Vladimir Grujić

Hircebruhovi rodovi faktorprostora mnogostrukosti po dejstvu konačnih grupa

Sadržaj

Uvod

Hircebruhovi rodovi predstavljaju invarijante racionalnih bordizama. Racionalni bordizmi su odredjeni karakterističnim klasama, pa je svaki rod neki karakteristični broj. Nekoliko fundamentalnih teorema topologije su ovoga tipa. Prva od njih je Hircebruhova teorema o signaturi, koja izražava signaturu presečne forme kao L-klasu. Teorema Rimana-Roha-Hircebruha izražava neke analitičke karakteristike kompleksnih mnogostrukosti kao invarijante kompleksnih bordizama preko Todove klase. Ove teoreme imaju svoje ekvivarijantne verzije, npr. teoremu o G-signaturi. Osnovna teorema, koja objedinjuje sve ove rezultate je Atija-Singerova teorema o indeksu: analitički indeks eliptičkog kompleksa jednak je topološkom indeksu mnogostrukosti. Tako Hircebruhovi rodovi dobijaju interpretaciju kao indeksi eliptičkih kompleksa. To povezuje teoriju bordizama i K-teoriju. Primenjujući ekvivarijantnu verziju teoreme o indeksu na prostor slobodnih petlji, Viten je uveo pojam eliptičkog roda. Pojavljuje se izuzetna veza izmedju teorije modularnih formi i eliptičkih rodova.

U disertaciji se proučavaju Hircebruhovi rodovi faktorprostora mnogostrukosti po dejstvu konačnih grupa usrednjavanjem odgovarajućih ekvivarijantnih rodova. Klasični rezultati Mekdonalda, Zagiera i Hircebruha za Ojlerovu karakteristiku i signaturu čine polaznu motivaciju za ovakvu definiciju Hircebruhovih rodova faktorprostora. Razmatraju se signatura, χ_y−karakteristika i eliptički rod.

U prvom delu disertacije opisuju se različiti, ekvivalentni načini zadavanja Hircebruhovih rodova, preko karakterističnih stepenih redova, formalnih grupa i indeksa eliptičkih kompleksa. Daju se primeri rodova, njihovi stepeni redovi, formalne grupe i eliptički kompleksi koji ih odredjuju. Zatim se definišu odgovarajući ekvivarijantni rodovi i rodovi kompletnih preseka.

U drugom delu, na osnovu opisanih tehnika se računaju rodovi projektivnih kompletnih preseka i generatorne funkcije za rodove simetričnih stepena površi.

Faktorprostori mnogostrukosti po dejstvu konačnih grupa su najčešće singularni varijeteti ukoliko dejstva nisu slobodna, tako da predložena definicija, kroz usrednjenje ekvivarijantnih rodova, predstavlja uopštenje rodova mnogostrukosti. Simetrične stepene površi možemo razmatrati i kao faktorprostore po dejstvu grupe permutacija i kao kompleksne mnogostrukosti, pa se na tom slučaju mogu uporediti dve definicije. Takodje, rodove kompletnih preseka možemo razmatrati kao opstrukcije za zadanu podmnogostrukost da je predstavljena kao kompletan presek, što je iskorišćeno u slučaju simetričnih kvadrata površi.

Kao osnovna literatura za ovaj rad poslužile su mi klasične knjige:

Atiyah, *Lecture on K-theory*,

Hirzebruch, *Topological methods in Algebraic Geometry*,

Hirzebruch, Zagier, *The Atiyah-Singer Theorem and Ellementary Number Theory*,

Hirzebruch, Berger, Jung, *Manifolds and Modular forms*,

Zagier, *Equivariant Pontrjagin Classes and Applications to Orbit Space.*

1 Hircebruhovi rodovi

Prsten kobordizama Ω_* je definisan kao kvocijent $\mathbb{Z}\{M\}/M \sim \emptyset$ slobodne abelove grupe generisane mnogostrukostima po podgrupi generisanoj mnogostrukostima koje su granice. Ω je prirodno graduisan dimenzijama mnogostrukosti. Zbir je zadan disjunktnom unijom $[M_1] + [M_2] = [M_1 \sqcup M_2]$, a proizvod Dekartovim proizvodom $[M_1] \cdot [M_2] = [M_1 \times M_2]$. Ako imamo u vidu jos i dodatnu strukturu (orijentabilnost, stabilno skoro kompleksnu ili Spin) govorimo o prstenu kobordizama $\Omega_*^{SO}, \Omega_*^U$ ili Ω_*^{Spin}.

Prsten Ω_*^{SO} čine klase kobordantnih orijentabilnih mnogostrukosti. Po teoremi Toma je

$$\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \ldots]$$

i klasa je potpuno odredjena Pontrjaginovim brojevima $p_I[TM]$.

Realno vektorsko raslojenje ξ nad mnogostrukosti M ima stabilnu kompleksnu strukturu ako postoji k tako da je $\xi \oplus k$ izomorfno nekom kompleksnom vektorskom raslojenju η . Prsten Ω_*^U čine klase kobordantnih stabilno skoro kompleksnih mnogostrukosti. Po teoremi Milnora-Novikova je

$$\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2, \ldots]$$

i klasa je potpuno odredjena Černovim brojevima $c_I[TM \oplus k]$.

Hircebruhov rod u prstenu R je homomorfizam

$$\varphi : \Omega_*^S \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow R$$

gde je S razmatrana struktura. Svaki rod stabilno skoro kompleksne mnogostrukosti ili orijentabilne mnogostrukosti je predstavljen, za neki polinom φ_{dimM} sa koeficijentima u prstenu R, u obliku $\varphi_{dimM}(y_1, y_2, \ldots)[M]$, gde su promenljive u slučaju Ω_*^U Černove klase i u slučaju Ω_*^{SO} Pontrjaginove klase.

Multiplikativnost roda $\varphi[M_1 \times M_2] = \varphi[M_1] \cdot \varphi[M_2]$ i totalne Černove klase $c(M_1 \times M_2) = c(M_1) \cdot c(M_2)$ daju uslov multiplikativnosti niza $\{\varphi_n\}$, tj. ako označimo sa

$$\varphi(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(c_1, \ldots, c_n) t^n$$

tada iz

$$\sum c_n t^n = (\sum c_i' t^i)(\sum c_j'' t^j)$$

mora biti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(c_1, \ldots, c_n) t^n = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(c_1', \ldots, c_i') t^i \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(c_1'', \ldots, c_j'') t^j.$$

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ Ojlerove klase linijskih raslojenja na koja se cepa stabilno tangentno raslojenje. Tada su Černove klase odredjene kao elementarni simetrični polinomi $c_k = \sigma_k(x_1, \ldots, x_k)$. Stepeni red $Q_\varphi \in R[[t]]$, definisan sa $Q_\varphi(t) =$

$\varphi(1+t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n$, gde su $\alpha_0=1, \alpha_n=\varphi_n(1,0,\ldots,0)\in R$ potpuno odredjuje multiplikativni niz $\{\varphi_n\}$ formulom

$$\varphi(1+c_1t+\cdots+c_nt^n)=\varphi(\prod_{i=1}^{n}(1+x_it))=\prod_{i=1}^{n}Q_\varphi(x_it).$$

Ako poznajemo vrednosti roda $\varphi[M]$ na generatorima prstena Ω_*^S možemo rekonstruisati karakteristični stepeni red Q_φ. Tako je karakteristični stepeni red za kompleksni rod $Q_\varphi\in R[[t]]$ potpuno odredjen vrednostima $\varphi[\mathbb{C}P^n]=a_n$. Zaista, kako je $c(\mathbb{C}P^n)=(1+x)^{n+1}$ to je

$$a_n=\varphi[\mathbb{C}P^n]=(Q_\varphi(x)^{n+1})[\mathbb{C}P^n]=res_{x=0}(\frac{Q_\varphi(x)^{n+1}}{x^{n+1}}dx)=res_{y=0}(\frac{g'(y)}{y^{n+1}}dy)$$

gde je $x=g(y)$ i $y=\frac{x}{Q_\varphi(x)}$. Odatle imamo da je

$$\boxed{g(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi[\mathbb{C}P^n]}{n+1}y^{n+1}}$$

pa je $Q_\varphi(x)=\frac{x}{g^{-1}(x)}$. Uz sve rečeno imamo:

Teorema 1 *Postoji uzajamno jednoznačna korespodencija izmedju Hircebruhovih rodova* $\varphi:\Omega_*^U\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow R$, *multiplikativnih nizova* $\{\varphi_n\},\varphi_n\in R[c_1,\ldots,c_n]$ *i karakterističnih stepenih redova* $Q_\varphi\in R[[t]]$.

U slučaju orijentisanih kobordizama postoji ista korespodencija. Pontrjaginove klase $p_k=\sigma_k(x_1^2,\ldots x_k^2)$ su simetrične funkcije od kvadrata Ojlerovih klasa $x_1,\ldots,x_n$ jednodimenzionalnih raslojenja na koja se cepa $TM\otimes\mathbb{C}$ i na generatorima je $p(\mathbb{C}P^{2n})=(1+x^2)^{n+1}$, pa su karakteristični redovi Q_φ obavezno parni, a varijable za polinome iz multiplikativnog niza koji odgovara nekom rodu φ su kvadrati Ojlerovih klasa $x_1,\ldots,x_n$.

2 Formalne grupe

Jednodimenzionalna formalna komutativna grupa nad komutativnim prstenom sa jedinicom R je stepeni red $F(x,y)\in R[[x,y]]$ koji zadovoljava uslove:

$F(x,0)=F(0,x)=x$

$F(x,y)=F(y,x)$

$F(F(x,y),z)=F(x,F(y,z))$.

Homomorfizam $\varphi:F\longrightarrow G$ formalnih grupa nad prstenom R je stepeni red $\varphi\in R[[x]]$ takav da je $\varphi(0)=0$ i $\varphi(F(x,y))=G(\varphi(x),\varphi(y))$. Skup svih homomorfizama $Hom_R(F,G)$ čini abelovu grupu u odnosu na sabiranje

$$(\varphi_1+\varphi_2)(x)=G(\varphi_1(x),\varphi_2(x)).$$

Kompozicija

$$Hom_R(F_1, F_2) \times Hom_R(F_2, F_3) \longrightarrow Hom_R(F_1, F_3)$$

je bilinearna, pa skup $T(R)$ svih formalnih grupa nad prstenom R čini poluaditivnu kategoriju. Ako je $r : R_1 \longrightarrow R_2$ homomorfizam prstena i $F \in R_1[[x,y]]$ formalna grupa nad R_1 zadana sa

$$F(x,y) = x + y + \sum \alpha_{i,j} x^i y^j$$

onda je

$$r[F](x,y) = x + y + \sum r(\alpha_{i,j}) x^i y^j$$

formalna grupa nad R_2.

Za svaku formalnu grupu $F(x,y)$ nad prstenom bez torzije R, postoji jedinstveni stepeni red $g_F \in R[[x]]$ takav da je

$$g_F(F(x,y)) = g_F(x) + g_F(y).$$

Zaista, neka je $\omega(x) = \frac{\partial F(x,z)}{\partial z}\,|_{z=0}$. Tada je $\omega(F(x,y)) = \frac{\partial F(F(x,y),z)}{\partial z}\,|_{z=0} = \frac{\partial F(F(x,z),y)}{\partial F(x,z)} \cdot \frac{\partial F(x,z)}{\partial z}\,|_{z=0} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \cdot \omega(x)$, odakle je $\frac{dx}{\omega(x)} = \frac{dF(x,y)}{\omega(F(x,y))}$, pa za $g(x) = \int_0^x \frac{dx}{\omega(x)}$ imamo $dg(x) = dg(F(x,y))$, odnosno $g(F(x,y)) = g(x) + C$, odakle za $x = 0$ konačno dobijamo traženu jednakost.

Stepeni red $g_F(x)$ zovemo logaritmom formalne grupe $F(x,y)$. Označimo sa $\Omega = \Omega_*^U \otimes \mathbb{Q}$.

Teorema 2 (Lazar,Kvilen) *Formalna grupa geometrijskih kobordizama $f(u,v) \in \Omega[[u,v]]$ čiji je logaritam*

$$g_f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} y^{n+1}$$

je univerzalna, tj. za svaku formalnu grupu $F(x,y) \in R[[x,y]]$ nad proizvoljnim prstenom R, postoji homomorfizam $r : \Omega \longrightarrow R$ takav da je $F(x,y) = r[F](u,v)$.

Postoji uzajamno jednoznačna korespodencija izmedju formalnih grupa nad prstenom R i Hircebruhovih rodova

$$\varphi : \Omega_*^U \oplus \mathbb{Q} \longrightarrow R.$$

Ako je Q_φ karakteristični stepeni red za Hircebruhov rod φ,tada je sa $g_\varphi(x) = f^{-1}(x)$, gde je $f(x) = \frac{x}{Q_\varphi(x)}$ odredjen logaritam za formalnu grupu

$$F_\varphi(x,y) = g_\varphi^{-1}(g_\varphi(x) + g_\varphi(y)).$$

Obrnuto, ako je $F(x,y) \in R[[x,y]]$ formalna grupa nad prstenom R, tada je sa

$$Q_\varphi(x) = \frac{x}{g_F^{-1}(x)}$$

odredjen karakteristični stepeni red za neki Hircebruhov rod.

3 Primeri Hircebruhovih rodova

3.1 Univerzalni rod

Univerzalni rod je zadan identičnim homomorfizmom

$$Id : \Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \Omega_*^U \otimes \mathbb{Q}.$$

Njegov karakteristični stepeni red je odredjen sa

$$Q_{Id}(x) = \frac{x}{g^{-1}(x)}, g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} y^{n+1}$$

i $g \in \Omega[[y]]$ je logaritam univerzalne formalne grupe geometrijskih kobordizama.

3.2 Ojlerova karakteristika

Neka je $H^*(X, \mathcal{S})$ kohomologija prostora X sa koeficijentima u pramenu $\mathbb{C}-$modula $\mathcal{S}$. Ukoliko je pramen $\mathcal{S}$ konačnog tipa, tj. sve kohomološke grupe $H^q(X, \mathcal{S})$ su konačnodimenzionalni vektorski prostori nad $\mathbb{C}$ i samo konačno mnogo njih su netrivijalne, možemo definisati Ojlerovu karakteristiku prostora X u pramenu $\mathcal{S}$ kao:

$$\chi(X, \mathcal{S}) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathcal{S}).$$

Ako je $\mathcal{S}$ konstantan pramen sa vrednostima u $\mathbb{C}$ imamo običnu Ojlerovu karakteristiku prostora X za koju važi:

$$\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y)$$

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Ojlerova karakteristika nije invarijanta orijentisanih kobordizama , na primer $\chi(S^2) = 2$ iako je $S^2 \sim \emptyset$. Takodje, Ojlerova karakteristika ne prepoznaje stabilnu skoro kompleksnu strukturu.

Posmatrajmo homomorfizam $c : \Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definisan sa $c(M^{2n}) = c_n(TM \oplus k)$. Za skoro kompleksne mnogostrukosti je $c(M^{2n}) = c_n(TM) = \chi(M^{2n})$.

Za karakteristični stepeni red važi

$$a_n = \chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1 = res_{x=0}(\frac{Q_\varphi(x)^{n+1}}{x^{n+1}} dx) = res_{y=0}(\frac{g'(y)}{y^{n+1}} dy),$$

$$g(y) = y + y^2 + y^3 + \cdots = \frac{y}{1-y},$$

pa je $Q_\chi(x) = \frac{x}{g^{-1}(x)} = 1 + x$. Formalna grupa koja odgovara rodu c je

$$F(u, v) = \frac{u - 2uv + v}{1 - uv}.$$

3.3 Signatura

Ako je M^{4n} orijentisana mnogostrukost, tada presečna forma

$$\beta : H_{2n}(M,\mathbb{Z}) \times H_{2n}(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

zbog Poenkareove dualnosti, predstavlja nedegenerisanu, simetričnu bilinearnu formu, čija signatura predstavlja invarijantu orijentisanih kobordizama i zadaje Hircebruhov rod

$$sign : \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Kako je $sign(\mathbb{C}P^{2n}) = 1$, to je

$$g(y) = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots = arcthy,$$

pa je karakteristični stepeni red koji zadaje signaturu odredjen sa

$$Q_{sign}(x) = \frac{x}{th(x)}$$

i imamo Hircebruhovu formulu:

$$sign(M^{4n}) = (\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{th(x_i)})[M^{4n}] = L_n(x_1, \dots x_n)[M^{4n}].$$

Formalna grupa kojom je zadana signatura je

$$F(u,v) = \frac{u+v}{1+uv}.$$

3.4 Todov rod

Aritmetički rod algebarske mnogostrukosti X je definisan kao Ojlerova karakteristika u pramenu holomorfnih funkcija. Za kompleksne projektivne prostore $\mathbb{C}P^n$ aritmetički rod je jednak jedinici, pa možemo definisati Hircebruhov rod koji uopštava aritmetički rod na stabilno skoro kompleksne mnogostrukosti. Naime,

$$g'(y) = 1 + y + y^2 + \cdots, g(y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots = -ln(1-y)$$

$$Q_{Td}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}.$$

Formalna grupa Todovog roda je

$$F(u,v) = u + v - uv$$

3.5 χ_y-karakteristika

Neka je W kompleksno raslojenje nad kompleksnom mnogostrukošću X i $\Lambda^p T$ p-ti spoljašnji stepen tangentnog raslojenja. Posmatrajmo Ojlerovu karakteristiku od X u pramenu holomorfnih sečenja raslojenja $W \otimes \Lambda^p T$

$$\chi^p(X,W) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q dim_{\mathbb{C}} H^q(X, W \otimes \Lambda^p T).$$

χ_y- karakteristika mnogostrukosti X u pramenu holomorfnih sečenja raslojenja W se definiše kao

$$\chi_y(X,W) = \sum_{p=0}^{\infty} y^p \chi^p(X,W).$$

Imamo da je $\chi^0(X,W)$ Ojlerova karakteristika mnogostrukosti X u pramenu holomorfnih sečenja raslojenja W. Ako je W trivijalno linijsko raslojenje pišemo $\chi_y(X)$ i imamo da je $\chi_0(X) = \chi^0(X)$ aritmetički rod mnogostrukosti X. Za kompleksne mnogostrukosti je $\chi_{-1}(X) = \chi(X)$, $\chi_1(X) = sign(X)$.

Znajući da je $\chi_y(\mathbb{C}P^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i y^i$ možemo izračunati karakteristični stepeni red koji zadaje Hircebruhov rod

$$\chi_y : \Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}[y]$$

i dobijamo

$$g'(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i y^i)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n y^{n+1}}{1+y}t^n$$

$$x = g(t) = \frac{1}{1+y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n y^{n+1}}{n+1}t^{n+1} = \frac{1}{1+y} ln\frac{1+yt}{1-t}$$

$$Q_{\chi_y}(x) = \frac{x}{g^{-1}(x)} = \frac{x(1+ye^{-(1+y)x})}{1-e^{-(1+y)x}}.$$

Formalna grupa za χ_y- karakteristiku je

$$F_y(u,v) = \frac{u+v-(1-y)uv}{1+yuv}$$

3.6 Eliptički rod

Neka je $Mod^*(\Gamma_0(2)) \subset \mathbb{Q}[[q]], q = e^{2\pi i\tau}, Im\tau > 0$ prsten modularnih formi u odnosu na grupu $\Gamma_0(2) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) : c = 0 mod 2\}$. Eliptički rod

$$Ell : \Omega^{SO} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow Mod^*(\Gamma_0(2))$$

je definisan karakterističnim stepenim redom $Q_{Ell}(x) = \frac{x}{f(x)}$, gde je $f(x) = (\wp(x) - e_1)^{-1/2}$ eliptički sinus u odnosu na rešetku $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$. Kako $f(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $f'^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, to je logaritam eliptičkog roda eliptički integral

$$g(y) = \int_0^y (1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4)^{-1/2} dt,$$

gde su konstante ε, δ odredjene rešetkom $\varepsilon = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3), \delta = -3/2e_1$.Degenerisani slučajevi $\varepsilon = 0, \delta = -1/8$ i $\varepsilon = \delta = 1$ odgovaraju $A-$rodu i $L-$rodu respektivno. Formalni grupni zakon koji odgovara eliptičkom rodu je Ojlerova adiciona formula za eliptički integral

$$F(u,v) = \frac{u\sqrt{1 - 2\delta v^2 + \varepsilon v^4} + v\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}{1 - \varepsilon u^2 v^2}.$$

Na osnovu razlaganja $f(x)$ u beskonačni proizvod

$$f(x) = 2\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^k e^x}{1 + q^k e^x} \cdot \frac{1 - q^k e^{-x}}{1 + q^k e^{-x}} (\frac{1 + q^k}{1 - q^k})^2$$

i identiteta

$$\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} (\frac{1 - q^k}{1 + q^k})^2 = \varepsilon^{1/4}$$

imamo da je

$$Ell(M) = \varepsilon^{n/2} \Big(\prod_{i=1}^{2n} x_i \frac{1 + e^{-x_i}}{1 - e^{-x_i}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + q^k e^{-x_i}}{1 - q^k e^{-x_i}} \cdot \frac{1 + q^k e^{x_i}}{1 - q^k e^{x_i}} \Big)[M].$$

Iz razvoja logaritma $g(y)$ u stepeni red

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}) \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

imamo $Ell(\mathbb{C}P^{2n}) = P_n(\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}})$ izraženo preko Ležandrovih polinoma P_n.

Na osnovu razlaganja teta-funkcije u beskonačni proizvod

$$\theta(z,\tau) = q^{1/8}(2\sin \pi z) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k y)(1 - q^k y^{-1}), q = e^{2\pi i \tau}, y = e^{2\pi i z}$$

možemo definisati $y-$eliptički rod karakterističnim stepenim redom

$$Q_{Ell_y}(x) = x \cdot \frac{\theta(\frac{x}{2\pi i} - z, \tau)}{\theta(\frac{x}{2\pi i}, \tau)},$$

$$Ell_y(M) = y^{-n/2} \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1 - y e^{-x_i}}{1 - e^{-x_i}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^k y e^{-x_i}}{1 - q^k e^{-x_i}} \cdot \frac{1 - q^k y^{-1} e^{x_i}}{1 - q^k e^{x_i}} \Big)[M^{2n}].$$

Imamo da je

$$Ell(M) = (-\varepsilon)^{n/2} Ell_{-1}(M).$$

4 Atija-Singerova teorema o indeksu

4.1 Eliptički kompleksi

Neka su E i F glatka kompleksna vektorska raslojenja ranga m i n respektivno, nad kompaktnom mnogostrukošu X dimenzije k i $D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ diferencijalni operator reda p, u lokalnim koordinatama $(x_1, \ldots, x_k) \in U_x$ zadan sa

$$D = \sum_{0 \leq l_1 + \cdots + l_k \leq p} A_{l_1,\ldots,l_k} \frac{\partial^{l_1+\cdots+l_k}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_k^{l_k}},$$

gde je $A_{l_1,\ldots l_k} : U_x \longrightarrow L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ sekcija raslojenja $Hom(E, F)$. Ako je $\pi : T^*X \setminus X \longrightarrow X$ kotangentno raslojenje nad X, bez nula-sekcije, definisan je simbol operatora D kao morfizam indukovanih raslojenja

$$\sigma_p(D) : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$$

$$\sigma_p(D)(v, s(x)) = (v, \frac{i^p}{p!} D(f^p s)(x)),$$

gde je $x \in X, 0 \neq v \in T_x^*X, s \in \Gamma(E)$ i $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ glatka funkcija za koju je $f(x) = 0$ i $df_x = v$, u lokalnim koordinatama

$$\sigma_p(D)(v) = \sum_{l_1+\cdots+l_k=p} A_{l_1,\ldots l_k}(x) v_1^{l_1} \cdots v_k^{l_k}, v = (v_1, \ldots v_k), \pi(v) = x.$$

D je eliptički diferencijalni operator reda p ako je simbol $\sigma_p(D)$ izomorfizam raslojenja i tada je dobro definisan indeks operatora D

$$ind(D) = dim_{\mathbb{C}} ker D - dim_{\mathbb{C}} coker D.$$

Neka su $E_0, \ldots E_q$ kompleksna vektorska raslojenja nad X i

$$\{\mathcal{E}\} : \Gamma(E_0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(E_1) \xrightarrow{D_1} \cdots \xrightarrow{D_{q-1}} \Gamma(E_q)$$

kompleks diferencijalnih operatora reda p. Kažemo da je kompleks $\{\mathcal{E}\}$ eliptički kompleks ukoliko je odgovarajući kompleks simbola $\{\mathcal{E}_\sigma\}$ tačan izvan nula-sekcije kotangentnog raslojenja T^*X :

$$\{\mathcal{E}_\sigma\} : 0 \longrightarrow \pi^*E_0 \xrightarrow{\sigma_0} \pi^*E_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{q-1}} \pi^*E_q \longrightarrow 0.$$

Indeks eliptičkog kompleksa $\{\mathcal{E}\}$ je njegova Ojlerova karakteristika :

$$ind\{\mathcal{E}\} = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j dim_{\mathbb{C}} H^j(\mathcal{E}).$$

4.2 Černov karakter

Neka je E kompleksno vektorsko raslojenje nad mnogostrukosti M sa strukturnom grupom $U(n)$ i totalnom Černovom klasom $c(E) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)$ i ρE njemu asocirano raslojenje iz reprezentacije $\rho : U(n) \longrightarrow U(m)$. Černov karakter raslojenja E se definiše kao

$$ch(E) = e^{x_1} + \cdots e^{x_n}$$

i zadaje homomorfizam $ch : K(M) \longrightarrow H^*(M, \mathbb{Q})$, tj važi

$$ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F)$$

$$ch(E \otimes F) = ch(E)ch(F).$$

Ako je $E = l_1 \oplus \cdots \oplus l_n$ suma linijskih raslojenja, strukturna grupa se redukuje na maksimalan torus $T^n = \{(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}) \mid x_j \in \mathbb{R}\} \subset U(n)$ i može se predpostaviti da je $\rho T^n \subset T^m = \{(e^{2\pi i y_1}, \ldots, e^{2\pi i y_m}) \mid y_j \in \mathbb{R}\} \subset U(m)$, tj. $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$. Tada je

$$c(\rho E) = \prod_{j=1}^{n}(1 + y_j) = \prod_{j=1}^{n}(1 + (a_{1j}x_1 + \cdots + a_{nj}x_n)).$$

Na osnovu principa razlaganja, iste formule važe za proizvoljna raslojenja. Na primer,

$$c(E^*) = \prod_{j=1}^{n}(1 - x_j)$$

$$c(\Lambda^k E) = \prod_{i_1 < \cdots < i_k}(1 + (x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})), c(\Lambda^k E^*) = \prod_{i_1 < \cdots < i_k}(1 - (x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}))$$

$$c(S^k E) = \prod_{i_1 \le \cdots \le i_k}(1 + (x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})), c(S^k E^*) = \prod_{i_1 \le \cdots \le x_{i_k}}(1 - (x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}))$$

$$ch(\rho E) = e^{y_1} + \cdots + e^{y_m}.$$

Odatle je

$$ch(\Lambda_t E^*) = \sum_{k=0}^{n} ch(\Lambda^k E^*)t^k = \prod_{k=1}^{n}(1 + te^{-x_k})$$

$$ch(S_t E^*) = \sum_{k=0}^{n} ch(S^k E^*)t^k = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - te^{-x_k}}$$

$$ch(\Lambda_t E^* \otimes \mathbb{C}) = \sum_{k=0}^{n} ch(\Lambda^k(E^* \otimes \mathbb{C}))t^k = \sum_{k=0}^{n} ch(\bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p E^* \otimes \Lambda^q \overline{E^*})t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(\sum_{p+q=k} ch(\Lambda^p E^*)ch(\Lambda^q \overline{E^*}))t^k = \prod_{k=1}^{n}(1 + te^{-x_k})(1 + te^{x_k})$$

$$ch(S_tE^*\otimes\mathbb{C})=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-te^{-x_k}}\cdot\frac{1}{1-te^{x_k}}.$$

Teorema 3 (Atija,Singer) *Neka je M^{2n} orijentabilna mnogostrukost i $\{\mathcal{E}\}$: $E_0\xrightarrow{D}E_1\xrightarrow{D}\cdots\xrightarrow{D}E_m$ eliptički kompleks asociran tangentnom raslojenju TM. Tada je*

$$ind\{\mathcal{E}\}=(-1)^n\Big(\big(\frac{1}{e(TM)}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j ch(E_j)\big)Td(TM\otimes\mathbb{C})\Big)[M]$$

$$\boxed{ind\{\mathcal{E}\}=\Big(\big(\textstyle\sum_{j=0}^{m}(-1)^j ch(E_j)\big)\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\cdot\frac{1}{1-e^{x_i}}\Big)[M]}.$$

•

4.3 de Ramov kompleks $\{\Omega\}$

Na mnogostrukosti M^n definisan je kompleks $\{\Omega\}$ diferencijalnih formi sa kompleksnim koeficijentima

$$\Omega^p=\Gamma(\Lambda^p(T^*M\otimes\mathbb{C})),p=\overline{0,n}$$

$$\{\Omega\}:\Omega^0\xrightarrow{d}\Omega^1\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Omega^n.$$

Simbol operatora diferenciranja je zadan sa

$$\sigma(d)(v,\omega_x)=(v,id(f\omega)\mid_x)=(v,i(df\wedge\omega+fd\omega)\mid_x)=(v,iv\wedge\omega_x),$$

pa je de Ramov kompleks eliptički, jer je odgovarajući kompleks simbola tačan u svakom sloju

$$0\longrightarrow\mathbb{C}\xrightarrow{\sigma_v}T_x^*M\xrightarrow{\sigma_v}\Lambda^2T_x^*M\xrightarrow{\sigma_v}\cdots\xrightarrow{\sigma_v}\Lambda^nT_x^*M\longrightarrow 0.$$

Indeks kompleksa $\{\Omega\}$ je jednak Ojlerovoj karakteristici mnogostrukosti M

$$ind\{\Omega\}=\chi(M).$$

Iz Atija-Singerove teoreme je

$$ind\{\Omega\}=(-1)^n\Big(\big(\frac{1}{x_1\cdots x_n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j ch(\Lambda^jT^*\otimes\mathbb{C})\big)\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\cdot\frac{-x_j}{1-e^{x_j}}\Big)[M]=$$

$$=\Big(ch(\Lambda_{-1}(T^*M\otimes\mathbb{C}))\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\cdot\frac{1}{1-e^{x_j}}\Big)[M]=(x_1\cdots x_n)[M]=\chi(M).$$

4.4 Dolboov kompleks $\{\overline{\partial}\}$

Posmatrajmo de Ramov kompleks na n-dimenzionalnoj kompleksnoj mnogostrukosti M. Svaka k-forma sa kompleksnim koeficijentima se razlaže u sumu $(p,q)-$formi

$$\Omega^k = \Gamma(\Lambda^k(T^*\otimes\mathbb{C})) = \Gamma(\Lambda^k(T^*\oplus\overline{T^*})) = \bigoplus_{p+q=k}\Gamma(\Lambda^pT^*\otimes\Lambda^q\overline{T^*}) = \bigoplus_{p+q=k}A^{p,q}$$

i operator diferenciranja se razlaže u sumu operatora

$$d = \partial + \overline{\partial},$$

$$\partial : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q}, \overline{\partial} : A^{p,q} \longrightarrow A^{p,q+1}.$$

U lokalnim koordinatama za $(0,q)-$formu je

$$\overline{\partial}(\sum_{i_1<\cdots<i_q} f_{i_1,\ldots,i_q}d\overline{z}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{i_q}) \doteq \sum_{i_1<\cdots<i_q}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_q}}{\partial\overline{z}_{i_j}}d\overline{z}_j\wedge d\overline{z}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{i_q}.$$

Dobijamo kompleks

$$\{\overline{\partial}_p\} : A^{p,0}\xrightarrow{\overline{\partial}}A^{p,1}\xrightarrow{\overline{\partial}}\cdots\xrightarrow{\overline{\partial}}A^{p,n}$$

i njihovu formalnu sumu sa parametrom y

$$\{\overline{\partial}\} : \bigoplus_{p=0,n}y^pA^{p,0}\xrightarrow{\overline{\partial}}\bigoplus_{p=0,n}y^pA^{p,1}\xrightarrow{\overline{\partial}}\cdots\xrightarrow{\overline{\partial}}\bigoplus_{p=0,n}y^pA^{p,n},$$

koji su eliptički, jer je

$$\sigma(\overline{\partial}_p)(v,\omega_x) = (v, i\overline{\partial}_p(f\omega)\mid_x) = (v, i\overline{\partial}_pf\wedge\omega_x).$$

$\{\overline{\partial}_p\}$ je kompleks sečenja fine rezolucije od pramena $p-$formi Λ^pT^*, pa je njegov indeks jednak Ojlerovoj karakteristici mnogostrukosti M u tom pramenu, odnosno

$$ind\{\overline{\partial}_p\} = \chi^p(M)$$

$$ind\{\overline{\partial}\} = \chi_y(M).$$

Takodje, ako je W holomorfno vektorsko raslojenje nad M i $\Omega^k(W) = \Gamma(\Lambda^k(T^*\otimes\mathbb{C})\otimes W) = \oplus_{p+q=k}A^{p,q}(W)$, gde je $A^{p,q}(W) = \Gamma(\Lambda^pT^*\otimes\Lambda^q\overline{T}^*\otimes W)$, definisan je Dolboov kompleks $\{\overline{\partial}_W\}$ u raslojenju W i za njegov indeks je

$$ind\{\overline{\partial}_W\} = \chi_y(M,W).$$

Iz Atija-Singerove teoreme, indeks Dolboovog kompleksa je

$$ind\{\overline{\partial}\} = \Big(\sum_{q=0}^{n}(-1)^q ch(\bigoplus_{p=0,n}y^p\Lambda^pT^*\otimes\Lambda^q\overline{T^*})\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\cdot\frac{1}{1-e^{x_j}}\Big)[M] =$$

$$= \Big(ch(\Lambda_{-1}T) ch(\Lambda_y T^*) \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{1}{1-e^{x_j}} \Big)[M] = \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}} \Big)[M].$$

Takodje je

$$\chi_y(M,W) = ind\{\bar{\partial}_W\} = \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}} \cdot ch(W) \Big)[M].$$

Izračunajmo χ_y−karakteristike projektivih prostora u linijskim raslojenjima. Linijska raslojenja nad $\mathbb{C}P^n$ su klasifikovana sa $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, odnosno razlikuju se Černovim brojem. Neka je h Hopfovo raslojenje, tada je svako linijsko raslojenje nad $\mathbb{C}P^n$ oblika $h^k, k \in \mathbb{Z}$. Iz prethodne formule, $ch(h^k) = e^{kx}$ i normalizacije $x \longmapsto (1+y)x$ sledi

$$\chi_y(\mathbb{C}P^n, h^k) = res_{x=0} \Big(\frac{1+ye^{-x(1+y)}}{1-e^{-x(1+y)}} \Big)^{n+1} e^{kx(1+y)} dx$$

$$\chi_y(\mathbb{C}P^n, h^k) = res_{t=0} \frac{1}{t^{n+1}} \Big(\frac{1+yt}{1-t} \Big)^k \frac{dt}{(1-t)(1+yt)}$$

$$\chi_y(\mathbb{C}P^n, h^k) = \sum_{i+j=n} \binom{k+j}{j} \binom{k-1}{i} y^i.$$

Tada je sa

$$g'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_y(\mathbb{C}P^n, h^k) t^n = \frac{1}{(1-t)(1+yt)} \Big(\frac{1+yt}{1-t} \Big)^k$$

$$g(t) = \int_0^t \Big(\frac{1+yu}{1-u} \Big)^k \frac{du}{(1-u)(1+yu)} = \frac{1}{k(1+y)} \Big(\Big(\frac{1+yt}{1-t} \Big)^k - 1 \Big)$$

definisan logaritam nekog Hircebruhovog roda čiji je karakteristični stepeni red

$$Q(x) = \frac{x}{g^{-1}(x)} = x \cdot \frac{1+y(1+k(1+y)x)^{-1/k}}{1-(1+k(1+y)x)^{-1/k}}.$$

Primetimo da je za $k=0$ to χ_y−karakteristika. Ako sumiramo sva linijska raslojenja $h^k, k \geq 0$ imamo

$$\sum_{n \geq 0} \chi_y(\mathbb{C}P^n, \oplus_{k \geq 0} q^k h^k) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{k \geq 0} q^k \chi_y(\mathbb{C}P^n, h^k) = \frac{1}{(1-t)(1+yt)} \cdot \frac{1}{1-q\frac{1+yt}{1-t}},$$

odnosno sa

$$x = g(t) = \int_0^t \frac{du}{(1+yu)(1-q-(1+qy)u)} = \frac{1}{1+y} \ln \frac{(1-q)(1+yt)}{1-q-(1+yq)t}$$

$$Q(x) = \frac{x}{g^{-1}(x)} = x \cdot \frac{\frac{1+yq}{1-q} + ye^{-x(1+y)}}{1-e^{-x(1+y)}}$$

je definisan novi Hircebruhov rod.

Ako je $c_1(M) = 0 mod 2$, odnosno ako je M spinorna mnogostrukostm postoji linijsko raslojenje takvo da je $l \otimes l = \Lambda^n T^*$. Imamo $c(l) = 1 + \frac{1}{2}c(\Lambda^n T^*) = 1 - \frac{1}{2}(x_1 + \cdots + x_n)$. Indeks kompleksa $\{A_q = (\Lambda^0 T^* \otimes \Lambda^q \overline{T^*}) \otimes l\}$ je A–rod:

$$ind\{\mathcal{A}\} = \Big(ch(l)ch(\Lambda_{-1}T)\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\cdot\frac{1}{1-e^{x_j}}\Big)[M] = (\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j}{2sh(\frac{x_j}{2})})[M] = \mathcal{A}(M).$$

4.5 Eliptički rod kao indeks

Eliptički rod je motivisan kao ekvivarijantni rod prirodnog dejstva kružnice S^1 na prostoru slobodnih petlji $\mathcal{L}M$ na orijentabilnoj, zatvorenoj mnogostrukosti M^{4n}. Neka je

$$sign(M,E) = \Big(\prod_{i=1}^{2n} x_i\frac{1+e^{-x_i}}{1-e^{-x_i}}\cdot ch(E)\Big)[M]$$

signatura u vektorskom raslojenju E nad M. Ako je

$$E = \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}} \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbb{C}},$$

imamo

$$ch(E) = \prod_{i=1}^{2n}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+q^k e^{-x_i}}{1-q^k e^{-x_i}}\frac{1+q^k e^{x_i}}{1-q^k e^{x_i}},$$

odakle je

$$sign(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}} \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbb{C}}) = \varepsilon^{n/2} Ell(M).$$

Takodje je

$$Ell_y(M) = sign\Big(M, y^{-n/2}\bigotimes_{k\geq 1}(\Lambda_{-yq^k}\bar{T}\otimes\Lambda_{-y^{-1}q^k}T\otimes S_{q^k}\bar{T}\otimes S_{q^k}T)\Big).$$

5 Ekvivarijantni rodovi

Neka je $\varphi : \Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow R$ neki Hircebruhov rod za koji postoji eliptički kompleks $\{\mathcal{E}\}$

$$\{\mathcal{E}\} : \Gamma(E_0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(E_1) \xrightarrow{D_1} \cdots \xrightarrow{D_{q-1}} \Gamma(E_q)$$

asociran tangentnom raslojenju mnogostrukosti M^{2n} takav da je

$$ind(\mathcal{E}) = \varphi[M].$$

Iz Atija-Singerove teoreme o indeksu je

$$ind(\mathcal{E}) = \Big((\sum_{i=0}^{q} (-1)^i ch(E_i)) \prod_{j=1}^{n} (\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{1}{1-e^{x_j}}) \Big) [M].$$

Neka na kompleksnoj mnogostrukosti M dejstvuje diskretna grupa G tako da je indukovano dejstvo na kompleksu $\mathcal{E}$ saglasno sa diferencijalima D. Tada G dejstvuje na kohomologijama kompleksa $\{\mathcal{E}\}$ i možemo definisati ekvivarijantni $\varphi-$ rod kao

$$\varphi(g, M) = ind(g, M) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j trg_* \mid_{H^j(\mathcal{E}_\sigma)} .$$

Ekvivarijantna Atija-Singerova teorema o indeksu daje način za računanje ekvivarijantnog indeksa .

Neka su M_ν^g povezane komponente fiksnih podmnogostrukosti. Uočimo komponentu $Y = M_\nu^g$. Tangentno raslojenje $TM \mid_Y$ se razbija na sumu $TM \mid_Y = \oplus_\lambda N_\lambda$ sopstvenih podraslojenja N_λ ranga d_λ, gde je $N_1 = TY$, pa je

$$c(TM \mid_Y) = \prod_\lambda \prod_{j=1}^{d_\lambda} (1 + x_j^{(\lambda)}) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x_j),$$

odnosno svaka klasa x_j se može identifikovati kao klasa koja pripada nekom sopstvenom podraslojenju N_λ. U originalnoj formuli o indeksu, M zamenimo sa Y, e^{x_j} sa $\lambda^{-1} e^{x_j}$ i e^{-x_j} sa λe^{-x_j}, ako je x_j klasa koja odgovara podraslojenju N_λ. Dobijena vrednost $a(Y)$ predstavlja doprinos komponente $Y = M_\nu^g$ u ekvivarijantnom indeksu i konačno je

$$\varphi(g, M) = \sum_\nu a(M_\nu^g).$$

Neka je X mnogostrukost na kojoj dejstvuje konačna grupa G. Tada prirodna projekcija $\pi : X \longrightarrow X/G$ indukuje izomorfizam u kohomologiji sa racionalnim koeficijentima

$$\pi^* : H^*(X/G) \longrightarrow H^*(X)^G \subset H^*(X).$$

Za Ojlerovu karakteristiku faktorprostora X/G imamo

$$\chi(X/G) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \dim H^j(X/G) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \dim H^j(X)^G =$$

$$= \sum_{j \geq 0} (-1)^j \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g_*|_{H^j(X)}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g, X).$$

Ako je $\mathrm{dim} X = 4k$, $V = H^{2k}(X)$ i dejstvo grupe G slobodno, tada je

$$\mathrm{sign}(X/G) = \mathrm{dim}(V^+)^G - \mathrm{dim}(V^-)^G =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\mathrm{tr} g_*|_{V^+} - \mathrm{tr} g_*|_{V^-}\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{sign}(g, X).$$

Ako je X kompleksna mnogostrukost i W kompleksno vektorsko raslojenje, takvo da G dejstvuje automorfizmima para (X, W), tada $g \in G$ indukuje automorfizam $g_* : H^*(X, W) \longrightarrow H^*(X, W)$ i definisana je ekvivarijantna Ojlerova karakteristika u pramenu holomorfnih sečenja raslojenja W sa

$$\chi(X, W, g) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \mathrm{tr} g_*|_{H^q(X,W)}.$$

Takodje, dejstvo elementa $g \in G$ indukuje automorfizam para $(X, \Lambda^p T \otimes W)$ i ekvivarijantna χ_y−karakteristika je definisana sa

$$\chi^p(X, W, g) = \chi(X, \Lambda^p T \otimes W),$$

$$\chi_y(X, W, g) = \sum_{p \geq 0} y^p \chi^p(X, W, g).$$

Usrednjenjem po elementima grupe dobijamo

$$\chi(X, W)^G = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \mathrm{dim} H^q(X, W)^G,$$

$$\chi^p(X, W)^G = \chi(X, \Lambda^p T \otimes W)^G,$$

$$\chi_y(X, W)^G = \sum_{p \geq 0} y^p \chi^p(X, W)^G,$$

odnosno

$$\chi_y(X, W)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_y(X, W, g).$$

Koristeći prethodne formule kao motivaciju, za proizvoljan φ−rod možemo razmatrati njegovu ekvivarijantnu verziju, definisanu sa

$$\boxed{\varphi^G(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g, M)}.$$

6 Rodovi kompletnih preseka

Neka je M^{2n} zatvorena, stabilno skoro kompleksna mnogostrukost, X^{2n-2} orijentabilna podmnogostrukost od M kodimenzije dva, $i : X \hookrightarrow M$ ulaganje i $D : H_*(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2n-*}(M, \mathbb{Z})$ Poenkareova dualnost. Tangentno raslojenje TM na X se razbija na sumu

$$i^*TM = TX \oplus NX$$

i zbog orijentabilnosti, normalno raslojenje NX od X u M ima strukturu kompleksnog linijskog raslojenja. Ako je $u = D[X] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ dualna klasa fundamentalnoj klasi $[X]$ podmnogostrukosti X, totalna Černova klasa raslojenja NX je $c(NX) = 1 + c_1(NX) = 1 + i^*(u)$, odakle je

$$i^*(c(M)) = c(i^*TM) = c(X)c(NX) = c(X)i^*(1+u)$$

$$c(X) = i^*(c(M) \cdot (1+u)^{-1}).$$

Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_r \in H^2(M, \mathbb{Z})$ reprezentovane kao klase dualne fundamentalnim klasama podmnogostrukosti $X_1, X_2, \ldots, X_r$ u opštem položaju. Tada je

$$D(u_1 u_2 \cdots u_r) = [X_1 \cap \cdots \cap X_r],$$

odnosno klasa $u_1 u_2 \cdots u_r$ je dualna podmnogostrukosti $X = X_1 \cap \cdots \cap X_r$ kodimenzije $2r$, koju nazivamo kompletnim presekom. Tangentno raslojenje TM na X se razbija na sumu raslojenja

$$i^*TM = TX \oplus NX_1 \oplus \cdots \oplus NX_r,$$

pa za totalnu Černovu klasu od X važi

$$i^*(c(M)) = c(i^*TM) = c(X)c(NX_1) \cdots c(NX_r)$$

$$c(X) = i^*(c(M)(1+u_1)^{-1} \cdots (1+u_r)^{-1}).$$

Neka je $\varphi : \Omega^U \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow R$ neki Hircebruhov rod kompleksnih kobordizama i $g_\varphi(x)$ logaritam tog roda. Tada je sa $Q_\varphi(x) = \frac{x}{f(x)}, f(x) = g_\varphi^{-1}(x)$ zadan odgovarajući karakteristični stepeni red. Neka je $\{\varphi_n\}$ odgovarajuí multiplikativni niz polinoma. Ako je $X = X_1 \cap \cdots \cap X_r$ kompletan presek u mnogostrukosti M^{2n} onda se zbog

$$i^*c(M) = c(X) \cdot i^*((1+u_1) \cdots (1+u_r))$$

$$i^*(\prod_{j=1}^{n} Q_\varphi(x_j)) = \prod_{j=1}^{n-r} Q_\varphi(\tilde{x}_j) i^*(Q_\varphi(u_1) \cdots Q_\varphi(u_r)),$$

$\varphi-$rod mnogostrukosti X može izraziti kao

$$\varphi(X) = \varphi_{n-r}(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_{n-r})[X] = i^*(\prod_{j=1}^{n} Q_\varphi(x_j) \frac{f_\varphi(u_1)}{u_1} \cdots \frac{f_\varphi(u_r)}{u_r})[X].$$

Za podmnogostrukost $X \subset M$ važi

$$i^*(a)[X] = (a \cdot D(X))[M],$$

tako da je

$$\varphi(X) = (\prod_{j=1}^{n} Q_\varphi(x_j) f_\varphi(u_1) \cdots f_\varphi(u_r))[M].$$

6.1 Projektivni kompletni preseci

Neka je $X = H^n_{d_1,\ldots,d_r} \subset \mathbb{C}P^n$ kompletan presek kodimenzije $2r$, odnosno projektivna mnogostrukost zadana kao presek nesingularnih hiperpovrši $X_1, \ldots, X_r$ zadanih homogenim polinomima $f_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ stepena d_i respektivno. Ako su $X_1, \ldots, X_r$ u opštem položaju, tada je X nesingularna projektivna mnogostrukost čiji je difeomorfni tip potpuno odredjen stepenima $d_1, \ldots, d_r$. Poenkareov dual $x = D[\mathbb{C}P^{n-1}]$ proizvoljne hiperravni generiše $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Ako je hiperpovrš X_i zadana homogenim polinomom stepena d_i, onda je $D[X_i] = d_i \cdot x$. Iz prethodne formule sledi sledeća teorema:

Teorema 4 *φ−rod projektivnog kompletnog preseka $X = H^n_{d_1,\ldots,d_r}$ je*

$$\boxed{\varphi(X) = res_{x=0}\left(\frac{f_\varphi(d_1 x)\cdots f_\varphi(d_r x)}{f_\varphi(x)^{n+1}} dx\right)}.$$

Svakom rodu pridružen je stepeni sistem:

$$[u]^\varphi_n = f_\varphi(nx) = g_\varphi^{-1}(n g_\varphi(u)), x = g_\varphi(u).$$

Stepeni sistem za χ_y−karakteristiku je

$$[u]^{\chi_y}_n = f_{\chi_y}(nx) = \frac{1 - e^{-nx}}{1 + ye^{-nx}} = \frac{1 - e^{-n\ln(\frac{1+yu}{1-u})}}{1 + ye^{-n\ln(\frac{1+yu}{1-u})}} = \frac{1 - (\frac{1-u}{1+yu})^n}{1 + y(\frac{1-u}{1+yu})^n}.$$

Ako u teoremi 4. uvedemo smenu $x = g_{\chi_y}(u)$ dobijamo sledeću formulu:

$$\chi_y(H^n_{d_1,\ldots,d_r}) = res_{u=0}(\frac{g'_{\chi_y}(u)}{u^{n+1}} \prod_{j=1}^{r} \frac{1 - (\frac{1-u}{1+yu})^{d_j}}{1 + y(\frac{1-u}{1+yu})^{d_j}} du).$$

Posle razvijanja u stepeni red

$$g'(u) = 1 + (1-y)u + (1 - y + y^2)u^2 + o(u^2)$$

$$(1+yu)^d - (1-u)^d = d(1+y)u + \binom{d}{2}(y^2 - 1)u^2 + \binom{d}{3}(y^3 + 1)u^3 + o(u^3)$$

$$((1+yu)^d + y(1-y)^d)^{-1} = \frac{1}{1+y} - \binom{d}{2}\frac{y}{1+y}u^2 + o(u^2)$$

i primenjujući teoremu 4. u slučaju projektivnih krivih i površi dobijamo:

Posledica 1 *Neka je $S = H^n_{d_1,\ldots,d_{n-1}}$ algebarska kriva koja je kompletan presek nesingularnih hiperpovrši $X_1, \ldots, X_{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ stepena $d_1, \ldots, d_{n-1}$. Tada je*

$$\chi_y(S) = (1-y)d_1 \cdots d_{n-1}\Big(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k - 1}{2}\Big).$$

Neka je $X = H^n_{d_1,\ldots,d_{n-2}}$ algebarska površ koja je kompletan presek nesingularnih hiperpovrši $X_1, \ldots, X_{n-2} \subset \mathbb{C}P^n$ stepena $d_1, \ldots, d_{n-2}$. Tada je

$$\chi_y(X) = d_1 \cdots d_{n-2}\Big(1 - y + y^2 - y\sum_{k=1}^{n-2}\binom{d_k}{2} - (y-1)^2 \sum_{k=1}^{n-2} \frac{d_k - 1}{2} +$$

$$+(y-1)^2 \sum_{k \neq j} \frac{d_k - 1}{2}\frac{d_j - 1}{2} + (1 - y + y^2)\sum_{k=1}^{n-2} \frac{(d_k - 1)(d_k - 2)}{2}\Big).$$

•

Posebno, za $y = -1$ dobijamo vezu izmedju roda algebarske krive $S = H^n_{d_1,\ldots,d_{n-1}}$ i stepena polinoma koji je zadaju

$$2 - 2g = d_1 \cdots d_{n-1}\big(n + 1 - (d_1 + \cdots d_{n-1})\big).$$

Takodje, za $y = -1, 0, 1$, dobijamo formule za Ojlerovu karakteristiku, Todov rod i signaturu projektivne površi $X = H^n_{d_1,\ldots,d_{n-2}}$:

$$\chi(X) = d_1 \cdots d_{n-2}\big(2 + (d_1 + \cdots + d_{n-2} - n + 1)^2\big)$$

$$Td(X) = \frac{1}{12} d_1 \cdots d_{n-2}\big(12 + 3(d_1 + \cdots + d_{n-2} - n + 2)^2 - \sum_{k=1}^{n-2}(d_k - 1)(d_k + 7)\big)$$

$$sign(X) = \frac{1}{3} d_1 \cdots d_{n-2}\big(n + 1 - (d_1^2 + \cdots + d_{n-2}^2)\big).$$

Na primer, za $X = H^3_d$ hiperpovrš stepena d u $\mathbb{C}P^3$ imamo:

$$\chi(H^3_d) = d(d^2 - 4d + 6)$$

$$sign(H^3_d) = \frac{d}{3}(4 - d^2)$$

$$Td(H^3_d) = d - \binom{d}{2} + \binom{d}{3}.$$

Na isti način možemo računati eliptički rod projektivnih kompletnih preseka. Karakteristični stepeni red eliptičkog roda je definisan sa $Q_{Ell}(x) = \frac{x}{f(x)}$, gde je $f(x)$ eliptički sinus, koji zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$f'^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4, f(0) = 0.$$

Iz razvoja $f(x) = x - \frac{\delta}{3}x^3 + o(x^4)$ dobijamo

Posledica 2 *Ako je X projektivna površ koja je kompletan presek, tada je*

$$Ell(X) = \delta \cdot sign(X).$$

Ova jednakost važi u opštem slučaju, za proizvoljnu skoro kompleksnu 4-mnogostrukost X, jer je

$$Ell(X) = \Big(\frac{x_1}{f(x_1)}\frac{x_2}{f(x_2)}\Big)[X] = \frac{\delta}{3}(x_1^2 + x_2^2)[X] = \delta \cdot sign(X).$$

Ovi rezultati se mogu koristiti kao opstrukcije da data mnogostrukost bude kompletan presek u $\mathbb{C}P^n$.

Neka je $SP^2(S_g)$ simetričan kvadrat algebarske krive S_g roda g. To je prostor orbita dejstva grupe $\mathbb{Z}_2$ na $S_g \times S_g$ zadanog transpozicijom koordinata. Iz holomorfne Lefšicove teoreme o fiksnoj tački primenjene na zadano $\mathbb{Z}_2$ dejstvo imamo

$$\chi_y(-1, S_g \times S_g) = \Big(x\frac{1+ye^{-x}}{1-e^{-x}}\frac{1-ye^{-x}}{1+e^{-x}}\Big)[S_g] = (1-g)(1+y^2),$$

gde je x generator od $H^2(S_g, \mathbb{Z})$. Otuda je

$$\chi_y(SP^2(S_g)) = \frac{1}{2}\big(\chi_y(S_g)+\chi_y(-1,S_g\times S_g)\big) = \frac{1}{2}\big((1-g)^2(1-y)^2+(1-g)(1+y^2)\big).$$

Da bi $SP^2(S_g)$ bila kompletan presek $H^n_{d_1,\ldots,d_{n-2}}$ potrebno je da su njihove χ_y–karakteristike jednake, što je ekvivalentno sa

$$\binom{g-1}{2} = Td(H^n_{d_1,\ldots,d_{n-2}})$$

$$1 - g = sign(H^n_{d_1,\ldots,d_{n-2}}),$$

odnosno,

$$g = 1 - \frac{1}{3}d_1\cdots d_{n-2}\big(n+1-(d_1^2+\cdots+d_{n-2}^2)\big)$$

$$\frac{2}{3}d_1\cdots d_{n-2}\big(n+1-(d_1^2+\cdots+d_{n-2}^2)\big)^2 = 6+3(d_1+\cdots+d_{n-2}-n+2)^2+\sum_{k=1}^{n-2}(d_k-1)(d_k-5).$$

Kako je $H^n_{1,d_1,\ldots,d_{n-3}} = H^{n-1}_{d_1,\ldots,d_{n-3}}$ i $d_1 = \cdots = d_{n-2} = 2$ nije rešenje sistema možemo predpostaviti da je $mind_k > 1, maxd_k > 2$, odakle, direktnom analizom sistema dobijamo

Teorema 5 *Jedini simetrični kvadrat algebarskih krivih, koji je projektivan kompletan presek je $SP^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^2 = H^n_{1,\ldots,1}$.*

7 Kombinatorika simetričnih stepena

Simetrični n-ti stepen prostora X je prostor orbita

$$SP^n(X) = X^n/S_n$$

dejstva

$$\sigma(x_1,\dots,x_n) = (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n$$

grupe permutacija S_n na proizvodu X^n. Izbor bazne tačke $* \in X$ definiše prirodne inkluzije

$$SP^n(X,*) \hookrightarrow SP^{n+1}(X,*), n \in \mathbb{N}$$

u odnosu na koje je

$$SP^\infty(X,*) = \lim_{\rightarrow} SP^n(X,*).$$

Prostor $SP^\infty(X)$ je slobodan komutativan monoid nad X u odnosu na množenje

$$SP^n(X) \times SP^m(X) \longrightarrow SP^{n+m}(X)$$

$$\langle x_1,\dots,x_n\rangle\langle y_1,\dots,y_m\rangle = \langle x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\rangle,$$

koje indukuje Pontrjaginov proizvod u homologiji. Prema Dold-Tomovoj teoremi imamo homotopsku dekompoziciju

$$SP^\infty(X) \simeq \prod_{n=1}^{\infty} K(H_n(X,\mathbb{Z}),n).$$

Za povezan CW-kompleks X je

$$H_*(SP^n(X),\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{n} H_*(SP^k(X),SP^{k-1}(X),\mathbb{Z})$$

i inkluzije

$$i : SP^n(X) \hookrightarrow SP^\infty(X)$$

indukuju monomorfizme

$$i_* : H_*(SP^n(X),\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(SP^\infty(X),\mathbb{Z}).$$

Stoga je $H_*(SP^\infty(X),\mathbb{Z})$ bigraduisana algebra i bistepen elementa $bideg(x) = (m,n)$ je odredjen sa

$$x \in H_m(SP^n(X),SP^{n-1}(X),\mathbb{Z}).$$

Neka je $X = S_g$ zatvorena Rimanova krivš roda g. Preslikavanje $\varphi : SP^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n$,

$$\langle x_1,\dots,x_n\rangle \longmapsto (x-x_1)\cdots(x-x_n) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \longmapsto (a_1,\dots,a_n),$$

pokazuje da je $SP^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$, pa je $SP^n(S_g)$ kompleksna $n-$mnogostrukost. Preslikavanje $\varphi : SP^n(\mathbb{C}P^1) \longrightarrow \mathbb{C}P^n$,

$$\langle [x_1 : y_1], \ldots, [x_n, y_n] \rangle \longmapsto (x_1 X - y_1 Y) \cdots (x_n X - y_n Y) =$$

$$= a_0 X^n + a_1 X^{n-1} Y + \cdots + a_{n-1} X Y^{n-1} + a_n Y^n \longmapsto [a_0 : a_1 : \ldots : a_n]$$

pokazuje da je $SP^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n$. Prema Dold-Tomovoj teoremi je

$$SP^\infty(S_g) \simeq T^{2g} \times \mathbb{C}P^\infty.$$

Imamo izomorfizam bigraduisanih algebri

$$H_*(SP^\infty(S_g), \mathbb{Z}) \cong \Lambda(e_1, \ldots, e_{2g}) \otimes \Gamma(S),$$

gde je $\Gamma(S)$ algebra podeljenih stepena.

Neka je $V = \oplus_{d \geq 0} V_d$ graduisani konačnodimenzionalni vektorski prostor i

$$P_t(V) = \sum_{d \geq 0} t^d dim V_d$$

njegov Poenkareov polinom. Važi da je

$$P_t(V \oplus W) = P_t(V) + P_t(W),$$

$$P_t(V \otimes W) = P_t(V) P_t(W).$$

Neka je

$$S^*(V) = T^*(V)/v \otimes w - (-1)^{degv \cdot degw} w \otimes v$$

simetrična algebra nad vektorskim prostorom V, prirodno bigraduisana sa

$$bideg\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = (\sum_{j=1}^{n} degv_j, n).$$

Neka je

$$S_q^*(V) = \sum_{n \geq 0} q^n S^n(V),$$

gde je $S^n(V) = \{x \in S^*(V) | bideg(x) = (\cdot, n)\}$ $n-$ti graduisani simetrični stepen vektorskog prostora V. Kako je

$$S^n(V \oplus W) = \oplus_{p+q=n} S^p(V) \otimes S^q(W),$$

imamo

$$S_q^*(V \oplus W) = S_q^*(V) S_q^*(W),$$

$$P_t(S_q^*(V \oplus W)) = P_t(S_q^*(V)) P_t(S_q^*(W)).$$

Za vektorski prostor L_d generisan vektorom x stepena $degx = d$ je

$$S_q^*(L_d) = \begin{cases} 1 + qL + q^2 L^{\otimes 2} + \cdots & , \text{d parno} \\ 1 + qL & , \text{d neparno} \end{cases},$$

$$P_t(S_q^*(L_d)) = \begin{cases} \frac{1}{1-qt^d} & , \text{d parno} \\ 1+qt^d & , \text{d neparno} \end{cases}$$

Kako se svaki graduisani vektorski prostor V dekomponuje na sumu

$$V = \oplus_{d\geq 0} dim V_d L_d,$$

imamo

$$P_t(S_q^*(V)) = \frac{\prod_{dneparno}(1+qt^d)^{dim V_d}}{\prod_{dparno}(1-qt^d)^{dim V_d}}.$$

Ako je $V = H_*(X,\mathbb{Q})$ homologija CW-kompleksa X i β_d njegovi Betijevi brojevi, onda je

$$H_*(SP^n(X),\mathbb{Q}) = (H_*(X,\mathbb{Q})^{\otimes n})^{S_n} = S^n(H_*(X,\mathbb{Q}) = S^n(V)$$

i imamo Mekdonaldov rezultat •

$$\sum_{n\geq 0} q^n P_t(SP^n(X)) = \frac{\prod_{dneparno}(1+qt^d)^{\beta_d}}{\prod_{dparno}(1-qt^d)^{\beta_d}}.$$

Specijalno, za $t = -1$ dobija se generatorna funkcija za Ojlerovu karakteristiku simetričnih stepena

$$\sum_{n\geq 0} q^n \chi(SP^n(X)) = (1-q)^{-\chi(X)}.$$

8 Rodovi simetričnih stepena

Za zadanu permutaciju $\sigma : [n] \longrightarrow [n]$,neka je $\alpha(\sigma) = 1^{\alpha_1(\sigma)}2^{\alpha_2(\sigma)}\dots n^{\alpha_n(\sigma)}$ odgovarajuća particija od $[n]$, gde je $\alpha_k(\sigma)$ broj ciklusa dužine k u cikličnoj reprezentaciji permutacije σ. Neka je $m : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ preslikavanje koje permutaciji σ dodeljuje monom $m(\sigma) = x_1^{\alpha_1(\sigma)}x_2^{\alpha_2(\sigma)}\cdots x_n^{\alpha_n(\sigma)}$. Ciklični indeks simetrične grupe je polinom

$$Z(S_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|S_n|}\sum_{\sigma\in S_n} m(\sigma) = \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n} \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}}{1^{\alpha_1}\cdots n^{\alpha_n}\alpha_1!\cdots\alpha_n!}.$$

Generatorna funkcija cikličnog indeksa je

$$\sum_{n\geq 0} Z(S_n; x_1, x_2, \dots, x_n)t^n = exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} x_r\frac{t^r}{r}\Big).$$

Odredimo sada φ^{S_n}–rod simetričnog stepena $SP^n(M) = M^n/S_n$.

$$\varphi^{S_n}(M) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\varphi(\sigma, M^n) = \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots n\alpha_n=n}\frac{\prod_{r=1}^n \varphi(\omega_r, M^r)^{\alpha_r}}{1^{\alpha_1}\cdots n^{\alpha_n}\alpha_1!\cdots\alpha_n!}.$$

Sa ω_r je označeno ciklično dejstvo na M^r i ako sa τ_r označimo $\tau_r = \varphi(\omega_r, M^r)$ imamo

$$\varphi^{S_n}(M) = Z(S_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n).$$

Prema tome, generatorna funkcija za φ^{S_n}–rod mnogostrukosti M je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{S_n}(M)t^n = exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\tau_r\frac{t^r}{r}\Big).$$

Fiksna podmnogostrukost cikličnog dejstva je dijagonala $(M^r)^{\omega_r} = \Delta \approx M$ i sopstvena podraslojenja odgovaraju sopstvenim vrednostima $e^{i\lambda_k}, \lambda_k = \frac{2\pi k}{r}$:

$$T(M^r)\mid_\Delta = \oplus_{k=0,r-1}N_{e^i\lambda_k} \cong rTM$$

Kako je $N_{e^{i\lambda_k}} \cong TM$, to su klase $x_i^{(e^{i\lambda_k})}$ za različite k sve medjusobno jednake odgovarajućoj klasi x_i za mnogostrukost M, pa je

$$c(T(M^r)\mid_\Delta) = \prod_{j=1}^{n}(1+x_j)^r.$$

8.1 χ_y–karakteristika simetričnih stepena

Primenimo sada ovaj postupak za χ_y–karakteristiku. Na kompleksnoj n–dimenzionalnoj mnogostrukosti M imamo definisan eliptički kompleks (p,q)–formi

$$A^{p,q} = \Gamma(\Lambda^p T^*\otimes\Lambda^q\overline{T^*})$$

sa

$$\{\overline{\partial}\}:\sum_{p=0}^{n}A^{p,0}\xrightarrow{\overline{\partial}}\sum_{p=1}^{n}A^{p,1}\xrightarrow{\overline{\partial}}\cdots\xrightarrow{\overline{\partial}}\sum_{p=1}^{n}A^{p,n}$$

Iz Atija-Singerove toreme o indeksu je

$$ind(\overline{\partial})=\Big(\prod_{j=1}^{n}x_j\frac{1+ye^{-x_j}}{1-e^{-x_j}}\Big)[M]=\chi_y(M).$$

Ekvivarijantna Atija-Singerova teorema daje

$$\tau_r=\Big(\prod_{j=1}^{n}(x_j\frac{1+ye^{-x_j}}{1-e^{-x_j}}\prod_{k=1}^{r-1}\frac{1+ye^{i\lambda_k-x_j}}{1-e^{i\lambda_k-x_j}})\Big)[M]$$

U slučaju da je $M=S_g$ kompleksna kriva roda g imamo

$$\chi_y(S_g)=\big(x\frac{1+ye^{-x}}{1-e^{-x}}\big)[S_g]=\big(1+y+\frac{1-y}{2}x+o(x)\big)[S_g]=(1-g)(1-y).$$

$$\chi_y(\omega_r,S_g^r)=\Big(x\frac{1+ye^{-x}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{1+ye^{i\lambda_1-x}}{1-e^{i\lambda_1-x}}\cdots\frac{1+ye^{i\lambda_{r-1}-x}}{1-e^{i\lambda_{r-1}-x}}\Big)[S_g]$$

$$=\Big(x\cdot(1+y+\frac{1-y}{2}x+o(x))\prod_{k=1}^{r-1}(\frac{1+ye^{i\lambda_k}}{1-e^{i\lambda_k}}-\frac{(1+y)e^{i\lambda_k}}{(1-e^{i\lambda_k})^2}x+o(x))\Big)[S_g]$$

$$=(2-2g)\Big(\frac{1-y}{2}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{1+ye^{i\lambda_j}}{1-e^{i\lambda_j}}-(1+y)\sum_{j=1}^{r-1}(\frac{(1+y)e^{i\lambda_j}}{(1-e^{i\lambda_j})^2}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r-1}\frac{1+ye^{i\lambda_i}}{1-e^{i\lambda_i}})\Big)$$

Kako je

$$(1-e^{i\lambda_1})\cdots(1-e^{i\lambda_{r-1}})=\lim_{x\to 0}\frac{x^r-1}{x-1}=r$$

$$(1+ye^{i\lambda_1})\cdots(1+ye^{i\lambda_{r-1}})=(-1)^{r-1}y^{r-1}(-\frac{1}{y}-e^{i\lambda_1})\cdots(-\frac{1}{y}-e^{i\lambda_{r-1}})=\frac{1-(-y)^r}{1+y}$$

imamo

$$\prod_{j=1}^{r-1}\frac{1+ye^{i\lambda_j}}{1-e^{i\lambda_j}}=\frac{1-(-y)^r}{r(1+y)},$$

pa je dalje

$$\chi_y(\omega_r,S_g^r)=(2-2g)\Big(\frac{1-y}{2}\cdot\frac{1-(-y)^r}{r(1+y)}-(1+y)\frac{1-(-y)^r}{r(1+y)}\sum_{j=1}^{r-1}(\frac{1}{1-e^{i\lambda_j}}-\frac{1}{1+ye^{i\lambda_j}})\Big).$$

Izračunajmo potrebne sume:

$$\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{1-e^{i\lambda_j}}=\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1-\cos\lambda_j+i\sin\lambda_j}{2(1-\cos\lambda_j)}=\frac{r-1}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{1+ye^{i\lambda_j}}=\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n e^{in\lambda_j}=\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n(e^{in\lambda_1}+\cdots+e^{in\lambda_{r-1}})=-\frac{1}{1+y}+\frac{r}{1-(-y)^r}.$$

Poslednja jednakost sledi iz činjenice da je

$$q^n+q^{2n}+\cdots+q^{(r-1)n}=\begin{cases} q^n\frac{1-q^{(r-1)n}}{1-q^n}=-1, r n \\ r-1, r\mid n \end{cases},$$

gde je sa q označeno $q=e^{i\lambda_1}$. Odatle je

$$\chi_y(\omega_r,S_g^r)=(2-2g)\frac{1-(-y)^r}{r(1+y)}\Big(\frac{1-y}{2}-(1+y)\big(\frac{r-1}{2}+\frac{1}{1+y}-\frac{r}{1-(-y)^r}\big)\Big)$$

$$\chi_y(\omega_r,S_g^r)=(1-g)(1+(-y)^r).$$

Na taj način je dokazan sledeći rezultat

Teorema 6 *Generatorna funkcija za $\chi_y^{S_n}$–karakteristiku površi je*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_y^{S_n}(S_g)t^n=exp\Big((1-g)\sum_{r=1}^{\infty}(1+(-y)^r)\frac{t^r}{r}\Big)=\big((1-t)(1+yt)\big)^{g-1}.$$

Za specijalne vrednosti parametra $y=-1,0,1$ imamo

$$\chi(SP^n(S_g))=Z(S_n;2-2g,\ldots,2-2g)$$

$$Td(SP^n(S_g))=Z(S_n;1-g,\ldots,1-g)$$

$$sign(SP^n(S_g))=Z(S_n;0,2-2g,0,2-2g,\ldots),$$

odnosno generatorne funkcije za Ojlerovu karakteristiku, Todov rod i signaturu simetričnih stepena površi su

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(SP^n(S_g))t^n=(1-t)^{2g-2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Td(SP^n(S_G))t^n=(1-t)^{g-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}sign(SP^n(S_g))t^n=(1-t^2)^{g-1}.$$

U slučaju kompleksne krive roda $g=0$ znamo da je $SP^n(\mathbb{C}P^1)=\mathbb{C}P^n$, pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_y^{S_n}(\mathbb{C}P^1)t^n=\frac{1}{(1-t)(1+yt)}$$

odakle dobijamo

$$\chi_y(\mathbb{C}P^n)=1-y+y^2-y^3+\cdots+(-1)^n y^n,$$

odnosno $\chi_y^{S_n}(\mathbb{C}P^1) = \chi_y(\mathbb{C}P^n)$. Interesantno je primetiti da je za svaki simetrični stepen eliptičke krive $\chi_y(SP^n(T)) = 0$, kao i da je za $n > 2g-2$, $\chi_y(SP^n(S_g)) = 0$. Za simetrične kvadrate kompleksnih krivih, koji su projektivne algebarske površi imamo

$$\chi_y(SP^2(S_g)) = Z(S_2;(1-g)(1-y),(1-g)(1+y^2)) = \frac{1-g}{2}(2-g-2(1-g)y+(2-g)y^2),$$

odnosno $\chi^0 = \chi^2 = \frac{(1-g)(2-g)}{2}, \chi^1 = (1-g)^2$.

Prethodna teorema se može uopštiti na slučaj proizvoljne kompleksne mnogostrukosti M^{2n}, ako je poznata njena χ_y–karakteristika.

Teorema 7 *Neka je M^{2n} kompleksna mnogostrukost čija je χ_y–karakteristika*

$$\chi_y(M) = \sum_{p=0}^{n} \chi^p y^p.$$

Generatorna funkcija za $\chi_y^{S_n}$–karakteristiku mnogostrukosti M je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_y^{S_n}(M)t^n = \prod_{p=0}^{n} \frac{1}{(1-t(-y)^p)^{(-1)^p\chi^p}}.$$

Zaista,

$$\tau_r = \chi_y(\omega_r, M^r) = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{j=0}^{r-1} \frac{1+ye^{i\lambda_j - x_i}}{1-e^{i\lambda_j - x_i}}\Big)[M]$$

i kako je

$$\prod_{j=0}^{r-1} \frac{1+ye^{i\lambda_j - x_i}}{1-e^{i\lambda_j - x_i}} = \frac{1-(-y)^r e^{-rx_i}}{1-e^{-rx_i}},$$

imamo da je

$$\tau_r = \chi_y(\omega_r, M^r) = \chi_{-(-y)^r}(M),$$

odakle je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_y^{S_n}(M)t^n = exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} \tau_r \frac{t^r}{r}\Big) = exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \chi^p (-y)^{rp}\Big)$$

što dokazuje tvrdjenje teoreme. Posebno, za $y = -1, 1$ dobijamo klasične formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(SP^n(M))t^n = (1-t)^{-\chi(M)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} sign(SP^n(M))t^n = \Big(\frac{1+t}{1-t}\Big)^{sign(M)/2} (1-t^2)^{-\chi(M)/2}.$$

8.2 Eliptički rod simetričnih stepena

Iz ekvivarijantne Atija-Singerove teoreme imamo da je

$$\tau_r = Ell(\omega_r, S_g^r) = \varepsilon^{1/4}\Big(x\prod_{j=0}^{r-1}\frac{1+e^{i\lambda_j-x}}{1-e^{i\lambda_j-x}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+q^ke^{-i\lambda_j+x}}{1-q^ke^{-i\lambda_j+x}}\frac{1+q^ke^{i\lambda_j-x}}{1-q^ke^{i\lambda_j-x}}\Big)[S_g].$$

Iz razlaganja u stepene redove

$$x\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = 2+o(x), \frac{1+\alpha e^{-x}}{1-\alpha e^{-x}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}x+o(x), \frac{1+\alpha e^{x}}{1-\alpha e^{x}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}x+o(x)$$

dobijamo

$$\tau_r = \varepsilon^{\frac{1}{4}}2\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^k}{1-q^k}\right)^2(2-2g)\prod_{j=1}^{r-1}(\frac{1+e^{i\lambda_j}}{1-e^{i\lambda_j}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+q^ke^{-i\lambda_j}}{1-q^ke^{-i\lambda_j}}\frac{1+q^ke^{i\lambda_j}}{1-q^ke^{i\lambda_j}}).$$

$$\cdot\Big(-\sum_{j=1}^{r-1}\frac{2e^{i\lambda_j}}{1-e^{2i\lambda_j}}+\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2q^ke^{-i\lambda_j}}{1-q^{2k}e^{-2i\lambda_j}}-\frac{2q^ke^{i\lambda_j}}{1-q^{2k}e^{2i\lambda_j}})\Big),$$

odakle zbog

$$\prod_{j=1}^{r-1}\frac{1+q^ke^{-i\lambda_j}}{1-q^ke^{-i\lambda_j}}\frac{1+q^ke^{i\lambda_j}}{1-q^ke^{i\lambda_j}} = ((-1)^{r-1}\frac{1-(-q^k)^r}{1-q^{kr}}\frac{1-q^k}{1+q^k})^2,$$

$$\sum_{j=1}^{r-1}(\frac{2q^ke^{-i\lambda_j}}{1-q^{2k}e^{-2i\lambda_j}}-\frac{2q^ke^{i\lambda_j}}{1-q^{2k}e^{2i\lambda_j}}) = 0$$

imamo

$$\tau_r = (2-2g)\frac{1-(-1)^r}{2r}\prod_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{r-1}\frac{1-(-q^k)^r}{1-q^{kr}}\frac{1-q^k}{1+q^k}\right)^2(\frac{r}{1-(-1)^r}-\frac{r}{2})$$

$$\tau_r = \begin{cases} 0 & \text{r neparno} \\ (2-2g)\varepsilon^{1/4} & \text{r parno} \end{cases}$$

Odatle je generatorna funkcija za Ell^{S_n}−rod površi jednaka

$$\sum_{n=1}^{\infty}Ell^{S_n}(S_g)t^n = \frac{1}{(1-t^2)^{(1-g)\varepsilon^{\frac{1}{4}}}}.$$

Kako je $SP^n(S_0) = \mathbb{C}P^n$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty}Ell(\mathbb{C}P^n)t^n = g'_{Ell}(t) = (1-2\delta t^2+\varepsilon t^4)^{-\frac{1}{2}}$$

imamo

$$Ell(\mathbb{C}P^n) \neq Ell^{S_n}(\mathbb{C}P^1).$$

Za $Ell_y^{S_n}$−rod kompleksne mnogostrukosti M^{2n} imamo sledeći rezultat

Teorema 8 *Neka je M^{2n} kompleksna mnogostrukost za koju je $y-$eliptički rod dat u obliku stepenog reda*

$$Ell_{y,q}(M) = \sum_{m,l} a_{m,l} q^m y^l.$$

Generatorna funkcija za $Ell_y^{S_n}-$rod je

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ell_y^{S_n}(M) t^n = \prod_{m,l} \frac{1}{(1-tq^m y^l)^{a_{m,l}}}.$$

Zaista,

$$\tau_r = Ell_{y,q}(\omega_r, M^r)$$

$$\tau_r = y^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} \Big(x_i \prod_{j=0}^{r-1} \big(\frac{1-ye^{i\lambda_j - x_i}}{1-e^{i\lambda_j - x_i}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-q^k y e^{i\lambda_j - x_i}}{1-q^k e^{i\lambda_j - x_i}} \cdot \frac{1-q^k y^{-1} e^{x_i - i\lambda_j}}{1-q^k e^{x_i - i\lambda_j}} \big) \Big)[M],$$

odakle, zbog

$$\prod_{j=0}^{r-1} \frac{1-ye^{i\lambda_j - x_i}}{1-e^{i\lambda_j - x_i}} = y^r \prod_{j=0}^{r-1} \frac{y^{-1}e^{x_i} - e^{i\lambda_j}}{e^{x_i} - e^{i\lambda_j}} = \frac{1-y^r e^{-rx_i}}{1-e^{-rx_i}}$$

$$\prod_{j=0}^{r-1} \frac{1-q^k y e^{i\lambda_j - x_i}}{1-q^k e^{i\lambda_j - x_i}} \cdot \frac{1-q^k y^{-1} e^{x_i - i\lambda_j}}{1-q^k e^{x_i - i\lambda_j}} = \frac{1-q^{kr} y^r e^{-rx_i}}{1-q^{kr} e^{-rx_i}} \cdot \frac{1-q^{kr} y^{-r} e^{rx_i}}{1-q^{kr} e^{rx_i}}$$

imamo da je

$$\tau_r = y^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} \Big(x_i \frac{1-y^r e^{-rx_i}}{1-e^{-rx_i}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-q^{kr} y^r e^{-rx_i}}{1-q^{kr} e^{-rx_i}} \cdot \frac{1-q^{kr} y^{-r} e^{rx_i}}{1-q^{kr} e^{rx_i}} \Big)[M],$$

odnosno

$$\tau_r = Ell_{y,q}(\omega_r, M^r) = Ell_{y^r,q^r}(M).$$

Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ell_y^{S_n}(M) t^n = exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r} \sum_{m,l} a_{m,l} q^{rm} y^{rl} \Big)$$

što dokazuje tvrdjenje teoreme.

References

[1] M. Atiyah, *Lectures on K-theory*

[2] M. Atiyah, R. Bott, *A Lefshetz fixed point formula for elliptic complexes: II, Applications,* Ann. of Math. **88** (1968), 451-491

[3] M. Atiyah, I. M. Singer, *The index of elliptic operators: III,* Ann. of Math. **87** (1968), 546-604

[4] M. Atiyah, F. Hirzebruch, *Spin Manifolds and Group Actions,* Essays on Topology and Related Topics, memories dedies a G. de Rham, ed. A. Hoefliger, R. Naramsihan, Springer-Verlag, 1970. pp. 18-28

[5] V. N. Aznar, *On the Chern classes and the Euler characteristic for nonsingular complete intersections,* Proc. Amer. Math. Soc. **78**, N1, 143-148

[6] R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology,* GTM **82**, Springer-Verlag, 1982.

[7] L. Borisov, A. Libgober, *Elliptic genera of singular varities, orbifold elliptic genus and chiral de Rham complex,* AG/0007126

[8] L. Borisov, A. Libgober, *Elliptic genera of singular varities,* AG/0007108

[9] В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, *Формалные группы, степенные системы и операторы Адамса,* Мат. Сборник **84** **(126)** N1 (1971)

[10] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, H. Verlinde, *Elliptic Genera of Symmetric Products and Second Quantized Strings,* Comm. Math. Phys. **185** (1997) hep-th 9608096

[11] A. Dold, R. Thom, *Quasifaserungen und unendliche symmetrishe Producte,* Ann. Math. **67** (1958), 239-281

[12] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* GTM **52**, Springer-Verlag, 1977.

[13] F. Hirzebruch, *Der Satz Von Riemann-Roch in Faisceau-Theoretisher Formulierung Einige Anwendungen und Offene Fragen,* Proc. Internat. Congress Math. (Amsterdam 1954.), vol. III, Noordhoff, Groningen; North-Holland, Amsterdam, 1956, pp. 457-473. MR19, 317

[14] F. Hirzebruch, *Topological methods in Algebraic Geometry,* third enlarged edition, Springer-Verlag, 1966.

[15] F. Hirzebruch, *The signature theorem: reminiscen and recreation,* in Prospect in Mathematics, Ann. of Math. Studies **70**, Princeton Univ. Press 1971., 3-31

[16] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and Modular forms,* Second ed., Bonn: Max-Planc-Institute, 1994.

[17] F. Hirzebruch, T. Höfer, *On the Euler number of an orbifold,* Math. Ann. **286**(1990) 255-260

[18] F. Hirzebruch, D. Zagier, *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory,* Publish or Perish, Inc. Boston, 1974.

[19] S. Kallel, *Divisor spaces an punctured Riemann surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998) 135-164

[20] ed. P. S. Landweber, *Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology,* LNM **1326**, Springer-Verlag, 1986.

[21] J. G. McDonald, *Symmetric products of an algebraic curve,* Topology **1**, (1962), 319-343

[22] J. G. McDonald, *The Poincare polynomial of a symmetric product,* Proc. Camb. Phil. Soc. 1962.

[23] J. Milnor, J. B. Stasheff, *Characteristic classes*, Ann. of Math. Studies **76**, Princeton Univ. Press, 1974.

[24] С. П. Новиков, *Методы алгебраическои топологии с точки зрения теории кобордизмов*, Извес. Акад. Наук СССР, **31** (1967) 855-951

[25] ed. R. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Ann. of Math. Studies, **57**, Princeton, 1965.

[26] Т. Панов, *Вычисление родов Хирцебруха многообразии несущих деиствие группы $\mathbb{Z}_p$, через инварианты деиствия,* Успехи Мат. Наук, Т. **62** N3, (1998), 87-120

[27] G. Segal, *Elliptic Cohomology,* Seminaire Bourbaki, Asterisque No.**161-162**, (1988), 187-201

[28] R. Stong, *Notes on Cobordism Theory,* Princeton Univ. Press, 1968.

[29] E. Witten, *The Index of the Dirac Operator in Loop Space,* in [20], 161-181

[30] D. Zagier, *Equivariant Pontrjagin Classes and Applications to Orbit Space*, LNM **290**, Springer-Verlag, 1972.

[31] J. Zhou, *Delocalized equivariant cohomology of symmetric products,* DG/9910028

[32] J. Zhou, *Calculations of the Hirzebruch χ_y−genera of symmetric products by the holomorphic Lefshetz fixed point formula,* DG/9910029