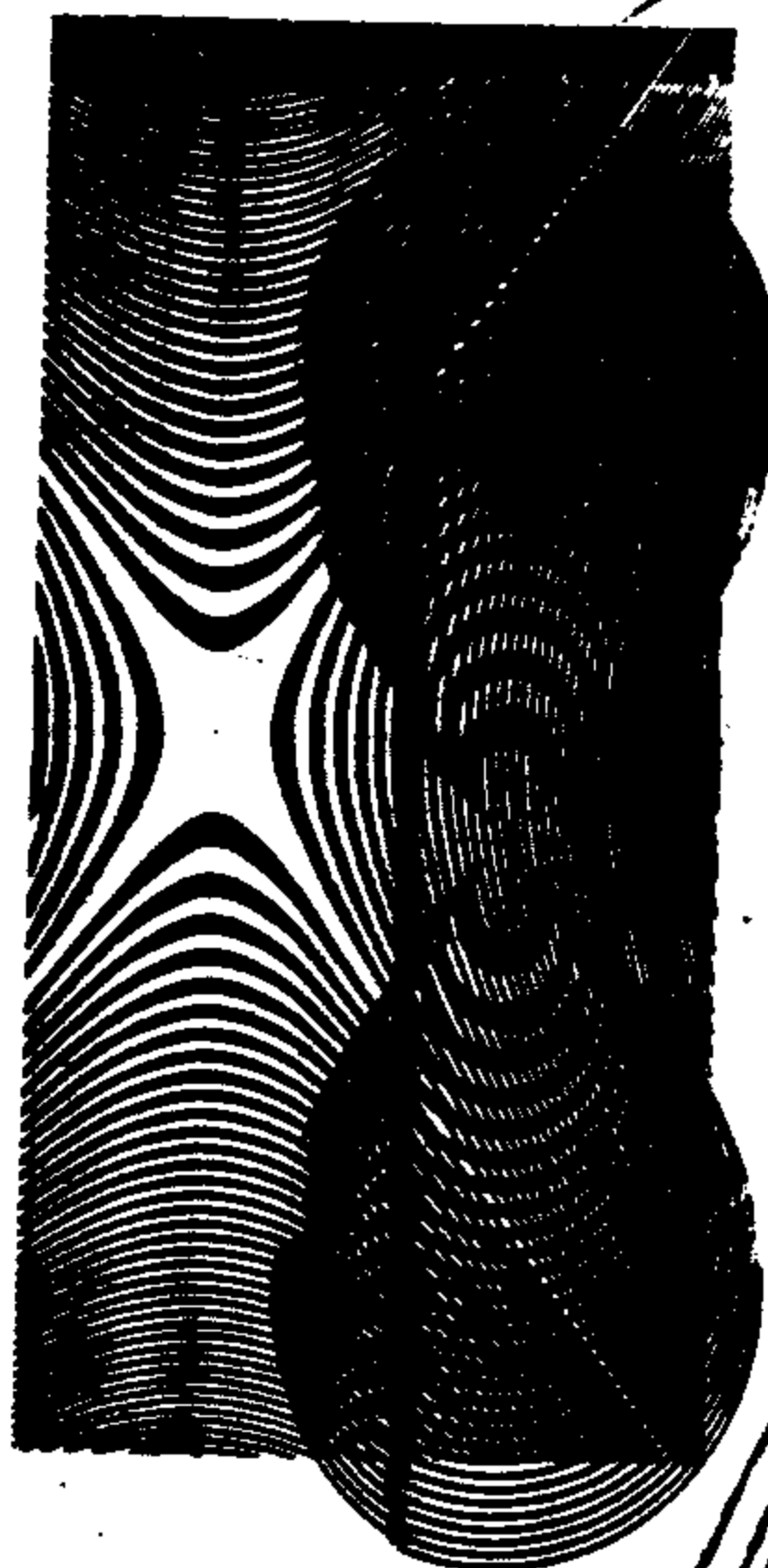
$a = 4.57$ $b = 3.2$
 $c = 3.37$ $d = 0$ $e < 0$
 $f = 0$ $g = 15$



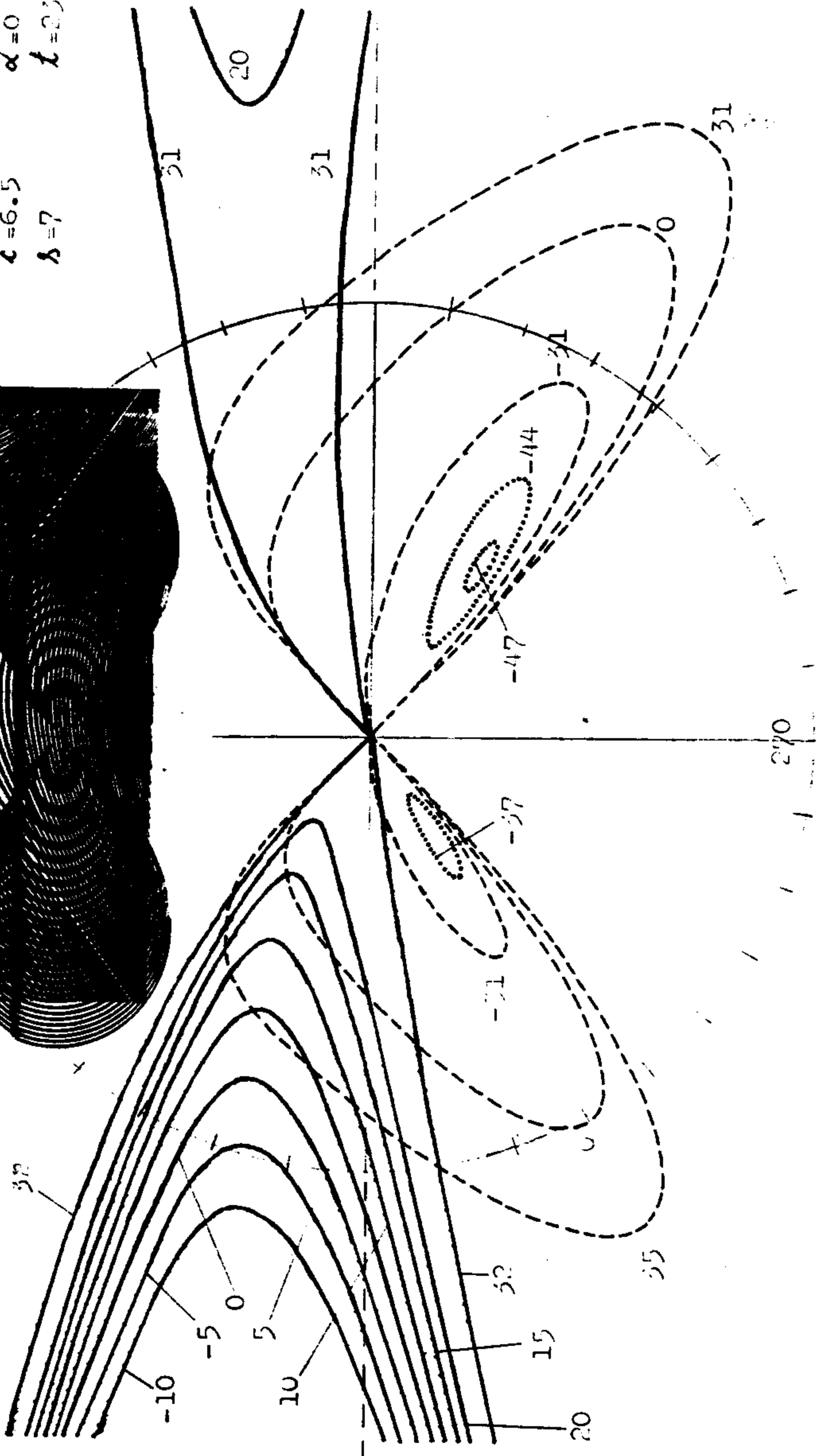
Form 8.20.

Form. 8.8.

$\gamma/5$



$a = 5.69$ $b = 2.99r$
 $c = 6.5$ $\alpha = 0$ $c > a$
 $\lambda = 7$ $t = 23$



Bliva 8.81.

mjera u oba smjera, nastaju slike muare figura kao kombinacije prethodnih slučajeva, pa zbog toga neću ih detaljnije opisivati.

Slika 8.20 predstavlja slučaj $a=4.57$, $b=3.2$, $c=3.87$ ($c < a$), $\lambda=6$ i $\tau=15$. Punom linijom su nacrtani grafikoni muare figura u polju zonskog sistema hiperbola, a tačkastim i crtanim linijama one u polju njemu pridruženog sistema.

Slika 8.21 ilustrira slučaj $a=5.6$, $b=3.984$, $c=6.5$ ($c > a$), $\lambda=7$ i $\tau=23$.

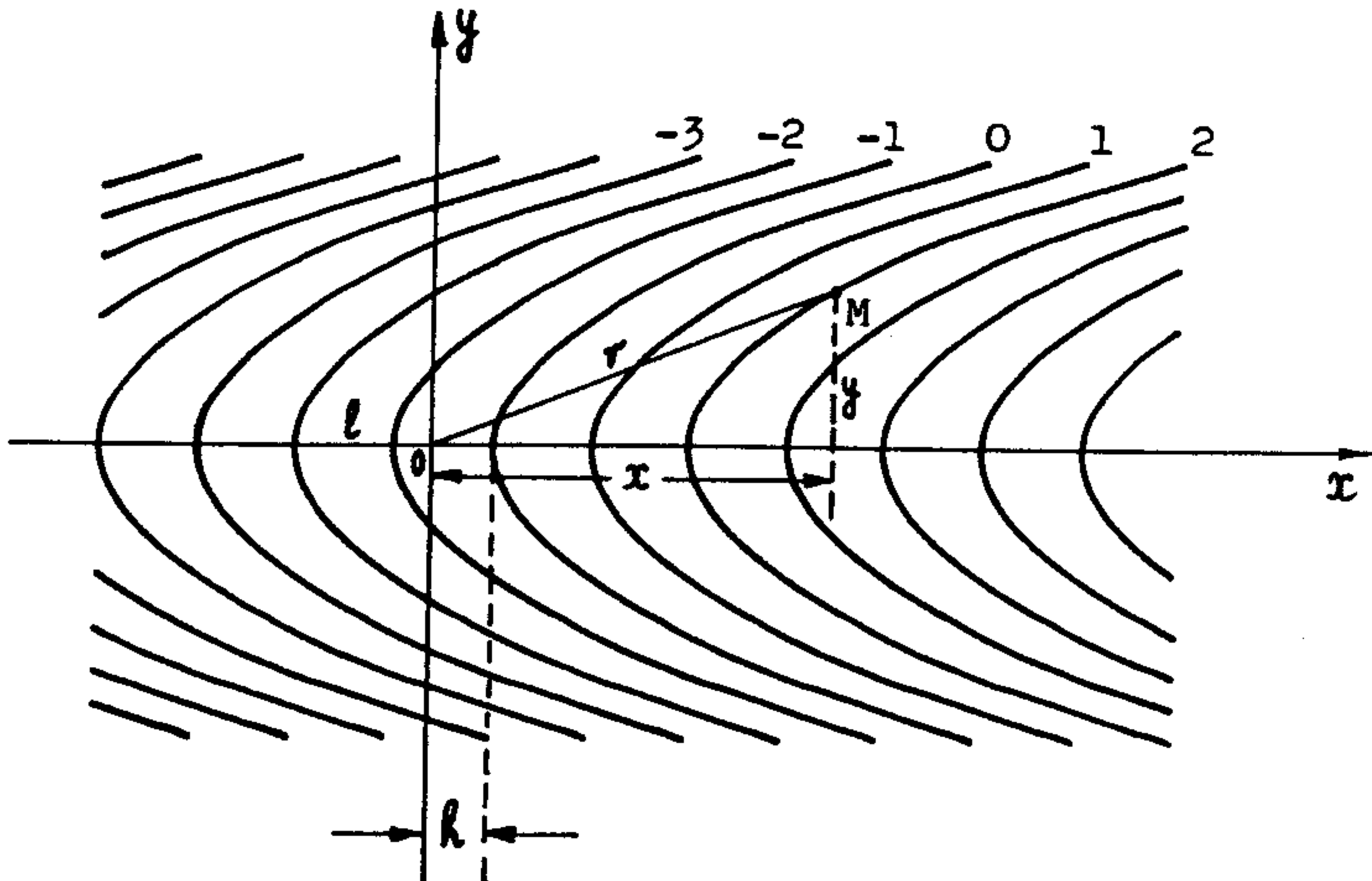
Na osnovu svih priloženih grafikona koji su dobiveni numeričkim izračunavanjem na osnovu formule (8.8) koju daje teorija i uz njih fotografije pokrivanja sistema istih karakteristika, može se konstatirati da postoji potpuna saglasnost između teorije i eksperimenta.

**9. MUARE FIGURE ZONSKOG SISTEMA LEMNISKATA SA
SISTEMOM EKVIDISTANTNIH PARABOLA**

Na osnovu slike 9.1 možemo postaviti jednađbu sistema ekvidistantnih parabola. U pravokutnim koordinatama ta jednađba bi glasila

$$x = \frac{y^2}{2 \cdot \varrho} + n \cdot l + h \quad (9.1)$$

gdje je ϱ - parametar parabole, l - razmak izmedju susjednih



Slika 9.1.

parabola duž osi x , a $h < l$ je udaljenost tjemena parabole $m=0$ od ishodišta.

U polarnim koordinatama ta jednadžba glasi

$$r^2 \sin^2 \varphi - 2 \cdot g \cdot r \cdot \cos \varphi + 2 \cdot g \cdot (m \cdot l + h) = 0 \quad (9.2)$$

Ovaj sistem ćemo pokriti sa sistemom zonskih lemniskata.

Traženje područja efikasnosti aditivnih i suptraktivnih muare figura analitičkim putem i ovdje vodi do jedne trigonometrijske jednadžbe koju je teško riješiti. Zato će se odmah ići na nalaženje formule muare figura koje nastaju pokrivanjem ovakvih sistema krivih linija, a koje su figure u kom području efikasne, pokazat će numerički računi.

Iz (1.29), (9.2) i (7.7), dobiva se tražena formula

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2(\varphi - \alpha)} \pm \frac{2 \cdot g \cdot r \cdot \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi - 2 \cdot g \cdot h}{2 \cdot g \cdot l} = p$$

Uz zamjene

$$w = c^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos 2(\varphi - \alpha),$$

$$v = c^2 g \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2(\varphi - \alpha),$$

$$d = 2 \cdot g \cdot h \cdot c^2 \cdot \cos 2(\varphi - \alpha) \quad \text{i}$$

$$k = 2 \cdot g \cdot l \cdot c^2 \cdot p \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)$$

dobiva se slijedeća jednadžba

$$r^2 \cdot (2 \cdot g \cdot l \mp w) \pm 2 \cdot r \cdot v \mp d - k = 0 \quad (9.3)$$

Gornji predznak vrijedi za aditivne a donji za suptraktivne mua-

re figure. Rješenje ove jednačbe glasi

$$\gamma_{1;2} = \frac{\mp v \pm \sqrt{v^2 - (2 \cdot \rho \cdot l \mp w) \cdot (\mp d - k)}}{2 \cdot \rho \cdot l \mp w} \quad (9.4)$$

gdje znak " \pm " ispred kvadratnog korjena označava dva rješenja gornje jednačbe.

Računskim putem je ustanovljeno da u oblastima gdje se pokriva sistem ekvidistantnih parabola sa zonskim sistemom lemniskata izlazi pozitivna vrijednost za veličinu koja određuje komutacionu granicu, što znači da su efikasne suptraktivne muare figure. Te prema tomu, u daljem računu prema formuli (9.4) treba uzeti donji predznak ispred v , w i d .

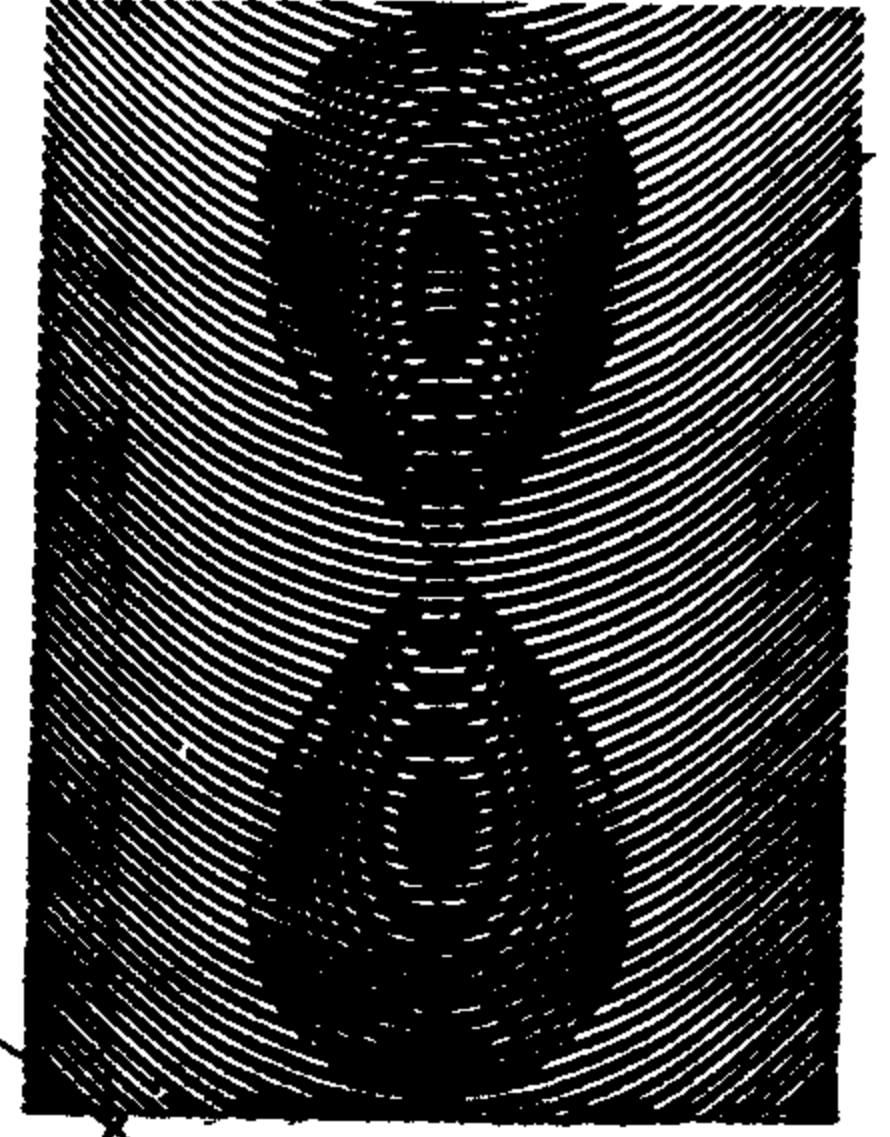
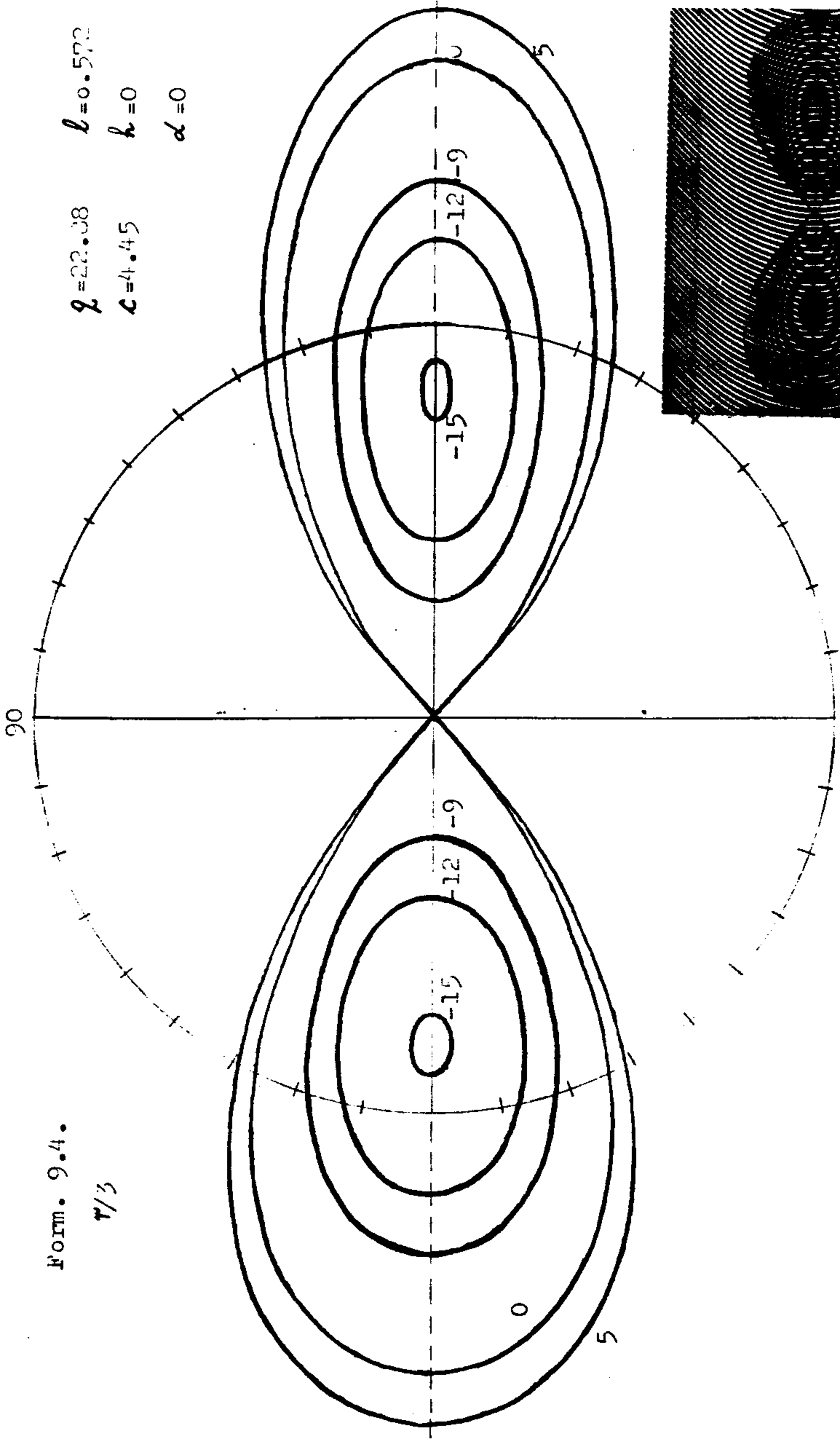
Na osnovu formule (9.4) izračunati su nekoliko grafikoni za slučaj $\rho = 22.88$, $l = 0.572$, $h = 0$, $c = 4.45$ i $\alpha = 0$, koji su predstavljeni na slici 9.2. Vidi se da i s lijeve strane a i s desne strane te slike postoji određeni broj u sebi zatvorenih linija za $p < 0$ a i bezbroj zatvorenih linija koje prolaze kroz ishodište, koje se dobivaju za $p \geq 0$. Na toj slici je prva u sebi zatvorena linija $p = -15$, zadnja $p = -1$, a radi preglednosti nacrtane su samo $p = -15$, -12 i -9 , s obe strane slike. Zatim su nacrtane dvije zatvorene linije koje prolaze kroz ishodište, a to su $p = 0$ i $p = 5$. Ovakva simetrija što se tiče rednog broja muare linija vrijedi kada je centar sistema lemniskata zajedno sa ishodištem polarnog koordinatnog sistema na vrhu parabole sa rednim brojem $n = 0$, znači kada je $h = 0$.

Treba istaći da lijeva strana slike 9.2 je računski dobivena sa znakom " $-$ " ispred v , w i d u formuli (9.4),

Form. 9.4.

$\tau/3$

$\rho = 22.38$ $h = 0.572$
 $c = 4.45$ $h = 0$
 $\alpha = 0$



Sliva 9.2.

a desna strana sa znakom " + ". To je u skladu s tim da lijeva strana sistema lemniskata presjeca linije sistema parabola koje imaju negativni redni broj n , a desna strana presjeca linije sa pozitivnim rednim brojem.

Prije nego što se predje na dalje razmatranje muare figura koje nastaju pokrivanjem ovakvih sistema krivih linija, bit će predstavljena neka istraživanja u vezi utjecaja koji imaju pojedini parametri na broj i oblik muare figura. Ti rezultati su dati na tabelama 9.1 i 9.2.

Tabela 9.1 predstavlja rezultate istraživanja kada se za jedan odredjeni razmak izmedju parabola mijenjaju parametar parabole q i parametar lemniskate c . Na osnovu te tabele se

Tabela 9.1.

$l = 0.572$	p		
	$q = 25.472$	$q = 22.88$	$q = 19.2$
$c = 4.45$	-15, -14, ..., -1	-15, -14, ..., -1	-15, -14, ..., -1
$c = 6.5$	-32, -31, ..., -1	-32, -31, ..., -1	-32, -31, ..., -1

može konstatirati da na broj linija ne utječe veličina q već veličina parametra lemniskate c .

Na tabeli 9.2 su predstavljeni rezultati ispitivanja kada se parametar q parabole drži konstantnim, a mijenjaju se parametri c i l . Može se opaziti da osim parametra lemniskate c , na broj muare linija vrlo mnogo utječe i razmak izmedju

Tabela 9.2.

$l = 22.88$	p	
	$c = 4.45$	$c = 6.5$
$l = 0.2$	-123, -122, ..., -1	-264, -263, ..., -1
$l = 0.4$	-30, -29, ..., -1	-66, -65, ..., -1
$l = 0.572$	-15, -14, ..., -1	-32, -31, ..., -1
$l = 0.8$	-7, -6, ..., -1	-16, -15, ..., -1
$l = 1.0$	-4, -3, ..., -1	-10, -9, ..., -1

pojedinih linija parabola l . Razumije se da je broj muare linija veći ako je veći broj linija parabola u odredjenom intervalu.

Numeričkim računom je utvrđeno da daljim povećavanjem razmaka l izmedju parabola, smanjuje se i dalje broj linija koje liče na elipsu. Za $c = 4.45$ je utvrđeno da zadnja takva linija $p = -1$ postoji konačno do $l = 2.225$ ($l = 4.45/2$) a za $c = 6.5$ ta linija je vidljiva sve do $l = 3.25$ ($l = 6.5/2$). To znači da se linije takvog oblika gube povećavanjem l -a, a kada l prelazi vrijednost $c/2$, onda izčezava i poslednja takva muare figura. Daljim povećavanjem l -a ostaju samo zatvorene linije sa $p \geq 0$, koje imaju zajedničku tačku u ishodištu.

Postoji i drugi slučaj: kada se razmak izmedju parabola smanjuje. U tom slučaju se povećava broj linija koje liče na elipsu, što se vidi i na tabeli 9.2. Ekstremni je slučaj kada postaje $l = 0$. U tom slučaju je broj linija takvog oblika

vrlo veliki, što je nemoguće ih uočiti jer se tada linije sistema parabola spoje jedna sa drugom i uzaludno je tražiti tačke presjecanja sa linijama sistema lemniskata.

Dalje je ispitano kako utječe međusobni odnos između parametara q i l parabola i parametra c lemniskate na oblik muare figura. Za ovo će poslužiti slika 9.3, koja je dobivena na osnovu rezultata računanja formulom (9.4) kada se pokriva jedan te isti zonski sistem lemniskata sa parametrom $c = 8.57$ sa tri vrste sistema parabola. Uzeto je $h = 0$, $d = 0$, $\lambda = 0$ i $t = 0$. Veće promjene se primjećuju s lijeve strane te slike. Tu su nacrtani grafikoni linija $p = -17$ (to su dvije simetrične zatvorene linije), pa $p = -16$ i $p = -15$ za slučaj $q = 8.628$ i $l = 1.054$, sa punom linijom. Zatim, linijom sa crticama su nacrtani grafikoni za $p = -56$ i $p = -55$ za $q = 22.88$ i $l = 0.572$. Sa tačkastim linijama su nacrtani grafikoni za $p = -45$ i $p = -44$ za slučaj $q = 25.472$ i $l = 0.6368$. Vidi se da te figure se znatno razlikuju za različite kombinacije parametara. Zajedničko im je to da zadnja u sebi zatvorena linija je $p = -1$, a zatim dolaze linije koje imaju tačku u ishodištu $p \geq 0$.

S desne strane slike 9.3 nacrtane su linije sa istim rednim brojevima kao s lijeve strane i ne primjećuju se znatne razlike između njih. Karakteristično je u ovom slučaju da tačke presjecanja muare linije sa polarnom osom za određeni sistem parabola i za isti redni broj, stoje simetrično postavljene s lijeve i s desne strane slike i na istoj su udaljenosti.

U daljem ispitivanju je analizirano kako utječe promjena kuta zakretanja osi sistema lemniskata na oblik muare figura.

Form. 9.1.

- $l = 6.628$; $l = 1.054$; $r/5$
- $l = 22.88$; $l = 0.572$; $r/5$
- $l = 25.472$; $l = 0.6568$; $r/5$

$c = 8.57$

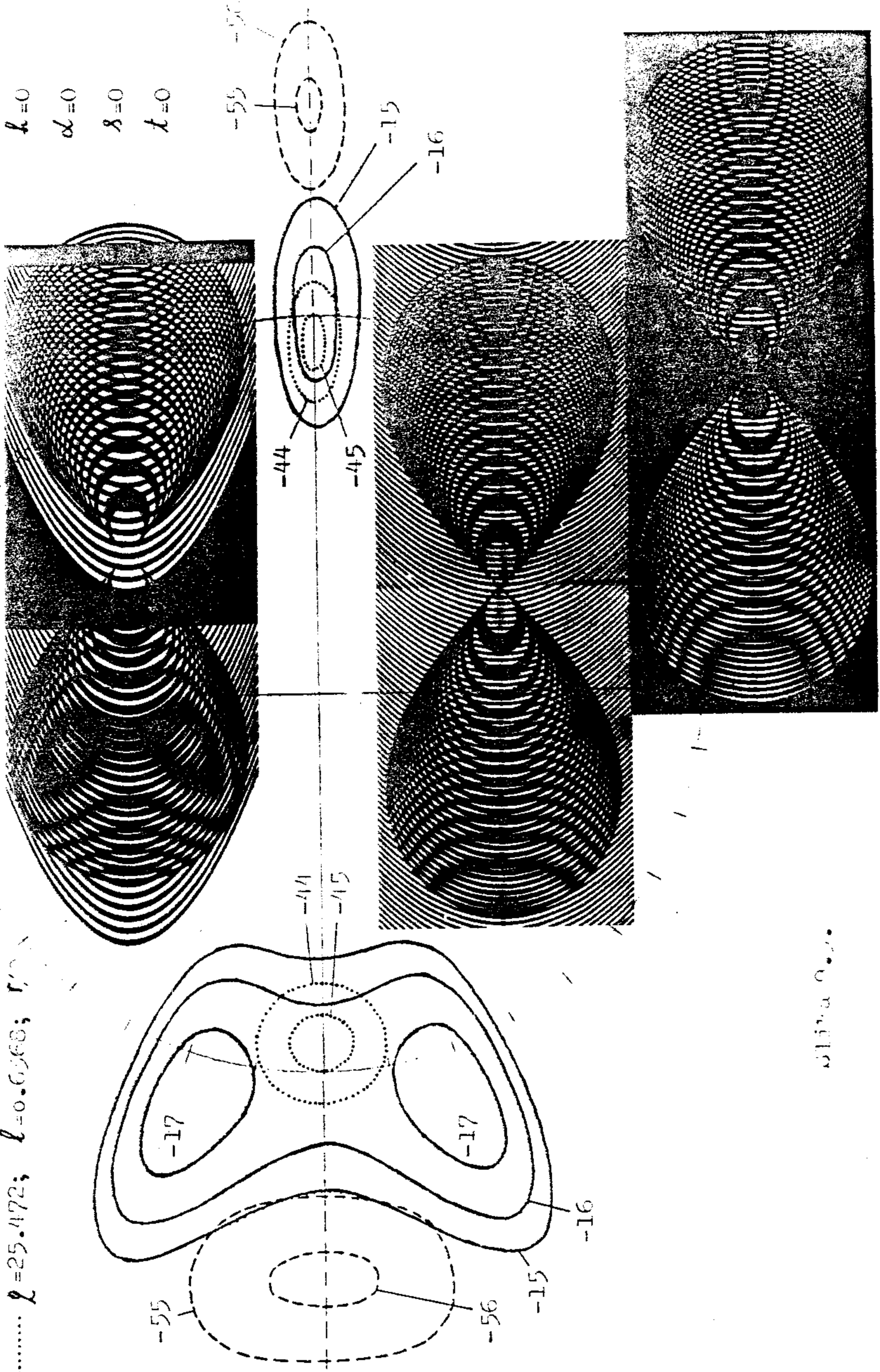
$h = 0$

$\alpha = 0$

$\beta = 0$

$\lambda = 0$

90

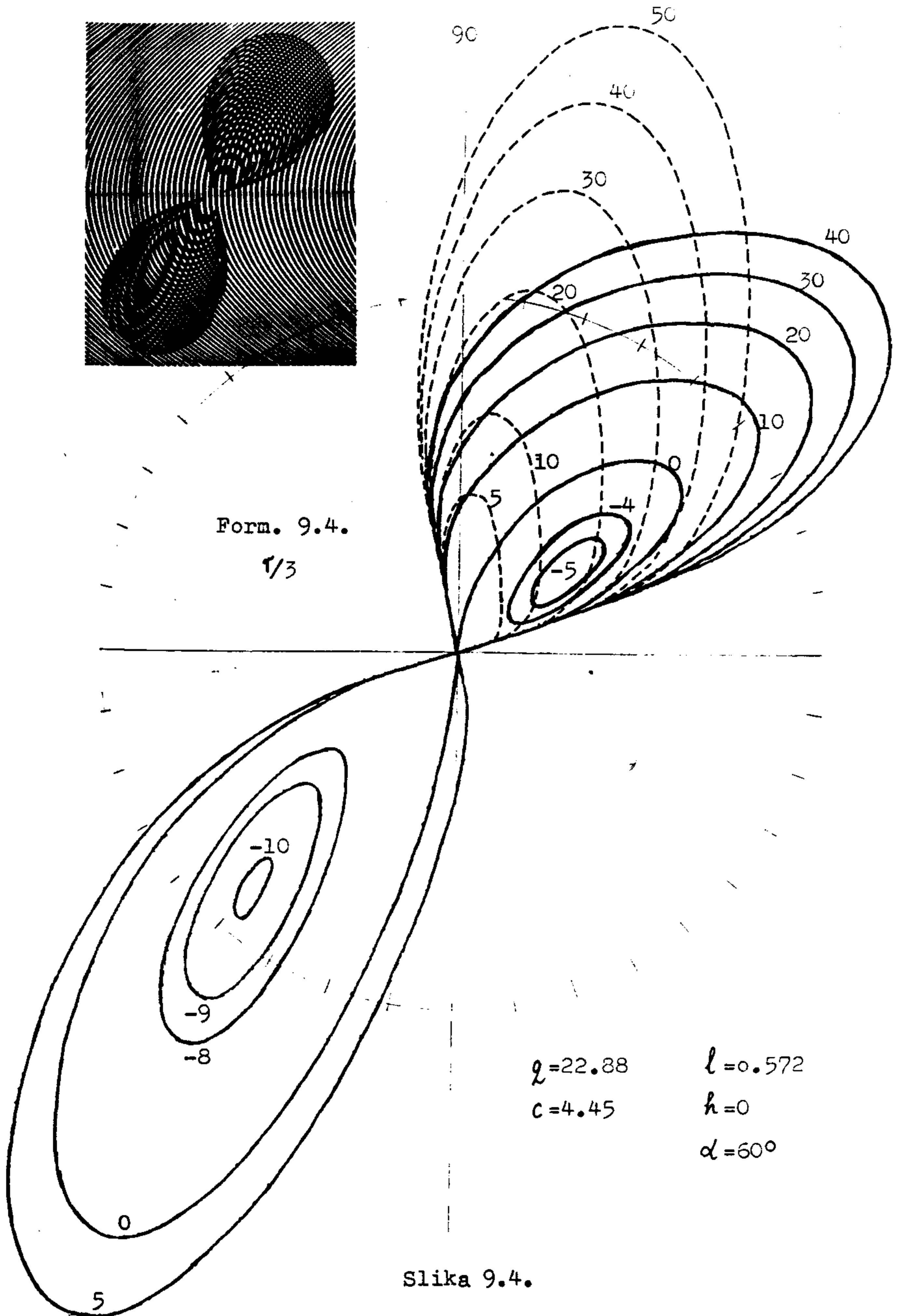
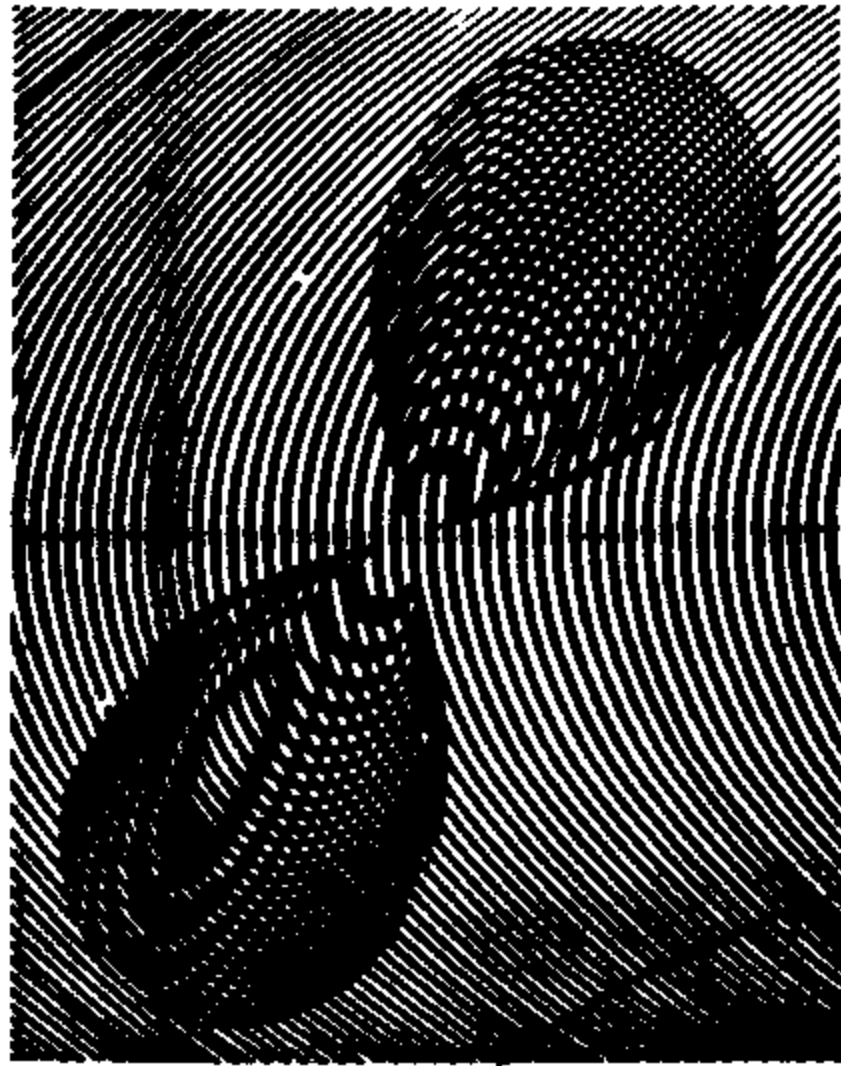


Alpha 0.00

Povećavanjem kuta α , one zatvorene linije sa $p < 0$ iz slike 9.2 počinju da se gube jedna po jedna i s lijeve i s desne strane. Slika 9.4 pokazuje slučaj istih parametara sistema kao na slici 9.2, ali za kut skretanja osi sistema lemniskata $\alpha = 60^\circ$. Dolje je nacrtana poslednja "elipsa" $p = -10$, zatim $p = -9$ i $p = -8$, a postoje sve do $p = -1$. Dolje su još nacrtane i linije $p = 0$ i $p = 5$, koje su zatvorene i imaju tačku u ishodištu. Gore su punom linijom nacrtane opet poslednja $p = -5$ i $p = -4$ u sebi zatvorene linije kao i nekoliko linija sa $p \geq 0$ koje imaju tačku u ishodištu, to su $p = 0$ (kao prva takvog oblika), 10, 20, 30 i 40. Primjećuje se da s desne strane linije koje liče na elipsu sa $p < 0$ izčezavaju brže nego one s lijeve strane.

Kada se osa sistema lemniskata zakrene u dovoljnoj mjeri (a to zavisi od veličine parametra q parabole, koji utječe na savijenost parabole), onda desne linije sistema lemniskata počinju da se presjeku sa linijama sistema parabola koje imaju negativni redni broj, a lijeve linije sistema lemniskata počinju da presjecaju linije sa pozitivnim rednim brojem u sistemu parabola. U tom se slučaju počinju pojavljivati nove muare linije koje su na slici 9.4 nacrtane crtkanim linijama. Ovakve linije se ne vide s donje strane te slike radi toga što linije lijeve strane sistema lemniskata počinju da presjecaju linije parabola u ovom slučaju kasnije, tj. pod većim kutem zakretanja α u odnosu na to što čine linije desne strane tog sistema. Treba istaći da su crtkane linije na slici 9.4 računski dobivene za $p \geq 0$ ali sa znakom " - " ispred v , w i d u formuli (9.4). Objašnjenje za ovo je dato gore.

Ove činjenice još bolje potkrepljuje slika 9.5, koja



Form. 9.4.

$r/3$

$$q = 22.88$$

$$c = 4.45$$

$$l = 0.572$$

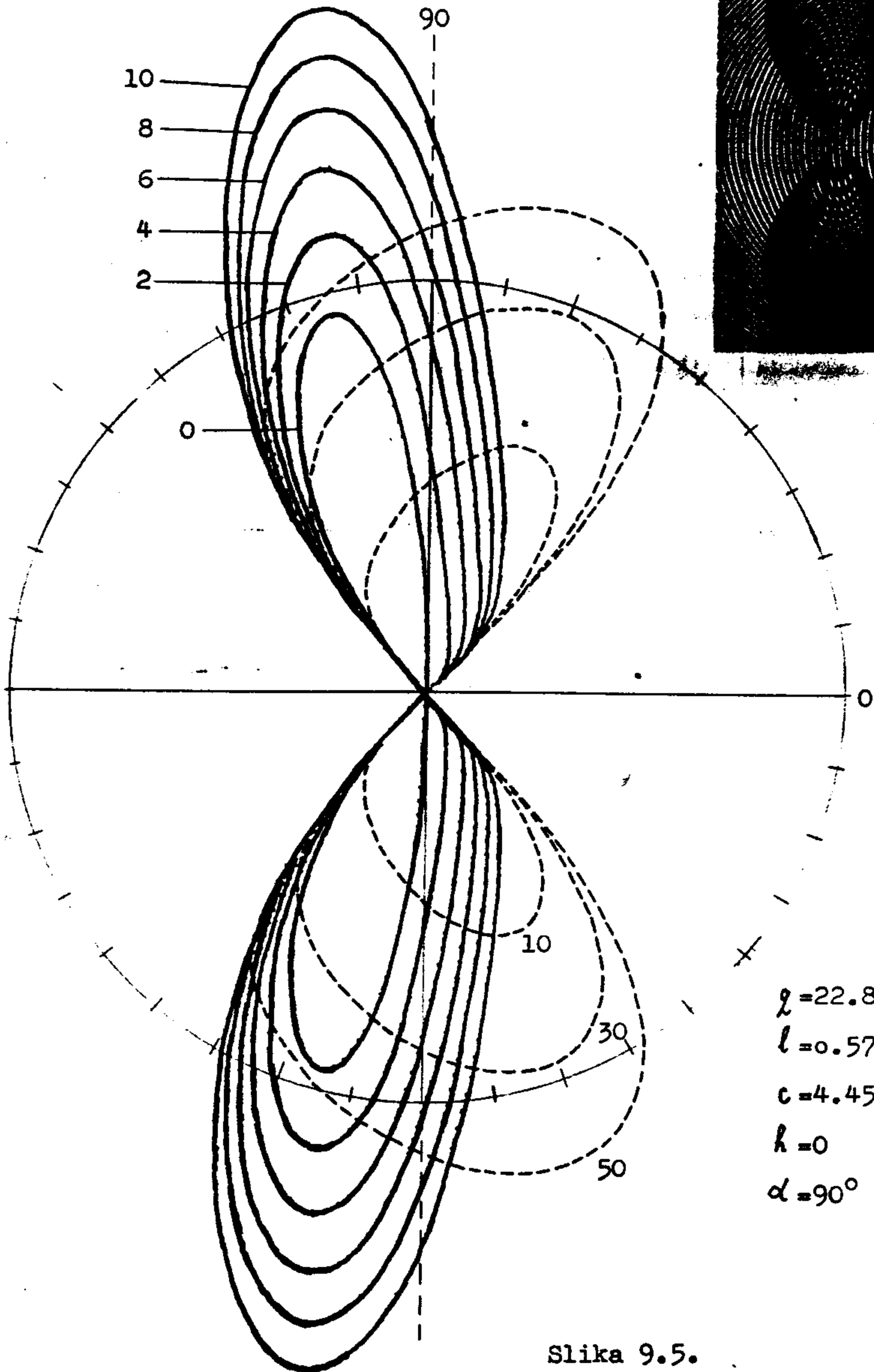
$$h = 0$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Slika 9.4.

Form. 9.4.

$r/3$



Slika 9.5.

je dobivena za iste sisteme ali uz kut $\alpha = 90^\circ$. Vidi se potpuna simetrija gornjeg i donjeg dijela slike. Ovdje više nema nijedne zatvorene linije sa $p < 0$, već je veliki broj zatvorenih linija sa $p \geq 0$ koje prolaze kroz ishodište, kao rezultat presjecanja linija sistema lemniskata sa linijama sistema parabola koje imaju negativni redni broj m (pune linije) i sa linijama koje imaju pozitivni redni broj m (crtkane linije).

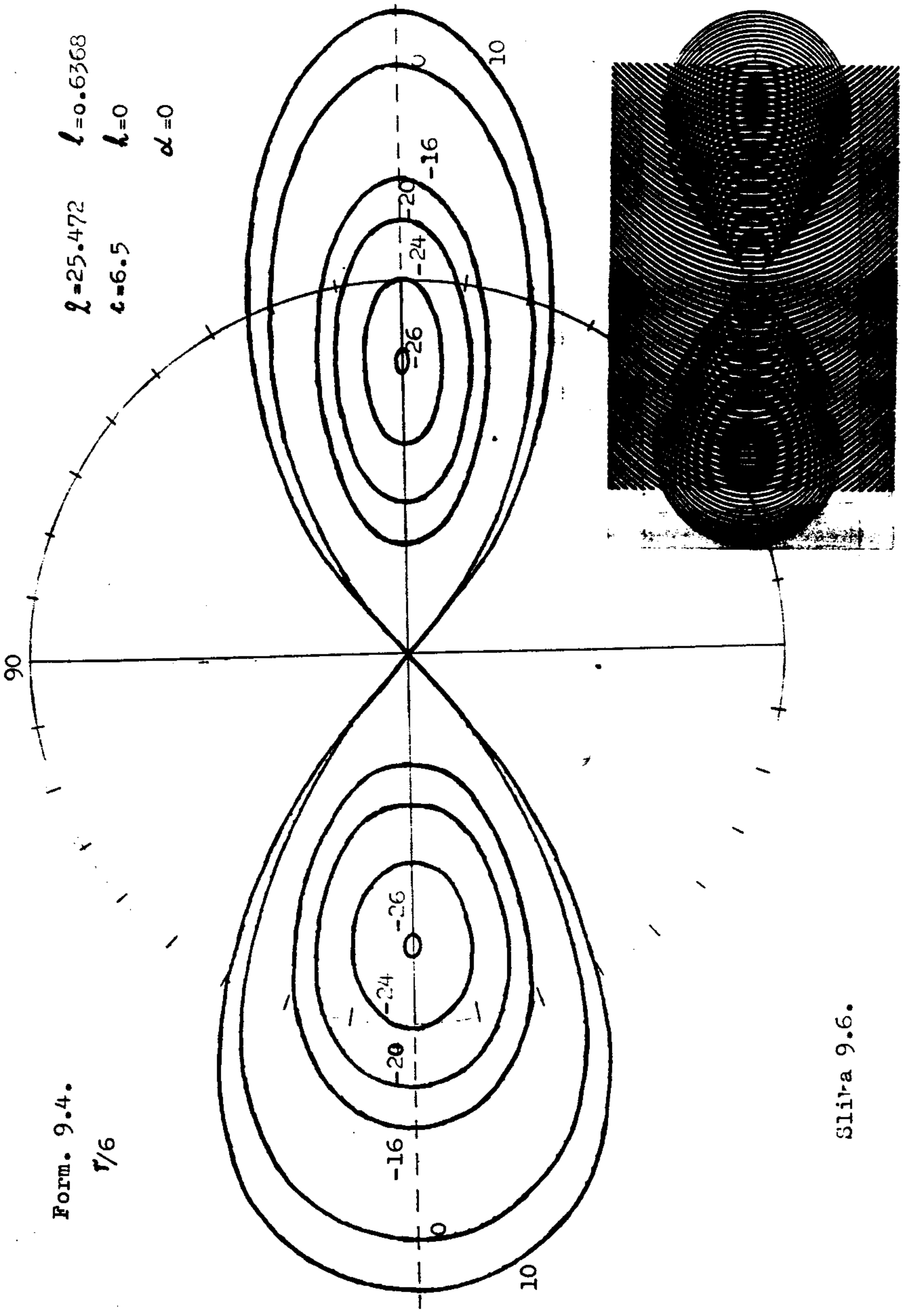
Kako se vladaju muare figure zakretanjem osi sistema lemniskata ako uzimamo neki drugi odnos izmedju parametara sistema, pokazivat će dalje razmatranje. Uzet ćemo npr. da parametar c lemniskate bude relativno veći u odnosu na parametre parabola, za razliku od prethodnih slučajeva. Slike 9.6, 9.7, 9.8 i 9.9 ilustriraju slučaj $g = 25.472$, $l = 0.6368$, $c = 6.5$, $\lambda = 0$ i $t = 0$ ali za različite kuteve zakretanja osi lemniskata.

Slika 9.6 je za $\alpha = 0$ i ona se ne razlikuje mnogo po obliku od slike 9.2, samo po broju linija sa $p < 0$ i po njihovim dimenzijama, zbog razlike u odnosima parametara.

Slika 9.7 je rješenje za $\alpha = 25^\circ$. Ako je usporedimo sa slikom 9.6, vidimo da s lijeve strane postoje dvije nove zatvorene linije u obliku "elipse" $p = -27$ i $p = -28$, a s desne strane su nestale "elipse" $p = -26, -25, -24, -23$ i -22 .

Daljim povećavanjem kuta α , s lijeve strane sve se linije otvaraju, a s desne strane se nastavlja izčezavanje "elipsi" sa $p < 0$, a kada desne linije sistema lemniskata počinju presjecati linije parabola sa negativnim rednim brojem m , onda se počinju pojavljivati nove muare figure u obliku zatvorenih linija. Te se mogu vidjeti kao crtkane linije na slici 9.8, koja ilustrira ovaj slučaj za $\alpha = 55^\circ$.

Daljim povećavanjem kuta α , linije lijeve strane



Form. 9.4.

$r/6$

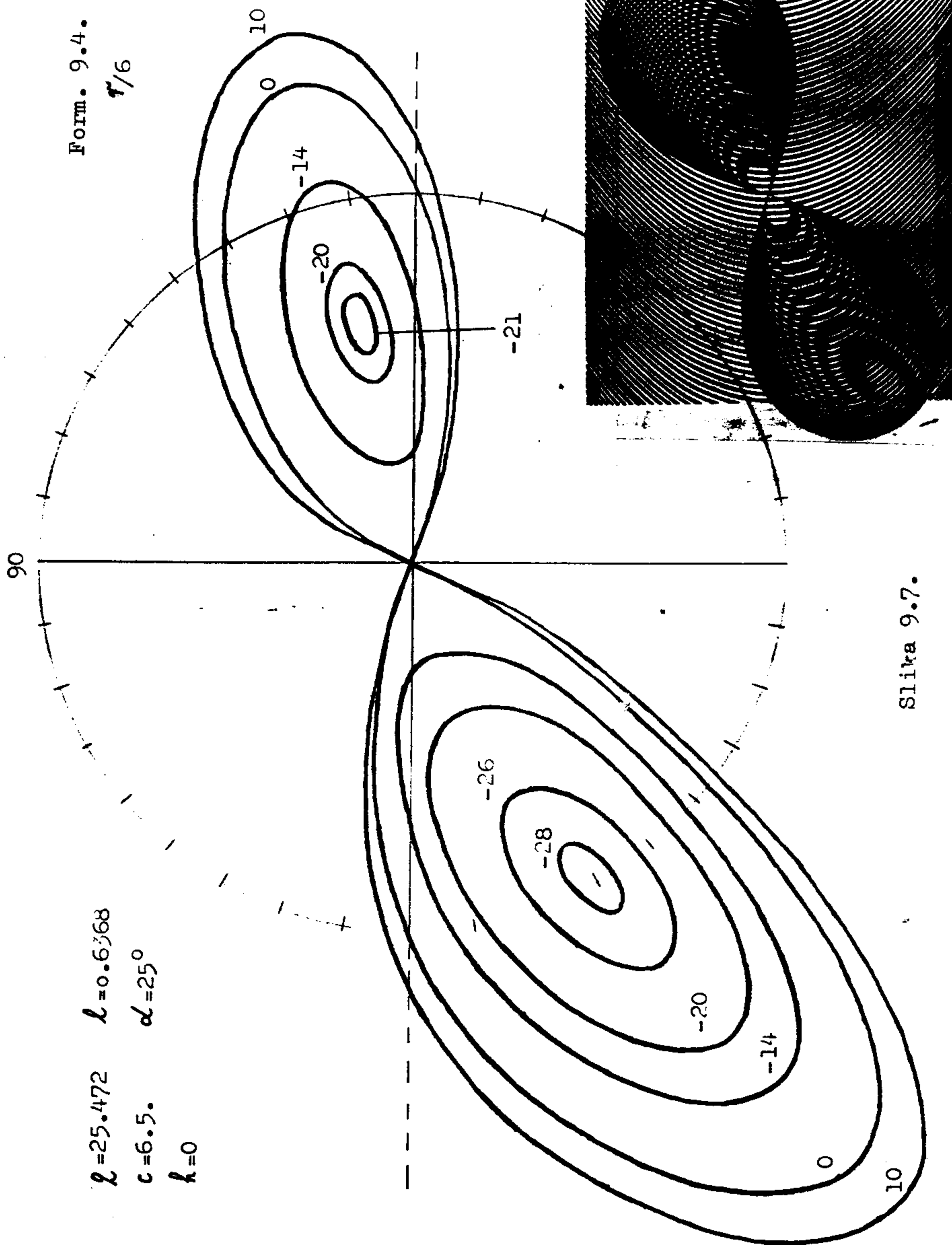
$l = 25.472$ $l = 0.6368$

$k = 6.5$ $k = 0$

$\alpha = 0$

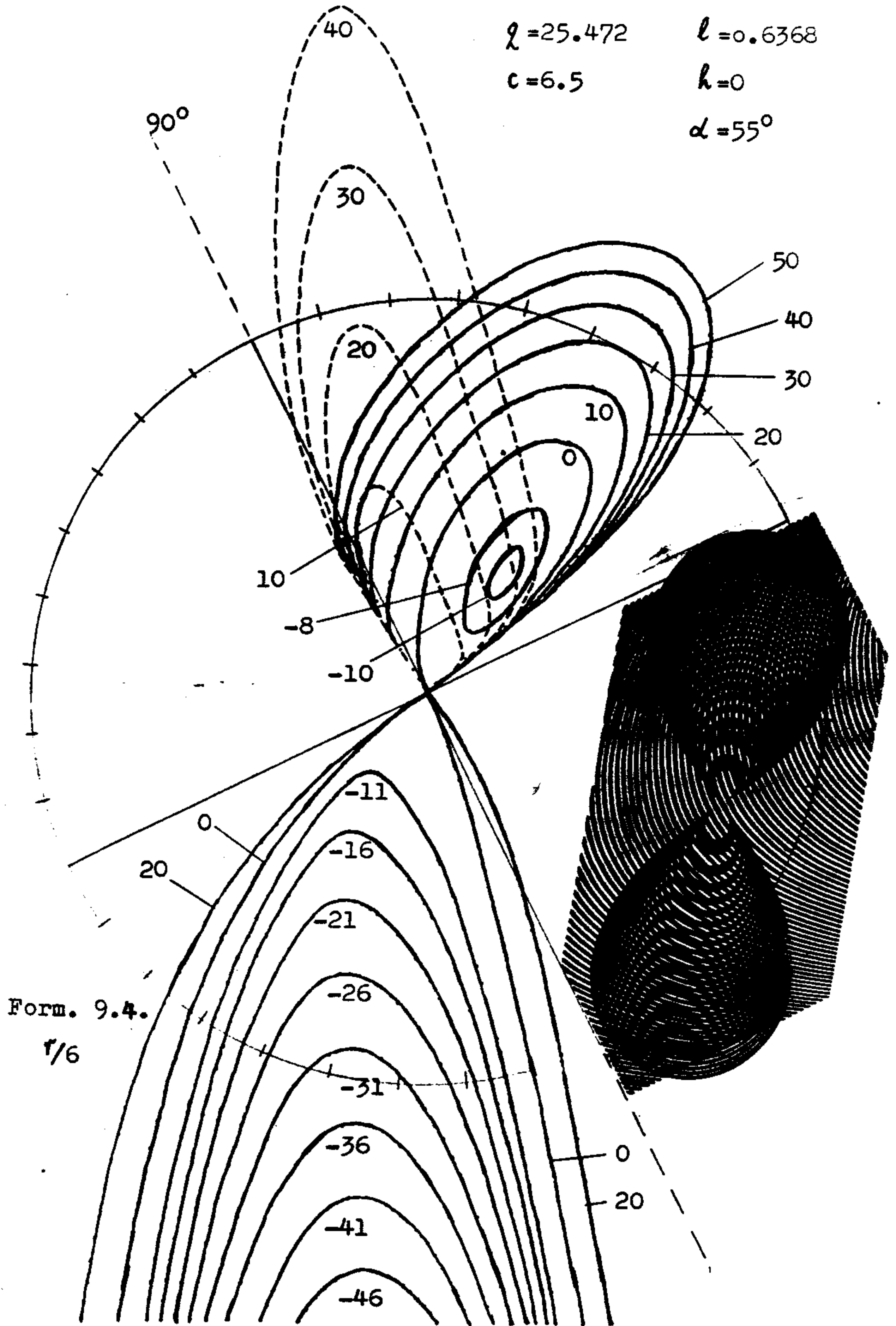
Slira 9.6.

Form. 9.4.
 $r/6$

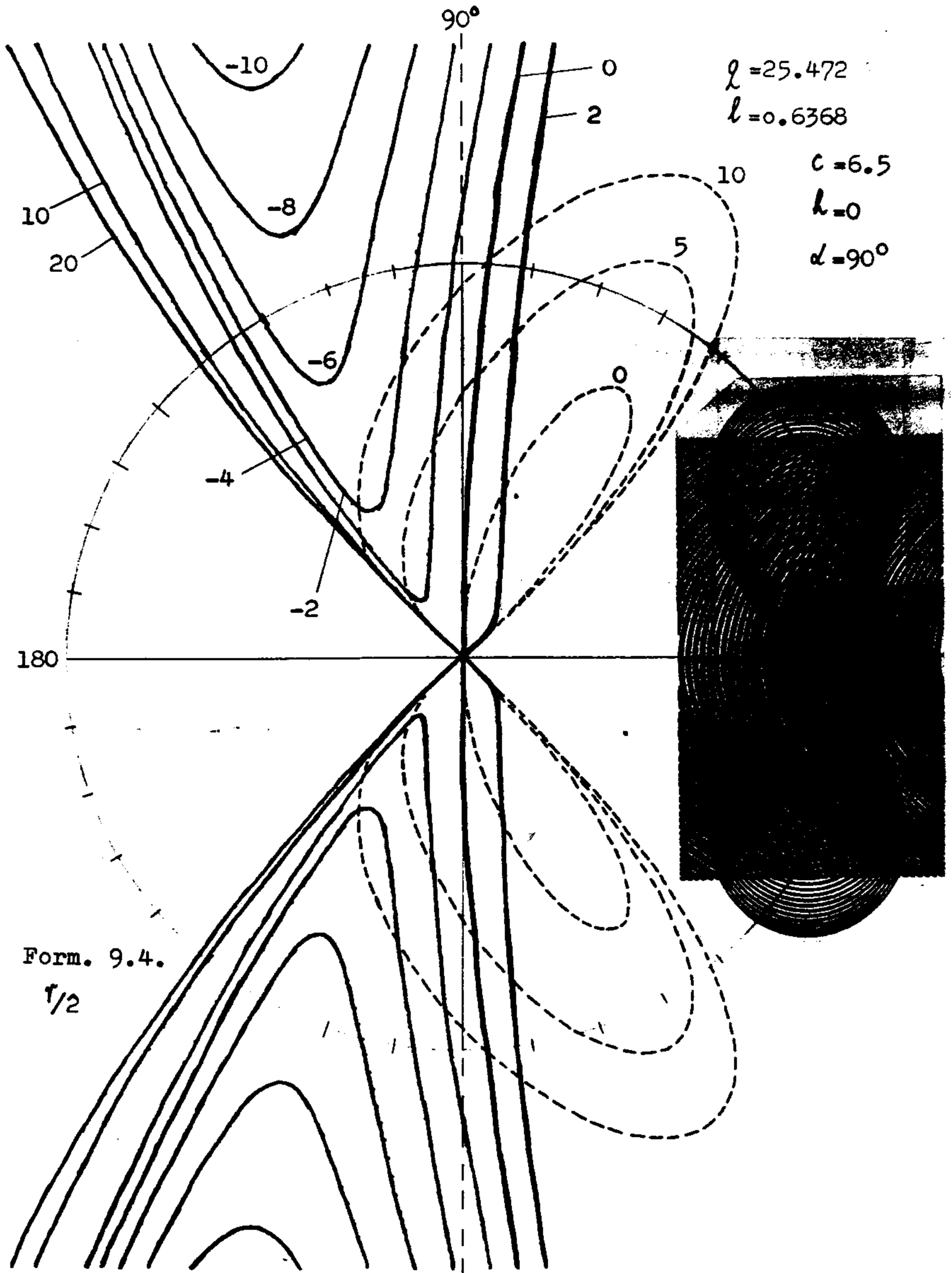


$l = 25.472$ $l = 0.6368$
 $c = 6.5$ $\alpha = 25^\circ$
 $k = 0$

Slira 9.7.



Slika 9.8.



Slika 9.9.

sistema lemniskata počinju da presjecaju linije sa pozitivnim rednim brojem u sistemu parabola, te zbog toga se i dolje pojavljuju nove muare figure u obliku zatvorenih linija sa $p \geq 0$. Na desnoj strani sistema lemniskata, "elipse" sa $p < 0$ se gube jedna po jedna, a linije sa $p \geq 0$ koje nastaju presjecanjem linija lemniskata sa linijama sistema parabola koje imaju negativni redni broj zatim se šire i u jednom trenutku se otvaraju na vrhu, a izmedju njih nadolaze nove muare figure u obliku otvorenih linija i dobivaju se za $p < 0$.

Slika 9.9 ilustrira ovu pojavu i predstavlja rješenje za $\alpha = 90^\circ$. Primjećuje se potpuna simetrija izmedju gornjeg i donjeg dijela slike.

Dalji korak će biti ispitivanje vladanja muare figura za slučaj da se sistem ekvidistantnih parabola pomjera u dva pravca u odnosu na centar sistema lemniskata. Ako se dogovorimo da centar sistema ekvidistantnih parabola bude na tačku koja je udaljena za h iz tjemena parabole sa rednim brojem $m=0$, onda će se ispitati slučaj kad se taj centar ne poklapa sa centrom zonskog sistema lemniskata. Uzet ćemo da ishodište koordinatnog sistema bude u centru sistema lemniskata, kut zakretanja osi toga sistema jednak nuli ($\alpha = 0$), a tzv. centar sistema ekvidistantnih parabola da bude na tačku (s, t) .

Pod ovakvim uvjetima će sistem lemniskata imati jednadžbu kao (1.29) uz $\alpha = 0$, dok će jednadžba sistema ekvidistantnih parabola u pravokutnim koordinatama glasiti

$$(y - t)^2 = 2 \cdot q \cdot (x - s - m \cdot l - h) \quad (9.5)$$

U polarnim koordinatama ta jednadžba će biti

$$-r^2 \sin^2 \varphi + 2 \cdot r \cdot (t \cdot \sin \varphi + g \cdot \cos \varphi) - [t^2 + 2 \cdot g \cdot (s + h)] = m \cdot l \cdot 2g \quad (9.6)$$

Zamjenom (1.29) uz $d = 0$ i (9.6) u uvjet za dobivanje muare figura (7.7), dobiva se

$$\frac{r^2}{c^2 \cos 2\varphi} \pm \frac{1}{2 \cdot g \cdot l} [-r^2 \sin^2 \varphi + r \cdot 2 \cdot (t \cdot \sin \varphi + g \cdot \cos \varphi) - (t^2 + 2 \cdot g \cdot (s + h))] = p$$

Kada se ova jednadžba sredi, uz zamjene

$$W = c^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi, \quad V = (t \cdot \sin \varphi + g \cdot \cos \varphi) \cdot c^2 \cos 2\varphi,$$

$$D = (t^2 + 2 \cdot g \cdot s + 2 \cdot g \cdot h) \cdot c^2 \cos 2\varphi \text{ i } K = 2 \cdot g \cdot l \cdot c^2 \cdot p \cdot \cos 2\varphi$$

dobiva se slijedeća jednadžba drugoga reda

$$r^2 \cdot (2gl \mp W) \pm r \cdot 2 \cdot V \mp D - K = 0 \quad (9.7)$$

čije rješenje glasi

$$r_{1;2} = \frac{\mp V \pm \sqrt{V^2 - (2 \cdot g \cdot l \mp W) \cdot (\mp D - K)}}{2 \cdot g \cdot l \mp W} \quad (9.8)$$

gdje, gornji predznak ispred V , W i D vrijedi za aditivne, a donji predznak za suptraktivne muare figure. Dva predznaka ispred kvadratnog korijena znače da imamo dva rješenja u jednadžbi (9.7), obzirom da je to jednadžba drugoga reda.

Pošto su u našim slučajevima efikasne suptraktivne muare figure, za numeričko računanje se koristi samo donji pred-

znak ispred V, W i D u formuli (9.8), a to je predznak " $+$ ". Međutim, kada se radi o presjecanju linija sistema lemniskata sa parabolama koje imaju pozitivni redni broj ($m > 0$), koristi se znak " $+$ " ispred V, W i D , a kada se one presjecaju sa parabolama koje imaju negativni redni broj ($m < 0$), stavlja se znak " $-$ " ispred V, W i D u formuli (9.8). Tako se stvarno dobiva ako se uzmu u obzir oba predznaka za redni broj parabola m pri nalaženju formule (9.8).

Prije što predjemo na razmatranje utjecaja promjene λ -a i λ' -a na muare linije, ispitivat ćemo kako na njih utječe parametar h , tj. udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od parabole sa rednim brojem $m=0$. Razumije se da h može imati vrijednosti od $0 < h < l$. Ispitivanje je izvršeno računskim putem pomoću formule (9.4) za $l=22.88$, $l=0.572$, $C=4.45$ i $\alpha=0$.

Ako je $h=0$, onda je ishodište koordinatnog sistema na tjemenu parabole sa rednim brojem $m=0$. U tom slučaju se dobiva slika 9.2, gdje se vidi simetrija što se tiče rednih brojeva muare linija s lijeve i s desne strane te slike: redni broj zatvorenih linija u obliku "elipse" je $p=-1, -2, \dots, -15$, a zatvorene linije sa tačkom u ishodištu su sa $p \geq 0$.

Kada se tjeme parabole $m=0$ pomjera udesno, a to znači kada raste veličina h , onda se događa to da zadnja "elipsa" $p=-15$ s desne strane se smanjuje sve dok ne izčezava potpuno u trenutku kada postaje $h=l$; s lijeve strane "elipsa" $p=-15$ raste a pojavljuje se nova "elipsa" sa rednim brojem $p=-16$. Zatim, s lijeve strane je "elipsa" $p=-1$ prešla u obliku zatvorene linije sa tačkom u ishodištu, a s desne strane zatvorena linija takvog oblika se pretvorila u "elipsu" ($p=0$).

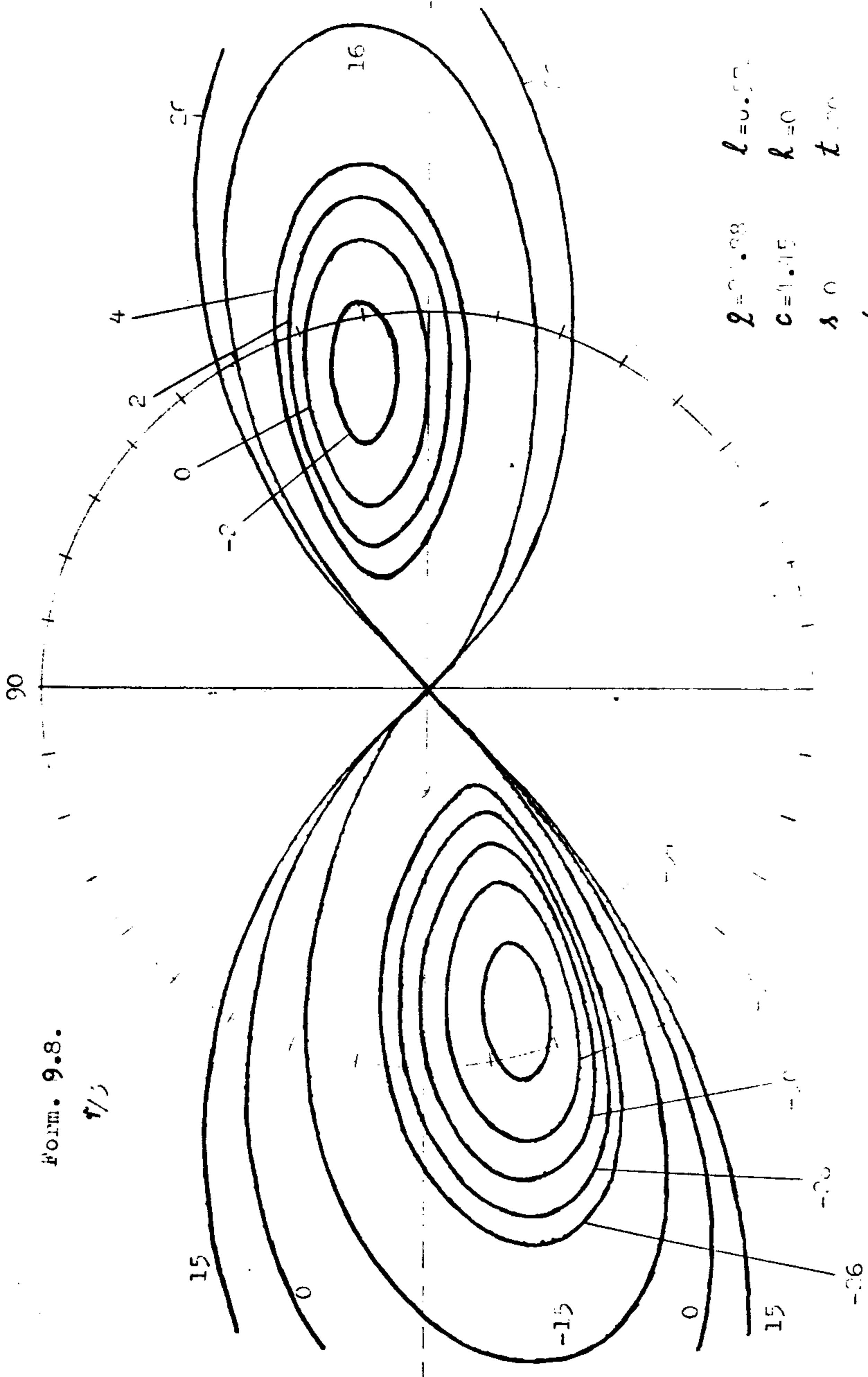
Vidi se da kad postaje $h=l$, svi redni brojevi muare linija su se pomakli za jedan, a broj karakterističnih linija je ostao isti: s lijeve strane ima opet 15 "elipsi" ($p=-16, -15, \dots, -2$) a s desne strane isto toliko ($p=-14, -13, \dots, 0$). To znači da kad se centar sistema lemniskata nalazi na tjemenu parabole $m=-1$ ($h=l$), slika muare figura je identična sa slikom kada se nalazio na tjemenu parabole $m=0$ ($h=0$), razlika je samo u rednom broju muare linija, koji se pomjerio za jedan.

Na potpuno isti način se muare figure vladaju kada se mijenja λ pri $t=\text{const}$. Povećavanjem λ -a (znači pomjeranjem sistema parabola duž osi udesno), s lijeve strane pojavljuju se nove "elipse" a one prethodne prelaze u oblik zatvorenih linija sa tačkom u ishodištu, a s desne strane zatvorene linije sa tačkom u ishodištu se pretvaraju u "elipse" i pridružuju se onim prvim koje izčezavaju. Treba još jednom konstatirati da ukupni broj "elipsa" za dotične strane ostaje uvijek isti. Taj broj zavisi, kao što je ranije rečeno, od međusobnih odnosa između parametara sistema koji se pokrivaju.

Na kraju ćemo analizirati vladanje muare figura kad se tzv. centar sistema parabola pomjera u vertikalnom pravcu, a zatim i u oba pravca.

Slika 9.10, koja je rezultat pokrivanja zonskog sistema lemniskata sa sistemom ekvidistantnih parabola sa karakteristikama istim kao kod slike 9.2, samo što je ovdje $t=20$ umjesto $t=0$, poslužit će za objašnjavanje prvog zadatka.

Eksperimentalno je potvrđeno da kad se "centar" sistema parabola, a to je tjeme parabole sa rednim brojem $m=0$, pušta da klizi duž vertikalne osi naviše od ishodišta (tj. kad se povećava t), onda s lijeve strane slike 9.2 pojavljuju se nove



$g = 0.98$ $h = 0.57$
 $c = 1.15$ $k = 0$
 $s = 0$ $t = 0$
 $\alpha = 0$

Form. 9.8.
r/s

Sliva 0.10.

"elipse" sa $p < 0$ a one prethodne se pretvaraju u zatvorene linije koje imaju tačku u ishodištu. S desne se strane događa obrnuto: zatvorene linije sa $p \geq 0$ koje imaju tačku u ishodištu se pretvaraju u "elipse" i idu ka uništenju kao one prethodne sa $p < 0$. Ovo dokazuje slika 9.10. Vidi se u njoj, s lijeve strane, da se već pojavila zadnja "elipsa" $p = -34$ (kad je $t = 0$ to je bila $p = -15$), a prva zatvorena linija koja ima tačku u ishodištu sada je već $p = -15$ itd. S desne strane se vidi da su se već izgubile "elipse" $p = -15$ pa sve do $p = -3$, a ostale su samo zadnje $p = -2$ i -1 . Zatvorene linije sa $p \geq 0$ su se sve do $p = 15$ pretvorile u "elipsu".

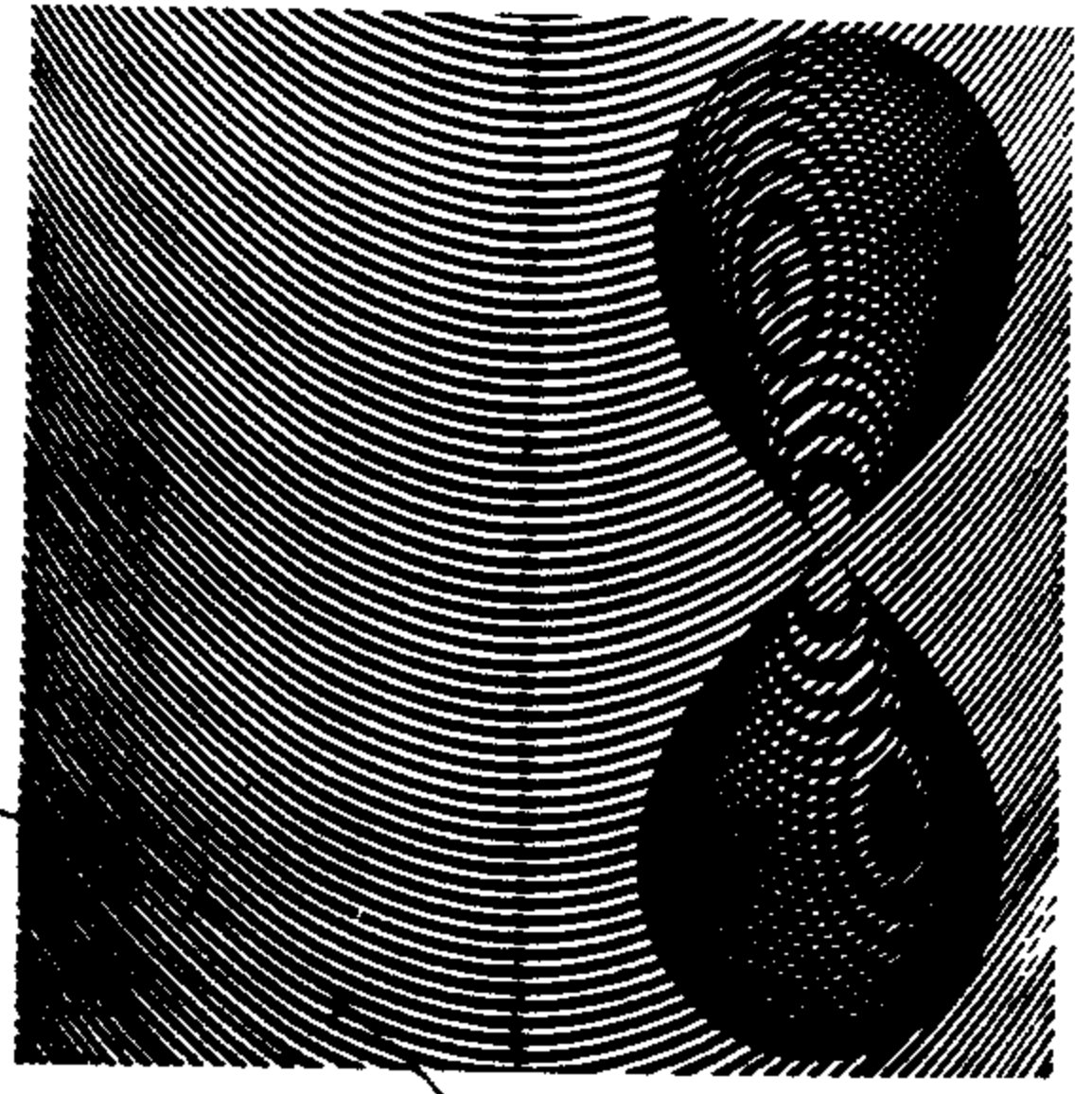
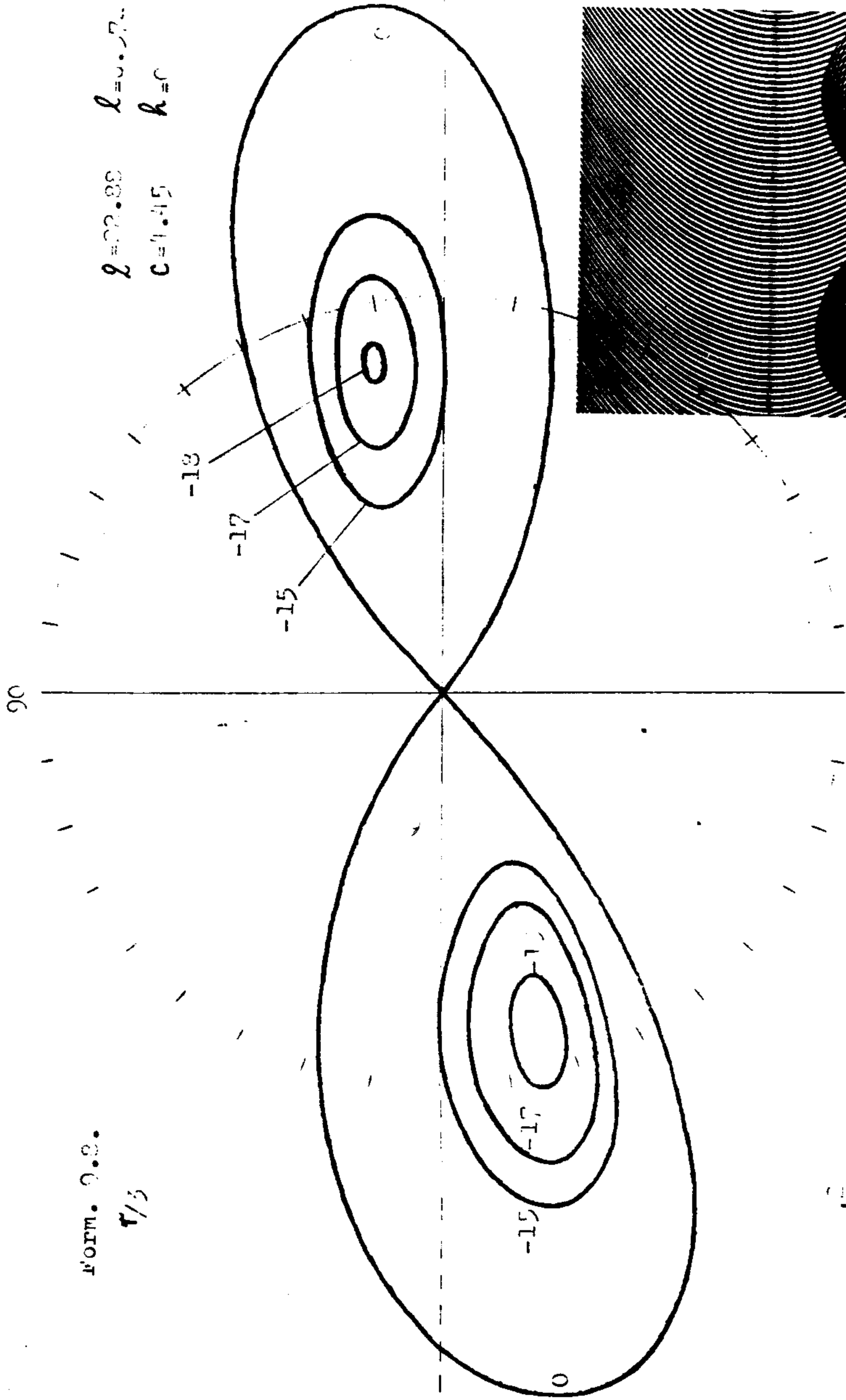
Sve ovo na prvi pogled izgleda da se događa zbog promjene veličine t . Medjutim, u stvarnosti ta veličina ne utječe u tolikoj mjeri. Na to će nas uvjeriti slijedeća slika 9.11, koja je nastala na osnovu numeričkih izračunavanja pomoću formule (9.8), pa i fotografija uz njih. Može se primjetiti prema toj slici da pomjeranjem "centra" sistema parabola naviše (povećava se t), ishodište koordinatnog sistema se nije odvojilo od parabole sa rednim brojem $m = 0$, a to znači da se "centar" sistema parabola pomjerio i horizontalno ulijevo prema formuli $s = -t^2/2g$.

Na slici 9.11 se vidi da nijedna zatvorena linija sa tačkom u ishodištu nije se pretvorila u "elipsu" ili obrnuto. Kada ovu sliku usporedimo sa slikom 9.2, može se opaziti da su se ovdje pojavile neke nove "elipse", i to: s lijeve strane $p = -16, -17, -18$ i -19 , a s desne strane $p = -16, -17$ i -18 . Objašnjenje za ovo se može dati tako što su parabole duž svoje osi rjedje nego na drugim mjestima. Sistem lemniskata u ovom slučaju pokriva područje gdje su parabole gušće, te prema tomu

Form. 2.2.

$r/3$

$l=02.88$ $l=0.7$
 $C=1.45$ $h=0$



$$h = - \frac{t^2}{2g} \quad t=0$$

Slika 0.17.

dogadja se to što je već objašnjeno pomoću tabele 9.2, prema kojoj kad su parabole gušće i broj "elipsi" će biti veći pri pokrivanju sa sistemom lemniskata i obrnuto. Ovako se može objasniti i ona razlika što s lijeve strane slike 9.11 ima 19 "elipsi" a s desne strane ih ima 18. Pažljivim posmatranjem, može se opaziti da su "elipse" s lijeve strane sistema lemniskata ispod njegove osi, gdje su linije parabola gušće, a s desne strane su iznad te osi, gdje su linije parabola rjedje. Zbog toga, za $t=20$, s lijeve strane postoji jedna "elipsa" više nego s desne strane slike 9.11.

Sad, kada se vratimo na slici 9.10, na osnovu datih objašnjenja, može se reći da sve te promjene u odnosu na sliku 9.2 nisu se dogadjale zbog promjene veličine t , već zbog toga što, kad sistem parabola klizi tačno po jednoj vertikali, onda centar zonskog sistema lemniskata odnosno ishodište koordinatnog sistema, prelazi u oblasti gdje postoje druge parabole, a pomjerio se od parabole sa rednim brojem $n=0$.

Jedinu promjenu što povećavanje t prouzrokuje u vladanju muare figura je to što s lijeve strane te figure prelaze u polju ispod osi sistema lemniskata, a s desne strane one prelaze iznad te osi.

Svaki drugi položaj (s, t) "centra" sistema ekvidistantnih parabola u odnosu na centar zonskog sistema lemniskata odnosno na ishodište koordinatnog sistema, može se objasniti pomoću karakterističnih slučajeva koji su riješeni gore. Razumije se, u svim ovim problemima, veliki utjecaj imaju parametri obaju sistema u medjusobnim kombinacijama.

Treba napomeniti da^{je} i ovdje postignuta potpuna saglasnost izmedju teorijski dobijenih i eksperimentalno potvrđenih rezultata.

10. PRIMJENA MUARE FIGURA U METROLOGIJI

10.1 Postavljanje problema

Fenomeni muare, formirani od raznih mrežica i njihova primjena su još uvijek problem koji nije dovoljno istraživan i analiziran. U zadnje vrijeme se muare metoda sve više primjenjuje u oblasti metrologije, za precizno i praktično mjerenje i u istraživanjima nekih fizičkih fenomena.

Najveću primjenu muare fenomeni su našli u oblasti optičke metrologije. Na porast mogućnosti primjene kao i na njihovu tačnost i osjetljivost, vrlo mnogo utiče optička obrada podataka, koja je u današnje vrijeme razvijenosti elektronike dostigla vrlo veliki stepen.

U metrološkim problemima krupnih tijela - u njihovim izučavanjima i iscrpnim mjerenjima, prilikom primjene optičkih metoda, njihova obimnost kao i dubina objektiva su nekoliko od poteškoća koje se mogu riješiti kontur - muare-om. Konvencionalne metode kao što su rentgenoskopske, radiografske itd., imaju karakter parcijalnog - segmentarnog istraživanja. Dakle, kontur - muare kao i ostale metode, pojavljuju se kao metode koje imaju prednost, pored ostalog, i sa mogućnošću dobijanja simultanih informacija za različite dijelove i organe.

U ovom poglavlju će biti prikazana neka metrološka istraživanja iz oblasti deformacije tijela primjenom muare fe-

nomena. Naime, pomoću muare figura se mogu dobiti važne informacije o nekom tijelu, na osnovu kojih se mogu postaviti potrebne karakteristike za njihovo izučavanje. Zbog obima koji zahtjeva ova problematika, bit ćemo zadovoljni da nekoliko eksperimentalnih istraživanja prezentiramo i analiziramo kvalitativno. Kvantitativno istraživanje ovih problema je moguće napraviti uz primjenu mikrodensitometra i kompjuterske tehnike, i nadalje optičkom obradom podataka, ali to izlazi iz okvira ovog rada.

Mi ćemo se ovdje pozabaviti ljudskim tijelom kao predmetom istraživanja u oblasti deformacije. Naime, tijelo čovjeka kao živi organizam, demonstrira metrološke probleme posebno zbog teške reproducibilnosti eksperimenta, zbog simultane prostorne i vremenske promjene "u" i "van" ravni. Zatim se ovdje najviše izražava nehomogenost, nelinearnost i obimnost problema. Međutim, nedestruktivna metoda koja je ovdje primjenjena, pogodna je za rješavanje navedenih problema.

Nadalje, u okvir ovog rada ulaze i rezultati istraživanja u vezi deformacije jednog konkretnog dijela stroja kao i mjerenja nastalih promjena na transparentnoj kapi koja se nalazi na staklenoj ploči.

Sva ova istraživanja izvršena su u Laboratoriji za Holografiju Odseka za fiziku PMF-a u Prištini.

10.2. Izrada i projektiranje tragova na predmet ispitivanja

Izrada i projektiranje tragova na predmet koji se istražuje je vrlo važan problem u optičkoj metrologiji. Ovo umnogome zavisi od optičkih osobina tijela. Treba istaći da se ovdje kao smetnje pojavljuju refleksija i hrapavost ("speckle") po-

vršine tijela, mada se speckle - interferometrija bazira baš na hrapavost tih površina.

Postavljanje tragova na objektu sama po sebi implicira činjenicu da je to jedan nedestruktivni postupak.

Postoje nekoliko metoda za izradu i projektiranje tragova na predmet koji se istražuje. U prvom redu možemo ih podijeliti na kontaktne i nekontaktne optičke metode.

Kontaktne metode se baziraju na postavljanje raznih elemenata na tijelo koje se analizira, kao što je npr. crtanje tačaka ili tragova na objektu.

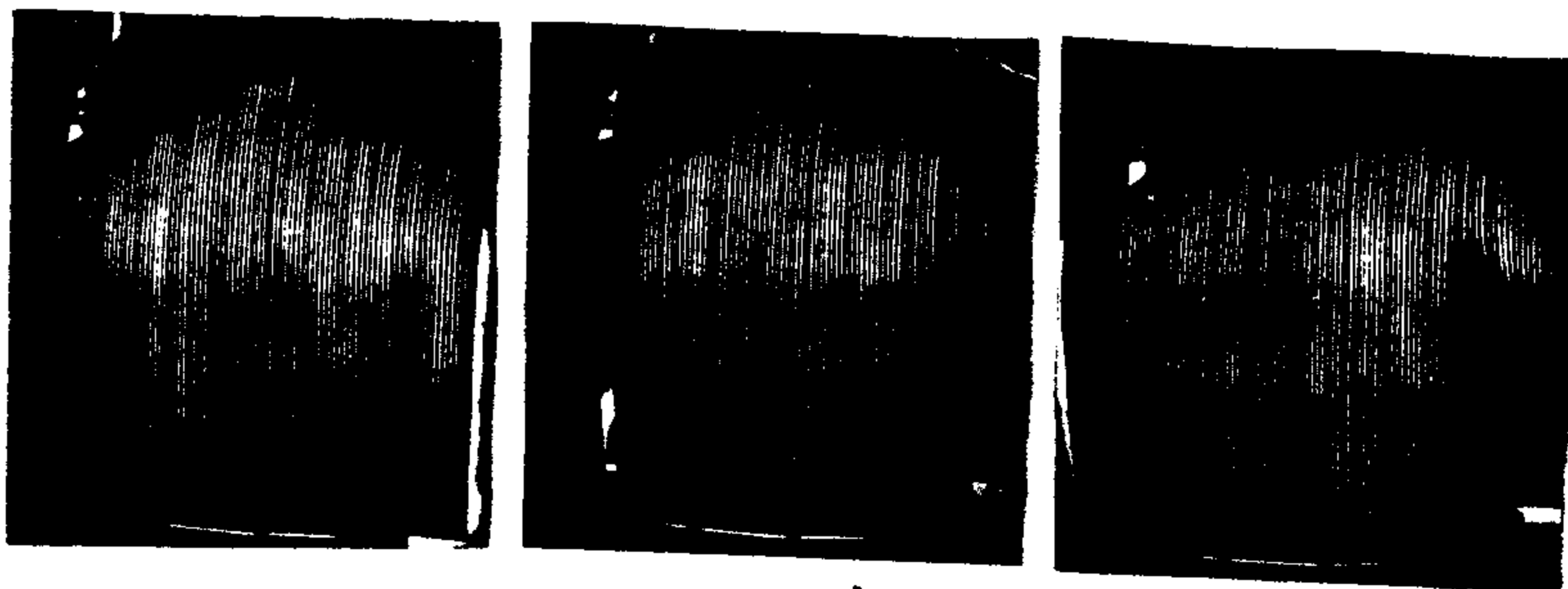
Jedna od nekontaktnih i nedestruktivnih metoda je muare. Stim u vezi, optičko ispitivanje površine predmeta je neophodan preduvjet za uspješnu primjenu metode muare ili holografskih metoda.

Projektiranje ekvidistantnih linija na površinu tijela čovjeka i dobivanje referentnih rešetaka (negativa) je problem koji je nadalje tretiran.

Iz aparata je projektirana mrežica na tijelo čovjeka koje je postavljeno na točno odredjenim pozicijama. Te pozicije su odredjene pomoću nekoliko parametara koji su praćeni tokom svih mjerenja i koji obezbjedjuju zadovoljavajuću reproducibilnost. Jedan od parametara je to da čovjek stoji na dvije vage koje su pokazale odredjene vrijednosti za odredjene pozicije tijela. Drugi parametri su položaji ruka i glave, koji su mjereni i točno ponovljeni u odnosu na pod, kao i sveukupni položaj izmedju izvora svijetlosti, predmeta ispitivanja kao i posmatrača.

Slika 10.1 prikazuje mrežice koje su dobijene pod gore opisanim uvjetima za pet različitih pozicija tijela. Ove

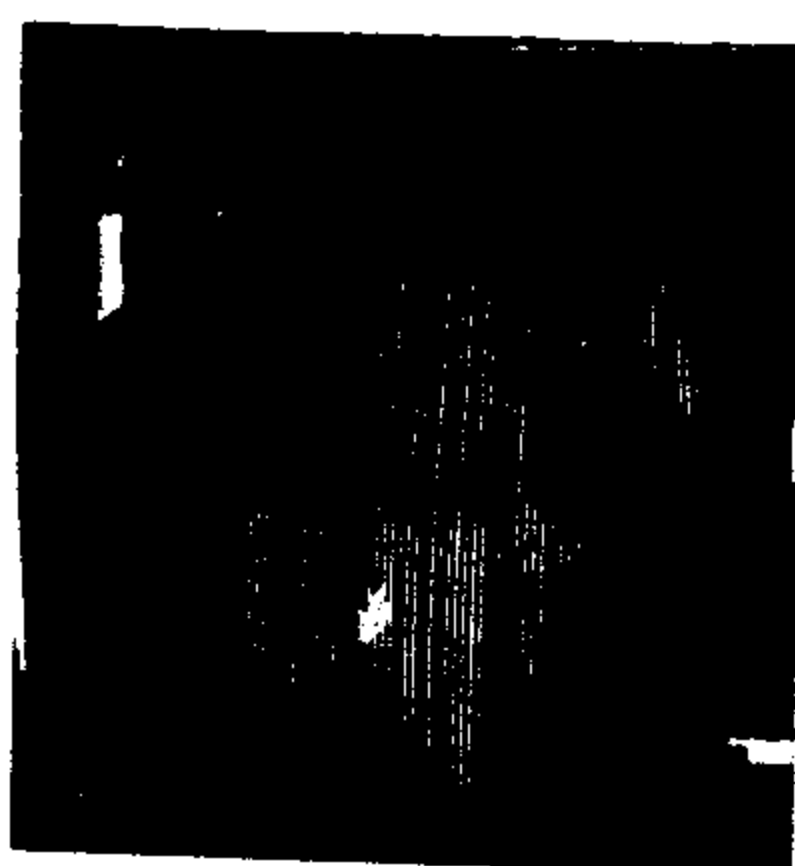
mrežice nose u sebi veliki broj informacija o tijelu koje se ispituje i spremne su za dalje istraživanje.



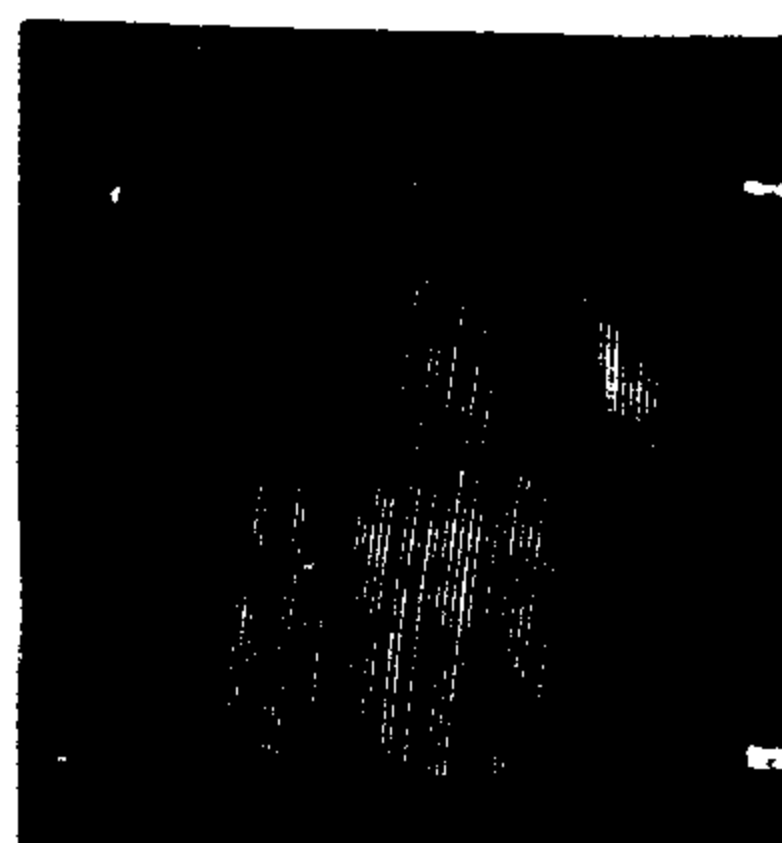
a)

b)

c)



d)



e)

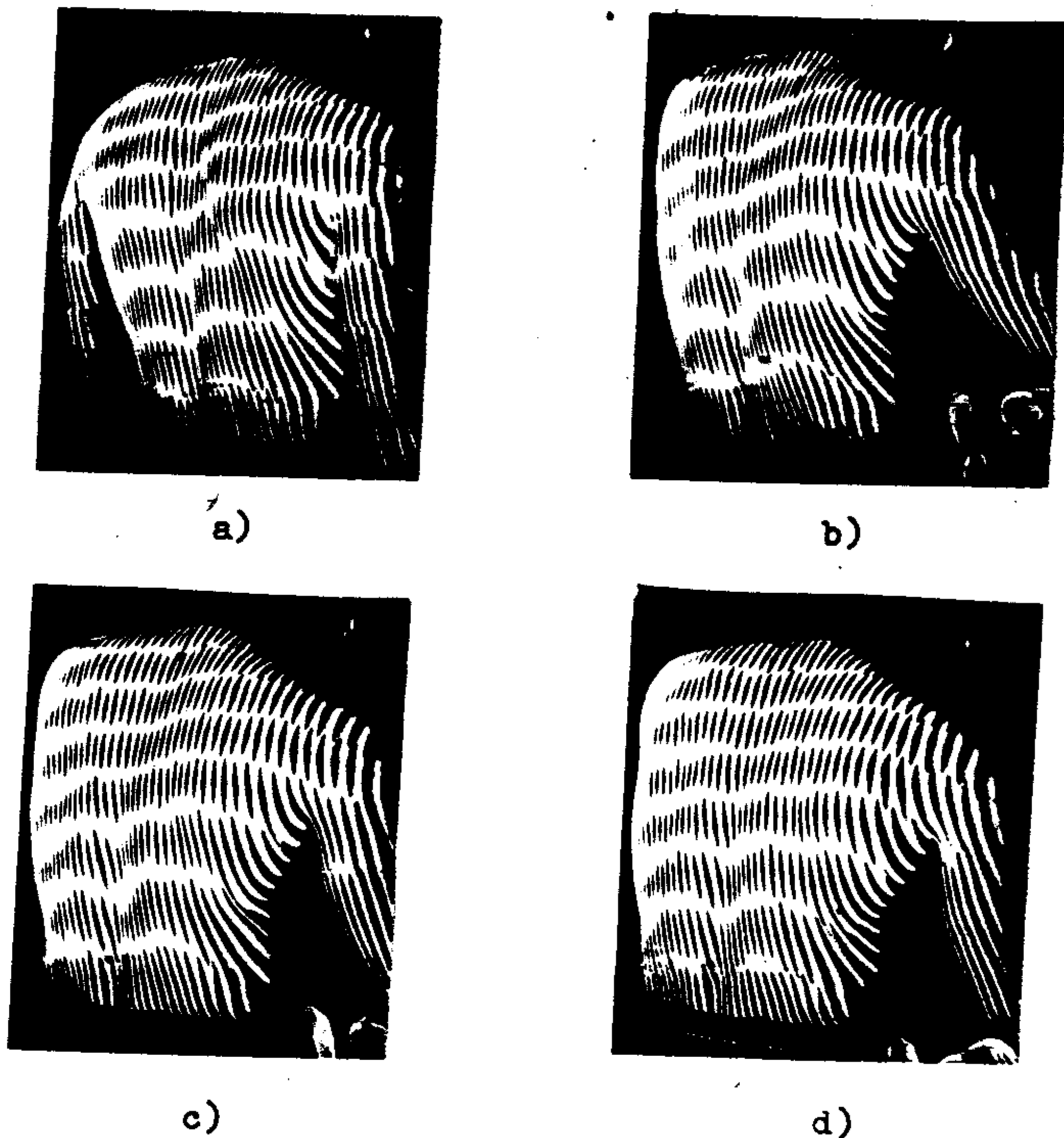
Slika 10.1.

Na slikama možemo lako primijetiti da su, zbog obimnosti tijela, dobijene mrežice koje u nekim dijelovima imaju promijenjenu gustoću linija. Treba napomenuti da za istraživanje tih dijelova najpogodnije su mrežice sa promjenjenom gustoćom linija, kao što je npr. sistem zonskih lemniskata.

10.3. Projektiranje dveju rešetaka i opservacija muare figura

Ako na tijelo koje se ispituje projektiramo istovremeno dvije rešetke iz dvaju aparata, onda se dobivaju različite muare figure već prema položaju tijela. Uvjeti projekcije su isti kao u prethodnom odeljku, samo što je ovdje sa strane prvog projektora dodan još jedan, koji projektira drugu rešetku.

Rezultati eksperimentalnog rada ovakvom metodom predstavljani su na slici 10.2. Opservacijom muare figura na snimci-



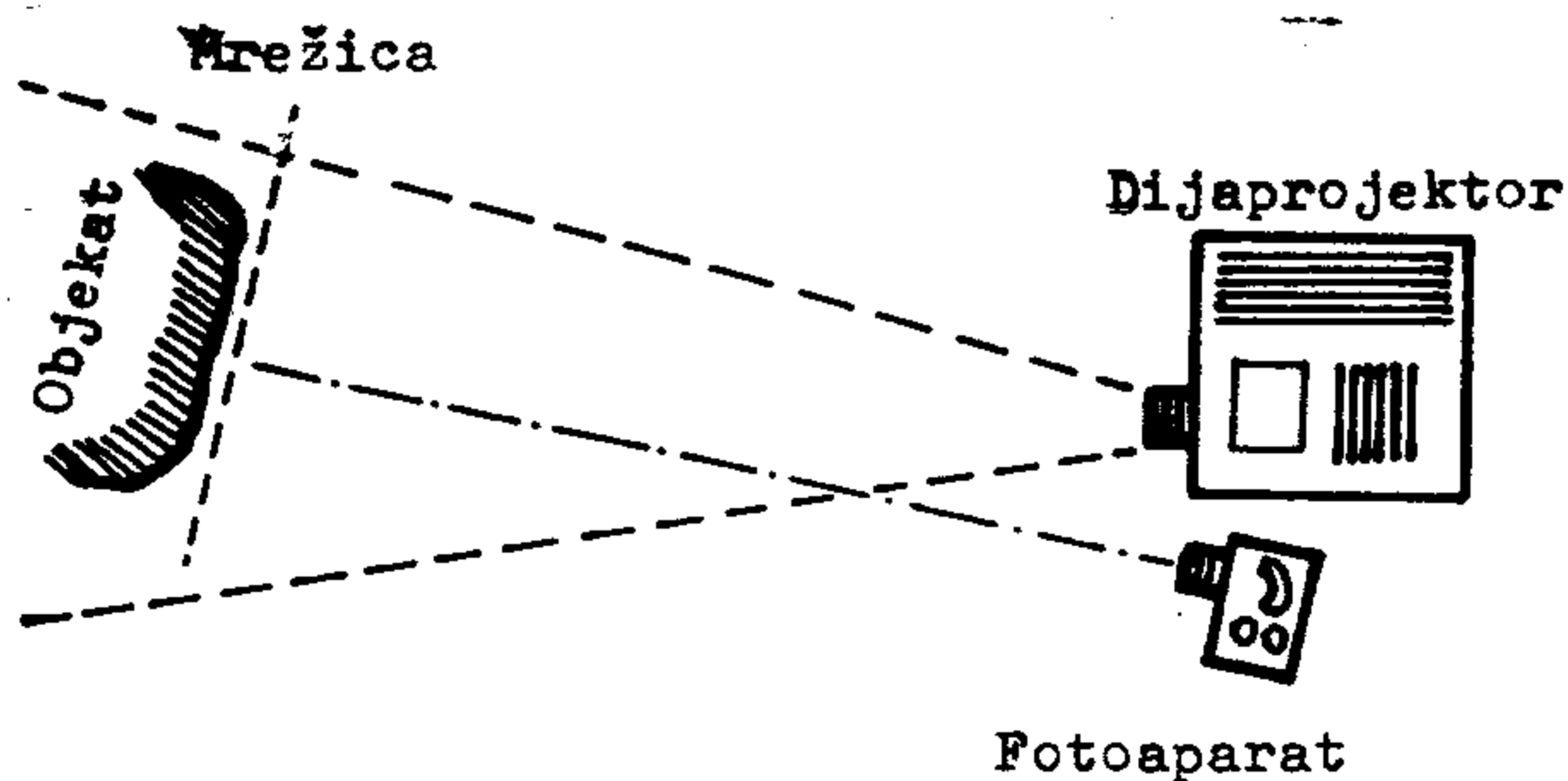
Slika 10.2.

ma ove slike možemo konstatirati da one dobijaju formu ovisno o položaju, u našem slučaju simulirano deformisanog tijela.

10.4. Shadow muare metoda

Shadow metoda je jedna od metoda koja nam pruža topografske informacije u vezi neregularnosti površina koje se pojavljuju na tijelu prilikom njegove deformacije. U ovom slučaju se ravna mrežica stavlja vrlo blizu objektu koji se istražuje tako da se fenomen muare dobija iz osnovne mrežice i sjene mrežice reflektirane iz objekta čije informacije istražujemo.

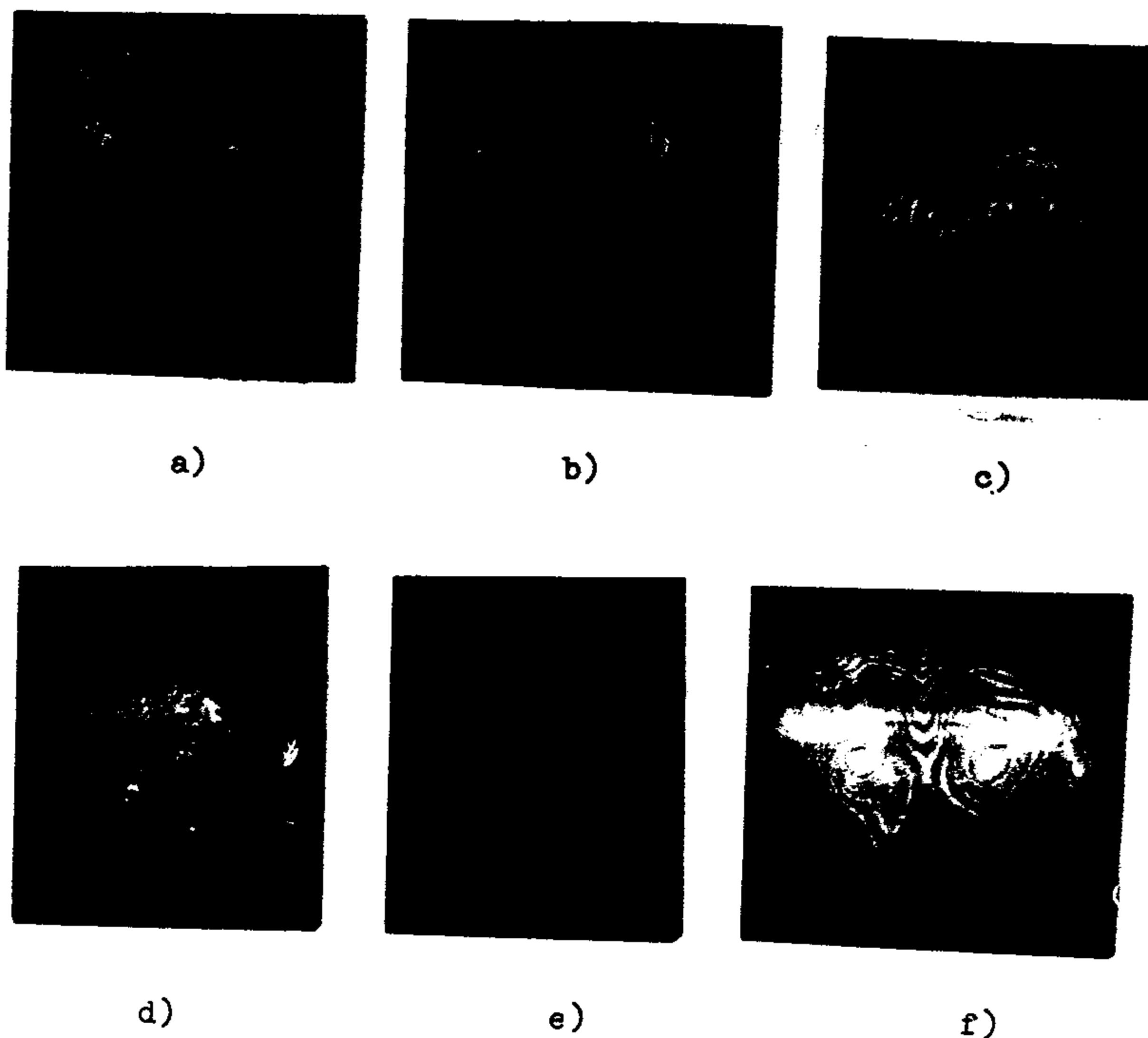
U eksperimentalnom radu kao objekt koji se istražuje uzeto je ljudsko tijelo. Za dobijanje što bolje refleksije tijelo je namazano jednim tankim slojem bijele boje. Kao izvor nekoherentne svjetlosti upotrebljen je dijaprojektor, čiji je snop dosta širok i širio se linearno na mrežicu i tijelo. Tokom eksperimenta vodilo se računa o tom da pravac posmatranja bude normalan na površinu mrežice (slika 10.3).



Slika 10.3.

Rezultati ovog eksperimentalnog rada su prikazani na slici 10.4. Slika 10.4.a predstavlja rezultat registriranja muare fenomena za položaj tijela za koji se pretpostavlja da je ne-deformirano, a nadalje su slike tijela kao rezultat deformacije

koja se za eksperimentiranje mogla samo simulirati. Slike 10.4.a do 10.4.e su napravljene za iste položaje tijela prema parametrima opisanim u odeljku 10.2. (slika 10.1), a slika 10.4.f je napravljena kada čovjek stoji na jednoj nozi.

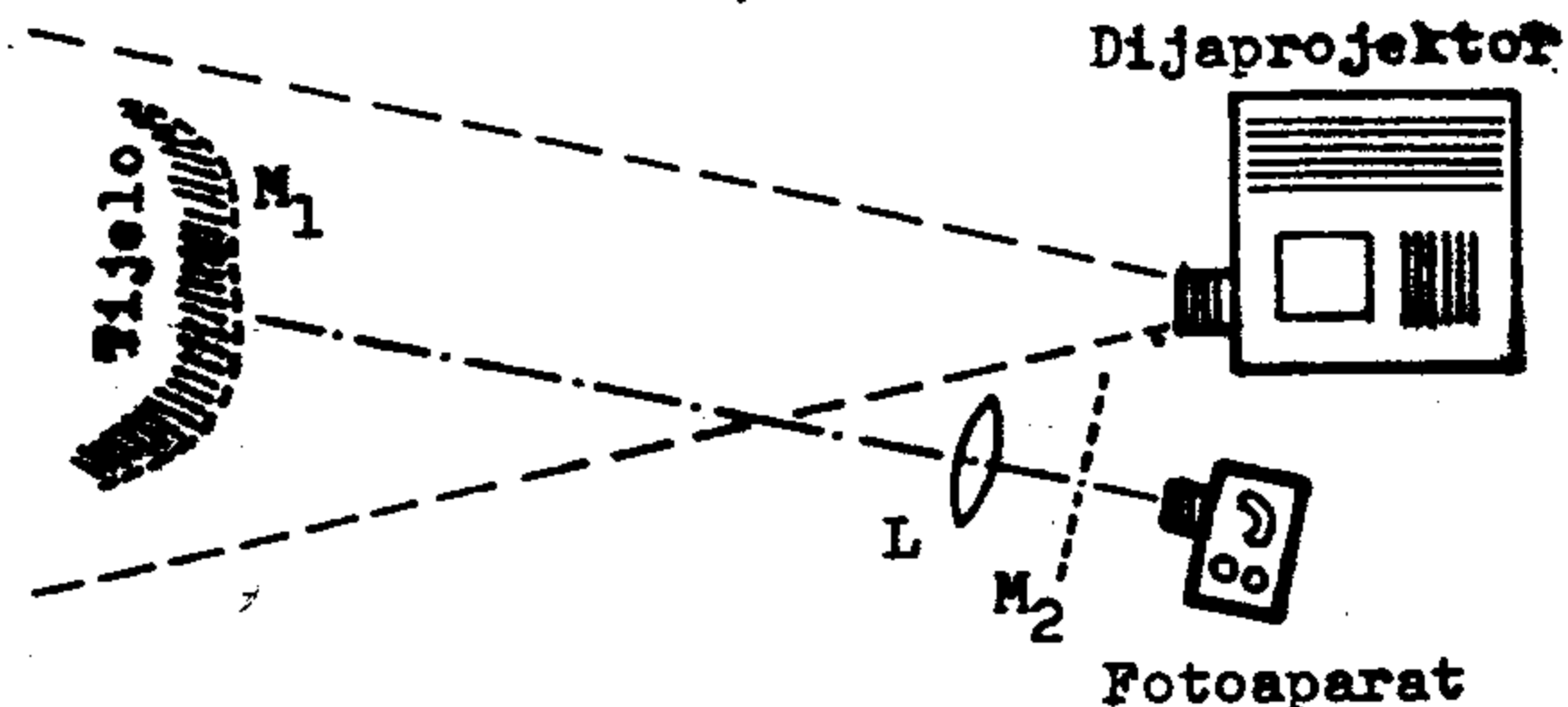


Slika 10.4.

Može se primijetiti da se topografija muare figura mijenja u ovisnosti od položaja tijela koje se deformira, a to može itekako poslužiti za dobijanje značajnih informacija o tom tijelu, koje se mogu optički obraditi i opskrbiti željene metrološke ciljeve.

10.5. Projekciona metoda

Druga vrlo važna primjena muare figura u metrologiji koja koristi topografske informacije za izučavanje deformacije površina tijela bazira se na projekciji muare figura. Naime, ovom se metodom svjetlost pušta da pada na objekt koji se istražuje preko jedne mrežice, koja se na takav način projektira na samo to tijelo, kao što je opisano u odeljku 10.2. Zatim se osmatranje vrši preko druge rešetke, čime je zadovoljen uvjet dobijanja muare figura. Aparatura za ovu svrhu prikazana je šematski na slici 10.5, gdje je M_1 prva mrežica projektirana iz

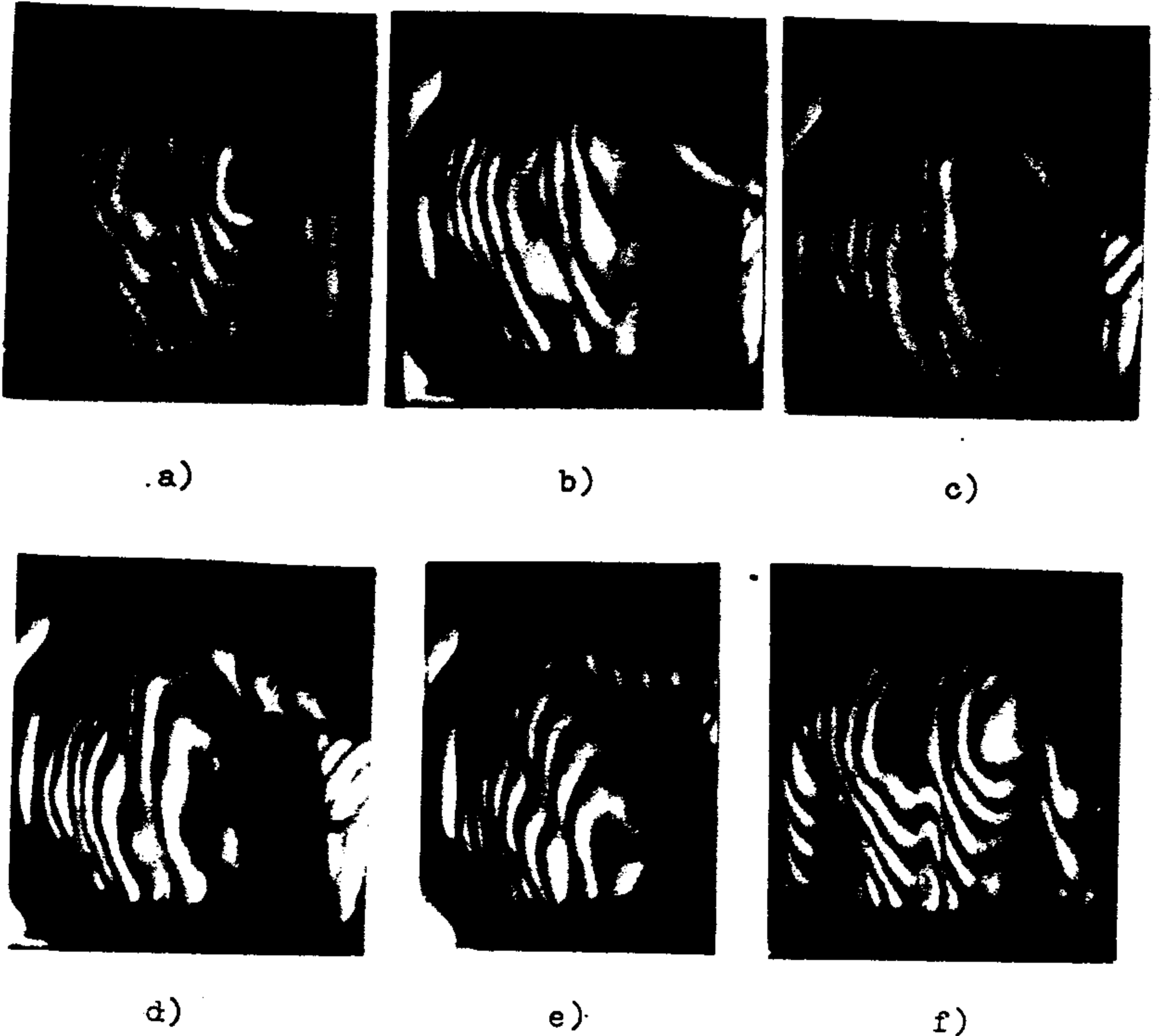


Slika 10.5.

dijaprojektora, a koja sadrži u sebi informacije o tijelu koje se ispituje, dok je M_2 druga mrežica preko koje se vrši osmatranje.

Na tijelo je projektirana mrežica sa ekvidistantnim paralelnim pravcima a u ovom dijelu eksperimenta osmatranje se vrši preko druge mrežice koja je takodjer sastavljena od takvih pravaca, a kvalitativni rezultati su predstavljeni na slici 10.6. Dio a te slike predstavlja rezultat pretpostavljenog

nedeformiranog tijela, a na ostalim dijelovima se mogu vidjeti promjene muare figura već prema tačno određenog položaja tijela za koje se uzima da je tijelo deformirana. Na slici 10.6.f može se vidjeti kako one izgledaju kada čovjek stoji na jednoj nozi.

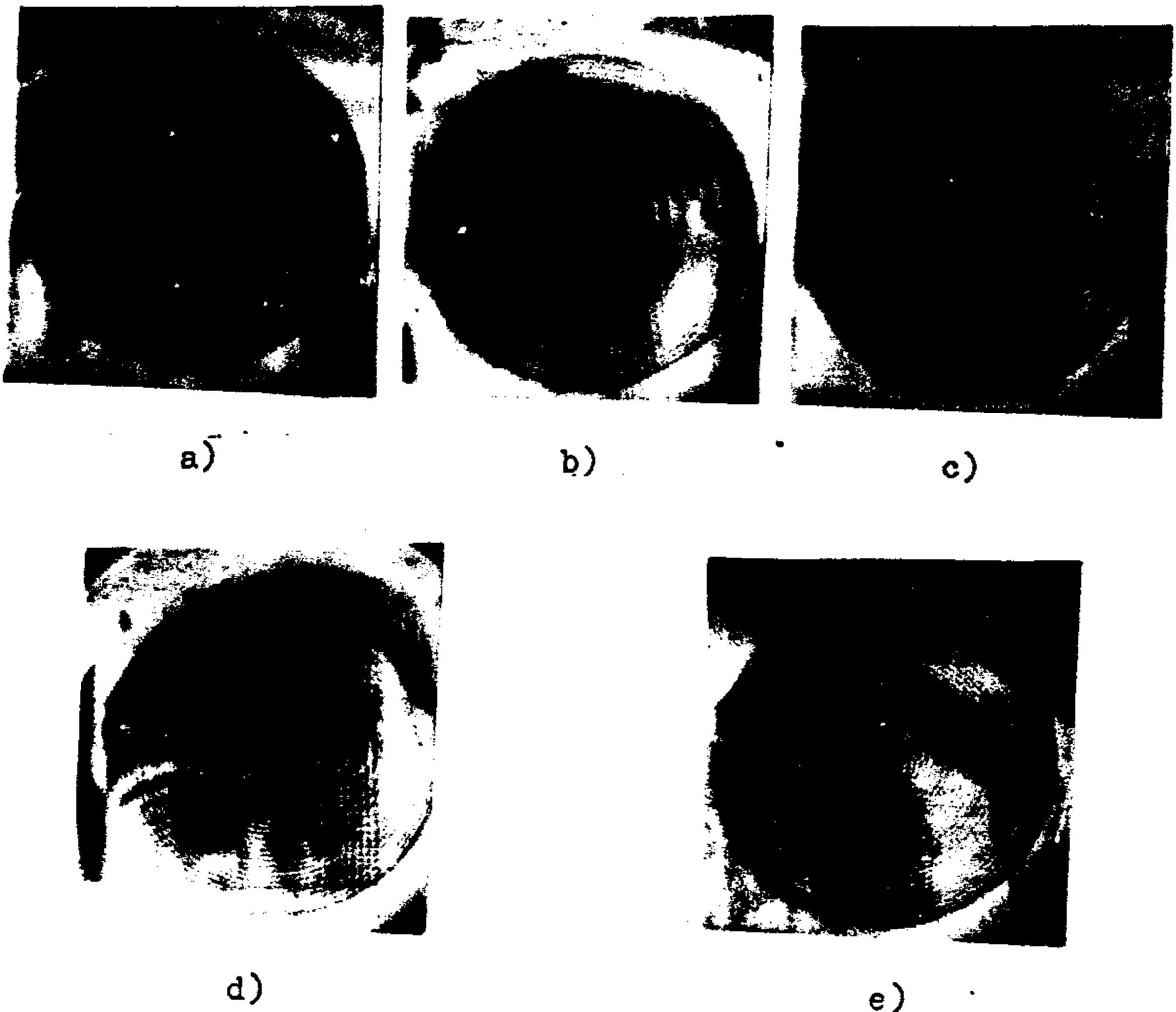


Slika 10.6.

Može se reći da, ako se sa slike 10.6.a dobiju informacije za tijelo koje nije deformirano, onda se iz ostalih snimaka mogu dobiti, u ovom slučaju kvalitativno, potrebni elementi koji karakterišu deformirano tijelo. Ako se želi riješiti

kvantitativno, onda se ti podaci moraju registrirati dotičnom aparaturom, a zatim treba vršiti njihovu optičku obradu, što vodi ka traženim rezultatima.

Slijedeći korak u istraživanju je bio postavljanje drugih vrsta mrežica na mjestu M_2 slike 10.5. Ovdje su pomoću slike 10.7 predstavljeni rezultati kada je na tom mjestu stavljena mrežica sa koncentričnim ekvidistantnim krugovima.

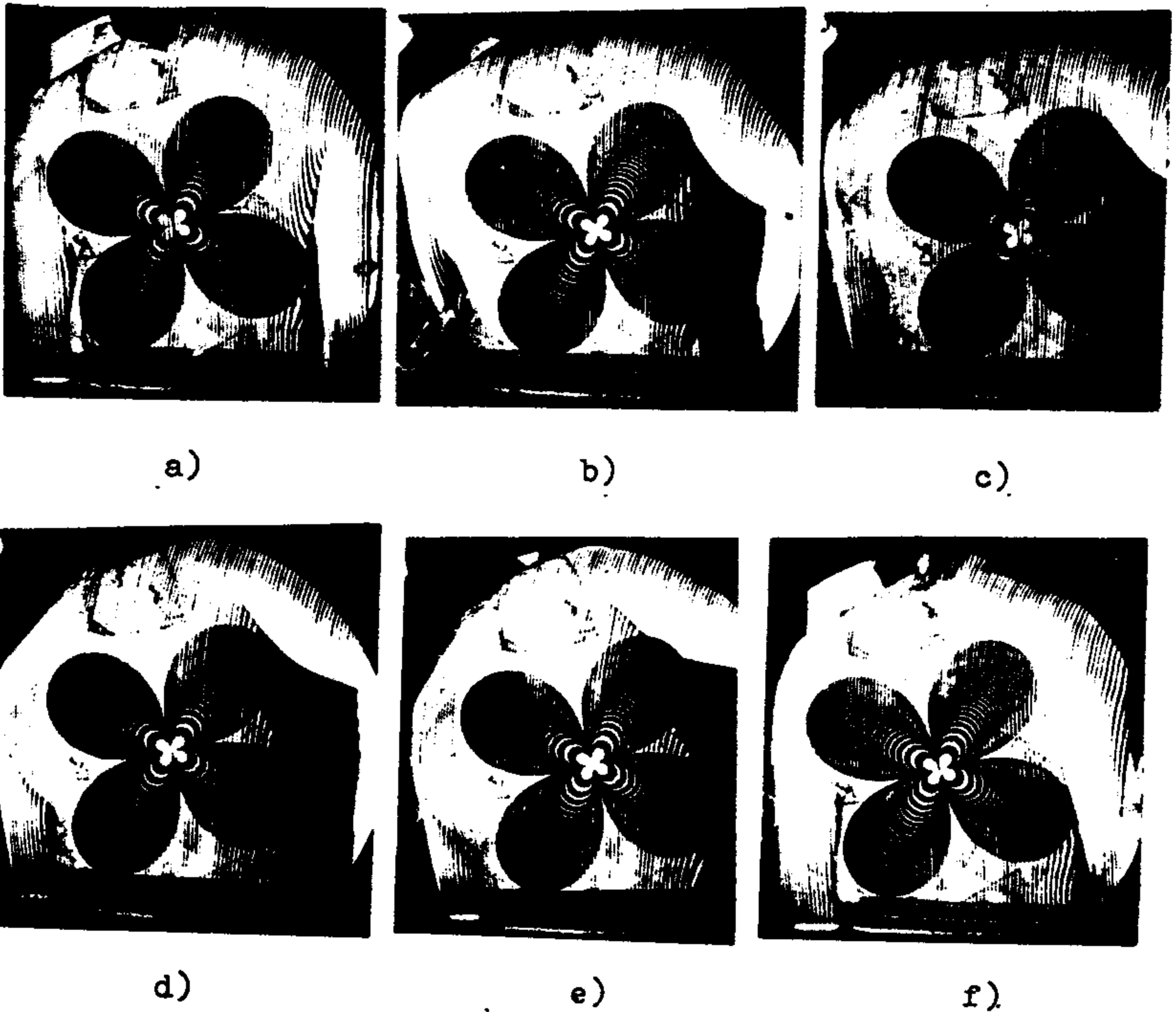


Slika 10.7.

Jedna vrlo karakteristična primjena ove metode je u medicinskoj defektologiji, kada se želi istraživati deformacije tijela čovjeka zbog stalnih i sličnih pokreta pri svakodnevnom radu, kao što je npr. slučaj zubara.

10.6. Muare kombinacije mrežice lemniskata sa projek-
tiranom ekvidistantnom mrežicom

Kada se na mjestu M_2 slike 10.5 postavi mrežica zon-
 skih lemniskata, dobiju se rezultati koji su predstavljeni na
 slici 10.8. Položaji tijela, a time i mrežice M_1 koja nosi
 informacije o njemu i koja je i u ovom slučaju dobijena projek-
 tiranjem mrežice paralelnih ekvidistantnih pravaca na to tije-
 lo, mijenjani su točno po određenim parametrima kao na pret-
 hodnim slučajevima. Da bi se posmatrale muare figure u dva smje-



Slika 10.8.

ra, na mjestu M_2 slike 10.5 stavljene su dvije unakrsne mrežice zonskih lemniskata koje ne smetaju jedna drugoj.

Tokom ovakvih eksperimentiranja se konstatira da sistem zonskih lemniskata nema neke veće prednosti u ovoj oblasti u odnosu na mrežice sa ekvidistantnim linijama. Mora se ovdje istaći jedna prednost zonskog sistema lemniskata, što je karakteristično za veliki broj zonskih mrežica, a to je da su one prikladnije za istraživanje deformacija na rubovima trodimenzionalnih površina, gdje nelinearnost dolazi najviše u izražaju.

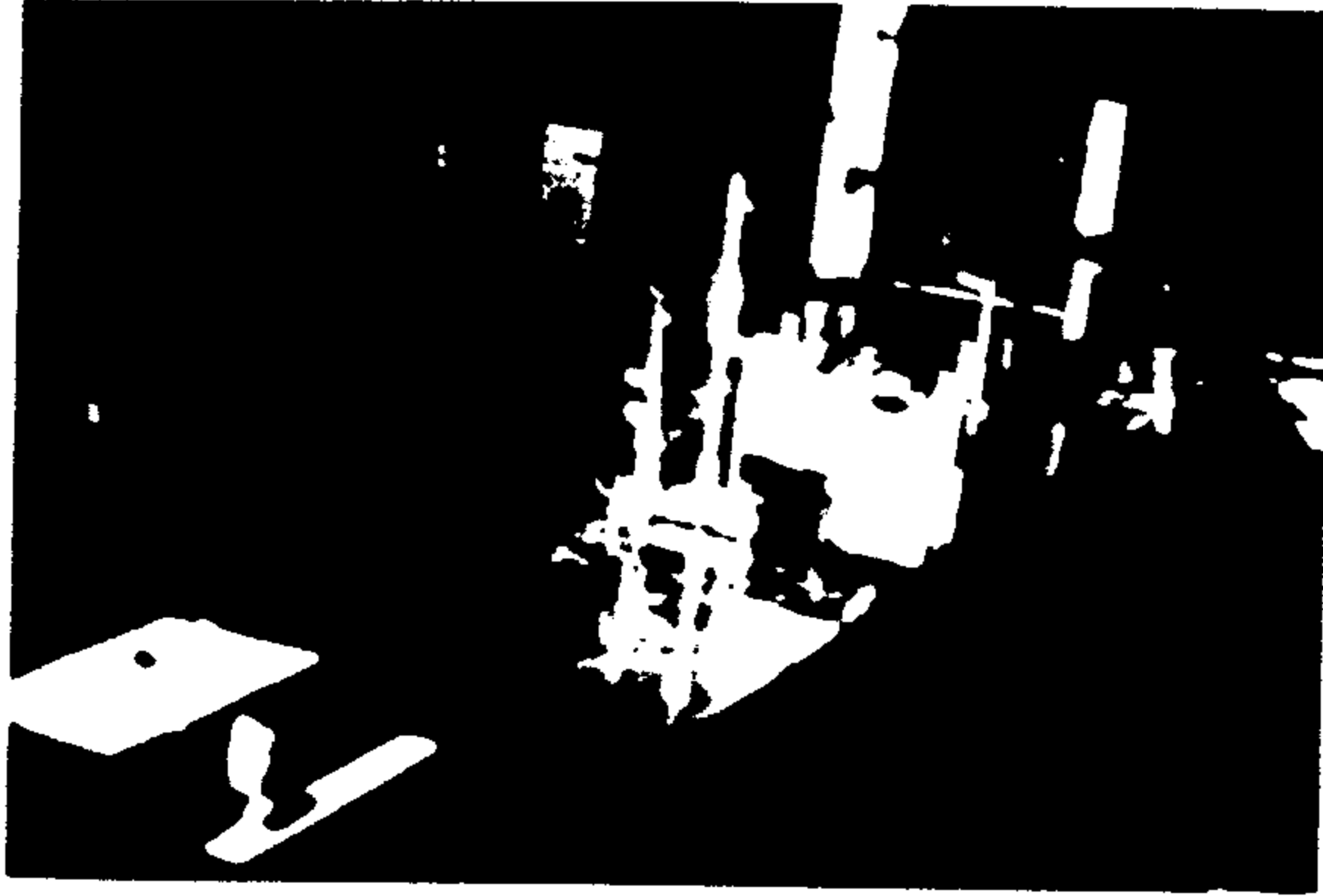
10.6.1. Prednost ovih mjerenja nad konvencionalnim mjere-

njima. Tijelo čovjeka kao predmet istraživanja u metrološke svrhe primjene muare figura je danas vrlo aktuelno u medicini. Muare figure koje nastaju na ljudskom tijelu su, kao i obično, vrlo osjetljive na vrlo male promjene. Unutarnje bolesti kao i povrede u ljudskom organizmu daju neke promjene na njenoj vanjskoj površini, a kada se tu dobiju muare figure metodom koja je gore opisivana, onda je jasno da se može dobiti veliki broj informacija, koje mogu poslužiti za tačnu dijagnozu bolesti. Ova metoda mjerenja se danas sve više uvodi u medicini i polako potiskuje jednu konvencionalnu metodu kao što je rentgenska dijagnostika u nekim slučajevima. Najznačajnija prednost muare metode je u njenoj vrlo dobroj osobini što nema nikakve štetnosti po ljudski organizam.

10.7 Mjerenje deformacija odredjenog dijela stroja

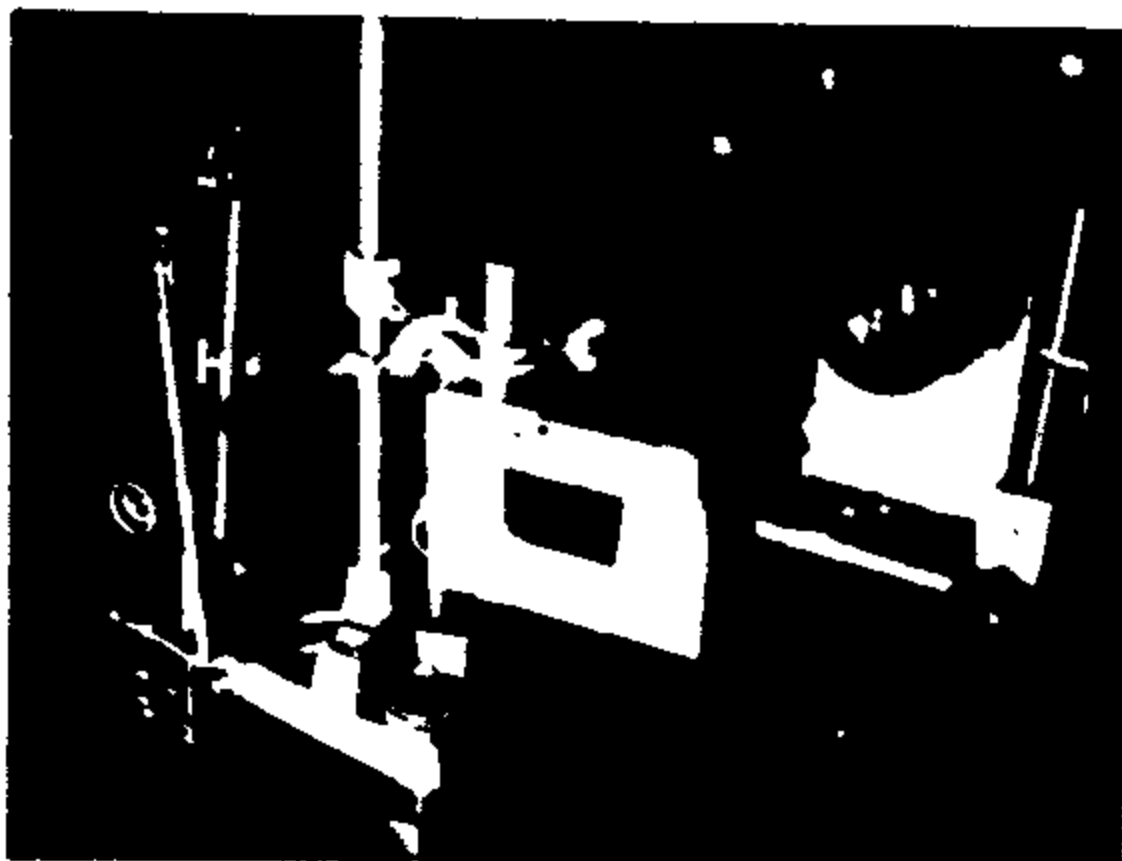
U daljem radu na eksperimentu je pokazano da je muare metoda vrlo efikasna u polju izučavanja deformacija tijela pri

svakodnevnom praktičnom radu. U tom cilju korišćena je aparatura čija je fotografija prikazana na slici 10.9. Kao izvor svjetlosti korišćen je dijaprojektor a kao predmet istraživanja je-



Slika 10.9.

dan detalj iz stroja. U toku eksperimenta korišćena je i jedna leća (slika 10.10) kojom je adaptirana prostorna frekvencija mrežice sa ciljem da se vizuelizacija spomenutih deformacija

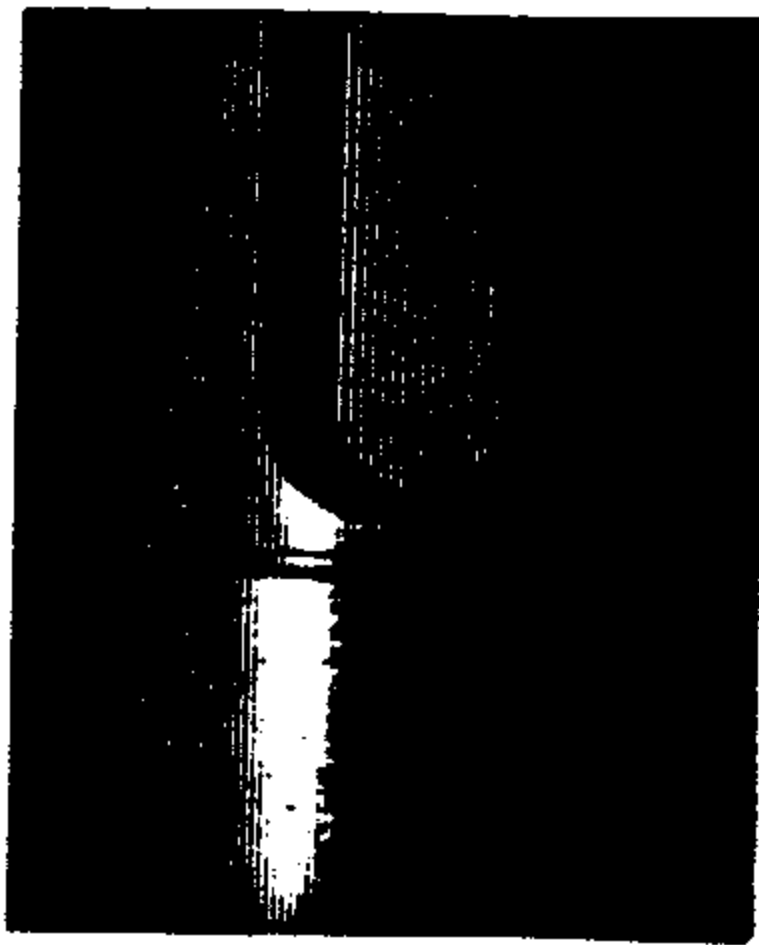


Slika 10.10.

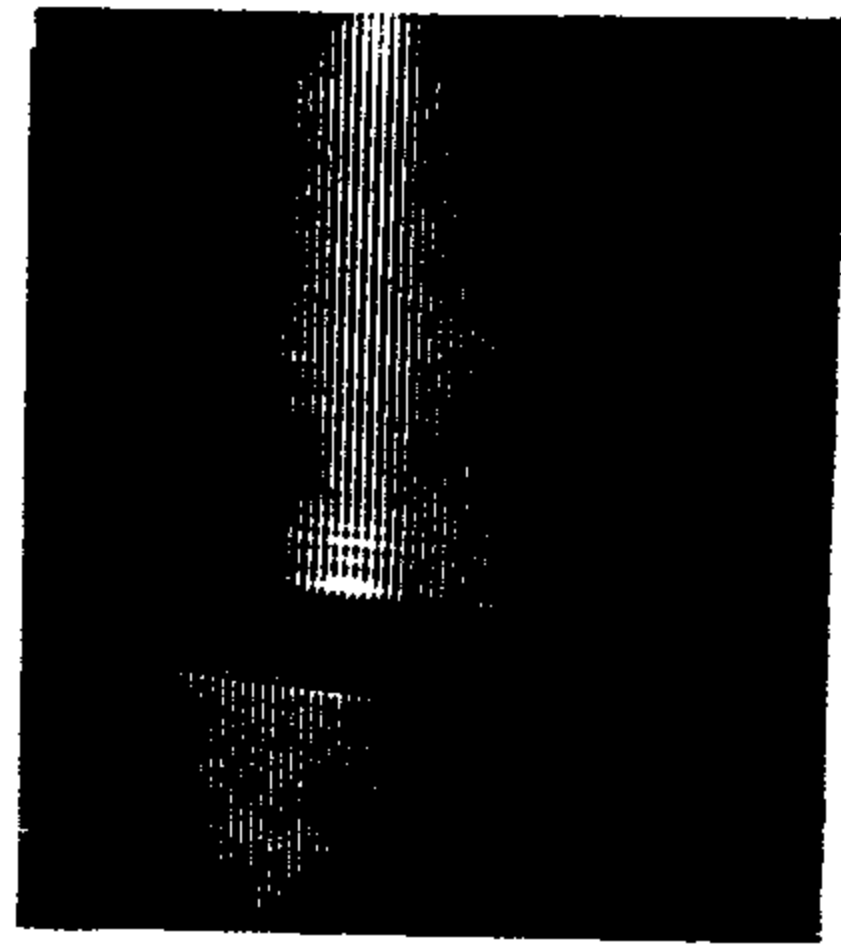
čini efikasnijom. Naime, prostorna se frekvencija adaptira, shodno eksperimentalnom cilju, topografije i optičke osobine detalja, pomjeranjem leće u horizontalnom smjeru.

Osnovni korak pri izučavanju deformacija tijela primjenom muare figura je to da imamo početne informa-

cije o tijelu ili podatke o njenom stanju prije učinjene deformacije. Taj se zahtjev može ispuniti kada se metodom koja je gore opisivana, projektira mrežica na tijelo i kada se iz ove nove mrežice registriraju sve informacije o početnom, tzv. nedeformiranom stanju tijela. U laboratoriji je eksperimentalno napravljen snimak takve mrežice za jedan određeni dio stroja prije djelovanja sila u toku rada tog stroja. Slika 10.11 predstavlja taj snimak i to sa dvije strane toga tijela.



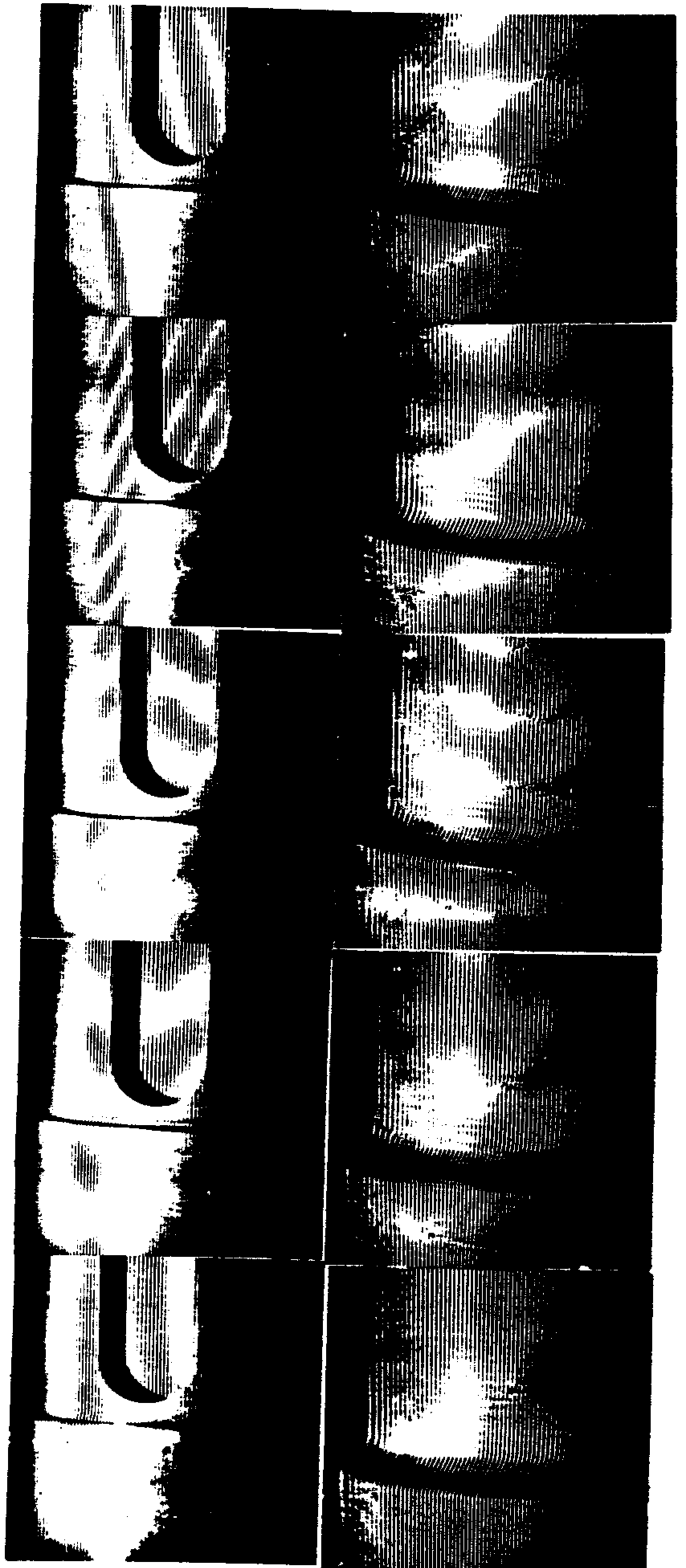
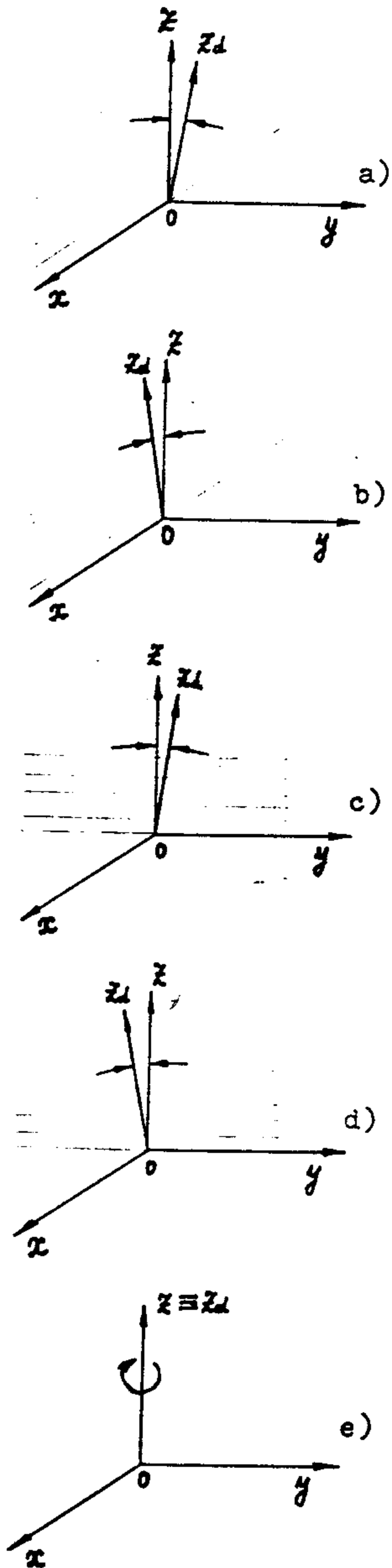
a)



b)

Slika 10.11.

Dalji korak je da se naprave snimci projektirane mrežice na tijelu nakon djelovanja sila u toku rada stroja, tj. mrežice tijela koje je deformirano. Sigurno je da će zbog deformacije tijela i projektirana frekvencija mrežice na njemu doživjeti promjene. Kada se ove mrežice superponiraju sa osnovnom, tj. nedeformiranom mrežicom, onda se dobijaju muare figure čije detaljno analiziranje daje određene informacije o deformiranom tijelu, a ako se pomoću posebne aparature te slike količinski čitaju, onda se mogu ti podaci i računski obraditi.



Slika 10.12.

10.7.1. Vezivanje tipova deformacija sa nastalim formama muare figura. Na tijelo čije osnovne informacije daje slika 10.11, u eksperimentu simulirane su neke deformacije i dobijene su nove mrežice na način koji je gore opisan. Superponiranjem ovih drugih sa osnovnom mrežicom, za određene deformacije dobijene su dotične muare figure. Nastale deformacije su vizualizirane muare linijama koje se mogu vidjeti na slici 10.12. Tu su predstavljeni tipovi reprezentativnih deformacija koje se najviše manifestiraju u raznim tehnološkim procesima. Gledajući sliku 10.12 .možemo primjetiti da određene tipove deformacija (kao poznati parametar) možemo povezivati sa konfiguracijom, distribucijom i međusobnim razmakom muare figura. Vidimo da, kada je deformacija tijela izvršena "van" ravni, dobija se jedan oblik muare figura (slika 10.12.a i 10.12.b), a kada je deformacija izvršena "u" ravni, dobija se drugi oblik muare figura (slika 10.12.c i 10.12.d). Sastavim se treći oblik dobija kada se deformacija tijela vrši u svim pravcima, (slika 10.12.e). U ovom je eksperimentu deformacija simulirana, međjutim, na osnovu ovoga se u realnosti može ustanoviti o kakvom se tipu deformacije radi već prema formama nastalih muare figura.

10.7.2. Mjerenje deformacije tijela u realnim uvjetima.

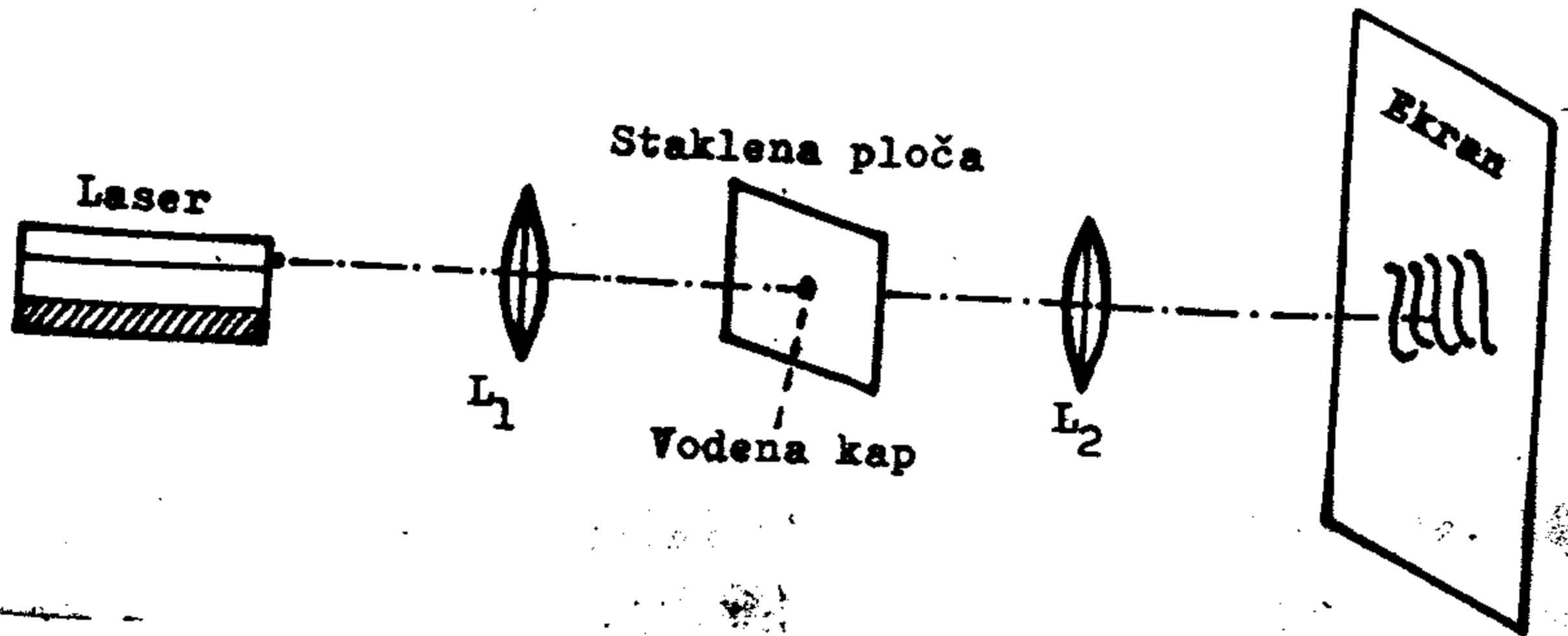
Gore su prikazani rezultati mjerenja deformacija koje su simulirane radi eksperimentiranja. Međjutim, u konkretnom slučaju se postupa na slijedeći način: uzima se određeni detalj stroja koji treba da se ispita i na njemu se projektira jedna mrežica (najčešće mrežica sa paralelnim ekvidistantnim pravim linijama). Na taj se način dobiva osnovna mrežica deta-

lja, iz koje se uzimaju i registruju sve početne optičke informacije. Zatim se taj detalj vraća u stroj u realnom tehnološkom procesu. Nakon određenog perioda rada stroja, taj se detalj vraća u laboratoriji gdje će se ponovo optički analizirati. Optičke informacije se sada uzimaju, superponiraju se sa informacijama tzv. osnovne mrežice i daju nam muare figure. Kvalitativno čitanje sa njihovom količinskom obradom, davat će prostorne informacije o deformaciji koja je nastala u detalju stroja prilikom njegovog učešća u realnom tehnološkom procesu.

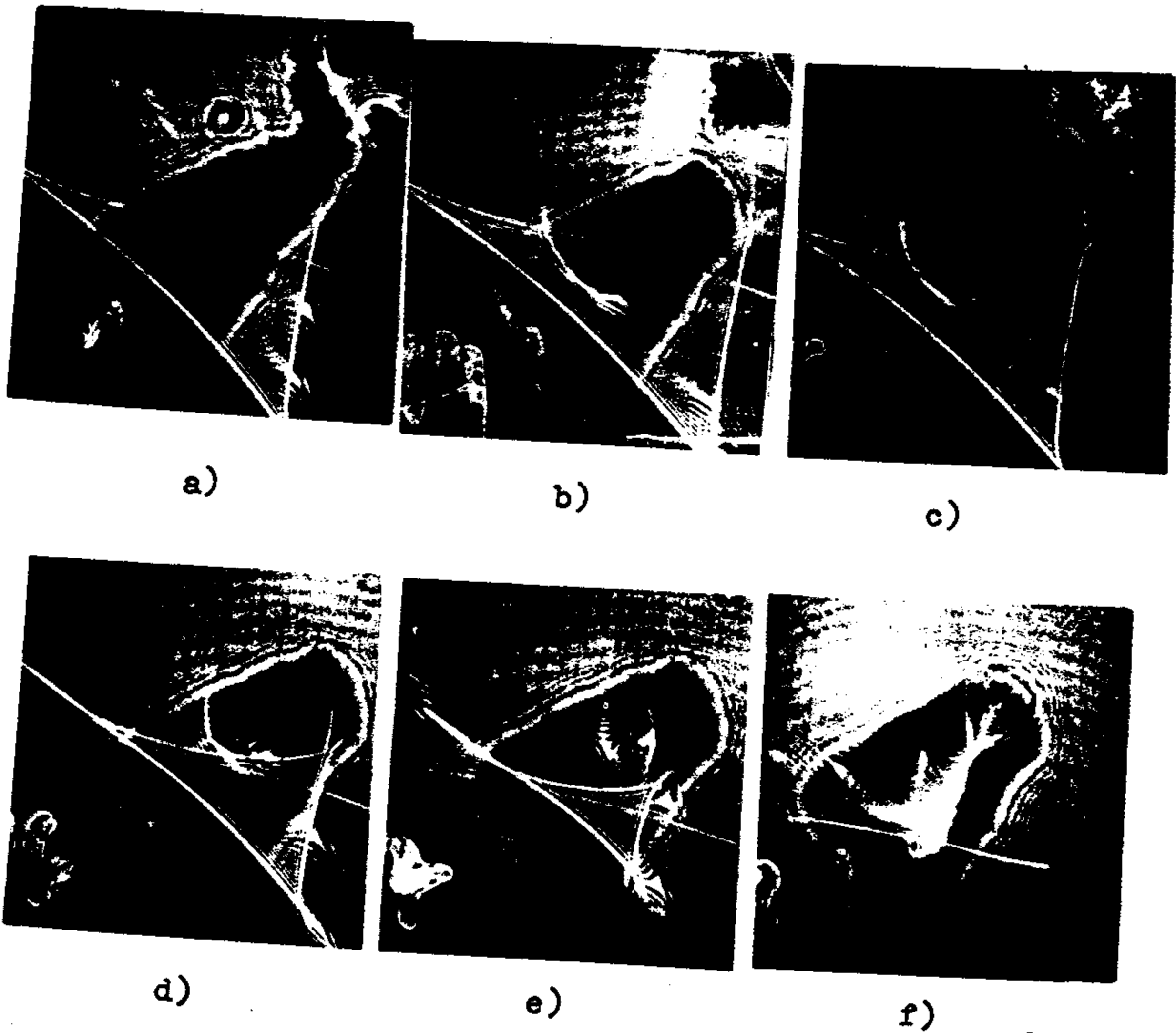
Prednost ove metode mjerenja u strojarstvu bazira se i na mogućnosti mjerenja u realnim radnim uvjetima stroja, razumije se pod uvjetom da je moguć pristup onom dijelu koji nas interesira. Na ovakav se način mogu ispitivati deformacije na određenim mjestima mostova čak i ispod površine vode, kao i u mnogo drugih slučajeva.

10.8. Mjerenje nastalih promjena na transparentnoj kapi

U dosadašnjim eksperimentalnim istraživanjima kao izvor svjetlosti korišćen je dijaprojektor, koji daje široki snop nekoherentne svjetlosti. Medjutim, to se ne može koristiti u mjerenjima koje se tiču fenomenima gdje imamo difrakciju i interferenciju. Postoji čitav niz radova, kao što su npr. [20], [36], [37], [38] i dr., gdje su riješeni problemi interferencije koristeći fenomen muare. Naime, dokazano je da se maksimumi interferencije dvaju snopova svjetlosti podudaraju sa muare figurama sistema krivulja jednakih faza tih snopova svjetlosti u ravnini interferencije. Prema tomu jasno je da se pojava interferencije svjetlosti može interpretirati pomoću muare figura u onim slu-



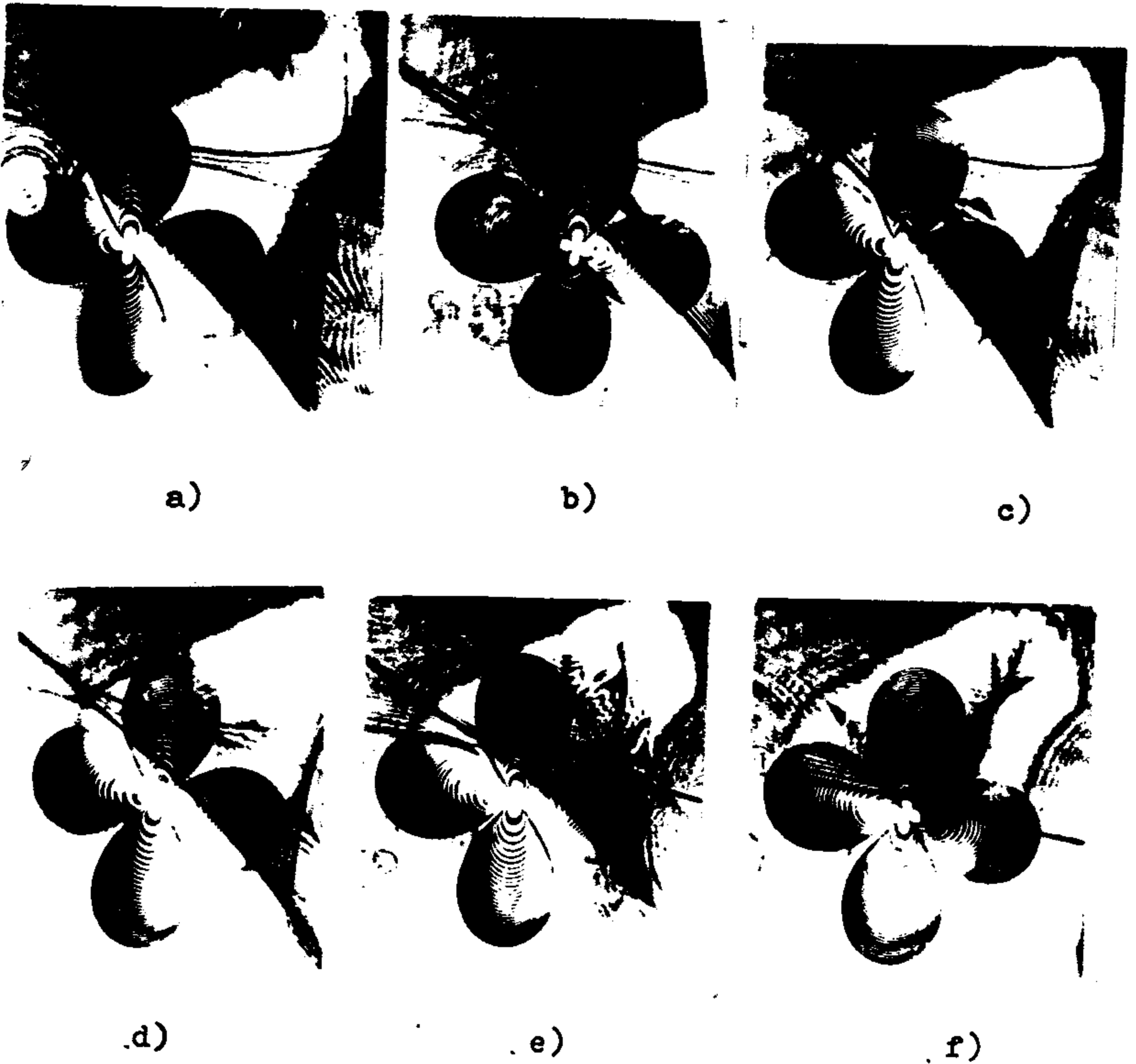
Slika 10.13.



Slika 10.14.

čajevim gdje djeluju valovi svjetlosti sa linijama jednakih faza određene oblika. U svim tim problemima neophodno je koristiti koherentnu svjetlost.

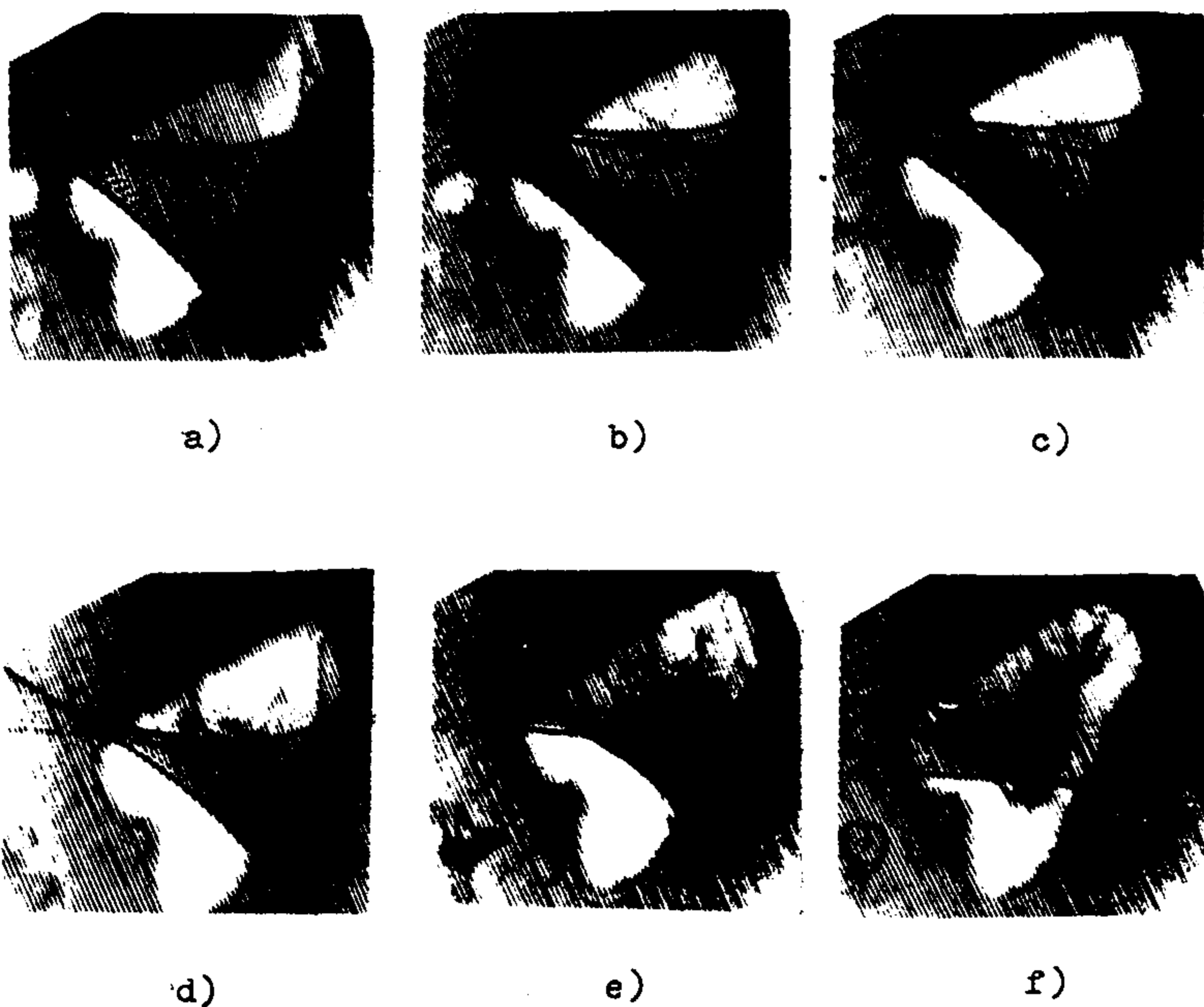
U daljem radu eksperimentalno se ispituje jedan interesantn fenomen koji ilustrira vrlo tijesnu vezu između pojave interferencije i muare figure. Kao izvor koherentne svjetlosti koristi se laser, čiji snop se širi tako da pada na transparentnu vodenu kap koja se nalazi na prozirnoj staklenoj plo-



Slika 10.15.

či (slika 10.13). Tu nastaje difrakcija. Fotoaparatom je snimljena ravnina na koju je fokusirana pojava interferencije difraktiranih valova što dolaze iz vodene kapi. Pošto kap isparava, očito da nastaju promjene u njoj, a time i promjene na interferencionoju slici. Da bi se to pratilo je sa osjetljivim filmom od 27 DIN-a snimljeno nekoliko snimaka u pojedinačnim vremenskim intervalima. Nekoliko od tih interesantnih rezultata je predstavljeno na slici 10.14.

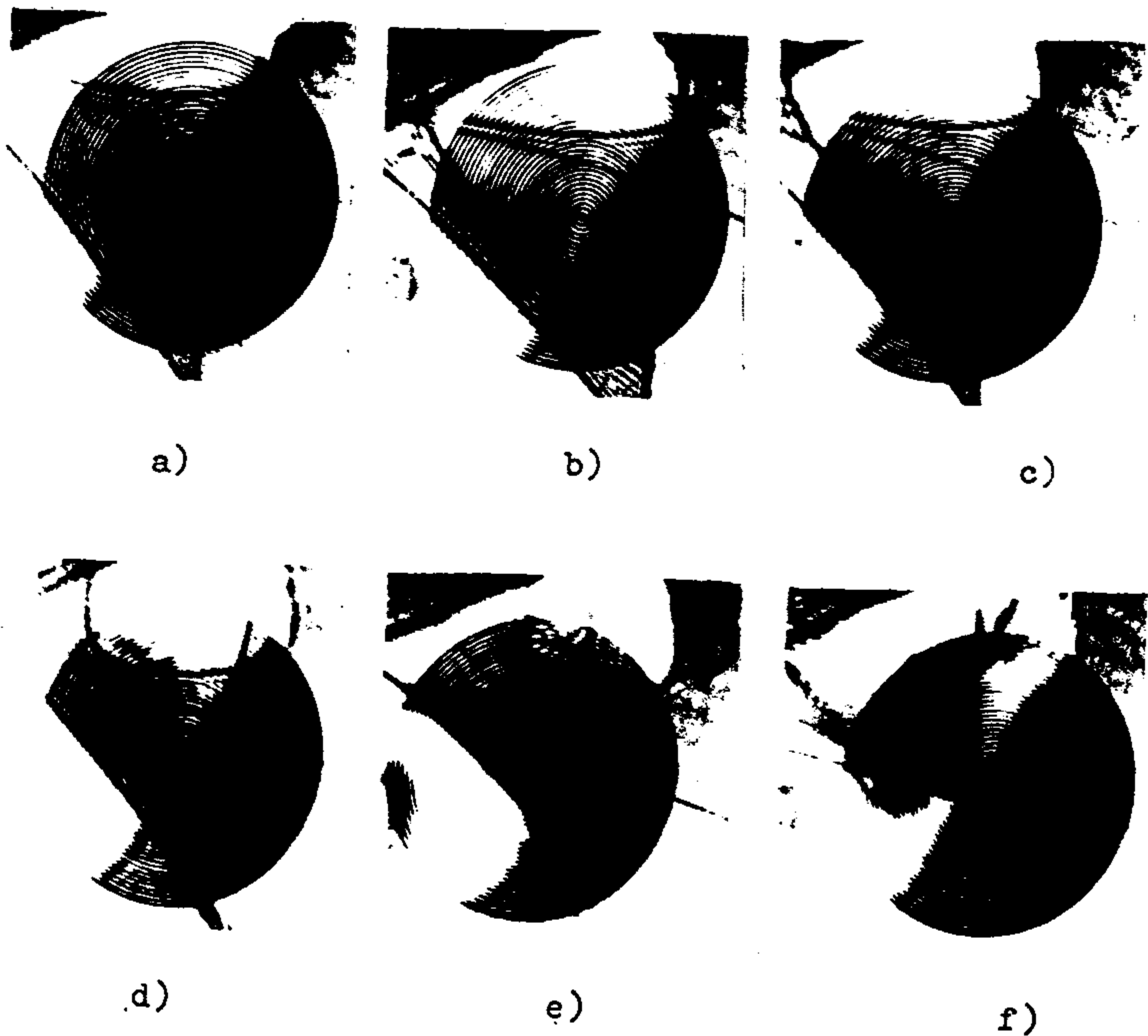
Na takav način kao rezultat difrakciono-interferencijske pojave, na ravni osmatranja dobivena je mrežica koja se dinamički mijenja.



Slika 10.16.

Slijedeći je eksperimentalni korak bio da se ovi rezultati vežu sa muare figurama. To je uradjeno na takav način da su dobijene mrežice superponirane drugim mrežicama. Tako, slika 10.15 predstavlja rezultate kada mrežice sa slike 10.14 se superponiraju sa sistemom zonskih lemniskata. Slika 10.16 predstavlja rezultate kada se iste mrežice pokrivaju sa sistemom ekvidistantnih paralelnih pravaca a slika 10.17 sa sistemom koncentričnih ekvidistantnih krugova.

Na svim ovim slikama se može primjetiti da je dinamička promjena transparentne kapi direktno vezana sa promje-



Slika 10.17.

nom muare figura. Stoga se može zaključiti da je muare metoda vrlo pogodna za istraživanje pojava koje se dinamički mijenjaju.

10.9. Metrološke specifičnosti dobivenih rezultata

10.9.1. Problem nelinearnosti. Prilikom mjerenja može se opaziti neke promjene ili deformacije kako se u zavisnosti od vremena ili raznih utjecaja funkcionalno mijenjaju. Ove promjene mogu biti linearne u funkciji vremena ili drugih vanjskih utjecaja. Problemi koji se karakterišu raznim linearnostima lako se mogu riješiti. Medjutim, materijalna struktura ili drugi uvjeti utječu na to da metrološki problemi budu nelinearni.

Osjetljivost mjerne metode koju sam koristio, daje mogućnost za rješavanje spomenutog problema. Pod visokoosjetljivim metrološkim uvjetima, mjerenje se vrši u onoj vremenskoj sekvenci ili u onim uvjetima djelovanja, gdje problem ima linearne karakteristike.

Mjerenja na ljudskom organizmu karakterišu se kao tipični nelinearni problemi. Stoga se i javlja neophodnost rješavanja ovog problema.

10.9.2. Problem nehomogenosti. Svako tijelo se obično karakteriše svojom obimnošću, neravnom površinom kao i time da se sastoji iz različitih materijala. Stoga se u ciljevima istraživanja njihovih deformacija javlja još jedan veliki metrološki problem, a to je problem nehomogenosti. Ljudski organizam je tipičan primjer gdje se u vrlo velikoj mjeri ispolja-

va spomjenutu problem.

Ovaj problem se također može riješiti. Naime, bilo koja nehomogena površina se može razdijeliti na takve male površine, koje se mogu smatrati homogenim, a metrološki rezultati se zbrajaju.

Razumije se da ovaj cilj zahtjeva visokoosjetljivu metodu mjerenja. Muare metoda ispunjava tu osobinu, te prema tomu pogodna je za rješavanje problema nehomogenosti.

10.9.3. Osjetljivost i tačnost metode muare. Muare figure su osjetljive na vrlo male pomake po dužini i po kutu, te zbog toga su našle veliku primjenu u oblasti optičke metrologije. Već je spomenuto da se ovom metodom, zahvaljujući baš toj visokoj osjetljivosti, mogu riješiti neki problemi kao što su problem nelinearnosti i nehomogenosti, koji su vrlo bitni za neke metrološke svrhe.

Osjetljivost jedne metode je njena najveća i najznačajnija karakteristika. Ova dobra osobina zahtjeva i veliku preciznost pri mjerenjima i istraživanjima, jer samo mala nepreciznost može dovesti do toga da dobiveni rezultati budu daleko od tačnih.

Muare metoda se danas usavršavala u velikoj mjeri, jer kompjuterska tehnika je omogućila da se konstruišu komplikovane mrežice, već prema zahtjevima zadataka i eksperimenata. Njenu osjetljivost podiže u veći nivo i sama kombinacija raznih mrežica kao i korišćenje pogodne mrežice za određeni dio metrološkog cilja. Kompjutori su omogućili još i to da visoku osjetljivost muare metode prati i velika preciznost pri mjerenju, računanju i interpretaciji određenih fenomena. Obrada po-

dataka je razvijena u takvom nivou, da se od muare metode mogu očekivati odlični rezultati kako po kvalitetu i kvantitetu, tako i po tačnosti.

Pošto je ustanovljeno da gustoća muare linija određuje tačnost ove metode, razumije se da dalji korak u njeno povećavanje je i multiplikacija linija. Taj bi bio jedan dalji korak u cilju da muare metoda dobije još veću prednost u odnosu na neke druge konvencionalne metode u nekim metrološkim ciljevima.

10.10. Prednost muare figura dobivenih sistemom lemniskata za postavljanje metroloških ciljeva

Na osnovu onoga što je u našoj laboratoriji uradjeno, možemo zaključiti da je mrežica zonskih lemniskata vrlo pogodna za nekoliko metroloških ciljeva. Ona čak ima prednost u odnosu na klasične ekvidistantne sisteme linija. Ta prednost se ogleda na onim djelovima istraženog tijela gdje dolazi do izražaja nehomogenost linija, a to zbog toga što se kompenzira sa nejednakim razmakom između linija u sistemu zonskih lemniskata.

11. ZAKLJUČAK

Osnovni zadaci ove disertacije bili su da se ispituju muare figure koje nastaju pokrivanjem zonskog sistema lemniskata sa drugim sistemima krivih linija i rješavanjem konkretnih problema u metrologiji deformacija tijela, da se ispituju eventualni prednosti i nedostaci toga sistema u odnosu na druge sisteme. Ovi zadaci su izvršeni.

1. Analizirana je jednadžba sistema koncentričnih lemniskata i ustanovljeno je da za rješavanje problema muare figura sa tim sistemima, zgodniji je oblik njihove jednadžbe u polarnim koordinatama.

2. Detaljno je analiziran matematički i eksperimentalni postupak nastanka muare figura pokrivanjem dvaju zonskih sistema koncentričnih lemniskata. Dokazano je da pokrivanjem ovih sistema, komutaciona granica ne postoji i svuda je $G > 0$, što znači da se vide samo suptraktivne muare figure. Oblik muare figura u ovom slučaju zavisi od međusobnog položaja zonskih sistema lemniskata, kao i od odnosa između njihovih parametara.

3. Nadalje su ispitane muare figure koje nastaju pokrivanjem zonskog sistema lemniskata sa drugim ekvidistantnim i zonskim sistemima krivih linija. Ispitivane su komutacione granice u svim tim slučajevima. U prvom redu zadaci su riješeni teorijski, a zatim su iscrpno riješeni eksperimentalno i računski, a opskrbljeni su bogatim grafikonima i fotografijama.

Kao zajednički zaključak za sve ove slučajeve je to da oblik muare figura zavisi od medjusobnog položaja između zon-
skog sistema lemniskata i sistema krivih linija koji ga pokri-
va, kao i od odnosa između pojedinih parametara ovih sistema.

Isto tako, zajednički je zaključak da se u svim teo-
rijski riješenim zadacima imamo potpuni sklad između računskih
i eksperimentalnih rješenja, što dokazuju svi priloženi grafi-
koni i fotografije pored njih.

4. Prikazana su neka metrološka istraživanja u oblasti
deformacije tijela primjenom muare figura. U okvir ove diserta-
cije ti rezultati su prezentirani i analizirani kvalitativno.

U okviru ovih istraživanja uzeto je ljudsko tijelo za
predmetom ispitivanja, kao reprezentativni primjer tipičnih ne-
linearnih, nehomogenih i teško reproducibilnih problema, za či-
je uspješno rješavanje muare metoda se pokazala vrlo efikasna.

Muare metodom su ispitivani još neki problemi oko de-
formacije određenog dijela stroja, pod simuliranim kao i pod
realnim tehnološkim uvjetima.

Dokazano je takodjer da je muare metoda vrlo efikas-
na u ispitivanjima nekih pojava koja se dinamički mijenjaju. Kon-
kretno, izvršeno je ispitivanje dinamičkih promjena jedne trans-
parentne vodene kapi koja se nalazi na staklenoj ploči, koriste-
ći razne mrežice za dobijanje muare figura kombinacijom sa mre-
žicama koje se dinamički mijenjaju i koje nastaju kao rezultat
difrakciono - interferencijskih pojava iz te kapi.

U okviru ovih ispitivanja upotrebljen je i sistem zon-
skih koncentričnih lemniskata i dokazano je da taj sistem nema
neke osobite prednosti u odnosu na ostale klasične mrežice, izu-
zev nekih metroloških ciljeva na onim dijelovima ispitanog tije-
la, gdje dolazi do izražaja nehomogenost linija.

L I T E R A T U R A

- [1] Foucault L., *Annls.Obs.Paris*, 5, 197 (1859).
- [2] Lord Rayleigh, *Phil.Mag.*, 47, 193 (1874).
- [3] Righi A., *Nuovo Cim.*, 21, 203 (1887); 22, 10 (1888).
- [4] Ronchi V., *Riv.Ottica Mecc.Precis.*, 2, 19 (1922).
- [5] Ronchi V., *La prova dei sistemi ottici*, *Attual.Scient.*,
No.37 (1925).
- [6] Raman C.V., Datta S.K., *Trans.Opt.Soc.London*, 27, 51 (1926).
- [7] Guild J., *The Interference System of Crossed Diffraction
Gratings*, Clarendon Press, London (1956).
- [8] Guild J., *Diffraction Gratings as Measuring Scales*, Oxford
Univ.Press, London (1960).
- [9] Burch J.M., *The Metrological Applications of Diffraction Gra-
tings*, *Progress in Optics*, 2, 75-108, Amsterdam (1963).
- [10] Stecher M., *Am.Journ.Phys.*, 32, 374 (1964).
- [11] Oster G., Wasserman M. and Zwerling C., *Theoretical Interpre-
tation of Moiré Patterns*, *J.Opt.Soc.Am.*, 44, No.2,
169 (1964).
- [12] Bronštejn I.N. i Semendjajev K.A., *Matematički priručnik*,
Tehnička knjiga, Zagreb (1964).
- [13] Moser J., Bahčevandžiev S., Jonoska M. i Janićijević Lj.,
God.Zborn.PMF.Skopje, 15 (A), 113 (1964).
- [14] Moser J., Bahčevandžiev S., Jonoska M. i Janićijević Lj.,
God.Zborn.PMF.Skopje, 16, 65 i 16, 93 (1965).
- [15] Moser J., Bahčevandžiev S., Jonoska M. i Janićijević Lj.,
God.Zborn.PMF.Skopje, 17-18, 11 i 17-18, 57 (1966/67).
- [16] Oster G., *Modern Optics*, Polytechnic Press, 541, New York
(1967).

- [17] Mc Curry R.E., Modern Optics, Polytechnic Press, 551, New York (1967).
- [18] Moser J. and Spiegelhalter, Optik, 27, 570 (1968).
- [19] Theocaris P.S., Moiré Fringes in Strain Analysis, Pergamon Press, London (1969).
- [20] Moser J., Bahčevandžiev S., Jonoska M. i Janičijević Lj., God.Zborn.PMF.Skopje, 19 (A), 55 (1969).
- [21] Takasaki H., Moiré Topography, Applied Optics, 9, No 6, 1467 (1970).
- [22] Moser J., Bahčevandžiev S., Janičijević Lj. i Jonoska M., God.Zborn.PMF.Skopje, 22 (A), 115 (1972).
- [23] White G., Video Recording, Record and Replay Systems, p 45, 49, 81, London (1972).
- [24] Moser J. i Janičijević Lj., God.Zborn.PMF.Skopje, 23, 27 (1973).
- [25] Collier R., Burckhardt Ch. and Lin L.H., Optical Holography, (ruski prevod) "Mir", Moskva (1973).
- [26] Moser J. i Jonoska M., God.Zborn.PMF.Skopje, 23, 37 i 23, 79 (1973).
- [27] Moser J., Bahčevandžiev S., Janičijević Lj. i Jonoska M., Bilten na DMF na SRM, Skopje, 24, 105 (1973).
- [28] Robinson F.J., Videotape Recording, Focal Press, 87, London (1975).
- [29] Moser J., Janičijević Lj. i Jonoska M., Bilten na DMF na SRM, Skopje, 26, 39 (1975/76).
- [30] Moser J., Jonoska M. i Janičijević Lj., Bilten na Sojuzot na Društ.Fiz. na SRM, Skopje, 28, 3 (1978).
- [31] Demidovič B.P., Zbornik zadač i upražnjenjiji po matematičeskomu analizu, 478, Moskva (1978).

- [32] Moser J. i Janićijević Lj., GOD.Zborn.PMF.Skopje, 29,
31 (1979).
- [33] Janićijević Lj. i Moser J., God.Zborn.PMF.Skopje, 29,
45 (1979).
- [34] Moser J. i Imami T., Bilten na Sojuz. na Društ.Fiz. na
SRM, Skopje, 29, 75 i 29, 81 (1982).
- [35] Vest Ch.M., Holographic Interferometry, (ruski prevod),
"Mir", Moskva (1982).
- [36] Moser J. i Bejtullahu R., Interferencija triju cilindrič-
nih valova svijetlosti, (pripremljen za štampu).
- [37] Moser J. i Bejtullahu R., Interferencija svjetlosti iz
kružne i ravne pukotine, (pripremljen za štampu).
- [38] Moser J. i Bejtullahu R., Interferencija monohromatske
svijetlosti nakon prolaza kroz dvije kružne pukot-
tine, (pripremljen za štampu).

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____

KRATKA AUTOBIOGRAFIJA

Rodjen sam u s. Gajre kod Tetova 30.12.1951. godine. Osnovnu i srednju školu sam pohađao i završio u Tetovu. Školske 1970/71 god. upisao sam studije na Odseku za fiziku Filozofskog fakulteta (sada Prirodno-matematički fakultet) u Prištini, koje sam završio u roku 25. 07. 1974. god., sa srednjom ocjenom 8.11 i sa ocjenom diplomskog ispita 9. Odmah poslije toga, 15. 10. 1974. zapošljen sam na istom Odseku u početku kao profesor srednjih škola a zatim - kad je završen izbor, kao saradnik, u koje se zvanje nalazim i sada.

Školske 1976/77. sam služio u JNA, a poslije povratka, školske 1977/78. god. upisao sam postdiplomske studije iz oblasti METROLOGIJE u Institutu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu. Dana 06. 05. 1982. god. odbranio sam sa uspjehom magistarski rad pod naslovom "APSOLUTNO MERNJE SPEKTRALNO RAZLOŽENOG OPTIČKOG ZRAČENJA U EKSPERIMENTIMA SA ROJEM ELEKTRONA".

Što se tiče moga dosadašnjega rada, objavio sam 7 (sedam) naučnih i stručnih radova kao i saopštenja; držao sam vježbe studentima iz više predmeta na Odseku za fiziku. Na fakultetu sam obavio više zadataka u okviru nekih komisija i foruma, a trenutno sam član Skupštine Univerziteta u Prištini, delegiran od PMF -a.

Priština, Decembar 1987.

