ЈЕДАН СТАВ О КОЕФИЦИЕНТИМА Taylor-ОВИХ РЕДОВА.

Од

ЈОВАНА КАРАМАТЕ.

(Приказано на скупу Академије природних наука 16-XII-1932).

Нека је $a(x)$ једна у тачки $x=0$ аналитичка функција и нека је

$$a(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu .$$

Ако су нам познати Taylor-ови коефициенти a_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, посматране функције $a(x)$, и ако је $a_0 \neq 0$, тада можемо помоћу њих изразити и Taylor-ове коефициенте b_n и c_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, функција

$$b(x)=-1/a(x) \quad \text{и} \quad c(x)=\log\{a(x)\},$$

т. ј. можемо наћи развитке

$$b(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

и

$$c(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu .$$

Како су, међутим, изрази који одређују коефициенте b_n и c_n помоћу коефицијената a_n, веома замршени, то се из тих израза може тешко видети ма и најмања особина тих коефициената, чак у случају, кад су коефициенти a_n најправилнији.

У овој расправи ћемо показати да ће коефициенти b_n и c_n, за $n=1, 2, 3, \ldots$, бити увек позитивни, кад год је низ бројева

$$A_n = -\log a_n \quad \text{конкаван},$$

т. ј. кад год је

$$A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1} \leq 0, \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

и тиме донекле допринети упознавању Taylor-ових коефицијената функција $b(x)$ и $c(x)$.

Затим ћемо дати једну примену овога резултата на развијање и приближно изражавање функције $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

1. Пре него што пређемо на доказивање горе наведеног резултата, испитајмо најпре, шта претставља услов да низ $A_n = -\log a_n$ буде конкаван.

Ако тај услов напишемо у облику

$$A_{n+1} - A_n \leq A_n - A_{n-1}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

т. ј.

$$\log \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \log \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

тада видимо да је он еквивалентан услову

$$a_{n+1}/a_n \geqslant a_n / a_{n-1}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{1,1}$$

или услову

$$a_n \leq \sqrt{a_{n+1} a_{n-1}}.$$

Ако дакле ставимо

$$q_n = a_n / a_{n-1}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{1,2}$$

тада је услов (1,1) еквивалентан услову да низ q_n монотоно расте, т. ј. да буде

$$q_n \leq q_{n+1}, \quad \text{за све} \quad n=1, 2, 3, \ldots. \tag{1,3}$$

Низ q_n мора дакле или тежити једној коначној граници, или тежити бесконачности. Овај други случај се, међутим, противи претпоставци да ред

$$a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{конвергира за } x \neq 0, \tag{1,4}$$

јер би тада по d'Alembert-овом критеријуму радиус конвергенције реда (1,4) био једнак нули. На исти начин кад би q_n тежио једном коначном броју q видимо да би радиус конвергенције реда (1,4) био $1/q$.

Претпоставимо ли, дакле, да је ред (1,4) конвергентан за све x размака $(-1, +1)$, што можемо увек постићи сменом $x \mid ax$, тада мора бити $q \leq 1$, па, дакле, према (1,2) и (1,3)

$$a_n / a_{n-1} < 1, \quad \text{т. ј.} \quad a_n < a_{n-1}.$$

У овом случају морају, дакле, коефицијенти a_n још и монотоно опадати. Према томе смо добили следећи резултат:

Нека су коефицијенти a_n реда $a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ сви позитивни; ако је низ $A_n = -\log a_n$ конкаван, тада ће горњи ред конвергирати за све $|x| < 1$, само ако низ a_n монотоно опада.

2. Пређимо сада на доказивање напред наведеног резултата, који можемо изразити следећим ставом:

Став 1. *Нека је*

$$a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \tag{2,1}$$

једна, у тачки $x=0$, аналитичка функција; ако су њени коефицијенти a_n позитивни, т. ј.

$$a_n > 0, \quad \text{за све} \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{2,2}$$

и ако је низ $A_n = -\log a_n$ конкаван, т. ј.

$$a_{n+1}/a_n \geqslant a_n / a_{n-1}, \qquad n=1, 2, \ldots, \tag{2,3}$$

тада су и коефицијенти b_n и c_n функција

$$1/a_0 - 1/a(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

односно

$$\log \{a(x)/a_0\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu,$$

сви позитивни.

Доказ: Посматрајмо најпре функцију

$$1/a_0 - 1/a(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x^\nu. \tag{2,4}$$

Ако ову једначину помножимо са $a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, добијамо следећу рекурентну једначину за коефициенте b_n:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{n-\nu}\, b_\nu = a_n / a_0\,, \qquad n=1, 2, 3, \dots . \qquad (2,5)$$

Ова рекурентна једначина потпуно одређује низ коефициената b_n, и одавде добијамо, например,

$$b_1 = a_1/a_0^2 > 0\,.$$

Према томе, како је први коефициенат b_1 позитиван, да бисмо показали да ће то бити случај и за све остале коефициенте, довољно је да покажемо да ће b_n бити позитиван, ако су сви b_ν за све $\nu=1, 2, 3, \dots n-1$, позитивни.

У ту сврху ставимо у (2,5) $n-1$ уместо n, помножимо тако добивену једначину са, за сад произвољним бројем λ и одузмимо је од (2,5), тада добијамо:

$$a_0 b_n = \frac{1}{a_0}\,(a_n - \lambda a_{n-1}) + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-a_{n-\nu} + \lambda a_{n-\nu-1})\, b_\nu\,. \qquad (2,6)$$

На основу услова (2,3) можемо увек одредити број λ тако да буде

$$a_n / a_{n-1} \geqslant \lambda \geqslant a_{n-1}/a_{n-2} \geqslant a_{n-2}/a_{n-3} \geqslant \dots a_2/a_1 \geqslant a_1/a_0\,,$$

например, ако узмемо за λ вредност a_n / a_{n-1}, једначина (2,6) узима облик

$$a_0 b_n = \sum_{\nu=1}^{n-1} \{a_n / a_{n-1} - a_{n-\nu}/a_{n-\nu-1}\}\, a_{n-\nu-1}\, b_\nu\,. \qquad (2,7)$$

Према (2,3) су сви изрази у заградама десне стране једначине (2,7) позитивни, па ће према томе и b_n бити позитивно, ако су $b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ позитивни. Тиме је прелазом са n ка $n+1$ горње тврђење доказано.

Да бисмо још доказали исти став и за функцију

$$\log\{a(x)/a_0\} = \sum_{1=\nu}^{\infty} c_\nu\, x^\nu \qquad (2,8)$$

диференцирајмо једначину (2,4). Тиме добијамо

$$a'(x)/a^2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu+1)\, b_{\nu+1}\, x^\nu\,,$$

или множењем са $a(x)$

$$a'(x)/a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu\, x^\nu\,, \quad \text{где су сви} \quad d_n > 0\,.$$

Коначно ако ову једначину интегришемо од 0 до x добијамо

$$\log\{a(x)/a_0\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_{\nu-1}}{\nu}\, x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, x^\nu\,.$$

Одавде видимо да су под претпоставкама (2,2) и (2,3) не само Taylor-ови коефициенти функције $\log\{a(x)/a_0\}$, већ и функција $a'(x)/a(x)$ и $a'(x)/a^2(x)$, сви позитивни.

Поред ових резултата можемо показати да Taylor-ови коефициенти c_n функције $\log\{a(x)/a_0\}$ задовољавају још и следеће неједначине:

$$0 \le c_n \le a_n / a_0\,, \quad n=1, 2, 3, \dots . \qquad (2,9)$$

Јер, ако једначину (2,4) помножимо са $a'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu\, x^{\nu-1}$ и интегришемо од 0 до x, добијамо функцију

$$a(x)/a_0 - 1 - \log\{a(x)/a_0\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu / a_0 - c_\nu)\, x^\nu$$

чији ће Taylor-ови коефициенти бити такође сви позитивни; отуда следе неједначине (2,9).

Приметимо још, напослетку, да ће ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ бити увек конвергентан кад год ред (2,1) конвенгира за све позитивне $x<1$; ако ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ дивергира тада је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = 1/a_0\,,$$

а ако ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ конвергира, тада је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu}\,.$$

Из истих разлога видимо, да ће редови $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$

истовремено дивергирати или конвергирати; у овом другом случају, постоји следећа веза између њихових сума

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu = \log\left\{\frac{1}{a_0}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right\}.$$

Конвергенција или дивергенција редова $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu$, следи, на основу става 1, из позитивности чланова b_ν и c_ν.

Како је функција $\log(1+x)$ конкавна, то ће низ бројева $a_n = 1/(n+1)$ задовољавати услове (2,2) и (2,3) става 1, те добијамо као непосредну примену тога става следеће:

Став 2: Taylor-ови коефициенти w_n функције

$$1 + x/\log(1-x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu x^{\nu+1} \tag{2,10}$$

су сви позитивни, т. ј.

$$w_n > 0\,, \quad \text{за све} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2,11}$$

и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu = 1. \tag{2,12}$$

3. Да бисмо ово применили на развијање и приближно претстављање функције $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ потребан нам је претходно експлицитан израз за остатак факториелног развитка те функције.

Како се та и још многе друге функције могу претставити интегралом облика

$$f(x) = \int_0^1 t^x w(t)\, dt\,, \tag{3,1}$$

то ћемо најпре све потребне обрасце извести на овом општем случају, под претпоставком да је функција $w(t)$ таква да интеграл (3,1) има смисла за све $x \geqslant 0$.

Потражимо најпре Taylor-развитак функције (3,1) са експлицитним изразом за остатак. У ту сврху дефинишимо операцију **A** на следећи начин

$$\mathbf{A}w(t) = \frac{1}{t}\int_0^t w(t)\, dt\,,$$

и уопште

$$\mathbf{A}^n w(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{A}^{n-1}w(t)\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \mathbf{A}^0 w(t) = w(t).$$

Ако сад парцијално интегришемо интеграл (3,1) добијамо

$$f(x) = \mathbf{A}w(1) - x\int_0^1 t^x\, \mathbf{A}w(t)\, dt\,, \tag{3,2}$$

поновимо ли ову операцију још $n-1$ пута на интеграл (3,2) добићемо уопште образац:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \mathbf{A}^{\nu+1}w(1)\, x^\nu + (-1)^n x^n \int_0^1 t^x\, \mathbf{A}^n w(t)\, dt\,. \tag{3,3}$$

Овај образац даје, дакле, тачну вредност остатка Taylor-овог реда функције $f(x)$, а који важи кад год је функција $w(t)$ интеграбилна.

Потражимо сад аналоган образац за факториелни ред функције $f(x)$. Дефинишимо зато операцију **B** на следећи начин:

$$\mathbf{B}w(t) = \frac{w(t) - w(1)}{1-t}\,,$$

и уопште

$$\mathbf{B}^n w(t) = \frac{\mathbf{B}^{n-1}w(t) - \mathbf{B}^{n-1}w(1)}{1-t}\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \mathbf{B}^0 w(t) = w(t)\,.$$

Да би функција $\mathbf{B}^n w(t)$ имала смисла за $t=1$, морамо претпоставити да $w(t)$ има све изводе до n-тог у тачки $t=1$.

Пођимо сад од интеграла (3,1) и одузмимо му интеграл

$$\int_0^1 t^x\, w(1)\, dt = \frac{w(1)}{x+1}\,,$$

тада добијамо

$$f(x) = \frac{w(1)}{x+1} + \int_0^1 t^x (1-t)\, \mathbf{B}w(t)\, dt.$$

Ако од тако добивеног интеграла одузмемо интеграл

$$\int_0^1 t^x (1-t)\, \mathbf{B}w(1)\, dt = \frac{\mathbf{B}w(1)\, 1!}{(x+1)(x+2)},$$

добијамо даље

$$f(x) = \frac{0!\, w(1)}{(x+1)} + \frac{1!\, \mathbf{B}w(1)}{(x+1)(x+2)} + \int_0^1 t^x (1-t)^2\, \mathbf{B}^2 w(t)\, dt.$$

Поступимо ли овако n пута добићемо општи образац

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu!\, \mathbf{B}^\nu w(1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu+1)} + \\ + \int_0^1 t^x (1-t)^n\, \mathbf{B}^n w(t)\, dt. \qquad (3,4)$$

Овај образац даје развитак функције $f(x)$ у факториелан ред са тачном вредношћу остатка, а важи под претпоставком да функција $w(t)$ има у тачки $t=1$ све изводе до n-тог.

Напослетку можемо обрасце (3,3) и (3,4) комбиновати и то на следећи начин.

Применимо, најпре, на функцију $f(x)$ образац (3,3) са $n=k$, и затим на интеграл добивен у том обрасцу применимо образац (3,4), тада добијамо следећи образац

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \mathbf{A}^{\nu+1} w(1)\, x^\nu + \\ + (-1)^k x^k \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu!\, \mathbf{B}^\nu \mathbf{A}^k w(1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu+1)} + R_n(x),$$

где је

$$R_n(x) = (-1)^k x^k \int_0^1 t^x (1-t)^n\, \mathbf{B}^n \mathbf{A}^k w(t)\, dt. \qquad (3,5)$$

Напоменимо, напослетку, да се низ функција $B^n w(t)$ може претставити на следећи начин:

$$\mathbf{B}^n w(t) = \frac{w(t) - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\omega^{(\nu)}(1)}{\nu!} (1-t)^\nu}{(1-t)^n}; \qquad (3,6)$$

који се образац на основу дефиниције функција $\mathbf{B}^n w(t)$ може лако проверити. Ако се дакле функција $w(t)$ може развити у ред уређен по степенима од $(1-t)$, т. ј. ако имамо

$$w(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu (1-t)^\nu,$$

тада је, на основу (3,6)

$$\mathbf{B}^n w(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{n+\nu} (1-t)^\nu, \qquad (3,7)$$

са

$$\mathbf{B}^n w(1) = w_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

4. Досадашње излагање можемо сад непосредно применити на функцију $\psi(x)$, ако пођемо од познатог обрасца

$$\log(1+x) - \psi(1+x) = \int_0^1 t^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t}\right) dt\ ^{1)}. \quad (4,1)$$

У овом случају је, дакле,

$$w(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t}.$$

Ова је функција аналитичка у тачки $t=1$, па ако је развијемо у ред уређен по степенима од $(1-t)$ добијамо

$$w(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu (1-t)^\nu. \qquad (4,2)$$

[1]) Види, на пр. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, стр. 175.

На основу става 2 сад лако увиђамо да су сви коефициенти w_n овог развитка позитивни и да је $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu = 1$. Према томе, интегрисањем овог обрасца од 0 до 1 добијамо још и следеће

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t}\right\} dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{w_\nu}{\nu+1} = C\,,$$

где је C Euler-ова константа.

Према обрасцу (3,7) видимо даље, да су све функције $\mathbf{B}^n\, w(t)$ позитивне, и да монотоно опадају у интервалу (0,1), дакле је,

$$w_n \leq \mathbf{B}^n\, w(t) \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} w_n = 1 - \sum_{\nu=0}^{n-1} w_\nu\,, \quad \text{за све} \quad 0 \leq t \leq 1\,.$$

На основу тога развитак (3,4) за функцију (4,1) гласи

$$\log(1+x) - \psi(1+x) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} w_\nu \frac{\nu!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu+1)} + R_n(x)\,,$$

где је

$$w_n \frac{n!}{(x+1)(x+1)\ldots(x+n+1)} \leq R_n(x) \leq$$
$$\leq W_n \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}\,,$$

а

$$W_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} w_\nu = 1 - \sum_{\nu=0}^{n-1} w_\nu\,.$$

Ова једначина важи за све $x > -1$, а коефициенти w_n су јој дефинисани обрасцем (4,2).

Применимо још на исти интеграл (4,1) образац (3,5) са $k=1$. Ставимо ли, наиме, у обрасцу (3,5)

$$\mathbf{A}\, w(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left\{\frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{\log \tau}\right\} d\tau = w_0(t)$$

$$\mathbf{A}\, w(1) = \int_0^1 \left\{\frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{\log \tau}\right\} d\tau = C\,,$$

то добијамо, пошто га помножимо са -1, следећи образац

$$C + \psi(1+x) - \log(1+x) =$$
$$= x \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu!\, \mathbf{B}^\nu\, w_0(1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu+1)} + R_n(x)\,,$$

где је

$$R_n(x) = x \int_0^1 t^x (1-t)^n\, \mathbf{B}^n\, w_0(t)\, dt\,. \qquad (4,3)$$

Да бисмо у овом случају нашли границе између којих се налази остатак $R_n(x)$, поступићемо као и малопре, т. ј. развићемо функцију $w_0(t)$ у ред облика

$$w_0(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu^0 (1-t)^\nu\,.$$

Како је према (4,2)

$$\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu (1-t)^\nu\,, \quad \text{са} \quad w_\nu > 0\,,$$

то је дакле

$$w_0(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left\{\frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{\log \tau}\right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu (1-\tau)^\nu\, d\tau = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_\nu}{\nu+1} \cdot \frac{1-(1-t)^{\nu+1}}{1-(1-t)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_\nu}{\nu+1} \{1 + (1-t) + \ldots + (1-t)^\nu\} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-t)^\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\omega_n}{n+1}\,.$$

Дакле је

$$w_n^0=\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\omega_\nu}{\nu+1}=\mathbf{B}^n\, w_0(1)\ ,$$

или, на основу једначине

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega_\nu}{\nu+1}=C\,,$$

$$w_n^0=C-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\omega_\nu}{\nu+1}\,.$$

Према томе је низ коефициената w_n^0 позитиван и монотоно опада.

Како је даље на основу обрасца (3,7)

$$\mathbf{B}^n\, w_0(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty} w_{n+\nu}^0(1-t)^\nu\,,$$

то ће, дакле, и у овом случају све функције $\mathbf{B}^n\, w_0(t)$ монотоно опадати у размаку $(0,1)$ па је према томе

$$\mathbf{B}^n\, w_0(1)\le\mathbf{B}^n\, w_0(t)\le\mathbf{B}^n\, w_0(0)\,,\quad \text{за све}\quad 0\le t\le 1\,,$$

где је

$$\mathbf{B}^n\, w_0(1)=w_n^0\quad \text{и}\quad \mathbf{B}^n\, w_0(0)=1-\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu^0=\sum_{\nu=n}^{\infty} w_n^0\,.$$

Према томе се остатак обрасца (4,3) налази између граница

$$\frac{n!\, w_n^0 x}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+n+1)}\le R_n\,(x)\le$$

$$\le\frac{n!\, W_n^0 x}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+n+1)}\,,$$

где је

$$W_n^0=\sum_{\nu=n}^{\infty} w_n^0=1-\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu^0\,. \qquad (4,4)$$

Посматрајмо, примера ради, специјалан случај кад је $n=1$, тада образац (4,3), са границама за остатак (4,4), постаје

$$\frac{(C-\frac{1}{2})\,x}{(x+1)\,(x+2)}\le\psi\,(1+x)-\log\,(1+x)+\frac{C}{1+x}\le\frac{(1-C)\,x}{(x+1)\,(x+2)}\,,$$

за све $x>-1$,

јер је

$$w_1^0=C-\frac{1}{2}\quad \text{и}\quad W_1^0=1-C\,.$$

Одавде видимо, да се функција $\psi(1+x)$ веома мало разликује од функције $\log\,(1+x)-\frac{C}{1+x}$, за све позитивне вредности x-а, и да је та разлика утолико мања, уколико се x приближава нули или бесконачности.

У Београду, 16 октобра 1932 год.

За време коректуре видео сам да се расправа г. Th. Kalusa, *Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen*, {Math. Zeitschr. **28**, 161—170, (1928)} односи на иста питања, у којој се, шта више, један део напред изведеног става 1, већ налази.

Un théorème sur les coefficients des séries de Taylor.

par

J. KARAMATA.

Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 16-XII-1939).

Etant donnés les coefficients a_n du développement de Taylor de la fonction $a(x)$, c. à d.

$$a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu ,$$

nous allons indiquer un critérium suffisant pour reconnaître si les coefficients tayloriens b_n et c_n des développements des fonctions

$$b(x) = -1/a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu ,$$

et

$$c(x) = log \{a(x)\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu ,$$

sont positifs.

Ce critérium consiste dans le fait que la suite des nombres $A_n = -log\, a_n$ doit être concave, c. à. d. que l'on doit avoir pour tout n

$$A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1} \leq 0 ,$$

ou, ce qui revient au même, que

$$a_{n+1}/a_n \geqslant a_n / a_{n-1} , \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Le théorème à démontrer est donc le suivant:

Théorème: *Soit donnée la fonction* $a(x)$ *par la série de Taylor*

$$a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \quad \text{convergente pour un} \quad x \neq 0; \tag{1}$$

si les coefficients a_n sont positifs, c'est-à-dire si

$$a_n > 0, \quad \text{pour tout} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

et si la suite $A_n = -\log a_n$ est concave, c'est-à-dire,

$$a_{n+1}/a_n \geqslant a_n / a_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

alors les coefficients de Taylor b_n et c_n des fonctions

$$1/a_0 - 1/a(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x^\nu, \tag{4}$$

et

$$\log \{a(x)/a_0\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu, \tag{5}$$

sont tous positifs.

Démonstration. Considérons d'abord la fonction (4). En multipliant la relation (4) par $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, et en égalant les coefficients des développements ainsi obtenus, on en déduit la relation de récurrence

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{n-\nu}\, b_\nu = a_n / a_0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Cette relation définit complétement les coefficients b_n, et l'on en tire, en premier lieu, que

$$b_1 = a_1/a_0^2 > 0.$$

Or, le premier coefficient b_1 étant positif, pour montrer qu'il en sera de même pour tous les autres, il suffit de montrer que b_n est positif lorsque $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{n-1}$ le sont.

A cet effet, posons dans la relation (6) $n-1$ à la place de n, multiplions la relation ainsi obtenue par a_n / a_{n-1}, et soustrayons la membre à membre de (6). On trouve

$$a_0 b_n = \sum_{\nu=1}^{n-1} \{a_n / a_{n-1} - a_{n-\nu}/a_{n-\nu-1}\}\, a_{n-\nu-1}\, b_\nu;$$

les coefficients de b_ν dans cette somme étant, en vertu des hypothèses (2) et (3), tous positifs, il en résulte que b_n le sera de même, dès que les b_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots n-1$, le sont. Ce qui démontre la première affirmation.

Pour voir encore qu'avec les mêmes hypothèses les coefficients c_n du développement (5) sont tous positifs, il suffit de prendre la dérivée de la relation (4), de la multiplier par $a(x)$, puis de l'intégrer de 0 à x.

En prenant pour $a(x)$ la fonction

$$-\frac{1}{x} \log(1-x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} x^\nu,$$

du fait que $\log(n+1)$ est concave, on déduit par application du théorème précédent le résultat que

les coefficients α_ν du développement de la fonction

$$1/x + 1/\log(1-x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu, \tag{7}$$

sont tous positifs; par suite la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu$ converge et a pour somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu = 1.$$ [1]

La fonction (7) se présentant dans la théorie de la fonction gamma, on peut se servir du résultat précédent pour déduire une approximation du reste des séries de factorielles de la fonction $\psi(x)$.

En partant, en général, des fonctions définies par les intégrales de la forme

$$f(x) = \int_0^1 t^x\, w(t)\, dt,$$

et en définissant les opérations **A** et **B** de la manière suivante

---

[1] J'ai d'abord donné la démonstration précédente pour ce cas particulier seulement; l'extension au cas où la suite $-\log a_n$ est concave, me fut suggérée par M. M. Fekete.

$$\mathbf{A}\,w(t)=\frac{1}{t}\int_0^t w(u)\,du,\quad \mathbf{B}\,w(t)=\{w(t)-w(1)\}/(1-t)\,,$$

$\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{B}^n$ étant ces mêmes opérations itérées n fois, on vérifie facilement la formule

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\,\mathbf{A}^{\nu+1}\,w(1)\,x^\nu+$$

$$+(-1)^k x^k\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\nu!\,\mathbf{B}^\nu\,\mathbf{A}^k\,w(1)}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+\nu+1)}+R_n(x)\,,$$

avec

$$R(x)=(-1)^k x^k\int_0^1 t^x\,(1-t)^n\,\mathbf{B}^n\,\mathbf{A}^k\,w(t)\,dt\,, \tag{8}$$

valable pour toute fonction $w(t)$ intégrable et ayant une dérivée n-ième au point $t=1$. En outre, si $w(t)$ est développable en série de la forme

$$w(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}w_\nu\,(1-t)^\nu\,,\quad \text{l'on a}\quad \mathbf{B}^n\,w(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}w_{n+\nu}\,(1-t)^\nu\,.$$

En prenant, maintenant, pour $w(t)$ la fonction

$$w(t)=\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\log t}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\,(1-t)^\nu\,, \tag{9}$$

on voit, d'après le résultat précédent, que tous les coefficients α_n sont positifs. On en déduit alors facilement que toutes les fonctions $\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(t)$ décroîssent dans l'intervalle (0, 1), c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(1)\le\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(t)\le\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(0)\,,\quad \text{pour}\quad 0\le t\le 1\,.$$

Donc, du fait que

$$\log(1+x)-\psi(1+x)=\int_0^1 t^x\left\{\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\log t}\right\}dt\,,$$

la formule (8) nous fournit un développement en série de factorielles de la fonction $\psi(x)$ avec l'approximation du reste $R_n(x)$:

$$\frac{n!\,\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(1)\,x^k}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+n+1)}\le(-1)^k R^n(x)\le$$

$$\le\frac{n!\,\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(0)\,x^k}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+n+1)}\,,$$

où la fonction $w(t)$ est donnée par (9), les coefficients $\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(t)$ et $\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^n\,w(o)$ tendant vers zéro avec $1/n$.

Ainsi, par exemple, on obtient en particulier pour $k=n=1$, l'inégalité

$$\frac{(C-\frac{1}{2})\,x}{(x+1)\,(x+2)}\le\psi(1+x)-\log(1+x)+\frac{C}{1+x}\le\frac{(1+C)\,x}{(x+1)\,(x+2)}\,,$$

valable pour tout $x>-1$, où C est la constante d'Euler. Cette inégalité est d'autant plus précise que x et $1/x$ sont plus petits et montre que $\psi(1+x)$ peut être remplacée, avec une approximation suffisante, par la fonction $\log(1+x)-\dfrac{C}{1+x}$, pour toutes les valeurs positives de x.

Beograd, le 16-X-1932.

Pendant la correcture, je me suis apperçu qu'une partie des résultats exposés se trouve déjà dans la Note M. Th. Kalusa, *Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen* {Math. Zeitschr. **28** 161—170 (1928)}.