Đorđević Radmila
disertacija

VODJENJE PO POTEGU PROJEKTILA PREMA SATELITU NA KRUŽNOJ PUTANJI

U V O D

O vodjenju projektila po potegu i putanjama koje projektil tom prilikom prelazi postoji vrlo oskudna literatura. Najviše se o tom nalazi u [1], no samo u specijalnom slučaju kad se cilj kreće ravnomerno po pravoj liniji. No, i u tom slučaju postavljena je samo diferencijalna jednačina, za koju se kaže da se ne može rešiti kvadraturama, pa je dato samo približno rešenje razvijanjem u beskonačni red, bez ikakve matematičke analize fenomena.

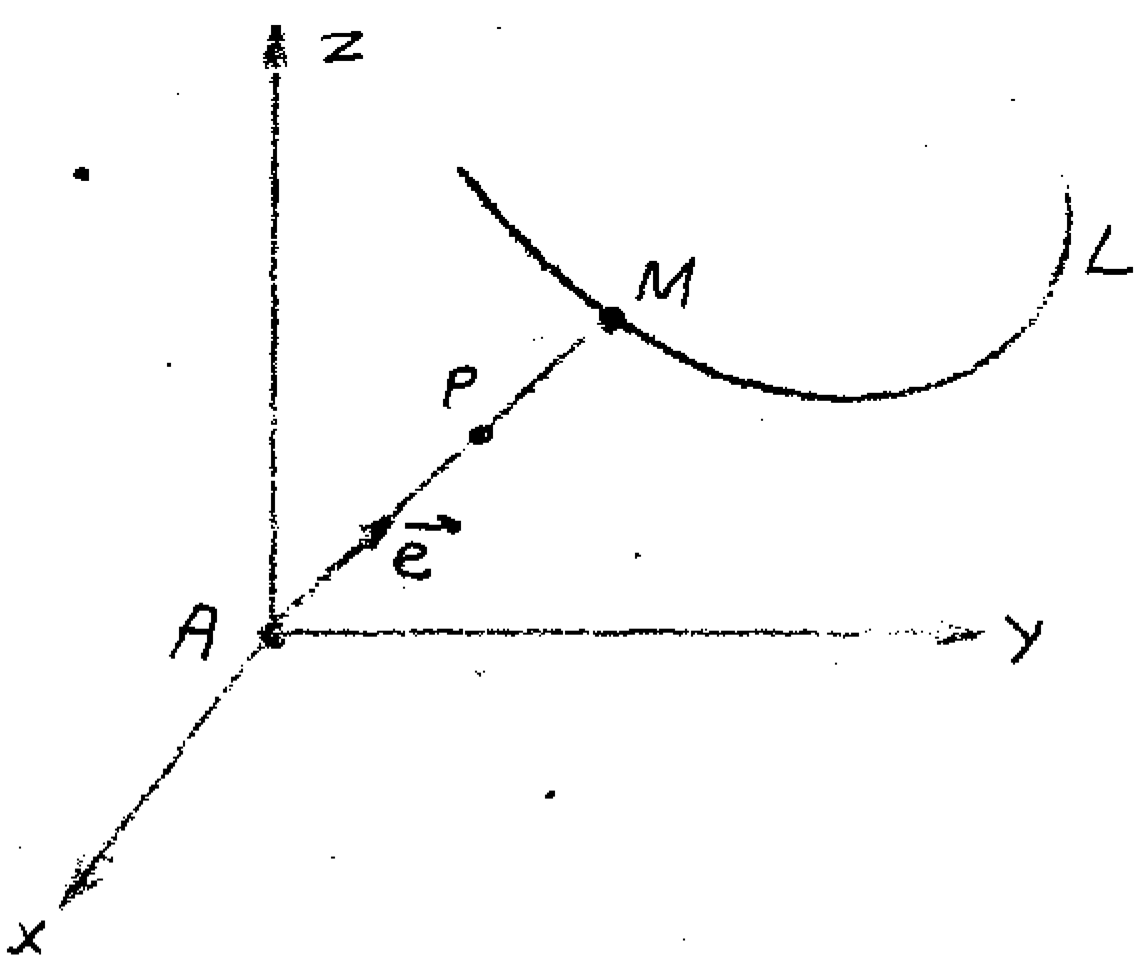
Ovaj slučaj, kao specijalan slučaj opšteg problema, obradio je do kraja i dao kompletnu analizu prof. R. Kašanin, koji je izvesne rezultate saopštio u Matematičkom institutu Srpske akademije nauka marta 1960 godine. Taj rad nije štampan, već se nalazi kao dokumentacija u Institutu za vojno-tehnička istraživanja. Ostali pisci uglavnom se bave tehničkom realizacijom servo-sistema, ne govoreći uopšte o matematičkom i kinematičkom aspektu kretanja projektila.

U ovom radu iznosim rezultate do kojih sam došao razmatrajući vodjenje po potegu projektila prema satelitu na kružnoj putanji oko Zemlje. U odeljku I postavio sam diferencijalnu jednačinu trajektorije. Pošto se ona može integraliti u zatvorenom obliku samo u dva slučaja, to sam prvo obradio ta dva slučaja u odeljcima II i III. U odeljcima IV i V obradio sam dva slučaja kad se diferencijalna jednačina ne može rešiti u zatvorenom obliku, naime kad je satelit ili vrlo blizu Zemlji ili vrlo daleko od nje. Za ta dva slučaja dao sam približna rešenja, dovoljna za uobičajenu tačnost.

I - VODJENJE PO POTEGU

1. OPŠTI PROBLEM.- Neka u proizvoljno izabranom pravouglom koordinatnom sistemu Axyz tačka M predstavlja cilj koji se kreće po nekoj krivoj liniji L (slika 1.), a tačka P neka predstavlja dirigovani projektil. Sistem vodjenja projektila po potegu sastoji se u tome da se tačka P nalazi u svakom trenutku na potegu AM tačke M. Pri tome je vektor položaja tačke M poznata funkcija vremena

$$\vec{AM} = \vec{R} = \vec{R}(t).$$



Slika 1.

Ako sa $\vec{e}$ označimo ort ovog vektora, biće

$$\vec{R} = R.\vec{e},$$

pa diferenciranjem po vremenu t dobivamo brzinu cilja M

$$\vec{c} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dR}{dt}\vec{e} + R\frac{d\vec{e}}{dt},$$

odakle je

$$c^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\frac{d\vec{e}}{dt}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt}.$$

Kako je vektor položaja tačke P: $\vec{AP} = \vec{r}$ kolinearan sa ortom $\vec{e}$, to je $\vec{r} = r.\vec{e}$, pa diferenciranjem po vremenu t dobivamo brzinu tačke P

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e} + r\frac{d\vec{e}}{dt},$$

odakle je

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\frac{d\vec{e}}{dt}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt}.$$

Stavimo li

$$\vec{W} = \frac{d\vec{e}}{dt}, \quad w = \left|\frac{d\vec{e}}{dt}\right|, \tag{1.1}$$

dobivamo

$$c^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2w^2, \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2w^2. \tag{1.2}$$

Veličina W predstavlja dvostruku površinsku brzinu savršne tačke orta $\vec{e}$. Zaista, kako je vektor te površinske brzine

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{e}\times\frac{d\vec{e}}{dt},$$

to je

$$2S = \left|\vec{e} \times \frac{d\vec{e}}{dt}\right| = \left[\,|\vec{e}|^2 \left|\frac{d\vec{e}}{dt}\right|^2 - (\vec{e}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt})^2\,\right]^{1/2};$$

ne kako je

$$|\vec{e}| = 1, \quad \vec{e}\cdot\frac{d\vec{e}}{dt} = 0,$$

dobivamo

$$2S = \left|\frac{d\vec{e}}{dt}\right| = W,$$

što smo i tvrdili. Iz prve jednačine u (1.2) možemo W izračunati kao funkciju vremena t, jer pretpostavljamo da nam je poznato kretanje tačke M, tj. da znamo R i e kao funkcije vremena t.

Uvešćemo kao novu nezavisnu promenljivu χ, definisanu sa

$$\chi = \int_{t_0}^{t} W.dt\,. \qquad (1.3)$$

Time je i, obrnuto, t definisano kao funkcija od χ, tj. $t = F(\chi)$, pa imamo

$$\frac{d\chi}{dt} = W, \quad \frac{1}{W} = \frac{dt}{d\chi} = \frac{dF(\chi)}{d\chi} = F'(\chi).$$

Iz druge jednačine u (1.2) dobivamo onda

$$\left(\frac{dr}{d\chi}\right)^2 + r^2 = \frac{v^2(t)}{W^2(t)}\,, \qquad (1.4)$$

tj., kako je $t = F(\chi)$,

$$\left(\frac{dr}{d\chi}\right)^2 + r^2 = \left\{F'(\chi).v[F(\chi)]\right\}^2 = U^2(\chi). \qquad (1.5)$$

Ako se zna kakva je funkcija v od t, znaće se i kakva je od χ, pa je diferencijalnom jednačinom (1.4) odredjeno r kao funkcija od χ, tj. od t. Što se tiče kosinusa smera vektora $\vec{r}$, oni su isti kao i kod vektora $\vec{R}$, a ovi su poznati. Prema tome, sve se svodi na diferencijalnu jednačinu (1.5), u kojoj treba da U bude poznata funkcija od χ.

2. PROBLEM U RAVNI.- Uzmimo da je kriva L, po kojoj se cilj M kreće, ravna kriva linija. Njenu ravan uzećemo za ravan Axy (slika 2.). Ako sa θ označimo polarni ugao tačke P (on je u isti mah i polarni ugao tačke M), biće

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{e}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_1\frac{d\theta}{dt}\,.$$

gde je $\vec{e}_1$ ort upravan na ortu $\vec{e}$. Prema tome, ovde je $W = \frac{d\theta}{dt}$ (2.1)

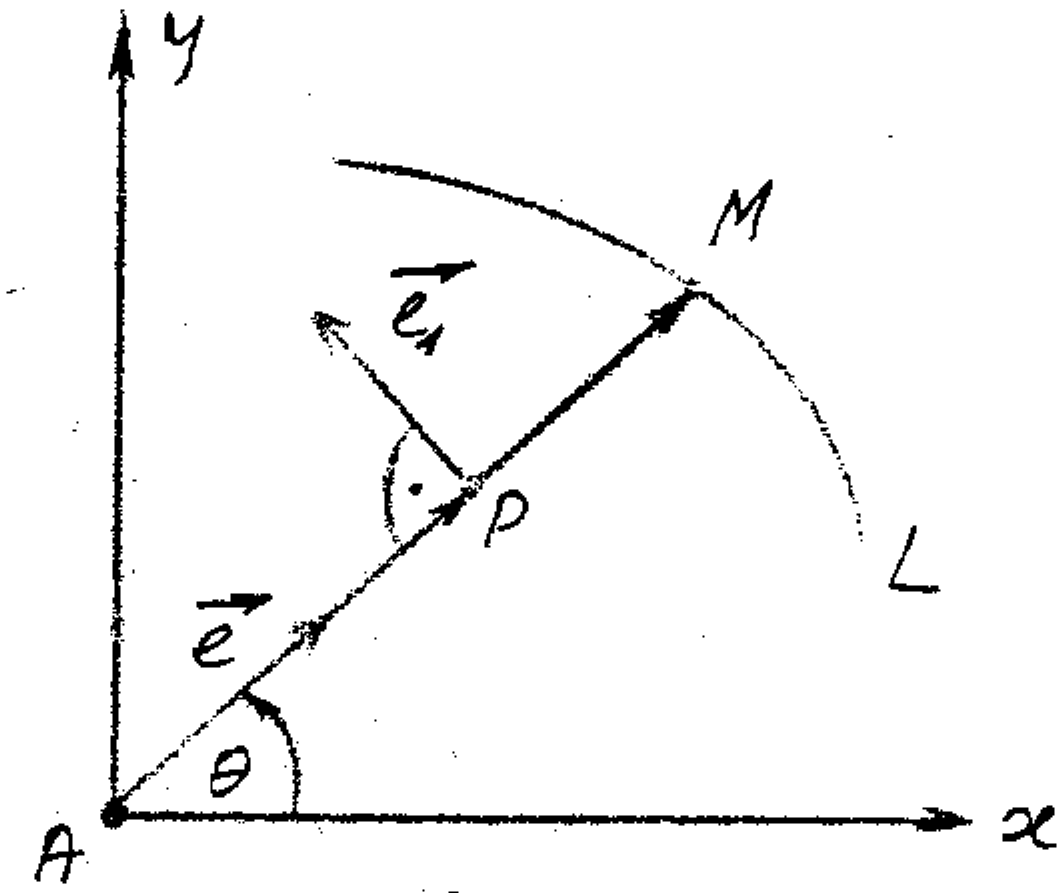
pa jednačina (1.3) daje

$$\chi = \theta - \theta_0\,; \quad d\chi = d\theta. \qquad (2.2)$$

Diferencijalna jednačina (1.4), odnosno (1.5) glasi sad

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \frac{r^2}{U^2} = U^2(\theta-\theta_0) . \qquad (2.3)$$

Ona odredjuje r kao funkciju od θ, tj. putanju tačke P. Polarni ugao θ je poznata funkcija vremena t, jer je θ polarni ugao i tačke M, čije jednačine kretanja pretpostavljamo da su poznate.



Slika 2.

3. ZEMLJIN SATELIT NA KRUŽNOJ PUTANJI.-

Konkretan problem koji ćemo dalje obradjivati je ovo: oko Zemlje, koju uzimamo kao loptu poluprečnika a_0, kreće se veštački satelit (tačka M) po krugu poluprečnika $a > a_0$ sa središtem u središtu O Zemlje, a projektil (tačka P) vodi se po potegu iz tačke A na površini Zemlje, i to tako da se tačka A nalazi u ravni putanje satelita; rotaciju Zemlje pri tom ne uzimamo u obzir.

Topocentrični koordinatni sistem Axy postavićemo u ravni kretanja satelita M tako da se x-osovina nalazi u preseku ove ravni sa ravni horizonta mesta A, a y-osovina u pravcu zenita ovog mesta. Orijentisaćemo koordinatni sistem tako da kretanje satelita bude obrnuto od kretanja skazaljke na satu. Ostale oznake vide se iz slike 3.

Za veštački satelit važi treći Keplerov zakon, po kome je, ako masu satelita zanemarimo u odnosu na masu Zemlje, $a^3\omega^2 = fM$, ($f = 6,665.10^{-8}$ $gr^{-1}cm^3sec^{-2}$, $M = 5.977.10^{27}$ gr = masa Zemlje), gde je ω ugaona brzina satelita. Iz slike 3. imamo

$$\sin\alpha = \frac{a_0}{a} = \lambda . \qquad (3.1)$$

Pomoću λ, treći Keplerov zakon glasi

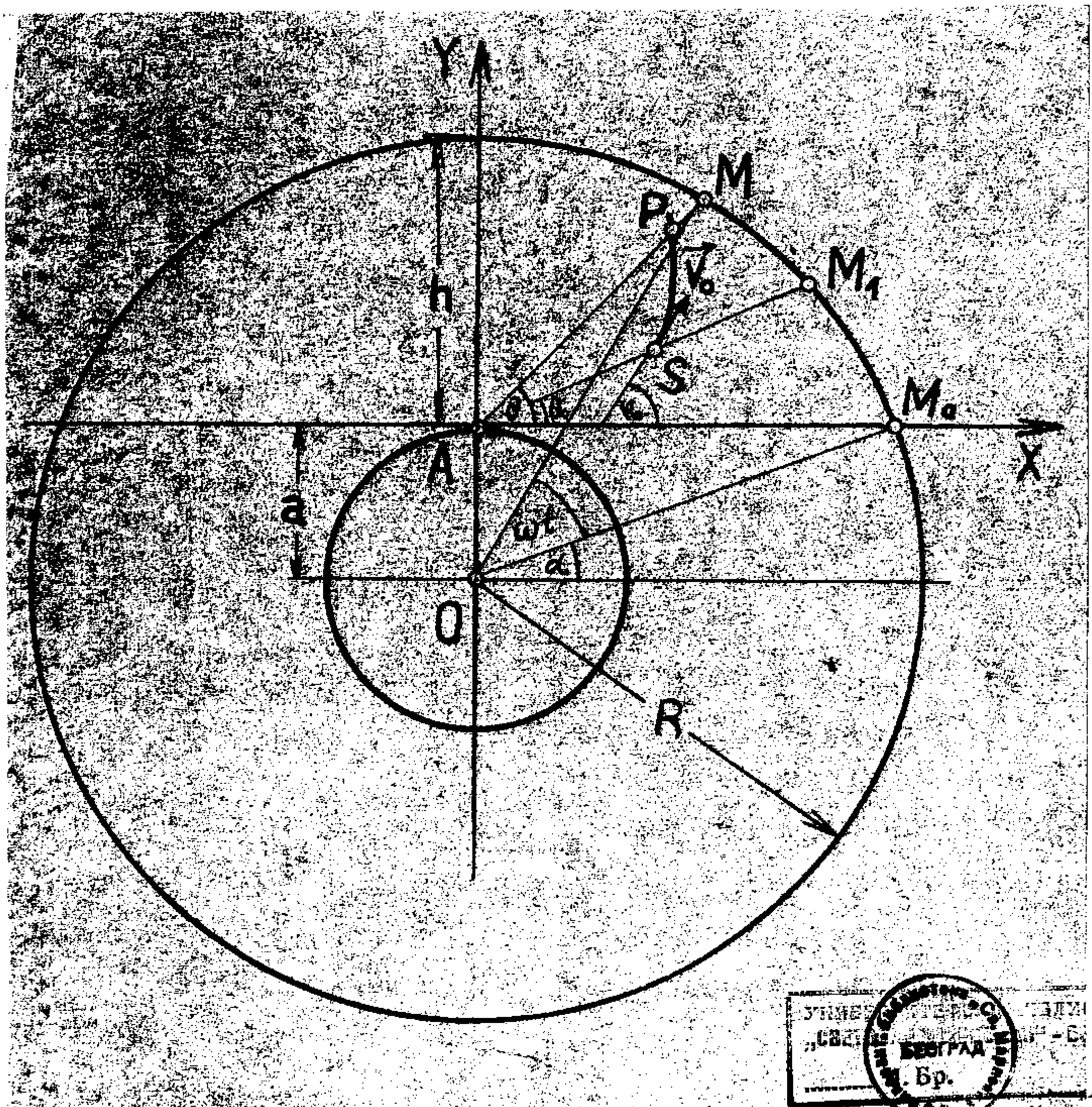
$$\omega.\lambda^{-3/2} = \sqrt{\frac{fM}{a_0^3}} = 1,242.10^{-3}\ sec^{-1} , \qquad (3.2)$$

ako uzmemo $a_0 = 6,368.10^8 cm$. Prema tome, izmedju ω i λ postoji veza (3.2). Radi kraćeg pisanja mi ćemo se i nadalje služiti i sa ω i sa λ, no treba pri tom uvek imati na umu relaciju (3.2).

Neka satelit bude u trenutku ϑ na horizontu u tački M_0. Ako sa t označimo trenutak kada je on u tački M, biće

$$\tau = \omega(t-\vartheta) + \alpha . \qquad (3.3)$$

Jednačine kretanja tačke M u koordinatnom sistemu Axy su (sl.3)



Slika 3.

$$\left.\begin{aligned} X &= a.\cos\tau = a.\cos\left[\omega(t - \vartheta) + \alpha\right], \\ Y &= a.\sin\tau - a_0 = a.\sin\left[\omega(t - \vartheta) + \alpha\right] - a_0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Polarni poteg R = AM odredjen je (sl.3.) sa

$$R^2 = a^2 + a_0^2 - 2a.a_0\sin\tau = a^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda\sin\tau),$$

tj.

$$R = a\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda\sin\tau}\ . \qquad (3.5)$$

Z a polarni ugao θ u sistemu Axy imamo $\mathrm{tg}\theta = Y:X$, tj., na osnovi (3.4) i (3.1),

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\sin\tau - \lambda}{\cos\tau}\ . \qquad (3.6)$$

Tako su sa (3.4) i sa (3.5) i (3.6) odredjene u sistemu Axy i ortogonalne i polarne koordinate satelita M kao funkcije vremena t, sa poznatim veličinama ϑ, ω i λ.

Iz (3.6) dobivamo

$$\sin\theta.\cos\quad = \sin\tau.\cos\theta - \lambda\cos\theta,$$

to je

$$\sin(\tau - \theta) = \lambda\cos\theta, \qquad (3.7)$$

tj., u eksplicitnom obliku,

$$\tau = \theta + \arcsin(\lambda\cos\theta). \qquad (3.8)$$

Na taj način, uzevši u obzir (3.3), pokazano je kako se t može izračunati iz θ.

Tačka P (projektil) ima isti polarni ugao θ kaó i cilj M, te jednačine (3.6) i (3.7) (odnosno (3.8)) važe i za nju, tj. polarni ugao projektila P je poznata funkcija vremena t. Ostaje nam još da odredimo i polarni poteg r projektila P, za šta ćemo upotrebiti jednačinu (2.3), kojom je u stvari odredjena trajektorija tačke P. Na osnovi (2.1),(3.3) i (3.8) imamo

$$\frac{1}{V} = \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\omega}\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1}{\omega}\left(1 - \frac{\lambda\sin\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\theta}}\right),$$

tako da jednačina (2.3) postaje

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = U^2, \qquad (3.9)$$

$$U = \frac{v}{\omega}\left(1 - \frac{\lambda\sin\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\theta}}\right). \qquad (3.10)$$

U ovom obrascu izraz

$$\frac{\lambda\sin\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\theta}}$$

predstavlja promenu razlike uglova $\theta - \tau$, naime $\frac{d(\theta - \tau)}{d\theta}$, pa kako je ova promena pozitivna u intervalu $0 < \theta < \pi$, to pred korenom treba uzimati pozitivan znak.

Da bi se diferencijalna jednačina (3.9) mogla rešavati, potrebno je znati kakva je funkcija od θ brzina v projektila.

Uostalom, možemo je znati i kao funkciju vremena $\underline{t}$, jer će se onda, pomoću (3.8) i (3.1), dobiti i kakva je funkcija od $\underline{\theta}$.

Razmatranju jednačine (3.9) može se pristupiti sa dva gledišta. Prvo je da $\underline{v}$ damo kao funkciju od $\underline{\theta}$ (odnosno od $\underline{t}$), pa da tu diferencijalnu jednačinu ispitujemo i rešavamo. Medjutim, mali je broj slučajeva kad se ta diferencijalna jednačina sa datim $U(\theta)$ može rešavati pomoću kvadratura. Zato, možemo poći sa drugog gledišta: uzeti za $U(\theta)$ takvu funkciju kada znamo rešiti jednačinu (3.9) kvadraturama, pa tako, na osnovi (3.10), projektilu $\underline{P}$ nametnuti brzinu

$$v = \omega\, U(\theta) . \left(1 - \frac{\lambda \sin\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2\theta}}\right)^{-1} . \tag{3.11}$$

Mi ćemo poći prvo sa drugog gledišta, tj. birati funkciju $U(\theta)$ (odeljak II i III). Zatim ćemo uzeti da je $\underline{v}$ konstantno, pa dati približna rešenja za malo λ (odeljak IV) i za malo $1 - \lambda$ (odeljak V).

II - SLUČAJ KADA JE $U(\theta) = K$

4. TRAJEKTORIJA PROJEKTILA.- Ako uzmemo da je funkcija $U(\theta)$ konstantna, pa stavimo gornju vrednost $U(\theta) = K$ u diferencijalnu jednačinu (3.9) ona postaje

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r^2 = K^2, \tag{4.1}$$

pa iz (3.11) dobivamo da je

$$v = K\omega\left(1 - \frac{\lambda\sin\theta}{\sqrt{1-\lambda^2\cos^2\theta}}\right)^{-1}.$$

Medjutim, iz (3.6) imamo vezu izmedju polarnog ugla θ i ugla τ:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sin\tau - \lambda}{\cos\tau},$$

pa ako $\sin\theta$ i $\cos\theta$ izrazimo preko $\mathrm{tg}\,\theta$, dobivamo, posle sredjivanja,

$$v = K\omega\frac{1-\lambda\sin\tau}{1+\lambda^2-2\lambda\sin\tau}. \tag{4.2}$$

Pre nego što predjemo na ispitivanje ove funkcije, možemo odrediti konstantu $\underline{K}$ iz uslova da je u početnom trenutku $t=t_0$, $\tau = \tau_0 = \omega t_0 + \alpha$, ako vreme računamo od trenutka kada se cilj pojavljuje u horizontu mesta $\underline{A}$, tj. ako u (3.3) stavimo da je $\psi = 0$. Ako je v_0 brzina projektila u trenutku t_0, onda je

$$K = \frac{v_0}{\omega}\frac{1+\lambda^2-2\lambda\sin\tau}{1-\sin\tau_0}.$$

Stavimo li

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1-\lambda\sin\tau}{1+\lambda^2-2\lambda\sin\tau} = P(\tau), \tag{4.3}$$

biće

$$K = \frac{v_0}{\omega P(\tau)} = \frac{v_0}{\dot\theta_0}. \tag{4.4}$$

Ako za početni trenutak uzmemo $t=0$, kada je cilj u horizontu, onda je $\tau_0 = \alpha$, $\sin\tau_0 = \sin\alpha = \lambda$ (prema (3.1)), pa je $P(\tau_0) = P(\alpha) = 1$, i

$$K = v_0/\omega. \tag{4.5}$$

Vratimo se funkciji $P(\tau)$ iz (4.3). Izraz (4.2) može se napisati u obliku $v = K\omega P(\tau)$. $P(\tau)$ je neprekidna periodična funkcija sa periodom 2π. Kako je

$$P'(\tau) = \frac{\lambda(1-\lambda^2)\cos\tau}{(1+\lambda^2-2\lambda\sin\tau)^2},$$

to vidimo da kriva u intervalu $(0, 2\pi)$ ima dva ekstremuma, i to za $\tau_1 = \pi/2$ i $\tau_2 = 3\pi/2$. Iz izraza

$$P''(\tau) = \lambda(1-\lambda^2)\frac{2\lambda(1+\cos^2\tau) - \sin\tau(1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2-2\lambda\sin\tau)^3}$$

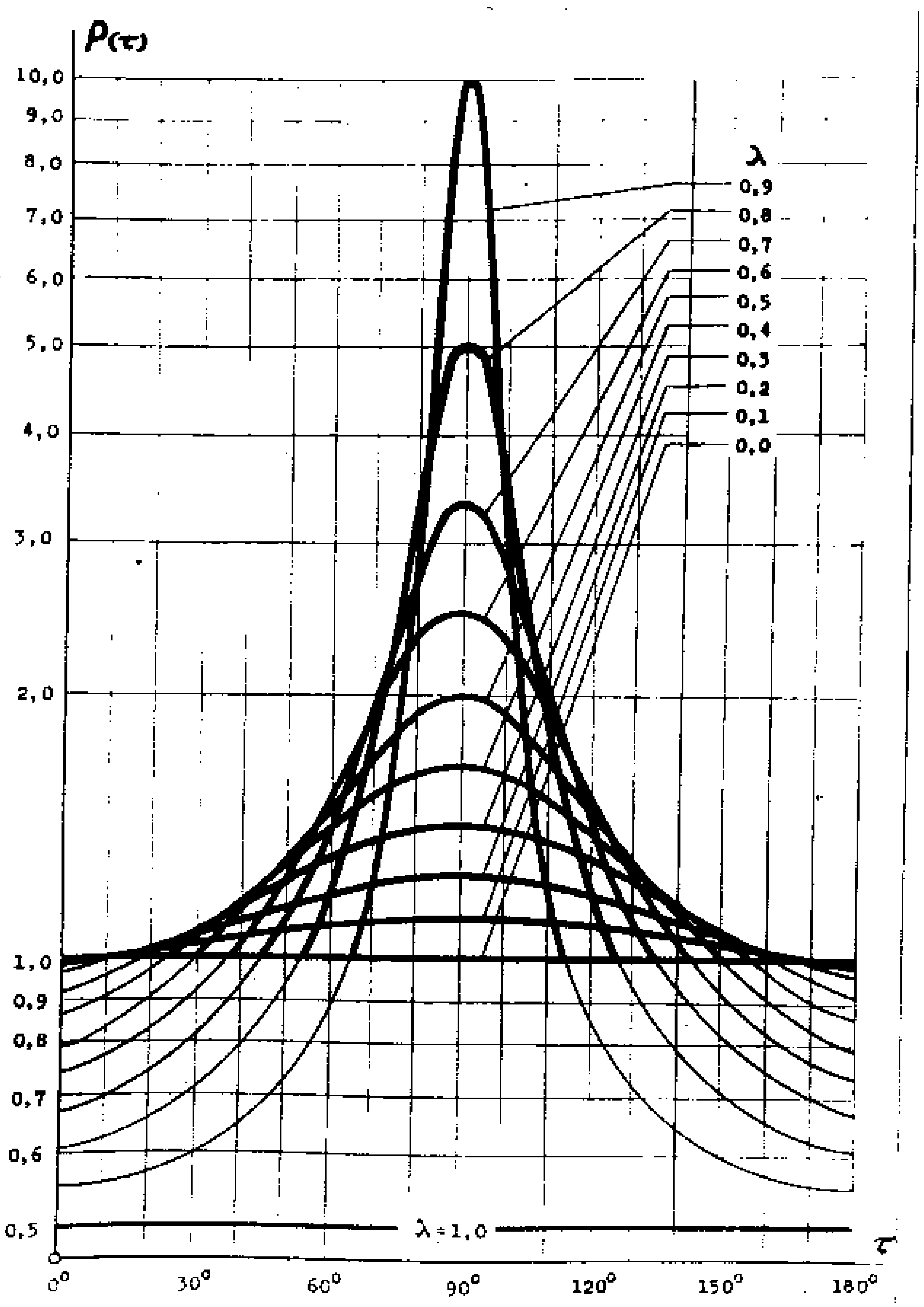
vidimo da je, zbog $0 < \lambda < 1$,

$$P''(\pi/2) = -\frac{\lambda(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3} < 0, \quad P''(3\pi/2) = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(1+\lambda)^3} > 0,$$

odakle izlazi da je najveća vrednost funkcije $P(\tau)$: Max $P(\tau) = P(\pi/2) = \frac{1}{1-\lambda}$, a njena najmanja vrednost Min $P(\tau) = P(3\pi/2) = \frac{1}{1+\lambda}$. Medjutim, nama nije potrebna cela funkcija $P(\tau)$, već samo njen deo za one vrednosti ugla τ za koje se cilj nalazi nad horizontom mesta A, (sl.3), a to je dok je

$$\alpha \leq \tau \leq \pi - \alpha \tag{4.6}$$

Vrednosti ugla α za razne vrednosti parametra λ prikazane su u Tablici 1., dok se gornja i donja granica intervala u kome se može nalaziti τ vide iz Tablice 2. Što se tiče samog dijagrama funkcije $P(\tau)$, on se vidi sa slike 4., gde je isertan deo krive, koji odgovara vrednostima iz intervala $(0, \pi)$. Osim toga, zbog velikih vrednosti maksimalne tačke krive, za ordinate je uzeta logaritamska podela. Iz Tablice 3., koja daje vrednosti maksimuma i minimuma krive $P(\tau)$, vidi se da vrednosti maksimuma za $\tau = \pi/2$ brzo rastu ukoliko je vrednost parametra λ bliža jedinici. U praksi, gde visina veštačkog satelita nad površinom Zemlje ne prelazi 500 km, vrednosti λ se nalaze izmedju 0,9 i 1,0 (vidi Tablicu 4.), tako da brzina projektila brzo raste ukoliko se τ više približava vrednosti $\pi/2$, što znači da treba težiti za tim da se cilj pogodi niže nad horizontom, pre no što vrednost funkcije $P(\tau)$ dostigne svoj maksimum za $\tau = \pi/2$. Osim toga, odnos početne i krajnje brzine (u tački u kojoj projektil pogadja cilj) može se smanjiti i na taj način što će projektil početi svoje kretanje kada početni ugao τ_0 dostigne izvesnu vrednost veću od ugla α, koji ima kad se cilj nalazi u horizontu mesta A.



Slika 4.

Vratimo se sada diferencijalnoj jednačini (4.1). Kako je, posle razdvajanja promenljivih,

T a b l i c a 1.

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
α^o	5,8	11,5	17,5	23,6	30,0	36,9	44,4	53,1	64,2
λ	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
α^o	65,5	66,9	68,4	70,1	71,8	73,7	75,9	78,5	81,9

T a b l i c a 2.

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
τ^o_{min}	5,8	11,5	17,5	23,6	30,0	36,9	44,4	53,1	64,2
τ^o_{max}	174,2	168,5	162,5	156,4	150,0	143,1	135,6	126,9	115,8
$\Delta\tau^o$	168,4	157,0	145,0	132,8	120,0	106,2	91,2	73,8	51,6
λ	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
τ^o_{min}	65,5	66,9	68,4	70,1	71,8	73,7	75,9	78,5	81,9
τ^o_{max}	114,5	113,1	111,6	109,9	108,2	106,3	104,1	101,5	98,1
$\Delta\tau^o$	49,0	46,2	43,2	39,8	36,4	32,6	28,2	23,0	16,2

T a b l i c a 3.

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$Max\ P(\tau)$	1,11	1,25	1,43	1,67	2,00	2,50	3,33	5,00	10,0
$Min\ P(\tau)$	0,91	0,83	0,77	0,72	0,67	0,63	0,59	0,56	0,53
λ	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$Max\ P(\tau)$	11,1	12,5	14,3	16,7	20,0	25,0	33,3	50,0	100
$Min\ P(\tau)$	0,52	0,52	0,52	0,52	0,51	0,51	0,51	0,50	0,50

T a b l i c a 4.

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
h (km)	57330	25481	14863	9555	6370	4247	2730	1593	707
λ	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
h (km)	630	650	480	410	340	270	200	130	70

$$\frac{dr}{\sqrt{K^2 - r^2}} = d\theta,$$

to se integracijom dobiva

$$\arcsin\left(\frac{r}{K}\right) = \theta - \theta_o + \arcsin\left(\frac{r_o}{K}\right) ,$$

pošto smo pred korenom uzeli pozitivan znak, jer vektor položaja r treba da se povećava kad polarni ugao raste.

Stavimo li

$$\arcsin\left(\frac{r_o}{K}\right) = \theta_1, \ r_o = K.\sin\theta_1, \tag{4.7}$$

biće jednačina trajektorije projektila

$$r = K.\sin(\theta - \theta_o + \theta_1). \tag{4.8}$$

Jednačina (4.8) predstavlja krug poluprečnika

$$\rho = K/2, \tag{4.9}$$

sa centrom u tački čije su koordinate

$$x_C = -\frac{K}{2}\sin(\theta_o - \theta_1), \ y_C = \frac{K}{2}\cos(\theta_o - \theta_1), \tag{4.10}$$

pa je, prema tome, njegova jednačina u pravouglom koordinatnom sistemu Axy (sl.3.):

$$x^2 + y^2 + Kx.\sin(\theta_o - \theta_1) - Ky.\cos(\theta_o - \theta_1) = 0. \tag{4.11}$$

Elevacionu ugao projektila (ugao izmedju smera tangente na putanju i pozitivnog smera x-ose) u početnom trenutku (φ_o) nije nezavisan od početnih elemenata, već se iz njih izračunava. Kako je uopšte

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}.\text{tg}\theta + r}{\frac{dr}{d\theta} - r.\text{tg}\theta},$$

a iz jednačine trajektorije projektila (4.8) je

$$\frac{dr}{d\theta} = K.\cos(\theta - \theta_o + \theta_1),$$

to je u početnom trenutku

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_o = K.\cos\theta_1,$$

pa je

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{K.\cos\theta_1.\text{tg}\theta_o + r_o}{K.\cos\theta_1 - r_o.\text{tg}\theta_o};$$

odavde, zbog (4.7), dobiva se

$$\text{tg}\,\varphi_o = \text{tg}(\theta_o + \theta_1),$$

tj.

$$\varphi_o = \theta_o + \theta_1. \tag{4.12}$$

Medjutim, kao što je poznato, ugao koji gradi tangenta sa pozitivnim smerom x-ose, φ, jednak je u svakom trenutku zbiru polarnog ugla θ i ugla ψ koji čine poteg i tangenta. Zbog toga je

$$\theta_1 = \psi_o;$$

drugim rečima, ugao θ_1, koji se pojavio kao integraciona konstanta u jednačini trajekterije, jednak je uglu koji čine pozitivni smerovi tangente i vektora položaja u početnom trenutku. Zato je $r_o = K.\sin \psi_o$, odakle se, zbog (4.4) dobiva

$$\sin {}_o = \frac{r_o \omega P(\tau_o)}{v_o} \tag{4.13}$$

tj., ako je $\theta_o = 0$, $P(\tau_o) = 1$,

$$\sin \psi_o = \frac{r_o \omega}{v_o} . \tag{4.14}$$

Onda je

$$\varphi_o = \theta_o + \psi_o , \tag{4.15}$$

tj., za $\theta_o = 0$, $\qquad \varphi_o = \psi_o$; $\qquad$ (4.16)

drugim rečima, elevacioni ugao u početnom trenutku jednak je uglu koji čine poteg i tangenta u tom istom trenutku. Zbog

$$r_o = \frac{v_o \sin \psi_o}{\omega P(\tau_o)} ,$$

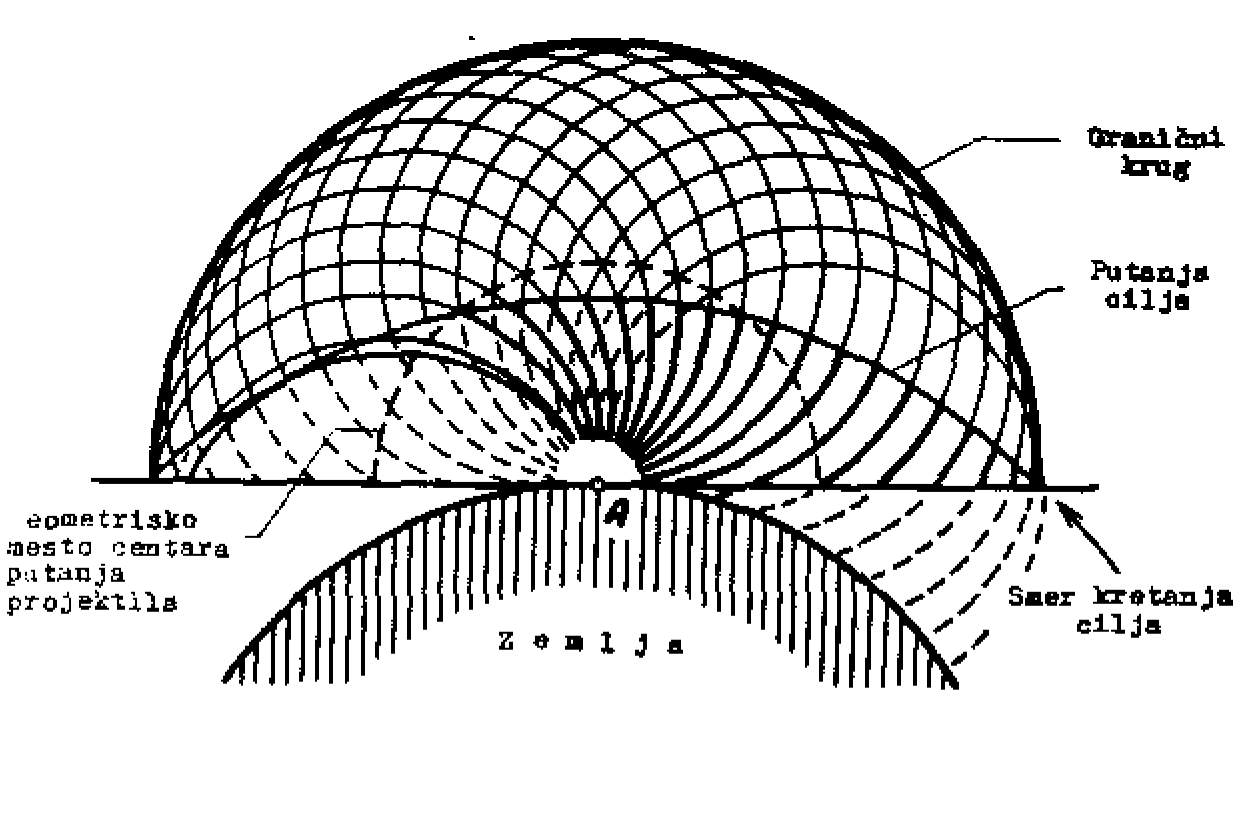
vidimo da je u slučaju ${}_o = 0$ i $r_o = 0$, tj. projektil počinje da se kreće iz tačke $\underline{A}$, bez obzira koliki je početni polarni ugao θ_o i početni elevacioni ugao φ_o; jedino izmedju njih, zbog $\varphi = \theta + \psi$, mora postojati veza $\theta_o = \varphi_o$.

Na kraju možemo, zbog veze

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{K.\sin(\theta - \theta_o + \theta_1)}{K.\cos(\theta - \theta_o + \theta_1)} = \operatorname{tg}(\theta - \theta_o + \theta_1),$$

odnosno zbog $\psi = \theta - \theta_o + \theta_1 = \theta - \theta_o + \psi_o$, jednačinu (4.8) napisati u obliku

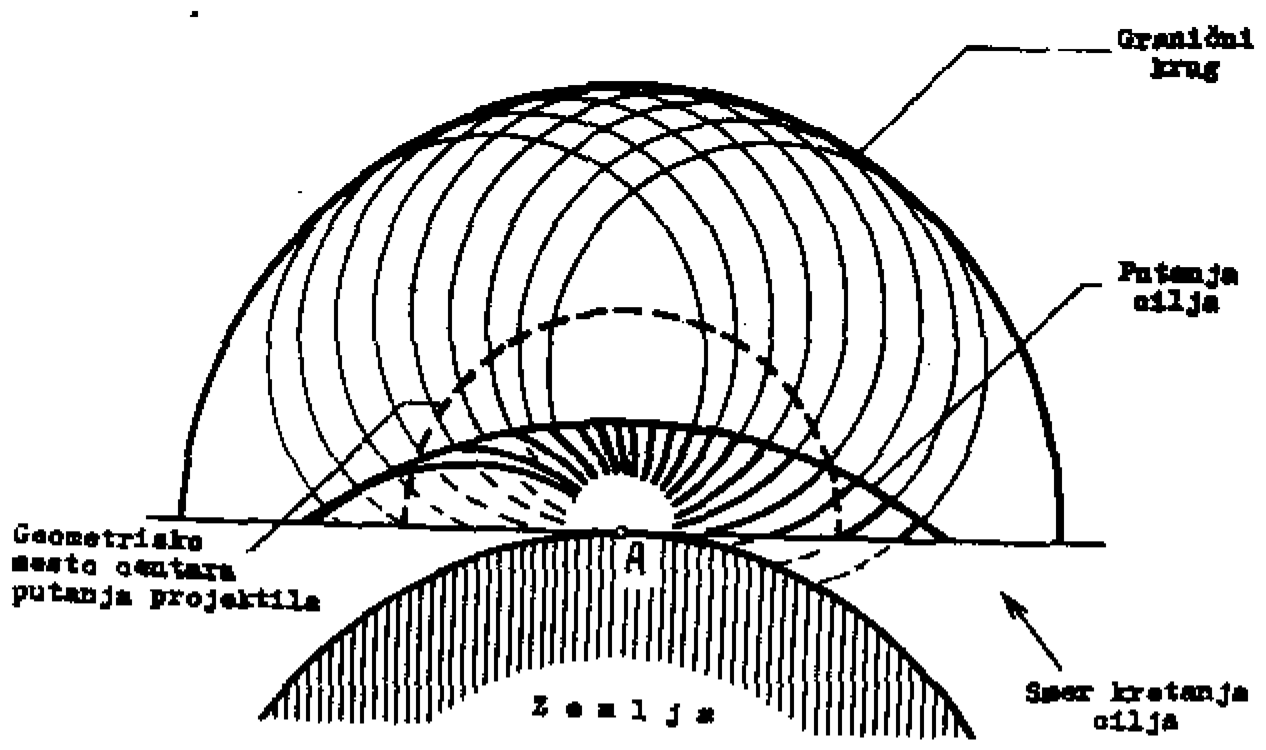
$$r = K.\sin \psi . \tag{4.17}$$



Slika 5.

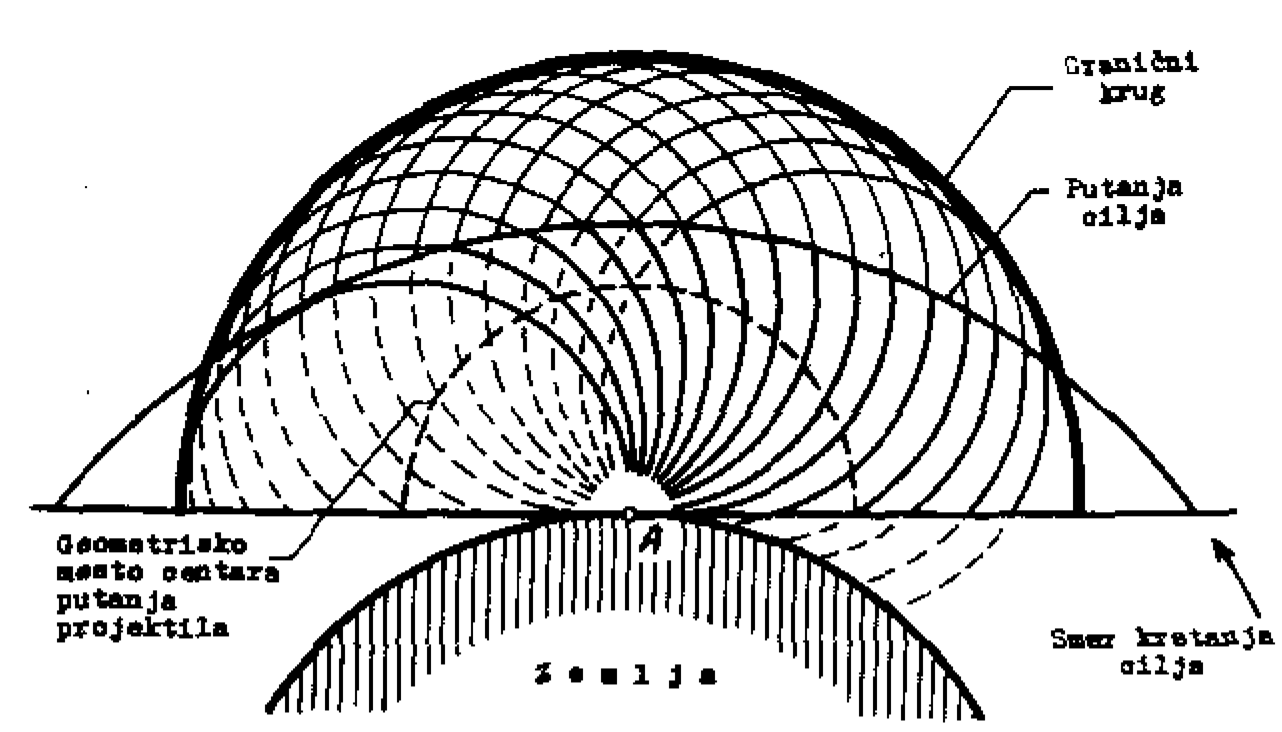
Putanje projektila kada je početna brzina konstantna, sa vrednosti ugla $\beta = \theta_o - \psi_o$ u intervalu $(-\pi/2; \pi/2)$.
Slučaj kada je $v_o = v_{k1}\sqrt{1 - \lambda^2}$.

Sa slika 5., 6., i 7. možemo videti putanje projektila za razne vrednosti početnog polarnog ugla θ_o. Kako je $\theta_1 = \psi_o$, iz (4.10) vidimo da je uvek $y_C > 0$, a $x_C < 0$ za $\theta_o > \psi_o$. Ako je $\theta_o = \psi_o$, $x_C = 0$, centar kruga po kome se kreće projektil leži na y-osi i to je granični slučaj kada projektil može poći iz tačke $\underline{A}$ (tada je i $\theta_o = 0$). Ako je $\theta_o < \psi_o$, $x_C > 0$ i projektil mora početi kretanje iz neke druge tačke na udaljenju r_o od tačke $\underline{A}$, kao što se uostalom može videti i



S l i k a 6.

Putanje projektila kada je početna brzina konstantna, za vrednosti ugla $\beta = \theta_o - \psi_o$ u intervalu $(-\pi/2; \pi/2)$.
Slučaj kada je $v_o > v_{k1}\sqrt{1-\lambda^2}$.



S l i k a 7.

Putanje projektila kada je početna brzina konstantna, za vrednosti ugla $\beta = \theta_o - \psi_o$ u intervalu $(-\pi/2; \pi/2)$.
Slučaj kada je $v_o < v_{k1}\sqrt{1-\lambda^2}$.

sa slike 5., pri čemu je uvek $0 < |\theta_o - \psi_o| < \pi$. Kako postavljeni problem praćenja cilja ima smisla samo dok se cilj nalazi nad horizontom mesta A, to se iz jednačine kruga (4.11), gde je $\theta_1 = \psi_o$, stavljajući $y = 0$ dobijamo tačke sa koordinatama $x = 0$ (ova tačka se dešava u času, u tom trenutku se cilj pojavljuje u horizontu) i

$$x = -R\sin(\theta_o - \psi_o),$$

pa kako je to krajnja tačka u kojoj projektil može pogoditi cilj, ona mora ležati i na putanji cilja, tj. na krugu čija je jednačina u pravouglom koordinatnom sistemu Axy:

$$x^2 + (y + a_y)^2 = a^2,$$

odnosno u tački čija je apscisa, zbog $y = 0$, $x = -\sqrt{a^2 - a_y^2}$.
Zato mora biti $\sqrt{a^2 - a_y^2} = R\sin(\theta_o - \psi_o)$, ili

$$\sin(\theta_o - \psi_o) = \frac{a_o\omega}{\lambda v_o}\sqrt{1 - \lambda^2}\, F(\tau_o). \qquad (4.18)$$

Kako je, međutim, za sve putanje kod kojih je $x_o < 0$ i $y_o = 0$, (ukoliko projektil ne polazi sa nekog uzvišenja nad površinom Zemlje čije su koordinate $x_o = r_o\cos\theta_o$, $y_o = r_o\sin\theta_o$), to mora biti i $\psi_o = 0$, pa tada će biti zadovoljen uslov

$$0 \leq \theta_o \leq \arcsin\left[\frac{a_o\omega}{\lambda v_o}\sqrt{1 - \lambda^2}\, F(\tau_o)\right].$$

Ukoliko to nije slučaj, odnosno ukoliko je $r_o \neq 0$ i projektil polazi iz tačke sa koordinatama x_o, y_o, mora biti zadovoljen uslov

$$0 \leqq \theta_o \leqq \psi_o + \arcsin\left[\frac{a_o \omega}{\lambda v_o}\sqrt{1-\lambda^2}\, P(\tau_o)\right],$$

tj., zbog (3.2),

$$0 \leqq \theta_o \leqq \psi_o + \arcsin\left[\frac{7{,}91}{v_o}\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}\; P(\tau_o)\right]. \qquad (4.19)$$

gde je v_o date u km/sec.

Iz jednačine (4.19) sleduje da mora biti uvek zadovoljen uslov

$$\left| P(\tau_o)\,\frac{7{,}91}{v_o}\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}\right| \leqq 1,$$

odakle za početnu brzinu dobivamo uslov

$$v_o \geqq 7{,}91\sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}\; P(\tau_o) \quad \text{km/sec.} \qquad (4.20)$$

Na primer, za $\lambda = 0{,}9$ i $\tau_o = \alpha$ taj uslov je $v_o \geqq 3{,}25$ km/sec, dok izraz na desnoj strani dostiže maksimum za $\lambda = 1/\sqrt{3} = 0{,}578$, pri čemu u tom slučaju mora biti $v_o \geqq 4{,}9$ km/sec, što se događja kod satelita kod kojih je poluprečnik putanje $a = 11000$ km, tj. čija je visina nad površinom Zemlje $h = 4630$ km.

Izraz (4.20) može se i drukčije napisati. Kako je $c = 7{,}91\sqrt{\lambda}$ km/sec, brzina kojom se kreće satelit na kružnoj putanji oko Zemlje na rastojanju $h = a - a_o$ od njene površine, to uslov (4.20) možemo napisati i u obliku

$$v_o \geqq c\sqrt{1-\lambda^2}\; P(\tau_o)\;. \qquad (4.21)$$

Ovakva početna brzina suviše je velika. Ni jedan projektil ne može krenuti sa površine Zemlje tolikom brzinom, pa stoga treba praćenje cilja otpočeti u nekoj tački nad površinom Zemlje, sa koordinatama x_o, y_o, do koje projektil može postupno dostići početnu brzinu, potrebnu za otpočinjanje praćenja cilja.

5. TAČKA POGOTKA CILJA.- Tačka pogotka, u kojoj projektil presreće ili dostiže cilj, leži u preseku putanja projektila i cilja, dakle u preseku dva kruga čije su jednačine u polarnom koordinatnom sistemu:

putanja projektila: $\quad r = K.\sin(\theta - \theta_o + \theta_1)$,

putanja cilja: $\quad r = a\left[\sqrt{1-\lambda^2\cos^2\theta} - \lambda\sin\theta\right].$

Napišemo li prvu jednačinu u obliku

$$R = K.\sin\theta.\cos\beta - K.\cos\theta.\sin\beta\;,$$

gde je $\beta = \theta_o - \theta_1$, pa izrazimo $\sin\theta$ i $\cos\theta$ preko $tg\theta$, dobivamo

$$r = \frac{K}{\sqrt{1+tg^2\theta}}(tg\theta.\cos\beta - \sin\beta\,).$$

Posle unošenja vrednosti za $tg\theta$ iz (3.6) dobivamo jednačinu putanje projektila u obliku

$$r = K\frac{\sin(\tau-\beta) - \lambda\cos\beta}{\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda\sin\beta}}. \tag{5.1}$$

Jednačina kruga po kome se kreće cilj je, ako i u njoj kao promenljivu uvodimo τ,

$$r = a\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda\sin\tau}. \tag{5.2}$$

Presečnu tačku krugova dobivamo iz jednačine

$$K\frac{\sin(\tau_p-\beta) - \lambda\cos\beta}{\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda\sin\tau_p}} = a\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda\sin\tau_p},$$

gde indeks $\underline{p}$ označava tačku pogotka, odnosno

$$\sin(\tau_p-\beta) - \lambda\cos\beta = \frac{a}{K}(1+\lambda^2 - 2\lambda\sin\tau_p).$$

Poslednja jednačina se zbog (4.4) može napisati u obliku

$$(\cos\beta + 2c_1)\sin\tau_p - \sin\beta.\cos\tau_p = c_1\frac{1+\lambda^2}{\lambda} + \lambda\cos\beta,$$

gde je

$$c_1 = \frac{a_o\omega P(\tau_o)}{v_o}. \tag{5.3}$$

Stavljajući

$$\cos\beta + 2c_1 = m.\cos M, \quad \sin\beta = m.\sin M,$$

dobiva se

$$m.\sin(\tau_p - M) = c_1\frac{1+\lambda^2}{\lambda} + \lambda\cos\beta, \tag{5.4}$$

pri čemu je

$$m = +\sqrt{1+4c_1^2 + 4c_1\cos\beta},$$
$$\operatorname{tg}M = \frac{\sin\beta}{\cos\beta + 2c_1}, \quad (\operatorname{tg}M \geqq 0, \quad 0 \leqq M \leqq 90^\circ), \tag{5.5}$$

a τ_p označava vrednost ugla τ u trenutku pogotka.

Da bi jednačina (5.4) imala rešenja, tj. da bi krugovi trajektorija projektila i cilja imali zajedničke tačke preseka, mora biti zadovoljen uslov $\left|c_1\frac{1+{}^2}{} + \lambda\cos\beta\right| \leqq m,$

odnosno,

$$\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)^2 c_1^2 - 2.\cos\beta(1-\lambda^2)c_1 - (1-\lambda^2\cos^2\beta) \leqq 0.$$

Ako pretpostavimo da je ugao $\beta = \theta_o - \theta_1$ unapred dat, možemo odrediti granice u kojima treba da se nalazi c_1 da bi došlo do pogadjanja cilja. Poslednja jednačina može se napisati u obliku

$$\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)^2 (c_1 - c_{11})(c_1 - c_{12}) \leqq 0,$$

odnosno $(c_1 - c_{11})(c_1 - c_{12}) \leqq 0$, odakle sledi da mora biti zadovoljen uslov $c_{12} \leqq c_1 \leqq c_{11}$, gde je

$$c_{11} = \frac{1}{1-\lambda^2}(1+\lambda\cos\beta) > 0, \quad c_{12} = -\frac{1}{1-\lambda^2}(1-\lambda\cos\beta) < 0.$$

Medjutim, kako je $c_{12} < 0$ uvek, a veličina c_1 je uvek pozitivna, dovoljno je napisati samo uslov

$$c_1 \leqq c_{11},$$

odnosno,

$$\frac{a_o \omega P(\tau_o)}{v_o} \leqq \frac{\lambda}{1-\lambda^2}(1+\lambda\cos\beta),$$

odakle se za početnu brzinu dobiva uslov

$$v_o \geqq \frac{a_o \omega P(\tau_o).(1-\lambda^2)}{1+\lambda\cos\beta}. \tag{5.6}$$

Vidimo da je na desnoj strani izraz najmanji za $\tau_o = \alpha$, $P(\tau_o) = 1$, odakle je $\theta_o = 0$ i $\cos\beta = 1$, $= 0$, pa je, zbog $\beta = \theta_o - \theta_1 = -\psi_o$, $\psi_o = 0$. Za te vrednosti uslov (5.6) glasi

$$v_o \geqq \frac{a_o\omega(1-\lambda^2)}{1+\lambda} = a_o\omega\frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Zbog (3.2) i $a_o = 6370$ km uslov za početnu brzinu postaje

$$v_o \geqq 7{,}91\sqrt{\lambda}\,(1-\lambda)\ \text{km/sec},$$

ili, ako uvedemo opet brzinu cilja c,

$$v_o \geqq c(1-\lambda). \tag{5.7}$$

Uslov (5.7) blaži je od uslova (4.21); na primer za $\lambda = 0{,}9$ ovaj uslov daje $v_o \geqq 751$ m/sec, dok je za istu vrednost λ uslov (4.21) davao $v_o \geqq 3{,}27$ km/sec, za vrednost $\tau_o = \alpha$, dakle za minimalnu vrednost $P(\tau_o)$.

Kada odredimo vrednost ugla τ_p u trenutku kada projektil pogadja cilj, iz jednačine (5.4), odnosno iz

$$\sin(\tau_p - M) = \frac{c_1}{m}\cdot\frac{1+\lambda^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{m}\cos\beta, \tag{5.8}$$

ostale elemente koji odgovaraju tome trenutku, dobivamo na sledeći način:

vektor položaja tačke iz $r_p = \frac{a_o}{\lambda}\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda\sin\tau_p}$; (5.9)

brzinu iz

$$v_p = v_o\frac{P(\tau_p)}{P(\tau_o)}, \tag{5.10}$$

gde je

$$P(\tau_p) = \frac{1-\lambda\sin\tau_p}{1+\lambda^2-2\lambda\sin\tau_p};$$

ugao izmedju vektora položaja i tangente iz

$$\psi_p = \theta_p - \theta_o + \psi_o, \tag{5.11}$$

pri čemu se polarni ugao dobiva iz

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{\sin\tau_p - \lambda}{\cos\tau_p}, \tag{5.12}$$

a elevacioni ugao je

$$\varphi_p = \theta_p + \psi_p = 2\theta_p - \theta_o + \psi_o. \tag{5.13}$$

Odnos

$$\eta = v_p/v_o = P(\tau_p)/P(\tau_o)$$

dostiže najveću vrednost ako je $\tau_o = \alpha$, $\tau_p = 90^0$, tj. ako projektil polazi u trenutku kada se cilj nalazi u horizontu, a pogadja ga u trenutku kada se nalazi u zenitu mesta $\underline{A}$. Tada je

$$\operatorname{Max} \eta = \frac{1}{1-\lambda}. \tag{5.14}$$

Vrednost η je utoliko manja ukoliko je $P(\tau_o)$ veće, samo se u tom slučaju, prema uslovu (5.6), povećava vrednost početne brzine, što je nepovoljnije. Za $\lambda = 0{,}9$ je $\operatorname{Max}\eta = 10$. Osim toga, može se dogoditi da η ima manju vrednost od maksimalne (prilikom gonjenja, kada cilj predje zenit mesta $\underline{A}$), a da prilikom prelaza iz presretanje u gonjenje, za $\tau = 90^0$, brzina projektila uzima vrednost $v_{max} = v_o/(1-\lambda)$, posle čega se opet smanjuje do vrednosti v_p, što se vidi iz grafika funkcije $P(\tau)$ (sl.4.). Ovo se može izbeći na taj način što će projektil početi kretanje u trenutku kada se cilj nalazi u zenitu ili blizu njega, tako da imamo čisto gonjenje, ali je tada početna brzina jednaka brzini cilja, odnosno vrlo bliska njoj, što je neizvodljivo ako projektil treba da počne kretanje i u isto vreme i praćenje iz tačke $\underline{A}$. (Iz (5.6) se za $\tau_o = 90^0$ dobija da mora biti $v_o \geqq c$, ako je $\beta = 0$.)

6. GRANIČNA KRIVA.-

Napišemo li jednačinu (4.1) u obliku

$$\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{K^2 - r^2},$$

vidimo da ona ima rešenja samo ako je $K^2 - r^2 \geqq 0$, što znači da se projektil može kretati samo u unutrašnjosti krive

$$r = K, \tag{6.1}$$

ili u krajnjem slučaju može se naći na samoj krivoj (6.1). Ovu krivu liniju, koja odvaja oblast mogućih od oblasti nemogućih rešenja diferencijalne jednačine (4.1), nazvaćemo graničnom krivom linijom. To je krug poluprečnika $\underline{K}$, sa centrom u tački $\underline{A}$, čija je jednačina u pravouglom sistemu Axy:

$$x^2 + y^2 = K^2. \tag{6.2}$$

Ovaj krug je obvojnica trajektorija projektila

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 + Kx.\sin\beta - Ky.\cos\beta = 0,$$

kada je početna brzina projektila konstantna, a samim tim je konstantna i veličina $\underline{K}$. Kako je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial\beta} = Kx.\cos\beta + Ky.\sin\beta = 0,$$

to iz ove jednačine i jednačine trajektorije projektila sleduje

$$\sin\beta = \frac{Kx}{x^2+y^2}, \quad \cos\beta = \frac{Ky}{x^2+y^2},$$

pa eliminacija parametra β daje zaista kao obvojnicu krug (6.2).

Sa slika 5., 6. i 7. vidimo kako izgleda položaj graničnog kruga.

Prema tome, ako je zadovoljen uslov za početnu brzinu projektila (5.6) (ili (5.7)), koji uslovaljava pogadjanje cilja, onda tačke pogotka leže u unutrašnjosti graničnog kruga, dakle u oblasti mogućih rešenja diferencijalne jednačine (4.1). Granični slučaj se dogadja kada centar kruga trajektorije projektila leži na y-osi i pritom je $\tau_p = 90^0$ (u uslovu (5.6) treba uzeti znak jednakosti; putanje projektila i cilja seku se samo u jednoj tački). Tada, i samo u tom slučaju, tačka pogotka leži na samom graničnom krugu; u svim ostalim slučajevima nalazi se u njemu.

III - SLUČAJ KADA JE $U(\theta) = \dfrac{A}{\cos^2\theta}$.

7. BRZINA PROJEKTILA I GRANIČNA KRIVA.- Drugi i ujedno poslednji slučaj kada se diferencijalna jednačina kretanja projektila može rešiti kvadraturama sa datom funkcijom $U(\theta)$ je kad ova funkcija ima oblik

$$U(\theta) = \frac{A}{\cos^2\theta}, \tag{7.1}$$

gde je $A > 0$ konstantna veličina. U tom slučaju je, zbog (3.6), brzina projektila u funkciji ugla τ data izrazom

$$v = A\omega \frac{P(\tau)}{\cos^2\theta} = A\omega N(\tau), \tag{7.2}$$

gde je

$$N(\tau) = \frac{1 - \lambda \sin\tau}{\cos^2}. \tag{7.3}$$

Ako sa $N(\tau_0)$ označimo vrednost funkcije $N(\tau)$ u trenutku kada projektil počinje svoje kretanje, onda imamo, ako sa v_0 označimo početnu brzinu projektila,

$$v = v_0 \frac{N(\tau)}{N(\tau_0)}. \tag{7.4}$$

Funkcija $N(\tau)$ postaje beskonačna u tački $\tau = \pi/2$. Dakle, cilj se mora pogoditi pre no što dodje u zenit mesta $\underline{A}$, pošto u tački $\tau = \pi/2$, prema (7.2) brzina treba da bude beskonačno velika. Funkcija je periodična, sa periodom 2π. U intervalu $(0, 2\pi)$ ima dva minimuma, u tačkama u kojima je

$$\sin\tau_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda},$$

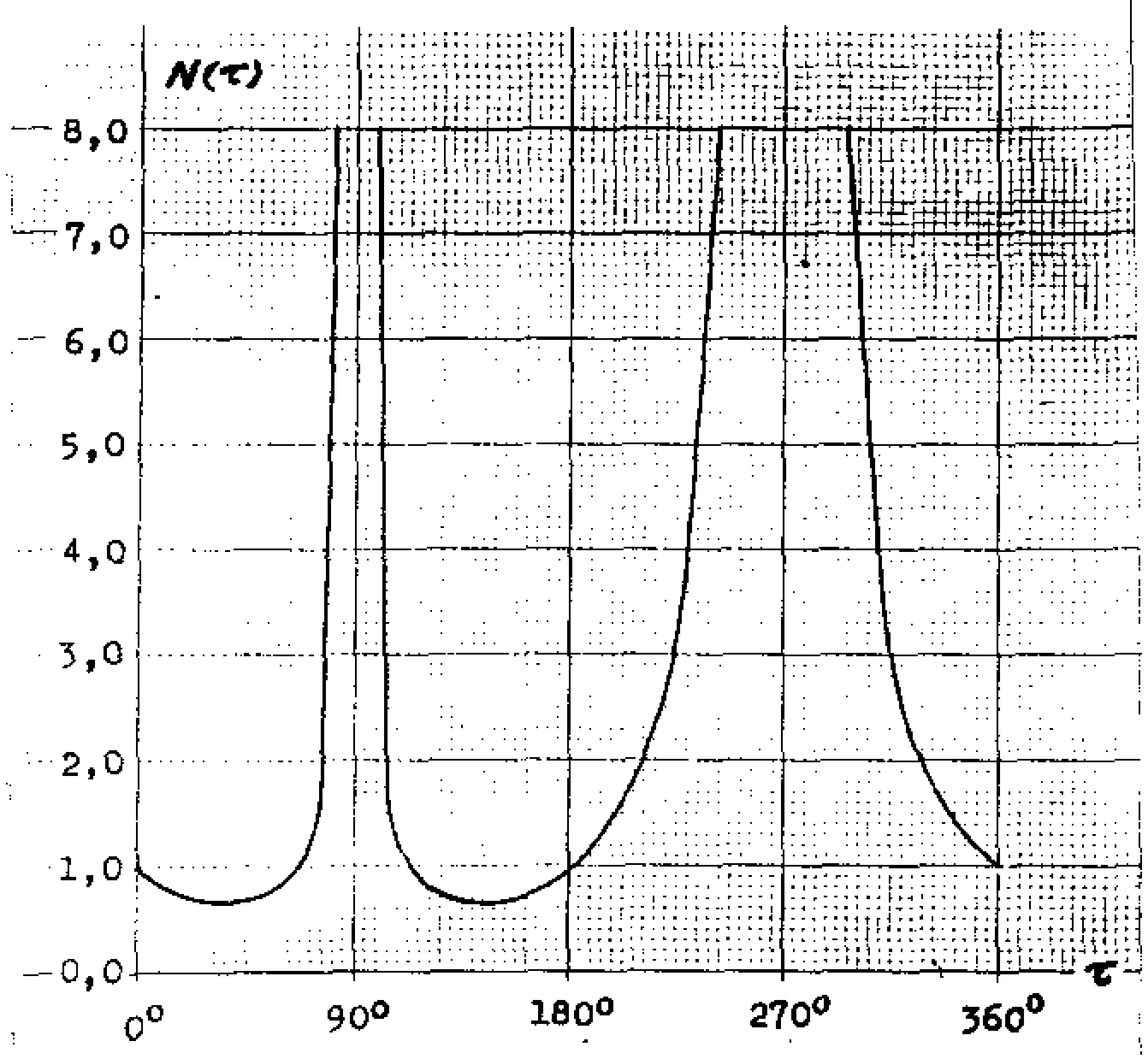
a za koje je

$$N(\tau_1) = \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{2}.$$

No kako je $N(\tau_1) < N(\alpha) = 1$, to tačke u kojima bi brzina imala ovu minimalnu vrednost leže ispod horizonta mesta $\underline{A}$, pa je, prema tome najmanja vrednost brzine ustvari početna brzina. Do tačke $\tau = \pi/2$ $N(\tau)$ raste, za $\tau = \pi/2$ postaje beskonačno veliko, zatim opada do tačke $\tau = \pi - \tau_1$, a onda ponovo raste do $\tau = 3\pi/2$, gde opet postaje beskonačno veliko, posle čega opada do vrednosti $N(\tau) = 1$, za $\tau = 2\pi$.

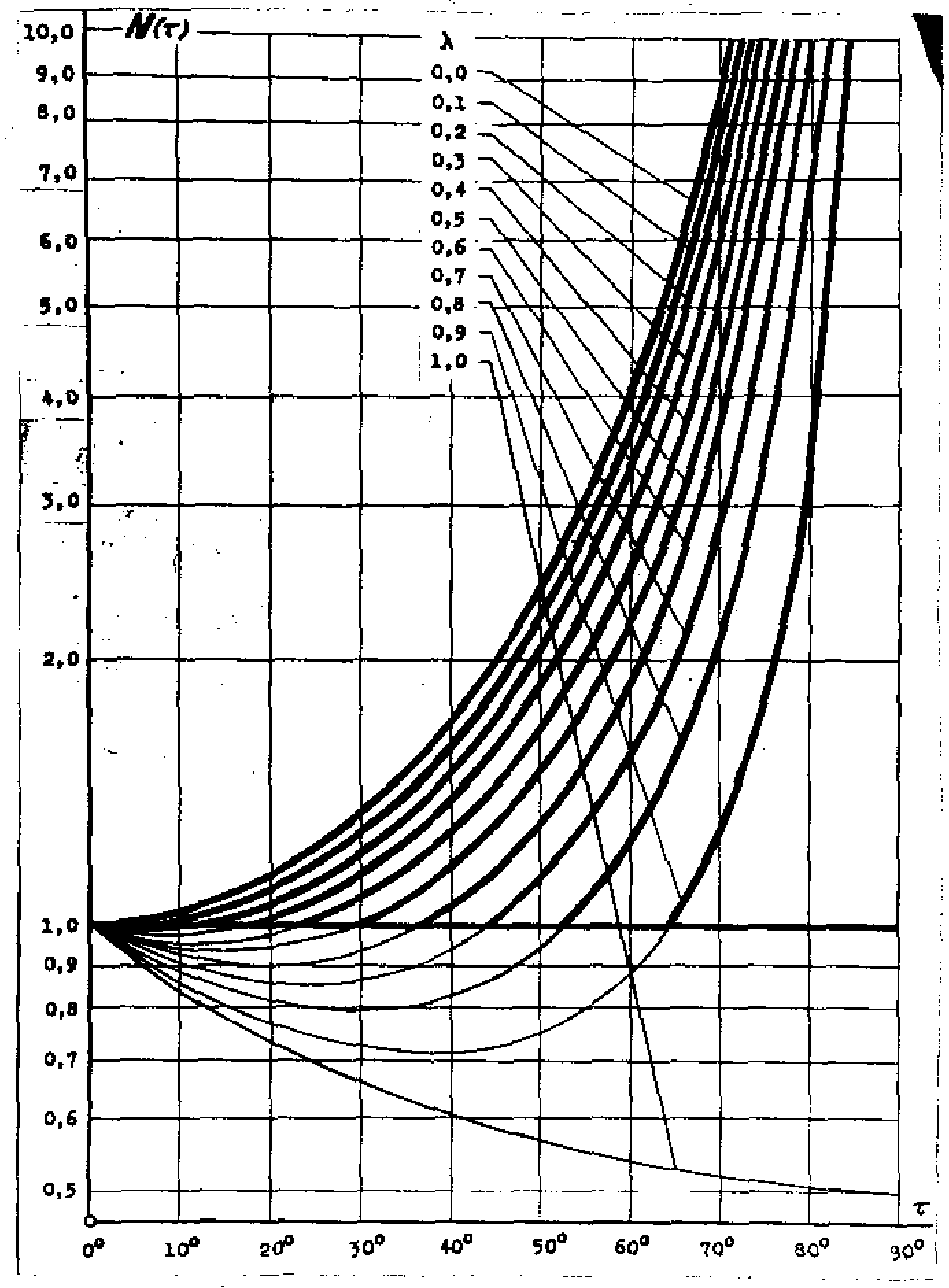
Na slici 8. prikazan je dijagram funkcije $N(\tau)$ za vrednosti parametra $\lambda = 0{,}9$ u celom intervalu $(0, 2\pi)$, dok su funkcije $N(\tau)$ za sve vrednosti parametra λ u intervalu $(0,1)$ prikazane samo u intervalu $0 \leq \tau \leq \pi/2$ na slici 9., pri čemu je deo funkcije, koji odgovara položajima projektila nad horizontom iscrtan debljom linijom.

Vratimo se sada diferencijalnoj jednačini



S l i k a 8.

Funkcija $N(\tau)$ za $\lambda = 0,9$



Slika 9.

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \frac{A^2}{\cos^4\theta},$$

pa je napišimo u obliku

$$\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{A^2}{\cos^4\theta} - r^2}$$

Vidimo da jednačina ima rešenja samo ako je $r \leqq A/\cos^2\theta$. Granična kriva linija, koja odvaja oblast realnih od oblasti imaginarnih rešenja diferencijalne jednačine kretanja projektila, a čija je jednačina u polarnom koordinatnom sistemu

$$r = \frac{A}{\cos^2\theta}, \tag{7.5}$$

ima u pravouglom koordinatnom sistemu Axy jednačinu

$$y = \frac{x}{A}\sqrt{x^2 - A^2}. \tag{7.6}$$

Ova kriva linija preseca horizont u tačkama čije su koordinate $x_1 = 0$ (izolovana tačka), $x_2 = A$ i $x_3 = -A$, pa, prema tome, da bi projektil imao mogućnosti da pogodi cilj bilo gde nad horizontom, treba tačka u kojoj se cilj nalazi u horizontu, sa apscisom $x = \sqrt{a^2 - a_0^2}$ da bude bliže tački A od tačke sa apscisom x_2, tj. treba da bude

$$\sqrt{a^2 - a_0^2} \leqq A.$$

Kako je, medjutim, iz (7.2) $A = v_0/\omega N(\tau_0)$, to mora biti

$$\frac{a_0}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2} \leqq \frac{v_0}{\omega N(\tau_0)},$$

odakle je

$$v_0 \geqq \frac{a_0 \omega N(\tau_0)}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Zbog (3.2) dobivamo uslov

$$v_0 \geqq \frac{7.91\lambda^{3/2}}{\lambda} N(\tau_0)\sqrt{1-\lambda^2},$$

odnosno, ako unosemo vrednost za brzinu cilja, gornji uslov postaje

$$v_0 \geqq c.N(\tau_0)\sqrt{1-\lambda^2}, \tag{7.7}$$

odnosno, za Min $N(\tau_0) = 1$, kada se cilj u početnom trenutku kretanja projektila nalazi u horizontu mesta $\underline{A}$,

$$v_0 \geqq c\sqrt{1-\lambda^2}, \tag{7.8}$$

a to je upravo uslov (4.21), nepovoljan za početnu brzinu projektila. Ovo se, kao i u slučaju $U(\theta) = K$, može izbeći ako se praćenje cilja započne iz neke druge tačke, sa koordinatama x_0, y_0, do koje raketa uspe da razvije potrebnu početnu brzinu.

Medjutim, postoji jedna olakšavajuće okolnost. Naime, sa slike 10. se vidi da tačka u kojoj se cilj nalazi u horizontu mesta $\underline{A}$ može biti i dalje od tačke sa apscisom $x_2 = A$ granične krive linije, pa da izmed mesta $\underline{A}$ još uvek postoji dovoljno velika oblast realnih rešenja diferencijalne jednačine, u kojoj projektil može pogoditi veštački satelit.

8. TRAJEKTORIJA PROJEKTILA.- Vratimo se sad na polaznu diferencijalnu jednačinu

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \frac{A^2}{\cos^4\theta} \tag{8.1}$$

i uvedimo opet ugao ψ izmedju pozitivnih smerova vektora položaja i brzine projektila, preko izraza

$$\operatorname{tg}\psi = r : \frac{dr}{d\theta}, \tag{8.2}$$

odakle je

$$\frac{dr}{d\theta} = r.\operatorname{ctg}\psi.$$

A kako je, prema ranije rečenom, $\psi = \varphi - \theta$, gde je φ ugao koji vektor brzine zaklapa sa pozitivnim smerom x-osa, to je $\frac{dr}{d\theta} = r.\operatorname{ctg}(\varphi-\theta)$. Dalje je, ako se ovaj izraz uvrsti u (8.1),

$$r^2\operatorname{ctg}^2(\varphi-\theta) + r^2 = \frac{A^2}{\cos^4\theta},$$

odakle je

$$\frac{r}{\sin(\varphi-\theta)} = \frac{A}{\cos^2\theta} \tag{8.3}$$

Uvedimo sada koordinate ξ i η smenom

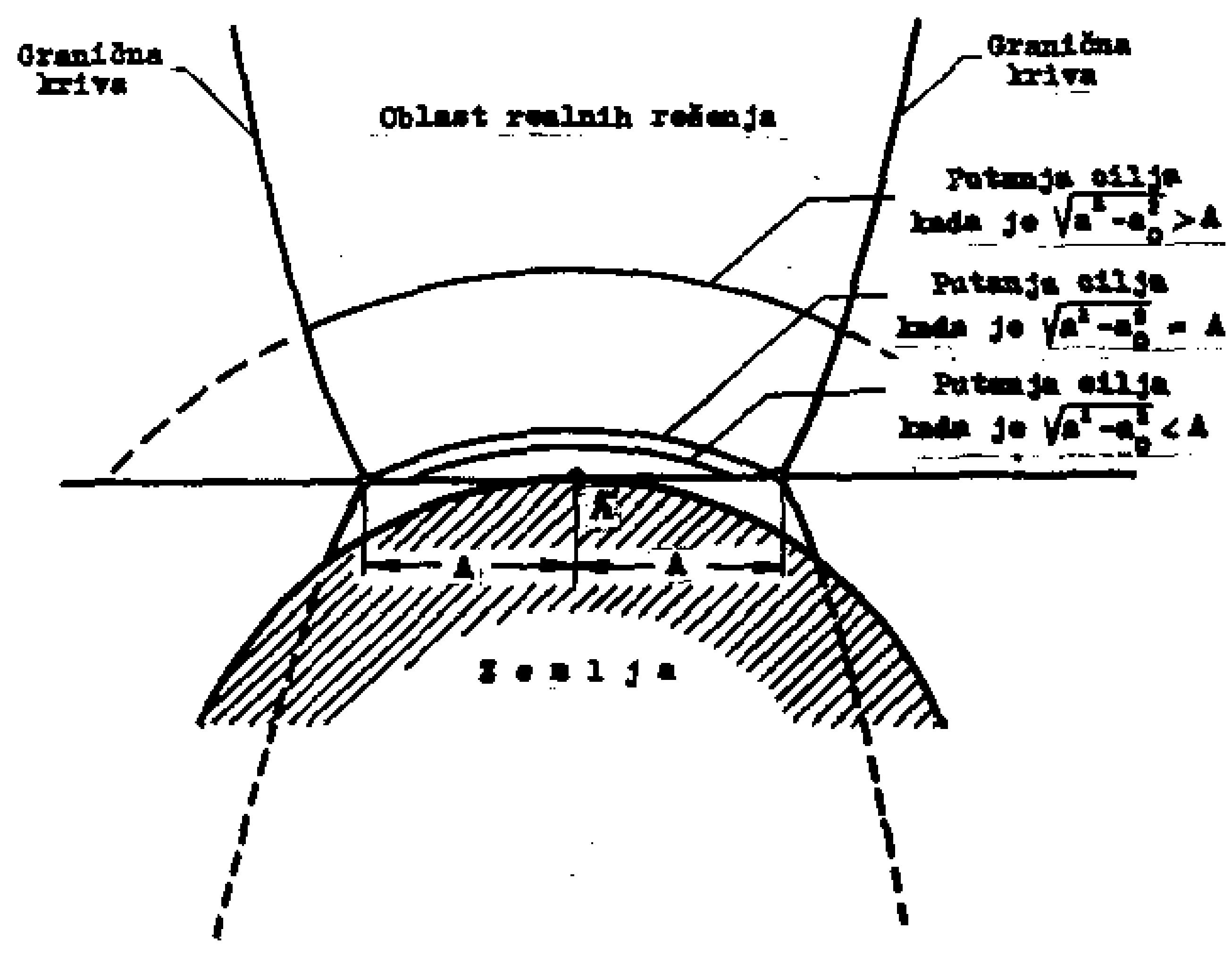
$$\xi = -\frac{Y}{A}.\sin\theta, \quad \eta = -\frac{X}{A}.\cos\theta, \tag{8.4}$$

Sada dobivamo, posle razvijanja izraza (8.3),

$$-\eta.\sin\varphi + \xi\cos\varphi = \eta^2. \tag{8.5}$$

Diferencirajmo li ovu jednačinu po vremenu, biće

$$-\dot{\eta}\sin\varphi + \dot{\xi}\cos\varphi - \eta.\dot{\varphi}\cos\varphi - \xi.\dot{\varphi}\sin\varphi = 2\eta\frac{d\eta}{d\varphi}\dot{\varphi}.$$



Slika 10.

Zbog (84.) je

$$\xi = -\frac{Y}{A}, \quad \eta = -\frac{X}{A}, \tag{8.6}$$

pa je

$$\dot{\xi} = -\frac{\dot{y}}{A}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\dot{x}}{A}.$$

Medjutim, kako je $\dot{x} = v.\cos\varphi$, $\dot{y} = v.\sin\varphi$, ovi izrazi postaju

$$\dot{\xi} = -\frac{v}{A}.\sin\varphi, \quad \dot{\eta} = -\frac{v}{A}.\cos\varphi,$$

pa gornja jednačina, posle skraćivanja sa $\dot{\varphi}$, postaje

$$2\eta\frac{d\eta}{d\varphi} + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi = 0.$$

Ako još smenimo ξ iz (8.5), ona dobiva oblik

$$2\frac{d\eta}{d\varphi} + \eta(\eta + \sin\varphi).\text{tg}\,\varphi + \eta\cos\varphi = 0,$$

odnosno, posle skraćivanja sa η i sredjivanja,

$$\frac{d\eta}{d\varphi} + \frac{1}{2}\eta\,\text{tg}\,\varphi + \frac{1}{2.\cos\varphi} = 0.$$

Najzad, smenom nezavisne promenljive $\varphi = \frac{\pi}{2} - u$, $d\varphi = -du$, poslednju jednačinu svodimo na diferencijalnu jednačinu kretanja projektila, koji prati po potegu cilj koji se kreće pravoliniski konstantnom brzinom.*) Ova jednačina glasi:

$$\frac{d\eta}{du} - \frac{1}{2}\eta\,\text{ctg}u = \frac{1}{2.\sin u}. \tag{8.7}$$

Rešenje ove jednačine je

$$\eta = \sqrt{|\sin u|}\left(C + \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sin u\sqrt{|\sin u|}}\right) = f_2(u), \tag{8.8}$$

pri čemu je

$\sqrt{|\sin u|} \geqslant 0$, a $\underline{C}$ integraciona konstanta.

---

*) Rešenje prof. R. Kašanina (Saopštenje Instituta za vojnotehnička istraživanja, R.-35.39/1960).

Iz (8.5) je

$$\xi = f_2(u).\mathrm{ctg}\,u + f_2^2(u).\mathrm{cosec}\,u = f_1(u), \qquad (8.9)$$

pa, zbog (8.6) jednačine

$$x = -A.f_2(u)\ , \quad y = -A.f_1(u)\ , \qquad (8.10)$$

daju parametarski oblik jednačine trajektorije projektila.

Da bi se dobila tačka u kojoj projektil pogadja cilj, treba u ovom slučaju integralne krive linije iz rešenja (8.10)*), umesto sa pravim linijama, preseći kružnim putanjama veštačkog satelita.

---

*) Rešenje prof. R. Kašanina, pomenuto na prethodnoj strani.

IV - SLUČAJ KADA JE PARAMETAR λ MALI

9. PRVA APROKSIMACIJA.- Ako je odnos poluprečnika Zemlje i kružne putanje cilja toliko mali da se praktično može uzeti da je jednak nuli (ovo je granični slučaj), iz uslova praćenja po potegu (3.6) izlazi $tg\theta = tg\tau$, tj.

$$\theta = \tau = \omega t, \tag{9.1}$$

jer je iz (3.1) i ugao $\alpha = 0$. Tada se diferencijalna jednačina (3.9) svodi na jednačinu

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2. \tag{9.2}$$

Stavićemo

$$\frac{v}{\omega} = k, \tag{9.3}$$

i pretpostaviti da je brzina projektila konstantna. Onda se razdvajanjem promenljivih u jednačini (9.2) i integraljenjem dobiva

$$r = k.\sin(\theta + C),$$

gde je $\underline{C}$ konstanta integracije. U početnom trenutku je $r_o = 0$, pa je

$$r = k.\sin(\theta - \theta_o),$$

gde je θ_o polarni ugao u početku kretanja projektila. Dakle,

$$r = \frac{v}{\omega}\sin(\theta - \theta_o). \tag{9.4}$$

Kako se x-osa polarnog koordinatnog sistema može izabrati proizvoljno, možemo uzeti da je i $\theta_o = 0$, pa dobivamo jednačinu kruga

$$r = \frac{v}{\omega}\sin\theta \tag{9.5}$$

kao trajektoriju projektila. U pravouglom koordinatnom sistemu jednačina ovog kruga je

$$x^2 + y^2 = \frac{v}{\omega}y,$$

a ovo je krug sa centrom u tački $(0, \frac{v}{2\omega})$ i poluprečnika

$$\rho = \frac{v}{2\omega}. \tag{9.6}$$

Tačka u kojoj projektil pogadja cilj dobiva se presekom putanja cilja i projektila, tj. stavljajući $r_p = a$. Odatle je

$$\sin\theta_p = \frac{a\omega}{v}. \tag{9.7}$$

Medjutim, veličina $a\omega$ predstavlja brzinu cilja na putanji, tj. $a\omega = c$, pa je zbog toga

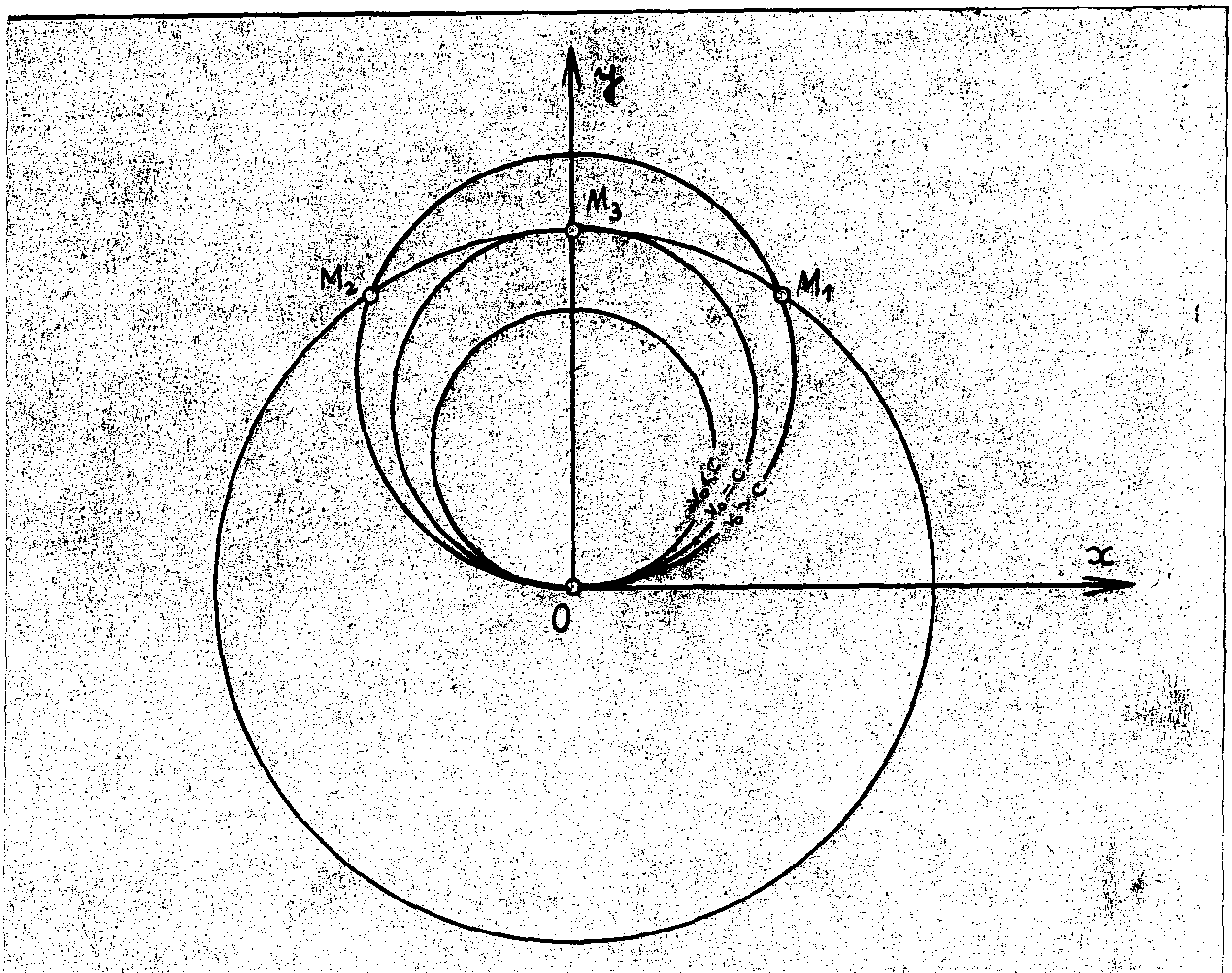
$$\sin\theta_p = c/v. \tag{9.8}$$

Odavde se vidi ovo: ako je $v > c$, imamo dva rešenja, tj. putanja projektila preseca putanju cilja u dve tačke; ako je $c = v$, imamo jednu tačku za $\theta_p = \pi/2$; ako je $v < c$, jednačina (9.8) nema realnih rešenja, pa projektil ne može uopšte pogoditi cilj, kao što se, uostalom, može videti i sa slike 11.

Vreme, potrebno projektilu da stigne cilj, od trenutka kada on počinje svoje kretanje do trenutka kada stigne cilj, dato je, zbog veze (9.1), izrazom

$$T = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{a}{v}\right). \tag{9.9}$$

U prirodi se ovaj problem javlja kod odredjivanja trajektorije projektila, koji polazi sa Zemlje da bi stigao na Mesec, vodjen po potegu, pošto je ovde λ tako malo da granični slučaj $\lambda = 0$ predstavlja zaista dobru aproksimaciju rešenja stvarnog problema. Nažalost, ovo je za sada neizvodljivo, jer bi raketni projektil morao tokom celog puta trošiti gorivo (radi održavanja projektila na unapred datoj putanji), što je, s obzirom na goriva kojima se danas raspolaže, još uvek nemoguće.



Slika 11.

10. DRUGA APROKSIMACIJA.- Pretpostavimo sada da je parametar λ različit od nule, ali toliko mali da funkciju $U(\theta)$ na desnoj strani diferencijalne jednačine (3.9) datu izrazom (3.10), možemo razviti u red po stepenima od λ i zanemariti kvadrat i više stepene od λ. Kako je onda

$$U(\theta) \sim k(1 - \lambda \sin\theta), \quad U^2(\theta) \sim k^2(1 - 2\lambda \sin\theta + \lambda^2 \sin^2\theta),$$

gde smo sa k označili veličinu v/ω, to rešenje ove jednačine možemo takodje dobiti u obliku

$$r = f(\theta) + \lambda\varphi(\theta) + \lambda^2\psi(\theta). \tag{10.1}$$

Ako izraz (10.1) diferenciramo po θ dobićemo

$$\frac{dr}{d\theta} = f'(\theta) + \lambda\varphi'(\theta) + \lambda^2\psi'(\theta). \tag{10.2}$$

Unesemo li sada (10.1) i (10.2) u jednačinu (3.9), pa zanemarimo sve članove sa stepenom od λ višim od drugog, onda za odredjivanje nepoznatih funkcija $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ i $\psi(\theta)$ dobivamo ove diferencijalne jednačine

$$\left.\begin{aligned} &f'^2(\theta) + f^2(\theta) = k^2, \\ &f'(\theta).\varphi'(\theta) + f(\theta).\varphi(\theta) = -k^2\sin\theta, \\ &2f'(\theta).\psi'(\theta) + 2f(\theta).\psi(\theta) + \varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta) = k^2\sin^2\theta. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Prva jednačina odgovara diferencijalnoj jednačini (4.1) i njeno rešenje je $f(\theta) = k.\sin(\theta + C_1)$, gde je C_1 integraciona konstanta. Ako pretpostavimo da projektil polazi iz koordinatnog početka (tačka A), onda je za $\theta_0 = 0$ i $r_0 = 0$, pa treba da bude i $f(\theta_0) = f(0) = 0$, odakle je $C_1 = 0$, pa je

$$f(\theta) = k.\sin\theta. \tag{10.4}$$

Kako je dalje $f'(\theta) = k.\cos\theta$, to se za odredjivanje funkcije $\varphi(\theta)$ dobiva linearna diferencijalna jednačina prvog reda, čije je rešenje, zbog $\varphi(\theta_0) = \varphi(0) = 0$,

$$\varphi(\theta) = -k(1 - \cos\theta). \tag{10.5}$$

Dalje se zbog $\varphi'(\theta) = -k.\sin\theta$, iz treće jednačine (10.3) dobiva za odredjivanje funkcije $\psi(\theta)$ opet linearna diferencijalna jednačina prvog reda, čiji je integral, pod uslovom $(0) = 0$ za $\theta_0 = 0$,

$$\psi(\theta) = -\frac{k}{2}(\sin\theta + \theta.\cos\theta) + k.\cos\theta.\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{10.6}$$

Ako se sada zaustavimo na prva dva člana, naime

$$r = k\left[\sin\theta - \lambda(1 - \cos\theta)\right], \tag{10.7}$$

tj.

$$r = 2k.\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{10.8}$$

onda je član koji se zanemaruje $\lambda^2\psi(\theta)$. Maksimalna apsolutna vrednost funkcije $\psi(\theta)$ u intervalu $(0, \pi/2)$ je

$|\mathrm{Max}\ \psi(\theta)| = \frac{k}{2}$ za $\theta = \pi/2$. Prema tome najveća vrednost trećeg člana, koji se u izrazu za $\underline{r}$ zanemaruje, iznosi $\lambda^2 k/2 = \lambda^2 v/2\omega$, gde je $\underline{v}$ brzina projektila. Kako postoji izraz za ω (3.2), to je

$$\frac{{}^2k}{2} = \frac{\lambda^2 v . 10^3}{2{,}484\,\lambda^{3/2}} = 403 v \sqrt{\lambda}\,,$$

pri čemu je brzina projektila data u km/sec. Medjutim, da bi projektil mogao da pogodi cilj mora biti $v > c = 7{,}91\sqrt{\lambda}$ km/sec, pa zato mora biti $\lambda^2 k/2 \geqq 3185\,\lambda$ km. Dakle, maksimalna vrednost izraza koji se zanemaruje iznosi $3185\,\lambda$ km. U slučaju kad je cilj Mesec, imamo $\lambda = 1/60$, pa bi greška u najgorem slučaju iznosila 53 km, što je, s obzirom na veličinu cilja, dovoljno dobra aproksimacija, čak i u ovom, najnepovoljnijem slučaju, za $\theta = \pi/2$. Za sve vrednosti ugla $\underline{\theta}$, manje od $\pi/2$ greška je daleko manja, na primer za $\theta = \pi/4$ je

$$|\psi(\theta)| = 0{,}006k,$$

pa je

$$|\mathrm{Max}\ \lambda^2 \psi(\theta)| \geqq 38{,}2\ \lambda\ \mathrm{km},$$

što u slučaju Meseca daje grešku od 640 m, a ovo je više nego dovoljna tačnost.

V - SLUČAJ KADA JE PARAMETAR λ BLIZAK JEDINICI

11.- Vratimo se izrazu (3.10) za $U(\theta)$ i stavimo $\lambda = 1 - \varepsilon$, gde je ε mala veličina. Tada je

$$U(\theta) = k\left[1 - \frac{(1-\varepsilon)\sin\theta}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2\cos^2\theta}}\right] = k\left[1 - F(\varepsilon)\right].$$

Napišimo izraz za $F(\varepsilon)$ u obliku

$$F^2(\varepsilon).(\sin^2\theta + 2\varepsilon\cos^2\theta - \varepsilon^2\cos^2\theta) = \sin^2\theta - 2\varepsilon\sin^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta.$$

Po Taylor-ovoj formuli je

$$F(\varepsilon) = F(0) + \varepsilon F'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}F''(0) + \ldots .$$

gde su $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, ... vrednosti funkcije $F(\varepsilon)$ i njenih izveda za vrednost $\varepsilon = 0$. Ako se zaustavimo na članu sa drugim stepenom veličine ε i izračunamo ove izvode, dobićemo

$$F(0) = 1,\ F'(0) = -\frac{1}{\sin^2\theta},\ F''(0) = 3\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}.$$

Funkcija $U(\theta)$ tada postaje

$$U(\theta) = k\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\varepsilon - \frac{3.\cos^2\theta}{2.\sin^4\theta}\varepsilon^2\right),$$

a njen kvadrat, sa istim stepenom tačnosti, je

$$U^2(\theta) = k^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta}\varepsilon^2 - 3\frac{\cos^2\theta}{\sin^6\theta}\varepsilon^3\right), \qquad (11.1)$$

gde smo, zbog odredjivanja greške, uzeli član i uz ε^3.

Potražimo sada rešenje diferencijalne jednačine (3.9) u obliku

$$r = \varepsilon A(\theta) + \varepsilon^2 B(\theta); \qquad (11.2)$$

za odredjivanje nepoznatih funkcija $A(\theta)$ i $B(\theta)$ dobivamo jednačine:

$$A'^2(\theta) + A^2(\theta) = \frac{k^2}{\sin^4\theta},\ A'(\theta)B'(\theta) + A(\theta)B(\theta) = -\frac{3\cos^2\theta}{2\sin^6\theta}k^2. \qquad (11.3)$$

Iz jednačina (11.1) i (11.2) vidimo sledeće:

1) ceo postupak se može sprovesti samo ako je ugao $\underline{\theta}$ blizu vrednosti $\pi/2$. Za male vrednosti ugla θ, bliske nuli, članovi uz ε i ε^2 dobivaju velike vrednosti i uvećavaju se beskonačno kad $\theta \to 0$.

2) Prva jednačina (11.3), smenom $\theta = \pi/2 - \theta'$, svodi se na diferencijalnu jednačinu (3.9), slučaj iz odeljka III. Rešavanje ovog slučaja dato je u parametarskom obliku jednačinama (8.10), gde umesto veličine $\underline{A}$ treba staviti $\underline{k}$.

3) Već aproksimacija sa $r = \varepsilon A(\theta)$ istog je reda s obzirom na ε kao aproksimacija u 10. s obzirom na λ. Zato ćemo se zaustaviti samo na toj aproksimaciji.

L i t e r a t u r a :

1. A.S. Locke: Guidance, D.van Nostrand Co, 1955

2. J.J. Jerger: SYSTEMS PRELIMINARY DESIGN. PRINCIPLES OF GUIDED MISSILE DESIGN. D.van Nostrand Co,1960

3. A.E. Puckett-S.Ramo: GUIDED MISSILE ENGINEERING, McGraw-Hill, 1959

4. R.B. Dow: FUNDAMENTALS OF ADNAVCED MISSILES, J.Wiley,1958

5. H.S. Seifert: SPACE TECHNOLOGY, J.Wiley, 1959

S a d r ž a j :