U N I V E R S I T E T I I P R I S H T I N Ë S

Fakulteti i shkencave matematike-natyrore

Mr Ramadan Zejnullahu

DISA VEÇORI TË SPLEIN-FUNKSIONEVE INTERPOLATIVE NË HAPËSIRAT E HILBERTIT

(disertacion i doktoratës)

Prishtinë 1988

Rezultatet e paraqitura në këtë punim janë arritur nën udhëheqjen e Dr Halil Turkut prof. ordinar i FSHMN në Prishtinë. Për këtë ndihmë atij i shprehi mirënjohje të thellë.

////

P Ë R M B A J T J A

////

H Y R J E

Në pikëpamje historike, termin "splein-funksion" për herë të parë é hasim në punimin e Schoenberg-ut [41] dhe atë për të shënuar funksionet polinomiale të cilat zbatohen në rastin e minimizimit të funksionelit

$$I(f) = \int_{a}^{b} (f^{(q)}(t))^2 \, dt \quad (f \in H^q)$$

në bashkësinë e funksioneve që i plotësojnë kushtet e interpolimit $f^{(j)}(t_i) = y_{ij}$.

Pas viteve 1964, shumë matematikanë duke zbatuar metodat e analizës funksionale kanë bërë përpjekje dhe kanë arritur rezultate në përgjithësimin e kuptimit të splein-funksionit dhe zbatimit të tij në teorinë e përafrimeve në hapësirat e Hilbertit. Kështu Golomb dhe Weinberger [9] kanë vënë bazën e teorisë së përafrimit të funksionelëve linear dhe të kufizuar në hapësirën e Hilbertit me splein-funksionet polinomiale. Rezultat mjaft me rëndësi paraqet punimi i Schoenberg-ut [40] në të cilin është dhënë lidhja ndërmjet splein-funksionit dhe përafrimit më të mirë në kuptim të Sard-it. Ky rezultat, në rastin e hapësirave abstrakte të Hilbertit është përgjithësuar nga Atteia [1].

Viteve të fundit është duke u punuar mjaft edhe në teorinë e splein-funksioneve dy e më tepër dimensionale, në ç'drejtim bazë të fortë japin punimet Avakjan [4] dhe Pereverzev [31]

Problemet e natyrës numerike që dalin gjatë interpolimit të splein-funksioneve polinomiale sot me lehtësi zgjidhen me anë të kompjuteristikës. Po përmendim vetëm sa për ilustrim interpolimin me ndihmën e të ashtuquajturve splein-funksione polinomiale të Newton-it [7].

Në këtë punim nuk tentohet të ndriçohen të gjitha aspektet e teorisë së splein-funksioneve, sepse një gjë e tillë praktikisht është e pamundur, por do të kufizohemi në ato veti që lidhen me minimizimin e operatorëve dhe funksionelëve në hapësirat reale të Hilbertit.

Për lehtësi studimi punimi është ndarë në tre kapituj me nga disa paragrafe, që së bashku formojnë një tërësi.

Në kapitullin e parë janë dhënë disa rezultate dhe kuptime më parë të njohura të cilat do të shërbejnë për zgjidhjen e problemeve të shtruara.

Në kapitullin e dytë kryesisht shqyrtohet problemi i ekzistencës së splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$. Pikërisht shqyrtohen kushtet e zgjidhjes së problemit të minimizimit abstrakt

$$\|T(s)\|_Y^2 = \inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in A^{-1}(z)\right\} \quad (z \in Z)$$

ku $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ dhe $A \in \mathcal{L}(X,Z)(R(A) = Z)$. Këtu zgjidhja është dhënë për këto raste:

1. Kur X,Z janë hapësira reale të Banahut, kurse Y është hapësirë reale e Hilbertit. Në këtë rast janë vërtetuar këto teorema:

T e o r e m ë. Në qoftë se

(i) bashkësia $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është e mbyllur në Y

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$,

atëherë ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

T e o r e m ë. Në qoftë se

(i) $N(T)+A^{-1}(z)(z \in Z)$ është bashkësi e mbyllur në X

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$,

atëherë ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

2. Kur X,Z janë hapësira reale të Banahut, kurse Y hapësirë reale refleksive e Banahut. Në këtë rast është vërtetuar kjo

T e o r e m ë. Në qoftë se

(i) bashkësia $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është e mbyllur dhe e kufizuar në Y

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$,

atëherë ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

Kushtet nën të cilat bashkësia $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është e mbyllur në Y i përcaktojnë pohimet 2.2.7, 2.2.10, 2.2.13 dhe 2.2.14, për vërtetimin e të cilëve zbatohet teoria e zgjidhjes së ekuacioneve operatoriale të rendit të parë në hapësirat e Banahut ([11], [15], [16], [17], [35], [44], etj.).

Në paragrafin 2.3 janë dhënë disa pohime të cilat e karakterizojnë ekzistencën e splein-funksionit interpolativ, pavarsisht nga teoremat mbi ekzistencën dhe unicitetin. Vërtetimi i tyre bëhet duke zbatuar vetitë e operatorëve të konjuguar të operatorëve A dhe T ([16], [17], [33], etj.) si dhe teorinë e derivimit në kuptim të Frechet-it në hapësirat e Banahut ([33], [48], etj.). Rezultat kryesor këtu paraqet teorema 2.3.1 për të cilën janë dhënë dy vërtetime dhe disa rrjedhime të saja.

Duke ruajtur një analogji me [22], në të cilën konstruktohet splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$, nën kushtet që:

(a) X,Y të jenë hapësira reale të Hilbertit

(b) $\dim N(T) = q \leq n = \dim (Z = R^n)$

(c) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$,

në paragrafin 2.4 është treguar konstruktimi i splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ kur janë të plotësuara kushtet:

(a) T është operator linear i kufizuar i hapësires reale refleksive të Banahut X mbi hapësirën reale të Hilbertit Y.

(b) $\dim N(T) = m \leq n = \dim Z$

(c) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$.

Këtu është tregue se splein-funksioni interpolativ $s=s(z,A,T)$ paraqitet si zgjidhje e sistemit të ekuacioneve operatoriale të rendit të parë

$$A(s) = z \quad \wedge \quad T(s) = C(z)$$

ku C është operator linear i vazhdueshëm i hapësirës Z në $[TN(A)]^{\perp}$.

Duke zbatuar teoremat mbi ekzistencën dhe unicitetin e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$, në kapitullin e tretë është shqyrtuar kryesisht ekzistenca e funksionelit optimal aproksimativ në hapësirën e splein-funksioneve interpolative S, kur X,Z janë hapësira reale të Banahut, kurse Y hapësirë reale e Hilbertit.

Në paragrafin 3.1 është dhënë përkufizimi i hapësirës së splein funksioneve interpolative dhe disa veti karakteristike të saja. Me lemën 3.1.2 është treguar se hapësira S ruan strukturën algjebrike dhe topologjike të hapësirës X. Teorema 3.1.5 ekzistencën e splein-funksionit interpolativ $s=s(z,A,T)$ e kushtëzon me kompaktësinë e bashkësisë $A^{-1}(z)(z \in Z)$ në kuptim të topologjisë së dobët në X, për të cilin kusht edhe hapësira S është kompakte për topologjinë e dobët në X. Me ndihmën e vargjeve minimizuese, teorema 3.1.5 mund të përgjithësohet edhe për çdo funksionel $J(x)$ gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë në bashkësinë $A^{-1}(z)(z \in Z)$. Me të ashtuquajturën metodë e projeksionit të gradientit e cila bazohet në konstruktimin e një vargu minimizues, në teoremën 3.1.8 është dhënë lidhja ndërmjet elementeve të hapësirës S dhe operatorit të projektimit. Pikërisht është vërtetuar implikacioni:

$$s \in S \Longrightarrow s = P_{A^{-1}(z)}(s-2\alpha T^{*}T(s)),(\alpha > 0).$$

Në paragrafin 3.2 është shqyrtuar ekzistenca e funksionelit aproksimativ optimal në hapësirën e splein-funksioneve interpolative S. Këtu është treguar se nën kushtet e ekzistencës dhe unicitetit të splein-funksionit interpolativ $s=s(z,A,T)$, për funksionelin $f \in X^{*}$ funksioneli i trajtës

$$g = \ell \circ A \quad \text{ku} \quad \ell = f \circ m ,$$

i cili mund të paraqitet edhe në këtë trajtë:

$$g = f \circ \theta ,$$

ku m dhe θ janë përkufizuar si në paragrafin 3.1, paraqet funksionel optimal aproksimativ në hapësirën S.

Në paragrafin 3.3 është shqyrtuar gjetja e vlerës së përafërt të funksionelit $f \in X^{*}$ për elementet e bashkësisë jo të zbrazët

$$\Omega_C = \{x \in X: A(x)=z \wedge \|T(x)\|_Y \leq C\}.$$

Është vërtetuar se për çdo konstantë C të tillë që $\Omega_C \neq \emptyset$, vlen relacioni

$$m = \frac{b-a}{2} = f(s) \quad \text{ku} \quad s=s(z,A,T) \wedge f(\Omega_C) = (a,b).$$

Ky rezultat në rastin kur $Z = R^n$ është publikuar në [9]. Të përmendim se e njëjta teoremë, për rastin kur X,Y,Z janë hapësira reale të Hilbertit është vërtetuar në [22].

Në arritjen e këtyre rezultateve, ndihmë të madhe profesionale më'ka ofrue Dr Halil Turku, prof. ordinar i FSHMN në Prishtinë. Për këtë ndihmë ate e falenderoj thellësisht. Falenderoj gjithashtu Dr Muharrem Berishën, prof. ordinar dhe Dr Minir Efendiun, prof. inordinar të cilët pas leximit të dorëshkrimit me vërejtjet e tyre kanë ndikuar që punimi sa më tepër të lirohet nga të metat.

////

I. DISA POHIME NDIHMËSE

Në këtë kapitull po i paraqesim disa rezultate më të rëndësishme të teorisë së splein-funksioneve, të cilat varsisht nga problematika të cilën e trajtojnë po i klasifikojmë në disa paragrafe.

1.1. Përafrimi me ndihmën e splein-funksioneve.

Në këtë paragraf do të përqëndrohemi në përafrimet me ndihmën e splein-funksioneve polinomiale me të metë (defekt) të çfarëdoshme dhe ata kubikë periodikë. Realizimi i rezultateve këtu arrihet kryesisht me metoda të analizës funksionale dhe të asaj numerike, shih p.sh. Schurer dhe Cheney [37], Ligun [21], Korneiçuk [13] dhe [14], Vasilev [51] etj.

Në punimin Schurer dhe Cheney [37] është bërë vlerësimi i normës së splein-operatorit të interpolimit dhe përafrimit të tij me funksione të vazhdueshme. Këtu rezultatet janë marrë në një klasë më të ngushtë të splein-funksioneve, d.m.th të të ashtuquajturëve splein-funksione kubike periodike. Le të jetë

C hapësira e të gjitha funksioneve të vazhdueshme (në lidhje me sup-normën) dhe periodike në $[0,1]$ të tillë që $f(0)=f(1)$. Çdo ndarjeje të intervalit $[0,1]$ në n-pjesë

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$$

i korespondohet nënhapësira n-dimensionale $S \subset C$ elementet s të së cilës janë splein-funksione kubike periodike, d.m.th i plotësojnë këto veti:

(i) ekziston s'' dhe i takon hapësirës C

(ii) në nënintervalin $[x_i, x_{i+1}]$, s është polinom i shkallës së tretë.

Operatori $L: C \longrightarrow S$, i cili çdo elementi $f \in C$ i korespondon elementin e vetëm $s \in S$ të tillë që $s(x_i) = f(x_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ është linear dhe idempotent. Operatori i tillë quhet splein-operator i interpolimit. Në punimin [38] është dhënë një vlerësim i normës së operatorit L, kurse në [37], në rastin e ndarjes së intervalit $[0,1]$ në n-pjesë të barabarta tregohet se për çdo $n \in N, \|L\| \leq 1,549$. Rezultat të rëndësishëm të këtij punimi paraqet përafrimi i $L(f)$ me f dhe vlerësimi i gabimit të bërë gjat këtij përafrimi me ndihmën e modulit të vazhdueshmërisë $\omega(f,\delta)$ të funksionit f. Pikërisht është vërtetuar se vlenë relacioni

$$(\forall n \in N)(\forall f \in C)\left|(L(f)-f)(x)\right| \leq c_n \omega(f,\delta)$$

ku $\delta = \min|x-x_i| \wedge \|L\| \leq c_n < 2\|L\|$, si rrjedhim i të cilit merret vlerësimi

$$(\forall n \in N)(\forall f \in C)\ \|f-L(f)\| \le \|L\|\,\omega(f,\tfrac{1}{2n})$$

Më tutje, në punën e tyre të mëtejshme Schurer dhe Cheney kanë vërtetuar se për çdo splein-funksion kubik dhe periodik që i korespondohet ndarjes së segmentit $[0,1]$ në n-pjesë të barabarta vlen relacioni

$$\max_i |s'(x_i)| \le \sqrt{3}\, n \max_i |s(x_i)-s(x_{i-1})|$$

P ë r k u f i z i m. Funksioni i trajtës

$$s(t) = \sum_{i=0}^{r} a_i t^i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{k_j-1} b_{j\ell}(t-t_j)_+^{r-1} \tag{1}$$

ku $r \ge 1, m \ge 0, 1 \le k_j \le r$ dhe $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ quhet splein-funksion me të metë k_j. Pikat $t_j (1 \le j \le m)$ quhen nyje të splein-funksionit $s(t)$.

Vasilev [51] ka formuluar dhe ka zgjidhur problémin

$$\alpha = \min_{A\in\Omega} \mathcal{C}(A) \quad \text{ku} \quad \mathcal{C}(A) = \max_{t\in D} |s(t)-f(t)| \tag{2}$$

ku $s(t)$ është splein-funksioni i përkufizuar me (1), $f \in C(D)$, $\Omega = \{ A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^n : s(\tau_j) = f(\tau_j), 1 \le j \le d\}$, D bashkësi kompakte në R, $d < n = r+1+\sum_{j=1}^{m} k_j$ dhe $\min\{\mathcal{C}(A) : A \in \Omega\} > 0$. Këtu gjithashtu janë dhënë disa kondita për zgjidhjen e problemit (2) në rastin kur

$$s(t) = s(A,t) = (A,u(t)), \tag{3}$$

ku $A = (a_0,\dots,a_r,b_{10},\dots,b_{1k_1-1},\dots,b_{m0},\dots,b_{mk_m-1})$ dhe $u(t) = (1,t,\dots,t^r,(t-t_1)_+^{r-k_1+1},\dots,(t-t_1)_+^r,\dots,(t-t_m)_+^{r-k_m+1},\dots,(t-t_m)_+^r)$. Në këtë rast, zgjidhja e problemit (2) sillet në zgjidhjen e problemit të interpolimit

$$(A,u(\tau_j)) = y_j \quad (1 \le j \le d). \tag{4}$$

Le të jetë

$$w^*(t) = s(A^*,t) - f(t)$$

dhe

$$T(t_i,t_j) = \sum \tau_\nu \quad (\tau_\nu \in (t_i,t_j)).$$

Vasilev [51] ka vërtetuar se nëse

$$T(t_i,t_j) \le r+1+\sum_{\nu=i+1}^{j-1} k_\nu \quad (0 \le i \le j \le m+1),$$

A^* do të jetë zgjidhje e problemit (2), atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston intervali $(t_\kappa, t_{\kappa+q+1})$, $\kappa \ge 0$, $\kappa+q \le m$ që i plotëson kushtet:

(i) $(t_\kappa,t_{\kappa+q+1})$ përmban të gjitha nyjet $\tau_j (1 \le j \le d)$

(ii) në bashkësinë $(t_\kappa,t_{\kappa+q+1}) \cap D$ gjendën pikat

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{N-d} \quad (N=r+1+\sum_{\kappa+1}^{\kappa+q} k_j \vee N=a+1 \text{ për } q=0)$$

të tilla që

$$|w^*(x_i)| = \varphi(A^*) \quad (0 \le i \le N-d)$$

$$w^*(x_i) = (-1)^{s_i+1} w^*(x_{i-1}) \quad (1 \le i \le N-d)$$

ku me s_i shënojmë numrin e nyjeve τ_j që ndodhën në intevalin (x_{i-1},x_i).

Rëndësi të veçantë në këtë lëmi paraqesin rezultatet e Schumaker-it [43] të cilat japin esencën e përafrimit uniform me ndihmën e të ashtuquajturve splein-funksione të Chebyshev-it, ndërsa vlerësimin e gabimit të bërë gjatë përafrimit të funksioneve me këto tipe splein-funksionesh, me ndihmën e modulit të vazhdueshmërisë e kanë dhënë matematikantët Korneiçuk [13] dhe [14], Zhenikbajev [56] etj.

1.2. Ekzistenca dhe uniciteti i splein-funksionit abstrakt në hapësirën e Hilbertit

Në fillim do ti paraqesim disa rezultate të minimizimit në L_2 të funksioneve të klasës L_2^r, të cilat mund të konsiderohen si fillestare në lëmin e splein-funksioneve interpolative abstrakte në hapësirat e Hilbertit.

Le të jetë

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \qquad (1)$$

një ndarje e segmentit $[0,1]$ në n-pjesë, $1 \leq k \in Z$ dhe

$$Y = \{y_{ij}\} (0 \leq i \leq n \wedge 0 \leq j \leq k-1) \qquad (2)$$

një familje numrash. Në bashkësinë $L_2^r(Y)$, le të marrim një funksion $f \in L_2^r$ $(r \geq k)$ që i plotëson kushtet e interpolimit

$$f^{(j)}(t_i) = y_{ij} (0 \leq i \leq n \wedge 0 \leq j \leq k-1) \qquad (3)$$

Problemi i ekzistencës së funksionit f, derivati i rendit

r i të cilit ka normë minimale në L^2, për rastin kur $r = 2$ është zgjidhur nga Holladay [10]. Në rastin e përgjithshëm ky problem është zgjidhur nga Varga [50], Golomb dhe Weinberger [9] dhe Schoenberg [41]. Lidhur me këtë problem, është vërtetuar se vlen relacioni

$$\|s^{(r)}\|_2 = \inf \left\{\|f^{(r)}\|_2 : f \in L_2^r(Y)\right\},$$

ku s është i vetmi splein-funksion i rendit $2r-1$ me të metë k sipas zbërthimit (1), që i plotëson kushtet e interpolimit

$$s^{(j)}(t_i) = y_{ij} \quad (0 \leq i \leq n \wedge 0 \leq j \leq k-1)$$

për $r > k$, $\qquad$ (*)

$$s^{(\nu)}(0) = s^{(\nu)}(1) = 0 \quad (r \leq \nu \leq 2r-k-1).$$

Në qoftë se në vend të pikave të fiksuara $t_i \in [0,1]$ $(0 \leq i \leq n)$ merren numra të plotë $\tau_i (0 \leq \tau_i \leq r-1 \wedge 1 \leq i \leq n)$, atëherë merret problemi i interpolimit të Favard-it

$$\inf\left\{\|f^{(r)}\|_p : f \in L_p^r, f^{(j)}(\tau_i) = y_{ij}; 1 \leq i \leq n \wedge 0 \leq j \leq \tau_i\right\},$$

i cili për $p = \infty$ është shqyrtuar nga Favard [8] dhe është treguar se zgjidhja arrihet në splein-funksionet e rendit r. Rastet tjera (për $0 < p < \infty$) janë shqyrtuar nga De Boor [5].

Shënojmë me $g(t) = f(t) - s(t)$, gabimin e bërë gjatë përafrimit të cilitdo funksioni $f \in L_2^{(r)}(Y)$ me splein-funksionin $s(t)$ të rendit $2r-1$, i cili ka të metë $k \leq r$. Në qoftë se $s(t)$ i plotëson kushtet e interpolimit të shprehura me relacionet (*), në monografinë [14] është vërtetuar se vlen barazimi

$$\|g\|_2^2 = \|f^{(r)}\|_2^2 - \|s^{(r)}\|_2^2$$

prej nga rrjedh implikacioni

$$(\forall f \in L_2^{(r)}(Y))\ \|s^{(r)}\|_2^2 \leq \|f^{(r)}\|_2^2 \Longrightarrow s(t) \in L_2^{(r)}(Y).$$

Ligun [21] ka dhënë vlerësimin e gabimit të bërë gjatë përafrimit të funksioneve të derivueshme me të ashtuquajturit splein-funksione Hermitjane.

Në monografinë [22], në mënyrë të përpiktë është shqyrtuar interpolimi i splein-funksioneve polinomiale të rendit $2q-1$ me ndihmën e funksioneve të klasës $H^q (q \geq 1)$. Vazhdim i këtyre rezultateve janë punimet Atteia [3], Joly Laurent [24], Rockefellar [36], Moreau [25] [26] [27], etj., si dhe rezultatet e paraqitura në monografitë [14] dhe [49].

Në punimin [53] është shqyrtuar ekzistenca dhe uniciteti i splein-funksioneve interpolative në bashkësitë konvekse të hapësirës së Hilbertit. Pikërisht është trajtuar zgjidhja e këtij problemi:

$$\|T(s)\|_Y^2 = \inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in C\right\}, \tag{4}$$

ku $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$; H_1, H_2 janë hapësira të Hilbertit dhe $C \subset H_1$ bashkësi konvekse dhe e mbyllur. Këtu me $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ është shënuar hapësira e operatorëve linear të kufizuar të hapësirës H_1 në hapësirën H_2. Duke zbatuar teoremën mbi ekzistencën e elementit me normë minimale në bashkësinë konvekse të hapësirës së Hilbertit [33] është treguar se në rastin kur H_2 është hapësirë e Banahut, problemi (4) nuk është gjithëherë i zgjidhshëm. Megjithatë, rasti kur H_2 është hapësirë refleksive e Banahut si dhe disa raste tjera këtu nuk janë shqyrtuar. Përgjigje pozitive mbi mundësinë e zgjidhjes së problemit (4) për rastin kur H_1 dhe H_2 janë hapësira të Hilbertit, japin pohimet e mëposhtme:

<u>T e o r e m ë</u>.([53]). Në qoftë se bashkësia $N(T) + C$ është e mbyllur në H_1, atëherë problemi (4) ka të paktën një zgjidhje.

Këtu me $N(T)$ është shenuar hapësira zero e operatorit T.

Në qoftë se me C_∞ shënojmë konin asimptotik të bashkësisë C ([22]), atëherë vlen kjo:

<u>T e o r e m ë</u>.([24]).Në qoftë se $N(T)$ është me dimension të fundëm dhe nëse $C_\infty \cap N(T)$ është nënhapësirë e H_1, problemi (4) ka të pakten një zgjidhje.

Le të jetë $H_1 = H^q_{[a,b]}$ $(q \geq 1)$ hapësira e funksioneve reale me derivat të rendit q-1 absolutisht të vazhdueshëm në segmentin [a,b] për të cilët

$$\int_a^b (f^{(q)}(t))^2 \, dt < +\infty .$$

$H_1 = H^q_{[a,b]}$ $(q \geq 1)$ është hapësirë e Hilbertit në lidhje me prodhimin skalar

$$(f|g)_q = \sum_{i=1}^{q} \int_a^b f^{(i)}(t)g^{(i)}(t)\,dt$$

dhe me normë përkatëse

$$\| f\|_q = ((f \mid f)_q)^{1/2}$$

Më tutje, le të jetë $H_2 = H^o = H^o_{[a,b]}$, $T \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ operator i përkufizuar me relacionin

$$(\forall f \in H^q)\ T(f) = d^{(q)}(f) = f^{(q)}$$

dhe

$$a = x_o < x_1 < \dots < x_n = b$$

një ndarje e segmentit $[a,b]$ në n-pjesë. Në qoftë se bashkësia C ka formën

$$C = \{x \in H_1 : a_i \leq (x \mid y_i) \leq b_i, 1 \leq i \leq n\},$$

ku $a_i < b_i$ dhe $y_i \in H_1 (1 \leq i \leq n)$, atëherë vlen kjo:

T e o r e m ë.([22]). Elementi $s \in H_1$ paraqet zgjidhje të problemit (4), atëherë dhe vetëm atëherë kur

(i) s është polinom i shkallës 2q-1 në secilin nga intervalet $[a,t_1),(t_i,t_{i+1})(1 \leq i \leq n-1)$ dhe $(t_n,b]$

(ii) $s^{(j)}(t_i^-) = s^{(j)}(t_i^+)(0 \leq j \leq 2q-2 \wedge 1 \leq i \leq n)$

(iii) $s^{(j)}(t_1^-) = s^{(j)}(t_n^+) = 0 (q \leq j \leq 2q-1)$

(iv) $a_i \leq s(t_i) \leq b_i \ (1 \leq i \leq n)$

(v) për $\lambda_i = (-1)^q(s^{(2q-1)}(t_i^+)-s^{(2q-1)}(t_i^-))$,

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{për} \quad s(t_i) = a_i$$

$$\lambda_i \leq 0 \quad \text{për} \quad s(t_i) = b_i$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{për} \quad a_i < s(t_i) < b_i (1 \leq i \leq n).$$

Me metodën e koneve me drejtime të lejuara, Laurent [23] ka bërë përgjithsimin e splein-funksioneve interpolative në bashkësitë konvekse të hapësirës së Hilbertit.

Në vazhdim do të përkufizojmë të ashtuquajturin splein-funksion abstrakt interpolativ. Le të jenë X, Y dhe Z tri hapësira reale të Hilbertit, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ dhe $A \in \mathcal{L}(X,Z)$. Për $z \in Z$ të dhënë më parë, vejmë:

$$I_z = \{x \in X : A(x) = z\} = A^{-1}(z)$$

<u>P ë r k u f i z i m</u>. Elementi $s \in I_z$ që e plotëson relacionin

$$\|T(s)\|_Y^2 = \inf\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in I_z\} \tag{5}$$

quhet splein-funksion interpolativ për z në lidhje me operatorët A dhe T dhe shënohet me $s = s(z,A,T)$.

Të shtojmë se katrori në relacionin (5) nuk ka domethënje teorike, përpos që problemet e natyres numerike që rrjedhin nga (5) në rastin e splein-funksioneve polinomiale janë të liruara nga radikalet. Tregojmë tani se zgjidhja e problemit (5) në vete sjell zgjidhjen e problemit të interpolimit të lëmuar të funksioneve të klasës $H^q = H^q_{[a,b]}$ $(q \geq 1)$ për n-kushte të interpolimit të dhëna me barazimet

$$f(t_i) = r_i \quad (1 \leq i \leq n) \tag{6}$$

Me të vërtetë, le të jenë $X = H^q_{[a,b]}$ $(q \geq 1)$, $Y = H^o_{[a,b]}$ dhe

$Z = R^n$. Operatorët $T:H^q \longrightarrow H^o$ dhe $A:H^q \longrightarrow R^n$ i përkufizojmë përkatësisht me relacionet

$$(\forall f \in H^q)\ T(f) = d^{(q)}(f) = f^{(q)}$$

dhe

$$(\forall f \in H^q)\ A(f) = (f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n))$$

ku $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$. Le të jetë $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^n$, atëherë

$$I_z = \{ f \in H^q :\ f(t_i) = z_i \ (1 \leq i \leq n)\}$$

dhe

$$\| T(f) \|_Y^2 = \int_a^b (f^{(q)}(\xi))^2\, d\xi .$$

Prej nga sipas (5), ekziston $s \in I_z (s(t_i) = z_i;\ 1 \leq i \leq n)$ i tillë që

$$\int_a^b (s^{(q)}(\xi))^2\, d\xi = \inf \left\{ \int_a^b (f^{(q)}(\xi))^2\, d\xi : f \in I_z \right\}.$$

Relacioni i mësipërm paraqet kushtin e mjaftueshëm për interpolim në hapësirat H^q ([22]).

Në monografinë e P.J. Laurent-it ([22] kaptina IV) janë dhënë kushtet e mjaftueshme për zgjidhjen e problemit (5). Pikërisht është tregue se, në qoftë se janë të plotësuara kushtet:

(i) $N(A) + N(T)$ është bashkësi e mbyllur në X

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$

atëherë për çdo $z \in Z$ ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

Të vërejmë se kushti që $N(A) + N(T)$ të jetë bashkësi e mbyllur në X mund të zëvendësohet me kushtin që njëra nga nënhapësirat $N(A)$ ose $N(T)$ të jetë relativisht kompakte ([46]).

Me rëndësi të veqantë praktike për zgjidhjen e problemit (5) janë rastet kur:

1. $N(T)$ ka dimension (kodimension) të fundëm
2. $N(A)$ ka dimension (kodimension) të fundëm
3. Z ka dimension të fundëm.

Këto raste në mënyrë të gjithanshme janë shqyrtuar në [22], [5],[6] etj., por nuk është shqyrtuar zgjidhja e problemit (5) kur ndonjëra nga hapësirat X,Y dhe Z janë hapësira të Banahut apo refleksive të Banahut.

1.3. Minimizimi dhe aproksimimi i funksionelëve në hapësirat e Hilbertit.

Në këtë paragraf do të paraqesim disa rezultate bazë të teorisë së minimizimit dhe aproksimimit të funksionelëve në hapësirat e Hilbertit.

Moreau [25] ka treguar se për çdo funksionel konveks gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë të hapësirës së Hilbertit X, funksioneli

$$F(u) = \|u-z\|^2 + 2f(u), (u \in X) \qquad (1)$$

e arrinë vlerën minimale në një pikë të vetme $x \in X$ të cilën e shënojmë me $x = prox_f z$. Këtë pikë e quajmë pikë proksimale me z në lidhje me funksionelin f. Nëse në barazimin (1) në vend të funksionelit f merret funksioneli polarë $g(y)$ i përkufizuar me relacionin e mëposhtëm

$$g(y) = \sup_{x \in X} ((u|y) - f(u)), \qquad (2)$$

i cili gjithashtu është konveks dhe gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në X ([25]), atëherë pikën e vetme y për të cilën $F(u)$ arrinë vlerë minimale e shënojmë me $y = prox_g z$ dhe e quajmë pikë proksimale me z në lidhje me funksionelin g. Me ndihmën e pikave proksimale, Moreau [30] jep një paraqitje të elementeve të hapësirës X. Pikërisht ai ka vërtetuar se nëse f dhe g janë funksione polare gjysmë të vazhdueshme nga poshtë në X, atëherë për çdo $x,y,z \in X$, vetitë e mëposhtme janë ekuivalente

(i) $z = x + y \wedge f(x) + f(y) = (x|y)$

(ii) $x = prox_f z \wedge y = prox_g z$.

Në punimin [26] Moreau gjithashtu ka dhënë një paraqitje të hapësirës së Hilbertit X me ndihmën e të ashtuquajturve kone polare me kulm në origjinë ([18]).

Duke zbatuar rezultatet e mësipërme, në punimin [53] është dhënë një vërtetim i teoremës së Riesz-it mbi projeksionet, kurse në punimin [54] janë dhënë disa veti të pikave proksimale. Pikërisht është vërtetuar kjo:

<u>T e o r e m ë.</u> ([54]). Le të jetë X hapësirë reale e Hilbertit dhe f,g çift funksionesh polare në X. Njëvlerësisht është i përcaktuar çifti i funksioneve P dhe Q të X në X,

$$\left.\begin{array}{l} P: z \longrightarrow \mathrm{prox}_f z \\ Q: z \longrightarrow \mathrm{prox}_g z \end{array}\right. \qquad (z \in X)$$

me këto veti:

(i) $z = P(z) + Q(z) \quad (z \in X)$

(ii) P,Q janë funksione lineare të kufizuara

(iii) $\|z\|^2 \geq \|P(z)\|^2 + \|Q(z)\|^2 \quad (z \in X)$.

Rezultat bazë në teorinë e përafrimeve të funksionelëve linear në hapësirat e Banahut paraqet kjo:

<u>T e o r e m ë (e Sard-it)</u>([39]). Le të jenë X,Y,Z hapësira të Banahut dhe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Në qoftë se për operatorin $A \in \mathcal{L}(X,Z)$ vlen implikacioni

$$T(x) = 0 \Longrightarrow A(x) = 0,$$

atëherë ekziston $U \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i tillë që $A = U \circ T$ dhe

$$(\forall x \in X) \; A(x) = U(T(x)).$$

Duke zbatuar teoremën e Sard-it, Golomb dhe Weinberger

[9] kanë dhënë disa rezultate mbi ekzistencën e funksionelit aproksimativ në hapësirën e splein-funksioneve interpolative S, për rastin kur X,Y,Z janë hapësira reale të Hilbertit.

////

II. DISA VEÇORI TË SPLEIN-FUNKSIONEVE INTERPOLATIVE NË HAPËSIRAT E HILBERTIT

2.1. Shënime elementare

Le të jenë X,Z hapësira reale të Banahut, Y hapësirë reale e Hilbertit, A operator, linear i kufizuar i hapësirës X mbi hapësirën Z dhe T operator linear i kufizuar i hapësirës X në hapësirën Y. Shënojmë me $N(A)$ dhe $R(A)$ hapësirën zero, përkatësisht rangun e operatorit A, kurse me A^* operatorin e konjuguar të operatorit A. Për një vektor të fiksuar $z \in Z$, vejmë

$$I_z = \left\{ x \in X: A(x) = z \right\} = A^{-1}(z)$$

d.m.th. I_z paraqet bashkësinë e zgjidhjeve të ekuacionit operatorial të rendit të parë

$$A(x) = z. \tag{1}$$

<u>P ë r k u f i z i m 2.1.1.</u> Elementi $s \in X$ për të cilin plotësohet relacioni

$$\| T(s)\|_Y^2 = \inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in A^{-1}(z)\right\} \tag{2}$$

quhet splein-funksion interpolativ për z në lidhje me operatorët A dhe T dhe shënohet me simbolin $s = s(z,A,T)$.

Në qoftë se në barazimin (2) bëjmë këto zëvendësime:

$$T(s) = \bar{y},\ T(x) = y \text{ dhe } \Omega_z = TA^{-1}(z),$$

atëherë barazimi (2) merr formën

$$\| \bar{y}\|_Y^2 = \inf\left\{\| y\|_Y^2 : y \in \Omega_z\right\}. \tag{3}$$

Meqenëse bashkësia Ω_z është konvekse (sepse $A^{-1}(z)$ është bashkësi konvekse dhe T operator linear), barazimi (3) ka zgjidhje të vetme, atëherë dhe vetëm atëherë kur Ω_z është e mbyllur në Y ([32]). Prandaj në shqyrtimin e mëtejshëm do të përqëndrohemi:

1. në gjetjen e kushteve për të cilat bashkësia $TA^{-1}(z)$ $(z \in Z)$ është e mbyllur në Y dhe

2. në zbatimin e kushteve për të cilat ekuacioni operatorial $T(x) = \bar{y}$ ka zgjidhje të vetme ([17], [44] etj.).

Në qoftë se Y është hapësirë e Banahut, atëherë kushti që bashkësia $TA^{-1}(z)$ të jetë e mbyllur në Y nuk është i mjaftueshëm për zgjidhjen e barazimit (3) ([53]). Mu për këtë në paragrafin 2.2 si supozim fillestar është marrë që Y të jetë hapësirë reale e Hilbertit ose reale refleksive e Banahut.

////

2.2. Ekzistenca dhe uniciteti i splein-funksionit interpolativ në hapësirat e Banahut

Në këtë paragraf do të shqyrtojmë ekzistencën e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ në rastin kur X dhe Z janë hapësira reale të Banahut, kurse Y është hapësirë reale e Hilbertit.

T e o r e m ë 2.2.1. (Mbi ekzistencën dhe unicitetin) Në qoftë se

(i) bashkësia $TA^{-1}(z)(z\in Z)$ është e mbyllur në Y

(ii) $N(A)\cap N(T) = \{0\}$,

atëherë ekziston dhe është i vetëm splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$.

V ë r t e t i m. Le të jetë

$$d = \inf\left\{\|T(x)\|_Y : x\in A^{-1}(z)\right\}.$$

Nga përkufizimi i numrit d rrjedh ekzistenca e vargut $(x_n)\subset A^{-1}(z)$ të tillë që $\|T(x_n)\|_Y \longrightarrow d$ $(n\longrightarrow\infty)$. Më tutje, sipas rregullës së paralelogramit, për çdo $m,n\in N$, kemi:

$$\|T(x_n)-T(x_m)\|_Y^2 = 2\|T(x_n)\|_Y^2 + 2\|T(x_m)\|_Y^2 - 4\left\|\frac{T(x_n)+T(x_m)}{2}\right\|_Y^2 .$$

Meqenëse $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është bashkësi konvekse, atëherë $\frac{T(x_n)+T(x_m)}{2} \in TA^{-1}(z)$. Prandaj

$$\|T(x_n)-T(x_m)\|_Y^2 \leq 2\|T(x_n)\|_Y^2 + 2\|T(x_m)\|_Y^2 - 4d$$

prej nga

$$\|T(x_n)-T(x_m)\|_Y \longrightarrow 0 (m,n \longrightarrow \infty)$$

d.m.th. se $(T(x_n))$ është varg i Koshit në Y. Meqenëse Y është hapësirë e Hilbertit, ekziston $y \in Y$ i tillë që $T(x_n) \longrightarrow y$ $(n \longrightarrow \infty)$. Nga ana tjetër, meqë $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është bashkësi e mbyllur në Y dhe $(T(x_n)) \subset TA^{-1}(z)$, atëherë $y \in TA^{-1}(z)$. Rrjedhimisht, ekziston $s \in A^{-1}(z)$ i tillë që $T(s) = y$ dhe

$$\|T(s)\|_Y = \|y\|_Y = \lim_{n \to \infty} \|T(x_n)\|_Y = d =$$

$$= \inf \left\{ \|T(x)\|_Y : x \in A^{-1}(z) \right\},$$

d.m.th. $s = s(z,A,T)$.

Vërtetimi i teoremës 2.2.1 bëhet edhe në këtë mënyrë:

Meqenëse $R(A) = Z$, atëherë

$$(\forall z \in Z)(\exists x_0 \in X) \; A(x_0) = z$$

prej nga rrjedh që zgjidhja e barazimit $A(x) = z$ ka trajtën $x = x_0 + \bar{x}$ ku $\bar{x} \in N(A)$. Prej nga përfundojmë që gjetja e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ reduktohet në gjetjen e elementit me normë minimale në bashkësinë

$$\Omega_z = \{T(x_o)+T(\bar{x}) : \bar{x}\in N(A)\}.$$

Lehtë provohet se vlen relacioni

$$\Omega_z = TA^{-1}(z) = T(x_o) + TN(A), \tag{1}$$

prej nga sipas (i) rrjedh se bashkësia Ω_z është e mbyllur në Y. Në bazë të teoremës së Riesz-it ([20]), ekziston $\bar{y}\in Y$ i tillë që

$$\|\bar{y}\|_Y = d(0,\Omega_z) = \inf\{\|y\|_Y : y\in\Omega_z\},$$

d.m.th ekziston splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$ dhe sipas përkufizimit 2.1.1 ai paraqitet si zgjidhje e sistemit të ekuacioneve operatoriale të rendit të parë

$$T(s) = \bar{y} \wedge A(s) = z \tag{2}$$

U n i c i t e t i. Supozojmë të kundërtën se për $z\in Z$, ekzistojnë dy splein-funksione interpolative $s_1 = s(z,A,T)$ dhe $s_2 = s(z,A,T)$, atëherë sipas (2) dhe (ii) kemi:

$$A(s_1-s_2) = 0 \wedge T(s_1-s_2) = 0 \Longrightarrow s_1-s_2\in N(A)\cap N(T)$$

$$\Longrightarrow s_1 = s_2.$$

<u>V ë r e j t j e 2.2.2.</u> Nga relacioni (1) rrjedh se kushti (i) në teoremën 2.2.1 mund të zëvendësohet me kushtin që që $TN(A)$ të jetë bashkësi e mbyllur në Y.

Teoremë 2.2.3. Në qoftë se

(i) bashkësia $N(T)+A^{-1}(z)(z\in Z)$ është e mbyllur në X

(ii) $N(A)\cap N(T)=\{0\}$,

atëherë ekziston dhe është i vetëm splein-funksioni interpolativ $s=s(z,A,T)$.

Vërtetim. Shënojmë me $\Omega_z = TA^{-1}(z)(z\in Z)$. Në qoftë se bashkësia Ω_z është e mbyllur në Y, atëherë sipas ([32],T1.2.3) ekziston dhe është i vetëm elementi $\bar{y}\in\Omega_z$, i tillë që

$$\|\bar{y}\|_Y = \inf\{\|y\|_Y : y\in\Omega_z\}.$$

Në këtë rast bashkësia $T^{-1}(\bar{y})\cap A^{-1}(z)$ është jo e zbrazët dhe çdo element i -saj është splein-funksion interpolativ për z në lidhje me operatorët A dhe T. Tani do të tregojmë se bashkësia $TA^{-1}(z)(z\in Z)$ është e mbyllur në Y, atëherë kur plotësohet kushti (i). Me të vërtetë, ngushtimi $\tilde{T}$ i operatorit T në $\tilde{X}$ ([32], $X=N(T)+\tilde{X}\wedge Cl(\tilde{X})=\tilde{X}$), është linear i vazhdueshëm dhe reciprokisht i njëvlerëshëm. Prandaj ekziston $\tilde{T}^{-1}$ dhe ai është i vazhdueshëm, d.m.th.

$$(\forall B\subset X)\ Cl(B)=B \Longrightarrow Cl(\tilde{T}^{-1}(B))=\tilde{T}^{-1}(B).$$

Prej nga sipas relacionit

$$\Omega_z = TA^{-1}(z) = \tilde{T}^{-1}((N(T)+A^{-1}(z))\cap\tilde{X}),$$

rrjedh se bashkësia $TA^{-1}(z)$ është e mbyllur në Y, atëherë dhe vetëm atëherë kur $N(T)+A^{-1}(z)$ është e mbyllur në X.

V ë r e j t j e 2.2.4. Vërtetimi i teoremës 2.2.3 bëhet edhe duke zbatuar teoremën 2.2.1.

R r j e d h i m 2.2.5. Konditë e mjaftueshme për ekzistencën e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ është që

$$A^{-1}(z) = \{x \in X: f_i(x) \leq c_i, 1 \leq i \leq n\},$$

ku $f_i \in X^*$, $c_i \in R$, $1 \leq i \leq n$.

V ë r t e t i m. Le të jetë $u: X \longrightarrow R^n$ i dhënë me

$$u: x \in X \longrightarrow (f_1(x)-c_1, f_2(x)-c_2, \ldots, f_n(x)-c_n) \in R^n.$$

Shënojmë me $G^- = \{x \in R^n: x_i \leq 0, 1 \leq i \leq n\}$, atëherë $A^{-1}(z) = u^{-1}(G^-)$ dhe $u(A^{-1}(z)) \subseteq G^-$. Në bazë të teoremës 2.2.3, mjafton të tregojmë se bashkësia $N(T)+A^{-1}(z)$ është e mbyllur në X. Le të jetë $x \in Cl(N(T)+A^{-1}(z))$, atëherë ekziston vargu $(x_n)=(y_n+z_n)$ në $N(T)+A^{-1}(z)$ i tillë që, $x_n \longrightarrow x$ $(n \longrightarrow \infty)$, d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty} \|(x-y_n)-z_n\| = 0.$$

Meqenëse u është funksion i vazhdueshëm, atëherë ekziston $K>0$ i tillë që

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \|u(x_1)-u(x_2)\| \leq K \|x_1-x_2\|,$$

prej nga

$$\lim_{n\to\infty} \|u(x-y_n)-u(z_n)\| = 0.$$

Më tutje, meqë $u(x-y_n) \in u(x-N(T)) \wedge u(z_n) \in G^-$, atëherë

$u(x-N(T))\cap G^{-}\neq\emptyset$. Le të jetë $v\in u(x-N(T))\cap G^{-}$, atëherë $v=u(x-x')(x'\in N(T))$ dhe $u(x-x')\in G^{-}$, d.m.th $y=x-x'\in A^{-1}(z)$. Rrjedhimisht $x=x'+y\in N(T)+A^{-1}(z)$.

<u>Shembull 2.2.6.</u> Le të jetë $X=H^2_{[0,a]}$, $Y=L^2_{[0,a]}$, $Z=R^{n+1}$, $A\in\mathcal{L}(X,Z)$ i dhënë me

$$A(x)=(x(t_0),x(t_1),\dots,x(t_n))(0=t_0<t_1<\dots<t_n=a)$$

dhe $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ i dhënë me

$$T(x)=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Në këtë rast për çdo $z\in Z$ ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s=s(z,A,T)$. Për këtë mjafton të tregojmë se janë të plotësuara kushtet e teoremës 2.2.1.

(i): Le të jetë $y_0\in Cl(TN(A))$, atëherë ekziston vargu $(y_m)\subset TN(A)$ i tillë që $\|y_m-y_0\|\longrightarrow 0(m\longrightarrow\infty)$. Më tutje, meqë $(y_m)\subset TN(A)$, ekziston $(x_m)\subset N(A)(x_m(t_i)=0,0\le i\le n)$ i tillë që $x_m''(t)=y_m(t)(m\in N)$. Prej nga rrjedh se funksionet x_m mund të gjenden nga barazimet

$$x_m(t)=\int_0^a(t-u)y_m(u)du+\frac{t}{a}\int_0^a(a-u)y_m(u)du.$$

Nga sa treguam më lartë, rrjedh se ekziston $x_0\in N(A)$ i tillë që $x_m\longrightarrow x_0(m\longrightarrow\infty)$. Meqenëse T është funksion i vazhdueshëm, atëherë

$$T(x_m)=y_m\longrightarrow T(x_0)=y_0\Rightarrow y_0\in TN(A).$$

(ii): Supozojmë të kundërtën se $N(A)\cap N(T)\neq\{0\}$, atëherë ekziston $0\neq u\in X$ i tillë që

$$T(u)=0\wedge A(u)=0\Rightarrow((\forall t\in[0,a])u'(t)=0)\wedge(u(t_i)=0,0\leq i\leq n).$$

Prej nga duke zbatuar teoremën e Roles gjejmë se $u(t)=0$.

P o h i m 2.2.7. Le të jetë X hapësirë reale refleksive e Banahut. Në qoftë se

(i) $R(T)$ është bashkësi e mbyllur në Y

(ii) $N(A)\cap N(T)=\{0\}$,

atëherë për çdo $z\in Z$ ekziston dhe është i vetëm splein-funksioni interpolativ $s=s(z,A,T)$.

V ë r t e t i m. Sipas teoremës 2.2.1 dhe vërejtjes 2.2.2 mjafton të vërtetojmë se $TN(A)$ është bashkësi e mbyllur në Y. Le të jetë $y_o\in Cl(TN(A))$, atëherë ekziston vargu $(y_n)\subset TN(A)$ i tillë që $y_n\longrightarrow y_o(n\longrightarrow\infty)$, d.m.th. ekziston vargu (x_n) në $N(A)$ i tillë që $T(x_n)=y_n(n\in N)$. Hapësirën X e zbërthejmë si shumë direkte të $N(T)$ dhe $\tilde{X}\subset X$ ([32]),

$$X=N(T)+\tilde{X}$$

atëherë ngushtimi $\tilde{T}$ i operatorit T në $\tilde{X}$ ka operator invers të vazhdueshëm. Meqenëse $x_n=z_n+\tilde{x}_n$ $(z_n\in N(T),\tilde{x}_n\in\tilde{X},n\in N)$, atëherë $\tilde{T}(\tilde{x}_n)=T(x_n)=y_n$ $(n\in N)$. Sipas (i) ekuacioni operatorial $T(x_n)=y_n(n\in N)$ është i zgjidhshëm ([44]), d.m.th. $x_n=T^{-1}(y_n)(n\in N)$ dhe (x_n) është varg i kufizuar. Më tutje, nga $A(z_n)=-A(x_n)$ rrjedh se $A(x_n)=0(n\in N)$. Shënojmë me

$\tilde{A}$ ngushtimin e operatorit A në $N(T)$, atëherë $z_n=-A^{-1}\tilde{A}(x_n)$ $(n\in N)$. Prej nga rrjedh se (z_n) është gjithashtu varg i kufizuar në $N(T)$. Mbasi X është hapësirë refleksive e Banahut dhe (x_n) varg i kufizuar në te, atëherë bashkësia (x_n) është kompakte për topologjinë e dobët në X ([16]), prandaj nga vargu (x_n) mund të nxirret një nënvarg (x_{n_i}), i cili konvergjon në mënyrë të dobët tek $x_o\in X$. Në këtë rast edhe vargu $(T(x_{n_i}))$ konvergjon në mënyrë të dobët tek $T(x_o)$ në Y, d.m.th.

$$T(x_{n_i}) = y_{n_i} \xrightarrow{w} T(x_o) = y_o$$

dhe

$$A(x_{n_i}) \longrightarrow A(x_o)$$

Rrjedhimisht $x_o\in N(A)$ dhe $y_o = T(x_o)\in TN(A)$.

<u>V ë r e j t j e 2.2.8</u>. Pohimi 2.2.7 vlen edhe në rastin kur Y është hapësirë reale refleksive e Banahut.

<u>V ë r e j t j e 2.2.9</u>. Kushti (i) në pohimin 2.2.7 është ekuivalent me secilin nga këto kushte:

(1) $N(T)$ është nënhapësirë me dimension të fundëm

(2) $R(T^*) = {}^{\perp}N(T)$

ku me ${}^{\perp}N(T)$ është shënuar anhilatori i $N(T)$ ([44]).

<u>P o h i m 2.2.10</u>. Le të jetë X hapësirë reale refleksive e Banahut. Në qoftë se $N(A)$ ka dimension të fundëm, atëherë për çdo $z\in Z$, ekziston të paktën një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

V ë r t e t i m. Mjafton të tregojmë se $TN(A)$ është bashkësi e mbyllur në Y. Le të jetë $y_o \in Cl(TN(A))$, atëherë ekziston vargu $(y_n) \subset TN(A)$ i tillë që $\| y_n - y_o \|_Y \longrightarrow 0 (n \to \infty)$. Më tutje, ekziston vargu $(x_n) \subset N(A)$ i tillë që $T(x_n) = y_n$ $(n \in N)$. Ngjashëm sikur në pohimin 2.2.7 tregohet se vargu (x_n) është i kufizuar. Prandaj nga vargu (x_n) mund të nxirret një nënvarg (x_{n_i}) i cili konvergjon në mënyrë të dobët tek $x_o \in X$. Meqenëse për çdo $f \in Y^*$, $f \cdot T \in X^*$, atëherë vargu $(T(x_{n_i}))'$ konvergjon në mënyrë të dobët në Y, d.m.th.

$$T(x_{n_i}) = y_{n_i} \xrightarrow{w} T(x_o) = y_o$$

dhe

$$A(x_{n_i}) \longrightarrow A(x_o).$$

Rrjedhimisht, $x_o \in N(A) \Longrightarrow y_o = T(x_o) \in TN(A)$.

V ë r e j t j e 2.2.11. Kushti që $N(A)$ të ketë dimension të fundëm në pohimin 2.2.10 mund të zëvendësohet me kushtin që $N(A)$ të ketë kodimension të fundëm.

P o h i m 2.2.12. Le të jetë X hapësirë refleksive e Banahut. Në qoftë se $N(A)$ është bashkësi e kufizuar, atëherë për çdo $z \in Z$ ekziston të paktën një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

V ë r t e t i m. Mjafton të tregojmë se $TN(A)$ është bashkësi e mbyllur në Y. Le të jetë $y_o \in Cl(TN(A))$, atëherë ekziston vargu $(y_n) \subset TN(A)$ i tillë që $\| y_n - y_o \|_Y \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$.

Më tutje, ekziston vargu $(x_n)\subset N(A)$ i tillë që $T(x_n) = y_n$ $(n\in N)$. Meqenëse $N(A)$ është bashkësi e mbyllur dhe e kufizuar, ajo është kompakte për topologjinë e dobët në X, prandaj nga vargu (x_n) mund të nxirret një nënvarg (x_{n_i}), i cili konvergjon në mënyrë të dobët tek $x_o\in N(A)$. Vargu $(y_{n_i}) = (T(x_{n_i}))$ konvergjon gjithashtu në mënyrë të dobët tek $T(x_o)$, d.m.th.

$$T(x_{n_i}) = y_{n_i} \xrightarrow{w} T(x_o) = y_o.$$

Rrjedhimisht $y_o\in TN(A)$.

<u>Rrjedhim 2.2.13</u>. Le të jetë X hapësirë refleksive e Banahut. Në qoftë se $N(T)$ ka kodimension të fundëm, atëherë për çdo $z\in Z$, bashkësia $TA^{-1}(z)$ është e mbyllur në Y, d.m.th. për çdo $z\in Z$ ekziston të paktën një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

Vërtetimi i rrjedhimit të mësipërm është analog me vërtetimin e pohimit 2.2.7.

<u>Rrjedhim 2.2.14</u>. Në qoftë se $N(A)$ është bashkësi relativisht kompakte, atëherë për çdo $z\in Z$, ekziston të paktën një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

Vërtetimi i rrjedhimit të mësipërm është analog me vërtetimin e pohimit 2.2.12.

Teorema e mëposhtme përcakton kushtet për ekzistencën e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ në rastin kur Y është hapësirë reale refleksive e Banahut.

T e o r e m ë 2.2.15. (Mbi ekzistencën dhe unicitetin) Në qoftë se:

(i) $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është bashkësi e mbyllur dhe e kufizuar më Y

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$,

atëherë ekziston dhe është i vetëm splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$.

V ë r t e t i m. Le të jetë

$$d = \inf \{ \| T(x) \|_Y : x \in A^{-1}(z) \},$$

atëherë ekziston vargu $(x_n) \subset A^{-1}(z)$ i tillë që $\| T(x_n) \|_Y \longrightarrow d$ $(n \longrightarrow \infty)$. Meqenëse $TA^{-1}(z)$ është bashkësi e mbyllur dhe e kufizuar në Y, ndërsa Y është hapësirë refleksive e Banahut, atëherë $TA^{-1}(z)$ është kompakte për topologjinë e dobët në Y ([16]). Prandaj nga vargu (x_n) mund të nxirret një nënvarg $(T(x_{n_k}))$, i tillë që vargu $(T(x_{n_k}))$ të konvergjojë në mënyrë të dobët tek $y_0 \in TA^{-1}(z)$, d.m.th. ekziston $s \in A^{-1}(z)$ i tillë që $T(s) = y_0$ dhe

$$(\forall f \in Y^*) \; f(T(x_{n_k})) \longrightarrow f(T(s)) (n_k \longrightarrow \infty). \qquad (*)$$

Më tutje, dallojmë këto raste:

1. Në qoftë se $y_0 = 0$, vërtetimi është trivial.

2. Në qoftë se $0 \neq y_0 = T(s)$, sipas një rrjedhimi të teoremës së Han-Banahut ([16]), ekziston $f_0 \in Y^*$ i tillë që

$$\|f_o\| = 1 \wedge f_o(T(s)) = \|T(s)\|_Y,$$

prej nga sipas (*), kemi:

$$f_o(T(x_{n_k}) \longrightarrow \|T(s)\|_Y (n_k \longrightarrow \infty)$$

dhe

$$d = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_Y = \lim_{n_k\to\infty} \|T(x_{n_k})\|_Y = \lim_{n_k\to\infty} \|f_o\| \|T(x_{n_k})\|_Y$$

$$\geqslant \lim_{n_k\to\infty} |f_o(T(x_{n_k}))| = \|T(s)\|_Y$$

d.m.th. $\|T(s)\|_Y \leq d$. Meqenëse $d = \inf\{\|T(x)\|_Y : x\in A^{-1}(z)\}$, atëherë $d = \|T(s)\|_Y$. Rrjedhimisht

$$\|T(s)\|_Y = d = \inf\{\|T(x)\|_Y : x\in A^{-1}(z)\}.$$

Relacioni i fundit tregon se $s = s(z,A,T)$.

U n i c i t e t i. Tani do të tregojmë se elementi $s\in A^{-1}(z)$ për të cilin $T(s) = y_o$ dhe $\|T(s)\|_Y = \inf\{\|T(x)\|_Y : x\in A^{-1}(z)\}$ është i vetëm. Në të kundërtë, sikur të ekzistonte $s_1 = s(z,A,T)$, atëherë

$$T(s) = T(s_1) = y_o \wedge A(s) = A(s_1) = z$$

$$\Rightarrow s-s_1 \in N(A)\cap N(T) = \{0\} \Rightarrow s = s_1.$$

////

2.3. Karakterizimi i splein-funksioneve interpolative në hapësirat e Hilbertit

Në këtë paragraf do të formulojmë dhe do të vërtetojmë disa pohime mbi ekzistencën e splein-funksionit interpolativ të cilat janë të pavarura nga teoremat mbi ekzistencën dhe unicitetin e splein-funksioneve interpolative.

T e o r e m ë 2.3.1. Që elementi $s \in I_z$ të jetë splein-funksion interpolativ, d.m.th. që $s = s(z,A,T)$ është e nevojshme dhe mjaftueshme që të plotësohet relacioni

$$(\forall t \in N(A))(T(s) \mid T(t))_Y = 0.$$

V ë r t e t i m. Le të jetë $s \in I_z$ splein-funksion interpolativ, atëherë për çdo $x \in A^{-1}(z)$, vlen relacioni

$$\|T(x)\|_Y^2 = \|T(s)\|_Y^2 + \|T(x-s)\|_Y^2 , \tag{1}$$

sepse vektori $T(s)$ është projeksion ortogonal i vektorit $T(x)$ në bashkësinë $[TN(A)]^{\perp}$ (fig.1).

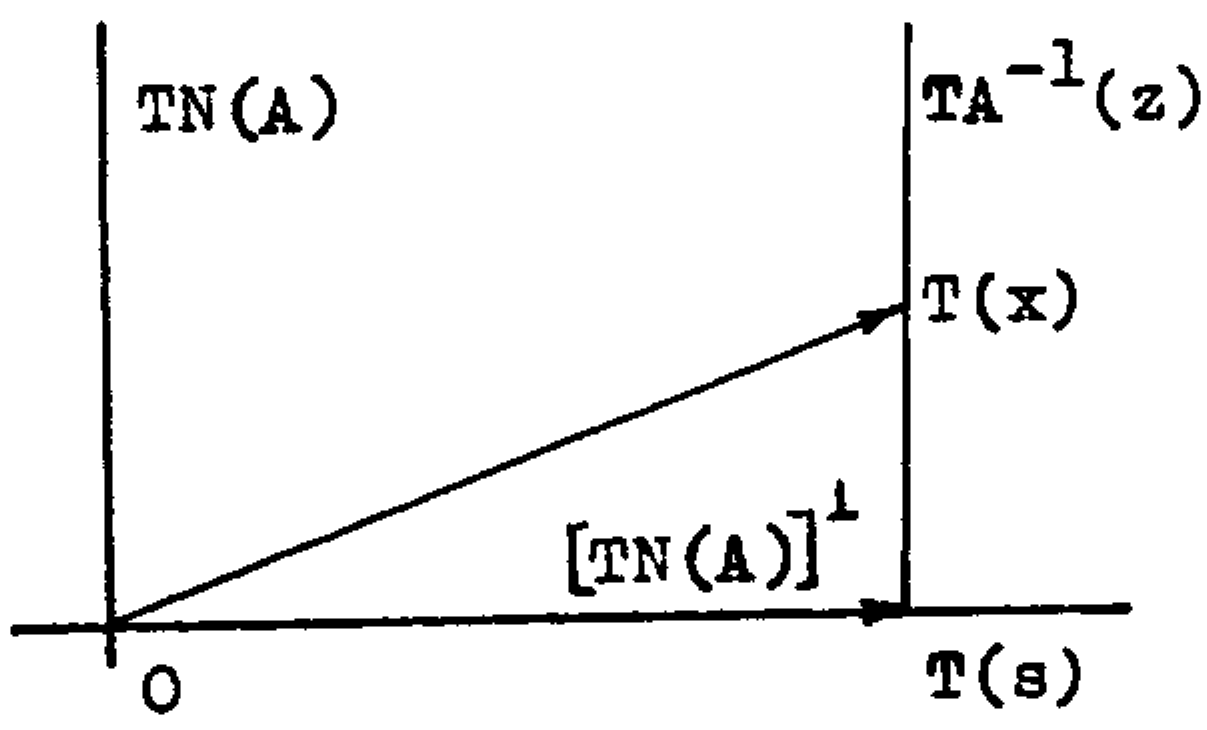

fig.1

Më tutje, nga

$$\|T(x-s)\|_Y^2 = \|T(x)\|_Y^2 - 2(T(x) \mid T(s))_Y + \|T(s)\|_Y^2 \qquad (2)$$

dhe relacioni (1), rrjedh se

$$\|T(s)\|_Y^2 = (T(s) \mid T(t))_Y ,$$

ose

$$(T(s) \mid T(x-s))_Y = 0.$$

Meqenëse $x-s \in N(A)$, atëherë

$$(\forall t \in N(A))(T(s) \mid T(t))_Y = 0.$$

A n a s j e l l t a s, le të jetë $s \in I_z$ element për të cilin vlen relacioni

$$(\forall t \in N(A))\ (T(s) \mid T(t))_Y = 0,$$

atëherë për çdo $x \in N(A)$, kemi:

$$\|T(s+x)\|_Y^2 = \|T(s)\|_Y^2 + \|T(x)\|_Y^2 \geq \|T(s)\|_Y^2$$

Meqenëse $y = s+x \in A^{-1}(z)$ dhe për $0 = x \in N(A)$ në relacionin e mësipërm vlen barazimi, atëherë

$$\|T(s)\|_Y^2 = \inf\left\{\|T(y)\|_Y^2 : y \in A^{-1}(z)\right\}.$$

Teorema e mësipërme vërtetohet edhe duke zbatuar përkufizimin e derivatit në kuptim të Frechet-it në hapësirën e Banahut X. Shënojmë me $J(x) = \|T(x)\|_Y^2$ $(x \in A^{-1}(z))$. Meqenëse bashkësia $A^{-1}(z)$ është konvekse në X dhe $J(x)$ funksionel i derivueshëm në kuptim të Frechet-it, atëherë sipas ([48], T1.2.5), kemi:

$$\begin{aligned}\| T(s)\|_Y^2 = \inf\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in A^{-1}(z)\} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A^{-1}(z))(J'(s) \mid x-s)_X = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall t \in N(A))(J'(s) \mid t)_X = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall t \in N(A))(T^*T(s) \mid t)_X = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall t \in N(A))(T(s) \mid T(t))_Y = 0\end{aligned}$$

sepse $J'(s) = 2\, T^*T(s)$ (shih [48]).

P ë r k u f i z i m 2.3.2. Le të jetë f funksionel në X dhe $y_0 \in X^*$. Elementi y_0 quhet subgradient i funksionelit f në pikën x_0, nëse $f(x_0)$ është i fundëm dhe

$$(\forall x \in X)\ f(x) \geq f(x_0) + \langle x-x_0, y_0 \rangle .$$

Bashkësia e të gjithë subgradientëve të funksionelit f në pikën x_0 shenohet me $\partial f(x_0)$ dhe quhet subdiferencial i funksionelit f në pikën x_0.

Në qoftë se X është hapësirë e njësishme, atëherë vlen kjo

T e o r e m ë 2.3.3. Që elementi $s \in I_z$ të jetë splein-funksion interpolativ për z në lidhje me operatorët A dhe

T është e nevojshme dhe e mjaftueshme që

$$(s|T^*T(s)) = \inf\left\{(x|T^*T(s)) : x\in A^{-1}(z)\right\}.$$

V ë r t e t i m. Provohet leht se vlen relacioni

$$\inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 : x\in A^{-1}(z)\right\} = \inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 + \chi_{A^{-1}(z)}(x) : x\in A^{-1}(z\right.$$

ku

$$\chi_{A^{-1}(z)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{për } x\in A^{-1}(z) \\ +\infty & \text{për } x\notin A^{-1}(z). \end{cases}$$

Prej nga rrjedh se $s = s(z,A,T)$, atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston elementi v i tillë që:

$$v\in\partial(\|T(x)\|_Y^2)_{x=s} = \left\{\frac{T^*T(x)}{\|T(x)\|_Y^2}\right\}_{x=s} \wedge -v\in\partial\chi_{A^{-1}(z)}(x), \text{ (shih [22])}$$

$$\Leftrightarrow v = T^*T(s)\wedge(s|-v) = \sup\left\{(x|-v) : x\in A^{-1}(z)\right\}$$

$$\Leftrightarrow (s|T^*T(s)) = \inf\left\{(x|T^*T(s)) : x\in A^{-1}(z)\right\}.$$

R r j e d h i m 2.3.4. Në qoftë se $s_1 = s(z,A,T)$ dhe $s_2 = s(z,A,T)$, atëherë

(i) $(T(s_1)\,|\,T(s_2))_Y = \|T(s_1)\|_Y^2 = \|T(s_2)\|_Y^2$

(ii) $T(s_1-s_2) = 0$

V ë r t e t i m. (i): Meqenëse $s_1-s_2\in N(A)$, atëherë në bazë të teoremës 2.3.1, kemi:

$$(T(s_1-s_2)|T(s_1))_Y = 0 \Rightarrow \|T(s_1)\|_Y^2 = (T(s_1)|T(s_2))_Y$$

$$(T(s_2-s_1)|T(s_2))_Y = 0 \Rightarrow \|T(s_2)\|_Y^2 = (T(s_1)|T(s_2))_Y$$

(ii): Nga (i), kemi:

$$\|T(s_1)-T(s_2)\|_Y^2 = \|T(s_1)\|_Y^2-2(T(s_1)|T(s_2))_Y+\|T(s_2)\|_Y^2 = 0$$

$$\Rightarrow T(s_1)-T(s_2) = 0 \Rightarrow T(s_1-s_2) = 0.$$

Në qoftë se X është hapësirë e njësishme, atëherë ka vend ky:

R r j e d h i m 2.3.5. Që elementi $s \in I_z$ të jetë splein-funksion interpolativ, d.m.th. $s = s(z,A,T)$, është e nevojshme dhe e mjaftueshme që të plotësohet relacioni

$$(\exists u \in Z)\ T^*T(s) = A^*(u).$$

V ë r t e t i m. Le të jetë $s \in I_z$ element për të cilin vlen relacioni

$$(\exists u \in Z)\ T^*T(s) = A^*(u),$$

atëherë

$$(\forall t \in N(A))(T(s)|T(t))_Y = 0 \Rightarrow (T^*T(s)|t)_X=(A^*(u)|t)_X =0.$$

Meqenëse $A^*(u) \in R(A^*) = N(A)^{\perp}$ ([32]), atëherë

$$(\forall t \in N(A))\ (T(s)|T(t))_Y = 0,$$

që sipas teoremës 2.3.1 rrjedh se s është splein-funksion interpolativ, d.m.th. $s = s(z,A,T)$.

A n a s j e l l t a s, supozojmë se $s = s(z,A,T)$, atëherë

$$(\forall t \in N(A))(T(s)|T(t))_Y=0 \Rightarrow (\forall t \in N(A))(T^*T(s)|t)_X = 0,$$

prej nga rrjedh se $T^*T(s) \in N(A)^{\perp} = R(A^*)$. Rrjedhimisht, ekziston $u \in Z$ i tillë që $A^*(u) = T^*T(s)$.

<u>Shembull 2.3.6.</u> Le të jetë $X = H^1_{[0,a]}$, $Y = L^2_{[0,a]}$, $Z = R^{n+1}$ dhe operatorët $A \in \mathcal{L}(X,Z)$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ të dhënë përkatësisht me relacionet

$$A(x) = (x(t_0),\dots,x(t_n)), (0=t_0<t_1<\dots<t_n=a)$$
$$T(x) = x'(t).$$

Funksioni linear

$$s(t)=z_i+(z_{i+1}-z_i)\,\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\,, \quad (t\in[t_i,t_{i+1}], 0\le i\le n-1)$$

paraqet splein-funksion interpolativ për $z=(z_0,z_1,\dots,z_n)$ në lidhje me operatorët A dhe T.

Me të vërtetë, për çdo $x(t) \in H^1_{[0,a]}$ të tillë që $x(t_i)=0$ $(0\le i\le n)$, d.m.th.për çdo $x \in N(A)$, kemi:

$$(T(s)|T(x))_Y = (s'|x')_{L^2} = \int_0^a s'x'dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i-z_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)\,dt = 0.$$

Prej nga sipas teoremës 2.3.1 rrjedh se $s = s(z,A,T)$. Uniciteti i splein-funksionit interpolativ s vërtetohet në mënyrë analoge sikur edhe në shembullin 2.2.6.

////

2.4. Rasti i një numri të fundëm kushtesh të interpolimit

Në këtë paragraf do të shqyrtojmë ekzistencën e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$, nëse janë të plotësuara kushtet:

(i) T është operator linear i kufizuar i hapësirës refleksive të Banahut X mbi hapësirën e Hilbertit Y.

(ii) $\dim N(T) = m \leq n = \dim Z$

(iii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$.

Sipas teoremës 2.2.1 dhe vërejtjes 2.2.9 kushtet e mësipërme janë të mjaftueshme për ekzistencën dhe unicitetin e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$.

Le të jetë $(h_i : 1 \leq i \leq m)$ bazë në $N(T)$ dhe $(f_j : 1 \leq j \leq n) \subset X^*$ një bashkësi lineärisht e pavarur e tillë që

$$N(A) = \{x : (x|f_j) = 0, 1 \leq j \leq n\}. \tag{1}$$

Më tutje, le të jetë $(z_j : 1 \leq j \leq n)$ bazë në Z, e tillë që të vlejë barazimi

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} (x|f_i) z_j \tag{2}$$

Që të gjejmë splein-funksionin interpolativ $s = s(z,A,T)$ më parë po i vërtetojmë disa pohime ndihmëse, të cilat me disa ndryshime janë vërtetuar në [22].

Pohim 2.4.1. Rangu i matricës

$$((h_i| f_j)),(1\leq i\leq m \wedge 1\leq j\leq n)$$

është i barabartë me m.

Vërtetim. Shqyrtojmë sistemin homogjen të n-ekuacioneve lineare me m të panjohura

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (h_i|f_j) = 0\,, \quad (1\leq j\leq n) \tag{3}$$

Sipas (ii), rangu i matricës së sistemit (3) është $r \leq m$. Tregojmë se pikërisht $r = m$. Në të kundërtën, sikur $r< m$, atëherë sistemi (3) ka zgjidhje jotriviale $(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\ldots,\alpha_m^0)$. Shqyrtojmë tani vektorin

$$h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^0 h_i \in N(T).$$

Është e qartë se $h \neq 0$ dhe $h \in N(A)$, sepse $(h|f_j) = 0$ $(1\leq j\leq n)$ dhe $(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\ldots,\alpha_m^0)$ është zgjidhje jotriviale e sistemit (3) që është në kundërshtim me (iii).

Shënojmë me $G = \text{hap}\{f_j:1\leq j\leq n\}$, kurse me $N(T)^{\perp}$ anhilatorin e $N(T)$([32]), atëherë G dhe $N(T)^{\perp}$ janë nënhapësira të hapësirës X^*.

Pohim 2.4.2. Vlen relacioni

$$\dim \left[G \cap N(T)^{\perp}\right] = n-m.$$

V ë r t e t i m. Le të jetë $f \in N(T)^{\perp} \subset X^{*}$, atëherë

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j,$$

prej nga

$$(h_i | f) = (h_i | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j) = 0 (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (h_i \; f_j) = 0. \tag{4}$$

Nga sistemi i fundit përcaktojmë $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Matrica e sistemit (4) është matrica e transponuar e sistemit (3), prandaj rangu i saj është m. Rrjedhimisht sistemi (4) ka $n-m$ zgjidhje linearisht të pavarura. Më tutje, le të jetë $(\varphi_k)(1 \leq k \leq n-m)$ një bazë në $G \cap N(T)^{\perp}$, atëherë

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{k_j} \cdot f_j \quad (1 \leq k \leq n-m), \tag{5}$$

ku $(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots, \lambda_{k_n}), (1 \leq k \leq n-m)$ janë zgjidhje linearisht të pavarura të sistemit (4).

Sipas teoremës 2.3.1, nëse $s = s(z,A,T)$ është splein-funksion interpolativ, atëherë $T(s) \in [TN(A)]^{\perp}$. Prandaj për përcaktimin e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ është e nevojshme të japim një lidhje ndërmjet $G \cap N(T)^{\perp}$ dhe $[TN(A)]^{\perp}$.

P o h i m 2.4.3. Vlen barazimi

$$[TN(A)]^{\perp} = T^{* -1}[G \cap N(T)^{\perp}].$$

V ë r t e t i m. Barazimi i mësipër është ekuivalent me këtë barazim

$$T^{*}[TN(A)]^{\perp} = G \cap N(T)^{\perp}.$$

Meqenëse $N(T)^{\perp} = R(T^{*})$, atëherë

$$\forall t \in T^{*}[TN(A)]^{\perp} \Longrightarrow (\exists y \in [TN(A)]^{\perp}), t = T^{*}y$$

$$\Longrightarrow t \in R(T^{*}) \Longrightarrow t \in N(T)^{\perp}$$

prej nga

$$T^{*}[TN(A)]^{\perp} \subseteq N(T)^{\perp}. \qquad (*)$$

Tani do të tregojmë se $T^{*}[TN(A)]^{\perp} \subseteq G$. Për këtë mjafton që elementi t i përcaktuar mësipër ti takojë G. Le të jetë $z \in N(A)$ cilido, atëherë

$$(z|t) = (z|T^{*}y) = (Tz|y) = 0,$$

sepse $y \in [TN(A)]^{\perp}$. Prej nga rrjedh se $t \in G$, d.m.th.

$$T^{*}[TN(A)]^{\perp} \subseteq G. \qquad (**)$$

Nga $(*)$ dhe $(**)$ rrjedh se

$$T^{*}[TN(A)]^{\perp} \subseteq G \cap N(T)^{\perp}.$$

A n a s j e l l t a s, le të jetë $t \in G \cap N(T)^{\perp}$, atëherë $t \in N(T)^{\perp} = R(T^{*})(t = T^{*}y)$ dhe $t \in G$. Prandaj për çdo $z \in N(A)$, $(z|t) = 0$, d.m.th.

$$0 = (z|T^{*}y) = (Tz|y) \Rightarrow y\in[TN(A)]^{\perp} \Rightarrow t\in T^{*}[TN(A)]^{\perp}.$$

Meqenëse $(\psi_k)(1\leq k\leq n-m)$ është bazë në $G\cap N(T)^{\perp}$, atëherë sipas pohimit 2.4.3 familja $g_k = (T^{*\,-1}\psi_k)(1\leq k\leq n-m)$ është bazë e $[TN(A)]^{\perp}$. Nga ana tjetër, meqë $T(s)\in[TN(A)]^{\perp}$, atëherë

$$T(s) = \sum_{k=1}^{n-m} \beta_k g_k \tag{6}$$

Duke shumëzuar barazimin (6) në trajtë skalare me g_ℓ, marrim

$$(T(s)|g_\ell) = \left(\sum_{k=1}^{n-m} \beta_k g_k | g_\ell\right) = (s|T^{*}g_\ell) =$$

$$= (s|\psi_\ell) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\ell_j}(s|f_j).$$

Meqenëse, sipas (2),

$$A(s) = \sum_{j=1}^{n} (x|f_j)z_j = z\ , \tag{7}$$

atëherë $(s|f_j)(1\leq j\leq n)$ paraqet koordinatat e vektorit z, d.m.th,

$$z = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j z_j\ .$$

prej nga koeficientët $\beta_k(1\leq k\leq n-m)$ mund të caktohen nga sistemi i mëposhtëm

$$\sum_{k=1}^{n-m} \beta_k(g_k|g_\ell) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\ell j} \xi_j \quad (1 \leq \ell \leq n-m) \tag{8}$$

matrica e të cilit është matricë e Gramit. Prandaj sistemi (8) ka zgjidhje të vetme dhe ajo shprehet me barazimin

$$T(s) = C(z),$$

ku C është operator linear i Z në $[TN(A)]^\perp$. Përfundimisht splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$ paraqitet si zgjidhje e sistemit të ekuacioneve operatoriale

$$A(s) = z \wedge T(s) = C(z).$$

////

III. PËRAFRIMI NË HAPËSIRËN E SPLEIN-FUNKSIONEVE

3.1. Hapësira e splein-funksioneve dhe operatori i interpolimit.

Le të jenë X, Z hapësira reale të Banahut dhe Y hapësirë reale e Hilbertit.

P ë r k u f i z i m 3.1.1. Shënojmë me S bashkësinë e të gjitha elementeve nga hapësira X që i plotësojnë kushtet e teoremës 2.3.1, d.m.th.

$$S = \{s \in X : (T(s) | T(t))_Y = 0 \text{ për çdo } t \in N(A)\}.$$

Hapësirën S e quajmë hapësirë të splein-funksioneve.

Në qoftë se X është hapësirë e njësishme, atëherë hapësira S mund të shkruhet edhe në këtë formë

$$S = \{s \in X : T^* T(s) \in R(A^*)\}.$$

Me të vërtetë, meqenëse $N(A)^{\perp} = R(A^*)$, sipas përkufizimit

3.1.1 kemi:

$$S = \{s \in X : (T(s)|T(t))_Y = 0 \text{ për çdo } t \in N(A)\}$$
$$= \{s \in X : (T^*T(s)|t)_X = 0 \text{ për çdo } t \in N(A)\}$$
$$= \{s \in X : T^*T(s) \in N(A)^{\perp}\}$$
$$= \{s \in X : T^*T(s) \in R(A^*)\}.$$

L e m ë 3.1.2. S është hapësirë e Banahut.

V ë r t e t i m. Meqenëse $S \subset X$ (X hapësirë e Banahut), mjafton të tregojmë se S është e mbyllur në X. Me të vërtetë, le të jetë $s_o \in Cl(S)$, atëherë ekziston vargu $(s_n) \subset S$ i tillë që $s_n \longrightarrow s_o$ $(n \longrightarrow \infty)$. Kështu për çdo $t \in N(A)$, kemi $(T(s_n)|T(t))_Y = 0$. Meqenëse $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ dhe mbasi prodhimi skalar është funksion i vazhdueshëm, atëherë duke kaluar me limit në barazimin $(T(s_n)|T(t))_Y = 0$ kur $n \longrightarrow \infty$, rrjedh se $(T(s_o)|T(t))_Y = 0$ për çdo $t \in N(A)$. Rrjedhimisht $s_o \in S$.

L e m ë 3.1.3. Në qoftë se X është hapësirë e njësishme dhe në qoftë se $N(A)$ (ose $N(T)$) është bashkësi kompakte në X, atëherë

$$[T^*T(S)]^{\perp} = N(A) + N(T) \quad (R(T) = Y).$$

V ë r t e t i m. Sipas përkufizimit të hapësirës S, kemi:

$$S = \{s \in X : (T(s)|T(t))_Y = 0 \text{ për çdo } t \in N(A)\}$$
$$= \{s \in X : (T^*T(s)|t)_X = 0 \text{ për çdo } t \in N(A)\}.$$

Prej nga rrjedh se

$$T^{*}T(S) = N(A)^{\perp} \cap R(T^{*}T).$$

Meqenëse $R(T^{*}T) = R(T^{*}) = N(T)^{\perp}$, atëherë

$$\begin{aligned} T^{*}T(S) &= N(A)^{\perp} \cap N(T)^{\perp} \\ &= [Cl(N(A) + N(T))]^{\perp} \ ([18]) \\ &= [Cl(N(A)) + Cl(N(T))]^{\perp} \ ([46]) \\ &= [N(A) + N(T)]^{\perp}. \end{aligned}$$

Supozojmë se janë të plotësuara kushtet për ekzistencën e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$. Atëherë bashkësia $TN(A)$ është e mbyllur në Y (si translacion i bashkësisë së mbyllur $TA^{-1}(z)(z \in Z)$). Prandaj ekziston $[TN(A)]^{\perp}$ dhe $Y = [TN(A)]^{\perp} + TN(A)$ ([33]). Nga ana tjetër, meqenëse $T(S) = [TN(A)]^{\perp}$ ([22]), atëherë

$$Y = T(S) + TN(A) \tag{1}$$

<u>P ë r k u f i z i m 3.1.4</u>. Vargu $(x_n) \subset U \subset X$ për të cilin është

$$\lim_{n\to\infty} J(x_n) = \inf \{J(x) : x \in U\}$$

quhet varg minimizues për funksionelin $J(x)$ në bashkësinë U.

<u>T e o r e m ë 3.1.5</u>. Në qoftë se bashkësia $A^{-1}(z)(z \in Z)$ është kompakte për topologjinë e dobët në X, atëherë bashkësia S është joboshe dhe kompakte për topologjinë e dobët në

dhe çdo varg minimizues i funksionelit $J(x) = \|T(x)\|_Y$ ku $x \in A^{-1}(z)$ konvergjon në mënyrë të dobët.

V ë r t e t i m. Le të jetë (x_n) cilido varg minimizues $(\lim\limits_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_Y = \inf\{\|T(x)\|_Y : x \in A^{-1}(z)\})$. Meqenëse $TA^{-1}(z)$ është bashkësi kompakte për topologjinë e dobët në Y dhe $(T(x_n)) \subset TA^{-1}(z)$, atëherë nga vargu $(T(x_n))$ mund të nxirret një nënvarg $(T(x_{n_k}))$, i cili konvergjon në mënyrë të dobët tek $y_o \notin TA^{-1}(z)$. Nga ana tjetër, meqenëse $y_o \in TA^{-1}(z)$, atëherë ekziston $x_o \in A^{-1}(z)$ i tillë që $T(x_o) = y_o$. Më tutje, meqë funksioneli $J(x) = \|T(x)\|_Y$ $(x \in A^{-1}(z))$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në X, sipas ([47]), kemi:

$$\inf\{\|T(x)\|_Y : x \in A^{-1}(z)\} \leq \|T(x_o)\|_Y \leq \varliminf_{n_k\to\infty} \|T(x_{n_k})\|_Y =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_Y = \inf\{\|T(x)\|_Y : x \in A^{-1}(z)\}$$

prej nga

$$\|T(x_o)\|_Y = \inf\{\|T(x)\|_Y : x \in A^{-1}(z)\} \Rightarrow x_o \in S.$$

Tani do të tregojmë se S është bashkësi kompakte për topologjinë e dobët në X. Le të jetë (y_n) varg i çfardoshëm në S. Meqenëse $S \subset A^{-1}(z)$ dhe mbasi $A^{-1}(z)$ është bashkësi kompakte për topologjinë e dobët në X, atëherë nga vargu (y_n) mund të nxirret një nënvarg (y_{n_k}) që konvergjon në mënyrë të dobët tek $y_o \in A^{-1}(z)$. Nga ana tjetër vargu (y_{n_k})

është varg minimizues për funksionelin $J(x) = \|T(x)\|_Y$ $(x \in A^{-1}(z))$, prandaj sipas ([48], T1.3.1) ai konvergjon në mënyrë të dobët në S, d.m.th $y_0 \in S$. Rrjedhimisht S është bashkësi kompakte për topologjinë e dobët në X.

V ë r e j t j e 3.1.6. Për zbatimin konkret të teoremës 3.1.5 në problemet e minimizimit në hapësirat e caktuara funsionale, rol me rëndësi luajnë kriteret e kompaktësisë në bashkësinë e mbyllur $A^{-1}(z)$ në këto hapësira.

Në qoftë se X është hapësirë refleksive e Banahut, atëherë ka vend kjo

T e o r e m ë 3.1.7. Le të jetë $x_0 \in A^{-1}(z)$ një element i fiksuar. Në qoftë se bashkësia

$$M(x_0) = \{x \in A^{-1}(z): \|T(x)\|_Y \leq \|T(x_0)\|_Y\}$$

është e kufizuar në X, atëherë bashkësia S është joboshe, konvekse dhe e kufizuar.

V ë r t e t i m i, rrjedh nga ([48], T2.1.2), për $J(x) = \|T(x)\|_Y$.

Në vazhdim, duke zbatuar metodën e projeksionit të gradientit ([48]) po i japim disa veti të hapësirës S të cilat lidhen me këtë kuptim. Pikërisht, do të japim një paraqitje të splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ me ndihmën e operatorit të projektimit P të hapësirës S në $A^{-1}(z)(z \in Z)$.

<u>Teoremë 3.1.8</u>. Nëse janë të plotësuara kushtet mbi ekzistencën dhe unicitetin e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$, atëherë vlen implikimi

$$s \in S \Longrightarrow s = P_{A^{-1}(z)}(s-2\alpha T^{*}T(s)),(\alpha > 0)$$

<u>Vërtetim</u>. Është e qartë se bashkësia $A^{-1}(z),(z \in Z)$ është e mbyllur dhe konvekse në X, si dhe $s-2\alpha T^{*}T(s) \in X$. Prandaj në mënyrë të vetme është i përcaktuar $P_{A^{-1}(z)}(s-2\alpha T^{*}T(s)$ ([48],T1.4.3). Më tutje, meqë funksioneli $J(x) = \|T(x)\|_Y^2$, $(x \in A^{-1}(z))$ është i derivueshëm në kuptim të Frechet-it, atëherë kemi:

$$s \in S \Rightarrow \|T(s)\|_Y^2 = \inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in A^{-1}(z \in Z)\right\}$$

$$\Rightarrow J(s) = \inf\left\{J(x):\ x \in A^{-1}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow s = P_{A^{-1}(z)}(s-\alpha J'(s)),(\alpha > 0)$$

$$\Rightarrow s = P_{A^{-1}(z)}(s-2\alpha T^{*}T(s)),(\alpha > 0)$$

Metoda e projeksioneve për paraqitjen e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ mbështetet në konstruktimin e vargut minimizues (x_k) sipas formulës

$$x_{k+1}=P_{A^{-1}(z)}(x_k-2\alpha_k T^{*}T(x_k)),k=0,1,2,\ldots \quad (2)$$

ku $\alpha_k > 0$. Nëse për ndonjë k, $x_k = x_{k+1}$, atëherë procesi i konstruktimit të vargut (x_k) përfundon në hapin e k-të. Në këtë rast elementi x_k plotëson kushtin e mjaftueshëm për minimizimin e funksionelit $J(x)= \|T(x)\|_Y^2$, d.m.th. kushtin e mjaftueshëm për ekzistencën e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$.

Për përcaktimin e madhsive $\alpha_k(k=0,1,2,\dots)$ në relacionin (2) ekzistojnë disa mënyra, njërën prej të cilave po e japim mëposhtë. Funksioneli $J(x) = \|T(x)\|_Y^2$ $(x \in A^{-1}(z))$ e plotëson kushtin e Lipshic-it (shih [48]) me konstantën e Lipshic-it $L = 2\|T\|^2$. Prandaj në (2) madhësitë α_k përcaktohen nga relacioni

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 2/(L+2\varepsilon)$$

ose

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 1/(\|T\|^2 + \varepsilon),$$

ku ε_0 dhe ε janë madhësi pozitive.

<u>L e m ë 3.1.9</u>. Le të jetë (x_k) varg i përkufizuar me (2) dhe (3), me term fillestar $x_0 \in A^{-1}(z)(z \in Z)$. Atëherë vargu $(\|T(x_k)\|_Y^2)$ është monotono zvoglues dhe $\|x_k - x_{k-1}\|_X \to 0$ $(n \to \infty)$.

V ë r t e t i m i, rrjedh drejtëpërsëdrejti nga ([47], T4.1.4).

Në vazhdim supozojmë se janë të plotësuara kushtet mbi ekzistencën dhe unicitetin e splein-funksionit interpolativ

$s = s(z,A,T)$. Tregojmë së ngushtimi $\tilde{A}$ i operatorit A në nënhapësirën S është një izomorfizëm i S në Z. Për këtë mjafton të tregojmë se për çdo $z \in Z$ ekziston një dhe vetën një $s \in S$ i tillë që $\tilde{A}(s) = z$. Me të vërtetë, le të jetë $z \in Z$ cilido element, sipas teoremës 2.2.1 (mbi ekzistencën dhe unicitetin) ekziston një dhe vetëm një $s \in I_z$ i tillë që

$$\|T(s)\|_Y^2 = \inf\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in A^{-1}(z)\}.$$

Nga ana tjetër, sipas teoremës 2.3.1 vlen relacioni

$$(\forall t \in N(A)) \ (T(s)|T(t))_Y = 0 \Longrightarrow s \in S,$$

d.m.th. se ngushtimi $\tilde{A}$ i operatorit A është izomorfizëm i S në Z. Prandaj ekziston operatori inverz $\mathfrak{m} = \tilde{A}^{-1}$ i Z në S i cili çdo elementi $z \in Z$ i shoqëron splein-funksionin e vetëm interpolativ $s \in S$. Ky operator është linear dhe i vazhdueshëm.

<u>P ë r k u f i z i m 3.1.10</u>. Operatori $\theta : X \longrightarrow S$, i cili çdo elementi $x \in X$ i shoqëron splein-funksionin e vetën interpolativ $s \in S$ të tillë që $A(s) = A(x)$ quhet splein-operator i interpolimit.

Është e qartë se $\theta = \mathfrak{m} \circ A$. Si i tillë operatori θ është linear dhe i vazhdueshëm.

<u>V ë r e j t j e 3.1.11</u>. Meqenëse $R(A) = Z$, në rastin kur $N(A) = \{0\}$, $\mathfrak{m} = A^{-1}$. Prandaj $\theta = I_X$ dhe $S = X$.

////

3.2. Funksioneli aproksimativ optimal në hapësirën e splein-funksioneve

Le të jenë X,Z hapësira reale të Banahut, Y hapësirë reale e Hilbertit, $A\in\mathcal{L}(X,Z)(R(A)=Z)$ dhe $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. Në fillim po i paraqesim disa kuptime që lidhen me përafrimin e funksionelit linear $f\in X^*$ me kombinimin linear

$$k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i k_i \quad (k_i\in X^*, 1\leq i\leq n).$$

Shënojmë me

$$u(x)=k(x)-f(x)$$

gabimin e bërë gjat këtij përafrimi. Sipas rrjedhimit të teoremës së Sard-it [39], vlen relacioni,

$$(\forall x\in X)\ u(x)=v(T(x)),$$

ku $v=(T^t)^{-1}(u)$. Koeficientët $\lambda_i(1\leq i\leq n)$ në shprehjen për funksionelin k i caktojmë nga relacioni

$$(\forall x\in N(T))\ u(x)=0. \tag{1}$$

Të cekim këtu se relacioni (1) nuk paraqet gjithëherë kusht të mjaftueshëm për përcaktimin e koeficientëve $\lambda_i(1\leq i\leq n)$. Në qoftë se $(\forall x\in X)\ \|T(x)\|_Y\leq r$, atëherë gabimi i bërë gjat përafrimit të funksionelit f me funksionelin k plotëson relacionin

$$(\forall x\in X)\ |u(x)|\leq r\|v\|.$$

<u>Përkufizim 3.2.1</u>. Funksioneli aproksimativ k quhet optimal në kuptim të Sard-it, nëse:

(i) $u=k-f\in N(T)^{\perp}$, ($N(T)^{\perp}$-anhilator, [32])

(ii) v ka normë minimale.

Supozojmë se janë të plotësuara kushtet e teoremës 2.2.1 mbi ekzistencën dhe unicitetin e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)(z\in Z)$. Funksionelin f duhet ta përafrojmë me funksionelin $g\in X^{*}$ në hapësirën e splein-funksioneve interpolative S, në mënyrë që gabimi i bërë $u = f - g$, në këtë rast, të jetë minimal. Një problem i tillë në rastin kur X,Y,Z janë hapësira reale të Hilbertit është zgjidhur në [22]. Këtu funksioneli aproksimativ optimal $\bar{g}$ ka formën

$$g = A^{*}(\lambda),\ \lambda = f\circ m$$

ku m është operatori i përkufizuar në paragrafin 3.1.

<u>Teoremë 3.2.2</u>. Ekziston funksioneli $\ell\in Z^{*}$ i tillë që

$$g = \ell\circ A \wedge ((\forall s\in S)\ u(s)=g(s)-f(s)=0).$$

Në këtë rast $\ell = f\circ m$.

<u>Vërtetim</u>. Në paragrafin 3.1 është dhënë kuptimi i operatorit $m:Z\longrightarrow S$ i cili çdo elementi $z\in Z$ i shoqëron splein-funksionin e vetëm interpolativ $s = s(z,A,T)$ dhe për çdo $z\in Z$, $A\circ m(z) = z$. Më tutje,

$$(\forall s \in S)u(s) = 0 \Rightarrow (\forall z \in Z)u(\mathfrak{m}(z)) = 0$$

$$\Rightarrow (\forall z \in Z)g(\mathfrak{m}(z)) = f(\mathfrak{m}(z)).$$

Meqenëse $g = \ell \circ A$, atëherë

$$(\forall z \in Z)\ \ell(A \circ \mathfrak{m}(z)) = f(\mathfrak{m}(z)),$$

prej nga duke shfrytëzuar barazimin $A \circ \mathfrak{m}(z) = z$, kemi:

$$(\forall z \in Z)\ \ell(z) = f \circ \mathfrak{m}(z).$$

Rrjedhimisht $\ell = f \circ \mathfrak{m}$.

<u>P ë r k u f i z i m 3.2.3.</u> Funksioneli $g = \ell \circ A$ quhet funksionel aproksimativ optimal i funksionelit f në hapësirën e splein-funksioneve interpolatve S.

<u>V ë r e j t j e 3.2.4.</u> Rezultat analog me këtë teoremë merret në rastin kur f është pasqyrim i hapësirës së Hilbertit X në hapësirën e Hilbertit Y. Në këtë rast, pasqyrimi aproksimativ optimal në hapësirën e splein-funksioneve S ka formën

$$g = \ell \circ A, \text{ ku } \ell \in \mathcal{L}(Z,Y) \text{ (shih [39]).}$$

Në vazhdim do të japim një lidhje të funksionelit aproksimativ optimal për funksionelin f dhe operatorit të interpolimit θ të dhënë me përkufizimin 3.1.10. Sipas teoremës 3.2.2, kemi:

$$g = \ell \circ A(x) = f \circ \mathfrak{m} A(x) = f \circ \theta(x).$$

Prej nga rrjedh se për gjetjen e vlerës së funksionelit aproksimativ optimal për funksionelin f, në pikën x më parë duhet të gjendet splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$ i tillë që $A(s) = A(x)$ e pastaj vlera e funksionelit f në pikën x.

Tregojmë tani se funksioneli g i përcaktuar me përkufizimin 3.2.3 paraqet funksionel aproksimativ optimal në kuptim të Sard-it. Për këtë, sipas përkufizimit 3.1.1, mjafton të tregojmë se vlen relacioni

$$(\forall s \in S)\ u(s) = 0 (\text{sepse } N(T) \subset S).$$

Funksioneli $u = g-f$ e përshkruen bashkësinë $(R(A^*)-f) \cap N(T)^\perp$ e cila paraqet çvendosje të bashkësisë $R(A^*) \cap N(T)^\perp = R(A^*) \cap R(T^*) \subset X$. Meqenëse,

$$T^{* -1}(R(A^*) \cap R(T^*)) = T(N(A))^\perp = T(S),$$

(shih [22]) dhe meqenëse bashkësia $T(N(A))^\perp$ është konvekse dhe e mbyllur në Y, ekziston elementi me normë minimale $T^{* -1}(\bar{u})(\bar{u} \in R(A^*)-f)$ ([32]), d.m.th. ekziston elementi me normë minimale

$$\bar{u} = \bar{l} \circ A - f$$

i tillë që

$$(\forall h \in TN(A)^\perp)\ (T^{* -1}(\bar{u}) | h)_Y = 0.$$

Meqenëse $T(N(A))^{\perp} = T(S)$, atëherë

$$(\forall s \in S) \ (T^{*\,-1}(\bar{u}) \mid T(s))_Y = 0$$

prej nga

$$(\forall s \in S) \ \bar{u}(s) = 0,$$

çka edhe është dasht të tregohet.

Teorema e mëposhtme shpreh gabimin e bërë (me ndihmën e prodhimit skalar) gjat përafrimit të elementeve të hapësirës Y me elementet e $T(S)$.

T e o r e m ë 3.2.5. Le të jetë $y_0 \in Y$. Atëherë

$$\min\{\|y_0 - T(s)\|_Y : s \in S\} = \max\left\{\left|\left(y_0 \mid T\left(\frac{t}{\|T(t)\|_Y}\right)\right)_Y\right| : t \in N(A)\right\}.$$

V ë r t e t i m. Nëse $y_0 \in T(S)$, vërtetimi është trivial. Në të kundërtën, sipas relacionit (1)(paragrafi 3.1), rrjedh se $y_0 = x_0 + z_0$ $(x_0 \in T(S) \wedge z_0 \in TN(A))$. Prej nga sipas teoremës së Riesz-it mbi projeksionet, kemi:

$$\min\{\|y_0 - T(s)\|_Y : s \in S\} = \|y_0 - x_0\|_Y = \|z_0\|_Y . \qquad (1)$$

Nga ana tjetër, për çdo $t \in N(A)$,

$$\left(y_0 \mid T\left(\frac{t}{\|T(t)\|_Y}\right)\right)_Y = \left(z_0 \mid T\left(\frac{t}{\|T(t)\|_Y}\right)\right)_Y.$$

Prej nga sipas jobarazimit të Koshi-Shvarcit, kemi:

$$\left|\left(y_0 \mid T\left(\frac{t}{\|T(t)\|_Y}\right)\right)_Y\right| \le \|z_0\|.$$

Barazimi në relacionin e fundit vlen vetëm për $z_0/\|z_0\|_Y$.

Prandaj

$$\max\left\{\left|(y_0|T(\frac{t}{\|T(t)\|_Y}))_Y\right|: t\in N(A)\right\} = \|z_0\|_Y . \qquad (2)$$

Nga (1) dhe (2), kemi:

$$\min\left\{\|y_0-T(s)\|_Y: s\in S\right\}=\max\left\{\left|(y_0|T(\frac{t}{\|T(t)\|_Y}))_Y\right|: t\in N(A)\right\}.$$

R r j e d h i m 3.2.6. Për çdo $x\in X$, vlen relacioni

$$\min\left\{\|T(x-s)\|_Y: s\in S\right\}=\max\left\{\|T(t)\|_Y^{-1}\left|(T(x)|T(t))_Y\right|: t\in N(A)\right\}.$$

V ë r t e t i m i, rrjedh drejtëpërsëdrejti nga teorema 3.2.5.

////

3.3. Funksioneli aproksimativ në kuptim të Golombo-Vejndbergerit

Le të jenë X,Z hapësira reale të Banahut, Y hapësirë reale e Hilbertit, $A\in\mathcal{L}(X,Z)(R(A)=Z)$ dhe $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. Për $z\in Z$, kërkohet të gjendet vlera e përafërt e funksionelit $f\in X^*$ për ato vlera të $x\in X$ për të cilat:

$$A(x) = z \wedge \|T(x)\|_Y \leq C,$$

ku C është konstantë e tillë që

$$\Omega_C = \left\{x\in X: A(x)=z \wedge \|T(x)\|_Y \leq C\right\} \neq \emptyset.$$

Bashkësia Ω_C është konvekse dhe e mbyllur në X. Më tutje, meqenëse funksioni

$$x \in X \longrightarrow (\|T(x)\|_Y^2 + \|A(x)\|_Z^2)^{1/2}$$

paraqet normë ekuivalente me normën e dhënë në X (shih [22]) dhe meqenëse bashkësia Ω_C është e kufizuar në kuptim të asajë norme,ajo është e kufizuar edhe në lidhje me normën e dhënë në X. Prandaj kur elementi $x \in \Omega_C$ e përshkruen bashkësinë e kufizuar dhe konvekse Ω_C, vektori $f(x)$ e përshkruen një bashkësi të kufizuar dhe konvekse në R, d.m.th. një interval të fundëm $(a,b) \subset R$. Vlera e përafrimit më të mirë e funksionelit f në pikën $x \in \Omega_C$ përputhet me mesin m të intervalit (a,b).

Nëse janë të plotësuara konditat e teoremës 2.2.1 mbi ekzistencën dhe unicitetin e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)(z \in Z)$, atëherë vlen kjo:

<u>T e o r e m ë 3.3.1</u>. Për çdo C për të cilën $\Omega_C \neq \emptyset$, vlen relacioni

$$m = \frac{b-a}{2} = f(s), \quad s = s(z,A,T).$$

<u>V ë r t e t i m</u>. Më parë tregojmë se splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$ paraqet qendër të simetrisë së bashkësisë konvekse Ω_C. Për këtë mjafton të tregojmë se vlen relacioni

$$s+x \in \Omega_C \implies s-x \in \Omega_C.$$

Supozojmë se $s+x \in \Omega_C$, atëherë

$$A(s+x) = z \wedge \| T(s+x)\|_Y^2 \leq C^2 \qquad (1)$$

Meqenëse $A(s) = z$, nga $A(s+x) = z$ rrjedh se $A(x) = 0$, d.m. th. se $x \subset N(A)$. Prej nga sipas teoremës 2.3.1 rrjedh se

$$(T(s)|T(x))_Y = 0.$$

Rrjedhimisht

$$\| T(s-x)\|_Y^2 = (T(s)-T(x) \mid T(s)-T(x))_Y$$

$$= \| T(s)\|_Y^2 + \| T(x)\|_Y^2 \qquad (2)$$

dhe

$$\| T(s+x)\|_Y^2 = \|T(s)\|_Y^2 + \|T(x)\|_Y^2 \qquad (3)$$

Nga (1),(2) dhe (3), rrjedh se

$$\| T(s-x)\|_Y^2 \leq C^2 \implies \| T(s-x)\|_Y \leq C. \qquad (4)$$

Nga ana tjetër, nga $x \in N(A)$ rrjedh se $A(s-x) = z$, që së bashku me (4) sjellë që $s-x \in \Omega_C$.

Në fund, meqenëse f është linear, $f(s)$ paraqet qendrën e simetrisë për bashkësinë konvekse dhe të kufizuar $(a,b) = f(\Omega_C)$, d.m.th. $m = f(s)$.

<u>V ë r e j t j e 3.3.2</u>. Rezultat analog me teoremën 3.3.1 në rastin kur X,Y janë hapësira të çfarëdoshme të Hilbertit,

kurse $Z = R^n$ është dhënë në [9]. Ky rezultat, për çfardo hapësire të Hilbertit Z është përgjithsuar në [39].

R r j e d h i m 3.3.3. Për çdo $f \in X^*$, ekziston $\ell \in Z^*$ i tillë që

$$m = f(s) = \ell \circ A(s).$$

V ë r t e t i m i, rrjedh drejtëpërsëdrejti nga teoremat 3.3.1 dhe 3.2.2.

////

*

* *

Rezultatet e arritura deri më tash kanë plotësuar shumë hapësira vakume në teorinë e splein-funksioneve interpolative. Për këtë dëshmon edhe orientimi i shumë shkencëtarëve eminentë të këtij domeni në zbatimin e këtyre rezultateve për qëllime të caktuara në analizën numerike dhe në kompjuteristikë. Megjithate, krahas rezultateve të arritura këtu, ka edhe probleme të hapura, studimi i të cilave meriton përkushtim të veqantë.

Ndër to janë edhe këto probleme:

1. Vërtetimi i teoremës për karakterizimin e splein-funksionit interpolativ $s = s(z,A,T)$ për rastin kur X,Z janë hapësira reale të Banahut, kurse Y është hapësirë reale refleksive e Banahut (analoge me teoremën 2.3.1).

2. Studimi i lidhjes së operatorit të interpolimit θ me operatorët A dhe T.

////

P ë r f u n d i m

Në këtë punim është shqyrtuar zgjidhja e këtij problemi të minimizimit abstrakt

$$\inf\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in A^{-1}(z)\}\ (z \in Z)$$

ku A është operator linear i kufizuar i X në Z kurse T operator linear i kufizuar i X në Y.

Elementi $s \in A^{-1}(z)$ për të cilin

$$\|T(s)\|_Y^2 = \inf\{\|T(x)\|_Y^2 : x \in A^{-1}(z)\} \qquad (*)$$

quhet splein-funksion interpolativ për z në lidhje me operatorët A dhe T dhe shënohet $s = s(z,A,T)$.

Zgjidhja e problemit $(*)$ është dhënë në këto raste:

1. Kur X,Z janë hapësira reale të Banahut, kurse Y hapësirë reale e Hilbertit. Në këtë rast janë vërtetuar këto teorema:

T e o r e m ë 2.2.1. Në qoftë se

(i) $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është bashkësi e mbyllur në Y

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$

atëherë ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

<u>T e o r e m ë 2.2.3</u>. Në qoftë se

(i) $N(T)+A^{-1}(z)$ $(z \in Z)$ është bashkësi e mbyllur në X

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$,

atëherë ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

<u>T e o r e m ë 2.3.1</u>. Për çdo $s \in A^{-1}(z)$ është i vërtetë relacioni

$$s = s(z,A,T) \Longleftrightarrow (\forall t \in N(A))(T(s) \mid T(t))_Y = 0$$

2. Kur X,Z janë hapësira reale të Banahut, kurse Y hapësirë reale refleksive e Banahut.Në këtë rast është vërtetuar kjo

<u>T e o r e m ë 2.2.15</u>. Në qoftë se

(i) $TA^{-1}(z)(z \in Z)$ është bashkësi e mbyllur dhe e kufizuar në Y

(ii) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$,

atëherë ekziston një dhe vetëm një splein-funksion interpolativ $s = s(z,A,T)$.

3. Kur: (a) X është hapësirë reale refkeksive e Banahut, Y hapësirë reale e Hilbertit dhe Z hapësirë reale e Banahut me dimension të fundëm,

(b) $\dim N(T) = m \leq n = \dim Z$

(c) $N(A) \cap N(T) = \{0\}$.

Në këtë rast është treguar se splein-funksioni interpolativ $s = s(z,A,T)$ paraqitet si zgjidhje e sistemit të ekuacioneve operatoriale

$$A(s) = z \wedge T(s) = C(z) \quad (z \in Z \wedge C \in \mathcal{L}(X, [TN(A)]^{\perp})).$$

Gjithashtu është dhënë një aplikim i splein-funksioneve interpolative në teorinë e funksionelëve optimal aproksimativ në hapësirën e splein-funksioneve interpolative S. Janë vërtetuar këto teorema:

<u>Teoremë 3.2.1.</u> Për çdo $f \in X^*$ ekziston $\ell \in Z^*$ i tillë që

$$g = \ell \circ A \wedge ((\forall s \in S)\ u(s) = g(s) - f(s) = 0).$$

Në këtë rast $\ell = f \circ m$.

<u>Teoremë 3.3.1.</u> Për çdo C për të cilën

$$\Omega_C = \{x \in X : A(x) = z \wedge \|T(x)\|_Y \leq C\} \neq \emptyset$$

plotësohet relacioni

$$(\forall f \in X^*)\ m = \frac{b-a}{2} = f(s) \quad (s \in S \wedge (a,b) = f(\Omega_C)).$$

////

S u m m a r y

In chapter II of this paper is proved the solution of the following abstract minimization problem

$$\inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 : x\in A^{-1}(z)\right\} \quad (z\in Z)$$

where A is a bounded linear operator of X into Z and T is a bounded linear operator of X into Y.

The element $s\in A^{-1}(z)$ for which

$$\|T(s)\|_Y^2 = \inf\left\{\|T(x)\|_Y^2 : x\in A^{-1}(z)\right\} \qquad (*)$$

is called the interpolating spline-function for z in connection with the operators A and T and is written $s=s(z,A,T)$.

The solution of problem (*) is proved in the following cases:

1. When X,Z are real Banach spaces and Y is a real Hilbert space. In this case are proved the following theorems:

<u>T h e o r e m 2.2.1</u>. Suppose

(i) $TA^{-1}(z)(z\in Z)$ is a closed set in Y

(ii) $N(A)\cap N(T)=\{0\}$,

then exists a unique interpolating spline-function $s=s(z,A,T)$.

T h e o r e m 2.2.3. Suppose

(i) $N(T)+A^{-1}(z)(z\in Z)$ is a closed set in X

(ii) $N(A)\cap N(T)=\{0\}$,

then exists a unique interpolating spline-function $s=s(z,A,T)$.

T h e o r e m 2.3.1. For each $s\in A^{-1}(z)$ the following relation is true

$$s = s(z,A,T) \Longleftrightarrow (\forall t\in N(A))(T(s)\mid T(t))_Y = 0$$

2. When X,Z are real Banach spaces and Y is a real reflexive Banach space. In this case is proved the following

T h e o r e m 2.2.15. Suppose

(i) $TA^{-1}(z)(z\in Z)$ is a closed and bounded set in Y

(ii) $N(A)\cap N(T)=\{0\}$,

then exists a unique interpolating-spline function $s=s(z,A,T)$.

3. When: (a) X is a real reflexive Banach space, Y is a real Hilbert space and Z is a finite dimension real Banach space,

(b) $\dim N(T) = m \leq n = \dim Z$

(c) $N(A)\cap N(T)=\{0\}$.

In this case is proved that the interpolating spline-function $s = s(z,A,T)$ fulfills the following operatorial system of the equations

$$A(s) = z \wedge T(s) = C(z)(z\in Z \wedge C\in\mathcal{L}(Z,[TN(A)]^{\perp})).$$

In chapter III is given an application of spline-functions in the theory of optimal approximation functionals in the spline-functions space S.

The following theorems are proved:

<u>T h e o r e m 3.2.1</u>. For each $f \in X^*$ exists $\ell \in Z^*$ so that

$$g = \ell \circ A \wedge ((\forall s \in S)\ u(s) = g(s) - f(s) = 0).$$

In this case $\ell = f \circ m$.

<u>T h e o r e m 3.3.1</u>. For each C for which

$$\Omega_C = \{x \in X:\ A(x) = z \wedge \| T(x) \|_Y \leq C\} \neq \emptyset$$

the following relation is true

$$(\forall f \in X^*)\ m = \frac{b-a}{2} = f(s)(s \in S \wedge (a,b) = f(\Omega_C)).$$

////

L i t e r a t u r a

[1]. Atteia M.- Généralisation de la définition et des propeties des "spline-functins" CR.Acad.Sci.Paris 260(1965)3550-3553.

[2]. Atteia M.- Théorie et applications des functions-spline en analyse numerique. Grenoble 1966.

[3]. Atteia M.- Functios-spline défines sur un ensemble convexe.Num.Math.12(1968) 192-210.

[4]. Авакян А.М.- О приближении функций двух переменных линейными методами.Укр.Мат.Журнал 1983,4(409-414).

[5]. Boor C.- On uniform approximation by splines.J.Approx.The. 1(1968)219-235.

[6]. Boor C.- On best interpolation.J.Approx.Theory 1976 16(28-42).

[7]. Ефимов А.В.- Математический анализ-специаьные разделы. Москва 1980.

[8]. Favard J.- Sur l'interpolation.J.math.1940 19(281-306).

[9]. Golomb M,Weinberger H.- Optimal approximation and error bunds"On numerical approx." Univ of Wisc. 1958(117-190).

[10].Holladay J.C.- Smothest curve approximation.Math.Tab.Aids. Comput 1957 11(233-243).

[11]. Helinger E,Toeplitz O.- Gunderlagen fur eine theorie der unendlichen Matrizen.Math.Ann. 1910 69(229-230).

[12]. Иосида К.- Функциональный анализ. Москва 1976.

[13]. Корнйчук Н.П.- О приближений интерполяционными сплаинами функций и их производних. ДАН СССР 1982 246 5(1063-1o66).

[14]. Корнейчук Н.П.- Сплайны в теорий приближения.Москва 1984.

[15]. Крейн С.Г.- Линейные уравнения в Банаховом пространстве Москва 1971.

[16]. Канторович Л.В,Акилов Г.П.- Функциональньй анализ.Москва 84.

[17]. Като Т.- Теория возмущений линйных операторов.Москва 1972.

[18]. Kurepa S.- Funkcionalna analiza (elementi teorije operatora) Zagreb 1981.

[19]. Колмогоров А.Н,Фомин С.В.- Элементы теорий функций и функционального анализа.Москва 1976.

[20]. Люстерник Л.А,Соболев В.И.- Краткий курс функционального анализа.Москва 1982.

[21]. Лигун А.А.- Об одном свойстве интерполяционих сплаин-функций Укр.Мат.Журнал. Т32 N=4 1980(507-513).

[22]. Laurent P.J.- Approximation et optimisation.Paris 1975.

[23]. Laurent P.J.- Conditions necessaires pour une meileur approximation non lineaire dans une espace norme. CR.Acad.Sci.Paris 269(1969)245-248.

[24]. Laurent P.J,Joly J.L.- Stability and duality in convex minimisation problems.MCR Tech. Report 1090 univ.of Wisc.1970 Rev. Franc d'Inf et de Rech.Oper R2 1971(3-42).

[25]. Moreau J.J.- Functions convexes duales et points proximaux dans un espace Hilbertien.CR Acad.Sci.Paris 255(1962)2897-2899.

[26]. Moréau J.J.- Decomposition orthogonale d'une espace Hilbertien selon dux cones mutualement polaires.CR Acad.Sci.Paris 255(1962)238-240.

[27]. Moreau J.J.- Theoreme "inf-sup".CR Acad.Sci.Paris 258 (1964)2720-2722.

[28]. Moreau J.J.- Sur le function polaire d'une function semi-continue superieurment.CR Acad.Sci.Paris 258 (1964) 1128-1131).

[29]. Moreau J.J.- Semi continuite du sour gradient d'une functionelle.CR Acad.Sci.Paris 260(1965) 1067-1070.

[30]. Moreau J.J.- Proximite et dualite dans un espace Hilbertien. Bul.Sci.Math.France 93(1965)273-299.

[31]. Переверзев С.В.-Точные значения приближения эрмитовыми сплаинами на одном класее функций двух переменых.Укр.Мат.Жур.31 5(1979)510-516.

[32]. Rudin W.- Functional analysis.Mc Graw-hill Book company New York 1975.

[33]. Rudin W.- Real and complex analysis.Mc Graw Hill Book Company New York 1974.

[34]. Riesz F.- Lecons sur les systemes d'equations lineaires a une infinite d'inconnues.Paris 1913.

[35]. Рисс Ф,Секефальви Б.- Лекций по функциональному анализу. Москва 1979.

[36]. Rockefelar R.T.- Duality and stability in extremum problems involving convex functions.Duke. Math.J.33(1966)81-89.

[37]. Schurer F,Cheney E.W.- On interpolating cubic splines with equally-spaced nodes.Ind.Math.1968 30(517-524)

[38]. Schurer F,Cheney E.W.- A note on the operators arsing in spline approximation.J of Approx. Theory 1(1968)94-102.

[39]. Sard A.- Optimal approximation.J.Func.Anal.1,2 67(222-244).

[40]. Schoenberger I.J.- On best approximation of linear operators Kon.Neder,Acad.Wet.Proce.Ser A 1964 67(155-163).

[41]. Schoenberger I.J.- Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.Quart Appl.Math 4(1946)45-99.

[42]. Schumaker L.L.- Spline functions.New York 1981.

[43]. Schumaker L.L.- Uniform approximation by chebyshev spline-functions.SIAM J NUM.Anal.5(1968)647-656.

[44]. Талдикин А.Т.- Элементи прикладного функционального анализа. Москва 1982.

[45]. Turku H.- Interpolimi në hapësirat e Hilbertit dhe klasat e Hardit H^p në gjysm plan.(disertacioni i doktorates) Prishtinë 1976.

[46]. Tasković M,Arandelović D.- Elementi teorije funkcija i funkcionalna analiza.Beograd 1981.

[47]. Васильев Ф.П.- Численые методы решения екстремальных задач. Москва 1980.

[48]. Васильев Ф.П.- Методы решения екстремальных задач.Москва 81.

[49]. Васильенко В.А.- Теория сплайн-функций.Новосибирск НГУ 1978.

[50]. Варга Р.- Функциональный анализ и теория аппроксимаций произвольного дефекта. Москва 1974.

[51]. Васильев А.А.- Аппроксимация с интерполяцией сплаинами произвольного дефекта.Мат.Заметки 1981 N=5 743-748.

[52]. Zanen A.C.- Linear Analysis.Amsterdam 1960.

[53]. Zejnullahu R.- Karakterizimi i splein-funksioneve në hapësirat e Hilbertit.(punimi i magjistratures) Prishtinë 1983.

[54]. Zejnullahu R.- Pikat proksimale dhe plotësi ortogonal në hapësirat e Hilbertit."Kërkimet" 4(21-24)86.

[55]. Zejnullahu R.- On a problem of minimization in Banach spaces."Radovi matematički" ANUBiH(në shtyp).

[56]. Женикбаев А.А.- Точные оценки равномерного приближения непреривных периолических функций сплаинами n-го порядка.Мат.Заметки 1973. N=2 217-228.

////

B I O G R A F I A

Jam lindur më 8.5.1957 në fshatin Llapashticë të Podujevës. Shkollën fillore e mbarova në Podujevë me sukses të shkëlqyeshëm kurse gjimnazin matematikor në Prishtinë gjithashtu me sukses të shkëlqyeshëm.Në vitin 1976 i regjistrova studimet në seksionin e matematikës të FSHMN në Prishtinë të cilat i mbarova në qershor të vitit 1980 me notë mesatare 9.08.Për suksesin e treguar gjat studimeve, me rastin e 10 vjetorit të themelimit të Universitetit më është ndarë shpërblimi "Student i dalluar".

Studimet pasuniversitare i kam regjistrue në vitin shkollor 1980/81 në FSHMN në Prishtinë.Provimet dhe seminaret e parapara i kam mbaruar deri në fund të vitit 1982 me notë mesatare 9.25,kurse punimin e magjistratures me titull "Karakterizimi i splein-funksioneve në hapësirat e Hilbertit" e kam mbrojtur më 12.01.1984.

Punoj pa ndërpre që nga viti 1978,në vitin shkollor 1978/79 në gjimnazin "8 Nëntori" të Podujevës e në vazhdim në gjimnazin "Ivo Llolla Ribar" të Prishtinës deri në shtatorë të vitit 1981. Në shtator të vitit 1981 jam zgjedh asistent në seksionin e matematikës të FSHMN në Prishtinë,kurse në vitin 1984 jam zgjedh ligjërues për lëndën Matematika I për studentët e fizikës,në të cilën thirrje gjendem edhe tani.

////